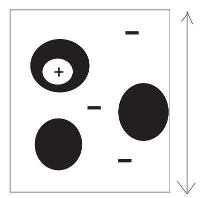
§ 8 Уравнения пороупругости: случай слабо-вязких жидкостей

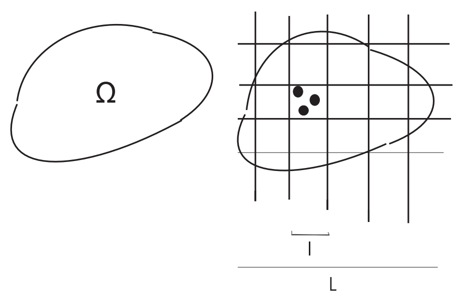
Рассмотрим малые колебания смеси, состоящей из упругого скелета пористого тела и вязкой жидкости. В твердой части смеси выполняются уравнения упругости

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda^s \epsilon^u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^s\epsilon^u_{ij}, \quad \epsilon^u_{ij} \equiv \epsilon_{ij}(u) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \rho = \rho^s = \text{const}.$$



Здесь $\mathbf{u}$ - вектор перемещения, ϵ^u - тензор малых деформаций, σ - тензор напряжений, ρ - плотность, λ^s и μ^s - постоянные коэффициенты Ламе, $\mathbf{f}(t)$ - плотность внешних массовых сил.



В жидкой части справедливы уравнения

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad \sigma_{ij} = \left(-p + \lambda^f\frac{\partial \epsilon^u_{kk}}{\partial t}\right)\delta_{ij} + 2\mu^f\frac{\partial \epsilon^u_{ij}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$p = -c^2\rho\epsilon^u_{kk}, \quad \rho = \rho^f = \text{const}. \tag{3}$$

Здесь постоянная c - скорость звука, соответствующая значению плотности ρ^f, p - отклонение давления от величины $p^f = c^2\rho^f$, постоянные

λ^f и μ^f - коэффициенты вязкости. Уравнение (6) получается путём интегрирования по времени линеаризованного уравнения неразрывности $\partial_t(\rho - \rho^f) = -\rho^f \operatorname{div} \partial_t \mathbf{u}$ для отклонения плотности от начального состояния покоящейся жидкости. Действительно, (6) следует из равенств $\rho - \rho^f = -\rho^f \operatorname{div} \mathbf{u}$ и $p = -c^2(\rho - \rho^f)$.

Перемещения и вектор нормального напряжения непрерывны на границе раздела твердой и жидкой фаз:

$$[u_i] = 0, \quad [\sigma_{ij} n_j] = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ - вектор нормали к поверхности раздела, скобки $[F]$ обозначают скачок какой-либо величины F, терпящей разрыв на поверхности раздела.

Для простоты уравнения (1)-(6) рассматриваются во всём пространстве с нулевыми начальными данными

$$\mathbf{u} = \partial \mathbf{u}/\partial t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Далее предполагается, что пористое пространство имеет периодическую структуру, т. е. состоит из одинаковых кубов с ребром l, и каждый куб получается сжатием единичного куба $Y = \{0 < y_i < 1\} \subset \mathbb{R}^3$, который состоит из твердой и жидкой частей Y_s и Y_f, $Y = Y_s \cup Y_f$.

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad t'_i = \frac{t}{\tau}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{p_0}, \quad f'_i = \frac{f_i}{f_0}.$$

в которых знаменатели представляют собой характерные значения соответствующих параметров. Система

$$\left(\frac{\rho^s L^2}{p_0 \tau^2}\right)_1 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t'^2} = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x'_j} + \left(\frac{\rho^s L f_0}{p_0}\right)_2 f'_i, \tag{5}$$

$$\sigma'_{ij} = \left(\frac{\lambda^s}{p_0}\right)_3 \epsilon^{u'}_{kk} \delta_{ij} + 2\left(\frac{\mu^s}{p_0}\right)_4 \epsilon^{u'}_{ij}, \quad \epsilon^{u'}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i}\right),$$

