§ 2. Пространства Соболева

В теории дифференциальных уравнений в основном имеют дело с измеримыми функциями. Пусть Ω область в $\mathbb{R}^d$. Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если она является поточечным пределом почти всюду последовательности непрерывных функций, т. е. справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega \backslash N,$$

для некоторой последовательности $u_n \in C(\Omega)$ и для некоторого множества $N \subset \Omega$, имеющего нулевую меру Лебега. Через $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, обозначается множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|u\|_p = \{\int\limits_\Omega |u|^p \, dx\}^{1/p}, \quad (1 \le p < \infty), \quad \|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|, \quad (p = \infty).$$

Здесь

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf_{N\subset\Omega, |N|=0} \sup_{x\in\Omega\backslash N} |u(x)|,$$

где $|N|$ обозначает меру Лебега множества N. Пространство $L^p(\Omega)$ является банаховым, т. е. всякая фундаментальная (по норме $\|\cdot\|_p$) последовательность $u_n \in L^p(\Omega)$ сходится к некоторой функции $u \in L^p(\Omega)$ в норме $\|\cdot\|_p$.

Если $u(x) \in L^p(K)$ для любого компакта K из Ω, то $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$.

Лемма 2.1. (Неравенство Юнга) *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Так как ln вогнутая функция, то

$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b| = \frac{\ln|a|^p}{p} + \frac{\ln|b|^q}{q} \le \ln(\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}).$$

Теперь неравенство леммы вытекает из монотонности функции ln. □

Лемма 2.2. (Неравенство Гельдера)*Пусть* $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$,$1/p + 1/q = 1$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда* $uv \in L^1(\Omega)$ *и* $\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q$.

Доказательство. Опустим тривиальные случаи $p = 1$, $\|u\|_p = 0$, или $\|v\|_q = 0$. Обозначим $a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$, $b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_q}$, тогда по неравенству Юнга

$$\frac{\|uv\|_1}{\|u\|_p\|v\|_q} = \int\limits_\Omega ab\ dx \leq \int\limits_\Omega \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\ dx = 1.$$

Следствие. Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $\infty \geq p \geq q \geq 1$, тогда $\|u\|_q \leq |\Omega|^{1/q-1/p}\|u\|_p$.

Лемма 2.3. (Интерполяционное неравенство)*Пусть* $u \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$, $1 \leq p_2 \leq p \leq p_1 \leq \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$, $\alpha \in [0,1]$. *Тогда* $\|u\|_p \leq \|u\|_{p_1}^\alpha \|u\|_{p_2}^{1-\alpha}$.

Доказательство. По неравенству Гельдера

$$\|u\|_p = \{\int\limits_\Omega |u(x)|^{p\alpha}|u(x)|^{(1-\alpha)p}dx\}^{1/p} \leq \|u\|_{p\alpha\delta}^\alpha |u\|_{p(1-\alpha)\delta'}^{1-\alpha},$$

где $1/\delta + 1/\delta' = 1$. Выберем δ из условий $p\alpha\delta = p_1$, $p(1-\alpha)\delta' = p_2$, тогда $\frac{p(1-\alpha)}{p_2} + \frac{p\alpha}{p_1} = 1$. $\square$

Носителем функции $\varphi \in C(\Omega)$ является множество $\operatorname{supp}\varphi$ таких точек $x \in \Omega$, в которых функция φ отлична от нуля.

Определение.*Множеством основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ состоит из функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и в нем введено следующее понятие сходимости. Последовательность φ_n сходится к нулю в $\mathcal{D}(\Omega)$, если $supp\,\varphi_n \subset K$ $\forall n$ и $D^\alpha\varphi_n \to 0$ равномерно на K $\forall \alpha$, где K - компакт, лежащий строго внутри Ω.*

Определение. $\mathcal{D}'(\Omega)$ - *множество распределений, т. е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Примеры. Каждая функция $u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ определяет линейный функционал $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по формуле

$$\langle U, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega u\varphi\ dx.$$

Часто пишут u вместо U, отождествляя $L^1_{loc}(\Omega)$ с подмножеством в $\mathcal{D}'(\Omega)$. По этой причине элементы из $L^1_{loc}(\Omega)$ называют регулярными распределениями. Примером нерегулярного распределения является мера Дирака

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

Определение. *Для каждого распределения* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *определяется производная* $D^\alpha f$ *как элемент* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *по формуле*

$$\langle D^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi\rangle, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

где

$$D^\alpha f \equiv \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\cdots}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_d), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_d.$$

Определение. (Пространство Соболева)*Для целых неотрицательных* k *и для* $p \geq 1$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u(x) \in L^p(\Omega) : D^\alpha u(x) \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

Отметим, что в этом определении производные понимаются в смысле распределений. Величина

$$\|u(x)\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u(x)\|_p \tag{2.1}$$

является нормой в $W^{k,p}(\Omega)$. Пространства Соболева обладают следующим важным свойством. Пусть Ω - ограниченная область с гладкой границей, тогда $W^{k,p}(\Omega)$ совпадает с замыканием множества $C^k(\overline{\Omega})$ в норме $\|\cdot\|_{k,p}$.

