§ 5. Двухмасштабная сходимость

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Введем множество $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$, состоящее из измеримых функций $\psi(x,y)$, $\psi : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$, таких что $\psi(\cdot, y) \in \mathcal{D}(\Omega)$ при каждом $y \in Y$ и $\psi(x, \cdot) \in C^\infty(Y)$ при каждом $x \in \Omega$, причем $\psi(x,y)$ - Y-периодическая при каждом $x \in \Omega$.

Последовательность функций u^ε из пространства $L^2(\Omega)$ *сходится двухмасштабно* к функции $u_0(x,y)$ из пространства $L^2(\Omega \times Y)$, если

$$\int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\psi(x, x/\varepsilon)\, dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} u_0\psi\, dxdy \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)). \tag{1}$$

Если заменить $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$ на пространство $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$, то получится эквивалентное определение, так как $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$ плотно в $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$.

В общем случае, если B - банахово пространство, то множество $L^p(\Omega; B)$, $1 \le p < \infty$, состоит из измеримых функций $\psi : \Omega \to B$ с ограниченной нормой

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega;B)} = \left(\int\limits_\Omega \|\psi(x)\|^p_B \right)^{1/p}.$$

Напомним, что функция $\psi : \Omega \to B$ измерима, если найдется последовательность непрерывных функций $\psi_n(x)$ из Ω в B и множество Ω_0 с нулевой мерой, такие что $\psi_n(x) \to \psi(x)$ для всех $x \in \Omega\backslash\Omega_0$.

Утверждение. *Пусть $f \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Тогда $f(x, x/\varepsilon)$ - измерима, справедлива оценка*

$$\|f(x, x/\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \le \int\limits_\Omega \|f(x,y)\|_{C(Y)} dx$$

и имеет место сходимость

$$\int\limits_\Omega f(x, x/\varepsilon) dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} f(x,y)\, dxdy.$$

Доказательство. Измеримость имеет место по теореме Каратеодори. Оценка тривиальна. Установим сходимость. Если каждое ребро куба Y

разделить на m равных частей, то куб Y можно представить в виде объединения m^d непересекающихся кубов Y_i с мерой $|Y_i| = m^{-d}$. Характеристическую функцию $\chi_i(y)$ куба Y_i продолжим Y-периодически. Пусть точка y_i - центр куба Y_i. Обозначим

$$f_m(x,y) = \sum_{1}^{m^d} f(x,y_i)\chi_i(y).$$

Очевидно, $\chi_i(x/\varepsilon) \to m^{-d} = \int_Y \chi_i dy$ $*$-слабо в $L^\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_\Omega F(x)\chi_i(x/\varepsilon)\,dx \to m^{-d}\int\limits_\Omega F(x)dx = \int\limits_{\Omega\times Y} F(x)\chi_i(y)\,dxdy \quad \forall F \in L^1(\Omega).$$

Очевидно,

$$\int\limits_\Omega f(x,y_i)\chi_i(x/\varepsilon)\,dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} f(x,y_i)\chi_i(y)\,dxdy,$$

$$\int\limits_\Omega f_m(x,x/\varepsilon)\,dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} f_m(x,y)\,dxdy \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Имеем

$$\left|\int\limits_\Omega f(x,x/\varepsilon)\,dx - \int\limits_{\Omega\times Y} f(x,y)\,dxdy\right| \le \left|\int\limits_\Omega [f(x,x/\varepsilon) - f_m(x,x/\varepsilon)]\,dx\right| +$$

$$\left|\int\limits_\Omega f_m(x,x/\varepsilon)\,dx - \int\limits_{\Omega\times Y} f_m(x,y)\,dxdy\right| +$$

$$\left|\int\limits_{\Omega\times Y} f_m(x,y)\,dxdy - \int\limits_{\Omega\times Y} f(x,y)\,dxdy\right|.$$

В пределе при при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int\limits_\Omega f(x,x/\varepsilon)\,dx - \int\limits_{\Omega\times Y} f(x,y)\,dxdy\right| \le 2\int\limits_\Omega g_m(x)dx,$$

где $g_m(x) = \|f(x,y) - f_m(x,y)\|_{C(Y)}$. Так как $f(x,y)$ непрерывна по y, то $g_m(x) \to 0$ при $m \to \infty$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того,$g_m(x) \leq 2\|f(x,y)\|_{C(Y)} \in L^1(\Omega)$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\int_\Omega g_m dx \to 0$. $\square$

В качестве следствия отметим, что

$$\int\limits_\Omega f^2(x, x/\varepsilon) dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} f^2(x,y)\, dxdy,$$

если $f \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$.