есть безразмерная форма уравнений упругости (1). Безразмерные уравнения в жидкой части записываются следующим образом:

$$\left(\frac{\rho^f L^2}{p_0 \tau^2}\right)_5 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t'^2} = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x'_j} + \left(\frac{\rho^f L f_0}{p_0}\right)_6 f'_i, \tag{6}$$

$$\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij} + \left(\frac{\lambda^f}{p_0\tau}\right)_7 \frac{\partial \epsilon^{u'}_{kk}}{\partial t'}\delta_{ij} + 2\left(\frac{\mu^f}{p_0\tau}\right)_8 \frac{\partial \epsilon^{u'}_{ij}}{\partial t'}, \quad p' = -\left(\frac{c^2\rho^f}{p_0}\right)_9 \epsilon^{u'}_{kk}.$$

Проведем асимптотический анализ системы (5), (6) в предположении, что $\delta \equiv l/L$ - малый параметр. Рассмотрим случай слабо вязких жидкостей. Более точно, примем следующую гипотезу относительно безразмерных параметров $(\cdots)_i$:

$$a_i \equiv (\cdots)_i \approx \delta^{n_i}, \quad n_7 = n_8 = 2, \quad n_i = 0 \quad \text{для остальных} \quad i.$$

Обозначим $a_7 = \delta^2\bar{a}_7$, $a_8 = \delta^2\bar{a}_8$.

Пусть $1_f(y)$ - определенная на единичном кубе Y характеристическая функция множества Y_f. Аналогично вводится функция $1_s(y) = 1 - 1_f(y)$. Будем считать эти функции продолженными периодически на все пространство $\mathbb{R}^3$. Очевидно, функция $1^\delta_f(x') = 1_f(x'/\delta)$ периодическая с периодом δ.

Опуская штрихи, запишем систему (5), (6) как тензорное равенство

$$\rho^\delta \mathbf{u}_{tt} = \operatorname{div}\sigma + \mathbf{f}^\delta, \quad p = -a_9 1^\delta_f \operatorname{tr}(\epsilon^u), \tag{7}$$

где

$$\sigma = \left(a_3 1^\delta_s \operatorname{tr}(\epsilon^u) - p1^\delta_f + \delta^2\bar{a}_7 1^\delta_f \frac{\partial \operatorname{tr}(\epsilon^u)}{\partial t}\right) I + a_4 1^\delta_s \epsilon^u + \delta^2 \bar{a}_8 1^\delta_f \frac{\partial}{\partial t}\epsilon^u,$$

$$\rho^\delta(x) = \tilde{\rho}(y)|_{y=x/\delta}, \quad \tilde{\rho}(y) \equiv a_5 1_f(y) + a_1 1_s(y),$$
$$\mathbf{f}^\delta(t,x) = \tilde{\mathbf{f}}(t,y) \equiv (a_6 1_f(y) + a_2 1_s(y))\,\mathbf{f}(t).$$

Первое уравнение этой системы выполняется в смысле теории распределений, т. е. как интегральное равенство

$$\int \rho^\delta \mathbf{u}_{tt}\cdot\varphi + \sigma : \epsilon^\varphi - \mathbf{f}^\delta\cdot\varphi \quad dx = 0, \tag{8}$$

справедливое для любой гладкой векторной функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$, равной нулю вне какого-либо шара. Здесь и далее принято обозначение для скалярных произведений векторов и матриц

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_i v_i, \quad \sigma : \epsilon = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}.$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t,x) &= \left(\mathbf{u}^0(t,x) + \mathbf{u}^r(t,x,y) + \delta\mathbf{u}^1(t,x,y) + o(\delta)\right)|_{y=x/\delta} \\ p(t,x) &= \left(p^0(t,x) + \delta p^1(t,x,y) + o(\delta)\right)|_{y=x/\delta} dx.\end{aligned} \tag{9}$$

где все функции зависят от каждой переменной y_i периодически с периодом 1. Предполагается, что $\mathbf{u}^r|_{y\in Y_s} = 0$.

