На правах рукописи

**Угрюмов Ростислав Игоревич**

# Иследование неклассических моделей упругости с приложением к деформированию композитных материалов

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела»

Текст научного доклада

Новосибирск – 2023

## Общая характеристика работы

Данная работа посвящена неклассическим моделям теории упругости. Она разделена на две главы. Первая глава связана с так называемым методом Кельвина исследования анизотропии упругих свойств материала и упругости по Коши. Во второй части обсуждаются вопросы моментной теории упругости, в частности, теории псевдоконтинуума Коссера.

Как известно, в классической линейной теории упругости (упругость по Грину) на матрицу модулей упругости накладываются следующие ограничения: она должна обладать главной симметрией и быть положительно определённой. Оба этих требования связаны с понятием об упругой энергии тела. Если матрица несимметрична, то не существует упругого потенциала, через который может быть выражена связь между тензорами напряжений и деформаций. Если матрица не положительно определена, энергия деформации может оказаться отрицательной, что противоречит законам природы.

Рассматривается также линейная теория упругости по Коши, в которой единственным ограничением на матрицу модулей является её невырожденность. Несимметричные матрицы модулей упругости используются в вязкоупругости, фотоупругости, выводятся при определении эффективных упругих модулей перфорированных пластин.

В первой главе данной работы речь идёт о так называемом методе Кельвина. Он заключается в применении собственных модулей и собственных состояний упругого тела в том числе для выражения величины удельной энергии. С помощью модифицированного для несимметричной матрицы метода Кельвина удаётся найти некоторое выражение упругой псевдоэнергии, которая всегда положительна, учитывает кососимметричную составляющую и равна классической энергии в случае упругости по Грину. Также в первой главе обсуждены вопросы единственности решения задачи упругости по Коши с граничными условиями Неймана, Дирихле или смешанными условиями.

Вторая глава посвящена моментной теории упругости. В классической теории напряжений считается, что через элемент поверхности тела действует только главный вектор силы. Главным моментом при этом как правило пренебрегают. Это приводит к тому, что закон сохранения момента импульса сводится к закону парности касательных напряжений. Существуют, однако, моментные теории, призванные исправить этот недостаток. Моментные теории применяются, например, при описании напряжённых состояний с большими градиентами напряжений, областей рядом с угловыми точками и зернистых сред.

В теории Коссера наряду с тензорами напряжений и деформаций рассматриваются тензоры моментных напряжений и изгиба-кручения. Кроме того, в общей теории вектор поворота считается неизвестной величиной, независимой от вектора перемещения. Существует также упрощённая теория псевдоконтинуума Коссера (или моментная теория со стеснённым вращением). В ней считается, что повороты связаны с перемещениями, как в классической теории. В данной работе с помощью теории псевдоконтинуума Коссера решена плоская задача о чистом сдвиге, где под чистым сдвигом подразумевается состояние, в котором нормальные напряжения равны нулю.

Кроме того, предложена идея чисто моментного решения. Смысл его заключается в том, что, приняв некоторую гипотезу, мы можем «модифицировать» классическое решение путём добавления к нему некоторого чисто моментного решения. Полученная сумма будет моментным решением задачи. С помощью предложенного метода получены решения задач о трещине продольного сдвига и трещине отрыва. Наконец, рассмотрены все известные классы чисто моментных решений для задачи плоской дфеормации в декартовой системе координат. Каждый из классов описан и представлен графиком.

## Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, приведён обзорный список литературы по теме работы.

**Первая глава** посвящена вопросам линейной теории упругости по Коши. Будем считать, что матрица модулей упругости может быть несимметричной и не быть положительно определённой. В **параграфе 1.1** рассказывается о методе Кельвина исследования упругих свойств линейно упругого тела. Приведено выражение для закона Гука в характеристической системе координат:

$$\widetilde{\sigma}_i = \lambda_i \widetilde{\varepsilon}_i, \tag{1}$$

получены выражения для энергии:

$$2\Phi = \lambda_1 \widetilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2 \widetilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3 \widetilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4 \widetilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5 \widetilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6 \widetilde{\varepsilon}_6^2. \tag{2}$$

Здесь $\lambda_i$ – собственные значения матрицы модулей упругости, $T$ – матрица собственных вектор-столбцов, а $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\varepsilon}$ – напряжения и деформации в характеристической системе координат:

$$T^T \sigma = \widetilde{\sigma}, \quad T^T \varepsilon = \widetilde{\varepsilon}.$$

В **параграфе 1.2** предлагается способ оценки возможности фазового перехода в сплавах, которые способны находиться в кубической и гексагональной формах. Грубая оценка делается на основании одних только упругих свойств материала. В **параграфе 1.3** предложено выражение для псевдоэнергии:

$$2\Phi' = \widetilde{\sigma} \cdot \widetilde{\varepsilon}, \tag{3}$$

где напряжения и деформации находятся в двух разных характеристических системах координат:

$$\widetilde{\sigma} = T^T \sigma, \quad \widetilde{\varepsilon} = F^T \varepsilon.$$

В **параграфе 1.4** рассматриваются вопросы единственности решения задачи упругости по Коши с классическими граничными условиями. Оказывается, что решение единственно, если матрица модулей упругости положительно или отрицательно определена. Несимметричность вобще не влияет на единственность.

