

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

ВЫПУСКНАЯ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

аспиранта Валова Александра Викторовича

**СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕРМО-ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ
ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН**

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

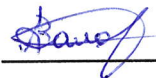
Направленность 1.1.9 «Механика жидкости, газа и плазмы»

Научный руководитель:



д.ф.-м.н., проф.
Головин С.В.

Аспирант:



Новосибирск – 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Термопорозупругая модель разрушения цементной оболочки в обсаженном и цементированном стволе скважины	9
1.1 Постановка задачи	12
1.1.1 Предположения и обозначения	13
1.1.2 Законы сохранения	14
1.1.3 Граничные условия	16
1.1.4 Начальные данные и начальные напряжения	18
1.2 Дискретизация уравнений	20
1.2.1 Слабая постановка	20
1.2.2 Численный алгоритм	21
1.2.3 Сравнение с точным решением	23
1.3 Численные эксперименты	26
1.3.1 Отслоение цементной оболочки	27
1.3.2 Разрушение цементной оболочки	28
1.3.3 Влияние контраста внешних напряжений	30
1.3.4 Чувствительность к начальному напряжению	32
1.3.5 Чувствительность к сдвигу обсадной колонны	35
1.3.6 Влияние температуры и порового давления	37
1.4 Механизмы нарушения целостности цементной оболочки	44
Глава 2. Модель плоской трещины гидроразрыва пласта	46
2.1 Математическая постановка	47
2.1.1 Уравнение упругости	48
2.1.2 Течение жидкости в трещине	49
2.1.3 Граничные условия	50
2.2 Численный алгоритм	50
2.2.1 Дискретизация уравнений	51
2.2.2 Контактный алгоритм	54
2.2.3 Определение положения фронта трещины	55
2.3 Модель многостадийного гидроразрыва пласта	60

	Стр.
2.3.1 Взаимодействие трещин и распределение потоков	60
2.3.2 Численная схема	62
2.4 Численные эксперименты	64
2.4.1 Верификация и валидация численного алгоритма	64
2.4.2 Тестирование контактного алгоритма	69
2.4.3 Взаимодействие трещин на наклонной скважине	72
2.5 Анализ эффектов, влияющих на распространение плоских трещин	76
Заключение	78
Список литературы	80

Введение

Процедура добычи углеводородов включает в себя широкий спектр технологических работ. К ним можно отнести бурение скважины, размещение обсадной колонны и последующее цементирование заколонного пространства. Обсадная колонна и цементирование скважины необходимы для предотвращения разрушения открытого ствола, поскольку в своем жизненном цикле скважина подвергается различным нагрузкам. Так, например, при проведении операций гидроразрыва пласта давление жидкости в скважине может варьироваться в широких пределах, применение парогравитационного воздействия влечет существенное увеличение температуры скважины, а закачка CO_2 и его испарение на стенках скважины вызывает резкое снижение температуры.

Нарушение целостности цементной оболочки обсаженного ствола скважины является серьезной проблемой, поскольку нежелательная миграция пластовых жидкостей вдоль ствола скважины может приводить к снижению эффективности добычи и загрязнению водоносных горизонтов в процессе эксплуатации скважины или при секвестрации CO_2 [1]. Различные факторы, включая низкое качество цементного раствора и резкие изменения температуры или давления в стволе скважины [2], возникающие в течение жизненного цикла скважины, могут нарушить целостность цементной оболочки. Для понимания и прогнозирования взаимодействия различных факторов и соответствующей вероятности разрушения цементной оболочки требуется тщательный и комплексный анализ устойчивости композитной системы ствола скважины (обсадная колонна-цемент-порода).

Обсадная колонна подвергается нагрузкам, связанным с напряжением в пласте, начальными напряжениями, вызванными усадкой или разбуханием цемента во время его затвердевания, а также напряжениями, вызванными работой скважины. Комбинация этих напряжений может потенциально способствовать возникновению растягивающего или сдвигового напряжения в цементе и, таким образом, может спровоцировать образование трещин в цементе или отслоение на границе раздела обсадная колонна/цемент или цемент/порода.

Обычно различают четыре типа дефектов цементной оболочки [3; 4]. Первый тип связан с образованием лакун вследствие плохой подготовки к процессу цементирования или из-за потерь цемента при его укладке. Этот тип дефектов

в настоящее время встречается крайне редко благодаря современным достижениям в области моделирования укладки цемента, а также общей организации и контролю процесса цементирования.

Второй тип дефектов связан с образованием каналов в цементной оболочке, которые вызваны остатками вязкого бурового раствора, которые не вытесняются жидким цементом во время цементирования. Каналы могут образовываться из-за неправильного сочетания реологических свойств бурового раствора и жидкого цемента, а также из-за смещения обсадной колонны относительно ствола скважины. Опять же, использование так называемых центраторов обсадных колонн и развитие современных технологий цементирования позволили практически исключить этот дефект.

Третий класс дефектов может возникать в процессе затвердевания цемента и приводит к появлению растягивающих напряжений в цементе. Эти напряжения могут приводить к образованию радиальных трещин и отслоению цементной оболочки, а также к появлению горизонтальных трещин, перпендикулярных оси скважины. Радиальные трещины или зоны отслоения могут образовывать непрерывные пути для движения пластовых жидкостей вдоль скважины, что приводит к различным экологическим проблемам. Дисковые трещины, перпендикулярные оси скважины, образуются почти всегда, но не влияют на вертикальную зональную изоляцию, хотя и создают гидравлическую связь пласта с границей раздела обсадной колонны и цемента на некоторых глубинах. Этот класс дефектов систематически рассматривался во многих исследованиях и в основном, хотя и не полностью, был устранен.

Четвертый тип дефектов появляется во время эксплуатации скважины и вызывается избыточным или недостаточным давлением жидкости в скважине и изменением температуры. Предполагается, что колебания давления приводят к образованию радиальных трещин, а колебания температуры к отслоению на границах обсадной колонны/цемента или цемента/породы. Другой причиной такого типа дефектов может быть неравномерное геологическое напряжение в сочетании со смещением обсадной колонны. Этот четвертый тип дефектов цемента является объектом моделирования в данной работе. Целью является понимание возможных сценариев эксплуатации скважин, которые могут приводить к различным типам разрушения цементной оболочки.

В данной работе представлена полностью связанная термопоупругая модель обсаженного и цементированного ствола скважины, учитывающая на-

чальное напряжение в цементной оболочке вследствие гидратации (химической усадки/разбухания), смещение обсадной колонны относительно оси скважины и неравномерность геологических напряжений. Геометрические характеристики скважины таковы, что характерный вертикальный размер (тысячи метров) значительно превышает горизонтальный масштаб (сантиметры), что позволяет рассматривать задачу в приближении плоской деформации в поперечном сечении, перпендикулярном стволу скважины. Потенциальное разрушение цементной оболочки определяется с помощью критерия Мора-Кулона. Это позволяет определить точку инициации и момент времени разрушения. Распространение трещин является более сложной нелинейной задачей, которая в данной главе не рассматривается. Отслоение цементной оболочки на границе контакта с обсадной колонной и породой описывается критерием максимальных растягивающих напряжений и сравнением с прочностью адгезии материалов.

Во второй части работы рассматривается другая немаловажная технология разработки месторождения — гидроразрыв пласта (ГРП), который является одной из ключевых технологий для повышения добычи нефти и газа в низкопроницаемых коллекторах [5]. Трещины ГРП представляют собой класс трещин растяжения, распространяющихся в горных породах вследствие закачки жидкости под высоким давлением при наличии сжимающих напряжений [6]. Гидроразрыв пласта также используются для предварительной подготовки рудного тела, добываемого методом обрушения [7]. Кроме того, трещины ГРП встречаются в природе в виде магматических даек, распространяющихся из глубокой магматической камеры под давлением [8]. Количественная оценка динамики и геометрии трещин гидроразрыва имеет решающее значение в практических приложениях.

Одними из первых разработанных моделей ГРП были полуаналитические модели PKN [9], KGD [10] и дисковой трещины [11]. В этих моделях рассматривается одномерный поток жидкости, а рост трещины рассматривается только в одном направлении. Для данных моделей существуют полу-аналитические решения и эффективные численные алгоритмы. Однако в рамках данных моделей невозможно смоделировать сложную геометрию трещины. Другим существенным ограничением является то, что эти модели не позволяют учитывать реальное строение пласта со сложной многослойной структурой.

Семейство моделей Pseudo3D [12] представляет собой обобщение PKN модели. Модели P3D позволяют рассматривать распространение трещины в

многослойных породах. Геометрия трещины, как и в случае PKN, двумерная, но высота трещины может меняться вдоль сечения трещины. Преимуществом Pseudo3D моделей является высокая эффективность численной реализации и возможность расчета геометрии трещины с учетом слоистости пласта. Основными недостатками Pseudo3D моделей является отсутствие учета потока по вертикали, упрощенное решение упругой задачи и невозможность моделирования плоских трещин произвольной формы.

С развитием вычислительных мощностей научные усилия переключились на разработку более точных трехмерных моделей плоских трещин Planar3D [13; 14]. В модели Planar3D предполагается, что плоскость трещины покрывается двумерной сеткой. Уравнения, описывающие поток жидкости по трещине получены в приближении теории смазки. Для описания связи давления жидкости и раскрытия трещины используются полные трехмерные уравнения упругости. Модели Planar3D более точны, но и более ресурсоемки в вычислительном плане, чем модели Pseudo3D. Потребность в моделях Planar3D возникла в связи с тем, что существуют особые типы трещин, которые не подходят для моделирования в рамках моделей Pseudo3D. Например, когда форма трещины имеет форму песочных часов модели Pseudo3D дают некорректный результат. В отличие от классических моделей PKN, KGD и дисковой трещины, в модели Planar3D не делается никаких априорных предположений о характерном отношении длины и высоты трещины. Предполагается все направления распространения трещины равноправны.

Были также попытки моделирования полностью трехмерных трещин гидроразрыва в рамках модели Full3D [15]. Вычислительные затраты на численное решение таких полностью связанных систем все еще чрезмерно высоки, даже при наличии современных мощных вычислительных ресурсов. Существуют также нерешенные вопросы, относящиеся к образованию и расстоянию между трещинами в III моде, которые такие модели в настоящее время не решают.

Для оптимизации разработки месторождения часто проводится многостадийный ГРП, когда несколько трещин гидроразрыва пласта развиваются одновременно на одной скважине. С точки зрения моделирования, в этом случае необходимо учитывать индуцированное поле напряжений, возникающее в результате взаимного механического взаимодействия трещин. Эта тема была тщательно изучена в литературе [16—20]. В то же время, такие исследования

часто предполагают, что трещины развиваются перпендикулярно ориентации скважины, что не всегда имеет место на практике.

В данной работе мы сфокусируемся на развитии семейства моделей `Planar3D`, поскольку в настоящее время они являются наиболее популярными при проектировании дизайнов ГРП. Высокие требования к эффективности численных алгоритмов и ограничения на время выполнения моделирования требуют совершенствования существующих моделей и подходов. Кроме того, финальным этапом процедуры ГРП является остановка насосов, которая приводит к закрытию трещины ГРП. Поэтому важно иметь возможность моделировать не только раскрытие трещины, но и ее смыкание. В данной работе представлен контактный алгоритм, который является вариацией метода множителей Лагранжа и позволяет корректно моделировать закрытие трещины с корректным учетом утечки жидкости в пласт на этапе смыкания берегов трещины. Реализованный контактный алгоритм не увеличивает число степеней свободы, что положительно сказывается на общей эффективности численного алгоритма. Отдельное внимание уделяется задаче многостадийного гидроразрыва пласта. В работе разработана явная схема сопряжения параллельных трещин, развивающихся на одной наклонной скважине и проанализировано влияние угла наклона скважины на геометрические характеристики трещин. Результаты моделирования провалидированы на имеющихся численных и экспериментальных данных, а также сравнением с точными решениями.

Глава 1. Термопорупругая модель разрушения цементной оболочки в обсаженном и цементированном стволе скважины

Целостность цементной оболочки обсаженного ствола скважины является важным фактором для предотвращения миграции жидкости между различными проницаемыми слоями. Во время эксплуатации и сервисных работ скважина подвергается существенным нагрузкам, которые вызваны быстрыми колебаниями давления и температуры. Композитная структура скважины включает в себя материалы с существенно различными физическими свойствами, такими как модули упругости, теплопроводность и коэффициенты термического расширения.

Одна из первых математических моделей, описывающих поведение затвердевшей цементной оболочки [21; 22], основана на уравнениях линейной изотропной теории упругости, которые описывают механизм разрушения в терминах одноосного предела прочности на сжатие и на растяжение. Среди результатов этих работ есть наблюдение, что цементная оболочка с более низким модулем Юнга и большей толщиной создает меньшие напряжения на границах сталь/цемент и цемент/порода, чем более жесткая и узкая оболочка, и, следовательно, менее подвержена разрушению. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальным наблюдением в [23]. Расширение этой модели было выполнено в работах [24; 25], где были уточнены уравнения состояния породы и цемента. Fleckenstein и др. [26] представляют исследование напряженного состояния, вызванного образованием трещин в цементированном и нецементированном обсаженном стволе скважины и делают вывод о повышении сопротивления разрушению для цементированного ствола по сравнению с нецементированным. Philippasopoulos и др. [27] исследовали свойства различных цементов для скважин и изменения этих свойств путем добавления волокон. Они также проанализировали термоупругое поведение различных цементов с помощью метода конечных элементов. Pattillo и др. [28] проанализировали целостность горизонтального обсаженного ствола скважины, принимая во внимание историю конструирования и эксплуатации скважины. Gray и др. [29] провели обзор экспериментальных и математических результатов, касающихся цементирования ствола скважины для изоляции различных зон. Авторы предлагают поэтапный конечно-элементный подход, который отслеживает раз-

витие напряженно-деформированного состояния в жизненном цикле скважины. Zhang и др. [30; 31] расширили поэтапный конечно-элементный подход путем учета процессов эволюции пороупругих свойств во время затвердевания цемента и циклического температурного нагружения, связанного с закачкой жидкости в скважину. Экспериментальные исследования [32; 33] показывают, что затвердевший цемент следует рассматривать как пороупругий материал. Saint-Marc и др. [34] обращают внимание на то, что начальное напряженное состояние и пороупругая связь важны для правильного моделирования цементной оболочки. Meng и др. [35] разработали устройство трехосевого нагружения под высоким давлением для измерения начального напряженного состояния цемента, затвердевающего внутри полужесткой стальной трубы. Fourmaintraux и др. [36] предложили методологию кривой отклика системы (SRC) для анализа хемо-термо-поро-механических процессов в обсадной колонне, цементе, пласте и на границах их сопряжения. Vois и др. [37] представили механическую модель целостности цементной оболочки и показали, что потеря целостности зависит не только от свойств цемента, но и от архитектуры скважины и ее истории. Liu и др. [38] построили аналитическую модель для изучения влияния смещения обсадной колонны на целостность цементной оболочки в скважинах со сланцевым газом. Vois и др. [2] проанализировали условия образования отслоения на границах раздела цементной оболочки. Они показали, что среди множества возможных причин наиболее важными являются наличие температурных циклов и гидратация цемента. Garnier и др. [39] смоделировали влияние высокого температурного градиента на целостность оболочки. Результаты работы проверены на экспериментальных данных и реализованы в симуляторе Total. Meng и др. [40] предложили осесимметричную аналитическую модель, учитывающую начальное состояние напряжений в цементной оболочке и переходные термоупругие эффекты для прогнозирования целостности ствола скважины. Модель была проверена на экспериментальных данных, измеренных для образцов цемента нефтяных скважин [41]. Lesampion и др. [3; 42] разработали модель отслоения на границе обсадной колонны и цемента при закачке жидкости через перфорации. Модель была проверена на соответствие экспериментальным результатам и дает ряд масштабных соотношений для прогнозирования скорости роста зоны отслоения.

На рисунке 1.1 приведена схема конструкции скважины. Согласно процедуре конструирования скважины, она состоит из секций уменьшающихся

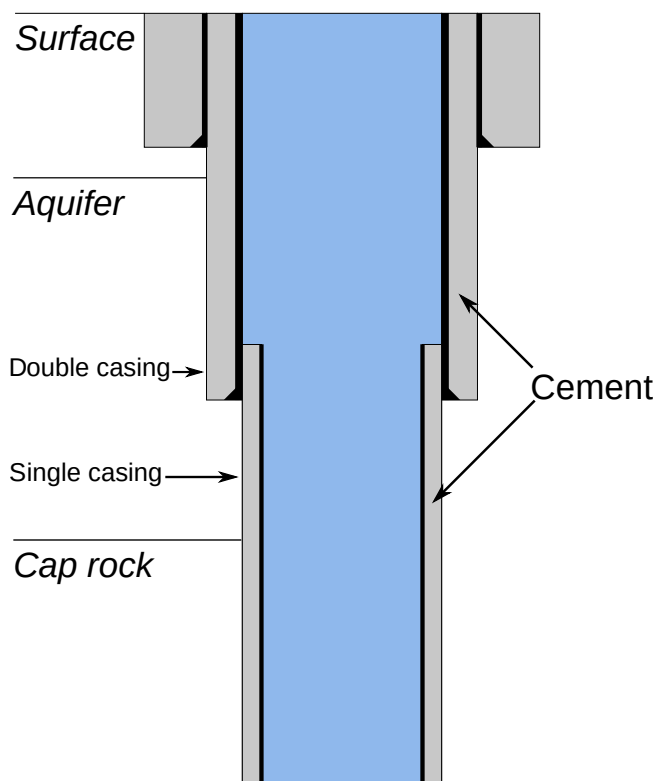


Рисунок 1.1 — Схема конструкции скважины.

диаметров. На каждом участке ствол скважины обсаживают и цементируют таким образом, чтобы каждое поперечное сечение состоит из трех слоев (от центра наружу): обсадная колонна (стальная труба), цементная оболочка, которая заполняет затрубное пространство между обсадной колонной и окружающим пластом, и горная порода. На стыках, где изменяется диаметр скважины, расположены две вложенные друг в друга обсадные колонны таким образом, что внутренняя обсадная колонна с диаметром нижней части скважины контактирует со стальной трубой внешней обсадной колонны, соответствующей верхней части скважины.

Обсадная колонна подвергается нагрузкам, связанным с напряжением в пласте, начальным напряжением, вызванным усадкой или разбуханием цемента во время его застывания, а также нагрузкам в процессе эксплуатации скважины. Комбинация этих факторов может потенциально приводить к образованию растягивающих или сдвиговых напряжений в цементе, что может спровоцировать развитие трещин в цементе или отслоение на границе раздела обсадная колонна/цемент или цемент/порода.

В процессе эксплуатации скважина подвергается действию повышенного давления в результате закачки жидкости (нагнетательные скважины, гидроразрыв пласта, закачка CO_2 и т.д.). Разумный диапазон приложенного давления

можно оценить как 0–100 МПа. Кроме высокого давления, скважина может подвергаться влиянию температурных колебаний, вызванных закачкой холодной жидкости с дневной поверхности (до -90°C относительной температуры пласта) или обработкой скважины паром (до $+200^{\circ}\text{C}$).

1.1 Постановка задачи

Предполагается, что в начальном состоянии обсаженная скважина подвержена действию геологических напряжений на внешней границе. Внутри скважины предполагается гидростатическое распределение давления жидкости. При этом считается, что все возмущения, внесенные в пласт во время бурения и цементирования скважины, пришли к равновесному состоянию, которое соответствует нагрузке композитного материала, состоящего из горной породы, цемента и стали. Отметим, что некоторые авторы [30; 31] различают этапы нагружения породы вследствие геологической нагрузки, бурения скважины, цементирования и застывания цемента. Однако, предполагая, что деформации, вносимые на этих этапах малы и применяя линейную теорию, мы рассчитываем напряженное состояние, создаваемое всеми этапами одновременно.

Рассматриваемая задача заключается в определении возможных зон разрушения обсаженного и цементированного ствола скважины вследствие перепадов давления и температуры внутри скважины. Рассматривается двумерная постановка в приближении плоской деформации в поперечном сечении, перпендикулярном оси скважины.

На рисунке 1.2 приведена схема расчетной области. В данной работе рассматривается как одиночная, так и двойная обсадка скважины. Одиночная обсадная колонна является наиболее распространенной конструкцией для всей скважины, за исключением соединений обсадных колонн разного диаметра, когда скважина имеет две вложенные обсадные колонны. Радиусы внутренней и внешней стальных труб, скважины и расчетной области обозначаются как r_0 , r_1 , r_2 и r_{∞} , соответственно. Предполагается, что обсадная колонна не идеально центрирована: отклонение обсадной колонны от оси скважины описывается в

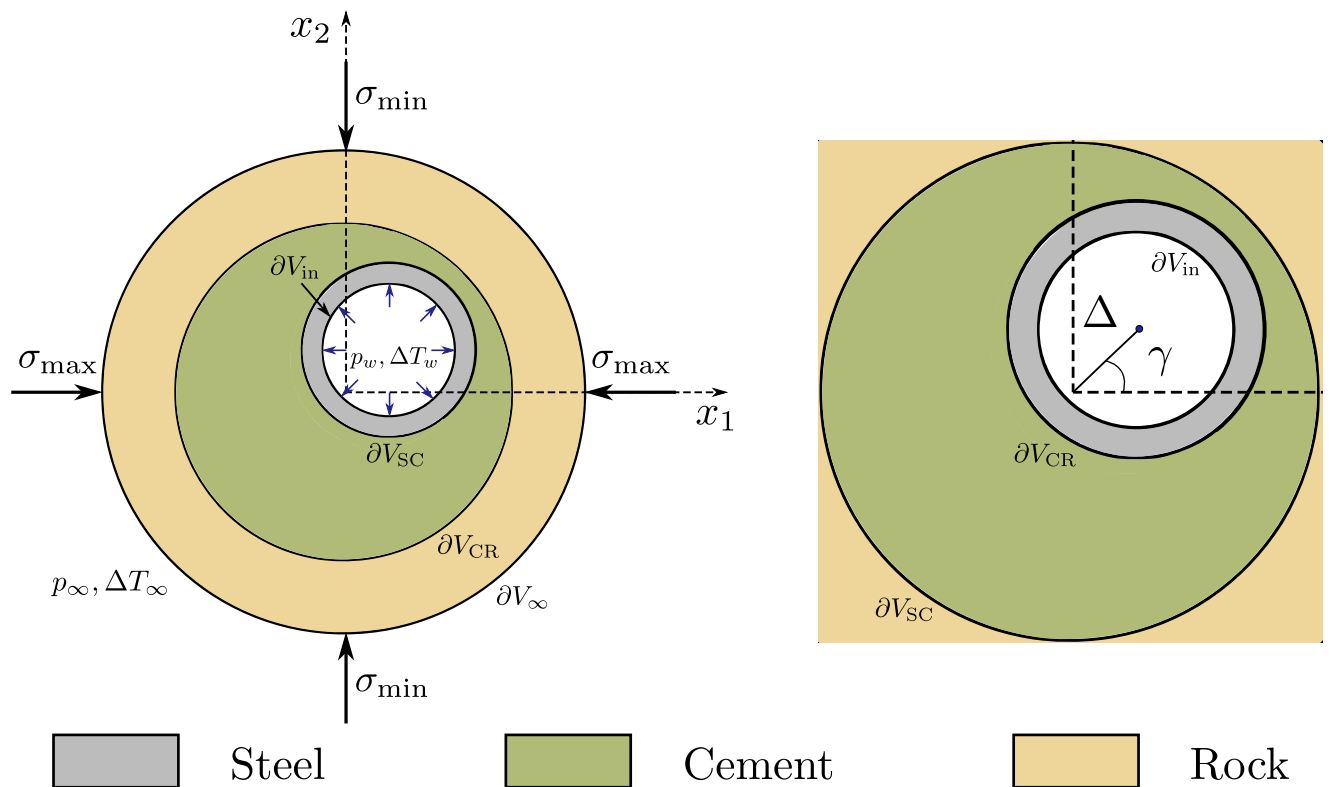


Рисунок 1.2 — Схема расчетной области и граничные условия.

терминах заданного эксцентриситета $\delta = \Delta / (r_2 - r_1)$ и угла γ , где Δ - смещение между центрами ствола скважины и стальной оболочки.

На границах раздела сред предполагается состояние чистого сцепления (нет ни скольжения, ни расслоения по границам). Цементная оболочка и порода представляют собой пористую среду, поры которой заполнены однофазной ньютоновской жидкостью. Главные напряжения в горной породе считаются постоянным, но различающимися в двух ортогональных направлениях. Оси координат Ox_1 и Ox_2 направлены вдоль максимального σ_{\max} и минимального σ_{\min} главных напряжений в породе соответственно.

1.1.1 Предположения и обозначения

Предполагается, что обсадная колонна, цементная оболочка и окружающая порода представляют собой пороупругую среду с конечной теплопроводностью. При этом стальная оболочка имеет нулевую пористость и проницаемость. Подробный вывод уравнений термopopoупругости приведен в работе [43]. Мы будем использовать обозначение σ для тензора напряжений Коши с компонента-

ми σ_{ij} в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где ось Ox_3 направлена вверх вдоль центральной оси ствола скважины. Для удобства также будем использовать цилиндрическую систему координат (r, θ, x_3) , где $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.

Символом $\boldsymbol{\varepsilon}$ будем обозначать тензор малых деформаций с компонентами $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ — вектор перемещения. Для объемной деформации скелета будем использовать обозначение $\epsilon = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$. Как уже упоминалось, мы используем приближение плоской деформации, подразумевающее, что деформация в направлении оси скважины пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальной деформацией. Пороупругая среда характеризуется пористостью ϕ , давлением поровой жидкости p и температурой T . Плотности обозначаются через $\rho_m = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$, ρ_s и ρ_f для насыщенного материала, матрицы (материала пористого скелета) и жидкости соответственно. Значения функций, относящихся к отсчетной конфигурации, будут обозначаться верхним индексом '0'.

Моделирование основано на предположениях о бесконечно малых деформациях $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$, малых перемещениях $\|\mathbf{u}\|/L \ll 1$ (L — характерный горизонтальный размер), малых вариациях пористости $|\phi - \phi^0|/\phi^0 \ll 1$ и малых изменениях плотности жидкости $|\rho_f - \rho_f^0|/\rho_f^0 \ll 1$.

1.1.2 Законы сохранения

Уравнение равновесия для насыщенного материала выглядят следующим образом

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \rho_m \mathbf{g} \quad (1.1)$$

где выражение для $\boldsymbol{\sigma}$ задается формулой

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda \epsilon I + 2G\boldsymbol{\varepsilon} - (b(p - p^0) + 3\alpha_s K(T - T^0)) I, \quad (1.2)$$

и $\mathbf{g} = (0, 0, g)^T$ — вектор ускорения свободного падения.