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u^i(x,y)|_{y=x/\delta}\right) = u^i_{x_j}(x,x/\delta) + \frac{1}{\delta}u^i_{y_j}(x,x/\delta),\ \epsilon(u(x,y)|_{y=x/\delta}) = \epsilon^u_x + \frac{1}{\delta}\epsilon^u_y,$$

подставим ряды (9) в уравнение $(7)_2$ и приравняем коэффициенты при степенях δ^{-1} и δ^0. В результате получим равенства

$$\mathrm{div}_y\mathbf{u}^r = 0, \quad p^0 = -a_9 1_f(y)\left(\mathrm{div}_x(\mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^r) + \mathrm{div}_y\mathbf{u}^1\right). \tag{10}$$

Возьмём в качестве тестовых функций в равенстве (8) следующие функции:

$$\varphi(x) = \left(\varphi^0(x) + \varphi^r(x,y) + \delta\varphi^1(x,y)\right)|_{y=x/\delta}, \quad \mathrm{div}_y\,\varphi^r = 0, \quad \varphi^r|_{y\in Y_s} = 0, \tag{11}$$

где $\varphi^r(x,y)$, $\varphi^1(x,y)$ - периодические функции по каждой переменной y_i. Подставим ряды (9) и тестовую функцию (11) в (8). В результате получим равенство

$$(\cdots)_0 + \delta(\cdots)_1 + o(\delta) = 0.$$

Приравнивая коэффициент $(\cdots)_0$ нулю, получим уравнение

$$\int \tilde{\rho}(y)\left(\mathbf{u}^0_{tt}(t,x) + \mathbf{u}^r_{tt}(t,x,y)\right)\cdot\left(\varphi^0(x) + \varphi^r(x,y)\right)dx = \tag{12}$$

$$-\int a_3 1_s(y)\left\{\mathrm{div}_x\mathbf{u}^0(t,x) + \mathrm{div}_y\mathbf{u}^1(t,x,y)\right\}\left\{\mathrm{div}_x\varphi^0(x) + \mathrm{div}_y\varphi^1(x,y)\right\}dx$$

$$-\int a_4 1_s(y)\left\{\epsilon_x(\mathbf{u}^0)(t,x) + \epsilon_y(\mathbf{u}^1)(t,x,y)\right\} : \left\{\epsilon_x(\varphi^0)(x) + \epsilon_y(\varphi^1)(x,y)\right\}dx$$

$$+\int p^0(t,x)1_f(y)\left\{\mathrm{div}_x(\varphi^0(t,x) + \varphi^r(t,x,y)) + \mathrm{div}_y\varphi^1(t,x,y)\right\}dx$$

$$-\int \bar{a}_8 1_f(y)\epsilon_y(\mathbf{u}^r_t)(t,x,y) : \epsilon_y(\varphi^r)(x,y)dx + \int \tilde{\mathbf{f}}(t,y)\cdot(\varphi^0(x)+\varphi^r(x,y))dx.$$

Заметим, что переменная y в этом равенстве принимает значение x/δ.

Положим в (12) $\varphi^0=\varphi^1=0$, $\varphi^r=\theta(x)\omega^r(y)$, где $\omega^r(y)$ периодическая по $y\in Y$ и

$$\omega^r|_{y\in Y_s}=0,\quad \mathrm{div}_y\omega^r=0,\quad \theta\in\mathcal{D}(\Omega), \tag{13}$$

где Ω - какая-либо ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Далее будет использоваться тот факт, что функция θ из множества $\mathcal{D}(\Omega)$ является гладкой и равной нулю вне Ω . Перейдем в равенстве (12) к пределу при $\delta\to 0$, воспользовавшись следующим свойством:

$$\int\limits_\Omega F(x,y)|_{y=x/\delta}dx \to \int\limits_\Omega\int\limits_Y F(x,y)dxdy \tag{14}$$

