## § 7. Уравнения Максвелла

В системе единиц СГС уравнения Максвелла имеют вид [Джексон]

$$\frac{1}{c}\mathbf{D}_t = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s, \quad \frac{1}{c}\mathbf{B}_t = -\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ - напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ - магнитное поле, $\mathbf{D}$ - электрическая индукция, характеризующая токи смещения, $\mathbf{B}$ - магнитная индукция или вектор плотности магнитного поля, $\mathbf{J}$ - плотность токов проводимости, $\mathbf{J}_s$ - плотность сторонних токов проводимости. Уравнения (1) необходимо дополнить материальными соотношениями, которые будут приведены ниже.

В случае, когда $\mathbf{J}_s = e^{-i\omega t}\mathbf{F}(x)$, т.е. среда находится под действием заданного переменного электрического поля с угловой частотой $\omega$, естественно искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве в виде $\mathbf{E} := e^{-i\omega t}\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H} := e^{-i\omega t}\mathbf{H}(x)$, $\mathbf{D} := e^{-i\omega t}\mathbf{D}(x)$, $\mathbf{B} := e^{-i\omega t}\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{J} := e^{-i\omega t}\mathbf{J}(x)$. Поэтому комплексно-значные векторные функции $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H}(x)$, $\mathbf{D}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{J}(x)$ удовлетворяют системе

$$\frac{-i\omega}{c}\mathbf{D} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{F}, \quad \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{2}$$

В общем случае материальные соотношения смеси изотропных материалов задаются формулами

$$\mathbf{D} = \varepsilon(x,\omega)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(x,\omega)\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(x,\omega)\mathbf{E}, \tag{3}$$

где $\varepsilon$ - диэлектрическая проницаемость, $\mu$ - магнитная проницаемость, $\sigma$ - электрическая проводимость. Предположение о периодической структуре пористого пространства выражается в свойстве периодичности (с некоторым периодом $l$) материальных функций $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ по каждой пространственной переменной $x_i$:

$$\varepsilon(x_1 + l, x_2, x_3) = \varepsilon(x_1, x_2 + l, x_3) = \varepsilon(x_1, x_2, x_3 + l) = \varepsilon(x_1, x_2, x_3) \quad \forall x.$$

Аналогичные равенства справедливы и для функций $\mu$, $\sigma$.

Введем безразмерные переменные $x_i' = x_i/\tilde{X}$, $\delta = l/\tilde{X}$ и

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{\tilde{E}},\ \mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}}{\tilde{E}},\ \mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H}}{\tilde{H}},\ \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{\tilde{H}},\ \mathbf{J}' = \frac{\mathbf{J}}{\tilde{J}},\ \mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}}{\tilde{J}},\ \omega' = \frac{\omega}{\tilde{\omega}},\ \sigma' = \frac{\sigma}{\tilde{\sigma}},$$

где параметры с тильдой - характерные значения соответствующих величин. Отметим, что $\varepsilon$, $\mu$ - безразмерные параметры в системе единиц СГС. Обозначим

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : 0 < y_i < 1, \quad i = 1,2,3\}.$$

Запишем уравнения (2), (3) в новых переменных:

$$-i\omega'\mathbf{D}' = A_1 \mathrm{rot}'\,\mathbf{H}' - A_2\sigma'\mathbf{E}' - A_3\mathbf{F}', \quad i\omega'\mathbf{B}' = A_4 \mathrm{rot}'\,\mathbf{E}', \tag{4}$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\mathbf{E}', \quad \mathbf{B}' = \mu\mathbf{H}', \quad \mathbf{J}' = A_5\sigma'\mathbf{E}'. \tag{5}$$

Здесь $A_i$ - безразмерные параметры:

$$A_1 = \frac{c\tilde{H}}{\tilde{X}\tilde{\omega}\tilde{E}}, \quad A_2 = \frac{4\pi\tilde{\sigma}}{\tilde{\omega}}, \quad A_3 = \frac{4\pi\tilde{J}}{\tilde{\omega}\tilde{E}}, \quad A_4 = \frac{c\tilde{E}}{\tilde{X}\tilde{\omega}\tilde{H}}, \quad A_5 = \frac{\tilde{\sigma}\tilde{E}}{\tilde{J}}.$$

А для функций $\varepsilon, \mu, \sigma'$ справедливы представления

$$\varepsilon = \varepsilon'(y,\omega')|_{y=x'/\delta}, \quad \mu = \mu'(y,\omega')|_{y=x'/\delta}, \quad \sigma' = \sigma'(y,\omega')|_{y=x'/\delta}. \tag{6}$$

