

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

ВЫПУСКНАЯ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

аспиранта Угрюмова Ростислава Игоревича

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГОСТИ С
ПРИЛОЖЕНИЕМ К ДЕФОРМИРОВАНИЮ КОМПОЗИТНЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

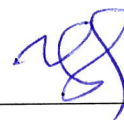
Направленность 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела»

Научный руководитель:



д.ф.-м.н., проф.,
академик Аннин Б. Д.

Аспирант:



Новосибирск 2023

Оглавление

Введение		3
Глава 1. Метод Кельвина и упругость по Коши		6
1.1	Метод Кельвина исследования упругих свойств анизотропного тела	6
1.2	Оценка возможности фазового мартенситного превращения	8
1.3	Энергия тела, упругого по Коши	10
1.4	Единственность решения задачи линейной теории упругости по Коши	13
Глава 2. Моментная теория упругости		15
2.1	Моментная теория упругости Коссера	15
2.2	Теория Коссера со стеснённым вращением	17
2.3	Задача о чистом сдвиге	19
2.4	Чисто моментное решение	25
2.5	Чисто моментные решения задач о трещинах продольного сдвига и отрыва	27
2.6	Чисто моментные решения плоской задачи в декартовой системе координат	31
Заключение		38
Список литературы		40

Введение

Данная работа посвящена неклассическим моделям теории упругости. Она разделена на две главы. Первая глава связана с так называемым методом Кельвина исследования анизотропии упругих свойств материала и упругости по Коши. Во второй части обсуждаются вопросы моментной теории упругости, в частности, теории псевдоконтинуума Коссера.

Как известно, в классической линейной теории упругости (упругость по Грину) на матрицу модулей упругости накладываются следующие ограничения: она должна обладать главной симметрией и быть положительно определённой. Оба этих требования связаны с понятием об упругой энергии тела. Если матрица несимметрична, то не существует упругого потенциала, через который может быть выражена связь между тензорами напряжений и деформаций. Если матрица не положительно определена, энергия деформации может оказаться отрицательной, что противоречит законам природы.

Рассматривается также линейная теория упругости по Коши, в которой единственным ограничением на матрицу модулей является её невырожденность [1,2]. Несимметричные матрицы модулей упругости используются в вязкоупругости [3,4], фотоупругости [5], выводятся при определении эффективных упругих модулей перфорированных пластин [6,7]. В работах [8,9] решены некоторые задачи с применением несимметричной матрицы модулей, в работе [10] представлены матрицы модулей упругости для всех видов кристаллографической симметрии.

В первой главе данной работы речь идёт о так называемом методе Кельвина. Он заключается в применении собственных модулей и собственных состояний упругого тела в том числе для выражения величины удельной энергии [11-13]. Например, в работах [14-16] предложено использовать метод Кель-

вина для оценки возможности фазовых переходов в сплавах с памятью формы. С помощью модифицированного для несимметричной матрицы метода Кельвина удаётся найти некоторое выражение упругой псевдоэнергии, которая всегда положительна, учитывает кососимметричную составляющую и равна классической энергии в случае упругости по Грину. Также в первой главе обсуждены вопросы единственности решения задачи упругости по Коши с граничными условиями Неймана, Дирихле или смешанными условиями.

Вторая глава посвящена моментной теории упругости. В классической теории напряжений считается, что через элемент поверхности тела действует только главный вектор силы. Главным моментом при этом как правило пренебрегают. Это приводит к тому, что закон сохранения момента импульса сводится к закону парности касательных напряжений. Существуют, однако, моментные теории, призванные исправить этот недостаток [17-22]. Моментные теории применяются, например, при описании напряжённых состояний с большими градиентами напряжений, областей рядом с угловыми точками и зернистых сред.

В теории Коссера наряду с тензорами напряжений и деформаций рассматриваются тензоры моментных напряжений и изгиба-кручения. Кроме того, в общей теории вектор поворота считается неизвестной величиной, независимой от вектора перемещения. Существует также упрощённая теория псевдоконтинуума Коссера (или моментная теория со стеснённым вращением). В ней считается, что повороты связаны с перемещениями, как в классической теории. В данной работе с помощью теории псевдоконтинуума Коссера решена плоская задача о чистом сдвиге, где под чистым сдвигом подразумевается состояние, в котором нормальные напряжения равны нулю [23,24].

Кроме того, предложена идея чисто моментного решения. Смысл его заключается в том, что, приняв некоторую гипотезу, мы можем «модифицировать» классическое решение путём добавления к нему некоторого чисто моментного решения. Полученная сумма будет моментным решением задачи. С помощью предложенного метода получены решения задач о трещине

продольного сдвига и трещине отрыва [25,26]. Наконец, рассмотрены все известные классы чисто моментных решений для задачи плоской деформации в декартовой системе координат. Каждый из классов описан и представлен графиком.

Глава 1. Метод Кельвина и упругость по Коши

1.1 Метод Кельвина исследования упругих свойств анизотропного тела

Пусть σ_{ij} – симметричный тензор напряжений, а ε_{kl} – симметричный тензор деформаций. В классической линейной теории упругости обобщённый закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.1)$$

Здесь A_{ijkl} – матрица модулей упругости. Если она симметрична и положительно определена, то такой материал называют упругим по Грину или гиперупругим. Симметрия осуществляется как внутри первой и второй пар индексов, так и между ними:

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}.$$

Симметрии внутри пар являются следствием симметрий тензоров напряжений и деформаций и называются минорными симметриями. Симметрия между парами называется главной симметрией.

Используется также представление Фохта (Фойгта). Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, \sigma_5 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \sigma_6 = \sqrt{2}\sigma_{12}; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Так мы получаем шестимерные векторы напряжений и деформаций, описывающие соответственно напряжённое и деформированное состояние тела. Обобщённый закон Гука (1.1) тогда можно записать с помощью матрицы модулей упругости второго ранга:

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j \quad (1.2)$$

или просто

$$\sigma = A\varepsilon. \quad (1.3)$$

Эта матрица 6×6 симметрична, и потому содержит 21 неизвестную константу в общем виде.

Как и любая симметричная матрица, матрица модулей упругости имеет спектральное разложение

$$A = T\Lambda T^T, \quad (1.4)$$

где T – ортогональная матрица, Λ – диагональная. Как известно, матрица Λ состоит из собственных значений, T – из собственных вектор-столбцов.

Совместим последние два уравнения и получим

$$\sigma = T\Lambda T^T \varepsilon$$

или

$$T^T \sigma = \Lambda T^T \varepsilon. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$T^T \sigma = \tilde{\sigma}, \quad T^T \varepsilon = \tilde{\varepsilon},$$

тогда закон Гука (1.5) примет вид

$$\tilde{\sigma} = \Lambda \tilde{\varepsilon} \quad (1.6)$$

или просто

$$\tilde{\sigma}_i = \lambda_i \tilde{\varepsilon}_i. \quad (1.7)$$

Как известно, столбцы ортогональной матрицы T задают ортонормированный базис в пространстве векторов. То есть в нашем случае мы получили шесть взаимно ортогональных напряжённых (деформированных) состояний, которые определяются исключительно упругими свойствами материала. Можно сказать, что это характеристические напряжённые (деформированные) состояния. Мы записываем компоненты шестимерных векторов напряжений и деформаций в этом характеристическом базисе, и выясняется, что соответствующие компоненты векторов пропорциональны друг другу, а коэффициентами пропорциональности оказываются собственные числа.

Удельная энергия упругой деформации, которая записывается с помощью квадратичной формы матрицы A будет равна

$$2\Phi = \sigma \cdot \varepsilon = \varepsilon^T A \varepsilon = \varepsilon^T T \Lambda T^T \varepsilon = \tilde{\varepsilon}^T \Lambda \tilde{\varepsilon} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon}, \quad (1.8)$$

то есть квадратичной форме матрицы Λ с "повёрнутыми" деформациями в качестве переменных. Иначе можно записать:

$$2\Phi = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6^2. \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что значения λ_i являются ещё и экстремумами функции удельной энергии в пространстве $(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3, \tilde{\varepsilon}_4, \tilde{\varepsilon}_5, \tilde{\varepsilon}_6)$. В итоге энергия представляется в виде суммы шести независимых слагаемых.

По сути, мы разбили 21 модуль упругости из матрицы A на две группы: 15 независимых модулей упругости в матрице T описывают характер анизотропии тела и ещё 6 модулей λ_i являются экстремумами функции удельной энергии.

1.2 Оценка возможности фазового мартенситного превращения

Метод Кельвина удобно применять для различных манипуляций с упругой энергией. В статьях [14-16] метод Кельвина применяется для оценки возможности фазового мартенситного превращения. Идея заключается в следующем: многие металлы и сплавы при разных условиях могут находиться в различных фазовых состояниях с различными кристаллическими решётками. Соответственно, при одних и тех же деформациях энергия разных состояний будет разной. Предполагается, что тело стремится перейти в то состояние, энергия которой при данных деформациях ниже. Остаётся только выразить энергию для обоих состояний и сравнить.

Поскольку энергия в «повернутых» деформациях записывается в виде суммы шести независимых слагаемых, её очень удобно сравнивать почленно. Воспользуемся методом Кельвина.