для любой функции $F(x,y)$, которая является периодической по каждой переменной y_i с периодом 1. В результате получим уравнение

$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y \tilde{\rho}\left(\mathbf{u}^0_{tt}+\mathbf{u}^r_{tt}\right)\cdot\theta\omega^r - p^0\omega^r 1_f \mathrm{div}_x\theta + \theta\bar{a}_8 1_f\epsilon_y(\mathbf{u}^r_t) : \epsilon_y(\omega^r)\,dxdy =$$

$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y \tilde{\mathbf{f}}\theta\omega^r\,dxdy.$$

Так как функция $\theta(x)$ произвольна, то справедливо соотношение

$$\int\limits_{Y_f}\omega^r\{a_5(\mathbf{u}^0_{tt}+\mathbf{u}^r_{tt})+\nabla_x p^0 - a_6\mathbf{f}\} + \bar{a}_8\epsilon_y(u^r_t) : \epsilon_y(\omega^r)\,dy = 0. \tag{15}$$

В силу свойств (13) функции $\omega^r(y)$ найдется скалярная функция $Q(t,x,y)$, периодическая по y и такая, что относительное перемещение $\mathbf{u}^r(t,x,y)$ удовлетворяет следующему уравнению в жидкой части Y_f представительной ячейки Y:

$$a_5\mathbf{u}^r_{tt} = -\nabla_y Q + \bar{a}_8\Delta_y\mathbf{u}^r_t + \mathbf{g}(t,x),\quad \mathrm{div}_y\mathbf{u}^r=0,\quad \mathbf{u}^r|_{\partial Y_f, t=0}=0, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{g} = -a_5\mathbf{u}^0_{tt} - \nabla_x p^0 + a_6\mathbf{f} \equiv g_i\mathbf{e}_i.$$

Рассмотрим задачу (18) в рамках теории уравнения Навье-Стокса. Будем считать область Y_f односвязной. В гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2(Y_f)$ состоящем из вектор-функций $\mathbf{u}(y)$ со скалярным произведением

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv \int\limits_{Y_f} u_i(y) v_i(y) dy,$$

рассмотрим подпространство $\mathbf{J}$, получающееся замыканием множества гладких функций, таких что

$$\operatorname{div}_y \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial Y_f} = 0, \quad \mathbf{u} \text{ - периодическая.} \tag{17}$$

Пусть $\mathbf{G}$ - ортогональное дополнение к $\mathbf{J}$, $\mathbf{L}^2(Y_f) = \mathbf{J} \oplus \mathbf{G}$, и $\mathbb{P}$ - оператор проектирования $\mathbf{L}^2(Y_f)$ на $\mathbf{J}$. В случае, когда поры изолированы, т. е. область Y_f содержится строго внутри куба Y, известно, что каждая вектор-функция из $\mathbf{G}$ представляется градиентом какой-либо скалярной функции. В таком случае $\mathbb{P}\mathbf{e}_i = 0$, поскольку $\mathbf{e}_i = \nabla y_i$ и в силу (17) имеет место равенство $\int_{Y_f} \mathbf{u} \cdot \nabla y_i dy = 0$.

В общем случае,

$$G = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \nabla q, \quad q \in W^{1,2}(Y_f), \quad q - \text{периодическая}\},$$

поэтому $\mathbb{P}\mathbf{e}_i$ есть вектор-функция, отличная от нуля. Рассмотрим гидродинамическую микро-задачу на ячейке для периодических (по y) вектор-функции $\overrightarrow{\lambda}^i(t, y)$ и скалярной функции $q^i(t, y)$:

$$a_5 \overrightarrow{\lambda}^i_t = -\nabla_y q^i + \bar{a}_8 \Delta_y \overrightarrow{\lambda}^i, \quad \operatorname{div}_y \overrightarrow{\lambda}^i = 0, \quad \overrightarrow{\lambda}^i|_{\partial Y_f} = 0, \quad \overrightarrow{\lambda}^i|_{t=0} = \frac{\mathbb{P}\mathbf{e}_i(y)}{a_5}. \tag{18}$$