Законы сохранения массы и энергии в сочетании с законами Дарси и Фурье дают уравнения для порового давления и вариации температуры $\Delta T =$

$T - T^0$ в виде

$$b \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \frac{k}{\eta} \nabla^2 p, \quad (1.3)$$

$$3\alpha_s T^0 K \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - 3\alpha_m T^0 \frac{\partial p}{\partial t} + C_m \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 (\Delta T), \quad (1.4)$$

где

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi^0}{K_f}, \quad \alpha_m = \alpha_\phi + \phi^0 \alpha_f, \quad C_m = (1 - \phi^0) \rho_s C' + \phi^0 \rho_f C'_f.$$

В приведенных выше формулах I — единичный тензор, $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x})$ — тензор начальных напряжений, λ — первый параметр Ламе, G — модуль сдвига и $K = (3\lambda + 2G)/3$ — это объемный модуль скелета. Значение N это модуль Био, связывающий изменения давления и пористости скелета в процессе нагружения, когда и деформация, и температура поддерживаются постоянными; K_f — объемный модуль жидкости. Случай несжимаемой жидкости соответствует пределу $K_f \rightarrow \infty$. Константа b это коэффициент Био [44], который характеризует изменение пористости при изменении деформации, когда давление и температура поддерживаются постоянными. Коэффициент Био b может быть непосредственно измерен в экспериментах (см. [43], стр. 76–77). Упругость вычисляется как

$$S_\epsilon = \frac{1}{N} = \frac{(b - \phi_0)(1 - b)}{K}.$$

Значения α_s и α_ϕ представляют собой коэффициенты термического расширения, связанные с расширением скелета и изменением пористости вследствие изменения температуры; α_m — коэффициент термического расширения насыщенного материала. Значение C_m это объемная теплоемкость материала при постоянном давлении, C' и C'_f — удельные теплоемкости скелета и жидкости. Стоит отметить, что свойства скелета λ , G , α_s и C' связаны с так называемым “drained” материалом. Параметры такого материала могут быть измерены в эксперименте, в котором давление жидкости поддерживается постоянным ($dp = 0$).

Значение k — проницаемость породы, η — динамическая вязкость жидкости и κ — теплопроводность. Отметим, что $k = 0$ внутри обсадной колонны, однако в численной реализации модели используется очень малое ненулевое значение k внутри области стальной трубы. Это необходимо для того, чтобы

матрица жесткости была невырожденной. Теплопроводность нелинейно зависит от теплопроводности скелета и жидкости, а также от пористости материала. Поэтому будем считать, что эта величина задана для насыщенного материала. Характерные значения физических характеристик моделируемых материалов приведены в таблице 1.

1.1.3 Граничные условия

Поскольку рассматривается двумерное приближение плоской деформации, то вертикальное смещение равно нулю: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, давление имеет гидростатическое распределение по вертикали $p = p(t, x_1, x_2) + \rho_m g x_3$ и функции u_1, u_2, T не зависят от x_3 . Таким образом, в последующих разделах главы все векторы, тензоры и дифференциальные операторы считаются двумерными, если не указано обратное. Для удобства будем использовать следующие обозначения для координат: $x_1 = x, x_2 = y$.

Расчетная область представляет собой кольцо V , через центр которого проходит ось скважины (см. рисунок 1.2). Внешняя граница области V обозначается как ∂V_∞ . Обозначения внутренних границ, разделяющих различные типы материалов показаны на рисунке 1.2. Уравнения (1.1)–(1.4) решаются со следующим набором граничных условий. На внутренней границе скважины ∂V_{in} задается нормальное напряжение, изменения температуры и условие непротекания для порового давления:

$$\partial V_{\text{in}} : \quad \boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{n} \rangle = -p_w \mathbf{n}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \Delta T = \Delta T_w. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к границе; $\boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{n} \rangle$ обозначает действие тензора $\boldsymbol{\sigma}$ на вектор \mathbf{n} . На внутренних границах области ∂V_{SC} и ∂V_{CR} задается непрерывность перемещений, давления, температуры, нормального напряжения, потоков жидкости и тепла.

Условия на внешней границе определяют действие главных напряжений в породе, поровое давление и изменение температуры. Что касается главных напряжений в породе, то мы предполагаем, что система координат выбрана таким образом, что главные напряжения σ_{min} и σ_{max} действуют вдоль осей Ox_1

Таблица 1 — Основные физические параметры модели и их характерные значения.

Параметр	Название	Сталь	Цемент	Порода	Ед. Изм.
E	Модуль Юнга	200	14.5	10.5	ГПа
ν	Коэффициент Пуассона	0.27	0.22	0.15	—
b	Коэффициент Био	-	0.6	0.6	—
k	Проницаемость	-	10^{-15}	10^{-13}	см ²
η	Динамическая вязкость жидкости	-	0.3	0.3	МПа·сек
S_ε	Упругоёмкость	-	0.0571	0.0571	ГПа ⁻¹
α_s	Коэффициент линейного термического расширения скелета	12	10	11	10^{-6} К ⁻¹
α_f	Коэффициент линейного термического расширения жидкости	-	70	70	10^{-6} К ⁻¹
α_ϕ	Коэффициент линейного термического расширения связанный с пористостью	-	10	11	10^{-6} К ⁻¹
κ	Теплопроводность	15	1.2	1.83	Вт/(м К)
ϕ^0	Пористость	-	0.2	0.2	—
C'_m	Удельная теплоёмкость насыщенного материала	500	2100	710	Дж/(кг К)
ρ_s	Плотность скелета	7936	1893	2280	кг/м ³
ρ_f	Плотность жидкости	-	1000	1000	кг/м ³
σ_t	Предел прочности на растяжение	-	3.5	-	МПа
σ_c	Предел прочности на сжатие	-	50	-	МПа

Таблица 2 — Характерные граничные условия и референсные значения физических параметров.

Параметр	Название	Значение	Ед. Изм.
σ^0	Характерные начальные напряжения в цементе	-5	МПа
σ_∞	Характерные главные напряжения в породе	40	МПа
p_w	Давление жидкости в скважине	50	МПа
T_w	Температура жидкости в скважине	30	°С
p_∞	Пластовое поровое давление	30	МПа
T_∞	Температура пласта	90	°С
T^0	Референсная температура	20	°С
p_*	Референсное давление	10	МПа
t_*	Референсное время	3600	сек
l	Референсные перемещения среды	0.5	см
L	Референсная длина	40	см

и Ox_2 соответственно:

$$\partial V_\infty : \quad \boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{n} \rangle = \text{diag}(\sigma_{\min}, \sigma_{\max}) \langle \mathbf{n} \rangle, \quad p = p_\infty, \quad \Delta T = \Delta T_\infty. \quad (1.6)$$

Здесь $\text{diag}(a, b)$ представляет собой диагональную 2×2 матрицу с элементами a, b по диагонали.

1.1.4 Начальные данные и начальные напряжения

В качестве начальных данных задается начальное напряжение в цементе, распределение порового давления и изменение температуры:

$$t = 0 : \quad \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}), \quad p = p^0, \quad \Delta T = \Delta T^0. \quad (1.7)$$

Начальное напряжение $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x})$, которое действует как дополнительное сжатие или расширение цемента в дополнение к напряжениям в породе и давлению в скважине, выбирается следующим образом. Предполагается, что источником начального напряжения является внутреннее сжатие или расширение в

цементной оболочке, которые возникают из-за реакций гидратации во время застывания цементной оболочки. В статьях, описывающих экспериментальные исследования застывания цемента утверждается, что в условиях высокого давления чаще всего наблюдается усадка цемента (см. Meng и др. [35]), однако расширение также возможно (см. Wolterbeek и др. [45]). Поскольку мы детально не рассматриваем процесс гидратации цемента, задается только конечный уровень положительного (растяжение) или отрицательного (сжатие) начального напряжения σ_* , которое возникает внутри цементной оболочки после гидратации, так что тензор начального напряжения имеет диагональный вид $\boldsymbol{\sigma}^0 = \text{diag}(\sigma_*, \sigma_*)$. Отметим, что положительные значения $\sigma_* > 0$ соответствуют усадке цемента во время гидратации, в то время как отрицательные значения $\sigma_* < 0$ описывают разбухание цемента. Вне цементной оболочки тензор начального напряжения считается равным нулю.

В более общей постановке задачи начальные напряжения в цементе могут быть заданы как тензор

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 & \sigma_{xy}^0 & 0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_{yy}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^0 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы различаем горизонтальную (в сечении скважины) и вертикальную (вдоль оси) составляющие начального напряжения. Вследствие разницы в характерных масштабах задачи в вертикальном и горизонтальном направлениях предполагается, что вертикальное начальное напряжение может иметь любое заданное постоянное значение, отличное от характерного значения горизонтальных составляющих начального напряжения. В расчетах мы используем $\sigma_{zz}^0 = 0$, предполагая, что вертикальная составляющая начальных напряжений полностью релаксирует в процессе гидратации цемента из-за бесконечной длины скважины по сравнению с размером обсадной колонны. Однако изменения вертикальной составляющей начального напряжения σ_{zz}^0 могут оказывать существенное влияние на напряженное состояние и приводить к выполнению критерия разрушения, особенно в случае усадки цемента ($\sigma_{zz}^0 > 0$). Как уже упоминалось, это может привести к образованию дисковых трещин, которые не влияют на миграцию жидкости между вертикальными слоями и поэтому не так опасны с экологической и технологической точки зрения.

1.2 Дискретизация уравнений

Уравнения (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.6), (1.5) решаются с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для удобства мы используем протестированный и хорошо зарекомендовавший себя бесплатный конечноэлементный пакет с открытым исходным кодом FreeFem++ [46]. Для применения МКЭ необходимо записать уравнения (1.1)–(1.4) в слабой безразмерной форме.

1.2.1 Слабая постановка

Для получения слабой формулировки задачи мы умножаем уравнения (1.1), (1.3) и (1.4) на тестовые функции $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} и $\overline{\Delta T}$ соответственно и интегрируются по области V . Тестовые функции являются элементами пространства Соболева $H^1(V)$ и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\overline{\Delta T}|_{\partial V_\infty} = 0, \quad \bar{p}|_{\partial V_\infty} = 0, \quad \overline{\Delta T}|_{\partial V_{\text{in}}} = 0. \quad (1.8)$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского и граничные условия (1.5), (1.6), получим следующую слабую форму задачи: Найти функции \mathbf{u} , ΔT , $p \in H^1(V)$, удовлетворяющие начальным условиям (1.7), граничным условиям (1.5), (1.6) и следующим интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\left(-\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + b p + 3\alpha_s K \Delta T \right) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \right) d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_V \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} - \int_{\partial V_\infty} \boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{n} \rangle \cdot \bar{\mathbf{u}} ds - \int_{\partial V_{\text{in}}} p_w \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \\ & \int_V \left(\left(b \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) \bar{p} + \frac{k}{\eta} \nabla p \cdot \nabla \bar{p} \right) d\mathbf{x} = 0, \\ & \int_V \left(\left(3\alpha_s K \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} - 3\alpha_m \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{C_m}{T^0} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) \overline{\Delta T} + \frac{\kappa}{T^0} \nabla(\Delta T) \cdot \nabla(\overline{\Delta T}) \right) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

для произвольных тестовых функций $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} и $\overline{\Delta T}$, удовлетворяющих граничным условиям (1.8).

Для получения безразмерной слабой постановки введем характерные значения давления p_* , температуры T^0 , времени t_* , перемещения среды l и длины L . Введенные характерные значения представлены в таблице 2.

Безразмерные переменные вводятся как

$$t' = \frac{t}{t_*}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{l}, \quad p' = \frac{p}{p_*}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{p_*}, \quad \Delta T' = \frac{\Delta T}{T^0}. \quad (1.10)$$

Записывая уравнения (1.9) в безразмерных переменных (1.10) получим следующую безразмерную слабую постановку (штрихи опущены):

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\left(-a_1 \operatorname{div} \mathbf{u} + b p + a_3 \Delta T \right) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - a_2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \right) d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_V \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} - \int_{\partial V_\infty} \boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{n} \rangle \cdot \bar{\mathbf{u}} ds - \int_{\partial V_{\text{in}}} p_w \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \\ & \int_V \left(\left(b \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + b_1 \frac{\partial p}{\partial t} - b_3 \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) \bar{p} + b_2 \nabla p \cdot \nabla \bar{p} \right) d\mathbf{x} = 0, \\ & \int_V \left(\left(a_3 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} - b_3 \frac{\partial p}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) \overline{\Delta T} + c_2 \nabla(\Delta T) \cdot \nabla(\overline{\Delta T}) \right) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь мы используем следующие безразмерные комплексы:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda l}{p_* L}, & a_2 &= \frac{2Gl}{p_* L}, & a_3 &= \frac{3\alpha_s K T^0}{p_*}, & b_1 &= \frac{p_* L}{Ml}, \\ b_2 &= \frac{p_* t_* k}{\eta l L}, & b_3 &= \frac{3\alpha_m T^0 L}{l}, & c_1 &= \frac{C_m T^0 L}{p_* l}, & c_2 &= \frac{\kappa T^0 t_*}{p_* l L}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Безразмерная слабая формулировка (1.11)–(1.12) используется для численного решения с помощью метода конечных элементов.

1.2.2 Численный алгоритм

Для пространственной дискретизации используются кусочно-квадратичные конечные элементы P2 для вектора перемещения \mathbf{u} , порового давления p , изменения температуры ΔT и разрывные кусочно-линейные конечные элементы P1dc для вычисления компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Причина выбора

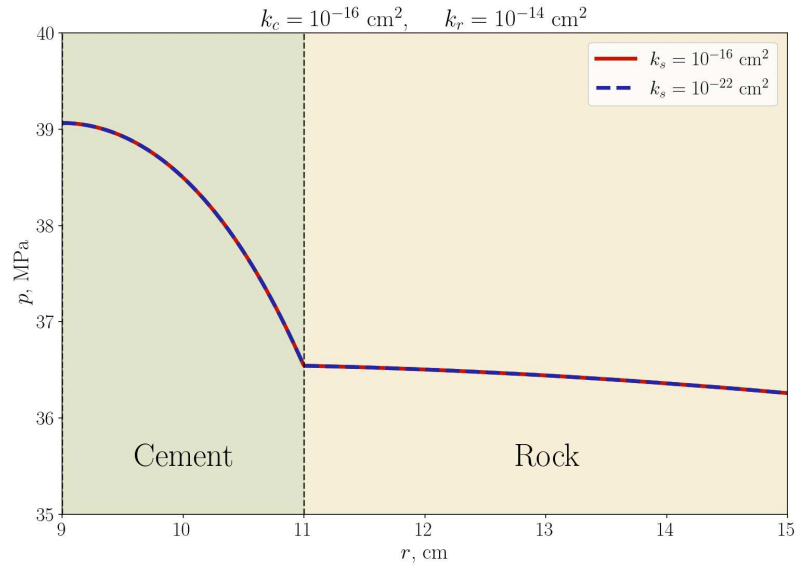


Рисунок 1.3 — Сравнение порового давления для различных значений проницаемости стали.

разрывных элементов для напряжений заключается в том, что компоненты напряжений, касательные к внутренним границам, могут быть разрывны из-за разницы физических свойств соседних материалов.

Для обеспечения сходства в моделировании всех материалов используется метод фиктивных областей [47] и предполагается, что проницаемость стали отлична от нуля. При этом $b = 0$, $\varphi = 0$, $S_\varepsilon = 0$ и $\alpha_\phi = 0$ в области стальной оболочки, т.е. поровое давление и упругие напряжения не влияют друг на друга, и результирующее фиктивное поровое давление в области стали не влияет на решение системы. В серии вычислений было проверено, что изменения проницаемости в области стальной оболочки не влияют на распределение давления в оставшейся части расчетной области. На рисунке 1.3 показано распределение порового давления для различных значений проницаемости стали. Изменение проницаемости стали на 6 порядков не влияет на поровое давление p в цементе и в породе и обеспечивает выполнение условия непротекания на границе сталь-цемент.

Производные по времени аппроксимируются с помощью схемы первого порядка: $\partial f / \partial t \approx (f^{n+1} - f^n) / \Delta t$, где f обозначает любую из функций \mathbf{u} , p или ΔT ; Δt — шаг по времени. Как правило в расчетах использовался шаг $\Delta t = 10$. Верхний индекс обозначает номер временного шага: $f^n = f(t^n, \mathbf{x})$, $t^n = t^0 + n\Delta t$. Вычисления начинаются с недеформированного состояния $\mathbf{u}^0 = 0$ и $p^0 = p_\infty$, $\Delta T^0 = \Delta T_\infty$ в качестве начальных данных. Производные по пространству вычисляются на $n + 1$ -м шаге, т.е. используется неявная схема по времени.

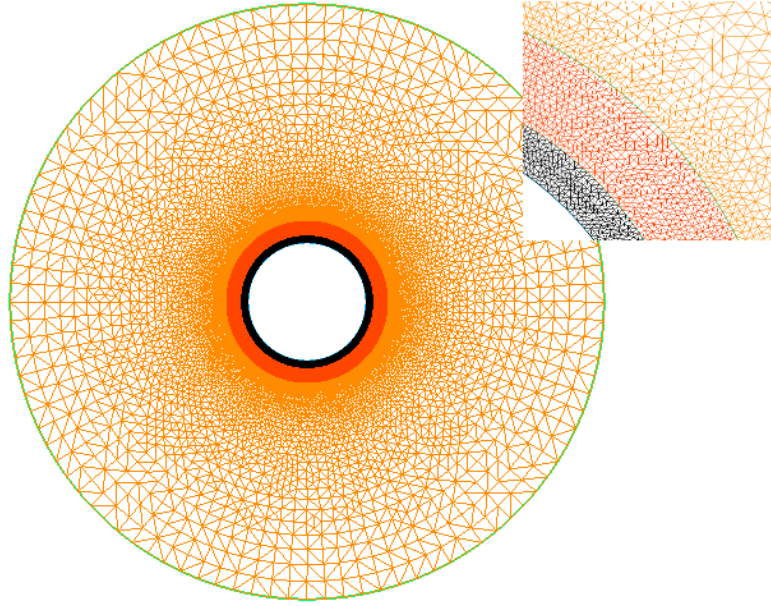


Рисунок 1.4 — Расчетная сетка для осесимметричной задачи.

В численных экспериментах используется треугольная сетка со 100 узлами на внешней границе области ∂V_∞ и 400 узлами на каждой внутренней границе ∂V_{in} , ∂V_{SC} и ∂V_{CR} . Сетка генерируется стандартным построителем сеток FreeFem++. Пример сетки для осесимметричной скважины при одиночной обсадке с общим числом узлов 15995 приведен на рисунке 1.4.

1.2.3 Сравнение с точным решением

Для проверки численного алгоритма было построено точное решение стационарной осесимметричной задачи в случае одиночной обсадки с однородными внешними напряжением $\sigma_{min} = \sigma_{max} = 30$ МПа и нулевым начальным напряжением $\boldsymbol{\sigma}^0 = 0$. Из-за сходства между поровым давлением и изменением температуры в уравнениях (1.1)–(1.4), для целей тестирования рассматривается случай постоянного порового давления $p = p^0$, т.е. учитывается только термоупругая связь. Изменение температуры ΔT_w на внутренней границе трубы ∂V_{in} считается равным нулю. На внешней границе ∂V_∞ изменение температуры в пласте составляет $\Delta T_\infty = 70^\circ\text{C}$.

Осесимметричная стационарная задача для перемещений и изменения температуры в полярных координатах (r, θ) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} - 3\alpha_s K \Delta T, \quad (1.14)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{u_r}{r} - 3\alpha_s K \Delta T. \quad (1.15)$$

Решение приведенной выше системы может быть записано в виде

$$u_r(r) = c_2 \frac{3\alpha_s K (2 \ln r - 1)r}{4(\lambda + 2G)} + c_3 r + \frac{c_4}{r}, \quad \Delta T(r) = c_1 + c_2 \ln r, \quad (1.16)$$

где $K = \lambda + 2G/3$ — объемный модуль насыщенного материала. Это решение справедливо для каждой подобласти с соответствующим набором констант c_i^s для стали, c_i^c для цемента и c_i^r для породы, $i = 1, \dots, 4$. Константы определяются из условий непрерывности перемещений, нормальных напряжений, температуры и тепловых потоков на всех смежных границах подобластей, а также условиями на внешней границе области. Выражения для c_i^s , c_i^c и c_i^r для $i = 1, \dots, 4$ не приводятся в данной работе в силу их громоздкости.

Для численных расчетов используется область V в форме кольца как показано на рисунке 1.4, где $r_0 = 8$ см, $r_1 = 9$ см, $r_2 = 11$ см и $r_\infty = 40$ см.

Все параметры материалов задаются в соответствии с таблицей 1. Значения коэффициента Био принимаются равными нулю, чтобы исключить влияние порового давления на напряжения внутри обсадной колонны:

$$b_s = 0, \quad b_c = 0, \quad b_r = 0.$$

На рисунке 1.5 показано сравнение численного и точного решения для радиального перемещения u_r , радиального напряжения σ_{rr} и изменения температуры ΔT . Разница между численным и аналитическим решением визуально незаметна, что подтверждает правильность численной модели.

Для проверки численного алгоритма в нестационарном случае мы провели сравнение со связанным термoporoupryгим точным решением задачи о скважине. А. Н.-Д. Cheng в работе [48] рассматривает термическое нагружение открытой скважины без стальной обсадной трубы и цементной оболочки.

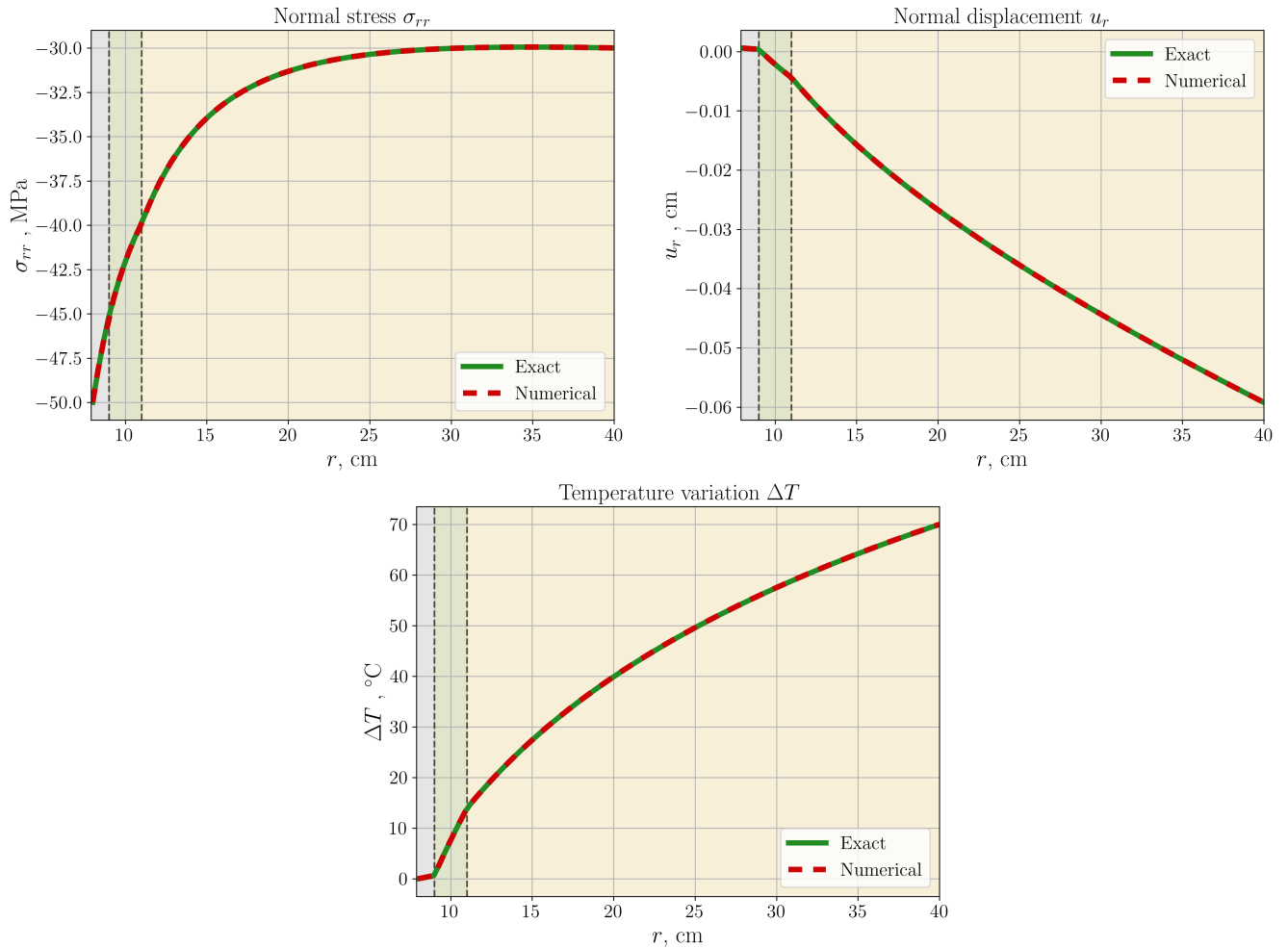


Рисунок 1.5 — Сравнение аналитического (зеленые сплошные линии) и численного (красные пунктирные линии) осесимметричного решения. На графиках слева направо изображено радиальное напряжение σ_{rr} в МПа, радиальное перемещение u_r в см и изменение температуры ΔT в $^{\circ}\text{C}$ в зависимости от радиальной координаты r . Серая область — это сталь, зеленая область — это цемент и желтая область — это порода.

Граничные условия выглядят следующим образом

$$r = r_0 : \quad \sigma_{rr} = 0, \quad p = 0, \quad T_w = 100 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

где радиус скважины равен $r_0 = 10$ см. На рисунке 1.6 показано сравнение температуры T , порового давления p и радиального напряжения $-\sigma_{rr}$ для различных моментов времени. Можно отметить хорошее соответствие между численными и аналитическими результатами.

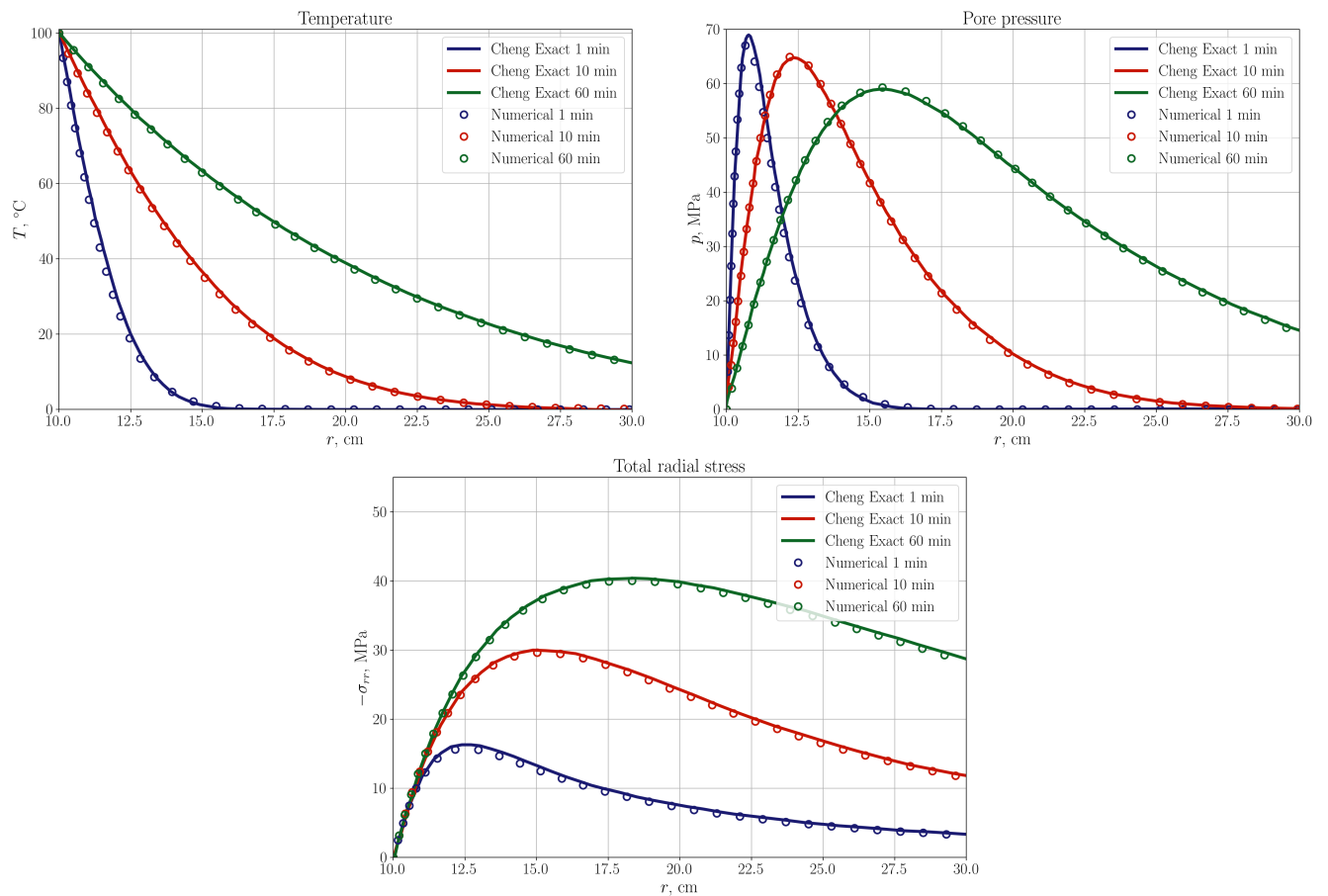


Рисунок 1.6 — Сравнение численного (маркеры) и аналитического (сплошные линии) нестационарного термopoppyyгoгo решения.