В качестве материала возьмём сплав CoNi. Он имеет две фазы: кубическую и гексагональную. Будем моделировать их с помощью кубической и трансверсально-изотропной симметрий соответственно. Для кубической симметрии матрица модулей упругости имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{11} & A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{21} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Выпишем собственные модули λ_i и матрицу T :

$$\lambda_1 = A_{11} + 2A_{21}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = A_{11} - A_{21}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = A_{44}; \quad (1.11)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Всё то же для трансверсально-изотропной симметрии:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{11} & A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{21} \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

$$\lambda_{1,2} = [A_{11} + A_{21} + A_{33} \pm \sqrt{(A_{11} + A_{21} - A_{33})^2 + 8A_{31}^2}]/2, \quad (1.14)$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = A_{11} - A_{21}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = A_{44};$$

$$T = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) \cos \alpha & -(1/\sqrt{2}) \sin \alpha & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ (1/\sqrt{2}) \cos \alpha & -(1/\sqrt{2}) \sin \alpha & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.15)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}A_{31}}{A_{11} + A_{21} - A_{33}}.$$

Упругие модули возьмём из работы [27] для кубической фазы (в 10^{11} Па):

$$A_{11} = 2.387, \quad A_{21} = 1.553, \quad A_{44} = 2.630 \quad (1.16)$$

и гексагональной:

$$A_{11} = 3.260, \quad A_{21} = 1.606, \quad A_{31} = 0.954, \quad A_{33} = 3.584, \quad A_{44} = 1.480. \quad (1.17)$$

Выпишем энергию:

$$\begin{aligned} 2\Phi^{(c)} &= 5.493\tilde{\varepsilon}_1^2 + 0.834(\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2) + 2.630(\tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2), \\ 2\Phi^{(h)} &= 5.719\tilde{\varepsilon}_1^2 + 2.731\tilde{\varepsilon}_2^2 + 1.654(\tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) + 1.480(\tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Энергию в разных фазах теперь можно сравнивать почленно. Видно, что при преобладании деформаций $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$ и $\tilde{\varepsilon}_3$, которые соответствуют различным видам растяжения/сжатия, тело будет стремиться перейти в кубическую фазу, при преобладании сдвиговых деформаций $\tilde{\varepsilon}_4$, $\tilde{\varepsilon}_5$ и $\tilde{\varepsilon}_6$ тело будет стремиться перейти в гексагональную фазу. Например, на Рис. 1.1 приведён график зависимости $2(\Phi^{(h)} - \Phi^{(c)})$ от $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_4$.

1.3 Энергия тела, упругого по Коши

Кроме упругости по Грину, рассматривается также упругость по Коши. Предположим, что к матрице модулей упругости A предъявляется толь-

Рис. 1.1: Зависимость $2(\Phi^{(h)} - \Phi^{(c)})$ от ε_1 и ε_4 при $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$ для сплава CoNi

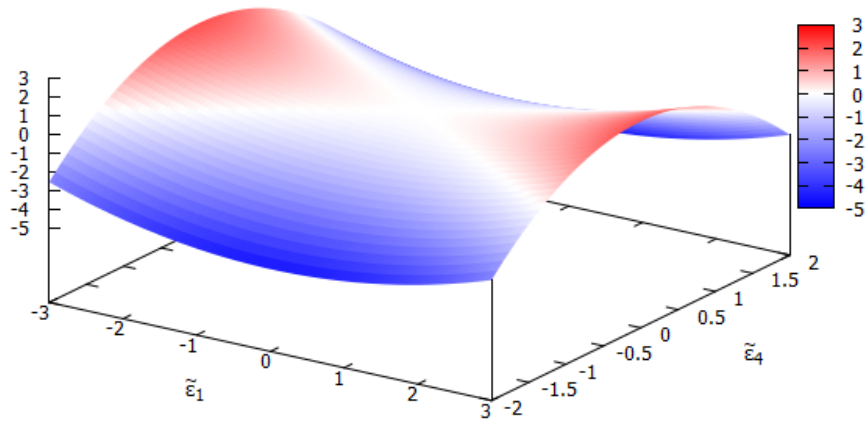
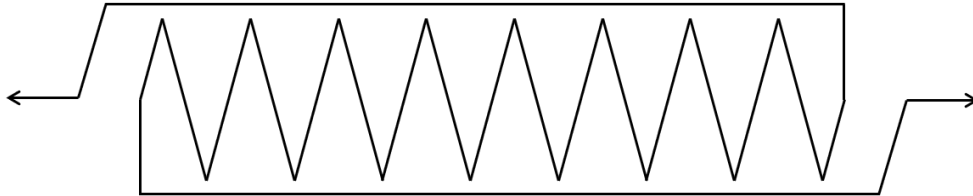


Рис. 1.2: Модель тела с отрицательным модулем Юнга



ко одно требование: она не должна быть вырожденной (в противном случае взаимно однозначной связи между напряжениями и деформациями нет). То есть будем считать, что A может быть несимметричной и не положительно определённой. Если матрица не положительно определена, то её квадратичная форма может принимать и отрицательные значения. Отсюда следует, что энергия упругой деформации может быть отрицательна, что на практике невозможно.

На Рис. 1.2 приведён пример модели тела с отрицательным модулем Юнга. Если растягивать эту пружинку, она начинает сжиматься. Следовательно, работа сил деформации отрицательна. Этого не может быть. Посмотрим, как ещё можно выразить энергию.

Произвольная невырожденная матрица представляется в виде произведения двух ортогональных матриц T и F , а также диагональной матрицы Λ

следующим образом:

$$A = T\Lambda F^T. \quad (1.19)$$

Тогда

$$\sigma = T\Lambda F^T \varepsilon \quad (1.20)$$

или

$$\tilde{\sigma} = \Lambda \tilde{\varepsilon} \quad (1.21)$$

по аналогии с классической упругостью, однако здесь

$$\tilde{\sigma} = T^T \sigma, \quad \tilde{\varepsilon} = F^T \varepsilon,$$

то есть напряжения и деформации взяты в разных базисах.

Матрица Λ является положительно определённой. Действительно, рассмотрим матрицы $A^T A$ и AA^T :

$$A^T A = F\Lambda^2 F^T, \quad AA^T = T\Lambda^2 T^T. \quad (1.22)$$

Другими словами, Λ – это матрица собственных значений положительно определённых матриц $\sqrt{A^T A}$ и $\sqrt{AA^T}$, а F и T – их матрицы собственных векторов. Таким образом, матрица Λ положительно определена, поскольку является корнем из другой положительно определённой матрицы.

Таким образом, удельная псевдоэнергия в виде

$$2\Phi' = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \quad (1.23)$$

всегда будет положительной. Также нетрудно заметить, что эта энергия, вообще говоря, не совпадает с классической. Совпадает она только тогда, когда A положительно определена и $F = T$.

Таким образом, удельная псевдоэнергия упругой деформации (1.23) оказывается положительной для любого упругого по Коши материала при произвольных деформациях. В случае, если матрица A положительно определена, эта новая энергия оказывается равной энергии в её классическом понимании.

1.4 Единственность решения задачи линейной теории упругости по Коши

За вопросом об энергии логично следует вопрос о единственности решения. Повторим классическое доказательство, сняв ограничения с матрицы модулей упругости.

Предположим, в упругом теле с объёмом V выполняются уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad (1.24)$$

и обобщённый закон Гука

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl} = A_{ijkl}u_{k,l}. \quad (1.25)$$

На границе $S = S_\sigma + S_u$ заданы граничные условия в напряжениях

$$\sigma_{ij}n_j = p_i, \quad x_i \in S_\sigma \quad (1.26)$$

и в перемещениях

$$u_i = g_i, \quad x_i \in S_u. \quad (1.27)$$

Здесь n_i – компоненты вектора внешней нормали, p_i и g_i – функции, заданные на границе.

Пусть существует два решения этой задачи: $(u', \varepsilon', \sigma')$ и $(u'', \varepsilon'', \sigma'')$. Обозначим их разность как $(u^* = u' - u'', \varepsilon^* = \varepsilon' - \varepsilon'', \sigma^* = \sigma' - \sigma'')$. Тогда уравнения равновесия и граничные условия для этого решения примут вид

$$\sigma_{ij,i}^* = 0, \quad (1.28)$$

$$\sigma_{ij}^*n_j = 0, \quad x_i \in S_\sigma \quad (1.29)$$

$$u_i^* = 0, \quad x_i \in S_u. \quad (1.30)$$

Домножим уравнения равновесия (1.28) на u_i и проинтегрируем по объёму:

$$\int_V u_i^* \sigma_{ij,j}^* dV = 0, \quad (1.31)$$

применим интегрирование по частям:

$$\int_V (u_i^* \sigma_{ij}^*)_{,j} dV = \int_V u_{i,j}^* \sigma_{ij}^* dV \quad (1.32)$$

и формулу Гаусса-Остроградского

$$\int_S u_i^* \sigma_{ij}^* n_j dS = \int_V \varepsilon_{ij}^* \sigma_{ij}^* dV. \quad (1.33)$$

Левая часть равна нулю благодаря граничным условиям. В правой части оказывается классическая энергия упругой деформации. В силу произвольности объёма

$$2\Phi = \varepsilon_{ij}^* \sigma_{ij}^* = 0. \quad (1.34)$$

В этом месте в классической теории говорят, что, поскольку матрица A положительно определена, отсюда следует, что напряжения и деформации в обоих решениях полностью совпадают, а перемещения совпадают с точностью до сдвига как жёсткого целого. Однако можно заметить, что для этого достаточно и отрицательной определённости матрицы. Вопросы возникают лишь относительно неопределённой матрицы A . В данном случае либо предложенное доказательство не годится, либо, что вполне возможно, единственности нет. Несимметричность матрицы A вовсе никак не влияет на единственность решения, поскольку квадратичная форма несимметричной матрицы равна квадратичной форме её симметричной части.

Глава 2. Моментная теория упругости

2.1 Моментная теория упругости Коссера

Как известно, в классической теории напряжений считается, что через элементарную площадку действует только главный вектор силы. Главным моментом при этом пренебрегают. Эта гипотеза приводит к тому, что закон сохранения момента импульса сводится к закону парности касательных напряжений. То есть в классической теории тензор напряжений считается симметричным.

В теории Коссера, напротив, наряду с вектором сил действует и вектор моментов. Тогда из уравнения сохранения импульса получается система уравнений равновесия/движения, как и в классической теории:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + X_1 = 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + X_2 = 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

где σ_{ij} – компоненты несимметричного тензора напряжений, X_i – компоненты вектора массовых сил. Индекс « i » после запятой здесь и далее означает дифференцирование по i -той переменной. В случае динамической задачи по принципу Даламбера к правой части следует добавить инерционный член.

Из закона сохранения момента импульса также следует отдельная система уравнений:

$$\begin{cases} \mu_{11,1} + \mu_{21,2} + \mu_{31,3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} + Y_1 = 0, \\ \mu_{12,1} + \mu_{22,2} + \mu_{32,3} - \sigma_{13} + \sigma_{31} + Y_2 = 0, \\ \mu_{13,1} + \mu_{23,2} + \mu_{33,3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} + Y_3 = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где μ_{ij} – компоненты несимметричного тензора моментных напряжений, Y_i –

вектор массовых моментов. Наборы (2.35), (2.36) задают систему уравнений равновесия для среды Коссера. Уравнения движения получаются в соответствии с принципом Даламбера, если добавить к правым частям инерционный член.

