§ 6. Гомогенизация нелинейной эллиптической задачи.

Рассмотрим эллиптическую краевую задачу в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ для функции $u(x)$:

$$-\mathrm{div}\,\mathbf{a}\,(x/\varepsilon, \nabla_x u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j} a_j\,(x/\varepsilon, \nabla_x u) = f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

где отображение $\mathbf{a} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ удовлетворяет следующим условиям:
(1) функция $\mathbf{a}(y, \mathbf{v})$ - Y-периодическая при каждом $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$;
(2) $|\mathbf{a}(y, \mathbf{v}_1) - \mathbf{a}(y, \mathbf{v}_2)| \leq \kappa |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ для всех $y \in Y$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^d$;
(3) $\Big(\mathbf{a}(y, \mathbf{v}_1) - \mathbf{a}(y, \mathbf{v}_2)\Big) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \geq \gamma\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$ для всех $y \in Y$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^d$.

Исследование предела при $\varepsilon \to 0$ основывается на следующем утверждении из теории компенсированной компактности.

Лемма (div-curl). *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ – ограниченные в $L^2(\Omega)$ последовательности такие, что $rot\,\mathbf{u}_\varepsilon = 0$ и последовательность $div\,\mathbf{w}_\varepsilon$ компактна в $H^{-1}(\Omega)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u}$, $\mathbf{w}_\varepsilon \to \mathbf{w}$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{w}_\varepsilon \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ в смысле распределений при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. В силу тождества

$$\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{w}_\varepsilon = (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_\varepsilon$$

достаточно рассмотреть случай, когда $\mathbf{u} = \mathbf{w} = 0$. Пусть B- произвольный открытый шар, содержащийся в области Ω и $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Условие $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_\varepsilon = 0$ означает, что найдется функция $U_\varepsilon \in H^1(B)$ такая, что $\mathbf{u}_\varepsilon|_B = \nabla U_\varepsilon$ и $\int_B U_\varepsilon dx = 0$. В силу последнего равенства применимо неравенство Пуанкаре

$$\|U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

поэтому последовательность U_ε ограничена в $H^1(\Omega)$. Переходя к некоторой подпоследовательности (сохранено прежнее обозначение), можем заключить, что $\nabla U_\varepsilon \to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$, $U_\varepsilon \to \chi$ слабо в $L^2(\Omega)$ и $U_\varepsilon \to \chi$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Покажем, что $\chi = 0$. Действительно, переходя к пределу в равенствах

$$\int\limits_B U_\varepsilon dx = 0, \quad \int\limits_B U_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_B \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i} \varphi\, dx,$$

получаем, что $\chi = \mathrm{const}$ и $\int_B \chi dx = 0$. Таким образом $U_\varepsilon \to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$. В силу теоремы Реллиха о компактном вложении $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ можно считать, что $U_\varepsilon \to 0$ сильно в $L^2(\Omega)$.

В условиях теоремы существует подпоследовательность $\mathbf{w}_\varepsilon$ (сохранено прежнее обозначение) такая, что $\operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon \to g$ в $H^{-1}(\Omega)$. Так как

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon, \varphi \rangle = -\int\limits_B \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \to 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

то $g = 0$.

Имеем

$$\int\limits_B \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{w}_\varepsilon \varphi dx = \int\limits_B \varphi \nabla U_\varepsilon \cdot \mathbf{w}_\varepsilon \, dx = \int\limits_B \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \left[\nabla \left(\varphi U_\varepsilon \right) - U_\varepsilon \nabla \varphi \right] \, dx =$$

$$= -\langle \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon, \varphi U_\varepsilon \rangle - \int\limits_B U_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \equiv -F_\varepsilon - G_\varepsilon.$$

Так как $U_\varepsilon \to 0$ сильно в $L^2(\Omega)$ и $\mathbf{w}_\varepsilon \to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$, то $G_\varepsilon \to 0$. Сходимость $F_\varepsilon \to 0$ следует из оценки

$$|F_\varepsilon| \leq \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi U_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$\square$

Для вычисления предела в задаче (1) определим на ячейке Y функцию $W_\eta(y)$, являющуюся Y-периодическим решением задачи

$$-\operatorname{div}_y \mathbf{a} \left(y, \eta + \nabla_y W_\eta \right) = 0, \quad \int\limits_Y W_\eta(y) dy = 0, \tag{2}$$

где $\eta (\in \mathbb{R}^d)$ - постоянный вектор. Введем "гомогенизированный"вектор

$$\widehat{\mathbf{a}}(\eta) = \int\limits_Y \mathbf{a}(y, \eta + \nabla_y W_\eta(y)) \, dy. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть u_ε – решение задачи* (1)*. Тогда $u_\varepsilon \to u$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, где u – решение задачи*

$$-\operatorname{div}_x \widehat{\mathbf{a}} \left(\nabla_x u \right) = f, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Доказательство. Путем умножения уравнения (1) на u_ε и применения свойства коэрцитивности (3) функции $\mathbf{a}(y,\mathbf{v})$ получается равномерная по ε оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \le c.$$

Из свойства (2) функции $\mathbf{a}(y,\mathbf{v})$ следует равномерная по ε оценка $\|A_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$, где $\mathbf{A}_\varepsilon(x) = \mathbf{a}\,(x/\varepsilon, \nabla_x u)$. Таким образом,

$$u_\varepsilon \to u, \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega), \quad \mathbf{A}_\varepsilon \to \mathbf{A} \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega).$$

Очевидно, $-\operatorname{div}\mathbf{A} = f$ в смысле распределений.

Введем функции

$$V(y) = \eta\cdot y + W_\eta(y), \quad v_\varepsilon(x) = \varepsilon V(x/\varepsilon).$$

Из (2) следует, что

$$\operatorname{div}\mathbf{a}\,(x/\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon) = 0, \quad v_\varepsilon(x) \to \eta \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega),$$

$$\mathbf{a}\,(x/\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon) = \mathbf{a}\,(y, \eta + \nabla_y W_\eta(y))\Big|_{y=x/\varepsilon} \to \int\limits_Y \mathbf{a}(y, \eta + \nabla_y W_\eta(y))\,dy = \widehat{\mathbf{a}}(\eta)$$

слабо в $L^2(\Omega)$. В силу свойства коэрцитивности (3) функции $\mathbf{a}(y,\mathbf{v})$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega \Big(\mathbf{a}(x/\varepsilon, \nabla_x u_\varepsilon) - \mathbf{a}(x/\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon)\Big)\cdot(\nabla_x u_\varepsilon - \nabla_x v_\varepsilon)\,\varphi\,dx \ge 0,$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда по div-curl-Лемме в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается неравенство

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{A}(x) - \widehat{\mathbf{a}}(\eta))\cdot(\nabla_x u - \eta)\,\varphi\,dx \ge 0.$$

Так как неотрицательная функция φ произвольна, то

$$(\mathbf{A}(x) - \widehat{\mathbf{a}}(\eta))\cdot(\nabla_x u - \eta) \ge 0 \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^d \quad \text{и для п.в.} \quad x\in\Omega.$$

Пользуясь непрерывностью функции $\widehat{\mathbf{a}}(\eta)$ и выбирая $\eta = \nabla_x u \pm \delta\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ – единичный орт оси x_i, получаем в пределе при $\delta\downarrow 0$

$$A_i(x) - \widehat{a}_i(\nabla_x u) \ge 0, \quad A_i(x) - \widehat{a}_i(\nabla_x u) \le 0.$$

Таким образом, предельная функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (4). $\square$