1.3 Численные эксперименты

В этом разделе мы используем нашу численную модель для анализа различных сценариев эксплуатации скважины. Целью раздела является анализ возникновения зон разрушения в цементной оболочке под воздействием нагрузок или колебаний температуры.

Как уже упоминалось, мы рассматриваем ствол скважины с одной и двумя обсадными колоннами. Случай двух обсадных колонн соответствует соединению двух стальных труб с различными диаметрами. Причина, по которой двойная обсадка рассматривается отдельно связана с наличием части цементной оболочки, ограниченной двумя непроницаемыми стальными трубами. Для двойной обсадной колонны обозначим через r_3 и r_4 внешние радиусы наружной стальной трубы и цементной оболочки соответственно. Радиусы внутренних зон и расчетной области такие же, как и раньше: $r_0 = 8$ см, $r_1 = 9$ см, $r_2 = 11$ см и $r_\infty = 40$ см, тогда как $r_3 = 12$ см и $r_4 = 14$ см.

Мы рассматриваем два возможных механизма разрушения цементной оболочки: отслоение по границам цемента и разрушение самой цементной оболочки. Анализ отслоения основан на учете полного напряжения, нормального к границам цементной оболочки. Отслоение может происходить, когда полное нормальное напряжение превышает предел прочности адгезии. Разрушение цементной оболочки моделируется с помощью критерия Мора-Кулона для эффективного напряжения Терцаги [43]:

$$\sigma' = \sigma + pI = \sigma^0 + \lambda \epsilon I + 2G\epsilon + (1 - b)pI - 3\alpha_s K \Delta T I. \quad (1.17)$$

1.3.1 Отслоение цементной оболочки

Чтобы проанализировать возможность отслоения цементной оболочки по границе цементной оболочки в случае неперфорированной скважины, было построено обобщение решения (1.16), учитывающее постоянное распределение порового давления: $p \equiv p_\infty$. Учет порового давления не добавляет никаких новых слагаемых в выражении для u_r в (1.16). Радиальная составляющая полного напряжения в каждой подобласти имеет следующий вид

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2G) \frac{du_r}{dr} + \lambda \frac{u_r}{r} - bp_\infty - 3\alpha_s K \Delta T.$$

Процесс отслоения определяется взаимодействием между сжимающими напряжениями, возникающих из-за действия главных напряжений в породе, давлением в стволе скважины и растягивающими напряжениями, создаваемыми колебаниями температуры. Однородное поле горизонтальных сжимающих напряжений в пласте σ_∞ , обусловленное литостатическим давлением, может быть оценено как [49]

$$\sigma_\infty = \frac{\nu_r}{1 - \nu_r} (\rho_r g h - b_r p_\infty) + b_r p_\infty,$$

где индекс r обозначает параметры породы, h — глубина резервуара и g — ускорение свободного падения. Для простоты мы предполагаем, что температура имеет линейное распределение по глубине h :

$$\Delta T_\infty = (T_{\text{surf}} - T_0) + k_T h,$$

где T_{surf} — температура поверхности при $h = 0$, k_T — температурный градиент. Будем считать, что поровое давление пласта имеет гидростатическое распределение $p_\infty = \rho_w g h$, где ρ_w — плотность воды. В численных расчетах используется следующая температура поверхности $T_{\text{surf}} = 10^\circ\text{C}$ и градиент температуры $k_T = 2.66^\circ\text{C}/(100 \text{ м})$. Все параметры материала берутся в соответствии с таблицей 1.

На рисунке 1.7 показано полное нормальное напряжение σ_{rr} в зависимости от глубины на внутренней и внешней границах цемента для различных температур ствола T_w в случае ненагруженной скважины ($p_w = 0$). На обеих границах цементной оболочки не возникает значительного растягивающего напряжения, которое могло бы привести к отслоению. Только для $T_w = 10^\circ\text{C}$ на глубинах $h < 25$ м возникает незначительное растягивающее напряжение порядка 0.1 МПа, что значительно меньше характерного значения прочности адгезии границы раздела цемент/сталь или цемент/порода $\sigma_t^n = 0.5$ МПа [50]. Увеличение температуры в скважине T_w приводит к увеличению сжатия. Более того, наличие ненулевого давления жидкости $p_w > 0$ также вызывает дополнительное сжатие. Таким образом, в случае неперфорированной скважины отслоение цементной оболочки в процессе эксплуатации скважины маловероятно. Конечно, в случае перфорированной скважины существует риск отслоения цементной оболочки вследствие нагнетания жидкости через перфорации, как это наблюдалось в [3; 42].

1.3.2 Разрушение цементной оболочки

В расчетах мы использовали критерий Мора-Кулона как наиболее распространенный критерий при анализе разрушения горных пород. Он определяет предельную линейную зависимость между касательным τ и нормальным σ' эффективными напряжениями, действующими на каждую площадку материала:

$$\tau = c - \sigma' \tan \varphi. \quad (1.18)$$

В этом выражении когезия c и угол внутреннего трения φ являются константами материала, которые считаются известными из лабораторных экспериментов в нормальных условиях (при отсутствии начальных напряжений, $\Delta T = 0$,

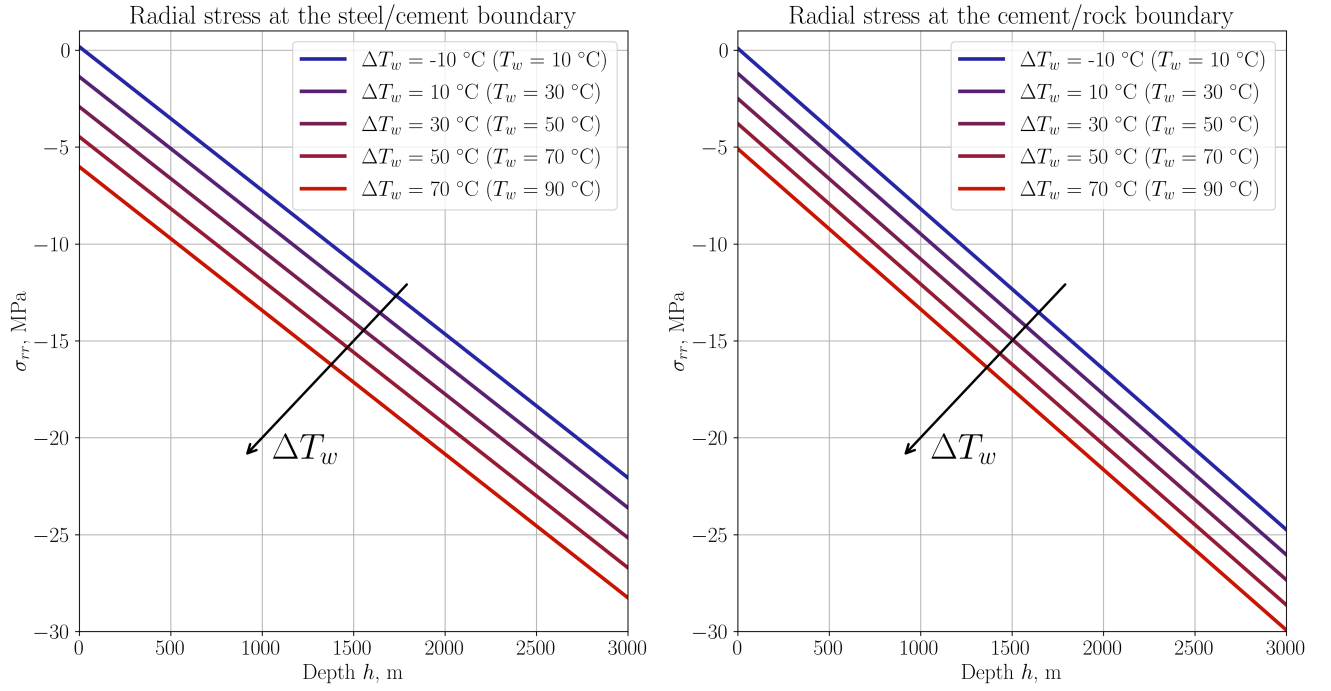


Рисунок 1.7 — Зависимость полного нормального напряжения σ_{rr} от глубины h для различных значений температуры ствола скважины на внутренней границе цемента $r = 9$ см (слева) и внешней границе $r = 11$ см (справа). Стрелками показана эволюция решения при увеличении отклонения температуры в скважине ΔT_w .

$p = 0$). В терминах главных эффективных напряжений, критерий Мора-Кулона принимает следующий вид

$$\sigma'_1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sigma'_3 = \sigma_t, \quad (1.19)$$

где σ_t , σ_c — пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно. Эти параметры могут быть определены из эксперимента на одноосное растяжение ($\sigma'_1 = \sigma_t$, $\sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$) и одноосное сжатие ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = 0$, $\sigma'_3 = -\sigma_c$) соответственно:

$$\sigma_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

Критерий Мора-Кулона, используемый в данной работе, дает представление об основных механизмах разрушения как о взаимодействии между наблюдаемыми факторами. Для наглядности будем рисовать левую часть критерия Мора-Кулона (интенсивность разрушения) в виде $f(\tau, \sigma') = \tau + \sigma' \tan \varphi - c$. Положительные значения $f(\tau, \sigma') > 0$ соответствуют зонам разрушения.

Последующие разделы посвящены анализу относительного вклада различных факторов в процесс разрушение цементной оболочки.

1.3.3 Влияние контраста внешних напряжений

Будем считать, что σ_{\max} и σ_{\min} действуют вдоль направлений x_1 и x_2 соответственно, и $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 1$.

Для численного анализа используются граничные условия, которые соответствуют скважине под давлением без изменений температуры:

$$p_w = 60 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\max} = 50 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = 35 \text{ МПа}, \quad \Delta T_w = \Delta T_{\infty} = 70 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Пластовое поровое давление, пределы прочности на растяжение и сжатие имеют следующие значения: $p_{\infty} = 30 \text{ МПа}$, $\sigma_t = 3.5 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 50 \text{ МПа}$.

В верхней части рисунка 1.8 показан результат численного расчета интенсивности разрушения с помощью критерия Мора-Кулона для одиночной и двойной обсадки ствола скважины соответственно. На графиках показаны только значения $f(\tau, \sigma') > 0$ внутри цементной оболочки, которые соответствуют потенциальным зонам разрушения.

В нижней части рисунка 1.8 показано распределение главных эффективных напряжений $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma'_3$, радиального эффективного напряжения σ'_{rr} и окружного эффективного напряжения $\sigma'_{\theta\theta}$ на внутренней границе сталь/цемент.

Как можно увидеть из рисунка 1.8, направление главного напряжения отклоняется от направления оси полярной системы координат Oe_r, e_{θ} . Максимальные значения критерия Мора-Кулона распределены по внутренней границе цемента, следовательно, разрушение, вероятнее всего, начнется на границе сталь/цемент в одной из четырех цветных областей, изображенных в верхней части рисунка 1.8. Поведение решения в случае двух обсадных колонн схоже с поведением решения для одной обсадной колонны. Зоны разрушения возникают во внутренней цементной оболочке, поскольку внешняя стальная труба практически не изолирует внутреннюю область от контраста геологических напряжений. Таким образом, представленное моделирование показывает, что относительно большой контраст геологических напряжений может быть причиной разрушения цементной оболочки.

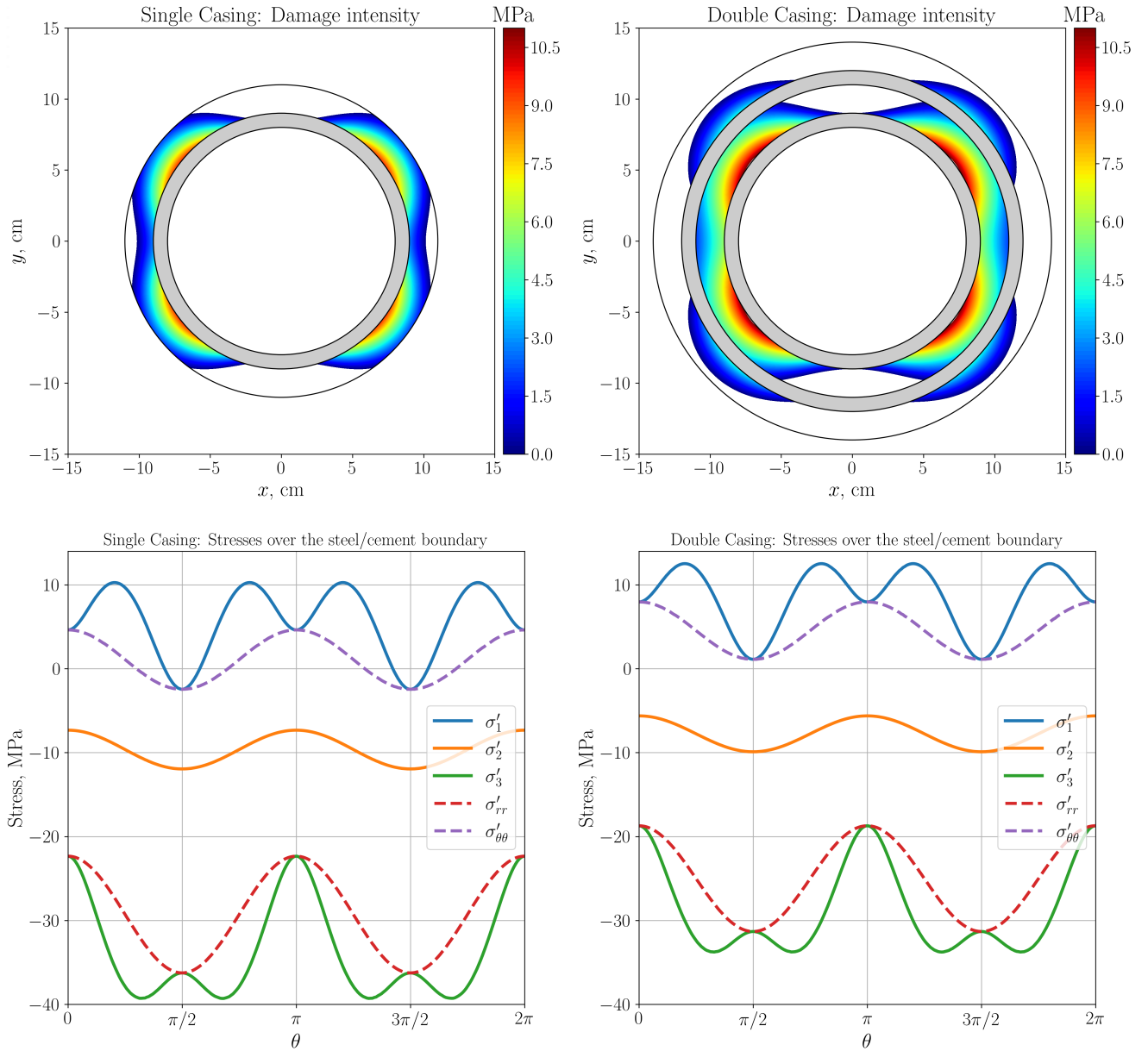


Рисунок 1.8 — Интенсивность разрушения по критерию Мора-Кулона в виде $f(\tau, \sigma') = \tau + \sigma' \tan \varphi - c > 0$ и распределение главных напряжений σ'_1 , σ'_2 , σ'_3 , радиального напряжения σ'_{rr} и напряжения обруча $\sigma'_{\theta\theta}$ на внутренней границе сталь/цемент.

1.3.4 Чувствительность к начальному напряжению

Застывание цемента — это сложный процесс, включающий химические реакции, изменение температуры и порового давления. Согласно многим исследованиям [51–54], при застывании цемент подвержен объемной усадке или разбуханию. Это приводит к возникновению дополнительного начального напряжения в цементной оболочке по окончании процесса гидратации цемента. Воздействие цемента на соседние материалы варьируется от гидростатического давления цементного раствора на начальной стадии цементирования до дополнительного растяжения или сжатия, вызванного объемной усадкой или разбуханием твердой цементной оболочки к моменту эксплуатации скважины. Для простоты мы не рассматриваем процесс затвердевания цемента, а предполагаем известным сгенерированное начальное напряжение, возникающее внутри цементной оболочки после застывания. При этом положительное (растягивающее) напряжение соответствует усадке цемента, что приводит к дополнительному сжатию по внутренней границе и растяжению на внешней границе цементного кольца. Отрицательное (сжимающее) напряжение внутри цементной оболочки, вызванное разбуханием цемента, приводит к дополнительному растяжению на внутренней границе и сжатию на внешней границе. Можно рассматривать этот процесс по аналогии с охлаждением предварительно нагретого материала внутри кольцевого пространства в случае усадки и нагревом предварительно охлажденного материала в случае разбухания цементной оболочки. В данном разделе анализируется влияние начального напряжения на общее распределение напряжений как в цементной оболочке, так и в соседних областях.

Для численного тестирования используется та же осесимметричная геометрия, что и в разделе 1.2.3, и полностью связанная термопороупругая модель. Граничные условия соответствуют скважине под давлением при однородном геологическом напряжении без возмущений температуры:

$$p_w = 60 \text{ МПа}, \sigma_{\max} = \sigma_{\min} = 50 \text{ МПа}, p_{\infty} = 30 \text{ МПа}, \Delta T_w = \Delta T_{\infty} = 70 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Все параметры материала берутся в соответствии с таблицей 1. Согласно Meng и др. [35], характерное значение начального напряжения в условиях высокого

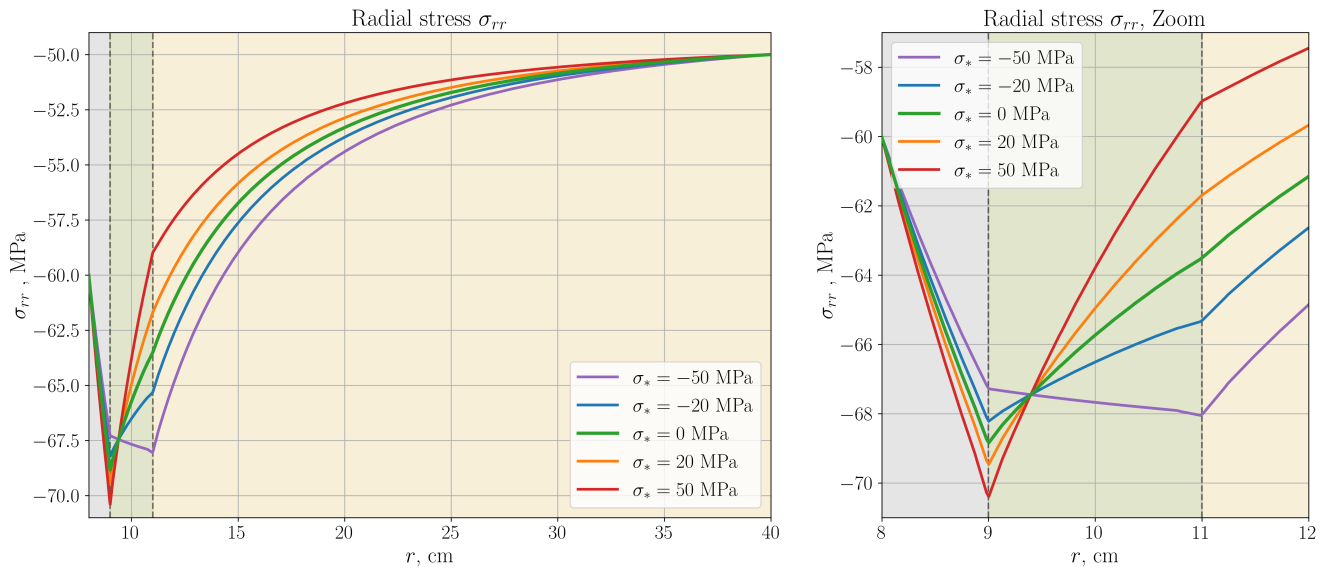


Рисунок 1.9 — Сравнение радиального напряжения σ_{rr} для значений начального напряжения, соответствующих усадке или разбуханию цемента. График слева: сравнение радиальных напряжений во всей области. Правый график: сравнение напряжений в области цементной оболочки. Серая область соответствует стали, зеленая — цементу и желтая область соответствует породе.

давления составляет порядка 5 МПа. Однако, для анализа чувствительности, мы будем варьировать σ_* в более широком диапазоне.

Было выполнено 5 расчетов с начальными напряжениями $\boldsymbol{\sigma}^0$, заданным в декартовых координатах как: а) $\boldsymbol{\sigma}^0 = \text{diag}\{\sigma_*, \sigma_*\}$, б) $\boldsymbol{\sigma}^0 = \text{diag}\{0, 0\}$, в) $\boldsymbol{\sigma}^0 = \text{diag}\{-\sigma_*, -\sigma_*\}$. Напомним, что положительные значения $\sigma_* > 0$ соответствуют усадке цемента, а отрицательные значения $\sigma_* < 0$ соответствуют разбуханию цемента. На рисунке 1.9 показано сравнение радиальных напряжений σ_{rr} , полученных во всех случаях для $\sigma_* = 20$ МПа и $\sigma_* = 50$ МПа.

Из рисунка 1.9 видно, что при больших значениях начального напряжения порядка 50 МПа влияние на общее напряженное состояние является значительным, что подразумевает необходимость учета начального напряжения для оценки потенциальных зон разрушения. Однако при не столь значительном σ_* порядка 5 МПа начальное напряжение не оказывает существенного влияния на напряженное состояние вследствие относительно небольшого объема цементной оболочки. Другой вывод заключается в том, что положительное начальное напряжение (усадка цемента) увеличивает сжатие внутренней границы между обсадной колонной и цементной оболочкой и уменьшает сжатие внешней границы между цементом и породой, тогда как для отрицательного начального напряжения (разбухание цемента) влияние противоположно. Можно провести

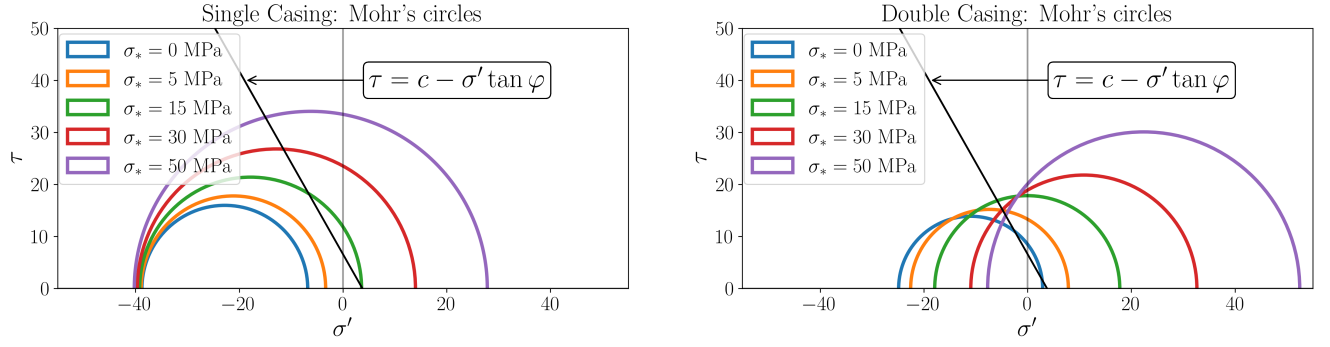


Рисунок 1.10 — Круги Мора для различных положительных значений начального напряжения для одиночной обсадки (слева) и для двойной обсадки (справа) ствола скважины. Сплошная черная линия соответствует критерию Мора-Кулона.

аналогию с охлаждением или нагревом кольцевого пространства, зажатого между двумя жесткими цилиндрами.

Чтобы проанализировать влияние начального напряжения на развитие зон разрушения, рассмотрим круги Мора в плоскости (σ', τ) , где σ' — нормальное эффективное напряжение, а τ — компонента сдвигового эффективного напряжения. Радиус и координаты центра для наибольшего круга Мора вычисляются как

$$R = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}, \quad (\sigma'_c, \tau_c) = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}, 0 \right). \quad (1.20)$$

На рисунке 1.10 показаны круги Мора для различных положительных (усадка) значений начального напряжения. Согласно критерию Мора-Кулона, пересечение окружности и прямой $\tau = c - \sigma' \tan \varphi$ указывает на разрушение цемента. По мере роста начального напряжения радиус круга Мора увеличивается, а его центр смещается вправо как для случая одной обсадной колонны, так и для двух.

На рисунке 1.11 слева показаны круги Мора для различных отрицательных (разбухание) значений начального напряжения. Для приведенных значений σ_* разрушение цемента происходит только при $\sigma_* = -50$ МПа. Однако следует отметить, что круги Мора изменяются немонотонно. Это связано с изменением наибольшей компоненты главных напряжений: σ'_{zz} становится доминирующим напряжением для больших отрицательных значений σ_* . На рисунке 1.11 справа приведены диагональные компоненты (главные напряжения) тензора эффективных напряжений σ' в цилиндрической системе координат на внутренней границе цементной оболочки $r = 9$ см как функцию начального

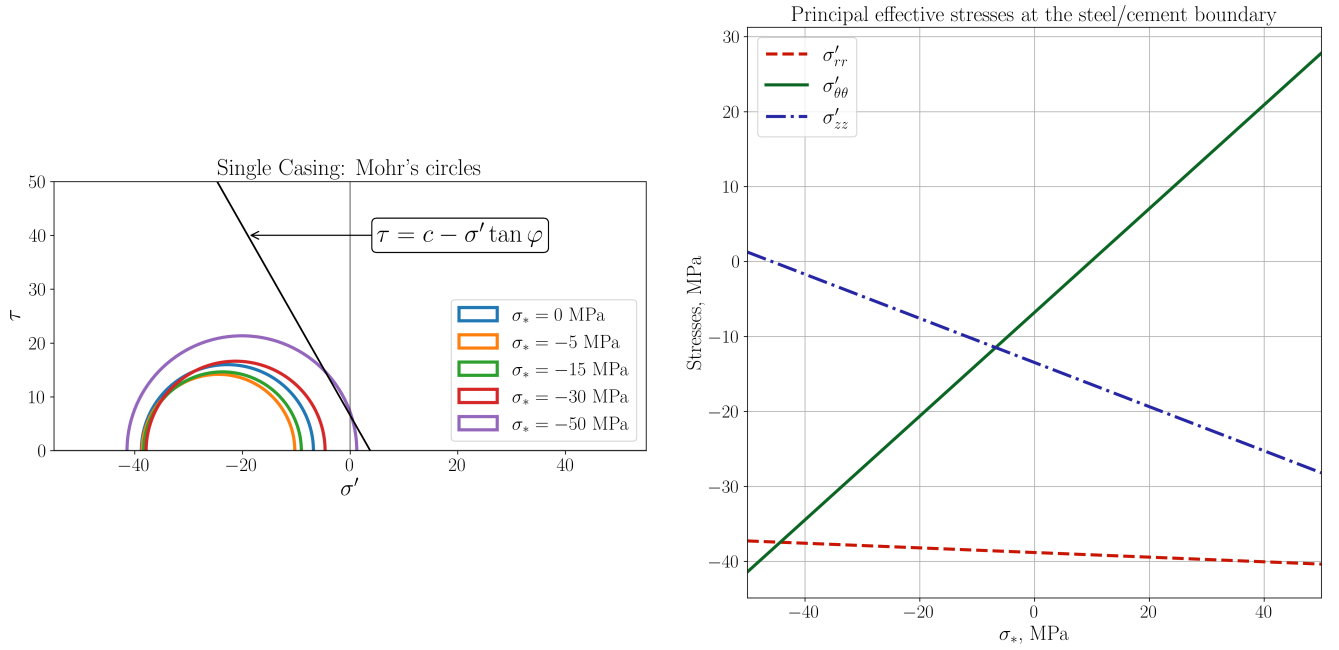


Рисунок 1.11 — Круги Мора для различных отрицательных значений начального напряжения для случая одной обсадной колонны (слева) и диагональные компоненты тензора эффективных напряжений σ' в цилиндрической системе координат на внутренней границе цементной оболочки $r = 9$ см в зависимости от начального напряжения σ_* (справа).