Кинематика в средах Коссера также отличается от классики. Элементарный объём здесь считается ориентированным, поэтому наравне с тремя независимыми перемещениями u_i вводятся ещё и три независимых от них и между собой поворота ω_i . Таким образом получается так называемый континуум Коссера, шестимерное пространство перемещений элементарного объёма.

Введём ещё несимметричный тензор деформации ε :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} - \omega_3 & u_{3,1} + \omega_2 \\ u_{1,2} + \omega_3 & u_{2,2} & u_{3,2} - \omega_1 \\ u_{1,3} - \omega_2 & u_{2,3} + \omega_1 & u_{3,3} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

и ещё один несимметричный тензор изгиба-кручения \varkappa – аналог тензора деформации для вращательного движения:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \omega_{3,1} \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \omega_{3,2} \\ \omega_{1,3} & \omega_{2,3} & \omega_{3,3} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

В качестве уравнений состояния возьмём линейный изотропный закон:

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\varepsilon_{ji} + (\mu - \alpha)\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.39)$$

Здесь λ и μ – постоянные Ламе, а α , β , γ и ε – новые упругие константы.

42 уравнения (2.35)–(2.39) содержат 42 переменные. Таким образом, мы получаем замкнутую систему уравнений, описывающих движение линейной изотропной среды Коссера. Стоит заметить, что в этом случае на границе должны быть заданы не только вектор перемещения или вектор напряжений, как в классической теории, но и вектор поворота или вектор моментных напряжений.

2.2 Теория Коссера со стеснённым вращением

В данной работе изучается в основном упрощённая теория Коссера, которая называется также теорией псевдоконтинуума Коссера или моментной теорией Коссера со стеснённым вращением. Будем считать, что вектор поворота в точке равен среднему повороту поля перемещений. Другими словами,

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \bar{u}. \quad (2.40)$$

или

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}), \\ \omega_2 = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}), \\ \omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}). \end{cases} \quad (2.41)$$

Тогда тензор деформации (2.37) автоматически принимает вид, как в классической теории (соотношения Коши):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Также придётся заменить несколько первых уравнений из (2.39) на

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}), \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} + \sigma_{21} = 4\mu\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} + \sigma_{31} = 4\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} + \sigma_{32} = 4\mu\varepsilon_{23}, \end{cases} \quad (2.43)$$

Всё остальное переносится из общей теории Коссера.

Теперь выразим из второй группы уравнений равновесия (2.36) без массовых моментов разность касательных напряжений, то есть кососимметрическую часть тензора напряжений, затем последовательно подставим туда

вторую группу определяющий соотношений (2.39), выражения для тензора изгиба-кручения (2.38) и определение вектора поворота (2.41). Получим:

$$\begin{cases} \sigma_{12} - \sigma_{21} = -\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\Delta\omega_3, \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} = \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\Delta\omega_2, \\ \sigma_{23} - \sigma_{32} = -\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\Delta\omega_1. \end{cases} \quad (2.44)$$

Наконец, с помощью (2.43) и (2.44) выразим тензор напряжений и подставим в уравнения равновесия (2.35) без массовых сил. В операторном виде полученное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\mu\Delta\bar{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta(\nabla \times (\nabla \times \bar{u})) = 0. \quad (2.45)$$

Это система из трёх дифференциальных уравнений четвёртого порядка в перемещениях. Она описывает движение среды Коссера со стеснённым вращением. Воспользуемся теперь следующим свойством дифференциальных операторов: $\Delta\bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u})$, и перепишем уравнение (2.45) в следующем виде:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) + \left(\frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta - \mu\right)(\nabla \times (\nabla \times \bar{u})) = 0. \quad (2.46)$$

Заметим, что $\nabla \times \bar{u} = 2\bar{\omega}$ – вектор поворота, а $\nabla \cdot \bar{u} = \theta$ – величина, называемая относительным изменением объёма. Из (2.46) следует

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\theta + \left(\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\Delta - \mu\right)(\nabla \times \bar{\omega}) = 0. \quad (2.47)$$

Мы можем ввести обозначения:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\theta = \psi, \\ 2\left(\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta\right)\bar{\omega} = \bar{\varphi}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Тогда из (2.47) следует:

$$\begin{cases} \nabla\psi = \nabla \times \bar{\varphi}, \\ \nabla \cdot \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Последнее уравнение добавлено, чтобы замкнуть систему. Оно непосредственно следует из (2.48) и известного факта, что дивергенция ротора равна

нулю. Эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2} - \varphi_{3,3} = 0, \\ \psi_{,1} + \varphi_{2,3} - \varphi_{3,2} = 0, \\ \psi_{,2} - \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} = 0, \\ \psi_{,3} + \varphi_{1,2} - \varphi_{2,1} = 0. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Таким образом, система уравнений в частных производных четвёртого порядка (2.45) была сведена к системам (2.48) и (2.50). Первая из них состоит из четырёх отдельных уравнений в частных производных. Относительное объёмное расширение подчиняется алгебраическому уравнению, как и в классической теории, в то время как три поворота подчиняются уравнению Гельмгольца, в чём и заключается основное отличие от классики (где повороты являются решениями уравнения Пуассона). Если принять «моментные» коэффициенты γ и ε за ноль, будет осуществлён предельный переход к уравнениям классической теории. Система (2.50) называется системой Моисила-Теодореску. Она связывает правые части уравнения (2.48).

Отдельно стоит рассмотреть случай плоской деформации. Система Моисила-Теодореску тогда просто сведётся к условиям Коши-Римана, поэтому системе (2.48) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu)\theta = \operatorname{Re} \varphi, \\ 2(\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta)\omega = \operatorname{Im} \varphi, \end{array} \right. \quad (2.51)$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция комплексной переменной. Данная система полностью описывает движение среды Коссера в случае плоской деформации.

2.3 Задача о чистом сдвиге

Для иллюстрации отличия решений, полученных с помощью модели псевдоконтинуума Коссера, от классических решений, рассмотрим простую

задачу плоской деформации о чистом сдвиге. Положим

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}).$$

Из представленных ранее уравнений можно получить следующие компоненты тензоров:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1});$$

$$\varkappa_{13} = \omega_{3,1}, \quad \varkappa_{23} = \omega_{3,2};$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} + \sigma_{21} = 4\mu\varepsilon_{12};$$

$$\mu_{13} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{13}, \quad \mu_{23} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{23}.$$

Все остальные компоненты в плоском случае равны нулю. Добавляем сюда уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} = 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \\ \mu_{13,1} + \mu_{23,2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0. \end{cases}$$

Состояние чистого сдвига подразумевает равенство нулю нормальных напряжений: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$. Тогда в соответствии с уравнениями состояния равны нулю и диагональные компоненты тензора деформаций: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Тогда из соотношений Коши и уравнений равновесия следует, что

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} = 0, \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \sigma_{21,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_1 = u_1(x_2), \quad u_2 = u_2(x_1), \quad \sigma_{21} = \sigma_{21}(x_1), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_2)$$

Выразим моментные напряжения через перемещения:

$$\mu_{13} = \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)u_{2,11}, \quad \mu_{23} = -\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)u_{1,22}$$

и получим выражения для напряжений:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)(u_{1,222} - u_{2,111}),$$

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = 2\mu(u_{1,2} + u_{2,1});$$

$$\begin{aligned}\sigma_{21}(x_1) &= \mu(u_{1,2}(x_2) + u_{2,1}(x_1)) - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{1,222}(x_2) - u_{2,111}(x_1)), \\ \sigma_{12}(x_2) &= \mu(u_{1,2}(x_2) + u_{2,1}(x_1)) + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{1,222}(x_2) - u_{2,111}(x_1));\end{aligned}$$

При помощи уравнений равновесия получаем выражения для перемещений:

$$\begin{aligned}\mu u_1 + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)u_{1,22} &= \mu(c_1x_2 + c_0), \\ \mu u_2 + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)u_{2,11} &= \mu(k_1x_1 + k_0);\end{aligned}$$

В зависимости от знака, который принимают константы, существует два класса решений:

$$\begin{cases} u_1 = c_0 + c_1x_2 + c_2e^{\lambda_1x_2} + c_3e^{-\lambda_1x_2}, \\ u_2 = k_0 + k_1x_1 + k_2e^{\lambda_1x_1} + k_3e^{-\lambda_1x_1}, \end{cases} \quad (2.52)$$

где $\lambda_1 = 2\sqrt{-\mu/(\gamma + \varepsilon)}$, и

$$\begin{cases} u_1 = c_0 + c_1x_2 + c_2 \sin(\lambda_2x_2) + c_3 \cos(\lambda_2x_2), \\ u_2 = k_0 + k_1x_1 + k_2 \sin(\lambda_2x_1) + k_3 \cos(\lambda_2x_1), \end{cases} \quad (2.53)$$

где $\lambda_2 = 2\sqrt{\mu/(\gamma + \varepsilon)}$.

Возьмём тело в виде квадрата 2×2 с центром в начале координат. Наложим на частное решение следующие условия:

$$\begin{cases} u_2 = 0, \\ u_1(0, 0) = 0.0, \\ u_1(1, 1) = 0.1, \\ u_1(-1, -1) = -0.1, \\ \omega(0, 0) = const. \end{cases} \quad (2.54)$$

Последнее условие – поворот в начале координат, возьмём с разными значениями в правой части. Результаты для решения (2.52) представлены на Рис. 2.3, а для решения (2.53) – на Рис. 2.4. Видно, что при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$ решения (2.52) и (2.53) совпадают. Случай $\omega(0, 0) = -0.005$ совпадает с классическим решением.

Изучим также влияние материальных параметров λ_1 и λ_2 на те же решения с теми же граничными условиями ($\omega(0, 0) = 0.0$). На Рис. 2.5 и Рис.