Будем считать для простоты, что среда состоит из твердого скелета и поровой жидкости. В соответствии с этим предположением функции в правых частях формул (6) при каждой фиксированной частоте $\omega'$ являются периодическими по каждой переменной $y_i$ с периодом 1 и принимают лишь два значения:

$$\varepsilon'(y,\omega'),\, \mu'(y,\omega'),\, \sigma'(y,\omega') = \begin{cases} \varepsilon_s(\omega'),\, \mu_s(\omega'),\, \sigma_s(\omega'), & \text{при}\, y \in Y_s, \\ \varepsilon_f(\omega'),\, \mu_f(\omega'),\, \sigma_f(\omega'), & \text{при } y \in Y_f. \end{cases} \tag{7}$$

"Твердая"часть $Y_s$ и "жидкая"часть $Y_f$ куба $Y$, $Y = Y_s \cup Y_f$, зависят от конкретной геометрии скелета. Очевидно функция $\varepsilon'(x'/\delta)$ периодическая с периодом $\delta$. Тоже самое верно и для функций $\mu'(x'/\delta)$, $\sigma'(x'/\delta)$.

Следствием уравнений (4) являются равенства

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}' = 0, \quad \mathrm{div}\,(-i\omega'\mathbf{D}' + A_2\sigma'\mathbf{E}' + A_3\mathbf{F}') = 0. \tag{8}$$

Опуская штрихи, проведем асимптотический анализ уравнений (4), (5) для случая, когда параметр $\delta$ мал и выполнены условия

$$A_i \gg \delta, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

В приложениях эти условия обеспечиваются при малых частотах $\tilde{\omega}$, что равносильно малости размера ячейки периодичности $l$ по сравнению с длиной волны.

В соответствии с методом двухмасштабных разложений будем искать $\mathbf{E}(x)$ в виде ряда

$$\mathbf{E}(x) = \{\mathbf{E}^0(x,y) + \delta \mathbf{E}^1(x,y) + \delta^2 \mathbf{E}^2(x,y) + \cdots\}|_{y=x/\delta}. \tag{9}$$

В аналогичном виде представляются и все остальные функции.

Для функции $f(x,y)$ двух переменных обозначим частные производные

$$\partial_{x_i} f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3), \quad \partial_{y_j} f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)$$

по переменной $x_i$ и $y_j$ соответственно. Тогда справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x,y)|_{y=x/\delta}\right) = \partial_{x_i} f(x,y)|_{y=x/\delta} + \delta^{-1}\partial_{y_i} f(x,y)|_{y=x/\delta}.$$

Подставляя ряды вида (9) в уравнение $(4)_1$, получим равенство

$$\begin{gathered}
-i\omega\Big\{\mathbf{D}^0(x,y) + \delta\mathbf{D}^1(x,y) + \cdots\Big\} = A_1\Big\{\mathrm{rot}_x\mathbf{H}^0(x,y) + \frac{1}{\delta}\mathrm{rot}_y\mathbf{H}^0(x,y) + \\
\delta\left(\mathrm{rot}_x\mathbf{H}^1(x,y) + \frac{1}{\delta}\mathrm{rot}_y\mathbf{H}^1(x,y)\right) + \cdots\Big\} - \\
A_2\sigma(y,\omega)\Big(\mathbf{E}^0(x,y) + \delta\mathbf{E}^1(x,y) + \cdots\Big) - A_3F(x),
\end{gathered} \tag{10}$$

в котором $y = x/\delta$. Потребуем, чтобы это равенство выполнялось также как и равенство функций, зависящих от двух независимых переменных $x, y$. Тогда, записывая (10) в виде $\sum_{-1}^{\infty}\delta^n(\cdots)_n = 0$ и приравнивая коэффициенты $(\cdots)_n$ к нулю при $n=-1$ и $n=0$, получим равенства

$$\mathrm{rot}_y\mathbf{H}^0(x,y) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&-i\omega\mathbf{D}^0(x,y) = \\
&A_1\left(\mathrm{rot}_x\mathbf{H}^0(x,y) + \mathrm{rot}_y\mathbf{H}^1(x,y)\right) - A_2\sigma(y,\omega)\mathbf{E}^0(x,y) - A_3F(x).
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично из уравнения $(4)_2$ получаем равенства

$$\mathrm{rot}_y\mathbf{E}^0(x,y) = 0, \tag{13}$$

$$i\omega \mathbf{B}^0(x,y) = A_4\left(\mathrm{rot}_x \mathbf{E}^0(x,y) + \mathrm{rot}_y \mathbf{E}^1(x,y)\right), \tag{14}$$