напряжения σ_* . Преобладание окружных напряжений $\sigma'_{\theta\theta}$ для $\sigma_* > -8$ МПа сменяется преобладанием осевого напряжения σ'_{zz} для $\sigma_* < -8$ МПа.

1.3.5 Чувствительность к сдвигу обсадной колонны

В данном разделе будем считать, что существует ненулевой сдвиг между осью ствола скважины и обсадной колонной, который определяется эксцентриситетом $\delta = \Delta/(r_2 - r_1)$ и углом сдвига γ (см. рисунок 1.2). Для одиночной обсадной колонны будем использовать $\delta = 0.6$ и $\gamma = \pi/4$. В случае двух обсадных колонн будем считать, что внутренняя колонна смещена на $\delta_1 = \Delta_1/(r_4 - r_1) = 0.2$ в направлении, определяемом углом $\gamma_1 = \pi/4$, тогда как внешняя колонна центрирована относительно ствола скважины, так что $\delta_2 = \Delta_2/(r_4 - r_3) = 0$ и $\gamma_2 = 0$. Также предполагается, что начальное напряжение в цементе задается тензором $\sigma^0 = \text{diag}\{\sigma_*, \sigma_*\}$, где $\sigma_* = 20$ МПа.

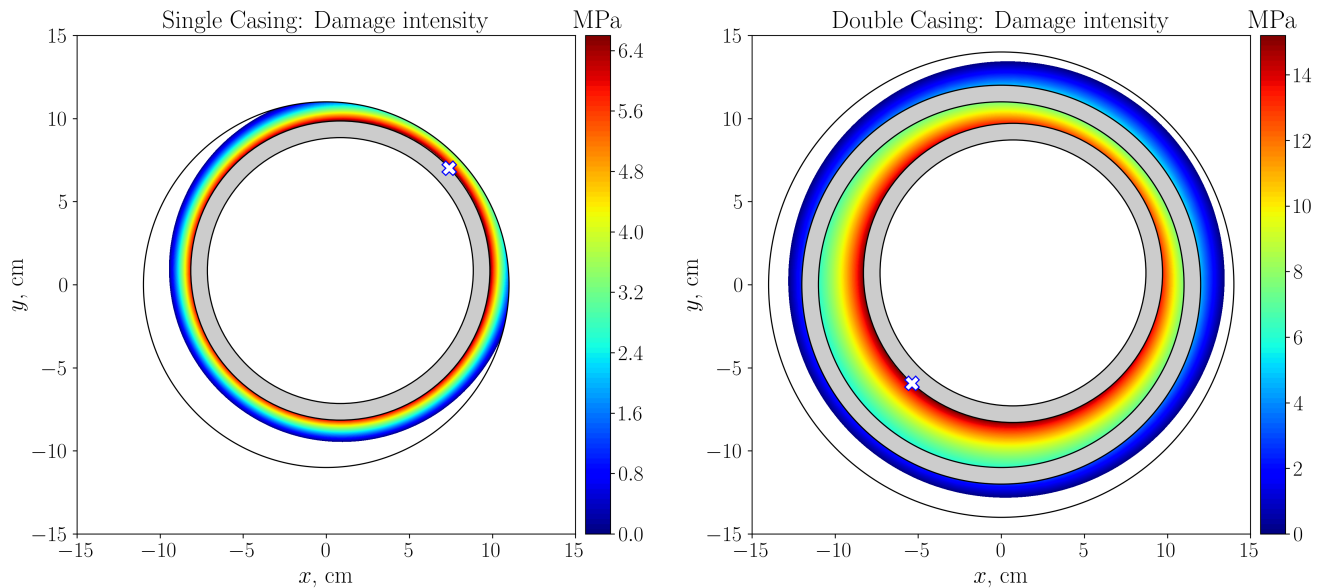


Рисунок 1.12 — Интенсивность разрушения по критерию Мора-Кулона в случае сдвинутой одиночной (слева) и двойной (справа) обсадной колонны под действием положительного (усадка цемента) начального напряжения.

На рисунке 1.12 приведен результат численного расчета интенсивности разрушения для одиночной (слева) и двойной (справа) обсадки. В случае одиночной обсадной колонны максимальное значение интенсивности разрушения достигается в самой тонкой части цементной оболочки на границе сталь/цемент при угле $\theta = \pi/4$. Для ствола скважины с двумя обсадными колоннами результат противоположный: максимальное значение интенсивности достигается в самой толстой части цементной оболочки при угле $\theta = -3\pi/4$. Это различие, вероятно, связано с тем, что внешняя стальная обсадная колонна выполняет функцию жесткой армирующей оболочки, в то время как для одиночной обсадной колонны физические свойства цемента и породы близки, и несимметричность обсадной колонны не играет столь значительной роли.

На основании серии численных экспериментов мы пришли к выводу, что значительное влияние эксцентриситета на развитие зон разрушения проявляется в основном в сочетании с начальным напряжением. В других случаях наличие эксцентриситета в основном только смещает распределение напряжений относительно центра ствола скважины.

1.3.6 Влияние температуры и порового давления

Как видно из уравнения (1.17), вклад порового давления p и изменения температуры ΔT в напряженное состояние представляет собой однородное растяжение или сжатие материала. Следовательно, согласно уравнению (1.20), рост температуры ΔT уменьшает эффективные напряжения и вызывает смещение кругов Мора влево, тем самым уменьшая вероятность образования зон разрушения. Эффект порового давления противоположен. Поскольку $(1 - b) \geq 0$, то рост порового давления p увеличивает эффективное напряжение и смещает круги Мора вправо, тем самым увеличивая вероятность разрушения материала. В общем случае, при рассмотрении полностью связанной системы (1.1)–(1.4), объемная деформация, поровое давление и изменения температуры сильно взаимосвязаны. Этот эффект связи становится еще более выраженным, когда мы имеем дело с композитной структурой и сильным контрастом свойств материала, как в случае с обсаженным стволом скважины.

Чтобы проанализировать влияние температуры и порового давления на напряжение в цементной оболочке, будем рассматривать осесимметричную конфигурацию, описанную в разделе 1.2.3. Свойства материалов приведены в таблице 1. Внешнее напряжение равномерно и равно $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = 50$ МПа, давление в скважине задано как $p_w = 60$ МПа, начальные напряжения σ^0 равны нулю, пластовое поровое давление $p_\infty = 30$ МПа и пластовая температура $\Delta T_\infty = T_\infty - T_0 = 70$ °С такие же, как в таблице 2.

Для описания эволюции кругов Мора во времени введем ориентированное расстояние d_{mohr} , которое определяется как расстояние от центра (σ'_c, τ_c) круга Мора до прямой $\tau = c - \sigma' \tan \varphi$ минус радиус круга R

$$d_{\text{mohr}} = \sigma'_c \sin \varphi + (\tau_c - c) \cos \varphi - R, \quad (1.21)$$

где центр и радиус определены в (1.20). Отрицательные значения d_{mohr} соответствуют выполнению критерия Мора-Кулона (1.18) и развитию зоны разрушения. Следует отметить, что изменение температуры приводит не только к смещению кругов Мора, но и к изменению их радиусов. Это объясняется связью между тепловыми эффектами и эффектами порового давления, которые влияют на эволюцию объемной деформации и напряжения материала.

Для одиночной обсадной колонны была проведена серия расчетов для различных значений $\Delta T_w \in \{0, 35, 70, 105, 140\}$ °С. Отметим, что $\Delta T_w = T_w - T_0 = 0$ °С соответствует охлаждению скважины (температура пласта $T_\infty = 90$ °С, а температура жидкости $T_w = 20$ °С), тогда как $\Delta T_w = 140$ °С соответствует нагреву скважины ($T_w = 160$ °С). Поскольку температура в скважине меняется, процесс становится нестационарным, температура и поровое давление эволюционируют от начального до конечного равновесного состояния.

Для одиночной обсадной колонны мы рассмотрели два случая, которые условно назвали “Высокая проницаемость” и “Низкая проницаемость”. Для “Высокой проницаемости” мы использовали значения проницаемости, приведенные в Таблице 1. В случае “Низкой проницаемости” мы используем $k_c = 10^{-16}$ см² (0.01 μ D) для цементной оболочки [35; 55] и $k_r = 10^{-14}$ см² (1 μ D) для пласта.

Высокая проницаемость.

На рисунке 1.13 показано изменение температуры ΔT и поровое давление p для $\Delta T_w = 0$ °С и $\Delta T_w = 140$ °С в различные моменты времени. Из-за непроницаемости стальной обсадной жидкость в скважине не имеет связи с поровой жидкостью в цементной оболочке и в породе. Влияние напряжения и температуры на поровое давление быстро релаксирует вследствие фильтрации поровой жидкости в породу. На рисунке 1.14 показаны значения расстояния d_{mohr} в зависимости от времени при различных значениях температуры $\Delta T_w \in \{0, 35, 70, 105, 140\}$ °С для внутренней ($r = 9$ см) и внешней ($r = 11$ см) границы цементной оболочки. Для всех значений изменения температуры ствола скважины ΔT_w ориентированное расстояние d_{mohr} остается положительным на протяжении всего времени расчета, что свидетельствует об отсутствии развития зон разрушения. Таким образом, для одиночной обсадной колонны и высокопроницаемого цемента и пласта рост порового давления вследствие изменения температуры не приводит к разрушению цементной оболочки.

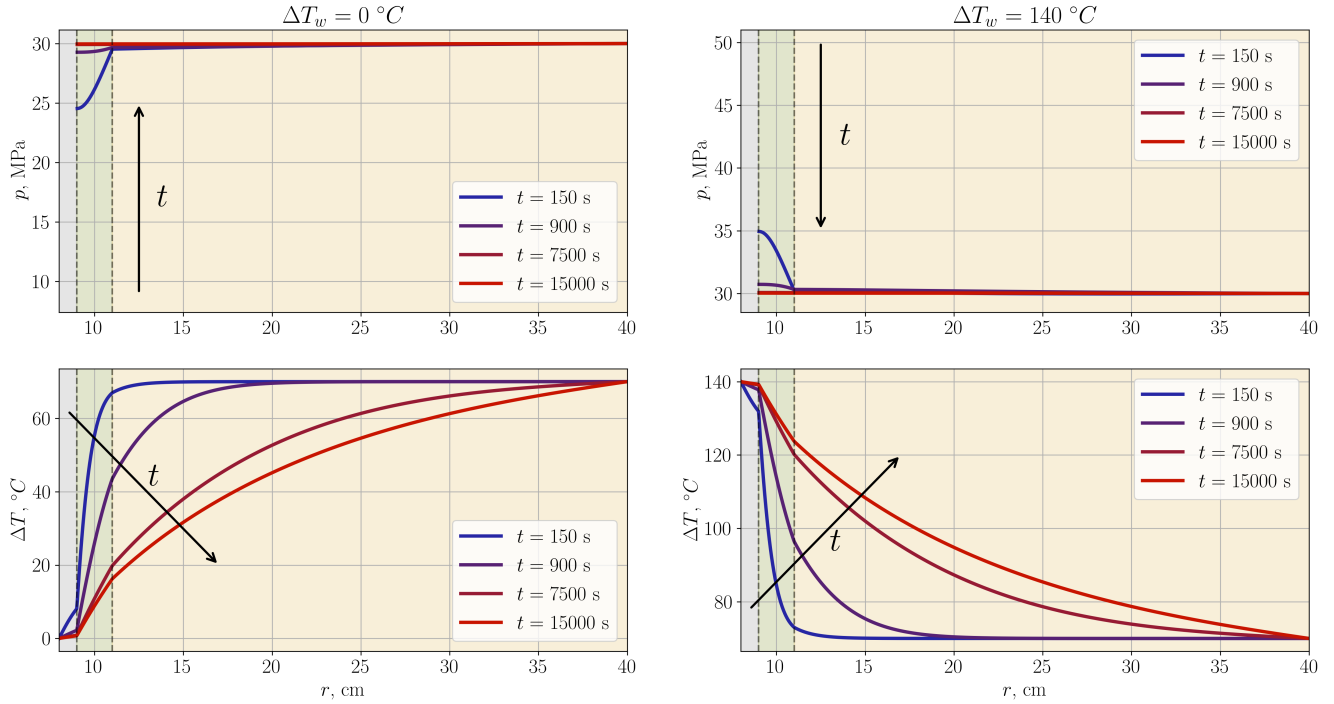
High Permeability: $k_c = 0.1 \mu\text{D}$, $k_r = 10 \mu\text{D}$ 

Рисунок 1.13 — Одиночная обсадная колонна, высокая проницаемость: изменение температуры ΔT и порового давления p в области цемента и породы для $\Delta T_w = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ (слева) и $\Delta T_w = 140 \text{ }^\circ\text{C}$ (справа). Серая область обозначает обсадную колонну, зеленая область — цементную оболочку и желтая область обозначает породу. Стрелки схематично показывают направление эволюции решения с течением времени t .

Низкая проницаемость.

В случае низкопроницаемого цемента влияние порового давления становится значительным. Отклонения температуры вызывают существенные изменения порового давления p , особенно в первые минуты процесса. Иллюстрация этого утверждения приведена на рисунке 1.15. Резкое изменение порового давления значительно влияет на эффективные напряжения и может привести к разрушению цементной оболочки. На рисунке 1.16 значение d_{mohr} для $\Delta T = 140 \text{ }^\circ\text{C}$ на внутренней границе цементной оболочки становится отрицательным в течение первых минут процесса. Это указывает на выполнение критерия Мора-Кулона (1.18) и развитие зоны разрушения цемента. Таким образом, предпочтительнее использовать высокопроницаемый цемент

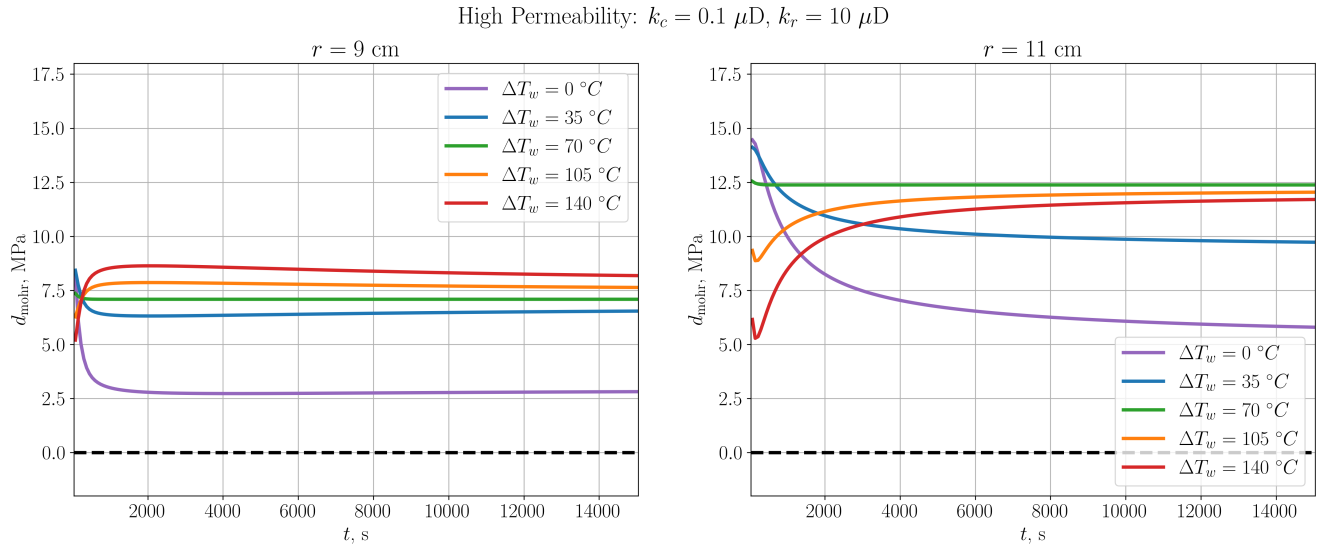


Рисунок 1.14 — Одиночная обсадная колонна, высокая проницаемость: сравнение ориентированных расстояний d_{mohr} от наибольшего круга Мора до прямой $\tau = c - \sigma' \tan \varphi$ при различных значениях отклонения температуры скважины ΔT_w на внутренней $r = 9$ см (слева) и внешней $r = 11$ см (справа) границе цементной оболочки.

для снижения вероятности разрушения для скважин, в которых проводятся высокотемпературные операции, такие как обработка паром.

Две обсадные колонны.

Для ствола скважины с двойной обсадной колонной процесс усложняется и становится немонотонным во времени. Поведение решения во внешней цементной оболочке аналогично решению с одной обсадной колонной. Кроме того, внешняя цементная оболочка находится на большем расстоянии от внутренней границы скважины, чем цементная оболочка для одиночной обсадной колонны. Это приводит к меньшим колебаниям температуры и порового давления во внешней цементной оболочке, что только снижает вероятность разрушения. Поэтому для случая двух обсадных колонн мы сосредоточимся на анализе устойчивости внутренней цементной оболочки, которая ограничена двумя непроницаемыми стальными трубами. В расчетах мы используем значения проницаемости, приведенные в таблице 1.

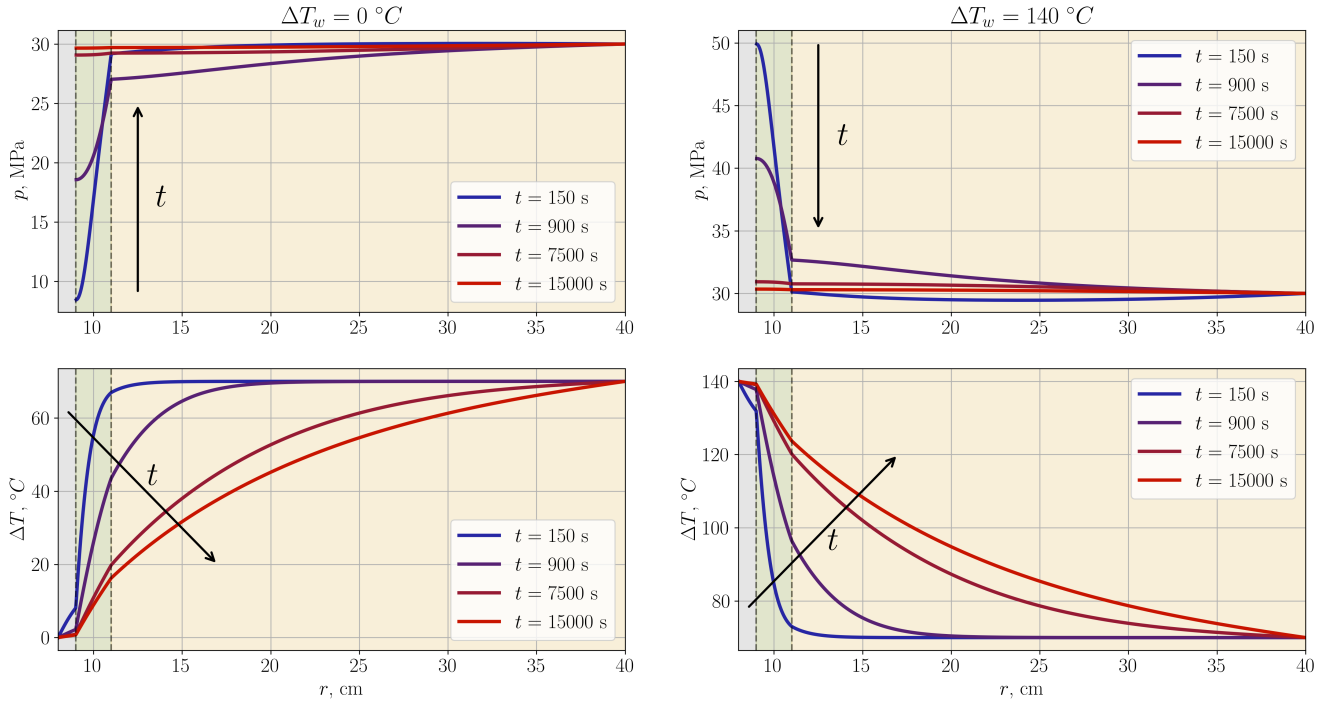
Low Permeability: $k_c = 0.01 \mu\text{D}$, $k_r = 1 \mu\text{D}$ 

Рисунок 1.15 — Одиночная обсадная колонна, низкая проницаемость: изменение температуры ΔT и порового давления p в области цемента и породы для $\Delta T_w = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ (слева) и $\Delta T_w = 140 \text{ }^\circ\text{C}$ (справа). Серая область обозначает обсадную колонну, зеленая область — цементную оболочку и желтая область обозначает породу. Стрелки схематично показывают направление эволюции решения с течением времени t .

На рисунке 1.17 показаны значения расстояния d_{mohr} в зависимости от времени при различных значениях температуры $\Delta T_w \in \{0, 35, 70, 105, 140\} \text{ }^\circ\text{C}$ для внутренней ($r = 9 \text{ см}$) и внешней ($r = 11 \text{ см}$) границы изолированной цементной оболочки. Рост температуры увеличивает вероятность разрушения внутренней цементной оболочки. В численных экспериментах развитие зоны разрушения начинается от внешней границы изолированной цементной оболочки. На рисунке 1.18 показано изменение температуры ΔT и порового давления p для $\Delta T_w = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ и $\Delta T_w = 140 \text{ }^\circ\text{C}$ в различные моменты времени. Поровое давление изображено только в области цемента и породы. Обратите внимание, что температура на внутренней границе цементной оболочки изменяется гораздо быстрее, чем на внешней, в то время как поровое давление сохраняется практически постоянным в изолированной цементной оболочке. Разница в графиках для внутренней и внешней границ на рисунке 1.17 объясняется разной скоростью изменения температуры.

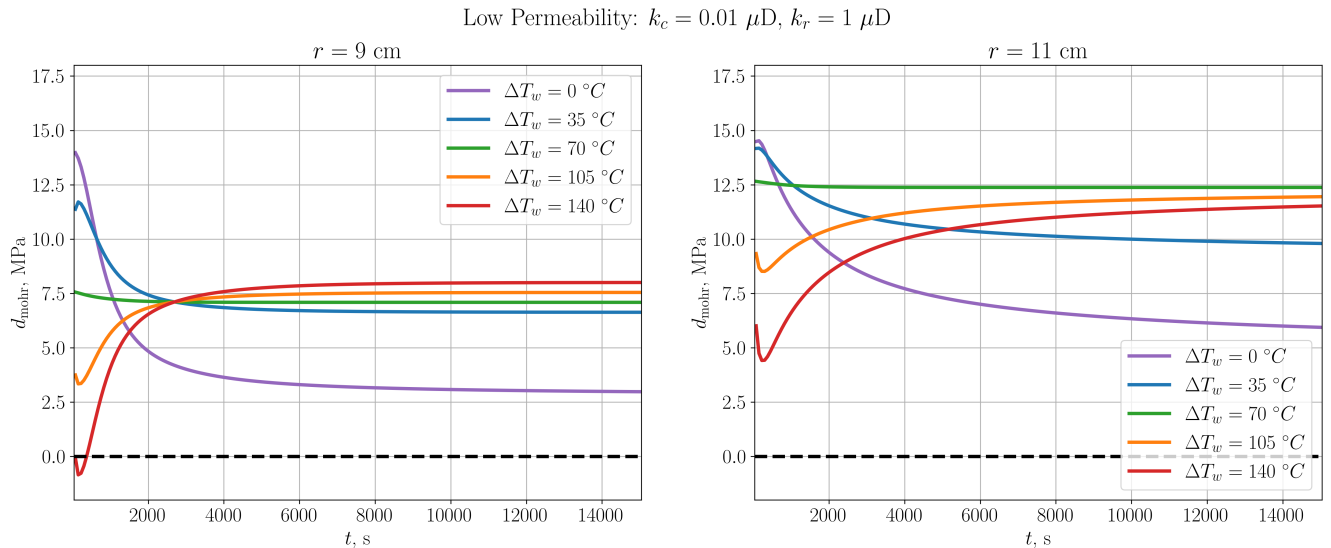


Рисунок 1.16 — Одиночная обсадная колонна, низкая проницаемость: сравнение ориентированных расстояний d_{mohr} от наибольшего круга Мора до прямой $\tau = c - \sigma' \tan \varphi$ при различных значениях отклонения температуры скважины ΔT_w на внутренней $r = 9$ см (слева) и внешней $r = 11$ см (справа) границе цементной оболочки.