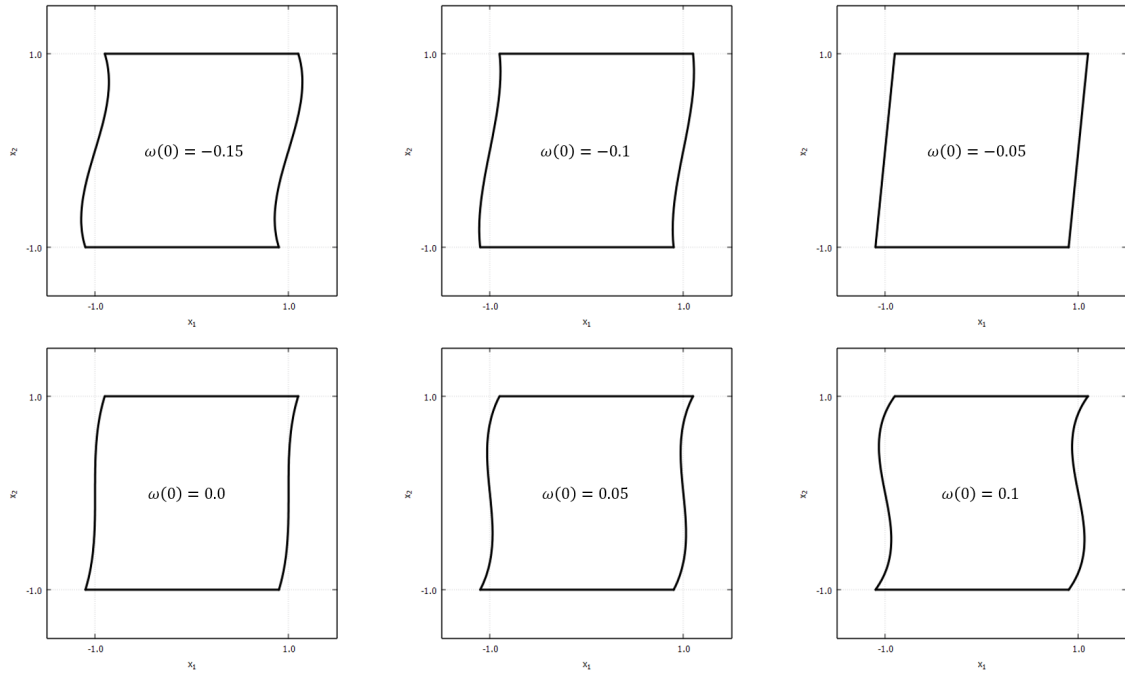
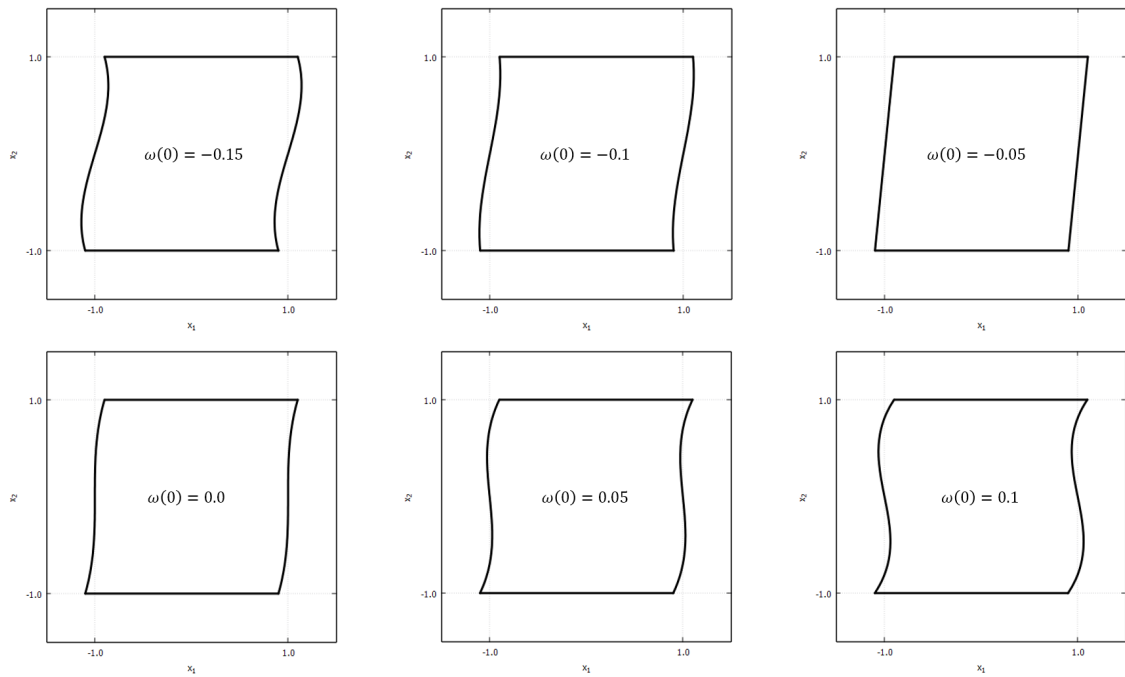
Рис. 2.3: Частное решение для (2.52) с условиями (2.54) при $\lambda_1 = 1.0$ Рис. 2.4: Частное решение для (2.53) с условиями (2.54) при $\lambda_2 = 1.0$ 

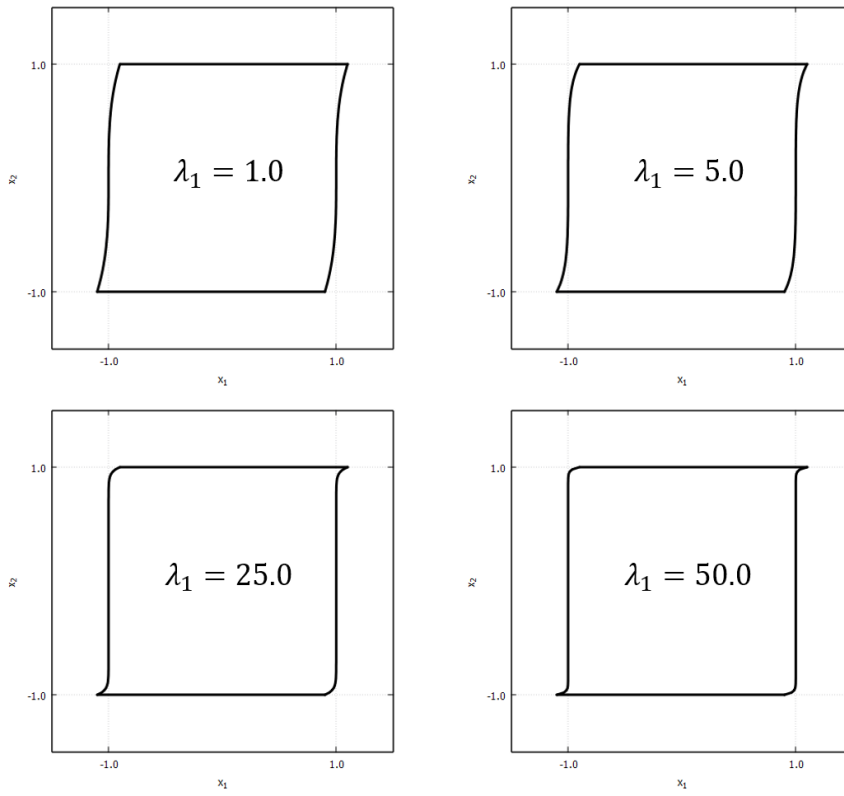
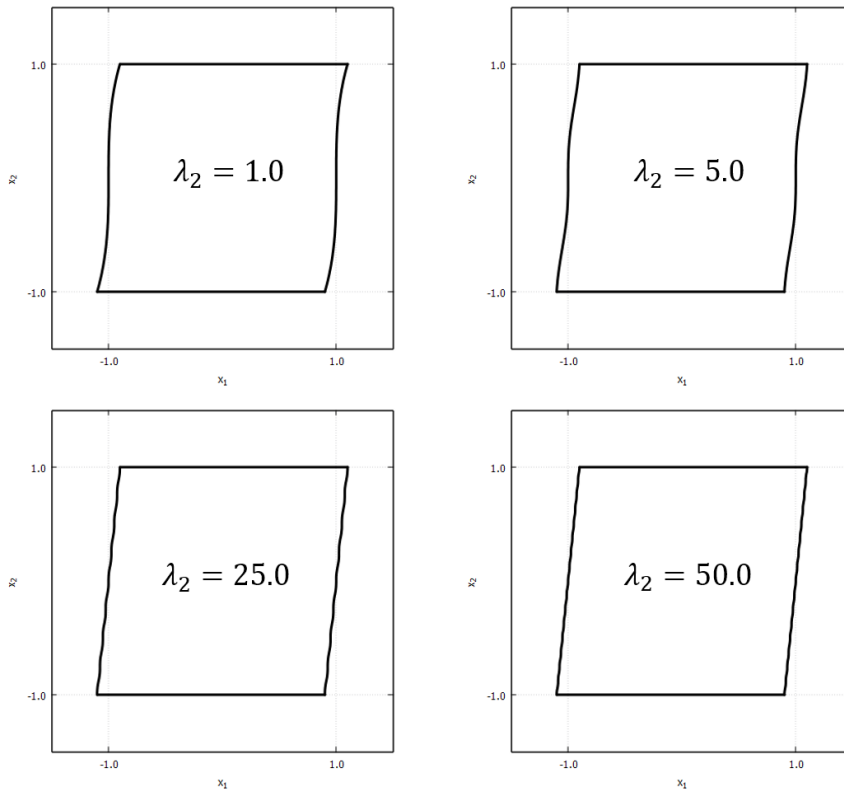
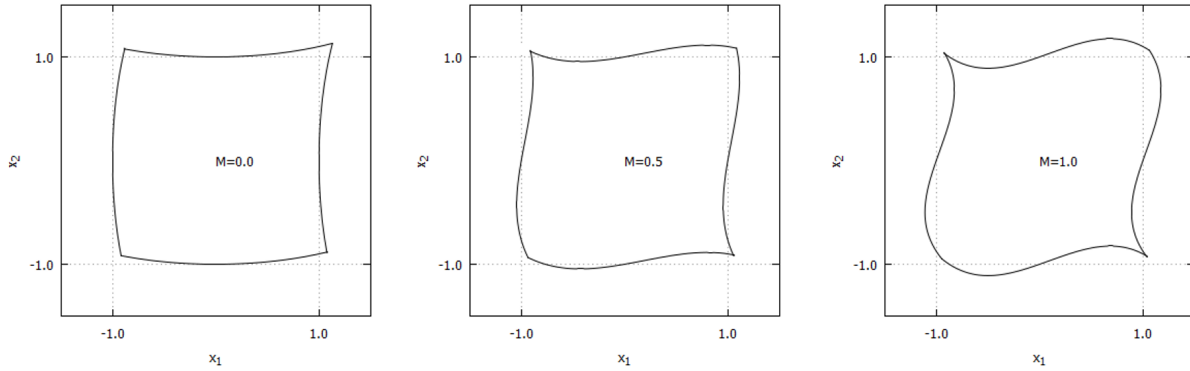
Рис. 2.5: Частное решение для (2.52) с условиями (2.54) при $\omega(0, 0) = 0.0$ Рис. 2.6: Частное решение для (2.53) с условиями (2.54) при $\omega(0, 0) = 0.0$ 

