УТВЕРЖДАЮ
Директор ИГиЛ СО РАН
д.ф-м.н.

_________________ Е.В. Ерманюк
«18» апреля 2022г.

Программа утверждена на заседании
Ученого совета ИГиЛ СО РАН
протокол № 7 от 15.04.2022

Программа
вступительных испытаний в аспирантуру ИГиЛ СО РАН
по научной специальности 1.1.2 – Дифференциальные уравнения
и математическая физика (физико-математические науки)

Для всех поступающих в аспирантуру на обучение по научной специальности 1.1.2 в программу экзамена обязательно включаются следующие разделы: «Вещественный комплексный анализ», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Алгебра», «Геометрия», из которых на вступительном испытании будет задано 2 вопроса, а также раздел «Уравнения с частными производными», из которого на вступительном испытании будет задан 1 вопрос.

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1. Математический анализ

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Основные теоремы дифференциального исчисления, теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора.

Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина, Остроградского, Стокса).

2. Основы функционального анализа

Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств).

Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова).

Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Деви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини.

Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса.

Основные нормированные пространства, Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости.

Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса - Фишера. Ряды и интегралы Фурье.

Элементы теории линейных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Хана - Банаха. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов.

Линейные функционалы. Теорема Банаха - Штейнгауза. Теорема Рисса о представлении.

Теоремы о неподвижной точке. Принцип Банаха, принцип Шаудера.

3. Основы теории функций комплексного переменного

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.

Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.

Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения.

Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей. Формула Кристофера - Шварца.

Предельные значения интеграла типа Коши (формула Сохоцкого - Племеля). Восстановление функций аналитической функции по ее вещественной части на окружности (формула Шварца). Решение задачи Дирихле для круга (формула Пуассона).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. С-Пб: Лань.2008
2. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. С-Пб:Лань, 2004.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и от параметров.

2. Общая теория линейных систем

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы. Построение общего решения. Неоднородные линейные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение n-го порядка. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. Теория устойчивости

Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнения второго порядка. Собственные числа. Собственные функции. Функция Грина.

ЛИТЕРАТУРА

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.:МГУ, изд.7, 2009.

АЛГЕБРА

1. Основные понятия алгебры

Алгебраические операции и алгебраические системы. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

2. Теория определителей

Определитель квадратной матрицы и его простейшие свойства. Поведение определителя при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях системы строк и столбцов матрицы и умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и формула для обратной матрицы. Решение крамеровых систем линейных уравнений.

3. Конечномерные векторные пространства

Линейная зависимость, теорема о замене, база и ранг системы векторов, размерность пространства. Изоморфизм любого конечномерного пространства некоторому пространству строк.

Преобразование координат вектора при смене базы пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы и пересечения подпространств, фактор-пространства.

4. Системы линейных уравнений

Теорема о ранге для матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отыскание). Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений). Связь между множеством решений совместной неоднородной системы и пространством решений соответствующей однородной системы.

5. Многочлены

Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неразложимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Формулы Виета и основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Алгебра линейных преобразований пространств, изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантные подпространства, сужение преобразования на инвариантном подпространстве и индуцирование на фактор-пространстве.

Собственные векторы, собственные значения и корни характеристического многочлена (спектр) линейного преобразования, теорема Гамильтона-Кэли. Корневые подпространства и корневое разложение пространства относительно линейного преобразования. Нильпотентные преобразования и их классификация. Жорданова классификация линейных преобразований и жорданова форма матриц (существование, единственность). Задача о подобии матриц. Функции от матриц, представление многочленами и ряды от матриц.

7. Линейные отображения евклидовых и унитарных пространств

Аксиоматика евклидовых и унитарных пространств, длина вектора и угол между ненулевыми векторами (неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника). Процесс ортогонализации и изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств стандартным пространствам строк, ортогональное дополнение к подпространству и ортогональные разложения евклидовых и унитарных пространств.

Сопряженное линейное отображение и сопряженная матрица. Эрмитовы и симметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Косоэрмитовы и кососимметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Унитарные и ортогональные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Сингулярные числа, сингулярное разложение линейного отображения и матрицы. Полярное разложение линейного преобразования матрицы.