Докажем, что справедливо представление

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^r_t(t, x, y) = \int\limits_0^t \overrightarrow{\lambda}^i(t-s, y) g_i(s) ds \equiv \\ \int\limits_0^t \overrightarrow{\lambda}^i(t-s, y) \left(-a_5 u^0_{itt}(s, x) - p^0_{x_i}(s, x) + a_6 f_i(s)\right) ds.\end{gathered} \tag{19}$$

Введем оператор $A = -\mathbb{P}\Delta$. Он имеет систему собственных функций $\{\mathbf{v}_k\}$, $A\mathbf{v}_k = \sigma_k \mathbf{v}_k$, которые образуют базис в пространстве $\mathbf{J}$. Так как

$\mathbb{P}\nabla_y q = 0$ для периодической функции q, то в терминах оператора A задачи (16) и (18) записываются как операторные уравнения

$$a_5 \mathbf{u}^r_{tt} = -\bar{a}_8 A \mathbf{u}^r_t + \mathbb{P}\mathbf{g}, \quad \mathbf{u}^r|_{t=0} = 0, \tag{20}$$

$$a_5 \overrightarrow{\lambda}^i_t = -\bar{a}_8 A \overrightarrow{\lambda}^i, \;\; \overrightarrow{\lambda}^i|_{t=0} = \mathbb{P}\mathbf{e}_i(y)/a_5. \tag{21}$$

Сначала построим решение задачи (21). Пусть вектор $\mathbb{P}\mathbf{e}_i(y)/a_5$ дается следующим разложением по базису:

$$\frac{\mathbb{P}\mathbf{e}_i(y)}{a_5} = \sum_{k=1}^{\infty} e^i_k \mathbf{v}_k(y).$$

Будем искать решением $\overrightarrow{\lambda}^i$ в виде

$$\overrightarrow{\lambda}^i(t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c^i_k(t)\mathbf{v}_k(y)$$

с неизвестными скалярными функциями $c^i_k(t)$. Операторное уравнение(21) эквивалентно скалярному уравнению $a_5 \dot{c}^i_k = -\overline{a}_8 \sigma_k c^i_k$, поэтому решение задачи (21) дается формулой

$$\overrightarrow{\lambda}^i(t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^i_k e^{-t\overline{a}_8\sigma_k/a_5}\mathbf{v}_k(y). \tag{22}$$

Теперь непосредственной подстановкой проверяется, что правая часть равенства (19) является решением задачи (20).

Заметим, что $e^i_k = 0$ в случае изолированных пор, поэтому $\overrightarrow{\lambda}^i(t,y) = 0$ и $\mathbf{u}^r(t,x,y) = 0$.

Положим в (12) $\varphi^0 = \varphi^r = 0$, $\varphi^1 = \theta(x)\omega^1(y)|_{y=x/\delta}$, где θ - та же функция, что и в условиях (13) и ω^1 - периодическая вектор - функция. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим уравнение

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{Y_s} \theta(x)\Big\{a_3(\mathrm{div}_x \mathbf{u}^0 + \mathrm{div}_y \mathbf{u}^1)\mathrm{div}_y \omega^1 + a_4\left(\epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{u}^1)\right) : \epsilon_y(\omega^1)\Big\}dxdy$$

$$= \int\limits_{\Omega}\theta(x)p^0(t,x)dx\int\limits_{Y_f}\mathrm{div}_y\omega^1 dy = -\int\limits_{\Omega}\theta(x)p^0(t,x)dx\int\limits_{Y_s}\mathrm{div}_y\omega^1 dy.$$

Последнее равенство выполняется в силу периодичности функции $\omega^1(y)$. Действительно,

$$0 = \int\limits_{Y} \mathrm{div}_y \omega^1 dy = \int\limits_{Y_f} \mathrm{div}_y \omega^1 dy + \int\limits_{Y_s} \mathrm{div}_y \omega^1 dy. \tag{23}$$

