

Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки  
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**  
**им. С.Л. Соболева**  
**Сибирского отделения**  
**Российской академии наук**  
**(ИМ СО РАН)**

630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4  
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика  
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98  
E-mail: im@math.nsc.ru

27.12.2017 № 15302-2-2171  
На № 15302-58/6215/ от 21. 11. 2017  
581

«УТВЕРЖДАЮ»  
Директор Института математики  
им. С.Л. Соболева СО РАН  
академик С. С. Гончаров  
декабря 2017 года



### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации А.А. Жалниной «Зависимость решений уравнений механики смесей от области: оптимизация формы», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В диссертации изучается задача об обтекании компактного препятствия трехмерным потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Теория оптимизации таких течений чрезвычайно актуальна во многих прикладных дисциплинах и интенсивно разрабатывается мировым научным сообществом. Основными проблемами здесь являются: постановка и доказательство корректности краевых задач для соответствующих дифференциальных уравнений, исследование зависимости решений от формы препятствия, поиски экстремальных значений функционала сопротивления препятствия набегающему потоку.

Классическая математическая модель течения вязкой сжимаемой жидкости в области с препятствием представляет собой систему Навье–Стокса с неоднородными граничными условиями на внешней границе области течения и нулевым значением скорости на поверхности обтекаемого тела. В известных работах П.-Л. Лионса, А.В. Кажихова, Э. Файрайзела, П.И. Плотникова и других авторов получены фундаментальные результаты в теории разрешимости таких задач. Вопросы корректности краевых задач для уравнений движения многофазных жидкостей изучались А.В. Кажиховым и А.Н. Петровым, В.А. Вайгантом, Н.А. Кучером и Д.А. Прокудиным.

Эти достижения стимулировали исследования в области теории управления и оптимизации. Первые постановки задач оптимального управления формой области принадлежат Ж.-Л. Лионсу. Отметим также работы Р Темама, А.В. Фурсикова, Г.В. Алексеева и других авторов, посвященные вопросам оптимального управления для уравнений гидродинамики и тепломассопереноса. Теория оптимизации формы препятствий для течений сжимаемого вязкого газа разработана в серии публикаций Э. Файрайзела, П.И. Плотникова, Ж. Соколовски и Е.В. Рубан.

Диссертация А.А. Жалниной является дальнейшим продвижением в развитии перечисленных направлений. В ней исследуются потоки смесей вязких сжимаемых жидкостей в зависимости от формы обтекаемых ими препятствий. Работа состоит из введения, трех глав, списка литературы и двух приложений. Полный объем текста составляет 151 страницу, что превышает средний объем кандидатских диссертаций по математике.

Во введении изложена история вопроса, приведен обзор литературы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы. В первой главе собраны вспомогательные сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, элементы теории интерполяции и функциональных пространств с дробными показателями дифференцируемости, а также известные теоремы о разрешимости классической задачи Стокса и краевых задач для уравнений переноса. Основные результаты диссертации излагаются во второй и третьей главах.

Вторая глава посвящена изучению краевых задач об обтекании семейства компактных препятствий стационарными потоками двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей. Дифференциальные уравнения, описывающие движение таких потоков, образуют весьма сложную систему типа Навье–Стокса, включающую законы сохранения импульсов и массы компонент смеси. Изменение формы обтекаемого препятствия трактуется как отображение  $x \rightarrow x + \varepsilon T(x)$  с малым параметром  $\varepsilon$ , переводящее стандартную область  $\Omega$  в область возмущенного течения. В итоге возникает задача в стандартной области для системы уравнений, коэффициенты которой зависят от  $T$  и  $\varepsilon$ . Основным результатом главы является теорема о достаточных условиях однозначной разрешимости поставленной задачи в пространствах Соболева с дробными показателями дифференцируемости. Кроме того, получены оценки норм решений в соответствующих пространствах, а также исследована их зависимость от  $\varepsilon$  и матрицы Якоби отображения  $x \rightarrow x + \varepsilon T(x)$ .

