## § 3. Слабая сходимость

Пусть $X$ - банахово пространство. Множество линейных непрерывных функционалов $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, определенных в $X$ обозначается $X^*$. Сопряженное пространство $X^*$ является банаховым с нормой

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{X \ni x \neq 0} \frac{\langle f, x \rangle}{\|x\|}.$$

В качестве примера укажем, что любую функцию $v \in L^q(\Omega)$, $1 < q \leq \infty$, ($\Omega$ - произвольная область в $\mathbb{R}^d$) можно трактовать как элемент $f \in (L^p(\Omega))^*$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$, если его определить с помощью следующего равенства

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega v(x) u(x) dx \quad \forall u \in L^p(\Omega). \tag{1}$$

По теореме Ф. Рисса верно и обратное; для любого $f \in (L^p(\Omega))^*$, $1 \leq p < \infty$, существует единственная функция $v \in L^q(\Omega)$, такая что выполняется равенство (1). Поэтому $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$. В случае пространства Соболева принято обозначение $(W_0^{k,p}(\Omega))^* = W^{-k,q}(\Omega)$. Кроме того, при $p = 2$ часто используются обозначения $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$, $W^{-k,2}(\Omega) = H^{-k}(\Omega)$.

Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x_*$ в банаховом пространстве $X$, если

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^* \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В приложениях находит применение следующий критерий слабой сходимости. Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x_*$ тогда и только тогда, когда найдется положительное число $c$ и множество $Y \subset X^*$, плотное в $X^*$, такие что

$$\|x_n\| \leq c \quad \forall n \quad \text{и} \quad \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x_* \rangle \quad \forall f \in Y \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Если $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, то в качестве плотного множества $Y$ годится множество $\mathcal{D}(\Omega)$ и множество ступенчатых функций.

Изложенное выше позволяет доказать следующее утверждение, которое находит важные применения в теории двухмасштабной гомогенизации.

**Утверждение.** *Пусть $f(y)$ - $2\pi$-периодическая функция и $f \in L^2(0, 2\pi)$. Тогда $f(nx) \to a_*$ слабо в $L^2(0, 2\pi)$ при $n \to \infty$, где $2\pi a_* = \int_0^{2\pi} f(y)dy$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{1}_A$ - характеристическая функция интервала $A = (a, b)$, содержащегося в $(0, 2\pi)$. Так как

$$\int_0^{2\pi} f^2(nx)dx \leq \int_0^{2\pi} f^2(y)dy,$$

то достаточно доказать сходимость

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_A(x)(f(nx) - a_*)dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

В гильбертовом пространстве $L^2(0, 2\pi)$ справедливо представление

$$f(nx) = a_* + f_1(nx) + f_2(nx), \quad f_1(y) \equiv \sum_1^\infty a_k \cos ky, \quad f_2(y) \equiv \sum_1^\infty b_k \sin ky,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos ky\, dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin ky\, dy.$$

Так как

$$\left|\int_a^b \cos kny\, dy\right| \leq \frac{2}{kn},$$

то

$$\left|\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_A(x) f_1(nx)dx\right| \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{2|a_k|}{kn} \leq \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \sum_{k=1}^\infty k^{-2}\right)^{1/2} \to 0 \,\text{при}\, n \to \infty.$$

Аналогичное свойство справедливо для функции $f_2$ . Утверждение доказано. Оно допускает обобщение.

Рассмотрим $Y$-периодическую функцию $f(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$, связанную с ячейкой периодичности $Y$:

$$Y = \{0 \leq y_i \leq l_i, i = 1, 2 \cdots d\}.$$

Другими словами, функция $f$ - периодическая по каждой переменной $y_i$ с соответствующим периодом $l_i$. Ячейка $Y'$ является сдвигом ячейки $Y$, если найдется целочисленный вектор $n =(n_1, \cdots, n_d)$, $n_i \in \mathbb{Z}$, такой, что

$$Y' = \{n_i l_i < y_i < n_i l_i + l_i, i = 1, \cdots d\} \equiv Y_n.$$

Очевидно, $\mathbb{R}^d = \bigcup_n Y_n$. При каждом $\varepsilon > 0$ функция $f(x/\varepsilon)$ - $\varepsilon Y$-периодическая, т. е. она периодична по каждой переменной $x_i$ с периодом $\varepsilon l_i$; при этом ячейки $\varepsilon Y$, $\varepsilon Y_n$ получаются из $Y$, $Y_n$ заменой $l_i$ на $\varepsilon l_i$.