Рис. 2.7: Частное решение для (2.52) с жестким закреплением в начале координат, заданными перемещениями в углах и варьируемым параметром M



2.6 видно, что при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1.0$ решения качественно отличаются. В первом, «экспоненциальном», классе решений увеличение параметра локализует деформации около граней, где заданы перемещения. Во втором, «синусоидальном», классе с увеличением параметра можно увидеть возникновение дополнительных волн вдоль граней. При стремлении параметра к бесконечности решение и вовсе сходится к классическому.

Класс решений в моментной постановке крайне широк. Например, на Рис. 2.7 можно увидеть более сложное решение с жёстко закреплённым центром квадрата и заданными перемещениями на углах. Последний параметр можно варьировать и получать разные любопытные решения.

Подводя итоги сказанного выше, можно сказать следующее: моментная постановка задачи позволяет существенно расширить класс решений. Как известно, классическое решение задачи о чистом сдвиге после исключения жестких перемещений сводится к параллелепипеду, единственный параметр определяет угол между сторонами. Моментная же постановка даже в рамках физически и геометрически линейной теории упругости открывает целый ряд новых решений, которые описывают процессы, реально происходящие в теле. Процессами этими, однако, пренебрегают в силу их незначительного влияния на общую картину (хотя и не во всех случаях) и сложностей, с которыми приходится столкнуться при решении уравнений четвёртого порядка.

2.4 Чисто моментное решение

Запишем ещё раз уравнения (2.51):

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\theta = \operatorname{Re} \varphi, \\ 2(\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta)\omega = \operatorname{Im} \varphi. \end{cases} \quad (2.55)$$

Эти уравнения верны для плоского случая, однако для объёмного можно повторить те же рассуждения, что мы проделаем ниже. Второе уравнение называется уравнением Гельмгольца, о нём поговорим позже. Если приравнять к нулю ”моментные” параметры γ и ε , мы получим уравнения для классического случая.

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\theta = \operatorname{Re} \varphi, \\ 2\mu\omega = \operatorname{Im} \varphi. \end{cases} \quad (2.56)$$

Сразу отметим немаловажный факт: если выполняется уравнение для поворота ω из (2.56), то автоматически выполняется и уравнение Гельмгольца (2.55). Действительно, из (2.56) следует, что поворот является гармонической функцией, откуда $\Delta\omega = 0$. В этом случае система (2.55) просто сводится к системе (2.56). Значит, класс моментных решений включает в себя класс классических решений.

Допустим, мы решаем задачу, которая сводится к системе (2.55) с выбранной по некоторым соображениям функцией φ . Предположим, у нас есть решение (θ_c, ω_c) , относящееся к той же самой задаче, которое удовлетворяет уравнениям (2.56). Как было показано выше, в этом случае выполняются уравнения

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\theta_c = \operatorname{Re} \varphi, \\ 2(\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta)\omega_c = \operatorname{Im} \varphi. \end{cases} \quad (2.57)$$

Введём теперь обозначения $\omega_m = \omega - \omega_c$, $\theta_m = \theta - \theta_c$ и вычтем из уравнений

(2.55) уравнения (2.57). Получим:

$$\begin{cases} \theta_m = 0, \\ 2(\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\Delta)\omega_m = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Решение системы (2.58) можно назвать чисто моментным, поскольку оно получается из полного решения путём вычитания безмоментной части. При этом, однако, произвольная функция φ считается предзаданной. Это возможно, когда заранее известен предполагаемый характер решения. Также этот факт можно рассматривать как гипотезу о том, что моментная часть вносит лишь малый вклад в изменение объёма. В любом случае рассмотрение однородного варианта представляет интерес.

Таким образом, если нам известно безмоментное решение, мы можем «модифицировать» его, добавив к нему чисто моментную часть. Чисто моментное решение сводится к интегрированию уравнения Гельмгольца и получению перемещений из системы уравнений

$$\begin{cases} u_{1,1} + u_{2,2} = 0, \\ u_{2,1} - u_{1,2} = \omega_m. \end{cases} \quad (2.59)$$

Уравнение Гельмгольца не имеет аналитического решения, однако существует ряд его табличных решений, полученных методом разделения переменных в разных системах координат.

Матрицу системы (2.59) можно представить как

$$\begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 + i\partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_1 - i\partial_2 \end{pmatrix},$$

тогда исходная система разобьётся на три подсистемы:

$$\begin{cases} u_1 = \psi_1 + \psi_2, \\ u_2 = i(\psi_1 - \psi_2); \end{cases} \begin{cases} \psi_{1,1} + i\psi_{1,2} = g_1, \\ \psi_{2,1} - i\psi_{2,2} = g_2; \end{cases} \begin{cases} g_1 + g_2 = 0, \\ i(g_1 - g_2) = 2\omega_m. \end{cases}$$

Третья система легко решается, и остаётся только

$$\begin{cases} u_1 = \psi_1 + \psi_2, \\ u_2 = i(\psi_1 - \psi_2); \end{cases} \begin{cases} 2i\psi_{1,1} - 2\psi_{1,2} = \omega_m, \\ -2i\psi_{2,1} - 2\psi_{2,2} = \omega_m. \end{cases} \quad (2.60)$$

Вторая система решается методом характеристик при условии, что выбрана функция ω_m .

2.5 Чисто моментные решения задач о трещинах продольного сдвига и отрыва

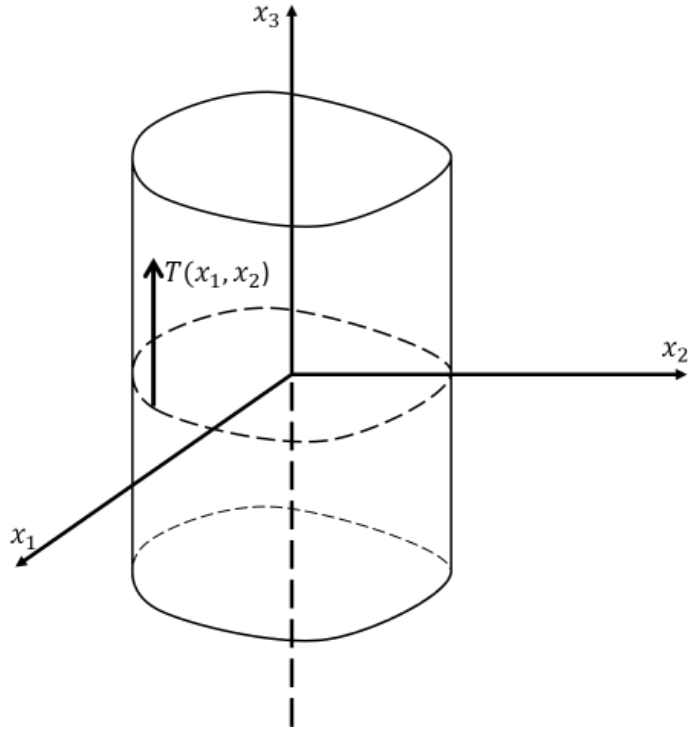
Рассмотрим две задачи в полярной системе координат. Первая из них – антиплоская задача о трещине продольного сдвига. Антиплоская задача заключается в следующем: предположим, у нас есть достаточно высокое цилиндрическое тело, высота которого направлена вдоль оси x_3 , как показано на Рис. 2.8. Будем рассматривать сечение, удалённое от оснований. Будем считать, что на боковой поверхности заданы напряжения таким образом, что вектор направлен вдоль оси x_3 и постоянен по высоте. В этом случае можно считать, что все точки цилиндра двигаются вертикально, при этом перемещения не зависят от x_3 :

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u = u(x_1, x_2). \quad (2.61)$$

В антиплоской задаче теория псевдоконтинуума Коссера сводится к однородному уравнению Гельмгольца даже без дополнительных гипотез. Действительно,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}u_{,2}, & \omega_2 &= -\frac{1}{2}u_{,1}, & \omega_3 &= 0; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}u_{,1}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}u_{,2}; \\ \sigma_{13} + \sigma_{31} &= 2\mu u_{,1}, & \sigma_{23} + \sigma_{32} &= 2\mu u_{,2}; \\ \varkappa_{11} &= \frac{1}{2}u_{,12}, & \varkappa_{12} &= -\frac{1}{2}u_{,11}, & \varkappa_{21} &= \frac{1}{2}u_{,22}, & \varkappa_{22} &= -\frac{1}{2}u_{,12}; \\ \mu_{11} &= \gamma u_{,12}, & \mu_{21} &= \frac{1}{2}[(\gamma + \varepsilon)u_{,22} - (\gamma - \varepsilon)u_{,11}], \\ \mu_{12} &= -\frac{1}{2}[(\gamma + \varepsilon)u_{,11} - (\gamma - \varepsilon)u_{,22}], & \mu_{22} &= -\gamma u_{,12}; \\ \sigma_{32} - \sigma_{23} &= \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)(u_{,112} + u_{,222}), \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} &= \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)(u_{,111} + u_{,112}); \end{aligned}$$

Рис. 2.8: Чертёж антиплоской задачи



$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{,1} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{,111} + u_{,122}), \\ \sigma_{31} = \mu u_{,1} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{,111} + u_{,122}), \\ \sigma_{23} = \mu u_{,2} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{,112} + u_{,222}), \\ \sigma_{32} = \mu u_{,2} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(u_{,112} + u_{,222}); \end{cases}$$

$$(\Delta + c^2)\Delta u = 0, \quad (2.62)$$

где $c^2 = -\frac{4\mu}{(\gamma + \varepsilon)}$.