Для замыкания множества $\mathcal{D}(\Omega)$ в норме (2.1) используется обозначение $W_0^{k,p}(\Omega)$. Пространства $W^{k,p}(\Omega)$ и $W_0^{k,p}(\Omega)$ являются банаховыми.

Значения непрерывной функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ однозначно определены на границе области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, поэтому функция $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ определена и ее естественно назвать следом функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Для функции $u \in L^2(\Omega)$ след нельзя определить виду того, что любое изменение функции на границе $\partial\Omega$ не меняет нормы $\|u\|_p$. Однако, если функция принадлежит некоторому пространству Соболева, то след определить можно. Рассмотрим пример. Пусть $u \in C^1(\overline{\Omega})$, где Ω $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Будем исходить из очевидного равенства

$$u(0, x_2) = u(x_1, x_2) - \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y, x_2) dy.$$

Возводя в квадрат и интегрируя по переменной x_2, получаем

$$\int_0^1 u^2(0,x_2)dx_2 \le 2\int_0^1 u^2(x_1,x_2)dx_2 + 2\int_0^{x_1}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(y,x_2)\right|^2 dx_2 dy.$$

Интегрируя по переменной x_1, приходим к неравенству

$$\|u(0,x_2)\|^2_{L^2(0,1)} \le 2\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{1}$$

Воспользуемся тем, что $C^1(\overline{\Omega})$ плотно в $W^{1,2}(\Omega)$, т. е. найдется последовательность $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$ такая, что $u_k \to u$ в норме $\|\cdot\|_{1,2}$. В виду (1) имеем

$$\|u_n(0,x_2) - u_m(0,x_2)\|^2_{L^2(0,1)} \le 2\|u_n - u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{2}$$

Значит, последовательность $u_k(0,x_2)$ фундаментальна в $L^2(0,1)$ и существует функция $v(x_2) \in L^2(0,1)$, такая, что $u_k(0,x_2) \to v(x_2)$ в $L^2(0,1)$. Эта функция и принимается за след функции $u(x_1,x_2)$ двух переменных на границе области Ω, где $x_1 = 0$.

Оказывается, неравенство, подобное неравенству (1), справедливо и в более общем случае для области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с границей, удовлетворяющей условию регулярности Липшица ($\partial\Omega \in C^{0,1}$). Найдется некоторая константа c такая, что

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 < p < \infty. \tag{3}$$

В силу этой оценки определен оператор следа $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, который однозначно сопоставляет каждой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ее след $\gamma u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, определенный на границе области.

Пусть X, Y - два банаховых пространства. Говорят, что X вложено непрерывно в Y, $X \hookrightarrow Y$, если и существует положительная постоянная c , такая что $\|x\|_Y \le c\|x\|_X$ для всех $x \in X$. Вложение X в Y компактно, $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, если замыкание в норме $\|\cdot\|_Y$ каждого ограниченного в X множества компактно в Y .

Следующее утверждение известно как теорема вложения.

Теорема 2.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{0,1}$. *Пусть* $0 \le j < k$, $1 \le p, q < \infty$. *Введем числа* $m_0 = \frac{1}{p} - \frac{k-j}{d}$ *и* $m = \frac{1}{m_0}$ *при* $m_0 \ne 0$.
1. Пусть $m_0 > 0$, *тогда* $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{j,m}(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,m}(\Omega), \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,m_1}(\Omega) \quad \textit{при} \quad m_1 < m.$$

2. Пусть $m_0 < 0$. *Если* $m_0 + \frac{\alpha}{d} = 0$, $\alpha \in [0, 1)$, *то*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^d}).$$

Если $m_0 + \frac{\alpha}{d} < 0$, *то* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$.
3. Пусть $m_0 = 0$, *тогда* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ *при* $q \in [1, \infty)$.

В приложениях часто используется следующее неравенство вложения (обобщенное неравенство Пуанкаре)

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{4}$$

Оно выполняется в следующих случаях: 1) $\int_\Omega u\,dx = 0$; 2) $u = 0$ на части границы ограниченной области Ω; 3) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.