Теорема. *Пусть последовательность u^ε ограничена в $L^2(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность u^ε (сохранено прежнее обозначение) и функция $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ такие, что $u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0$.*

Доказательство. Пусть функция $\psi(x,y)$ принадлежит пространству $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. По неравенству Гельдера

$$|J^\varepsilon| \leq \left(\int\limits_\Omega |u^\varepsilon|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega \psi^2(x, x/\varepsilon) dx\right)^{1/2} \leq c\|\psi\|_{L^2(\Omega; C_{per}(Y))}, \qquad (2)$$

где $J^\varepsilon \equiv \int_\Omega u^\varepsilon \psi(x, x/\varepsilon) dx$. Оценка (2) означает, что функция u^ε задает линейный непрерывный функционал $\psi \to J^\varepsilon$ на пространстве $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. По теореме Рисса $(L^p(\Omega; B))^* = L^q(\Omega; B^*)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$. Таким образом, если $M = (C_{per}(Y))^*$ - пространство мер Радона, то существует единственный элемент $\mu^\varepsilon \in L^2(\Omega; M)$, такой что $J^\varepsilon = \langle \mu^\varepsilon, \psi\rangle$ $\forall \psi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. Кроме того, справедливы равномерные по ε оценки

$$|\langle \mu^\varepsilon, \psi\rangle| \leq c\|\psi\|_{L^2(\Omega; C_{per}(Y))}, \quad \|\mu^\varepsilon\|_{L^2(\Omega; M)} \leq c. \qquad (3)$$

Пространство $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ - сепарабельно, поэтому по теореме Алаоглу найдется подпоследовательность μ^ε (сохранено прежнее обозначение) и $\mu_0 \in L^2(\Omega; M)$, такие что $\mu^\varepsilon \to \mu_0$ $*$-слабо в $L^2(\Omega; M)$, т. е.

$$\langle \mu^\varepsilon, \psi\rangle \to \langle \mu_0, \psi\rangle \quad \forall \psi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)).$$

Так как $\int_\Omega \psi^2(x, x/\varepsilon) dx \to \int_{\Omega\times Y} \psi^2(x,y) dxdy$, то переходя к пределу в первом неравенстве из (2), получаем оценку

$$|\langle \mu_0, \psi\rangle| \leq c\|\psi\|_{L^2(\Omega\times Y)} \quad \forall \psi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)).$$

Но пространство $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ плотно в $L^2(\Omega\times Y)$, поэтому $\mu_0 \in \left(L^2(\Omega \times Y)\right)^*$. По теореме Рисса существует единственная функция $u_0(x,y)$, $u_0 \in L^2(\Omega\times Y)$, такая, что

$$\langle \mu_0, \psi \rangle = \int\limits_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\psi(x,y)dxdy \quad \forall \psi \in L^2(\Omega \times Y).$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\Omega} u^\varepsilon(x)\psi(x,x/\varepsilon)dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\psi(x,y)dxdy \quad \forall \psi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)).$$

$\square$

Утверждение. *Пусть последовательность функций $u^\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0$, равномерно ограничена в $L^2(\Omega)$, $\|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq c$, и сходится двухмасштабно к $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Тогда $u^\varepsilon \to u_w$ слабо в $L^2(\Omega)$, где $u_w(x) = \int_Y u_0(x,y)dy$, и справедливы неравенства*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)} \geq \|u_w\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4}$$

Доказательство. Из определения двухмасштабной сходимости следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\Omega} u^\varepsilon \psi(x,x/\varepsilon)dx \to \int\limits_{\Omega\times Y} u_0\psi(x,y)dxdy \quad \forall \psi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)). \tag{5}$$

Отсюда следует слабая сходимость $u^\varepsilon \to u_w$ в $L^2(\Omega)$. Действительно, если ψ в (5) не зависит от y, то

$$\int\limits_{\Omega} u^\varepsilon \psi(x)dx \to \int\limits_{\Omega} u_w\psi dx \quad \forall \psi \in L^2(\Omega).$$

Далее,

$$\int\limits_{\Omega} \left(u^\varepsilon - \psi(x,x/\varepsilon)\right)^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 + \psi^2(x,x/\varepsilon) - 2u^\varepsilon\psi(x,x/\varepsilon) \quad dx.$$

Поэтому

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 2 \int\limits_{\Omega\times Y} u_0\psi(x,y)dxdy - \int\limits_{\Omega\times Y} \psi^2(x,y)dxdy. \qquad (6)$$

Множество $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ плотно в $L^2(\Omega\times Y)$, поэтому существует последовательность функций $\psi_n(x,y)$ из пространства $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ такая, что $\psi_n(x,y)\to u_0(x,y)$ в $L^2(\Omega\times Y)$ при $n\to\infty$. Подставляя ψ_n в (6) и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем первое из неравенств (4).