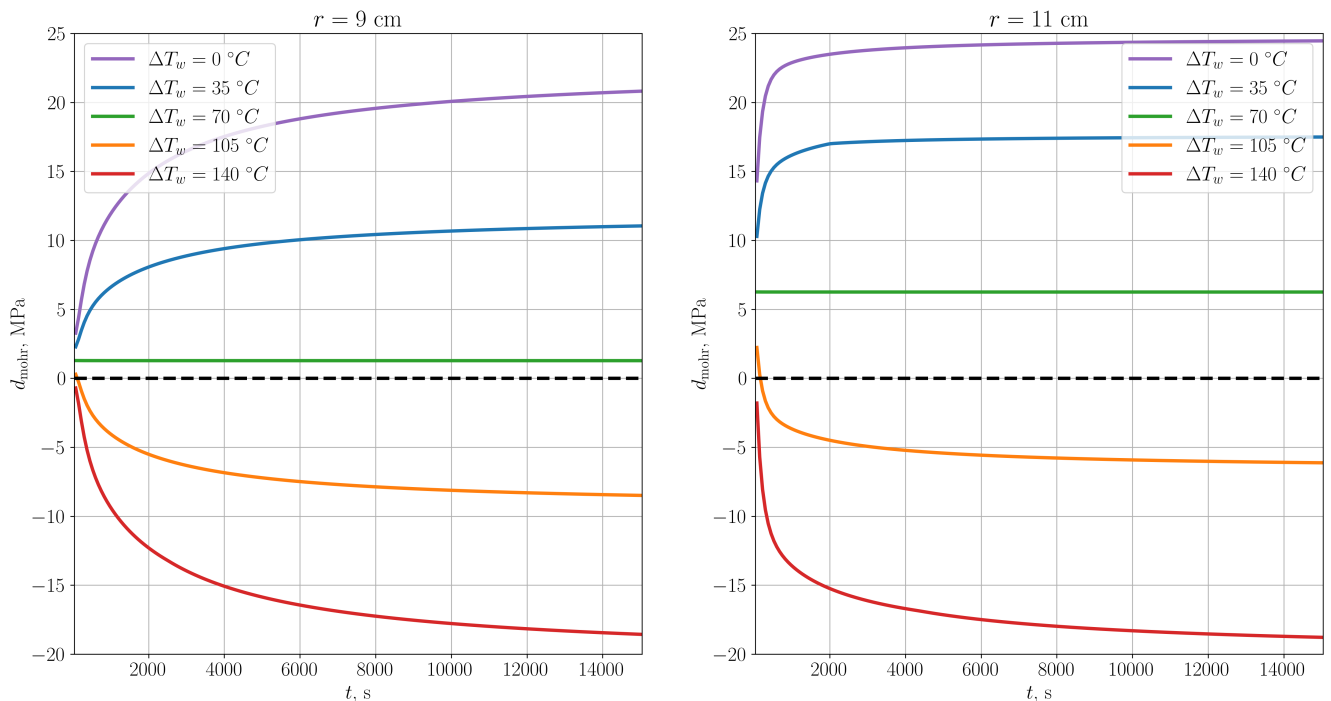


Рисунок 1.17 — Две обсадных колонны: сравнение ориентированных расстояний d_{mohr} от наибольшего круга Мора до прямой $\tau = c - \sigma' \tan \varphi$ при различных значениях отклонения температуры скважины ΔT_w на внутренней $r = 9$ см (слева) и внешней $r = 11$ см (справа) границе цементной оболочки.

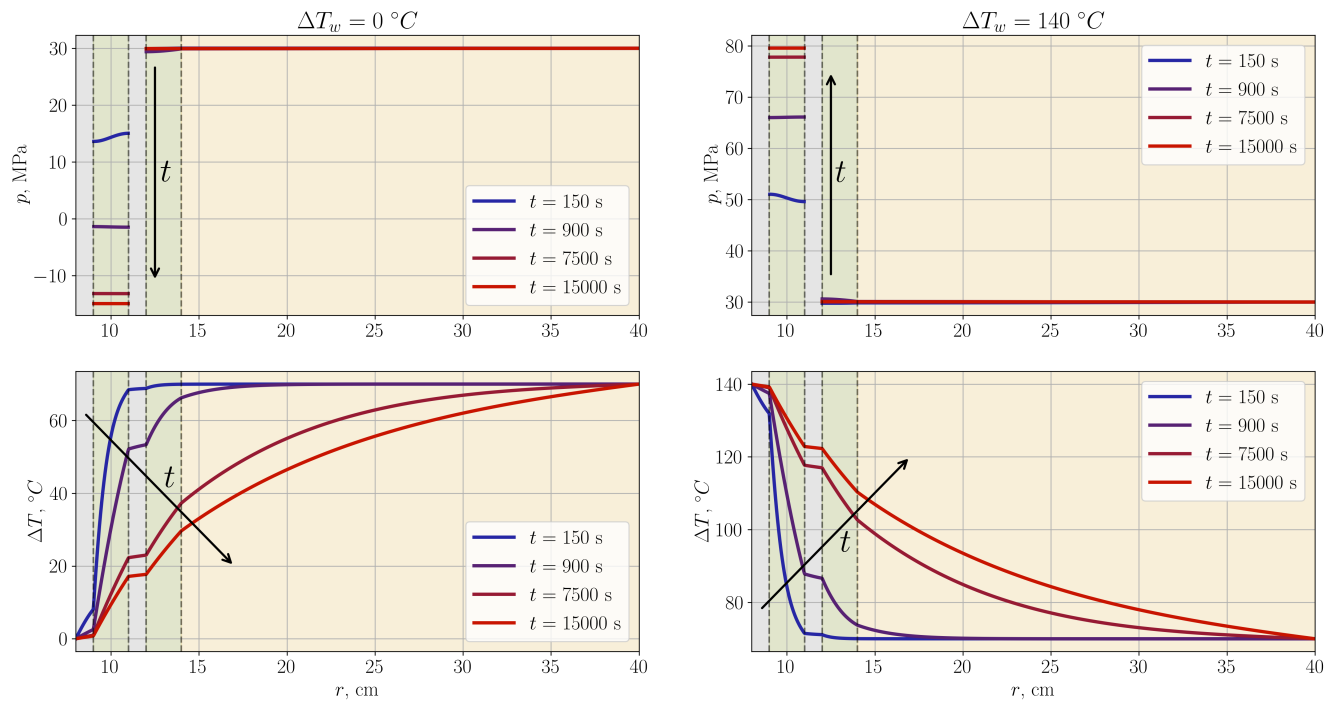


Рисунок 1.18 — Две обсадных колонны: изменение температуры ΔT и порового давления p в области цемента и породы для $\Delta T_w = 0^\circ\text{C}$ (слева) и $\Delta T_w = 140^\circ\text{C}$ (справа). Серая область обозначает обсадную колонну, зеленая область — цементную оболочку и желтая область обозначает породу. Стрелки схематично показывают направление эволюции решения с течением времени t .

Стоит отметить значительное изменение порового давления в изолированной цементной оболочке, ограниченной непроницаемыми стальными трубами. Поровая жидкость находится в ловушке изолированного слоя, поэтому изменения температуры отражаются в значительном увеличении порового давления и в соответствующем изменении эффективного напряжения. Расчеты данного раздела показывают, что участки ствола скважины с двойной обсадной колонной потенциально более подвержены разрушению вследствие колебаний температуры, чем участки с одиночной обсадной колонной. Конечно, этот эффект может быть ослаблен вертикальной фильтрацией жидкости, которой мы пренебрегаем в нашей модели.

1.4 Механизмы нарушения целостности цементной оболочки

В данной главе была рассмотрена полностью связанная термопороупругая модель устойчивости цементной оболочки обсаженного и цементированного ствола скважины. Модель учитывает композитную структуру скважины, контраст геологических напряжений и смещение обсадной колонны относительно оси скважины. Описанный подход позволяет исследовать влияние начальных напряжений в цементной оболочке, которые возникают в процессе гидратации цемента. Кроме того, был рассмотрен случай двух вложенных обсадных колонн, который возникает в местах соединения стальных труб разного диаметра.

В процессе эксплуатации скважины на устойчивость цементной оболочки влияет множество факторов. На основе проведенного анализа можно выделить следующие возможные механизмы нарушения целостности цементной оболочки:

- Для неперфорированной скважины риск отслоения цементной оболочки на границе сталь/цемент или цемент/порода крайне низок в силу существенного влияния внешних сжимающих напряжений.
- Относительно большой контраст геологических напряжений (порядка 20-30%) может вызвать разрушение цемента в зонах контакта стальной трубы и цементной оболочки, расположенных по диагонали к направлениям главных напряжений в породе.
- Начальные напряжения порядка 20 МПа могут приводить к разрушению цементной оболочки, в то время как относительно небольшие значения начальных напряжений порядка 5 МПа релаксируют вследствие относительно небольшого объема цементной оболочки. Усадка цемента, как правило, чаще может приводить к разрушению, чем разбухание, поскольку создает дополнительное окружное напряжение внутри цементной оболочки. Разбухание цемента увеличивает растягивающее напряжение на границе между внутренней обсадной колонной и цементной оболочкой.
- Положительное начальное напряжение (соответствует усадке) в сочетании со сдвигом обсадной колонны может приводить к образованию радиальных трещин в самой тонкой части цементной оболочки в случае одиночной обсадки и в самой толстой части цементной оболочки в

случае двух обсадных колонн. В остальных случаях наличие сдвига не оказывает существенного влияния на распределение напряжений.

- Для неперфорированной скважины с одиночной обсадной колонной и высокопроницаемого цемента изменения порового давления внутри цементной оболочки и породы вследствие механических или температурных воздействий внутри скважины незначительны. Напротив, для цемента с низкой проницаемостью изменения порового давления играют значительную роль и могут привести к разрушению цемента.
- Предпочтительно использовать высокопроницаемый цемент для предотвращения разрушения цемента в скважинах, связанных с высокотемпературными операциями, такими как обработка паром.
- Для ствола скважины с двумя обсадными колоннами изменения температуры оказывают существенное влияние на изменение порового давления в изолированной цементной оболочке, что может приводить к разрушению даже в случае высокопроницаемого цемента.

В этой главе было проанализировано индивидуальное влияние различных факторов на устойчивость цементной оболочки при эксплуатации скважины. Расчеты показывают, что именно сочетание различных факторов (колебания температуры, сдвиг обсадной колонны, начальное напряжение и т.д.) может вызвать повреждение цементной оболочки, в то время как каждого воздействия по-отдельности может быть недостаточно для разрушения. Для оценки возможности образования зон разрушения или отслоения цемента в условиях одновременного воздействия множества нагрузок (давление жидкости в скважине, перепад температуры и т.д.) и неоднородностей (начальные напряжения, смещение обсадной колонны и т.д.) необходимо выполнить конечноэлементный расчет на основе полностью связанной термoporоупругой модели, которая была представлена в данной главе.

Глава 2. Модель плоской трещины гидроразрыва пласта

Гидроразрыв пласта является важным методом воздействия на пласт с целью повышения производительности скважин в нефтяной промышленности, особенно для коллекторов со сверхнизкой проницаемостью [5]. В полевых условиях при закачке жидкости под высоким давлением трещина ГРП обычно распространяется на несколько сотен метров от ствола скважины. Чтобы лучше предсказывать геометрию трещин ГРП при разработке месторождения, важно иметь стабильный и быстрый алгоритм для моделирования распространения трещины.

Все модели гидроразрыва пласта включают в себя расчет упругого равновесия породы, баланс массы закачиваемой жидкости, жидкости в трещине и жидкости, которая отфильтровывается в окружающую породу, а также критерий распространения фронта трещины. В традиционном моделировании ГРП для решения уравнений упругого равновесия используется ряд различных подходов, включая метод разрывных смещений [14], метод конечных элементов [56] и расширенный метод конечных элементов (XFEM) [57]. Другой важной компонентой модели ГРП является учет потока жидкости по трещине, который часто считается ламинарным и предполагается, что жидкость является ньютоновской. В более сложных моделях рассматриваются степенные жидкости [58], турбулентный поток [59; 60] или перенос пропанта [61; 62]. Во многих моделях используется условие распространения, основанное исключительно на линейной упругой механике разрушения. Предполагается, что трещина распространяется, если коэффициент интенсивности напряжений достиг некоторого критического значения. Однако анализ решения в окрестности фронта трещины [63] показывает, что область действия классической корневой асимптотики ограничена небольшой областью вблизи кончика трещины. Таким образом, либо требуется очень подробная сетка для достаточно точной разрешимости корневой асимптотики, либо следует использовать специальное асимптотическое решение, которое включает поведение решения в более широкой области. Асимптотическое поведение решения в окрестности фронта трещины рассматривалось в работах [63–65]. Использование такого асимптотического решения в качестве условия распространения приводит к более точным численным расчетам на относительно грубой сетке.

Другой важной составляющей моделирования ГРП является исследование взаимодействия между одновременно распространяющимися трещинами, которые инициируются на наклонной скважины. В частности, цель заключается в том, чтобы описать влияние угла наклона скважины на взаимодействие между трещинами и на общую результирующую геометрию отдельных трещин. Для упрощения анализа предполагается, что трение на перфорациях достаточно велико. Это приводит к равномерному распределению потока между трещинами. Математическая модель для множественных трещин ГРП основана на объединении моделей одиночных трещин. При таком подходе напряжение, вызванное раскрытием трещины, вычисляется на предыдущем шаге по времени. Кроме того, для увеличения эффективности численного алгоритма в расчетах не учитывается влияние касательных напряжений, в результате чего взаимодействие напряжений между трещинами описывается исключительно в терминах нормального смещения и нормального напряжения.

2.1 Математическая постановка

Рассматривается задача распространения плоской трехмерной трещины гидроразрыва пласта (ГРП) в упругой среде вследствие закачки вязкой несжимаемой жидкости через точечный источник $Q(t)$ (см. рисунок 2.1). Поле минимальных сжимающих напряжений в пласте $\sigma_h(y)$ ориентировано перпендикулярно плоскости трещины. Будем считать, что фронт жидкости совпадает с фронтом трещины, поскольку отставание фронта жидкости (лаг) пренебрежимо мало для характерной глубины выполнения ГРП [64; 66]. Утечка жидкости из трещины в окружающую породу описывается моделью Картера [67]. В работах [14; 68–70] можно найти более полного описания основных предположений. В процессе решения задачи необходимо найти положение фронта трещины $A(t)$, раскрытие трещины w и давление жидкости p как функции координат (x, y) и времени закачки t .

Для упрощения математических выражений удобно ввести следующие отмасштабированные параметры

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{Ic}, \quad C' = 2C_L, \quad \mu' = 12\mu,$$

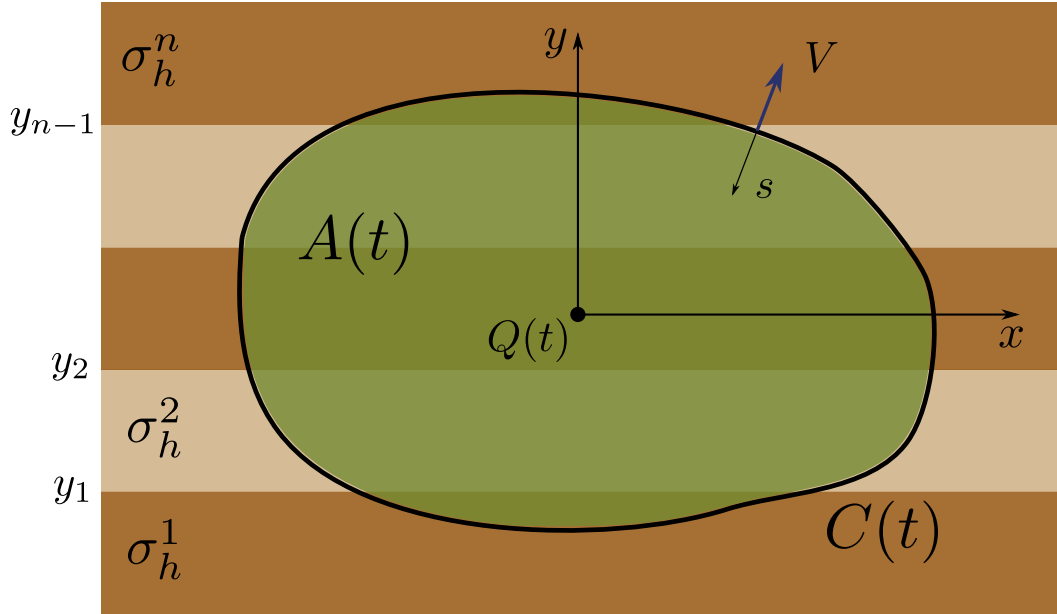


Рисунок 2.1 — Схема плоской трещины в стоистой среде.

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, K_{Ic} — трещиностойкость, C_L — коэффициент утечки Картера, μ — вязкость жидкости.

2.1.1 Уравнение упругости

Уравнение упругости связывает раскрытие плоской трещины w и поле напряжений в твердом теле, которое связано с нормальным напряжением T_n , приложенным к поверхности трещины. Согласно методу разрывных смещений [71; 72], уравнение упругости может быть сведено к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$T_n(x, y, t) = \sigma_h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}}. \quad (2.1)$$

Здесь $A(t)$ — область трещины, которая ограничена фронтом трещины $C(t)$, σ_h — поле минимальных сжимающих напряжений. Считая, что пласт состоит из n слоев по сжимающим напряжениям, мы можем получить кусочно-постоянное представление $\sigma_h(y)$ в виде

$$\sigma_h(y) = \sigma_h^1(1 - H(y - y_1)) + \sum_{i=2}^{n-1} \sigma_h^i [H(y - y_{i-1}) - H(y - y_i)] + \sigma_h^n H(y - y_{n-1}),$$

где H обозначает ступенчатую функцию Хевисайда, σ_h^i — постоянное значение напряжения в i -м слое, определяемым пространственным интервалом (y_{i-1}, y_i) , см. рисунок 2.1.

Одним из возможных сценариев распространения трещины может быть ее частичное или полное закрытие. Трещина может закрыться из-за остановки закачки жидкости или уменьшения расхода, шероховатости стенок трещины или образования плотной упаковки частиц пропанта. Таким образом, необходимо учитывать дополнительное ограничение на раскрытие трещины w до некоторого минимального значения w_{\min} в точке (x, y) аналогично работе [73]

$$w(x, y, t) \geq w_{\min}(x, y, t). \quad (2.2)$$

Если трещина раскрыта ($w(x, y, t) > w_{\min}(x, y, t)$), то нормальное напряжение на стенках трещины T_n равно давлению жидкости p внутри трещины. В противном случае, нормальное напряжение T_n представляет собой контактную силу, которая препятствует взаимному проникновению берегов трещины. Несмотря на то, что контактный алгоритм позволят проводить расчет для любого распределения w_{\min} , в данной главе мы сосредоточимся исключительно на случае отсутствия пропанта, для которого $w_{\min} = 0$.

2.1.2 Течение жидкости в трещине

Предполагая, что поток ламинарный и жидкость гидроразрыва ньютоновская, поток жидкости внутри трещины сводится к закону Пуазейля

$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p. \quad (2.3)$$

Пользуясь теорией смазки [74] и предположением, что жидкость несжимаема, мы получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}, \quad (2.4)$$

где утечка жидкости рассчитывается по модели Картера [67], а $t_0(x, y)$ обозначает момент времени, когда фронт трещины находился в точке (x, y) . Подставляя

закона Пуазейля (2.3) в уравнение баланса массы (2.4) получим уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p \right) = Q(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}. \quad (2.5)$$

2.1.3 Граничные условия

Мы рассматриваем следующие граничные условия на фронте трещины $C(t)$: нулевое раскрытие трещины $w = 0$, критерий распространения трещины $K_I = K_{Ic}$ и условие нулевого потока $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ в силу отсутствия лага. Согласно линейной упругой механике разрушения при распространении трещины в I моде [75; 76], раскрытие трещины в окрестности фронта определяется как

$$w \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{K'}{E'} s^{1/2}, \quad (2.6)$$

где s — расстояние до фронта трещины $C(t)$. Предполагается, что трещина распространяется в пределе квазистатического равновесия, поэтому нормальная скорость фронта положительна $V > 0$. Если трещина не распространяется ($V = 0$), то отмасштабированная трещиностойкость K' в уравнении (2.6) должна быть заменена на фактический отмасштабированный коэффициент интенсивности напряжений K'_I .

2.2 Численный алгоритм

Для пространственной дискретизации используется фиксированная прямоугольная сетка. Центр ячейки (i, j) расположен в точке (x_i, y_j) и имеет размеры Δx и Δy . Все элементы сетки делятся на три типа: внутренние, концевые и опорные [68], см. рисунок 2.2. Внутренние элементы содержатся внутри области трещины $A(t)$ и полностью заполнены жидкостью. Концевые элементы пересекаются фронтом трещины и являются частично заполненными. Опорные элементы представляют собой подмножество внутренних элементов и имеют как минимум один соседний концевой элемент.

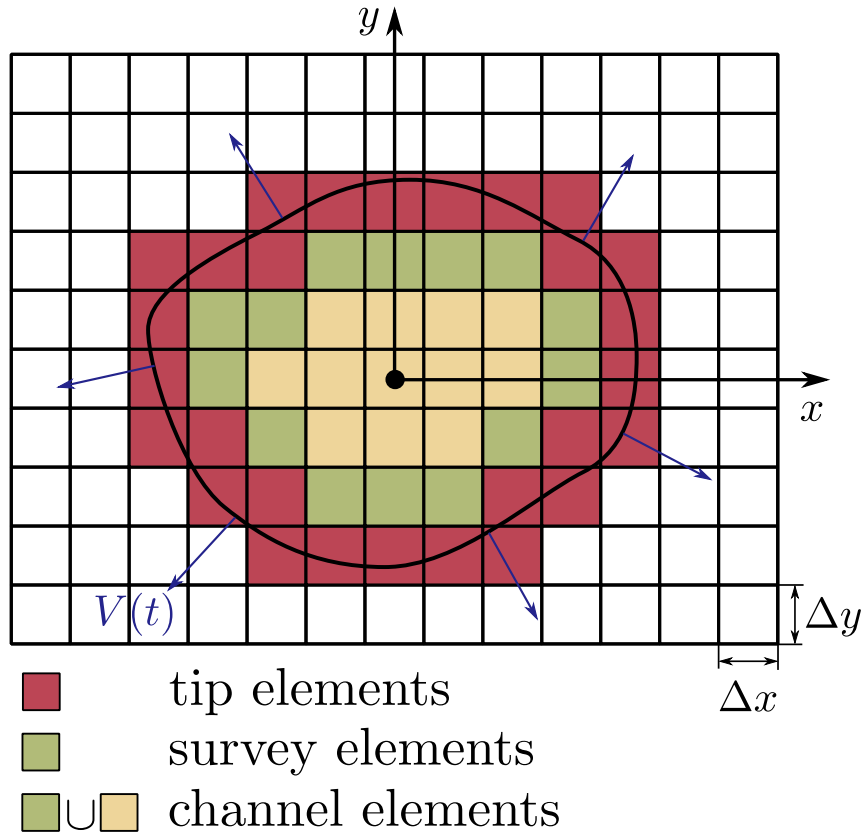


Рисунок 2.2 — Разбиение области на прямоугольные ячейки, классификация элементов

2.2.1 Дискретизация уравнений

Для раскрытия трещины $w(x, y, t)$ и давления жидкости $p(x, y, t)$ используется кусочно-постоянная аппроксимация по пространству. Считается, что в момент времени $t - \Delta t$ известны положение фронта трещины, раскрытие w и давление p . Необходимо определить эти величины в момент времени t .

Уравнение упругости

Используя метод разрывных смещений [71] и предполагая кусочно-постоянное раскрытие трещины в каждой ячейке, уравнение (2.1) при отсутствии контакта ($w(x, y, t) > w_{\min}(x, y, t)$ и $T_n = p$) сводится к

$$p_{i,j}(t) = \sigma_{hi,j} + \sum_{k,l} C_{i,j;k,l} w_{k,l}(t), \quad (2.7)$$

где $C_{i,j;k,l}$ — коэффициенты матрицы упругости, характеризующие влияние элемента с индексом (k, l) на элемент с индексом (i, j) . В случае однородного по модулям упругости пласта матрица упругости может быть представлена как [14]

$$C_{i,j;k,l} = -\frac{E'}{8\pi} \left[\frac{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_j - y)^2}}{(x_i - x)(y_j - y)} \right]_{x=x_k-\Delta x/2, y=y_l-\Delta y/2}^{x=x_k+\Delta x/2, y=y_l+\Delta y/2}, \quad (2.8)$$

где $[f]_{x=x_1, y=y_1}^{x=x_2, y=y_2} = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)$.

Уравнение Рейнольдса

Дискретизация уравнения Рейнольдса (2.5) выполняется с помощью метода конечных объемов [68]. Для интегрирования по времени используется неявный схема Эйлера, которая приводит к следующей системе уравнений

$$w_{i,j}(t) - w_{i,j}(t - \Delta t) = \Delta t [Ap]_{i,j} + \Delta t Q_{i,j} - \Delta \mathcal{L}_{i,j}, \quad (2.9)$$

где $Q_{i,j}$ отвечает за закачку жидкости, $\Delta \mathcal{L}_{i,j}$ отвечает за утечку жидкости в пласт с момента времени $t - \Delta t$ до t и вычисляется как [14]

$$\Delta \mathcal{L}_{i,j} = 2C' \left(\sqrt{t - t_{0,i,j}} - \sqrt{t - \Delta t - t_{0,i,j}} \right), \quad (2.10)$$

где $t_{0,i,j}$ обозначает момент времени, когда фронт трещины находился в центре элемента (x_i, y_j) . Потоки жидкости через границы элементов вычисляются с помощью следующего выражения

$$[Ap]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \left[M_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - M_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - M_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right], \quad (2.11)$$

где соответствующие мобильности жидкости определяются как

$$M_{i\pm\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left(\frac{w_{i\pm 1,j}^3}{\mu'_{i\pm 1,j}} + \frac{w_{i,j}^3}{\mu'_{i,j}} \right). \quad (2.12)$$

Разделение переменных

Для применения алгоритма поиска положения фронта трещины, который будет описан ниже, необходимо разделить переменные на внутренние и концевые. Во всех следующих выражениях будем использовать верхний индекс “ c ” для обозначения внутренних элементов и верхний индекс “ t ” для концевых. Под набором будем подразумевать совокупность величин во всех ячейках (i, j) . Для удобства будем использовать следующие векторные обозначения: \mathbf{w} — для набора раскрытий, \mathbf{p} — для набора давлений, \mathbf{Q} — для набора слагаемых закачки и $\Delta\mathcal{L}$ — для набора слагаемых утечки.

Матрица упругости \mathbb{C} вычисляется с помощью уравнения (2.8), матрица, соответствующая дифференциальному оператору A в уравнении (2.11) вычисляется как $\mathbb{A} = A(\mathbf{w})$. Раскрытие \mathbf{w}^t в концевых элементах определяется универсальным асимптотическим решением. Таким образом, в концевых элементах неизвестным является давление \mathbf{p}^t . Для внутренних элементов давление \mathbf{p}^c определяется с помощью уравнения (2.7), а раскрытие трещины \mathbf{w}^c остается неизвестным. Подставляя (2.7) для внутренних элементов в уравнение (2.9) получим следующую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} - \Delta t \mathbb{A}^{cc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{ct} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{tc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^c \\ \mathbf{p}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^c \\ \mathbf{R}^t - \mathbf{w}^t \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

где \mathbb{I} это единичная матрица, двойные верхние индексы означают подматрицы, соответствующие индексам, правая часть определяется следующим выражением

$$\mathbf{R}^J = \mathbf{w}_0^J + \Delta t (\mathbb{A}^{Jc} \mathbb{C}^{ct} \mathbf{w}^t + \mathbf{Q}^J + \Delta \sigma^J) - \Delta \mathcal{L}^J, \quad J = c, t. \quad (2.14)$$

Скачок напряжений в выражении для \mathbf{R}^J вычисляется как $\Delta \sigma^J = \mathbb{A}^{Jc} \sigma_h^c + \mathbb{A}^{Jt} \sigma_h^t$. Величины \mathbf{w}_0 представляют собой известное раскрытие в момент времени $t - \Delta t$. Утечки для внутренних элементов $\Delta \mathcal{L}^c$ вычисляются с помощью (2.10). Вычисление утечек $\Delta \mathcal{L}^t$ и раскрытия \mathbf{w}^t в концевых элементах описано в работах [14; 68].

Таким образом, неизвестными являются положение фронта трещины, набор внутренних и концевых элементов, раскрытие трещины во внутренних элементах \mathbf{w}^c и давление жидкости в концевых элементах \mathbf{p}^t . Стоит отметить, что матрица \mathbb{C} является плотной, в то время как матрица \mathbb{A} разрежена.

Система (2.13) представляет собой нелинейную систему уравнений поскольку матрица \mathbb{A} и правая часть зависит от раскрытия трещины \mathbf{w} на текущем шаге по времени. Важно, что система (2.13) получена для случая отсутствия контакта берегов трещины, когда $w_{i,j} > w_{\min,i,j}$ и $T_n = p$.

