§ 4. Полуторалинейные формы.

Форма $a(u,v)$, $a : V \times V \to C$, где V - комплексное гильбертово пространство, называется полуторалинейной, если $a(u_1+u_2,v) = a(u_1,v)+a(u_2,v)$, $a(u,v_1+v_2) = a(u,v_1)+ a(u,v_2)$, $a(\lambda u, \mu v) = \lambda\overline{\mu}a(u,v)$, где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Форма является непрерывной, если найдется положительная константа M такая, что $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$, где $\|u\|^2 =(u,u)$. Коэрцитивной называется такая форма, для которой выполняется оценка $|a(u,u)| \geq \gamma\|u\|^2$ с некоторой положительной постоянной γ.

Пусть $f \in V^*$. Рассмотрим уравнение относительно $v \in V$:

$$a(u,v) = \langle f, u\rangle \quad \forall u \in V. \tag{1}$$

Теорема (Лакса-Мильграма). *Если полуторалинейная форма $a(u,v)$ являетя непрерывной и коэрцитивной, то уравнение (1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Выражение $a(u,v)$ при фиксированном v задает линейный непрерывный функционал $u \to a(u,v)$ на V. По теореме Рисса существует единственный элемент $\varphi(v) \in V$ такой, что $a(u,v) = (u,\varphi(v))$ $\forall u \in V$. Отображение $v \to \varphi(v)$ линейно, непрерывно и взаимно-однозначно. Линейность очевидна. Так как

$$\|z\| = \frac{(z,z)}{\|z\|} \leq \sup_{\|u\|=1} |(z,u)| \leq \|z\|,$$

то в комплексном гильбертовом пространстве справедливо представление для нормы

$$\|z\| = \sup_{\|u\|=1} |(z,u)|.$$

Непрерывность отображения φ вытекает из следующей оценки

$$\|\varphi(v)\| = \sup_{u\neq 0} |(u/\|u\|, \varphi(v))| \leq M\|v\|.$$

Допустим $\varphi(v) = 0$. Тогда $a(v,v) = 0$, а в силу коэрцитивности и $v = 0$. Значит, оператор $\varphi : V \to V$ взаимно-однозначный.

Докажем, что $\varphi(V) = V$. Имеет место оценка

$$\gamma\|v\| \leq |(v/\|v\|, \varphi(v))| \leq \sup_{\|w\|=1} |(w,\varphi(v))| = \|\varphi(v)\|. \tag{2}$$

Из нее вытекает, что множество $\varphi(V)$ замкнуто. Действительно, пусть последовательность $\varphi(v_n)$ сходится к $\varphi_0 \in V$. В силу оценки (2) последовательность v_n сходится к некоторому элементу $v_0 \in V$. По непрерывности $\varphi(v_0) = \varphi_0$. Следовательно $\varphi(V)$ - замкнутое подпространство в V и поэтому, если $\varphi(V) \neq V$, то существует $w \in V$, $\|w\| \neq 0$, такой, что $(w, \varphi(v)) = 0 \ \forall v \in V$. С другой стороны, $(w, \varphi(w)) = a(w, w)$ и $w = 0$ - противоречие. Таким образом, φ - взаимно-однозначно отображает V на все V.

По теореме Рисса правую часть уравнения (1) можно представить однозначно в виде (u, F), где $F \in V$. Теперь ясно, что уравнение имеет единственное решение $v = \varphi^{-1}(F) \in V$. $\square$