Темой **второй главы** является моментная теория упругости. Будем считать, что через элемент поверхности тела наравне с главным вектором силы действует также главный момент. В **параграфе 2.1** приведена замкнутая система уравнений среды Коссера: уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + X_1 = 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + X_2 = 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \mu_{11,1} + \mu_{21,2} + \mu_{31,3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} + Y_1 = 0, \\ \mu_{12,1} + \mu_{22,2} + \mu_{32,3} - \sigma_{13} + \sigma_{31} + Y_2 = 0, \\ \mu_{13,1} + \mu_{23,2} + \mu_{33,3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} + Y_3 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

кинематические уравнения

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} - \omega_3 & u_{3,1} + \omega_2 \\ u_{1,2} + \omega_3 & u_{2,2} & u_{3,2} - \omega_1 \\ u_{1,3} - \omega_2 & u_{2,3} + \omega_1 & u_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\varkappa = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \omega_{3,1} \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \omega_{3,2} \\ \omega_{1,3} & \omega_{2,3} & \omega_{3,3} \end{pmatrix}; \tag{7}$$

и определяющие соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\varepsilon_{ji} + (\mu - \alpha)\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}. \end{cases} \tag{8}$$

В параграфе 2.2 приведены уравнения для упрощённой теории псевдоконтинуума Коссера. Во-первых, поворот зависит от перемещений:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}), \\ \omega_2 = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}), \\ \omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}); \end{cases} \tag{9}$$

во-вторых, тензор деформации симметричен:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

в-третьих первая группа уравнений (8) заменяется на

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} + \sigma_{21} = 4\mu\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} + \sigma_{31} = 4\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} + \sigma_{32} = 4\mu\varepsilon_{23}. \end{cases} \tag{11}$$

Вместе с уравнениями (4), (5), (7) и второй группой (8) получается замкнутая система уравнений теории псевдоконтинуума Коссера.

В **параграфе 2.3** в моментной постановке решается вариация задачи плоской деформации о чистом сдвиге. Под «чистым сдвигом» здесь подразумевается такое напряжённое состояние, что в определённой системе координат нормальные напряжения равны нулю. Решения представлены для разных граничных условий и разных материальных параметров.

В параграфе 2.4 предложена идея чисто моментного решения: такого решения, которое при добавлении к классическому решению позволяет получить моментное решение. Чисто моментное решение можно выделить в том случае, если принята определённая гипотеза: заранее известен общий вид решения, либо считается, что вклад моментных деформаций в изменение объёма мал. Чисто моментное решение относительно просто получить: в случае задачи плоской деформации требуется найти решение уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + c)\omega_m = 0 \tag{12}$$

и решить систему

$$\begin{cases} u_{1,1} + u_{2,2} = 0, \\ u_{2,1} - u_{1,2} = \omega_m. \end{cases} \tag{13}$$

В **параграфе 2.5** представлены классические и чисто моментные решения для антиплоской задачи о трещине продольного сдвига и плоской задачи трещины отрыва. В **параграфе 2.6** рассмотрены пять известных классов чисто моментных решений для задачи плоской деформации в декартовой системе координат. К сожалению, поскольку уравнение Гельмгольца не имеет аналитического решения, данные об известных решениях нельзя считать исчерпывающими.

В **заключении** подводятся итоги проведённой работы.

## Публикации автора


1. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Применение собственных модулей и состояний для оценки возможности мартенситных фазовых превращений // Прикладная математика и техническая физика. 2021. Т. 62, № 5. С. 5–14.

2. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Применение подхода Кельвина для качественной оценки возможности фазовых переходов в сплавах с памятью формы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 496. № 1. С. 51–54.

3. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. №. 1. С. 5–19

4. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р. И. Применение собственных модулей и состояний для оценки возможности мартенситных фазовых превращений // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XV Всероссийской школы–конференции молодых ученых (25 февраля –- 5 марта 2021 г., Новосибирск –- Шерегеш). Новосибирск: Автограф, 2021. С. 9–-10.

5. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Двумерная задача о чистом сдвиге в моментной теории упругости со стеснённым вращением // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машино-

строении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. Комсомольск-на-Амуре, 2022. С. 173–178.

6. Угрюмов Р. И. Об уравнениях плоской задачи моментной теории упругости со стесненным вращением // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13 -– 17 февраля 2023г. Тезисы докладов. Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023г. С. 337.

7. Угрюмов Р. И. Аналитическое решение антиплоской задачи моментной теории упругости со стеснённым вращением // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых (26 февраля -– 6 марта 2023 г., Новосибирск -– Шерегеш). Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2023. С. 197–198.