а из уравнений (8) и (5) - равенства

$$\mathrm{div}_y \mathbf{B}^0(x,y) = 0, \quad \mathrm{div}_y\left(-i\omega \mathbf{D}^0(x,y) + A_2\sigma \mathbf{E}^0(x,y)\right) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}^0(x,y) = \varepsilon(y,\omega)\mathbf{E}^0(x,y), \quad \mathbf{B}^0(x,y) = \mu(y,\omega)\mathbf{H}^0(x,y),\\ &\mathbf{J}^0(x,y) = A_5\sigma(y,\omega)\mathbf{E}^0(x,y). \end{aligned} \tag{16}$$

Так как $Y$ односвязная область, то уравнения (11) и (13) означают, что для функций $\mathbf{H}^0(x,y)$ и $\mathbf{E}^0(x,y)$ справедливы представления

$$\mathbf{H}^0(x,y) = \Psi(x) + \nabla_y\psi(x,y), \quad \mathbf{E}^0(x,y) = \Phi(x) + \nabla_y\varphi(x,y). \tag{17}$$

Введем среднюю величину

$$\overline{\mathbf{E}}(x) = \int\limits_Y \mathbf{E}^0(x,y)dy.$$

Тогда $\Psi(x) = \overline{\mathbf{H}}(x)$ и $\Phi(x) = \overline{\mathbf{E}}(x)$ в силу периодичности функций $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ по $y$.

Из $(15)_1$, $(16)_2$, $(17)_1$ следует равенство

$$\mathrm{div}_y\left(\mu(y,\omega)(\overline{\mathbf{H}}(x) + \nabla_y\psi)\right) = 0, \tag{18}$$

а из $(15)_2$, $(16)_1$, $(16)_3$, $(17)_2$ - равенство

$$\mathrm{div}_y\left((-i\omega\varepsilon(y,\omega) + A_2\sigma(y,\omega))(\overline{\mathbf{E}}(x) + \nabla_y\varphi)\right) = 0. \tag{19}$$

Считая функции $\overline{\mathbf{H}}(x)$ и $\overline{\mathbf{E}}(x)$ в уравнениях (18) и (19) заданными и пользуясь методом разделения переменных, будем искать функции $\psi$ и $\varphi$ в виде

$$\psi(x,y) = \sum_1^3 \overline{H}_k(x)u^k(y) \equiv \overline{H}_k(x)u^k(y), \quad \varphi(x,y) = \overline{E}_k(x)w^k(y), \tag{20}$$

где $u^k(y)$, $w^k(y)$ - периодические функции. Подстановка этих формул в (18) и (19) приводит к следующим уравнениям для $u^k$ и $w^k$

$$\mathrm{div}_y\left(\mu(y,\omega)(\nabla_y u^k + \mathbf{e}_k)\right) = 0, \tag{21}$$

$$\operatorname{div}_y\big((-i\omega\varepsilon(y,\omega)+A_2\sigma(y,\omega))(\nabla_y w^k+\mathbf{e}_k)\big)=0, \tag{22}$$

где $\mathbf{e}_k$ - единичный орт $k$ - ой оси, $y=y_i\mathbf{e}_i$. Чтобы данные уравнения определяли решение однозначно, потребуем выполнения условий

$$\int\limits_Y u^k(y)dy=\int\limits_Y w^k(y)dy=0,\quad k=1,2,3. \tag{23}$$

Уравнения (21), (22) выполняются в ячейке $Y$ и представляют собой микро-уравнения. Для получения макро-уравнений проинтегрируем уравнения (12), (14) по переменной $y$. В результате приходим к системе уравнений Максвелла

$$-i\omega\overline{\mathbf{D}}=A_1\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}-A_2\sigma\overline{\mathbf{E}}-A_3\mathbf{F}, \tag{24}$$

$$i\omega\overline{\mathbf{B}}=A_4\operatorname{rot}\overline{\mathbf{E}}. \tag{25}$$