Второе из неравенств (4) справедливо в силу неравенства Гельдера:

$$\int\limits_{\Omega} u_w^2 dx = \int\limits_{\Omega} \left(\int_Y u_0 dy\right)^2 dx \leq \int\limits_{\Omega\times Y} u_0^2 dxdy.$$

□

Теорема. *Пусть последовательности u^ε, v^ε ограничены равномерно по ε в $L^2(\Omega)$. Пусть они сходятся при $\varepsilon\to 0$ двухмасштабно к $u_0(x,y)$ и $v_0(x,y)$ соответственно, $u_0, v_0\in L^2(\Omega\times Y)$. Пусть, кроме того, $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ $\to \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда*

$$u^\varepsilon(x)v^\varepsilon(x) \to \int\limits_Y u_0(x,y)v_0(x,y)dy \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \qquad (7)$$

Если $u_0\in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon - u_0(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. Найдется последовательность функций $\psi_n(x,y)$ из пространства $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ такая, что $\psi_n(x,y)\to u_0(x,y)$ в $L^2(\Omega\times Y)$ при $n\to\infty$. Рассмотрим интеграл

$$J_{\varepsilon,n} = \int\limits_\Omega \left[u^\varepsilon(x) - \psi_n(x, x/\varepsilon)\right]^2 dx.$$

Имеем

$$J_{\varepsilon,n} = \int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x)|^2 - 2u^\varepsilon(x)\psi_n(x,x/\varepsilon) + \psi_n^2(x,x/\varepsilon) \quad dx.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{\varepsilon,n} = \int\limits_{\Omega\times Y} (u_0 - \psi_n)^2 \, dxdy \equiv I_n.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} u^\varepsilon v^\varepsilon \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega} \psi_n(x, x/\varepsilon) v^\varepsilon \varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} \left[u^\varepsilon - \psi_n(x, x/\varepsilon)\right] v^\varepsilon \varphi \, dx \equiv A_{\varepsilon,n} + B_{\varepsilon,n}.$$

В пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} A_{\varepsilon,n} = \int\limits_{\Omega\times Y} u_0(x,y) v_0(x,y) \varphi(x) \, dxdy.$$

Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |B_{\varepsilon,n}| \le c I_n^{1/2}.$$

Оценка интеграла $J_{\varepsilon,n}$ показывает, что предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_{\varepsilon,n}$ можно сделать как угодно малым при достаточно большом n. $\square$

Теорема. *(i) Пусть последовательность функций $u^\varepsilon(x)$ ограничена в $H^1(\Omega)$ равномерно по ε при $\varepsilon \to 0$. Тогда существует подпоследовательность u^ε (сохранено прежнее обозначение) и функции $u(x)$, $u_1(x,y)$ такие, что $u \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$,*

$$u^\varepsilon \to u \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} \nabla_x u + \nabla_y u_1 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

(ii) Пусть последовательность функций u^ε подчиняется равномерной оценке $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le c$. Тогда существует подпоследовательность u^ε (сохранено прежнее обозначение) и функция $u_0(x,y)$ такие, что $u_0 \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$ и

$$u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0, \quad \varepsilon \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} \nabla_y u_0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

(iii) Пусть последовательность вектор-функций u^ε подчиняется равномерной оценке $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le c$ и $div\, u^\varepsilon = 0$. Тогда существует подпоследовательность u^ε (сохранено прежнее обозначение) и функция $u_0(x,y)$ такие, что

$$u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0, \quad div_y u_0 = 0, \quad div_x \int\limits_Y u_0(x,y) dy = 0.$$

Доказательство. В условиях первого утверждения можно считать, что

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \xrightarrow{t.s.} \chi_j(x,y),$$