Уравнение (2.62) определяет движение антиплоской среды в моментной постановке. Это уравнение имеет одно замечательное свойство. Введём обозначение

$$(\Delta + c^2)u = c^2 g,$$

тогда (2.62) можно записать как

$$\Delta g = 0.$$

Введём функцию

$$f = u - g,$$

тогда из записанных выше уравнений следует, что

$$(\Delta + c^2)f = 0.$$

Соберём вместе последние три уравнения и получим:

$$\begin{cases} u = g + f, \\ \Delta g = 0, \\ (\Delta + c^2)f = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

другими словами, решение системы (2.62) можно представить в виде суммы решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца. Уравнение Лапласа на этом месте, как известно, возникает в классической теории. Поэтому мы более подробно остановимся на функции f , а g пока будем считать равной нулю.

Уравнение Гельмгольца из системы (2.63) в полярной системе координат (r, φ) можно решить методом разделения переменных. Полученное решение, разумеется, будет частным. Выглядит оно следующим образом [28,29]:

$$f = (AJ_k(cr) + BY_k(cr))(C \sin(k\varphi) + D \cos(k\varphi)), \quad (2.64)$$

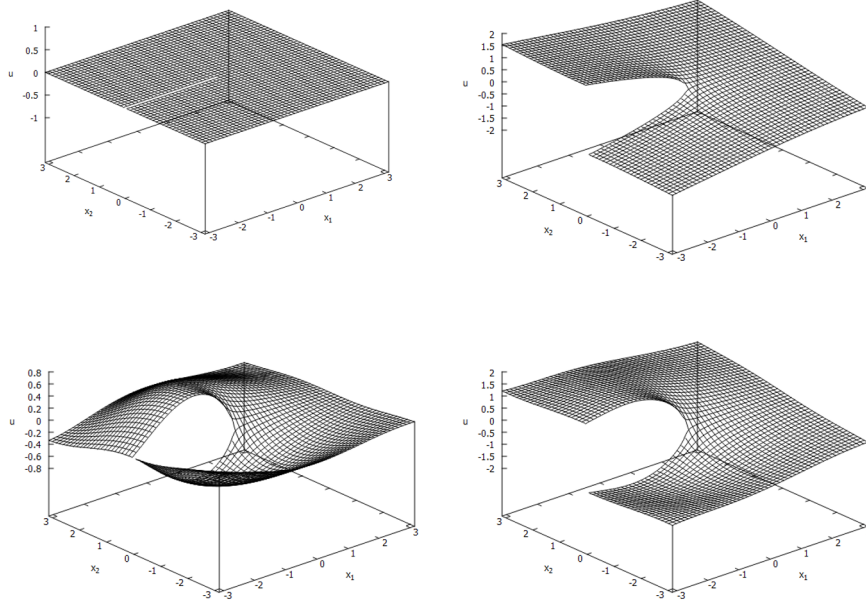
где J_k и Y_k – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, A , B , C , D и k – произвольные постоянные. Для моделирования трещины в начале координат примем $k = 1/2$ (это обеспечит разрыв при непрерывной производной), $B = 0$ (потому что функция Бесселя второго рода в нуле стремится к бесконечности). Константы C и D просто определяют направление трещины, так что возьмём $C = 1$, $D = 0$. Итак,

$$f = AJ_{\frac{1}{2}}(cr) \sin(\varphi/2) = A \sqrt{\frac{2}{\pi cr}} \sin(cr) \sin(\varphi/2). \quad (2.65)$$

Можно сравнить полученное решение с классическим решением для трещины продольного сдвига:

$$g = \frac{K}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r} \sin(\varphi/2). \quad (2.66)$$

Рис. 2.9: Решение задачи о трещине продольного сдвига. Слева направо, сверху вниз: сетка до деформирования, классическое решение 2.66, моментное решение 2.65, линейная комбинация этих решений



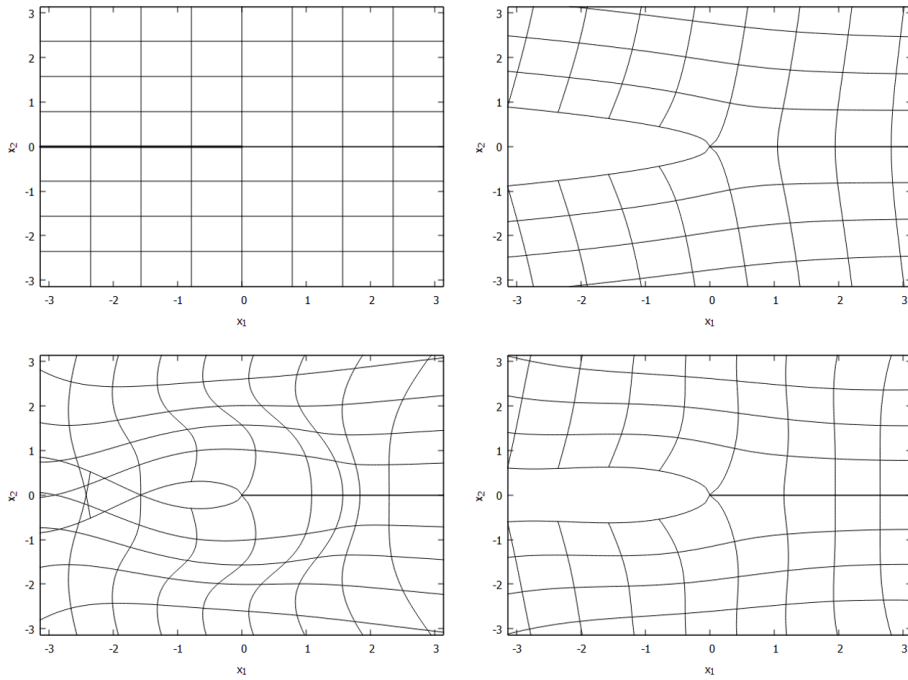
На Рис. 2.9 можно увидеть сравнение этих решений и их линейную комбинацию. Это и есть трещина продольного сдвига. Стоит отметить, что в области нуля обе функции ведут себя одинаково.

Вернёмся теперь к системе (2.59) для задачи плоской деформации. В качестве ω_m возьмём то же решение (2.65). Решив систему, получим перемещения для трещины отрыва:

$$\begin{cases} u_1 = -2\sqrt{\frac{2c}{\pi}}\sqrt{r}\sin(cr)\cos(\varphi/2), \\ u_2 = -2\sqrt{\frac{2c}{\pi}}\sqrt{r}\sin(cr)\sin(\varphi/2). \end{cases} \quad (2.67)$$

На Рис. 2.10 представлены графики классического решения, моментного решения и их линейной комбинации.

Рис. 2.10: Решение задачи о трещине отрыва. Слева направо, сверху вниз: сетка до деформирования, классическое решение, моментное решение, линейная комбинация этих решений



2.6 Чисто моментные решения плоской задачи в декартовой системе координат

Возьмём второе уравнение из системы (2.58) – уравнение Гельмгольца. Его можно записать в виде

$$\Delta \omega_m = c \omega_m, \quad (2.68)$$

где $c = \frac{4\mu}{(\gamma + \varepsilon)}$. Будем считать, что c может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В декартовой системе координат

$$\omega_{m,11} + \omega_{m,22} = c \omega_m. \quad (2.69)$$

Предположим, что $\omega_m = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1'' = c_1^2 f_1, \\ f_2'' = c_2^2 f_2, \\ \pm c_1^2 \pm c_2^2 = c. \end{cases} \quad (2.70)$$

У каждого из двух этих уравнений может быть по три решения в зависимости от знака перед константой [28]:

$$\begin{cases} f_1 = Ae^{c_1x_1} + Be^{-c_1x_1}, & \text{если } c_1^2 \pm c_2^2 = c, \\ f_1 = Ax_1 + B, & \text{если } \pm c_2^2 = c, \\ f_1 = A \sin(c_1x_1) + B \cos(c_1x_1), & \text{если } -c_1^2 \pm c_2^2 = c, \end{cases} \quad (2.71)$$

то есть всего восемь классов решений (если исключить случай, когда $c_1 = c_2 = 0$). Среди них качественно отличными являются пять, остальные получаются поворотом осей. Изучим эти пять классов.

1-ый класс решений «экспоненциальный»:

$$\omega_m = (A'e^{c_1x_1} + B'e^{-c_1x_1})(C'e^{c_2x_2} + D'e^{-c_2x_2}), \quad c_1^2 + c_2^2 = c. \quad (2.72)$$