**Утверждение.** *Пусть $f(y)$ - $Y$-периодическая функция и $f \in L^2(Y)$. Тогда $f(x/\varepsilon) \to \tilde{f} \equiv |Y|^{-1} \int_Y f dy$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$.*

*Доказательство.* Ясно, что последовательность $f(x/\varepsilon)$ ограничена в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $L^2(\Omega)$, достаточно доказать что,

$$\int_\Omega f(x/\varepsilon)\varphi(x)dx \to \tilde{f} \int_\Omega \varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Пусть $\varphi_\varepsilon(x)$ - кусочно-постоянная функция, такая что $\varphi_\varepsilon|_{\varepsilon Y_k} = \varphi(x_0^k)$, где $x_0^k$ - центр куба $\varepsilon Y_k$. Очевидно, $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ в $L^p(\Omega)$ при любом $1 \leq p < \infty$ и равномерно в $\Omega$. Поэтому

$$\int_\Omega f(x/\varepsilon)\,(\varphi - \varphi_\varepsilon)\,dx \to 0,$$

$$\int_\Omega f(x/\varepsilon)\varphi_\varepsilon dx = \tilde{f} \int_\Omega \varphi_\varepsilon dx \to \tilde{f} \int_\Omega \varphi dx.$$

□

**Определение.** *Пусть банахово пространство $X$ является сопряженным к $Z$, $X = Z^*$ . Последовательность $(X \ni)\{x_n\}$ сходится $*$-слабо к $x(\in X)$, $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ в $X$ , если $\langle x_n, \xi\rangle \to \langle x, \xi\rangle$ для всех $\xi \in Z$ при $n \to \infty$.*

Если $f \in L^\infty(\Omega)$, то как и выше доказывается, что $f(x/\varepsilon) \to \tilde{f}$ $*$ -слабо в $L^\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Приведем известный критерий слабой компактности. Напомним, что пространство $Z$ является сепарабельным, если в нем найдется счетное всюду плотное множество.

**Теорема** (Алаоглу)*Пусть банахово пространство $X$ является сопряженным к сепарабельному банахову пространству $Z$. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена в $X$, то найдется подпоследовательность $\{x_m\}$ и элемент $x \in X$, такие что $x_m \to x$ $*$-слабо.*

В качестве иллюстрации рассмотрим пространство $Z = C(\overline{\Omega})$, где $\Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Сопряженное пространство $Z^* \equiv M(\Omega)$ называется множеством мер Радона. Нетрудно убедиться, что $L^1(\Omega) \subset$

$M(\Omega)$. Действительно, пусть $u \in L^1(\Omega)$, тогда

$$\left| \int_\Omega uf\, dx \right| \le \|f\|_C \|u\|_{L^1}.$$

Значит, $u \in M(\Omega)$. Итак, множество мер Радона можно трактовать как расширение множества интегрируемых функций. Ясно, что

$$\langle u, f \rangle = \int_\Omega uf\, dx, \quad \|u\|_M \le \|u\|_{L^1}.$$

По теореме Алаоглу, если последовательность $u_n \in L^1(\Omega)$ равномерно ограничена, $\|u_n\|_{L^1} \le c$, то найдется подпоследовательность $u_m$ и мера Радона $F \in M(\Omega)$ такие, что

$$\int_\Omega u_m f\, dx \to \langle F, f \rangle, \quad \forall f \in C(\overline{\Omega}).$$

Напомним, что линейное взаимнооднозначное отображение $\kappa$, действующее из банахова пространства $E$ в банахово пространство $F$, называется изометрией, если оно сохраняет норму и отображает $E$ на все $F$.

Пусть $B$ - банахово пространство. При фиксированном $u \in B$ отображение $f \to \langle f, u \rangle$ линейно и непрерывно из $B^*$ в $\mathbb{R}$. Поэтому найдется элемент, который мы обозначим $\kappa u \in (B^*)^*$, такой что $\langle f, u \rangle = \langle \kappa u, f \rangle$, $\forall f \in B^*$. Возникает отображение $\kappa : u \to \kappa u$. В случае, когда $\kappa : B \to (B^*)^*$ - изометрия между $B$ и $(B^*)^*$ (в этом случае говорят, что $(B^*)^*$ изометрично $B$), пространство $B$ называется рефлексивным. Примерами рефлексивных пространств являются пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Пространства $L^1$ и $C(\overline{\Omega})$ не являются рефлексивными. Ограниченное множество в рефлексивном банаховом пространстве является слабо компактным.

Сильная компактность гарантируется следующей теоремой.

**Теорема (Реллих)** *Пусть $\Omega$ - произвольная область в $\mathbb{R}$. Тогда вложение $W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ компактно, т. е. если последовательность $u_n$ ограничена в $W^{1,2}(\Omega)$, $\|u_n\|_{W^{1,2}} \le c$, то найдется подпоследовательность $u_m$ и функция $u \in L^2(\Omega)$ такие, что $u_m \to u$ в $L^2(\Omega)$.*

**Утверждение.** *Пусть $u_n \to u$ слабо в банаховом пространстве $B$ и $f_n \to f$ сильно в $B^*$. Тогда $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.*

*Доказательство* следует из оценки

$$|\langle f_n, u_n\rangle - \langle f, u\rangle| = |\langle f_n - f, u_n\rangle + \langle f, u_n - u\rangle| \leq \|f_n - f\|_{B^*}\|u_n\|_B + |\langle f, u_n - u\rangle|.$$

□

По такой же схеме доказывается и следующее свойство

**Утверждение** *Пусть $u_n \to u$ сильно в $L^2(\Omega)$ и $v_n \to v$ слабо в $L^2(\Omega)$, где $\Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$\int_\Omega u_n v_n \varphi dx \to \int_\Omega uv\varphi dx \quad \forall \varphi \in C(\Omega).$$