где $u \in H^1(\Omega)$ и $u_0, \chi_j \in L^2(\Omega \times Y)$. Рассмотрим вектор $\Psi(x,y)$ с компонентами $\Psi_j \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$. Применяя формулу интегрирования почастям, получаем

$$\int_\Omega \varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \Psi(x, x/\varepsilon)\, dx = -\int_\Omega \varepsilon u^\varepsilon \left[\mathrm{div}_x \Psi(x,y) + \varepsilon^{-1}\mathrm{div}_y \Psi(x,y)\right]|_{y=x/\varepsilon}\, dx.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ справедливо равенство

$$0 = -\int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\mathrm{div}_y \Psi(x,y)\, dxdy = \int_{\Omega\times Y} \nabla_y u_0 \cdot \Psi\, dxdy.$$

Так как функция Ψ произвольна, то u_0 не зависит от переменной y. В силу равенства $u = \int_Y u_0\, dy$ функции $u(x)$ и $u_0(x,y)$ совпадают.

Далее воспользуемся следующим вариантом теоремы Вейля о разложении пространства $L^2(Y)^d$ векторных функций. Если $\mathbf{u} \in L^2(Y)^d$, то справедливо однозначное представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla_y \Phi, \qquad \mathrm{div}_y \mathbf{v} = 0, \quad \Phi \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in L^2(Y)^d, \tag{8}$$

причем $\int_Y \mathbf{v}\cdot\nabla_y\Phi\, dy = 0$. Здесь $H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}$ - фактор-пространство, состоящее из классов функций; функции $\Phi_1 \in H^1_{per}(Y)$ и $\Phi_2 \in H^1_{per}(Y)$ принадлежат одному и тому же классу, если они отличаются на константу, т. е. $\Phi_1 - \Phi_2 = \mathrm{const}$. Функция Φ в разложении (8) находится единственным образом при условии, что $\int_Y \Phi dy = 0$. Обозначим

$$H^1_{0,per}(Y) = \{\Phi \in H^1_{per}(Y) : \int_Y \Phi dy = 0\}.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\Psi(x,y)$ такую,что $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$, $\mathrm{div}_y\Psi = 0$. Переходя к пределу в равенстве

$$\int_\Omega u^\varepsilon \mathrm{div}\Psi(x, x/\varepsilon) + \nabla u^\varepsilon \cdot \Psi(x, x/\varepsilon)\, dx = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega\times Y} u(x)\mathrm{div}_x\Psi(x,y) + \chi(x,y)\Psi(x,y) \quad dxdy = 0.$$

Записывая это равенство в виде

$$\int\limits_{\Omega\times Y} \left[\chi(x,y) - \nabla_x u(x)\right]\Psi(x,y)\,dxdy = 0$$

и применяя разложение Вейля (8), приходим к представлению

$$\chi - \nabla_x u(x) = \nabla_y u_1(x,y).$$

Первое утверждение доказано.

В условиях второго утверждения можно считать, что

$$u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0, \quad \varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \xrightarrow{t.s.} \chi_j(x,y),$$

где $u_0, \chi_j \in L^2(\Omega\times Y)$.

Рассмотрим вектор $\Psi(x,y)$ с компонентами $\Psi_j \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$. Переходя к пределу в равенстве

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon\nabla u^\varepsilon\cdot\Psi(x,x/\varepsilon) + u^\varepsilon\left[\varepsilon\mathrm{div}_x\Psi(x,y) + \mathrm{div}_y\Psi(x,y)\right]|_{y=x/\varepsilon} \quad dx = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega\times Y} \chi\cdot\Psi + u_0\mathrm{div}_y\Psi\,dxdy = 0.$$

Значит, $\chi = \nabla_y u_0(x,y)$. Второе утверждение установлено.

В условиях третьего утверждения можно считать, что

$$u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} u_0,$$

где $u_0 \in L^2(\Omega\times Y)$. Рассмотрим вектор $\Psi(x,y)$ с компонентами $\Psi_j \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$. Так как

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\Psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \left[\varepsilon\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x_i} + \frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y_i}\right]_{y=x/\varepsilon},$$

то, переходя к пределу в равенстве

$$0 = \int\limits_{\Omega} \varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla_x \left(\Psi(x, x/\varepsilon)\right)\, dx,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega\times Y} u_0(x,y) \cdot \nabla_y \Psi(x,y)\, dxdy = 0.$$

Значит, $\mathrm{div}_y u_0 = 0$.