Так как функция $\theta(x)$ произвольна, то

$$\int\limits_{Y_s} (a_3 \mathrm{div}_x \mathbf{u}^0 + a_3 \mathrm{div}_y \mathbf{u}^1 + p^0) \mathrm{div}_y \omega^1 + a_4 \left(\epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{u}^1)\right) : \epsilon_y(\omega^1) dy = 0.$$

Это равенство допускает другую запись

$$\int\limits_{Y_s} \left(\mathcal{F}(U) + p^0 I\right) : \epsilon_y(\omega^1) dy = 0, \tag{24}$$

если ввости обозначения

$$U = \epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{u}^1), \quad \mathcal{F}(U) = a_3 \mathrm{tr}(U) I + a_4 U.$$

Интегрируя по частям, из (24) получаем

$$-\int\limits_{Y_s} \omega^1 \cdot \mathrm{div}_y \, \mathcal{F}(U) dy + \int\limits_{\partial Y_s} \omega^1 \cdot (\mathcal{F}(U) + p^0 I) \langle \mathbf{n} \rangle d\sigma = 0,$$

где $\mathbf{n}$ - вектор внешней нормали к твердой поверхности. Так как функция $\omega^1(y)$ произвольна, то $\mathbf{u}^1$ является решением следующей краевой задачи в твёрдой области:

$$\mathrm{div}_y \, \mathcal{F}(U)|_{Y_s} = 0, \quad \left(\mathcal{F}(U) + p^0 I\right) \langle \mathbf{n} \rangle|_{\partial Y_s} = 0. \tag{25}$$

Функция $\mathbf{u}^1$ допускает представление $\mathbf{u}^1 = \mathbf{z}^1 + \mathbf{v}^1$, где функциии $\mathbf{z}^1$ и $\mathbf{w}^1$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\mathrm{div}_y \, \mathcal{F}(\epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{z}^1))|_{Y_s} = 0, \quad \left(\mathcal{F}(\epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{z}^1))\right) \langle \mathbf{n} \rangle|_{\partial Y_s} = 0, \tag{26}$$

$$\mathrm{div}_y \, \mathcal{F}(\epsilon_y(\mathbf{v}^1))|_{Y_s} = 0, \quad \left(\mathcal{F}(\epsilon_y(\mathbf{v}^1)) + p^0 I\right) \langle \mathbf{n} \rangle|_{\partial Y_s} = 0. \tag{27}$$

Пользуясь методом разделения переменных, будем искать $\mathbf{z}^1$ в виде

$$\mathbf{z}^1 = \epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij} \mathbf{w}^{ij}(y),$$

где $\mathbf{w}^{ij}(y)$ - периодическая вектор - функция. Справедливо представление

$$\epsilon_x(\mathbf{u}^0) = \epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij}\frac{\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i}{2} \equiv \epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij}E_{ij},$$

где $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ - тензорное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. тензор, матрица которого равна $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. Поэтому

$$\epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij}\mathrm{div}_y\,\mathcal{F}(E_{ij}+\epsilon_y(\mathbf{w}^{ij}))|_{Y_s} = 0, \quad \epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij}\left(\mathcal{F}(E_{ij}+\epsilon_y(\mathbf{w}^{ij}))\right)\langle\mathbf{n}\rangle|v_{\partial Y_s} = 0.$$

Таким образом, приходим к первой микро-задаче в твёрдой части ячейки Y_s для периодической вектор-функции $\mathbf{w}^{ij}(y)$:

$$\mathrm{div}_y\,\mathcal{F}(E_{ij}+\epsilon_y(\mathbf{w}^{ij})) = 0, \quad \left(\mathcal{F}(E_{ij}+\epsilon_y(\mathbf{w}^{ij}))\right)\langle\mathbf{n}\rangle|_{\partial Y_s} = 0, \quad \int\limits_{Y_s}\mathbf{w}^{ij}(y) = 0. \tag{28}$$