*Доказательство* следует из цепочки равенств

$$\left|\int\limits_\Omega (u_n v_n - uv)\varphi dx\right| = \left|\int\limits_\Omega [(u_n - u)v_n\varphi + u(v_n - v)\varphi]dx\right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_C \|v_n\|_{L^2}\|u_n - u\|_{L^2} + \left|\int\limits_\Omega \varphi u(v_n - v)dx\right|.$$

□

Применим изложенную теорию слабой сходимости для решения следующей задачи гомогенизации:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ij}$ - $Y$-периодические функции,

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in C^1(Y), \quad a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

Приведем слабую формулировку задачи (4). Требуется найти функцию $u \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Получим равномерную по $\varepsilon$ оценку для решения $u^\varepsilon$. Примем в (6), что $v = u^\varepsilon$. В силу эллиптичности и неравенства Пуанкаре

$$\gamma \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\,dx, \quad \int_\Omega f u^\varepsilon\,dx \leq c\|f\|_{L^2}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}.$$

Следовательно, $\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c$ равномерно по $\varepsilon$. Так как $H_0^1(\Omega)$ рефлексивно, то найдется функция $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и подпоследовательность $u^\varepsilon$ (сохранено прежнее обозначение), такие что $u^\varepsilon \to u_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$.

Введем вектор-функцию $\mathbf{p}^\varepsilon$ с координатами $p_i^\varepsilon = a_{ij}(x/\varepsilon)\partial u^\varepsilon/\partial x_j$. Найдутся подпоследовательности $p_i^\varepsilon$ (сохранено прежнее обозначение) и функции $p_i^0$ такие, что $p_i^\varepsilon \to p_i^0$ слабо в $L^2(\Omega)$. Переходя к пределу в равенстве (6), получаем

$$\int_\Omega p_i^0 \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Введем функцию $W^\varepsilon(x) = x_k + \varepsilon w^k(x/\varepsilon)$, где $w^k(y)$ - решение следующей микро-задачи на ячейке периодичности $Y$:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial a_{ik}(y)}{\partial y_i}, \quad w^k - \text{периодическая}, \quad \int\limits_Y w^k dy = 0. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что $W^\varepsilon \to x_k$ в $L^2(\Omega)$, и при $a_{ij} \in C^1(Y)$ справедливы равенства

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_i} = \delta_i^k + \frac{\partial w^k}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{9}$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Положим $v = \varphi W^\varepsilon$ в (6) и выберем $v = \varphi u^\varepsilon$ в (9). Вычитая одно равенство из другого, приходим к формуле

$$\int\limits_\Omega p_i^\varepsilon W^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - u^\varepsilon a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f\varphi W^\varepsilon \quad dx = 0. \tag{10}$$

Так как $p_i^\varepsilon \to p_i^0$ слабо в $L^2(\Omega)$ и $W^\varepsilon \to x_k$ сильно в $L^2(\Omega)$, то при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\int_\Omega p_i^\varepsilon W^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \to \int_\Omega p_i^0 x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

По теореме Реллиха можно считать, что $u^\varepsilon \to u_0$ сильно в $L^2(\Omega)$. Функция

$$g_{ik}(y) = a_{ij}(y)\left[\delta_j^k + \frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right]$$

является $Y$ - периодической поэтому имеет место слабая сходимость в $L^2(\Omega)$:

$$a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_j} \equiv g_{ik}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to |Y|^{-1}\int_Y g_{ik}dy \equiv a_{ik}^h.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega u^\varepsilon a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx \to \int\limits_\Omega u_0 a_{ik}^h\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

Таким образом, предельный переход в (10) приводит к равенству

$$\int\limits_\Omega p_i^0 x_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - u_0 a_{ik}^h\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - f\varphi x_k \quad dx = 0. \tag{11}$$

Если в (7) положить $v = x_k\varphi$, то следствием предельных равенств (7) и (11) является формула

$$\int_\Omega a_{ik}^h u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_k^0\varphi \quad dx = 0.$$

Следовательно, $p_k^0 = a_{ik}^h\partial u_0/\partial x_i$. В силу (7) функция $u_0$ - слабое решение задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^h\frac{\partial}{\partial x_j}u_0\right) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

т. е.

$$\int_\Omega a_{ik}^h\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx = \int_\Omega fv\,dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{13}$$

Решение задачи (13) единственно. Ранее было показано, что существует положительная постоянная $\gamma_0$ такая, что $a_{ij}^h\xi_i\xi_j \geq \gamma_0|\xi|^2$. Пусть $w$ - разность двух решений, тогда

$$0 = \int\limits_\Omega a_{ik}^h\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} \geq \gamma_0\int\limits_\Omega |\nabla w|^2\,dx.$$

След функции $w$ на $\partial\Omega$ равен нулю в $L^2(\partial\Omega)$, поэтому $w = 0$.

Доказанная единственность означает, что вся последовательность решений $u^\varepsilon$ задачи (6) сходится слабо в $H_0^1(\Omega)$ к решению $u_0$ задачи (13).