Пусть $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Переходя к пределу в равенстве $0 = \int_\Omega u^\varepsilon \cdot \nabla\Psi(x) dx$, получаем последнее предельное равенство в третьем утверждении. $\square$

Применим теорию двухмасштабной сходимости для исследования сходимости при $\varepsilon \to 0$ решения u^ε задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} u^\varepsilon\right) = f(x), \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \tag{9}$$

(Напомним, что по повторяющимся индексам ведется суммирование.) Здесь Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ij}(x,y)$ - Y-периодические функции по переменной y,

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega; C_{per}(Y)), \quad a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{10}$$

Приведем слабую формулировку задачи (9). Требуется найти функцию $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$\int_\Omega a_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{11}$$

По теореме Лакса-Мильграма задача (11) однозначно разрешима. В силу равномерных по ε оценок $\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\, dx \leq c$ и $\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx \leq c$ существует подпоследовательность u^ε (сохранено прежнее обозначение) и функции $u(x)$, $u_1(x,y)$ такие, что $u \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$,

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{t.s.} \nabla_x u + \nabla_y u_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

Выберем в качестве тестовой функции v в (11) функцию $\varphi(x) + \varepsilon\Phi(x,y)$, где $y = x/\varepsilon$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$. Тогда получим

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x, x/\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y_i} + \varepsilon\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x_i}\right]_{y=x/\varepsilon} \quad dx = \tag{13}$$

$$\int_\Omega f(x)\left[\varphi(x)+\varepsilon\Phi(x,x/\varepsilon)\right]\,dx.$$

Так как для любой функции $\Psi(x,y)$ из пространства $\mathcal{D}(\Omega;C^\infty_{per}(Y))$ имеет место двухмасштабная сходимость $a_{ij}(x,x/\varepsilon)\Psi(x,x/\varepsilon)\to a_{ij}(x,y)\Psi(x,y)$ и

$$\int_\Omega a_{ij}^2(x,x/\varepsilon)\Psi^2(x,x/\varepsilon)dx\to\int_{\Omega\times Y}a_{ij}^2(x,y)\Psi^2(x,y)\,dxdy,$$

то в равенстве (13) можно перейти к пределу:

$$\int_{\Omega\times Y}a_{ij}(x,y)\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y_j}\right]\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}+\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y_i}\right]\,dx=\int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{14}$$

Левая часть этого равенства представляет собой билинейную непрерывную и коэрцитивную форму на вещественном гильбертовом пространстве $V=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega;H^1_{per}(Y))$, а правая часть является линейным непрерывным функционалом на V. По теореме Лакса- Мильграма только одна пара $(u(x),u_1(x,y))$ из V может удовлетворять такому уравнению. Поэтому для всей последовательности u^ε имеют место сходимости (12).

Полагая $\varphi=0$ в (14) и пользуясь произвольностью функции $\Phi(x,y)$, получаем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{a_{ij}(x,y)\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y_j}\right]\right\}=0\quad\text{в}\quad\mathcal{D}'\left(\Omega\times Y\right). \tag{15}$$

Если же считать, что $\Phi=0$ в (14), то получаем другое уравнение в области Ω:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int_Y a_{ij}(x,y)\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y_j}\right]\,dy\right\}=f(x)\quad\text{в}\quad\mathcal{D}'\left(\Omega\right). \tag{16}$$

Рассмотрим микро-задачу с параметром $x\in\Omega$ для функции $w^k(x,y)\in H^1_{per}(Y)$ на ячейке периодичности Y:

$$\int_Y a_{ij}(x,y)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}\,dy=-\int_Y a_{kj}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y_j}dy,\quad\forall v\in H^1_{0,per}(Y). \tag{17}$$

По теореме Лакаса-Мильграма она имеет единственное решение для почти всех $x \in \Omega$.

Если решать задачу (15) относительно функции $u_1(x,y)$ методом разделения переменных, то нетрудно проверить, что функция $w^k(x,y)\partial u(x)/\partial x_k$ является решением в пространстве $H^1_{per}(Y)$. В силу единственности $u_1(x,y)$ совпадает с этой функцией. Таким образом,

$$u_1(x,y) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} w^k(x,y). \tag{18}$$

Введем гомогенизированную матрицу

$$a^h_{ik}(x) = \int\limits_Y a_{ik}(x,y) + a_{ij}(x,y)\frac{\partial w^k(x,y)}{\partial y_j} \quad dy$$

и подставим функцию (18) в уравнение (16), тогда получим равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x), \tag{19}$$

т. е.

$$\int_\Omega a^h_{ik}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega f v\,dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{20}$$