В этом случае решаем систему (2.60) и получаем

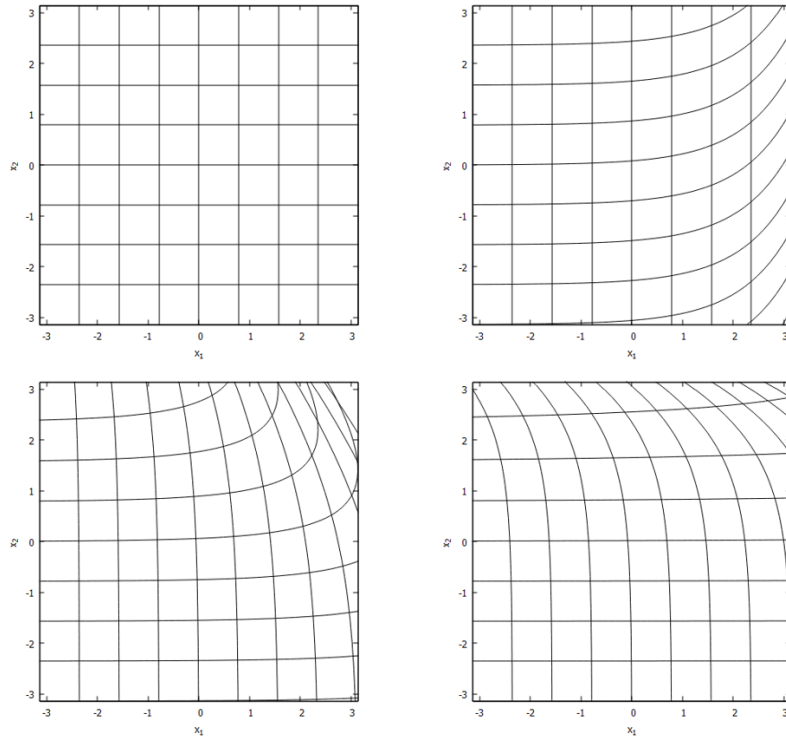
$$\begin{cases} u_1 = \frac{c_2}{c} [-Ae^{c_1x_1+c_2x_2} + Be^{c_1x_1-c_2x_2} - Ce^{-c_1x_1+c_2x_2} + De^{-c_1x_1-c_2x_2}] + \operatorname{Re} \varphi, \\ u_2 = \frac{c_1}{c} [Ae^{c_1x_1+c_2x_2} + Be^{c_1x_1-c_2x_2} - Ce^{-c_1x_1+c_2x_2} - De^{-c_1x_1-c_2x_2}] + \operatorname{Im} \varphi, \end{cases}$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция, никак не связанная с функциями, обозначенными так же в предыдущих параграфах. Возникновение этого слагаемого можно было предсказать, поскольку при $\omega_m = 0$ система (2.59) просто превращается в условия Коши-Римана. Как известно, это слагаемое представляет классическое решение. Поскольку мы ищем чисто моментные решения, будем считать, что $\varphi = 0$. В квадратных скобках содержатся по пять слагаемых, которые, как нетрудно заметить, качественно не отличаются и могут быть получены друг из друга поворотом осей. Будем считать, что $B = C = D = 0$. Получим следующее решение:

$$\begin{cases} u_1 = -A \frac{c_2}{c} e^{c_1x_1+c_2x_2}, \\ u_2 = A \frac{c_1}{c} e^{c_1x_1+c_2x_2}, \end{cases} \quad (2.73)$$

Возьмём материальную константу $c = 1.0$ и коэффициент пропорциональности $A = 0.08$. Для разных значений c_1 построим графики полученного решения (c_2 тогда определяется с точностью до знака, однако знак можно брать произвольный – можно легко проверить, что качественно решение не

Рис. 2.11: Слева направо и сверху вниз: исходная сетка и решения (2.73) при $c_1 = 1$, $c_2 = 1/\sqrt{2}$ и $c_2 = 1/5$



изменится). На Рис. 2.11 можно увидеть, что первый класс решений связан с изгибом плоскости. Соотношение между c_1 и c_2 определяет, в каком из направлений осуществляется этот изгиб.

2-ой класс решений «синусоидальный»:

$$\omega_m = (A' \sin(c_1 x_1) + B' \cos(c_1 x_1))(C' \sin(c_2 x_2) + D' \cos(c_2 x_2)), \quad -c_1^2 + c_2^2 = c. \quad (2.74)$$

Тогда

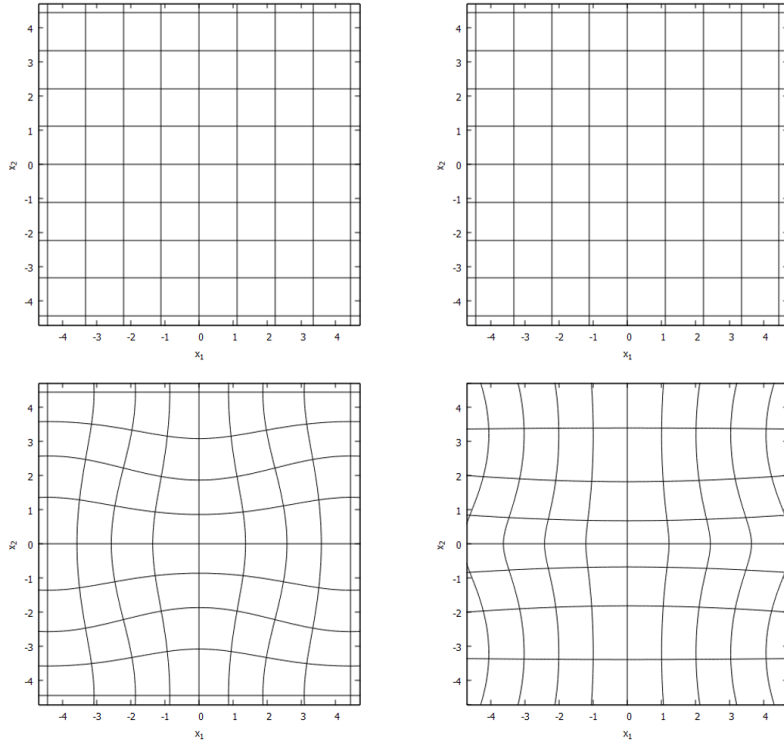
$$\begin{cases} u_1 = \frac{c_2}{c} [A \sin(c_1 x_1) \cos(c_2 x_2) - B \sin(c_1 x_1) \sin(c_2 x_2) + C \cos(c_1 x_1) \cos(c_2 x_2) - D \cos(c_1 x_1) \sin(c_2 x_2)] + \operatorname{Re} \varphi, \\ u_2 = \frac{c_1}{c} [-A \cos(c_1 x_1) \sin(c_2 x_2) - B \cos(c_1 x_1) \cos(c_2 x_2) + C \sin(c_1 x_1) \sin(c_2 x_2) + D \sin(c_1 x_1) \cos(c_2 x_2)] + \operatorname{Im} \varphi, \end{cases}$$

На этот раз слагаемые внутри квадратных скобок отличаются только сдвигом на константу друг относительно друга. Примем снова $B = C = D = 0$:

$$\begin{cases} u_1 = A \frac{c_2}{c} \sin(c_1 x_1) \cos(c_2 x_2), \\ u_2 = -A \frac{c_1}{c} \cos(c_1 x_1) \sin(c_2 x_2). \end{cases} \quad (2.75)$$

Возьмём $A = 0.5$, $c = -1.0$, а c_1 будем варьировать. На Рис. 2.12 видно, что при $c_1 = 0$ деформаций вообще не происходит, в то время как при

Рис. 2.12: Слева направо и сверху вниз: исходная сетка и решения (2.75) при $c_1 = 1$, $c_1 = 1/\sqrt{2}$ и $c_1 = 1/5$



$c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$ область разбивается на периодические ячейки, на границах которых деформаций нет. Если c_1 или c_2 достаточно малы, то в одном из направлений деформации стремятся к нулю, в то время как в другом возникают волны с возрастающей амплитудой.

3-ий класс решений «смешанный»:

$$\omega_m = (A'e^{c_1x_1} + B'e^{-c_1x_1})(C'\sin(c_2x_2) + D'\cos(c_2x_2)), \quad c_1^2 + -c_2^2 = c. \quad (2.76)$$

Тогда

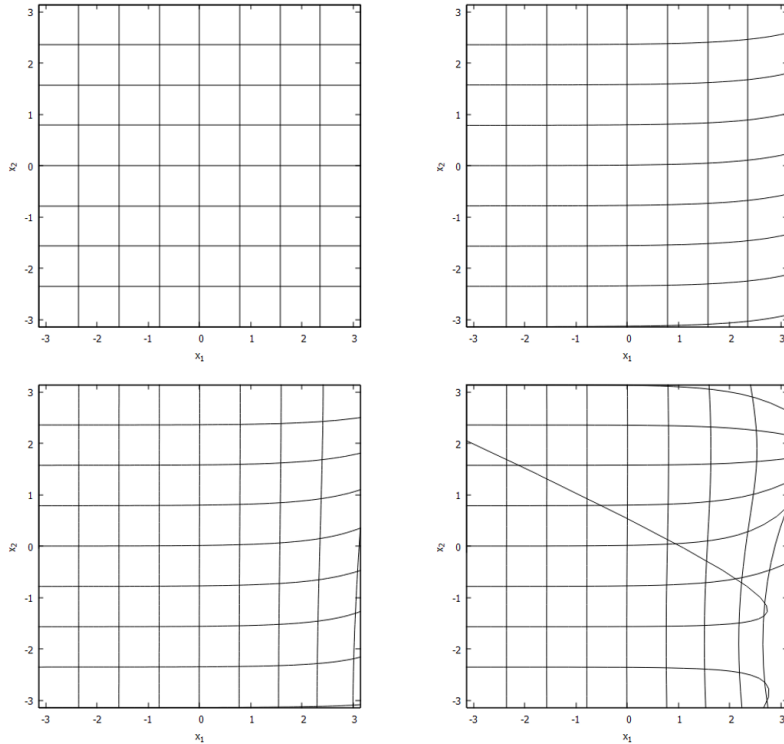
$$\begin{cases} u_1 = \frac{c_2}{c} [Ae^{c_1x_1} \sin(c_2x_2) - Be^{c_1x_1} \cos(c_2x_2) + Ce^{-c_1x_1} \sin(c_2x_2) - De^{-c_1x_1} \cos(c_2x_2)] + \operatorname{Re} \varphi, \\ u_2 = \frac{c_1}{c} [Ae^{c_1x_1} \cos(c_2x_2) + Be^{c_1x_1} \sin(c_2x_2) - Ce^{-c_1x_1} \cos(c_2x_2) - De^{-c_1x_1} \sin(c_2x_2)] + \operatorname{Im} \varphi. \end{cases}$$

Снова возьмём $B = C = D = 0$:

$$\begin{cases} u_1 = A \frac{c_2}{c} e^{c_1x_1} \sin(c_2x_2), \\ u_2 = A \frac{c_1}{c} e^{c_1x_1} \cos(c_2x_2), \end{cases} \quad (2.77)$$

На Рис. 2.13 приведены решения для $c = 1.0$, $A = 0.01$ и различных c_1 . Стоит заметить, что решения этого класса лежат в узком диапазоне по c_1 и быстро становятся нефизичными при возрастании данного параметра.