Значение микро-уравнений состоит в том, что они позволяют определить материальные соотношения для макро-полей. Действительно, проинтегрируем уравнения (16) по $y$. Тогда получаем равенства

$$\overline{B}_j(x)=\int\limits_Y \mu(y,\omega)\left(\overline{H}_j(x)+\overline{H}_k(x)\frac{\partial u^k}{\partial y_j}\right)dy=\mu^h_{jk}(\omega)\overline{H}_k(x), \tag{26}$$

$$\overline{D}_j(x)=\int\limits_Y \varepsilon(y,\omega)\left(\overline{E}_j(x)+\overline{E}_k(x)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right)dy=\varepsilon^h_{jk}(\omega)\overline{E}_k(x), \tag{27}$$

$$\overline{J}_j(x)=A_5\int\limits_Y \sigma(y,\omega)\left(\overline{E}_j(x)+\overline{E}_k(x)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right)dy=A_5\sigma^h_{jk}(\omega)\overline{E}_k(x), \tag{28}$$

в которых

$$\mu^h_{jk}(\omega)=\int\limits_Y \mu(y,\omega)\left(\delta^k_j+\frac{\partial u^k}{\partial y_j}\right)dy, \tag{29}$$

$$\varepsilon^h_{jk}(\omega)=\int\limits_Y \varepsilon(y,\omega)\left(\delta^k_j+\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right)dy, \tag{30}$$

$$\sigma^h_{jk}(\omega)=\int\limits_Y \sigma(y,\omega)\left(\delta^k_j+\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right)dy. \tag{31}$$

## § 7.1. Гомогенизация уравнений Максвелла для случай слоистой структуры

Определим $\varepsilon^h_{ij}$ для случая, когда $Y_f = \{y : 0 < y_3 < \Phi\}$ уравнениях (7), где $\Phi_f \in (0,1)$. Так как в этом случае кусочно-постоянные функции $\varepsilon(y,\omega)$, $\mu(y,\omega)$, and $\sigma(y,\omega)$ зависят только от переменной $y_3$, то функции $w^1$ and $w^2$ в уравнениях (22) можно взять равными нулю, а периодическую функцию $w^3$ можно считать зависящей лишь от переменной $y_3$, при этом $w^3(y_3)$ находится из решения задачи

$$\frac{d}{dy_3}\left((-i\omega\varepsilon(y_3) + A_2\sigma(y_3))\frac{d}{dy_3}\left(w^3 + y_3\right)\right) = 0, \quad \int\limits_0^1 w^3 dy_3 = 0. \tag{32}$$

Интегрируя один раз уравнение $(32)_1$, получаем

$$\frac{d}{dy_3}\left(w^3 + y_3\right) = \frac{c}{-i\omega\varepsilon(y_3) + A_2\sigma(y_3)}, \quad c = \mathrm{const}.$$

Интегрируя это равенство и используя условие периодичности, находим постоянную $c$:

$$1 = c\left(\frac{\Phi_f}{-i\omega\varepsilon_f + A_2\sigma_f} + \frac{\Phi_s}{-i\omega\varepsilon_s + A_2\sigma_s}\right), \quad \Phi_s = 1 - \Phi_f.$$

Таким образом,

$$\varepsilon^h_{33} = \int\limits_0^1 \varepsilon(y_3)\frac{d}{dy_3}\left(w^3 + y_3\right)dy_3 = \frac{-i\omega\varepsilon_f\varepsilon_s + A_2(\Phi_f\varepsilon_f\sigma_s + \Phi_s\varepsilon_s\sigma_f)}{-i\omega\left(\Phi_f\varepsilon_s + \Phi_s\varepsilon_f\right) + A_2(\Phi_f\sigma_s + \Phi_s\sigma_f)}. \tag{33}$$

Так как $w^1 = w^2 = 0$, то

$$\varepsilon^h_{ij}|_{i\neq j} = 0, \quad \varepsilon^h_{11} = \varepsilon^h_{22} = \int\limits_Y \varepsilon(y)dy = \Phi_f\varepsilon_f + \Phi_s\varepsilon_s. \tag{34}$$

Аналогично определяются матрицы $\sigma^h_{ij}$ и $\mu^h_{ij}$:

$$\sigma^h_{33} = \frac{-i\omega\left(\Phi_f\varepsilon_s\sigma_f + \Phi_s\varepsilon_f\sigma_s\right) + A_2\sigma_s\sigma_f}{-i\omega\left(\Phi_f\varepsilon_s + \Phi_s\varepsilon_f\right) + A_2(\Phi_f\sigma_s + \Phi_s\sigma_f)}, \tag{35}$$

$$\sigma^h_{ij}|_{i\neq j} = 0, \quad \sigma^h_{11} = \sigma^h_{22} = \Phi_s\sigma_s + \Phi_f\sigma_f, \tag{36}$$

$$\mu^h_{33} = \frac{\mu_s\mu_f}{\Phi_f\mu_s + \Phi_s\mu_f}, \quad \mu^h_{11} = \mu^h_{22} = \Phi_f\mu_f + \Phi_s\mu_s, \quad \mu^h_{ij}|_{i\neq j} = 0. \tag{37}$$