2.2.2 Контактный алгоритм

В случае возникновения контакта в ячейке (i, j) выполнены условия $w_{i,j} = w_{\min,i,j}$ и $T_n \neq p$. Следовательно, раскрытие трещины в данной ячейке равно заданному минимальному раскрытию, а неизвестной величиной в ячейке становится контактное напряжение $T_{ni,j}$. Здесь можно провести аналогию с концевыми элементами, для которых значение раскрытия определяется путем интегрирования универсального асимптотического решения, которое приведено ниже, а давление является неизвестной величиной и определяется из системы (2.13). В данном же случае для контактных элементов раскрытие определяется условием контакта $w_{i,j} = w_{\min,i,j}$, а неизвестной величиной является контактная сила, соответствующая ограничению на раскрытие трещины. Таким образом, контактные элементы можно учитывать аналогично концевым элементам, считая, что раскрытие определяется условием контакта (2.2). В этом случае добавляется еще одна группа элементов — контактные элементы, которые возникают при достижении равенства в условии (2.2). Величины, соответствующие контактным элементам, будем обозначать верхним индексом “d”. Тогда, с учетом наличия контактных элементов система уравнений (2.13) может быть переписана в следующем виде

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} - \Delta t \mathbb{A}^{cc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{ct} & -\Delta t \mathbb{A}^{cd} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{tc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{tt} & -\Delta t \mathbb{A}^{td} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{dc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{dt} & -\Delta t \mathbb{A}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^c \\ \mathbf{p}^t \\ \mathbf{T}_n^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^c \\ \tilde{\mathbf{R}}^t - \mathbf{w}^t \\ \tilde{\mathbf{R}}^d - \mathbf{w}_{\min}^d \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

где правая часть определяется как

$$\tilde{\mathbf{R}}^J = \mathbf{R}^J + \Delta t \mathbb{A}^{Jc} \mathbb{C}^{cd} \mathbf{w}_{\min}^d, \quad J = c, t, d. \quad (2.16)$$

Неизвестными в системе (2.15) являются положение фронта трещины, множество контактных элементов, раскрытие во внутренних элементах, давление в концевых элементах и контактное напряжение в контактных элементах.

Стоит отметить, что описанный подход, предотвращающий взаимное проникновение берегов трещины представляет собой разновидность метода множителей Лагранжа для решения контактных задач. Одним из преимуществ описанного контактного алгоритма, в силу специфики ограничений, является то, что при выполнении условий контакта число степеней свободы не увеличивается. Однако меняется структура системы уравнений, что требует перестроения матрицы системы (2.15) при каждом изменении множества контактных элементов.

2.2.3 Определение положения фронта трещины

Условие распространения трещины (2.6) на основе линейной упругой механики разрушения (ЛУМР) задает условие на кончике трещины, которое может быть использовано для определения положения фронта. Однако область применимости этого асимптотического решения часто ограничена небольшой окрестностью вблизи кончика трещины (анализ поведения вблизи кончика приведен в статье [63]). Другими словами, чтобы разрешить поведение решения (2.6) на основе ЛУМР вблизи вершины трещины, необходимо использовать очень подробную сетку, что приведет к чрезмерным затратам вычислительных ресурсов.

Чтобы решить эту проблему нужно аналитически найти универсальное асимптотическое решение, которое будет включать в себя решение на основе ЛУМР, но будет применимо в более широкой области. Это позволит решать задачу распространения трещины на относительно грубой сетке, но с достаточной точностью, поскольку значения искомых величин в кончике трещины имеют наибольшие градиенты и, следовательно, наибольшую численную ошибку. Таким образом, вместо выполнения граничных условий (2.6) требуется, чтобы раскрытие в окрестности кончика трещины соответствовало универсальному асимптотическому решению $w(s) \approx w_a(s)$ для $s \ll L$, где L — характерная длина трещины.

Универсальное асимптотическое решение

Рассматривается задача одномерной полубесконечной трещины гидроразрыва, распространяющейся с постоянной скоростью V в условиях плоской деформации [63]. Для решения этой задачи удобно ввести подвижную систему координат, в которой вершина трещины всегда находится в начале координат, а x обозначает расстояние от точки внутри трещины до вершины. Закон сохранения массы, описывающий течение жидкости вдоль трещины, можно записать как

$$\frac{w^2}{\mu'} \frac{dp}{dx} = V + 2C'V^{1/2} \frac{x^{1/2}}{w}. \quad (2.17)$$

Предполагая, что порода является линейной упругой средой, уравнение равновесия породы, окружающей трещину, может быть выражено следующим интегральным уравнением, которое связывает давление жидкости p с раскрытием трещины w :

$$w(x) = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{dp}{ds} ds, \quad (2.18)$$

где интегральное ядро имеет следующий вид

$$F(x, s) = (s - x) \log \left| \frac{\sqrt{x} + \sqrt{s}}{\sqrt{x} - \sqrt{s}} \right| - 2\sqrt{xs}.$$

Для замыкания системы (2.17) и (2.18), необходимо дополнительно учесть критерий распространения трещины, который имеет следующий вид:

$$w = \frac{K'}{E'} x^{1/2}, \quad x \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Одним из серьезных препятствий для численного решения системы уравнений (2.17), (2.18) и (2.19) является оценка потока жидкости в (2.17), учитывая, что давление жидкости является сингулярным в кончике трещины. Чтобы избежать этой проблемы необходимо переписать систему уравнений в форме, в которой давление жидкости не будет входить в задачу. Чтобы это сделать нужно градиент давления из уравнения течения жидкости (2.17) подставить в уравнение упругости (2.18), что приводит к следующей постановке

$$w(x) = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{\mu'}{w(s)^2} \left[V + 2C'V^{1/2} \frac{s^{1/2}}{w(s)} \right] ds. \quad (2.20)$$

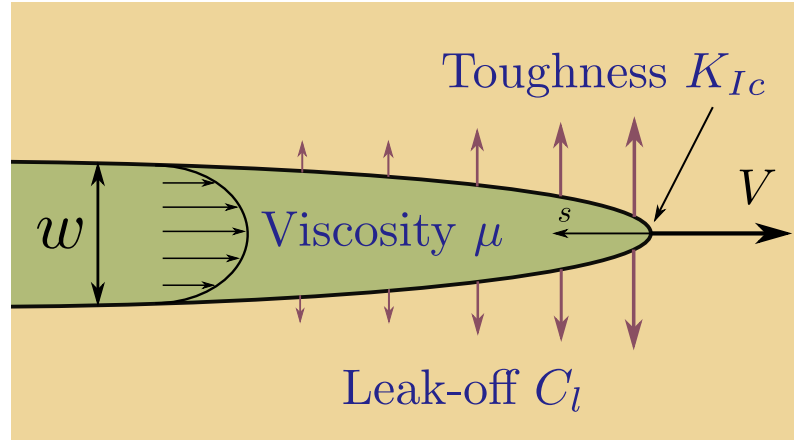


Рисунок 2.3 — Доминирующие процессы в кончике трещины: разрушение породы, утечка жидкости в пласт, вязкая диссипация.

Уравнение (2.20) представляет собой интегральное уравнение только для раскрытия трещины $w(x)$, что упрощает исходную задачу, так как давление, которое является сингулярным в кончике трещины, не входит в уравнение.

Полный асимптотический анализ задачи распространения полубесконечной трещины был проведен в работе [63]. В частности, важно отметить, что существует три различных доминирующих процесса в кончике трещины (см. рисунок 2.3): разрушение породы, утечка жидкости в пласт и вязкая диссипация жидкости вдоль трещины. Предельные асимптотические решения, соответствующие этим процессам, имеют вид

$$w_k = \frac{K'}{E'} x^{1/2}, \quad w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left(\frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} x^{5/8}, \quad w_m = \beta_m \left(\frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} x^{2/3}, \quad (2.21)$$

где $\beta_{\tilde{m}} = 4/(15(\sqrt{2} - 1))^{1/4}$ и $\beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6}$. Асимптотические режимы (2.21) представляют собой предельные случаи, когда в процессе распространения трещины преобладает либо разрушение породы, либо утечка жидкости в пласт, либо вязкая диссипация. Однако наличия решений только для предельных режимов недостаточно, поскольку не учитывается промежуточное поведение между этими предельными решениями. Таким образом, необходимо получить решение уравнения (2.20) в приближенном виде, чтобы учесть все переходные процессы.

В работе [65] было построено полу-аналитическое решение интегрального уравнения (2.20), которое в неявной форме имеет вид

$$\frac{x^2 V \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left(\frac{K' x^{1/2}}{E' w}, \frac{2x^{1/2} C'}{w V^{1/2}} \right) \quad (2.22)$$

Важно отметить, что функция g_δ имеет аналитический вид, представленный в работе [68], т.е. для ее вычисления не требуется значительных вычислительных ресурсов. Для вычисления раскрытия трещины w или расстояния до фронта x используется итерационная процедура.

Расстояние до фронта в опорных элементах

Чтобы найти расстояние до подвижного фронта трещины используется асимптотическое решение (2.22). Зная раскрытие трещины w_i^s в опорных элементах, расстояние от центров опорных элементов до фронта трещины s_i может быть найдено с помощью решения уравнения

$$\frac{s_i^2 V_i \mu'}{E' (w_i^s)^3} = g_\delta \left(\frac{K' s_i^{1/2}}{E' w_i^s}, \frac{2 s_i^{1/2} C'}{w_i^s V_i^{1/2}} \right), \quad V_i = \frac{s_i - s_{i,0}}{\Delta t}, \quad (2.23)$$

где $s_{i,0}$, s_i — расстояния от центра i -го опорного элемента до фронта трещины на предыдущем и текущем шагах по времени соответственно. Если фронт трещины движется, то уравнение (2.23) решается численно относительно s_i , например, с помощью метода Ньютона. Если фронт трещины не распространяется, то функция g_δ обращается в ноль т.к. $K' s_i^{1/2} / (E' w_i^s) > 1$, что, в свою очередь, приводит к $V_i = 0$ и, следовательно $s_i = s_{i,0}$.

Расстояние до фронта во всех остальных элементах

Чтобы эффективно отслеживать положение фронта трещины введем функцию ориентированного расстояния $\mathcal{T}(x, y)$, которая имеет следующие свойства:

1. $\mathcal{T}(x, y) < 0$ для всех точек (x, y) , лежащих внутри трещины.
2. $\mathcal{T}(x, y) > 0$ для всех точек вне трещины.

Таким образом, положение фронта трещины представляет собой линию уровня $\mathcal{T}(x, y) = 0$. Найденные с помощью уравнения (2.23) расстояния s_i от центров

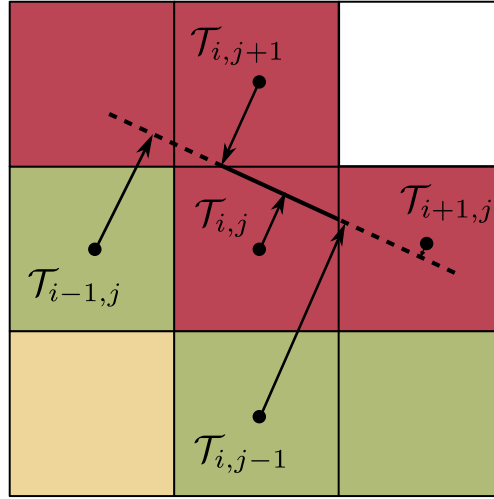


Рисунок 2.4 — Определение положения движущегося фронта по известным значениям в соседних элементах.

опорных элементов до фронта трещины будем использовать в качестве граничных условий для задачи поиска функции \mathcal{T} [68]:

$$\mathcal{T}(x_i, y_i) = -s_i, \quad (2.24)$$

где (x_i, y_i) это координаты центров всех опорных элементов, s_i — расстояние от центра i -го опорного элемента до фронта трещины.

Ориентированное расстояние \mathcal{T} определяется уравнением эйконала

$$\|\nabla\mathcal{T}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial y}\right)^2} = 1. \quad (2.25)$$

На Рис. 2.4 схематично изображены значения функции ориентированного расстояния \mathcal{T} в центрах элементов относительно прямолинейного участка фронта. Для дискретизации уравнения эйконала (2.25) используется противоточная аппроксимация первого порядка [77]:

$$\max\left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i+1,j}}{\Delta x}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j-1}}{\Delta y}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j+1}}{\Delta y}, 0\right)^2 = 1. \quad (2.26)$$

Конечноразностная схема (2.26) решается с помощью Fast Marching Method (FMM) [77; 78]. Эффективные реализации FMM основаны на использовании такой структуры данных как бинарная куча (binary heap). Более подробно с деталями реализации эффективного алгоритма можно ознакомиться в работе [79].

2.3 Модель многостадийного гидроразрыва пласта

Многостадийный гидроразрыв пласта (МГРП) подразумевает одновременный рост нескольких трещин ГРП под действие закачки жидкости в скважину под высоким давлением. Для обеспечения связи между отдельными трещинами необходимо учитывать неравномерное распределение потоков жидкости между отдельными перфорационными интервалами. Однако в случае большого трения на перфорациях, что достаточно часто встречается на практике, для простоты можно предположить, что потоки жидкости распределены равномерно между трещинами. Для упрощения расчета взаимного механического взаимодействия между несколькими трещинами рассматривается несвязанная формулировка уравнения упругости. При таком подходе напряжения, которые вызваны раскрытием трещин на предыдущем временном шаге, используются независимо для моделирования распространения каждой отдельной трещины. Кроме того, предполагается, что разрыв касательного перемещения в плоскости трещины равен нулю для каждой трещине, поэтому граничное условие нулевого касательного напряжения в плоскости каждой трещины выполняется не строго. Однако предполагается, что вклад сдвиговых компонент относительно мал в случае плоских трещин.

На рисунке 2.5 изображена схема наклонной скважины с N одновременно растущими трещинами гидроразрыва. Предполагается, что все трещины расположены параллельно плоскости $z = 0$, а перфорации или точки инициации различных трещин могут быть смещены вдоль оси скважины. Расположение перфораций вдоль оси z задается значениями z^k , которые определяются углом наклона φ .

2.3.1 Взаимодействие трещин и распределение потоков

Модель многостадийного гидроразрыва пласта основана на модели одиночной плоской трещины, описанной выше. Однако моделирование роста нескольких параллельных трещин дополнительно требует расчета распределения потока жидкости между перфорациями и учета взаимного механического

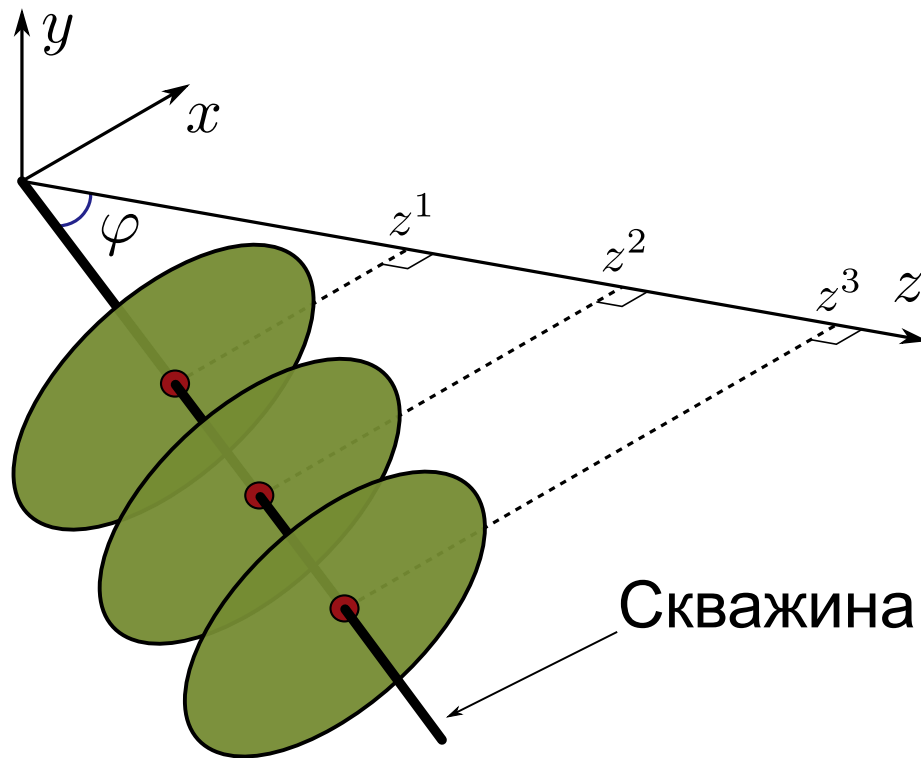


Рисунок 2.5 — Схема наклонной скважины ГРП с несколькими плоскими параллельными трещинами, которые распространяются одновременно.

взаимодействия между трещинами [17], которое иногда называют интерференцией трещин.

В случае несжимаемой жидкости сумма расходов жидкости q_i в каждую отдельную трещину в силу закона сохранения массы должно быть равно общему расходу жидкости Q_0 в скважине

$$\sum_{i=1}^N q_i = Q_0.$$

Непрерывность давления в скважине и учет трения на перфорациях [80] используется для определения распределения потоков жидкости между трещинами

$$p_i + p_{pf,i}(q_i) = p_w,$$

где p_i — давление жидкости внутри i -й трещины в области расположения ствола скважины, $p_{pf,i}(q_i)$ — соответствующие потери давления жидкости на трение на перфорациях i -й трещины, p_w — давление жидкости внутри ствола скважины. Для упрощения анализа в данной работе мы рассматриваем случай большого трения на перфорациях, что приводит к равномерному распределению потоков жидкости между трещинами $q_i = Q_0/N$.

При расчете интерференции напряжений между трещинами мы пренебрегаем наличием касательных разрывов смещения и учитываем только доминирующие нормальные компоненты. В этом случае условия механического равновесия для трещин имеют следующий вид:

$$\sigma_{zz}(x, y, z^k) + \sigma_h(y) = p^k(x, y), \quad (2.27)$$

где p^k — давление жидкости в k -ой трещине, $\sigma_{zz}(x, y, z^k)$ — нормальная компонента индуцированного напряжения в плоскости k -ой трещины, которая может быть вычислена как

$$\sigma_{zz}(x, y, z^k) = \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{A}^l} C_{zzz}(x - x', y - y', z^k - z^l) w^l(x', y') dx' dy', \quad (2.28)$$

где \mathcal{A}^l обозначает область l -ой трещины, $w^l(x', y')$ — раскрытие l -ой трещины.

Интегральное ядро $C_{zzz}(x - x', y - y', z^k - z^l)$ представляет нормальную составляющую напряжений в точке (x, y, z^k) , вызванных единичным разрывом смещения в направлении оси z , расположенном в точке (x', y', z^l) (см. [71]). Пусть $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ и ϕ — гармоническая функция, заданная следующим образом:

$$\phi(x - x', y - y', z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}.$$

Тогда функция Грина $C_{zzz}(x - x', y - y', z^k - z^l)$ для компоненты напряжения $\sigma_{zz}(x, y, z)$, индуцированной единичным разрывом смещения в направлении оси скважины z можно выразить [71; 81] как

$$C_{zzz} = \frac{E'}{8\pi} [\phi_{,zz} - z\phi_{,zzz}], \quad (2.29)$$

где нижний индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей переменной.

2.3.2 Численная схема

Мы предполагаем, что трещины растут в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси скважины z . Каждая плоскость покрыта прямоугольными

элементами с размерами Δx и Δy . Для раскрытия трещины w^k и давления жидкости p^k используется кусочно-постоянная аппроксимация. Для упрощения обозначений будем использовать жирные символы для объединения неизвестных величин для конкретной трещины следующим образом

$$\mathbf{w}^k = \{w_{ij}^k \mid (i,j) \text{ — все индексы } k\text{-й сетки}\}$$

для k -ой трещины и $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^N)^T$ для всех трещин.

Используя кусочно-постоянную аппроксимацию, уравнения (2.27) и (2.28) для всех трещин можно записать как

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{C}_{zzz}\mathbf{w}.$$

Матрица \mathbf{C}_{zzz} имеет блочную структуру, где блок $\mathbf{C}_{zzz}(k, l)$ отвечает за упругое влияние k -й трещины в массиве на l -ю трещину. Предполагая, что раскрытие трещины имеет кусочно-постоянную аппроксимацию в прямоугольной ячейке $[-\Delta x/2, \Delta x/2] \times [-\Delta y/2, \Delta y/2]$ с центром в начале координат, коэффициенты матрицы \mathbf{C}_{zzz} могут быть выражены в терминах следующего интеграла:

$$I(x, y, z) = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}.$$

Поменяв местами порядок дифференцирования и интегрирования, можно получить следующее выражения для производной проинтегрированного потенциала ϕ по элементу с индексом (i, j)

$$I_{,zz} = - \left[\frac{x}{r(y+r)} + \frac{y}{r(x+r)} \right]_{x=x_i-\Delta x/2, y=y_j-\Delta y/2}^{x=x_i+\Delta x/2, y=y_j+\Delta y/2},$$

$$I_{,zzz} = \left[\frac{xz(y+2r)}{(y+r)^2 r^3} + \frac{yz(x+2r)}{(x+r)^2 r^3} \right]_{x=x_i-\Delta x/2, y=y_j-\Delta y/2}^{x=x_i+\Delta x/2, y=y_j+\Delta y/2}.$$

Стоит отметить, что выражение в квадратных скобках определяются с точностью до суммы произвольных функций следующего вида: $f(x, z) + g(y, z)$. Этот произвол обусловлен тем, что при суммировании значений $f(x, z) + g(y, z)$ по вершинам прямоугольного элемента все слагаемые сокращаются:

$$[f(x, z) + g(y, z)]_{x=x_i-\Delta x/2, y=y_j-\Delta y/2}^{x=x_i+\Delta x/2, y=y_j+\Delta y/2} = 0.$$

Для простоты значения интерференции трещин берутся с предыдущего шага по времени. Тогда давление жидкости для k -ой трещины может быть выражено как

$$\mathbf{p}^k = \sigma_h + \sum_{l \neq k} \sigma_{ss}^{kl} + \mathbf{C}_{kk} \mathbf{w}^k, \quad \sigma_{ss}^{kl} = \mathbf{C}_{kl} \mathbf{w}_{\text{prev}}^l, \quad (2.30)$$

где σ_{ss}^{kl} — дополнительное сжимающее напряжение для k -ой трещины, вызванное раскрытием l -ой трещины, $\mathbf{w}_{\text{prev}}^l$ — раскрытие l -ой трещины на предыдущем шаге по времени. Таким образом, для моделирования взаимного механического взаимодействия между трещинами используется явная схема. Стоит отметить, что матрица \mathbf{C}_{kk} может быть получена путем дискретизации уравнения (2.1) для k -ой трещины.

Уравнения Рейнольдса для каждой отдельной трещины дискретизируются с помощью метода конечных объемов, как было описано выше. Для интегрирования по времени используется обратная схема Эйлера для обеспечения устойчивости.

2.4 Численные эксперименты

2.4.1 Верификация и валидация численного алгоритма

Сравнение с полу-аналитическим решением для радиальной трещины

Для верификации численного алгоритма было проведено сравнение с полу-аналитическим решением для радиальной трещины [82]. Параметры расчетов выбирались таким образом, чтобы воспроизвести четыре предельных режима ((M), (K), (\tilde{M}) и (\tilde{K})) распространения [69].

Для моделирования всех предельных режимов распространения радиальной трещины использовались следующие общие параметры: модуль Юнга $E = 32$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, расход жидкости $Q_0 = 0.01$ м³ /

Режим	μ , Па · сек	K_{Ic} , МПа $\sqrt{м}$	C_L , м/ $\sqrt{сек}$
K	10^{-4}	3	0
M	0.1	0	$5 \cdot 10^{-7}$
\widetilde{M}	0.1	0	$5 \cdot 10^{-4}$
\widetilde{K}	10^{-4}	5	$1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3 — Параметры для расчета предельных режимов.

сек и длительность закачки $t_0 = 1000$ сек. Остальные параметры для различных режимов представлены в таблице 3.

На рисунке 2.6 (а) представлено сравнение радиусов трещины $R(t)$ для различных режимов. На рисунке 2.6 (б) приведено сравнение эффективностей жидкости η с полу-аналитическим решением для радиальной трещины. Эффективность жидкости определяется как $\eta(t) = V_{\text{frac}}(t)/(Q_0 t)$, где $V_{\text{frac}}(t)$ это объем трещины в момент времени t . На рисунке 2.6 (в) и (г) показано сравнение профилей раскрытия $w(r)$ и сравнение профилей давления $p(r)$ в зависимости от радиуса в конечный момент времени $t = 1000$ сек. Можно отметить очень хорошее соответствие между результатами численного и полу-аналитического решений.

