§ 1. Метод двухмасштабных разложений

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Пусть функции $a_{ij}(y)$ определены в кубе

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^d : 0 < y_i < 1, \quad i = 1, \cdots, d\}$$

и допускают периодическое продолжение с периодом 1 по каждой переменной y_j. Рассматривается краевая задача в области Ω для эллиптического уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Свойства эллиптичности обеспечиваются условиями

$$a_{ij}(y) = a_{ji}(y), \quad (i, j = 1, \cdots, d), \quad a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

где γ -положительная постоянная.

Функции $a^{\varepsilon}_{ij}(x) = a_{ij}(x/\varepsilon)$ - периодические с периодом ε. При $\varepsilon \to 0$ они становятся осциллирующими все сильней, поэтому вопрос о вычислении предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u = U$$

становится непростым. Метод двухмасштабных разложений, излагаемый ниже, позволяет установить, что предел U является решением эллиптической задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}U\right) = f(x), \quad U|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

с некоторой постоянной симметричной и положительно-определенной матрицей a^h_{ij}.

Суть метода состоит в том, что решение задачи (1) ищется в виде ряда

$$u(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) \cdots |_{y=x/\varepsilon}, \tag{4}$$

где каждая функция $u^k(x, y)$ зависит от пары переменных $(x, y) \in \Omega \times Y$ и является 1-периодической по каждой переменной y_j. В рамках такого подхода переменная x - называется макро-переменной, а y - микропеременной.

Вводится вектор потока $\mathbf{p}$ с компонентами

$$p_i = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Если считать справедливым представление

$$p_i(x) = p_i^0(x,y) + \varepsilon p_i^1(x,y) + \varepsilon^2 p_i^2(x,y)\cdots|_{y=x/\varepsilon}, \tag{6}$$

то коэффициенты p_i^k можно вычислить, пользуясь тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(x,x/\varepsilon)\right) = f_{x_j}(x,y) + \varepsilon^{-1} f_{y_j}(x,y), \quad y = x/\varepsilon. \tag{7}$$

Действительно, подставляя ряды (4), (6) в (5), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k p_i^k(x,y) = a_{ij}(y)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left[u^k_{x_j}(x,y) + \varepsilon^{-1}u^k_{y_j}(x,y)\right], \tag{8}$$

в котором $y = x/\varepsilon$. Оно тем более будет выполняться, если в нем переменные x, y считать независимыми.

Приравнивая коэффициенты при ε^{-1}, получаем цепочку очевидных соотношений

$$a_{ij}(y)\frac{\partial u^0}{\partial x_j} = 0, \quad 0 = a_{ij}(y)\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial u^0}{\partial x_i} \geq \gamma|\nabla_y u^0|^2.$$

Значит u^0 не зависит от переменной y.

Обратимся снова к равенству (8) и приравняем коэффициенты при ε^0. Тогда получим

$$p_i^0(x,y) = a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^0(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1(x,y)}{\partial y_j}\right) \tag{9}$$

Уравнение (1) эквивалентно равенству $-\partial p_i/\partial x_i = f$. Подставим сюда ряд (6) и приравняем коэффициенты при ε^{-1} и ε^0. В результате придем к системе

$$\frac{\partial p_i^0}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial p_i^0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_i^1}{\partial y_i} = -f. \tag{10}$$

Попытаемся выразить неизвестную функцию $u^1(x,y)$ в терминах другой неизвестной функции $u^0(x,y)$. Подставляя (9) в первое уравнение системы (10), получаем уравнение для $u^1(x,y)$:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i}. \tag{11}$$

Поскольку в правой части переменные разделяются, решение этого уравнения можно искать в виде

$$u^1(x,y) = \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_k} w^k(y), \tag{12}$$

где w^k- периодические по y. Из (11) следует микро-уравнение для w^k:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial a_{ik}(y)}{\partial y_i}, \quad w^k - \text{периодическая}, \quad \int\limits_Y w^k dy = 0. \tag{13}$$

Последнее условие добавлено для единственности.

Введем усреднение по микро-переменной:

$$\tilde{f}(x) = \int\limits_Y f(x,y)dy.$$

В силу периодичности из второго уравнения системы (10) следует равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{p_i^0} = f. \tag{14}$$

Подставляя (12) в (9) и усредняя, получаем представлнение

$$\tilde{p_i^0} = a^h_{ik}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}, \quad a^h_{ik} := \int\limits_Y \left(a_{ik}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial w^k}{\partial y_j}\right) dy. \tag{15}$$

Таким образом, получено искомое уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u^0\right) = f(x). \tag{16}$$

Установим свойства гомогенизированной матрицы a^h_{ij}. Интегрируя по-частям и пользуясь уравнением для w^k, имеем

$$a^h_{ik} - \int\limits_Y a_{ik}dy = \int\limits_Y a_{ij}\frac{\partial w^k}{\partial y_j}dy = -\int\limits_Y w^k\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_j}dy = \int\limits_Y w^k\frac{\partial}{\partial y_p}\left(a_{ps}\frac{\partial w^i}{\partial y_s}\right)dy$$

$$= -\int\limits_Y a_{ps} \frac{\partial w^i}{\partial y_s} \frac{\partial w^k}{\partial y_p} dy.$$

Следовательно, $a^h_{ik} = a^h_{ki}$.

Покажем, что a^h_{ij} - положительно определенная матрица. Умножим уравнение (13) на $w^s(y)$ и проинтегрируем по кубу Y. В результате придем к равенству

$$\int\limits_Y a_{ij} \frac{\partial \left(w^k + y_k\right)}{\partial y_j} \frac{\partial w^s}{\partial y_i} dy = 0,$$

которое позволяет провести следующие вычисления:

$$a^h_{sk} = \int\limits_Y \left(a_{sk}(y) + a_{sj}(y) \frac{\partial w^k}{\partial y_j} \right) dy = \int\limits_Y a_{ij} \frac{\partial \left(w^k + y_k\right)}{\partial y_j} \frac{\partial \left(w^s + y_s\right)}{\partial y_i} dy. \quad (17)$$

Обозначим $\varphi = \xi_k \left(w^k + y_k\right)$ и введем квадратичную функцию $f(\xi) = a^h_{sk}\xi_s\xi_k$. Очевидно

$$f(\xi) = \int\limits_Y a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \geq \gamma \int\limits_Y |\nabla_y \varphi|^2 dy.$$

Допустим существует такой вектор ξ^0, что $|\xi^0| = 1$, $f(\xi^0) = 0$. Тогда

$$\int\limits_Y |\nabla \xi_k \left(w^k + y_k\right)|^2 dy = 0, \quad \xi^0_k \left(w^k + y_k\right) = \text{const}.$$

После дифференцирования приходим к равенству

$$\frac{\partial (\xi^0_k w^k)}{\partial y_i} = -\xi^0_i.$$

а после интегрирования - к равенству $0 = -\xi^0_i$, что приводит к противоречию. Следовательно,

$$\min_{|\xi|=1} f(\xi) = \gamma_0 > 0, \quad f(\xi)|_{\xi=\eta/|\eta|} = a^h_{sk}\eta_s\eta_k/|\eta|^2 \geq \gamma_0, \quad a^h_{sk}\eta_s\eta_k \geq \gamma_0|\eta|^2.$$

Таким образом, a^h_{ij} - положительно определенная матрица.