В общем случае величины $\varepsilon_s$, $\sigma_s$, $\mu_s$ и $\varepsilon_f$, $\sigma_f$, $\mu_f$ зависят от частоты $\omega$. При $\omega = 0$ равенство (33) превращается в известную формулу Максвелла - Вагнера [Braun]:

$$\varepsilon^h_{33}(0) = \frac{\Phi_f\varepsilon_f(0)\sigma_s(0) + \Phi_s\varepsilon_s(0)\sigma_f(0)}{\Phi_f\sigma_s(0) + \Phi_s\sigma_f(0)}.$$

Проанализируем полученные формулы для случая, когда функции $\varepsilon_s(\omega)$ и $\varepsilon_f(\omega)$ определяются законом поляризации Дебая. Напомним, что в системе единиц СГС вектор поляризации $\mathbf{P}$ для однородной изотропной среды в подходе Дебая подчинен следующим соотношениям:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \quad \mathbf{P}_1 = \chi_1\mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{P}_2}{dt} = \frac{\chi_2\mathbf{E} - \mathbf{P}_2}{\tau}. \tag{38}$$

Здесь диэлектрические восприимчивости $\chi_i$ - безразмерные параметры, $\tau$ - время релаксации. Напомним, что в системе единиц СГС вектор поляризации и все векторы, входящие в систему уравнений Максвелла, имеют одну и ту же размерность. В случае, когда все поля, в том числе и вектор поляризации, меняются по гармоническому закону,

$$\mathbf{D} := e^{-i\omega t}\mathbf{D}(x), \quad \mathbf{E} := e^{-i\omega t}\mathbf{E}(x), \quad \mathbf{P} := e^{-i\omega t}\mathbf{P}(x), \quad \mathbf{D} := e^{-i\omega t}\mathbf{D}(x),$$

равенства (38) принимают вид

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{E}(x) + 4\pi\mathbf{P}(x), \quad \mathbf{P}(x) = \mathbf{P}_1(x) + \mathbf{P}_2(x), \quad \mathbf{P}_1(x) = \chi_1\mathbf{E}(x),$$

$$-i\omega\mathbf{P}_2(x) = \frac{\chi_2\mathbf{E}(x) - \mathbf{P}_2(x)}{\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\left(\chi_1 + \frac{\chi_2}{1 - i\tau\omega}\right)\mathbf{E}.$$

С другой стороны, выполняется равенство $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, поэтому

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\left(\chi_1 + \frac{\chi_2}{1 - i\tau\omega}\right).$$

Запишем последнее равенство, вводя безразмерные время релаксации и частоту:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \left( \chi_1 + \frac{\chi_2}{1 - iA_6 \tau' \omega'} \right), \quad \tau' = \tau/\tilde{\tau}, \quad \omega' = \omega/\tilde{\omega}, \quad A_6 = \tilde{\tau}\tilde{\omega}. \quad (39)$$

Введем $\varepsilon_0 = \varepsilon|_{\omega'=0}$, $\varepsilon_\infty = \varepsilon|_{\omega'=\infty}$. Тогда, опуская штрихи, равенство (39) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty} = \frac{1}{1 - A_6 i \tau \omega}. \quad (40)$$

Рассмотрим случай, когда время релаксации каждого компонента смеси равно нулю, $\tau_s = \tau_f = 0$, т. е. $\varepsilon_s$ и $\varepsilon_f$ не зависят от частоты $\omega$. Пусть $\sigma_s$ и $\sigma_f$ также не зависят от частоты. Оказывается усреднение слоистой структуры с указанными свойствами компонентов приводит к однородной анизотропной поляризуемой среде с ненулевым временем релаксации. Действительно, используя формулу (35), приходим к равенству

$$\frac{\varepsilon_{33}^h - \varepsilon_{33}^h(\infty)}{\varepsilon_{33}^h(0) - \varepsilon_{33}^h(\infty)} = \frac{1}{1 - A_6 i \tau_{33}^h \omega}, \quad (41)$$

где

$$\tau_{33}^h = \frac{\Phi_f \varepsilon_s + \Phi_s \varepsilon_f}{A_2 A_6 \left( \Phi_f \sigma_s + \Phi_s \sigma_f \right)}.$$