В третьей главе изучается дифференцируемость по области найденных решений краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей. Пусть вектор-функция  $u(x; T, \varepsilon)$  является решением этой задачи для фиксированного отображения  $T$ , задающего вид возмущения области течений. Термин «производная по области, отвечающая возмущению  $T$ », понимается как предел в некотором функциональном пространстве выражений

$[u(x;T,\varepsilon) - u(x;T,0)]/\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Этот предел называется далее материальной производной. Главная тема третьей главы – существование и свойства материальных производных.

Естественно предположить, что искомый предел является решением системы, полученной формальным дифференцированием по  $\varepsilon$  тех уравнений, которым удовлетворяют компоненты  $u(x;T,\varepsilon)$ . Однако строгое доказательство этого утверждения оказывается вовсе не очевидным. В диссертации найдены условия, при которых краевая задача для материальных производных однозначно разрешима в очень слабом смысле: отдельные компоненты решения принадлежат пространствам Соболева с отрицательными показателями гладкости. Также установлено, что в этих пространствах выражения  $[u(x;T,\varepsilon) - u(x;T,0)]/\varepsilon$  слабо сходятся к соответствующим решениям системы материальных производных.

Заключительный параграф третьей главы посвящен поиску производной по  $\varepsilon$  интегрального функционала сопротивления набегающему потоку со стороны препятствия. Получена явная формула для производной, содержащая два стагаемых – геометрическое и динамическое. Геометрическая часть определяется потоком в невозмущенной области, а динамическая – очень слабым решением системы материальных производных.

В приложения вынесены отдельные громоздкие выкладки, размещение которых в основном тексте существенно затруднило бы чтение диссертации. Тем не менее, текст все равно остался очень длинным и перегруженным сложными рассуждениями. Поэтому не удивительно, что в ходе этих рассуждений допущены отдельные погрешности. Например, на стр. 58 при выводе формулы (2.40) из (2.38) в правой части неравенства (2.40) потерян общий множитель  $1 + \max\{\tau_{11}, \tau_{22}\}$ . Впрочем, эта «потеря» не повлияет на справедливость основных утверждений. Список подобных примеров можно продолжить, но мы не будем этого делать, так как все замеченные погрешности имеют чисто технический характер и легко исправляются.

Таким образом, в диссертации А.А. Жалниной установлена серия новых принципиальных результатов, существенно продвигающих математическую теорию оптимизации течений смесей вязких сжимаемых жидкостей в пространственных областях с препятствиями. Все результаты получены лично автором и строго доказаны. Замеченные погрешности являются техническими и не влияют на справедливость основных утверждений. Диссертация в целом выполнена на высоком научном уровне.

По итогам исследований опубликовано 11 работ, шесть из которых – в научных изданиях, рекомендованных списком ВАК. Основные результаты доложены автором на пяти всероссийских и международных конференциях, а также на нескольких научных семинарах в Институте математики и в Институте гидродинамики Сибирского отделения РАН. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты работы могут быть использованы в теоретических и прикладных исследованиях, ведущихся в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербургском отделении МИРАН, Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, а также в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Дальневосточном федеральном и других университетах.

Представленная работа удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а ее автор Александра Анатольевна Жалнина заслуживает присуждения искомой степени.

Настоящий отзыв составлен руководителем лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук. Обсужден и утвержден на заседании научного семинара лаборатории 25 декабря 2017 года.

Руководитель лаборатории дифференциальных  
уравнений и смежных вопросов анализа ИМ СО РАН,  
ведущий научный сотрудник,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

*Б.С. Белоносов*



Адрес: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4  
Тел: (383)3297654

Подпись <i>В.С. Белоносов</i>	
удостоверяю <i>Н.З. Киндалева</i>	
Зав. орготделом Н.З. Киндалева	
ИМ СО РАН	
«27»	12
2017 г.	