Несимметричное расположение слоев

Также было выполнено сравнение с реализацией модели [68] в случае несимметричного расположения трех слоев по напряжениям следующим образом: $\sigma_h^3 > \sigma_h^1 > \sigma_h^2$. При сравнении расчетов использовались следующие общие для всех слоев параметры

$$E = 9.5 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.2, \quad K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, \quad C_L = 8.25 \cdot 10^{-6} \text{ м/сек}^{1/2}. \quad (2.31)$$

Закачка жидкости вязкости $\mu = 0.1$ Па · сек происходит через точечную перфорацию в точке $(0, 0)$ с постоянным расходом $Q = 0.01$ м³/сек. Положения границ слоев и сжимающие напряжения в них определяются как

$$\sigma_h^1 = 7.25 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^2 = 7 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^3 = 7.75 \text{ МПа}, \quad y_1 = -10 \text{ м}, \quad y_2 = 10 \text{ м}. \quad (2.32)$$

Сравнения проводились для моментов времени $t \in \{400, 1800, 3600\}$ s. На рисунке 2.7 (а) и (б) показано сравнение профилей раскрытия w вдоль оси x

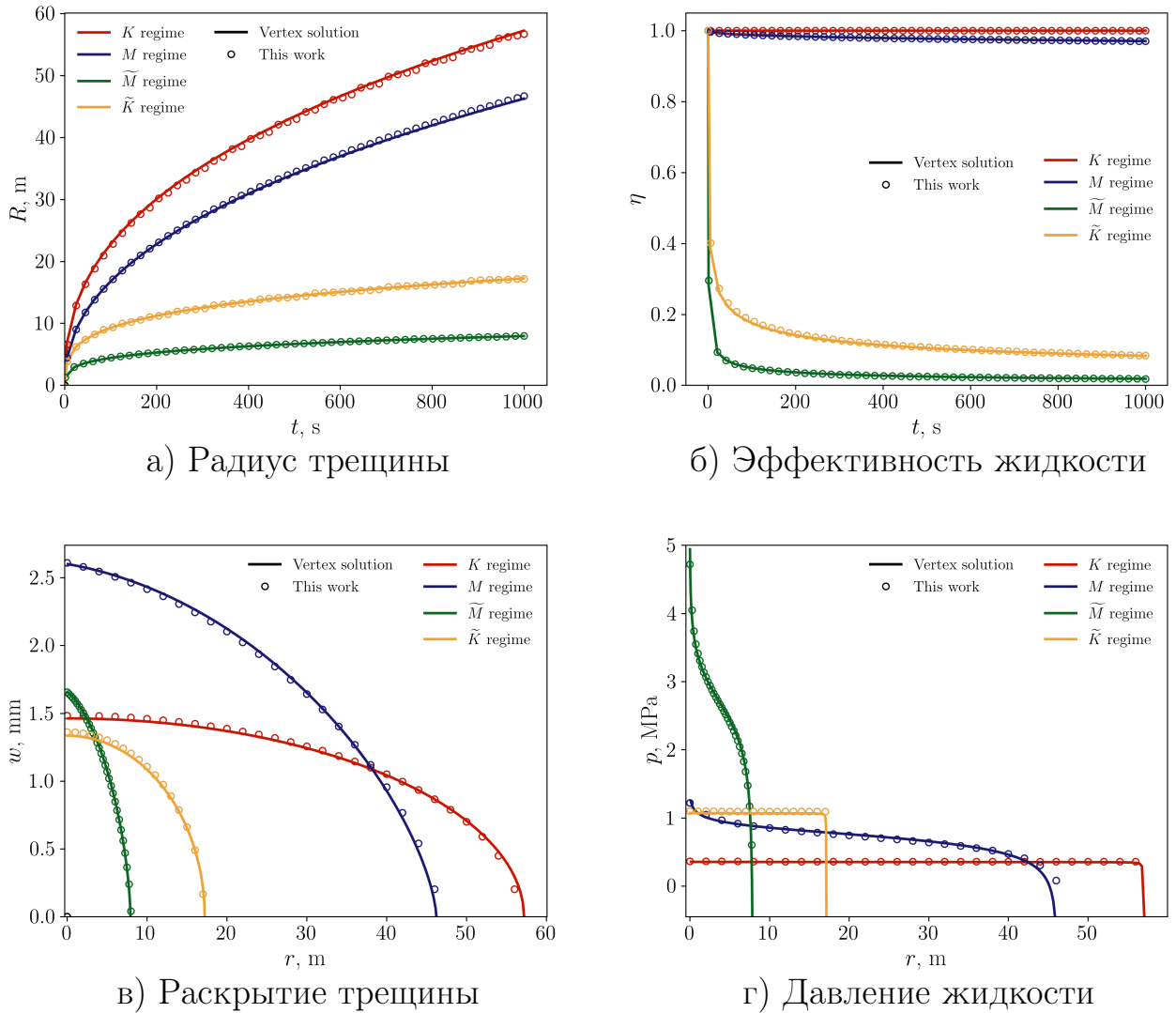
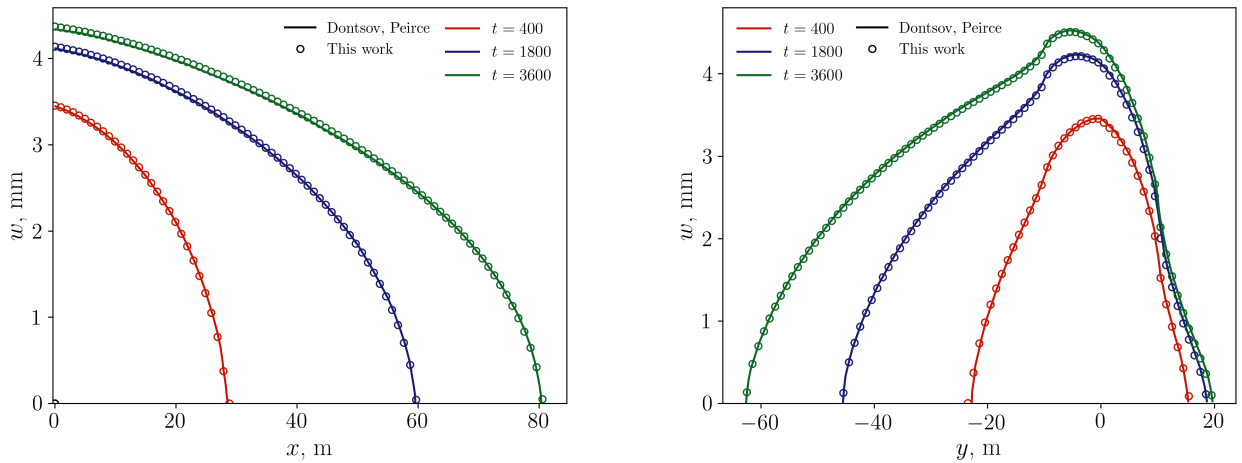


Рисунок 2.6 — Сравнение численного и полу-аналитического решения для радиальной трещины при различных режимах распространения.

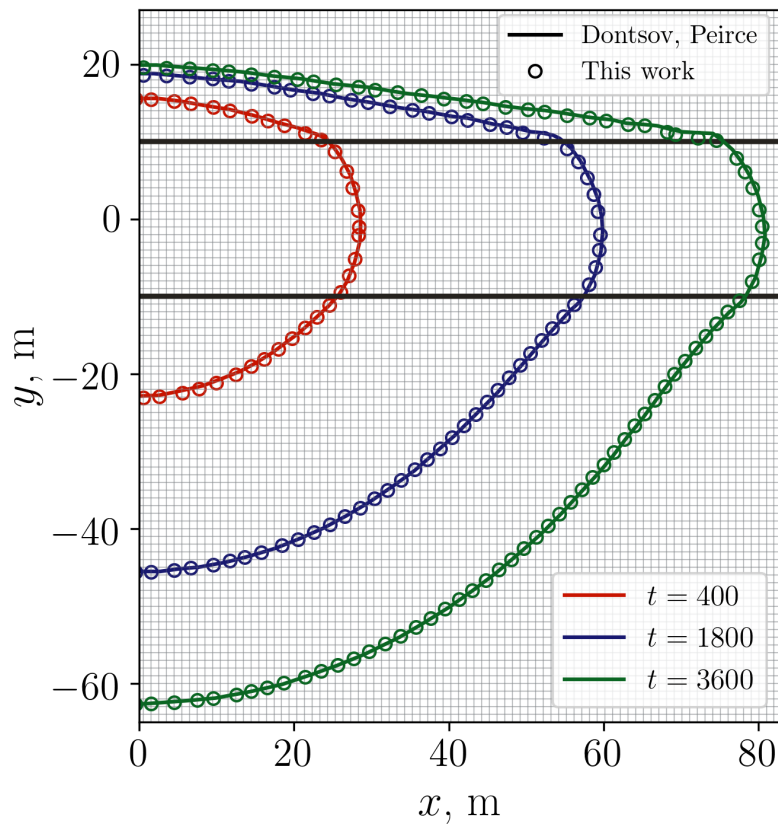
при $y = 0$ (слева) и вдоль оси y при $x = 0$ (справа). На рисунке 2.7 (в) представлено сравнение положения фронта трещины. Сплошными линиями изображены результаты работы [68]. Круглыми маркерами представлены результаты, полученные с помощью алгоритма, описанного в данной работе. Можно отметить очень хорошее совпадение результатов на всех этапах расчета.

Сравнение с экспериментом

Для валидации численного алгоритма было выполнено сравнение с экспериментальными данными из работы [83]. В эксперименте трещина рас-



а) Раскрытие трещины в сечении $y = 0$ б) Раскрытие трещины в сечении $x = 0$



в) Положение фронта трещины

Рисунок 2.7 — Сравнение раскрытия вдоль оси x при $y = 0$ (а), вдоль оси y при $x = 0$ (б) и положений фронта трещины (в) с результатами работы Dontsov и др. [68] для несимметричного расположения слоев в моменты времени $t \in \{400, 1800, 3600\}$ сек.

пространяется между двумя несвязанными блоками из полиметилметакрилата (ПММА). Трещиностойкость в плоскости контакта блоков равна нулю и сами блоки непроницаемы, т.е. утечки жидкости отсутствуют. Таким образом, рост трещины определяется только механизмом вязкой диссипации. Для сравнения с экспериментом использовались следующие параметры

$$E = 3.3 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.4, \quad K_{Ic} = 0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, \quad C_L = 0 \text{ м/сек}^{1/2}. \quad (2.33)$$

Один из блоков профилирован таким образом, что при сжатии образуется кусочно-постоянное поле сжимающих напряжений. Положения границ слоев и соответствующие сжимающие напряжения определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_h^1 = 11.2 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^2 = 7 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^3 = 5 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^4 = 7 \text{ МПа}, \quad \sigma_h^5 = 11.2 \text{ МПа}, \\ y_1 = -25 \text{ мм}, \quad y_2 = 25 \text{ мм}, \quad y_3 = 205 \text{ мм}, \quad y_4 = 255 \text{ мм}. \end{aligned}$$

В плоскость контакта блоков через тонкую трубку закачивается жидкость вязкости $\mu = 30 \text{ Па} \cdot \text{сек}$ с переменным расходом $Q(t)$

$$Q(t) = \begin{cases} 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{сек}, & 0 \text{ сек} < t \leq 31 \text{ сек}, \\ 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{сек}, & 31 \text{ сек} < t \leq 151 \text{ сек}, \\ 2.3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{сек}, & 151 \text{ сек} < t. \end{cases}$$

На рисунке 2.8 слева цветовая карта показывает распределение раскрытия трещины, полученное с помощью численного моделирования в момент времени $t = 665 \text{ сек}$. Экспериментальные данные положения фронта трещины представлены сплошной белой кривой. Горизонтальные пунктирные линии отображают границы слоев с различными сжимающими напряжениями. На рисунке 2.8 справа приведено сравнение эволюции раскрытия трещины в окрестности точки закачки. В эксперименте раскрытие измерялось в точках $(-30, 0) \text{ мм}$ и $(30, 0) \text{ мм}$. Результаты сравнения показывают хорошее соответствие между экспериментальными данными и результатами приведенной модели в пределах погрешности измерений.

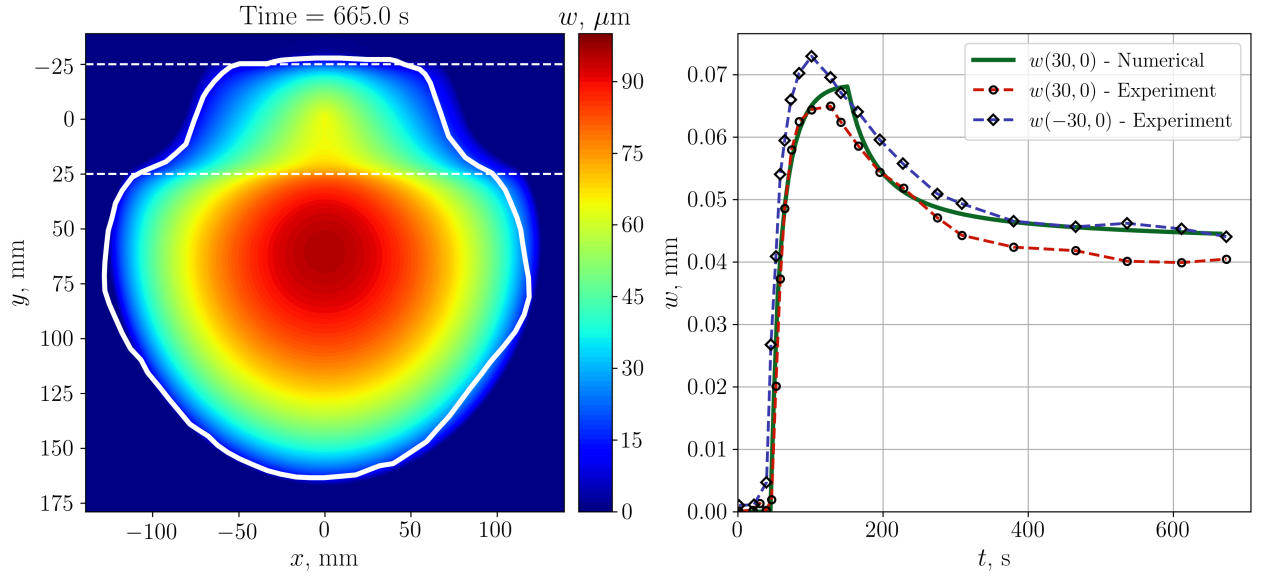


Рисунок 2.8 — Сравнение с экспериментом: слева сравнение положения фронта трещины, справа сравнение раскрытия трещины в окрестности точки закачки.

2.4.2 Тестирование контактного алгоритма

Сходимость контактного алгоритма

Для проверки численной сходимости контактного алгоритма рассматривается распространение радиальной трещины, берега которой начинают смыкаться после остановки закачки вследствие утечек жидкости в пласт. Для сравнения результатов были выполнены расчеты на грубой и подробной сетках.

Численное моделирование проводилось для следующего набора параметров: модуль Юнга $E = 10$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, трещиностойкость $K_{Ic} = 1$ МПа $\sqrt{\text{м}}$ и коэффициент утечек $C_L = 2 \cdot 10^{-5}$ м/ $\sqrt{\text{сек}}$. Начальные 500 сек закачивается жидкость вязкости $\mu = 0.02$ Па·сек с постоянным расходом (2.34). Затем закачка жидкости останавливается и образовавшаяся трещина начинает закрываться из-за утечки жидкости в пласт.

$$Q(t) = \begin{cases} 0.02 \text{ м}^3/\text{с}, & 0 \text{ с} < t \leq 500 \text{ с}, \\ 0 \text{ м}^3/\text{с}, & 500 \text{ с} < t. \end{cases} \quad (2.34)$$

Расчетная область представляет собой квадрат со стороной 50 м. Размер элементов для грубой сетки определялся как $\Delta x = \Delta y = 4$ м, для подробной сетки $\Delta x = \Delta y = 1$ м.

На рисунке 2.9 (а) представлено сравнение раскрытия $w(r)$ вдоль радиуса трещины, рассчитанное на различных сетках в момент остановки закачки. Кроме того, приведено сравнение с полу-аналитическим решением [82] для радиальной трещины. На момент остановки закачки все три решения совпадают. На рисунке 2.9 (б) показано сравнение раскрытия $w(r)$ спустя 100 секунд после остановки закачки. Отметим, что радиус трещины продолжает увеличиваться еще некоторое время после остановки закачки несмотря на уменьшение объема жидкости в трещине. На рисунках 2.9 (в) и (г) представлено сравнение, в котором часть элементов трещины закрыты и для них выполнено условие контакта. На всех графиках наблюдается достаточно хорошее совпадение результатов на грубой и подробной сетках, что иллюстрирует устойчивость работы контактного алгоритма при уменьшении размера сетки.

Гидродинамически несвязанные трещины

Для иллюстрации работы контактного алгоритма в более общем случае рассматривается процесс образования двух гидродинамически несвязанных участков трещины. Расчет проводился для трехслойной конфигурации, в которой кусочно-постоянное поле сжимающих напряжений имеет следующий вид

$$\sigma_h(y) = \begin{cases} 6.5 \text{ МПа}, & y < -20 \text{ м}, \\ 7.5 \text{ МПа}, & -20 \leq y \leq 20 \text{ м}, \\ 6.5 \text{ МПа}, & y > 20 \text{ м}. \end{cases}$$

Сжимающее напряжение σ_h^2 в центральном слое выше, чем в соседних слоях, что приводит к значительному увеличению скорости фронта при достижении границы слоев. Кроме того, коэффициент утечек в центральном слое C_L^2 поло-

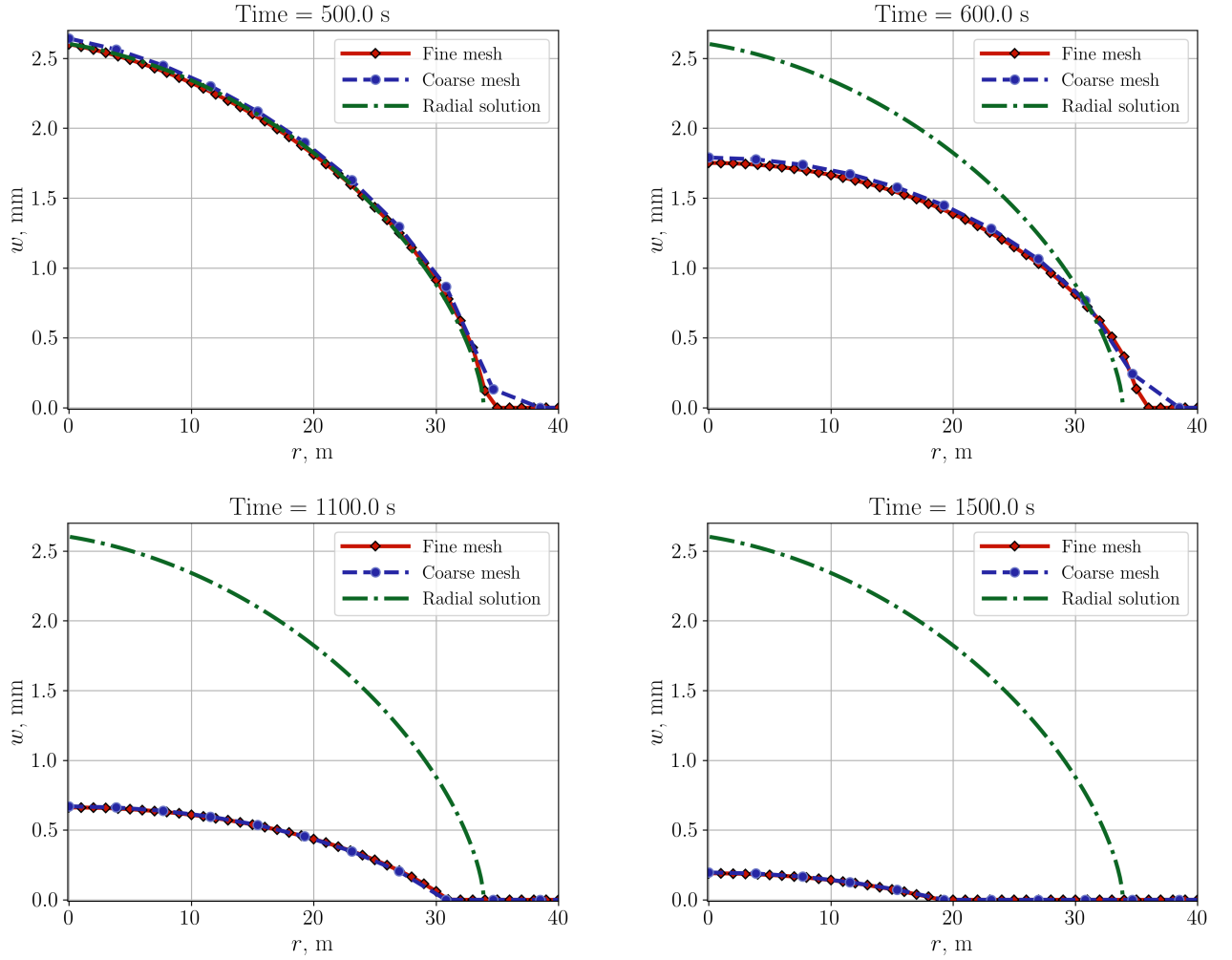


Рисунок 2.9 — Сходимость контактного алгоритма: сравнение раскрытия трещины вдоль сечения $y = 0$ для различных моментов времени после остановки закачки.

жительный в то время как в соседних слоях утечки отсутствуют

$$C_L(y) = \begin{cases} 0 \text{ м/сек}^{1/2}, & y < -20 \text{ м}, \\ 10^{-5} \text{ м/сек}^{1/2}, & -20 \leq y \leq 20 \text{ м}, \\ 0 \text{ м/сек}^{1/2}, & y > 20 \text{ м}. \end{cases}$$

Общие для всех слоев параметры приведены имеют следующие значения:

$$E = 9.5 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.2, \quad K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}. \quad (2.35)$$

Жидкость вязкости $\mu = 0.1 \text{ Па} \cdot \text{сек}$ закачивается в центральный слой с кучно-постоянным расходом

$$Q(t) = \begin{cases} 0.02 \text{ м}^3/\text{сек}, & 0 \text{ сек} < t \leq 550 \text{ сек}, \\ 0 \text{ м}^3/\text{сек}, & 550 \text{ сек} < t. \end{cases}$$

Начальные 550 сек жидкость закачивается с постоянным расходом, чтобы трещина распространилась в соседние слои с меньшими сжимающими напряжениями и нулевой утечкой, после чего закачка останавливается.

На рисунке 2.10 приведено распределение раскрытия трещины в различные моменты времени. На рисунке 2.10 (а) показано раскрытие $w(x, y)$ при $t = 350$ сек, когда фронт трещины достиг границы слоев с меньшими сжимающими напряжениями. Рисунок 2.10 (б) соответствует моменту остановки закачки $t = 550$ сек. Вследствие неоднородности сжимающих напряжений и наличия утечек в центральном слое форма трещины принимает не выпуклую форму. Затем область трещины в центральном слое начинает закрываться из-за утечки жидкости в пласт (см. рисунок 2.10 (в)). При этом участки трещины в крайних слоях продолжают распространяться т.к. утечка жидкости в этих слоях отсутствует. Рисунок 2.10 (г) соответствует моменту времени $t_{\text{end}} = 2000$ сек. Трещина в центральном слое полностью закрылась и в этой области выполняется условие контакта берегов $w(x, y, t_{\text{end}}) = w_{\text{min}}(x, y, t_{\text{end}}) \equiv 10^{-8}$ м. В соседних слоях образовалось две гидродинамически несвязанных области трещины, которые разделены областью контакта.

2.4.3 Взаимодействие трещин на наклонной скважине

Для исследования влияния интерференции напряжений на развитие несимметричных трещин ось скважины поворачивается на угол φ относительно оси z , как показано на рисунке 2.5. Этот наклон скважины соответствует сдвигу точек входа в перфорацию вдоль оси x таким образом, что фактическое расстояние между трещинами сохраняется. В расчетах рассматриваются три параллельные трещины, расстояние между которыми составляет 20 метров, т.е. $z^1 = 0$ м, $z^2 = 20$ м и $z^3 = 40$ м. Мы также предполагаем, что пласт является однородным с модулем Юнга $E = 30$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$, трещиностойкостью $K_{\text{Ic}} = 1$ МПа \cdot м^{1/2}, отсутствием утечки жидкости в пласт $C_L = 0$, и отсутствием слоистости по сжимающим напряжениям. Ньютоновская жидкость вязкости $\mu = 0,1$ Па \cdot сек закачивается с постоянным расходом $Q_0 = 0,25$ м³/сек в течение 1000 секунд.

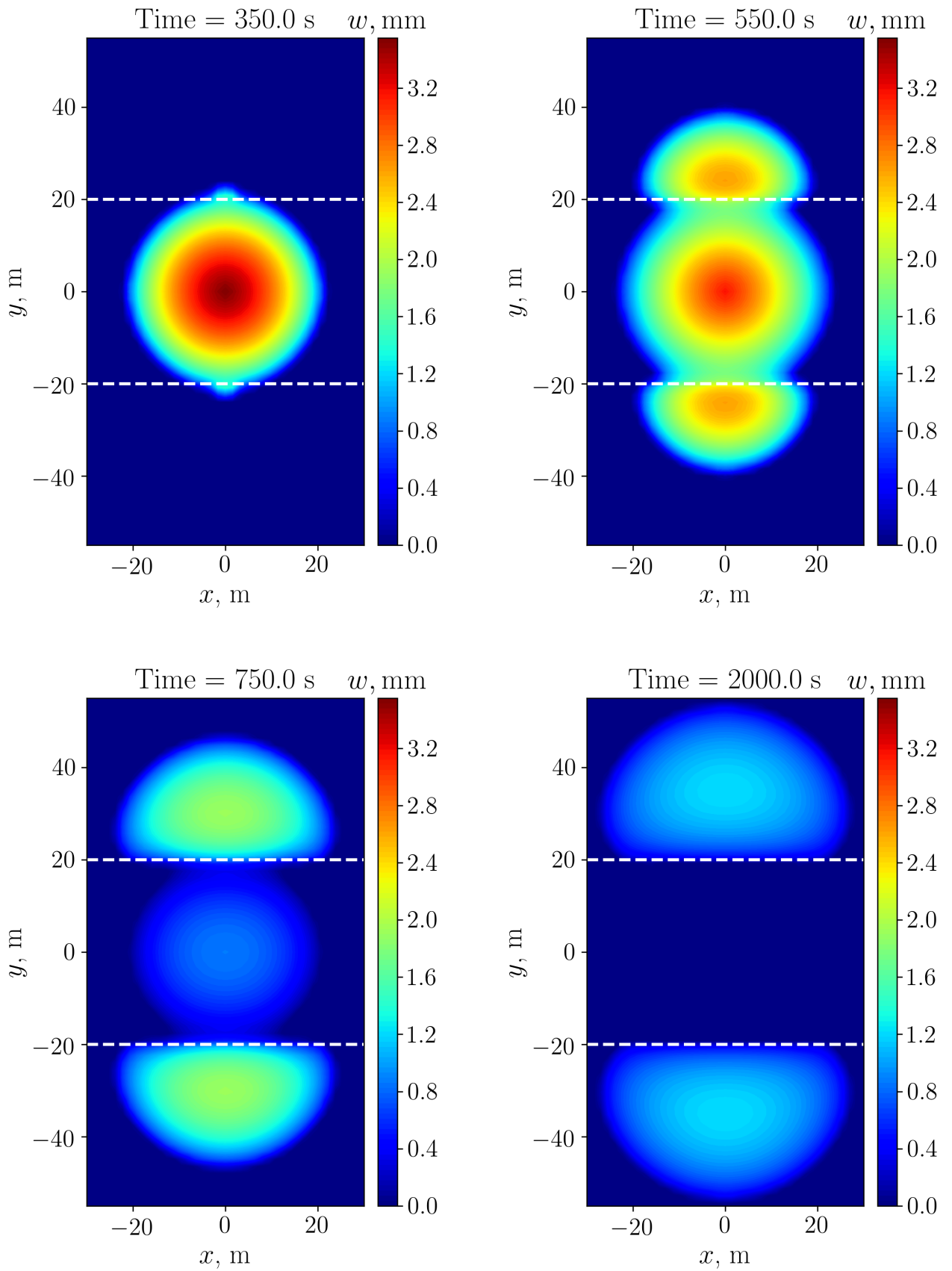


Рисунок 2.10 — Гидродинамически несвязанные трещины: раскрытие в различные моменты времени.

Сначала рассмотрим случай отсутствия наклона скважины, т.е. $\varphi = 0$. На рисунке 2.11(a) показано раскрытие всех трещин $w^k(x, y)$. Черными маркерами обозначены точки закачки, а белая вертикальная пунктирная линия разделяет правое и левое крылья трещины. При отсутствии наклона скважины трещины симметричны относительно точки закачки, а форма всех трещин радиальная. Однако между внешним и внутренним трещинами в массиве существует заметное различие в раскрытии. Это связано с наличием дополнительного сжимающего напряжения (2.30), которое обусловлено раскрытием соседних трещин. Соответствующее распределение дополнительного сжимающего напряжения σ_{ss} показано в третьем и четвертом столбцах рисунка 2.11(a).

Затем рассматривается случай наклона оси скважины на угол $\varphi = \pi/4$. В этом случае перфорации смещаются на 20 метров вдоль оси x . На рисунке 2.11(b) изображено раскрытие $w^k(x, y)$ и дополнительные сжимающие напряжения $\sigma_{ss}^k(x, y)$ для всех трещин. При наличии горизонтального сдвига внешние трещины становятся существенно несимметричными. При этом внутренняя трещина в массиве удлиняется по вертикали, а ее раскрытие в окрестности точки закачки уменьшается вследствие раскрытия соседних трещин. Расчеты показывают, что относительно небольшое горизонтальное смещение точек закачки может существенно повлиять на морфологию трещин даже для наиболее благоприятного режима распространения трещин с преобладанием вязкости.

На рисунке 2.12 показаны площадь S , длина l и высота h внутренней и внешних трещин для различных углов наклона скважины φ . С увеличением угла наклона скважины φ площадь S и длина l трещин уменьшаются. Высота h внутренней трещины увеличивается, тогда как высота внешних трещин практически не меняется. Наличие дополнительного сжимающего напряжения σ_{ss} от внешних трещин приводит к значительному уменьшению длины l и увеличению высоты h внутренней трещины. Большой угол наклона φ соответствует смещению вдоль оси x более чем на сто метров. В этом случае области трещин не перекрывают друг друга, что приводит к росту одинаковых радиальных трещин. Стоит отметить, что в случае неоднородного распределения потока рисунок 2.12 может существенно измениться.