Аналогично, представляя $\mathbf{v}^1$ в виде $\mathbf{v}^1 = p^0\mathbf{w}^0(y)$, приходим ко второй микро-задаче в твёрдой части ячейки Y_s для периодической вектор - функции $\mathbf{w}^0(y)$:

$$\mathrm{div}_y\,\mathcal{F}(\epsilon_y(\mathbf{w}^0)) = 0, \quad \left(\mathcal{F}(\epsilon_y(\mathbf{w}^0))\right)\langle\mathbf{n}\rangle|_{\partial Y_s} = -\mathbf{n}, \quad \int\limits_{Y_s}\mathbf{w}^0(y) = 0. \tag{29}$$

Получим макро-уравнения для усредненных функций

$$\overline{u}^r(t,x) = \int\limits_Y u^r(t,x,y)dy, \quad \overline{u}(t,x)\equiv u^0(t,x), \quad \overline{p}(t,x)\equiv p^0(t,x),$$

используя знак $\bar{\cdot}$ для интегрирования по единичному кубу Y. Обозначим $\Phi_f = \int_Y 1_f(y)dy$, $\Phi_s = 1-\Phi_f$; здесь Φ_f - пористость.

Положим в (12) тестовые функции равными $\varphi^r = \varphi^1 = 0$, $\varphi^0 = \theta(x)$, где θ удовлетворяет условию (13). Устремляя δ к нулю, приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega \theta\cdot\{(a_5\Phi_f + a_1\Phi_s)\overline{\mathbf{u}}_{tt} + a_1\overline{\mathbf{u}}^r_{tt}\}\,dx =$$

$$-\int\limits_\Omega\int\limits_Y \epsilon_x(\theta) : \left\{a_3 1_s(y)\left[\mathrm{div}_x\mathbf{u}^0 + \mathrm{div}_y\mathbf{u}^1\right]I + a_4 1_s(y)\left[\epsilon_x(\mathbf{u}^0)+\epsilon_y(\mathbf{u}^1)\right]\right\}dxdy$$

$$+\int_{\Omega} \overline{p}\Phi_f \mathrm{div}_x \theta dx + \int_{\Omega} (a_6\Phi_f + a_2\Phi_s)\mathbf{f}\theta dx.$$

С помощью интегрирования по частям это равенство записывается следующим образом $\int_\Omega \theta(\cdots)_2 dx = 0$. Так как функция $\theta(x)$ произвольна, то $(\dots)_2 = 0$, т. е.

$$(a_5\Phi_f + a_1\Phi_s)\overline{\mathbf{u}}_{tt} + a_1\overline{\mathbf{u}}^r_{tt} = \mathrm{div}_x\, \overline{\sigma} + (a_6\Phi_f + a_2\Phi_s)\mathbf{f}, \tag{30}$$

где

$$\overline{\sigma} = \int_{Y} a_3 1_s(y) \left[\mathrm{div}_x \mathbf{u}^0 + \mathrm{div}_y \mathbf{u}^1\right] I + a_4 1_s(y) \left[\epsilon_x(\mathbf{u}^0) + \epsilon_y(\mathbf{u}^1)\right] - \overline{p}\Phi_f I \quad dy.$$

Уравнение (30) есть макроскопический закон изменения импульса. С помощью представления

$$\mathbf{u}^1 = \epsilon_x(\mathbf{u}^0)_{ij}\mathbf{w}^{ij}(y) + p^0\mathbf{w}^0(y), \tag{31}$$

имеем

$$\overline{\sigma} = \epsilon(\overline{\mathbf{u}})_{ij} A_{ij} + \overline{p}B, \tag{32}$$

где

$$A_{ij} = \int_{Y_s} \mathcal{F}(E_{ij} + \epsilon_y(\mathbf{w}^{ij}))dy, \quad B = \int_{Y_s} \mathcal{F}(\epsilon_y(\mathbf{w}^0)) - \Phi_f I dy. \tag{33}$$