Рис. 2.13: Слева направо и сверху вниз: исходная сетка и решения (2.77) при $c_1 = 1$, $c_1 = 1.1$ и $c_1 = 1.3$



4-ый класс решений «линейно-экспоненциальный»:

$$\omega_m = (A'x_1 + B')(C'e^{c_2x_2} + D'e^{-c_2x_2}), \quad c_2^2 = c. \quad (2.78)$$

Тогда

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{c_2}[(Ax_1 + B)e^{c_2x_2} + (Cx_1 + D)e^{-c_2x_2}] + \operatorname{Re} \varphi, \\ u_2 = \frac{1}{c_2}[Ae^{c_2x_2} + Ce^{-c_2x_2}] + \operatorname{Im} \varphi. \end{cases}$$

Пусть $C = D = 0$, в этом случае

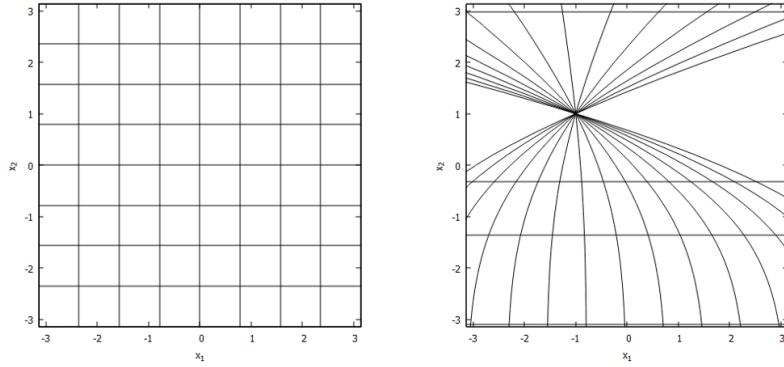
$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{c_2}(Ax_1 + B)e^{c_2x_2}, \\ u_2 = \frac{A}{c_2}e^{c_2x_2}, \end{cases} \quad (2.79)$$

На Рис. 2.14 можно увидеть решение при $A = B = 1$, $c_2 = 1$. Характерным решением уравнений оказывается подобная паутинка, красивая, но едва ли имеющая физический смысл.

5-ый класс решений «линейно-синусоидальный»:

$$\omega_m = (A'x_1 + B')(C' \sin(c_2x_2) + D' \cos(c_2x_2)), \quad -c_2^2 = c. \quad (2.80)$$

Рис. 2.14: Исходная сетка и характерное решение (2.79)



Тогда

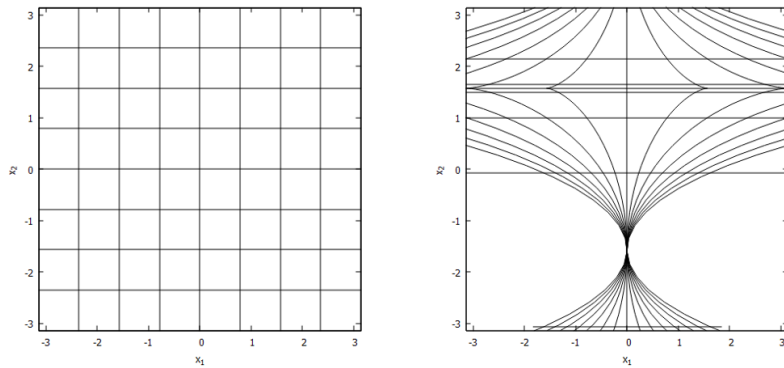
$$\begin{cases} u_1 = \frac{x_1}{c_2} [A \sin(c_2 x_2) - B \cos(c_2 x_2)] + \operatorname{Re} \varphi, \\ u_2 = \frac{1}{c_2^2} [A \cos(c_2 x_2) + B \sin(c_2 x_2)] + \operatorname{Im} \varphi. \end{cases}$$

Пусть $B = 0$, в этом случае

$$\begin{cases} u_1 = \frac{Ax_1}{c_2} \sin(c_2 x_2), \\ u_2 = \frac{A}{c_2^2} \cos(c_2 x_2). \end{cases} \quad (2.81)$$

На Рис. 2.15 можно увидеть решение при $A = 1$, $c_2 = 1$. На этот раз характерное решение предстаёт в виде юлы, физический смысл которой также под вопросом.

Рис. 2.15: Исходная сетка и характерное решение (2.81)



Из сказанного выше можно сделать следующий вывод: сами по себе выглядят физическими и заслуживают особого изучения решения из первых двух классов. Эти решения представляют случаи изгиба пространства и периодической скручивающей деформации. Решения из остальных трёх классов кажутся нефизическими, однако в их защиту стоит сказать, что в качестве

малой добавки к классическому решению они также могут оказаться полезными.

Заключение

В работе рассмотрены некоторые случаи неклассических моделей линейной теории упругости. Первым примером таких моделей служат модели тела, упругого по Коши. В рамках данной работы считается, что матрица модулей упругости такого тела, вообще говоря, несимметрична и не положительно определена. Рассмотрен метод Кельвина, который позволяет представить удельную энергию в виде суммы шести независимых слагаемых. Метод Кельвина предложено применить для оценки возможности фазового перехода в сплавах, которые способны переходить из кубической фазы в гексагональную и обратно. С помощью метода Кельвина представлено выражение для удельной псевдоэнергии для случая упругости по Коши. Эта псевдоэнергия всегда положительна, учитывает кососимметричную часть и сходится к классической энергии в случае упругости по Грину. Рассматривается также вопрос единственности решения задачи упругости по Коши с граничными условиями, как в классической теории. Выясняется, что кососимметричная часть не влияет на единственность, кроме того, решение единственно, если матрица модулей упругости либо положительно определена, либо отрицательно определена.

Второй случай неклассических моделей в данной работе представляют среды Коссера. Здесь рассмотрены уравнения так называемой теории псевдоконтинуума Коссера или моментной теории со стеснённым вращением. С её помощью решена задача о чистом сдвиге, где под «чистым сдвигом» подразумевается напряжённое состояние, в котором в заданных осях отсутствуют нормальные напряжения. Предложена идея чисто моментного решения, которое получается из общего решения путём вычитания классического безмоментного решения. В этом случае оказывается, что, если, считать, что общий

вид решения заранее известен, либо что вклад моментных деформаций в изменение объёма мал, то произвольное моментное решение может быть получено из частного классического решения путём добавления к перемещениям некоторого чисто моментного решения, которое в свою очередь получается путём интегрирования однородного уравнения Гельмгольца. Также рассмотрены все известные классы чисто моментных решений для задачи плоской деформации в декартовой системе координат.

Список литературы

1. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и её применения. М.: Мир, 1988.
2. Чёрных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977.
4. Rogers T.G., Pipkin A.C. Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity // *Z. Angew. Math. Phys.* 1963. Bd. 14, H. 4. S. 334—343.
5. Желудев И.С. Симметрия и её приложения. М.: Атомиздат, 1976.
6. Мокряков В.В. Исследование зависимости эффективных податливостей плоскости с решёткой круговых отверстий от параметров решётки // *Вычисл. механика сплошных сред.* 2010. Т. 3, № 3. С. 90—101.
7. Лаврентьев С.Ю., Мокряков В.В., Ченцов А.В. Эффективные упругие модули перфорированных пластин, содержащих прямоугольную решётку круглых отверстий // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела.* 2021. № 3. С. 7—12.
8. Бытев В.О., Слезко И.В., Николаев Д.Е. Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // *Вестн. Тюмен. гос. ун-та.* 2007. № 5. С. 32—43.
9. Бытев В.О., Слезко И.В. Решение задач асимметричной упругости // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер.* 2008. № 6. С. 238—243.

10. Остросаблин Н.И. Классы симметрии тензоров анизотропии квазиупругих материалов и обобщение подхода Кельвина // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 3. С. 108—129.
11. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И. Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131—151.
12. Аннин Б. Д. Модели упругопластического деформирования трансверсально-изотропных материалов // Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 2. С. 3—7.
13. Аннин Б. Д. Об одном классе определяющих соотношений линейной анизотропной наследственной теории упругости // Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю. Н. Работнова: Тр. конф., Москва, 24—26 февр. 2014 г. М.: Изд-во Инта машиноведения РАН, 2014. С. 18—22.
14. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Применение собственных модулей и состояний для оценки возможности мартенситных фазовых превращений // Прикладная математика и техническая физика. 2021. Т. 62, № 5. С. 5—14.
15. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Применение подхода Кельвина для качественной оценки возможности фазовых переходов в сплавах с памятью формы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 496. № 1. С. 51—54.
16. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р. И. Применение собственных модулей и состояний для оценки возможности мартенситных фазовых превращений // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XV Всероссийской школы–конференции молодых ученых (25 февраля — 5 марта 2021 г., Новосибирск — Шерегеш). Новосибирск: Автограф, 2021. С. 9—10.

17. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика тверд. тела. 1960. Т. 2, вып. 7. С. 1399—2409.
18. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория ассиметричной упругости. Учёт «внутреннего» вращения // Физика тверд. тела. 1963. Т. 5, вып. 9. С. 2591—2598.
19. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Сб. перев. 1965. №3. С 89—112. = Koiter W. T. Couple-stresses in the theory of elasticity // Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. 1964. В. 67, №1. Р. 17—44.
20. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401—408.
21. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. = Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa. 1970.
22. Купрадзе В. Д. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976
23. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. №. 1. С. 5—19
24. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Двумерная задача о чистом сдвиге в моментной теории упругости со стеснённым вращением // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. Комсомольск-на-Амуре, 2022. С. 173—178.

25. Угрюмов Р. И. Об уравнениях плоской задачи моментной теории упругости со стесненным вращением // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13 – 17 февраля 2023г. Тезисы докладов. Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023г. С. 337.
26. Угрюмов Р. И. Аналитическое решение антиплоской задачи моментной теории упругости со стесненным вращением // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых (26 февраля – 6 марта 2023 г., Новосибирск – Шерегеш). Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2023. С. 197–198.
27. Weston W. F., Granato A. V. Cubic and hexagonal single-crystal elastic constants of a cobalt-nickel alloy // Phys. Rev. B. 1975. V. 12, N 12. P. 5355–5362.
28. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики : справочник / А. Д. Полянин. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 592 с.
29. Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В. Функции Бесселя в задачах математической физики: Учебно–методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 40с.