8. Квадратичные формы

Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Положительно определенные формы (критерий Сильвестра). Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. "Курс высшей алгебры". С-Пб:Лань, 2008.
2. Мальцев А. И. "Основы линейной алгебры". М.: Наука, 1970.
3. Фаддеев Д. К. "Лекции по алгебре". М.: Наука, 1984.
4. Воеводин В. В. "Линейная алгебра". М.: Наука, 1980.

5. Кострикин А.И. "Введение в алгебру". М.: Наука, 1977.
6. Винберг Э. Б. "Курс алгебры". М.: Факториал, 1999.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Афинные и ортонормальные системы координат

Формулы замены координат. Вычисление скалярных произведений, длин отрезков и углов.

2. Геометрические основы теории определений

Одинаково и противоположно ориентированные реперы, ориентация пространства. Вычисление объема параллелепипеда, построенного по реперу, через координаты составляющих векторов. Геометрический смысл детерминанта матрицы Грамма. Векторное и смешанное произведение в 3-мерном ориентированном евклидовом пространстве.

3. Афинные подпространства

Задание афинного подпространства параметрическим уравнением и системой уравнений. Существование и единственность афинного отображения, имеющего заданные значения в заданных точках. Афинные свойства фигур (прямолинейность, выпуклость, связность и т.п.). Инвариантные подпространства афинных и ортогональных преобразований. Разложение афинного отображения в произведение растяжения и ортогонального отображения.

4. Линии и поверхности 2-го порядка

Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Строение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-й степени. Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) для определения афинного типа поверхности 2-го порядка.

5. Теория кривых

Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.

6. Теория поверхности

Первая и вторая квадратичная форма. Универсальная связь между первой и второй квадратичными формами поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхностей и ее многомерном обобщении (римановой геометрии).

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. НИЦ РХД, 2005.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.ФИЗМАТЛИТ.1974

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Введение

Характеристика уравнений в частных производных. Постановка задач для уравнений математической физики. Понятие о корректности постановок. Пример Адамара.

2. Гиперболические уравнения

Приведение к каноническому виду гиперболической системы 1-порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши и смешанная задача в квадрате для этой системы. Теорема существования и единственности. Одномерное волновое уравнение (струна). Постановка задач и формулы для их решения. Задача Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве формула Кирхгоффа. Принцип Гюйгенса. Метод спуска для получения решения двумерного волнового уравнения. Получение решения неоднородного волнового уравнения методом толчков (интеграл Дюамеля). Интеграл энергии. Теорема единственности решения задачи Коши и смешанной задачи. Априорные оценки решения волнового уравнения.

3. Параболические уравнения

Принцип максимума. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения уравнения теплопроводности по начальным значения температуры (задача Коши). Разностный метод решения уравнения теплопроводности. Явные и неявные разностные схемы. Метод прогонки решения одномерных неявных трехточечных разностных уравнений.

4. Эллиптические уравнения

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Грина. Преобразование Кельвина. Разложение гармонической функции в окрестности бесконечности и в окрестности особой точки. Принцип максимума для эллиптических уравнений второго порядка. Единственность решения задачи Дирихле и задачи Неймана. Метод Перрона решения задач Дирихле. Свойства субгармонических функций Барьеры. Условия регулярности граничной точки. Свойства объемного потенциала, свойства потенциалов простого и двойного слоя. Логарифмический потенциал. Сведения задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа к интегральным уравнениям. Исследование интегральных уравнений. Краевые задачи для уравнений Лапласа в шаре и в полупространстве. Функция Грина.

5. Метод Фурье

Преобразование Фурье. Формула Фурье. Простейшие оценки типа вложения. Решение с помощью преобразования Фурье задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. Гиперболичность, как условие корректности задачи Коши. Применение метода Фурье к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Задача о колебаниях в ограниченном объеме. Схема метода разделения переменных. Решение уравнения Лапласа в пространстве методом Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными (перевод Т.Н. Рожковской под ред. Н.Н. Уральцевой) – Новосибирск: Тамара Рожковская (Университетская серия; Т.7), 2003.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.Наука, 1988.
3. Лионс Ж.-Л. –Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, перевод с фр., изд.3, 2010.

Старший научный сотрудник
д.ф.-м.н. С.А. Саженков