Получим макро-уравнение для давления. В силу периодичности для функции $\mathbf{u}^1$ справедливо соотношение (23), поэтому интегрирование уравнения $(10)_2$ по переменной y приводит к макроскопическому закону сохранения массы

$$\alpha\overline{p} + a_9 \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}^r + a_9\epsilon(\overline{\mathbf{u}}) : C = 0, \tag{34}$$

где

$$C_{ij} = \int_{Y_s} \mathrm{div}_y \mathbf{w}^{ij} dy - \Phi_f \delta_{ij}, \quad \alpha = 1 - a_9 \int_{Y_s} \mathrm{div}_y \mathbf{w}^0 dy. \tag{35}$$

Наконец, проинтегрируем равенство (19) по переменной y. В результате получим макроскопическое уравнение, подобное закону Дарси

$$\overline{\mathbf{u}}^r_t(t,x) = -\int_0^t \Lambda(t-s)\langle a_5\overline{\mathbf{u}}_{tt}(s,x) + \nabla\overline{p}(s,x) - a_6\mathbf{f}(s)\rangle ds, \tag{36}$$

где тензор проницаемости $\Lambda(t)$ определяется формулой

$$\Lambda(t) = \int\limits_{Y_f} \overrightarrow{\lambda}^i(t,y) \otimes \mathbf{e}_i \, dy. \tag{37}$$

Таким образом, гомогенизированная пороупругая среда описывается системой макро-уравнений

$$(a_5\Phi_f + a_1\Phi_s)\overline{\mathbf{u}}_{tt} + a_1\overline{\mathbf{u}}^r_{tt} = \operatorname{div}\overline{\sigma} + (a_6\Phi_f + a_2\Phi_s)\mathbf{f}, \tag{38}$$

$$\overline{\mathbf{u}}^r_t(t,x) = -\int\limits_0^t \Lambda(t-s)\langle a_5\overline{\mathbf{u}}_{tt}(s,x) + \nabla\overline{p}(s,x) - a_6\mathbf{f}(s)\rangle ds, \tag{39}$$

$$\alpha\overline{p} + a_9\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}^r + a_9\epsilon(\overline{\mathbf{u}}) : C = 0, \quad \overline{\sigma} = \epsilon(\overline{\mathbf{u}})_{ij}A_{ij} + \overline{p}B. \tag{40}$$

Макро-параметры $\Lambda, \alpha, C, A_{ij}, B$ определяются путём решения микро-уравнений (18), (28), (29).

Если характерное давление в жидкости p_0 выбрать равным $c^2\rho_f$, то в размерных переменных макро-уравнения записываются следующим образом:

$$(\rho_f\Phi_f + \rho_s\Phi_s)\overline{\mathbf{u}}_{tt} + \rho_s\overline{\mathbf{u}}^r_{tt} = \operatorname{div}\overline{\sigma} + (\rho_f\Phi_f + \rho_s\Phi_s)\mathbf{f}, \tag{41}$$

$$\overline{\mathbf{u}}^r_t(t,x) = -\int\limits_0^t \Lambda^h(t-s)\langle \rho_f\overline{\mathbf{u}}_{tt}(s,x) + \nabla\overline{p}(s,x) - \rho_f\mathbf{f}(s)\rangle ds, \tag{42}$$

$$\frac{\alpha^h}{\rho_f c^2}\overline{p} + \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}^r + \epsilon(\overline{\mathbf{u}}) : C = 0, \quad \overline{\sigma} = \rho_f c^2\epsilon(\overline{\mathbf{u}})_{ij}A_{ij} + \overline{p}B, \tag{43}$$

где α^h - безразмерный параметр,

$$\alpha^h = 1 - \int\limits_{Y_s} \mathrm{div}_y\mathbf{w}^0 dy,$$

который определяется постоянными Ламе, (более точно, параметрами a_3 и a_4) и геометрической структурой ячейки перодичности.