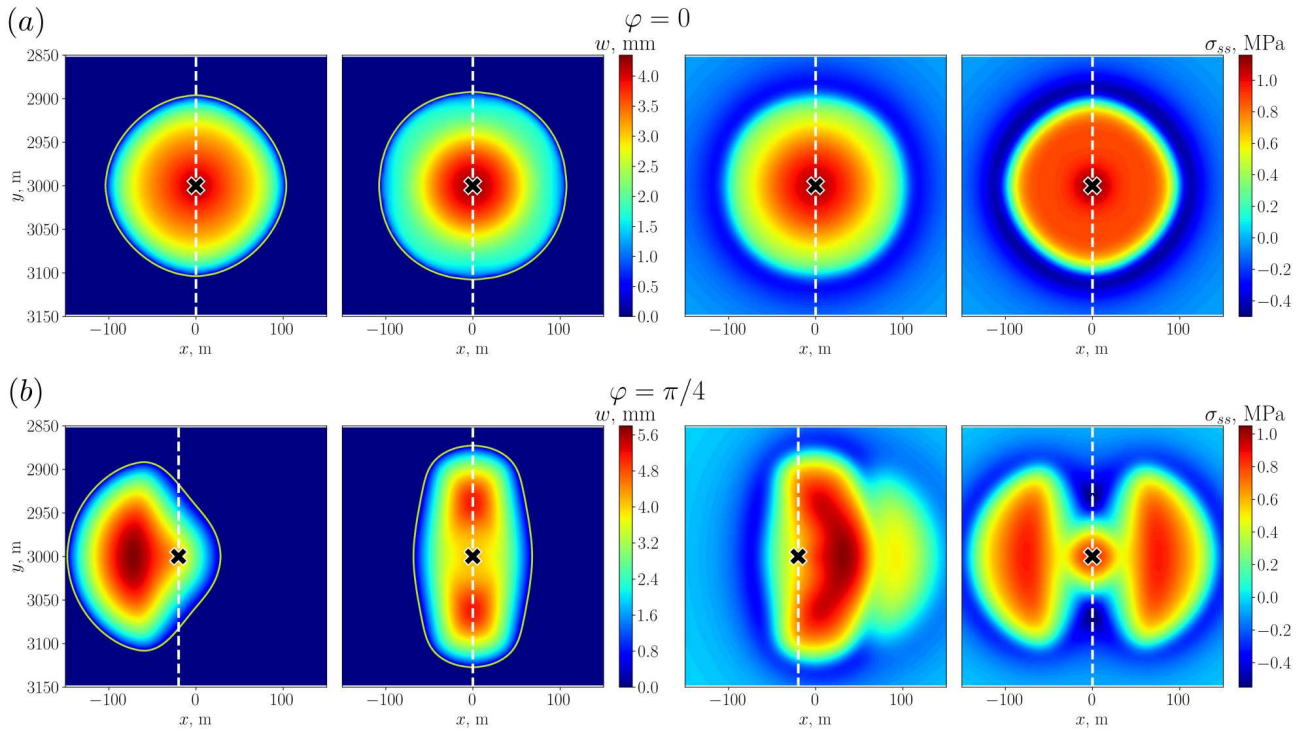


Рисунок 2.11 — Результаты численного моделирования скважины под углом φ с тремя трещинами ГРП. На первом и третьем столбцах изображено раскрытие трещины $w^k(x, y)$ и дополнительное сжимающее напряжение $\sigma_{ss}^k(x, y)$, соответственно, для внешних трещин ($k = 1, 3$) с учетом симметрии относительно прямой $x = 0$. На втором и четвертом столбцах представлены раскрытие $w^2(x, y)$ и дополнительное сжимающее напряжение $\sigma_{ss}^2(x, y)$, соответственно, для внутренней трещины в массиве. Результаты для $\varphi = 0$ приведены на рисунке (a). Рисунок (b) соответствует $\varphi = \pi/4$. Черными маркерами показано положение точек перфорации, вертикальные пунктирные линии разделяют правое и левое крыло каждой трещины.

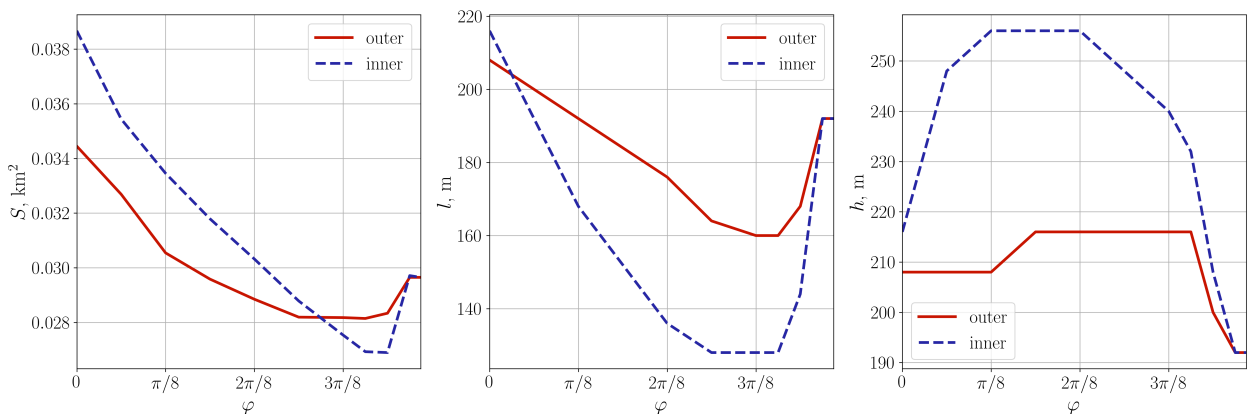


Рисунок 2.12 — Площадь трещины S , длина l и высота h в зависимости от угла наклона скважины φ . Красная сплошная линия соответствует внешним трещинам, синяя пунктирная линия — внутренним трещинам.

2.5 Анализ эффектов, влияющих на распространение плоских трещин

В данной главе была описана реализация модели плоской трещины гидроразрыва Planar3D ILSA. Немаловажной частью моделирования эволюции трещины ГРП является расчет закрытия трещины вследствие остановки закачки жидкости. Моделирование закрытия важно для оценки геометрии закрепленной трещины и при моделировании процедуры повторного гидроразрыва пласта, когда в уже закрепленную трещину повторно нагнетается жидкость с целью увеличения продуктивности месторождения. В данной главе был реализован контактный алгоритм, который является модификацией широко распространенного метода множителей Лагранжа. Также была построена модель многостадийного гидроразрыва пласта, когда несколько трещин распространяются одновременно на одной скважине. Был рассмотрен предел высокого трения на перфорациях и, как следствие, равномерного распределения потока жидкости между трещинами. Для расчета механического влияния трещин была построена явная схема, в которой дополнительное сжимающее напряжение, вызванное раскрытием соседних трещин рассчитывается на предыдущем шаге по времени. Это позволяет рассматривать каждую трещину отдельно вместо решения полностью связанной системы уравнений.

Реализованный численный алгоритм был верифицирован путем сравнения с аналитическими решениями для предельных режимов распространения радиальной трещины. Кроме того, было выполнено сравнение с результатами моделирования плоских трещин в слоистой среде с другими авторами. Валидация реализованного подхода проводилась путем сравнения с экспериментом, в котором воспроизводилось распространение трещины вследствие закачки жидкости между параллельными блоками из полиметилметакрилата. Для тестирования контактного алгоритма был выполнен расчет радиальной трещины на грубой и подробной сетках. Результаты расчетов показали, что контактный алгоритм работает устойчиво на любом этапе расчета. Результаты моделирования одновременного распространения множества трещин показали, что в случае отсутствия наклона скважины, трещины симметричны и почти радиальны. В то же время, наклон скважины и соответствующее боковое смещение точек закачки может привести к существенно несимметричным трещинам, а их форма

значительно отличается от радиальной. Результаты моделирования были получены в режиме с преобладанием вязкости.

Заключение

В работе была построена полностью связанная термoporоупругая модель устойчивости цементной оболочки обсаженного и цементированного ствола скважины. Модель учитывает вложенную структуру скважины, контраст геологических напряжений и смещение обсадной колонны относительно оси скважины. Также было учтено влияние начальных напряжений в цементной оболочке, которые возникают в процессе гидратации цемента. Результирующее напряженное состояние в цементе описывалось в терминах тензора начальных напряжений. В работе были рассмотрены наиболее характерные сценарии, соответствующие усадке и разбуханию цемента. Задача решалась численно с помощью метода конечных элементов. Была выполнена верификация модели путем сравнения с точными решениями в осесимметричном случае.

С помощью численного моделирования было проанализировано влияние различных факторов на образование зон разрушения или отслоения цементной оболочки. На основе проведенного анализа было показано, что для неперфорированной скважины риск отслоения цементной оболочки на границе сталь/цемент или цемент/порода крайне низок. Контраст геологических напряжений может оказывать существенное влияние на вероятность разрушения цемента. В случае высокопроницаемого цемента резкие изменения порового давления или температуры незначительно влияют на устойчивость цементной оболочки, в то время как для низкопроницаемого цемента колебания температуры вызывают существенные изменения порового давления, что может приводить к разрушению. Таким образом, в скважинах, связанных с высокотемпературными операциями предпочтительно использовать высокопроницаемый цемент для предотвращения разрушения. В случае двух вложенных обсадных колонн изменение температуры и порового давления существенно влияет на напряженно-деформированное состояние и может приводить к разрушению внутренней цементной оболочки даже в случае высокопроницаемого цемента. Расчеты показывают, что именно сочетание различных факторов (колебания температуры, смещение обсадной колонны, начальное напряжение и т.д.) может вызвать повреждение цементной оболочки, в то время как каждого отдельного фактора может быть недостаточно для разрушения.

Также в работе была рассмотрена задача распространения плоских трещин гидроразрыва пласта в слоистой среде. Была описана численная реализация модели в рамках подхода Planar3D ILSA. Численный алгоритм основан на методе разрывных смещений в сочетании с методом конечных объемов. Для отслеживания положения фронта трещины использовано универсальное асимптотическое решение, которое учитывает разномасштабные процессы, протекающие в вершине трещины. Также был разработан контактный алгоритм, позволяющий рассчитывать не только раскрытие трещины, но и ее закрытие вследствие различных факторов, таких как остановка закачки, шероховатость стенок трещины или образование плотной упаковки частиц проппанта. Построенный контактный алгоритм является модификацией метода множителей Лагранжа. Одним из основных преимуществ описанного алгоритма является то, что при решении контактной задачи не увеличивается число степеней свободы, что позволяет эффективно моделировать как раскрытие, так и закрытие трещины ГРП.

Кроме того, была построена модель распространения множественный параллельных трещин гидроразрыва на одной скважине. При построении модели использовалось предположение, что трение на перфорациях существенно. Это приводит к равномерному распределению потоков жидкости между трещинами на одной скважине. Для расчета механического взаимодействия трещин была построена явная схема. Это позволило выполнять расчет трещин независимо друг от друга, а взаимное влияние учитывать в терминах дополнительного сжимающего напряжения, вызванного раскрытием соседних трещин. Разработанный подход позволяет эффективно моделировать многостадийный гидроразрыв пласта. Реализованная модель была верифицирована путем сравнения с аналитическими решениями для предельных режимов распространения радиальной трещины. Кроме того, было выполнено сравнение с экспериментом, в котором рассматривалось распространение трещины ГРП между непроницаемыми блоками из полиметилметакрилата. Была показана устойчивость контактного алгоритма при расчете на различных сетках. Было проанализировано влияние наклона скважины на характер распространения множественных трещин на одной скважины. Была проанализирована зависимость геометрических характеристик трещин в зависимости от угла наклона скважины.

Список литературы

1. Quantitative estimation of CO₂ leakage from geological storage: Analytical models, numerical models, and data needs / M. A. Celia, S. Bachu, J. M. Nordbotten, S. E. Gasda, H. K. Dahle // Greenhouse Gas Control Technologies 7. — Elsevier, 2005. — P. 663–671.
2. How to prevent loss of zonal isolation through a comprehensive analysis of microannulus formation / A.-P. Bois, A. Garnier, F. Rodot, J. Sain-Marc, N. Aimard, [et al.] // SPE Drilling & Completion. — 2011. — Vol. 26, no. 01. — P. 13–31.
3. Interface debonding as a controlling mechanism for loss of well integrity: Importance for CO₂ injector wells / B. Lecampion, D. Quesada, M. Loizzo, A. Bungler, J. Kear, L. Deremble, J. Desroches // Energy Procedia. — 2011. — Vol. 4. — P. 5219–5226.
4. Quantifying the risk of CO₂ leakage through wellbores / M. Loizzo, O. A. Akemu, L. Jammes, J. Desroches, S. Lombardi, A. Annunziatellis, [et al.] // SPE Drilling & Completion. — 2011. — Vol. 26, no. 03. — P. 324–331.
5. *Economides, M. J.* Reservoir Stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. — Third. — John Wiley&Sons, LTD, 2000. — P. 856.
6. *Detournay, E.* Mechanics of Hydraulic Fractures / E. Detournay // Ann. Rev. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 48. — P. 311–339.
7. *Van As, A.* Hydraulic fracture growth in naturally fractured rock: mine through mapping and analysis / A. Van As, R. Jeffrey. — 2002.
8. A review of mechanical models of dike propagation: Schools of thought, results and future directions / E. Rivalta, B. Taisne, A. Bungler, R. Katz // Tectonophysics. — 2015. — Vol. 638. — P. 1–42.
9. Widths of hydraulic fractures / T. Perkins, L. Kern, [et al.] // Journal of Petroleum Technology. — 1961. — Vol. 13, no. 09. — P. 937–949.
10. *Y. Zheltov.* On hydraulic fracturing of an oil-bearing reservoir / Y. Zheltov, S. Khristianovich // Izvestia AN SSSR. — 1955. — Vol. ser. OTN, issue 5. — (in Russian).

11. *Savitski, A.* Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. Savitski, E. Detournay // International journal of solids and structures. — 2002. — Vol. 39, no. 26. — P. 6311–6337.
12. *Palmer, I. D.* Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variations / I. D. Palmer, H. Carroll // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1983. — Vol. 23, no. 06. — P. 870–878.
13. *Vandamme, L.* A three-dimensional hydraulic fracturing simulator / L. Vandamme, J. Curran // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1989. — Vol. 28, no. 4. — P. 909–927.
14. *Peirce, A.* An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures / A. Peirce, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 197, no. 33–40. — P. 2858–2885.
15. Simulating fully 3D hydraulic fracturing / B. Carter, J. Desroches, A. Ingraffea, P. Wawrzynek // Modeling in geomechanics. — 2000. — Vol. 200. — P. 525–557.
16. *Wu, K.* A simplified three-dimensional displacement discontinuity method for multiple fracture simulations / K. Wu, J. E. Olson // International Journal of Fracture. — 2015. — Vol. 193, no. 2. — P. 191–204.
17. *Bunger, A. P.* Numerical simulation of simultaneous growth of multiple interacting hydraulic fractures from horizontal wells / A. P. Bunger, A. P. Peirce // Shale Energy Engineering 2014: Technical Challenges, Environmental Issues, and Public Policy. — 2014. — P. 201–210.
18. Interference fracturing: nonuniform distributions of perforation clusters that promote simultaneous growth of multiple hydraulic fractures / A. Peirce, A. Bunger, [et al.] // SPE Journal. — 2015. — Vol. 20, no. 02. — P. 384–395.
19. Optimal perforation location and limited entry design for promoting simultaneous growth of multiple hydraulic fractures / C. Cheng, A. P. Bunger, A. P. Peirce, [et al.] // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2016.
20. Modeling the effect of turbulence on the simultaneous propagation of multiple parallel hydraulic fractures / A. Peirce, E. Dontsov, [et al.] // 51st us rock mechanics/geomechanics symposium. — American Rock Mechanics Association. 2017.

21. A soil mechanics approach to predict cement sheath behavior / M. Thiercelin, C. Baumgarte, D. Guillot, [et al.] // SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. — Society of Petroleum Engineers. 1998.
22. Cement design based on cement mechanical response / M. Thiercelin, B. Dargaud, J. Baret, W. Rodriguez, [et al.] // SPE drilling & completion. — 1998. — Vol. 13, no. 04. — P. 266—273.
23. Cement sheath stress failure / K. Goodwin, R. Crook, [et al.] // SPE Drilling Engineering. — 1992. — Vol. 7, no. 04. — P. 291—296.
24. Cements for Long Term Isolation-Design Optimization by Computer Modelling and Prediction / G. Di Lullo, P. Rae, [et al.] // IADC/SPE Asia Pacific Drilling Technology. — Society of Petroleum Engineers. 2000.
25. Design approach to sealant selection for the life of the well / M. Bosma, K. Ravi, W. Van Driel, G. J. Schreppers, [et al.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 1999.
26. Burst induced stresses in cemented wellbores / W. Fleckenstein, A. Eustes, M. Miller, [et al.] // SPE/AAPG Western Regional Meeting. — Society of Petroleum Engineers. 2000.
27. Mechanical response and characterization of well cements / A. Philippacopoulos, M. Berndt, [et al.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 2002.
28. Analysis of horizontal casing integrity in the Valhall field / P. Pattillo, T. Kristiansen, [et al.] // SPE/ISRM Rock Mechanics Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2002.
29. Finite-element studies of near-wellbore region during cementing operations: Part I / K. E. Gray, E. Podnos, E. Becker, [et al.] // SPE drilling & completion. — 2009. — Vol. 24, no. 01. — P. 127—136.
30. *Zhang, W.* Numerical investigation of the influence of cement failure to micro-annuli generation / W. Zhang, A. Eckert // 52nd US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — OnePetro. 2018.
31. *Zhang, W.* Micro-annulus generation under downhole conditions: Insights from three-dimensional staged finite element analysis of cement hardening and wellbore operations / W. Zhang, A. Eckert // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2020. — Vol. 12, no. 6. — P. 1185—1200.

32. Poromechanical behaviour of hardened cement paste under isotropic loading / S. Ghabezloo, J. Sulem, S. Guédon, F. Martineau, J. Saint-Marc // Cement and Concrete research. — 2008. — Vol. 38, no. 12. — P. 1424–1437.
33. Rapid measurement of Biot effective stress coefficient for Class-G Oil Well Cements / M. Meng, L. P. Frash, J. W. Carey, W. Li, N. Welch // 54th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — OnePetro. 2020.
34. Initial state of stress: the key to achieving long-term cement-sheath integrity / J. Saint-Marc, A. Garnier, A.-P. Bois, [et al.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 2008.
35. Cement stress and microstructure evolution during curing in semi-rigid high-pressure environments / M. Meng, L. P. Frash, J. W. Carey, W. Li, N. J. Welch, W. Zhang // Cement and Concrete Research. — 2021. — Vol. 149. — P. 106555.
36. Efficient wellbore cement sheath design using the SRC (System Response Curve) method / D. M. Fourmaintraux, A.-P. Bois, B. Fraboulet, [et al.] // SPE Europec/EAGE Annual Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2005.
37. Use of a mechanistic model to forecast cement-sheath integrity / A.-P. Bois, A. Garnier, G. Galdiolo, J.-B. Laudet, [et al.] // SPE Drilling & Completion. — 2012. — Vol. 27, no. 02. — P. 303–314.
38. *Liu, K.* Impact of casing eccentricity on cement sheath / K. Liu, D. Gao, A. D. Taleghani // Energies. — 2018. — Vol. 11, no. 10. — P. 2557.
39. An innovative methodology for designing cement-sheath integrity exposed to steam stimulation / A. Garnier, J. Saint-Marc, A.-P. Bois, Y. Kermanac'h, [et al.] // SPE Drilling & Completion. — 2010. — Vol. 25, no. 01. — P. 58–69.
40. Predicting Cement-Sheath Integrity with Consideration of Initial State of Stress and Thermoporoelastic Effects / M. Meng, L. Frash, J. W. Carey, Z. Niu, W. Zhang, N. Guy, Z. Lei, W. Li, N. Welch // SPE Journal. — 2021. — P. 1–24.
41. *Ghabezloo, S.* The effect of undrained heating on a fluid-saturated hardened cement paste / S. Ghabezloo, J. Sulem, J. Saint-Marc // Cement and Concrete Research. — 2009. — Vol. 39, no. 1. — P. 54–64.

42. Interface debonding driven by fluid injection in a cased and cemented wellbore: modeling and experiments / B. Lecampion, A. Bungler, J. Kear, D. Quesada // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2013. — Vol. 18. — P. 208–223.
43. *O. Coussy*. Poromechanics / O. Coussy. — John Wiley & Sons, 2004.
44. *M. A. Biot*. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid / M. A. Biot // Journal of Applied Physics. — 1955. — Vol. 26, issue 2. — P. 182–185.
45. Impact of downhole pressure and fluid-access on the effectiveness of wellbore cement expansion additives / T. Wolterbeek, E. Cornelissen, S. Hangx, C. Spiers // Cement and Concrete Research. — 2021. — Vol. 147. — P. 106514.
46. *Hecht, F.* New development in FreeFem++ / F. Hecht // J. Numer. Math. — 2012. — Vol. 20, no. 3/4. — P. 251–265.
47. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies: application to particulate flow / R. Glowinski, T.-W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, J. Periaux // Journal of computational physics. — 2001. — Vol. 169, no. 2. — P. 363–426.
48. *Cheng, A. H.-D.* Poroelasticity. Vol. 27 / A. H.-D. Cheng. — Springer, 2016.
49. *Smith, M.* Hydraulic Fracturing / M. Smith, C. Montgomery. — CRC Press, 2015. — (Emerging Trends and Technologies in Petroleum Engineering). — URL: <https://books.google.ru/books?id=KyqsCQAAQBAJ>.
50. *Wang, W.* Three-dimensional analysis of cement sheath integrity around Wellbores / W. Wang, A. D. Taleghani // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2014. — Vol. 121. — P. 38–51.
51. Cement Shrinkage measurement in oilwell cementing-A comparative study of laboratory methods and procedures / B. Reddy, Y. Xu, K. Ravi, D. W. Gray, P. Pattillo // Rocky Mountain Oil & Gas Technology Symposium. — OnePetro. 2007.
52. *Sutama, C.* Expanding Cement Application for High Rate Gas Wells in South Sumatra / C. Sutama, F. Inayah // SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition. — OnePetro. 2013.

53. *Sasaki, T.* Water absorption and shrinkage behaviour of early-age cement in wellbore annulus / T. Sasaki, K. Soga, M. Abuhaikal // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2018. — Vol. 169. — P. 205–219.
54. *Baumgarte, C.* Case studies of expanding cement to prevent microannular formation / C. Baumgarte, M. Thiercelin, D. Klaus // SPE annual technical conference and exhibition. — OnePetro. 1999.
55. Why permeability to water is anomalously lower than that to many other fluids for cement-based material? / C. Zhou, F. Ren, Z. Wang, W. Chen, W. Wang // Cement and Concrete Research. — 2017. — Vol. 100. — P. 373–384.
56. Finite element modeling of curving hydraulic fractures and near-wellbore hydraulic fracture complexity / C. Sherman, L. Aarons, J. Morris, S. Johnson, A. Savitski, M. Geilikman // 49th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — OnePetro. 2015.
57. *Gordeliy, E.* Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the XFEM / E. Gordeliy, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2013. — Vol. 266. — P. 125–143.
58. *J. I. Adachi.* Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid / J. I. Adachi, E. Detournay // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. — 2002. — Vol. 26, issue 6. — P. 579–604.
59. *Tsai, V. C.* A model for turbulent hydraulic fracture and application to crack propagation at glacier beds / V. C. Tsai, J. R. Rice // Journal of Geophysical Research: Earth Surface. — 2010. — Vol. 115, F3.
60. *Dontsov, E.* Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow / E. Dontsov // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 797.
61. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, J. Desroches // Int. J. Rock Mech. and Min. Sci. — 2007. — Vol. 44, issue 5. — P. 739–757.
62. *Dontsov, E.* Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures / E. Dontsov, A. Peirce // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 760. — P. 567–590.
63. *Garagash, D. I.* Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off / D. I. Garagash, E. Detournay, J. I. Adachi // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Vol. 669. — P. 260–297.

64. *Garagash, D.* The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium / D. Garagash, E. Detournay // J. Appl. Mech. — 2000. — Vol. 67, no. 1. — P. 183–192.
65. *Dontsov, E.* A non-singular integral equation formulation to analyse multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures / E. Dontsov, A. Peirce // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Vol. 781.
66. *Lecampion, B.* An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag / B. Lecampion, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2007. — Vol. 196, no. 49–52. — P. 4863–4880.
67. *Carter, E.* Optimum fluid characteristics for fracture extension / E. Carter // Howard GC, Fast CR, editors. Drilling and production practices. — 1957. — P. 261–270.
68. *Dontsov, E.* A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics / E. Dontsov, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — Vol. 313. — P. 53–84.
69. *Detournay, E.* Mechanics of hydraulic fractures / E. Detournay // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 48. — P. 311–339.
70. *Lecampion, B.* Numerical methods for hydraulic fracture propagation: a review of recent trends / B. Lecampion, A. Bungler, X. Zhang // Journal of natural gas science and engineering. — 2018. — Vol. 49. — P. 66–83.
71. *Crouch, S.* Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering / S. Crouch, A. M. Starfield. — Allen & Unwin, 1983.
72. Solution of crack problems: the distributed dislocation technique. Vol. 44 / D. A. Hills, P. Kelly, D. Dai, A. Korsunsky. — Springer Science & Business Media, 2013.
73. *Zia, H.* PyFrac: A planar 3D hydraulic fracture simulator / H. Zia, B. Lecampion // arXiv preprint arXiv:1908.10788. — 2019.
74. *Langlois, W. E.* Lubrication Theory / W. E. Langlois, M. O. Deville // Slow Viscous Flow. — Cham : Springer International Publishing, 2014. — P. 229–249. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-03835-3_9.

75. *Rice, J. R.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture / J. R. Rice // Fracture: an advanced treatise. — 1968. — Vol. 2. — P. 191–311.
76. *Detournay, E.* On the moving boundary conditions for a hydraulic fracture / E. Detournay, A. Peirce // International Journal of Engineering Science. — 2014. — Vol. 84. — P. 147–155.
77. *Malladi, R.* Level set and fast marching methods in image processing and computer vision / R. Malladi, J. A. Sethian // Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing. Vol. 1. — IEEE. 1996. — P. 489–492.
78. *Sethian, J. A.* A fast marching level set method for monotonically advancing fronts / J. A. Sethian // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1996. — Vol. 93, no. 4. — P. 1591–1595.
79. *Bærentzen, J. A.* On the implementation of fast marching methods for 3D lattices : tech. rep. / J. A. Bærentzen ; Informatics ; Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU. — Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby, 2001.
80. *Crump, J.* Effects of perforation-entry friction on bottomhole treating analysis / J. Crump, M. Conway // J. Petroleum Technol. — 1988. — Vol. SPE 15474. — P. 1041–1049.
81. *Salamon, M.* Elastic analysis of displacements and stresses induced by the mining of seam or reef deposits: Part I / M. Salamon // Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy. — 1963. — Vol. 64, no. 4. — P. 129–149.
82. *Dontsov, E.* An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off / E. Dontsov // Royal Society open science. — 2016. — Vol. 3, no. 12. — P. 160737.
83. A comparison of numerical and experimental results of hydraulic fracture growth into a zone of lower confining stress / R. Wu, A. Bungler, R. Jeffrey, E. Siebrits, [et al.] // The 42nd US rock mechanics symposium (USRMS). — American Rock Mechanics Association. 2008.