

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Жалнина Александра Анатольевна

**ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СМЕСЕЙ ОТ
ОБЛАСТИ: ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ**

01.01.02 - дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ. - мат. наук, профессор
Кучер Николай Алексеевич

Кемерово 2017

Оглавление

Введение	4
1 Вспомогательные сведения и обозначения	25
§ 1. Вспомогательные сведения из функционального анализа.	25
1.1. Элементы теории интерполяции.	25
1.2. Функциональные пространства.	27
1.3. Специальные функциональные пространства и неравенства	30
1.4. Некоторые теоремы из анализа	34
§ 2. Вспомогательные сведения из теории дифференциальных уравнений . .	35
2.1. Задача Стокса.	35
2.2. Краевые задачи для уравнений переноса.	42
2 Корректность неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вяз-	44
ких сжимаемых жидкостей	
§ 1. Постановка задачи об обтекании семейства компактных препятствий . .	44
1.1. Формулировка задачи обтекания	44
1.2. Возмущение области течения. Преобразование задачи.	46
1.3. Задача о возмущениях.	50
§ 2. Теорема существования решения задачи о возмущениях	52
2.1. Редукция задачи о возмущениях к операторному уравнению вида $\vec{\theta} = W(\vec{\theta})$	54
2.2. Свойства оператора $W(\vec{\theta})$	55
2.3. Применение теоремы о неподвижной точке	63
§ 3. Зависимость решений от деформации области	64
3.1. Линейная задача для разности.	64

3.2.	Сопряженная задача.	67
3.3.	Исследование сопряженной задачи	69
3.4.	Оценки разностей	83
§ 4.	Теорема единственности. Относительная компактность совокупности решений задачи о возмущениях	88
3	Дифференцируемость по области функционала сопротивления и решений краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей	91
§ 1.	Постановка задачи для материальных производных.	91
§ 2.	Доказательство теоремы о существовании материальных производных .	96
§ 3.	Производная по области функционала сопротивления.	114
3.1.	Связь материальной производной и производной по области. . . .	114
3.2.	Производная по области функционала сопротивления.	115
3.3.	Представление производной функционала сопротивления в терминах сопряженного состояния.	122
	Заключение	125
	Литература	126
А	О функционале сопротивления препятствия набегающему потоку смеси вязких сжимаемых жидкостей	137
В	Вывод уравнений для разности	141

Введение

Предметом исследования в диссертации является следующая система дифференциальных уравнений

$$\rho_1(\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla)\vec{u}^{(1)} + \nabla p_1 + a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) = \sum_{j=1}^2 [\mu_{1j}\Delta\vec{u}^{(j)} + (\mu_{1j} + \lambda_{1j})\nabla\operatorname{div}\vec{u}^{(j)}], \quad (1a)$$

$$\rho_2(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla)\vec{u}^{(2)} + \nabla p_2 - a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) = \sum_{j=1}^2 [\mu_{2j}\Delta\vec{u}^{(j)} + (\mu_{2j} + \lambda_{2j})\nabla\operatorname{div}\vec{u}^{(j)}], \quad (1b)$$

$$\operatorname{div}(\rho_1\vec{u}^{(1)}) = 0, \quad \operatorname{div}(\rho_2\vec{u}^{(2)}) = 0, \quad (1c)$$

описывающая пространственные стационарные движения смеси вязких сжимаемых жидкостей [100]. Здесь

- $\vec{u}^{(i)}, i = 1, 2$, - поле скоростей i -той компоненты смеси, заполняющей некоторую область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $x = (x_1, x_2, x_3)$;
- $\rho_i, i = 1, 2$, - скалярные поля плотностей составляющих компонент;
- давление p_i i -той компоненты предполагается известной достаточно гладкой функцией плотности ρ_i ;
- слагаемые $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)}a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)})$ характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси [19, 36].

Предполагается, что постоянные коэффициенты вязкости $\mu_{ij}, \lambda_{ij}, i, j = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\mu_{11} > 0, \mu_{22} > 0, \mu_{11} \cdot \mu_{22} - \mu_{12} \cdot \mu_{21} \neq 0, \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \lambda_{ij} + \mu_{ij}, \chi_{11} > 0, \chi_{22} > 0, \chi_{11} \cdot \chi_{22} - \chi_{12} \cdot \chi_{21} \neq 0.$$

Неравенства (2) отражают факт эллиптичности по Петровскому [11] дифференциального оператора

$$L(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 L_{1j}(\vec{u}^{(j)}) \\ \sum_{j=1}^2 L_{2j}(\vec{u}^{(j)}) \end{pmatrix}, \quad L_{ij}(\vec{u}) = -\mu_{ij}\Delta\vec{u} - (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\operatorname{div}\vec{u}.$$

В целом уравнения (1) представляют собой весьма сложную систему составного типа: уравнения импульсов (1a), (1b) являются эллиптической системой относительно искомых функций $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$, а уравнения неразрывности (1c) можно трактовать как уравнения первого порядка относительно плотностей ρ_1 , ρ_2 .

Вопросы глобальной корректности краевых задач для нестационарных уравнений движения многоскоростных континуумов вида (1), т.е. для уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_i \vec{u}^{(i)}) + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i &= \sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) + \vec{J}^{(i)}, \\ \partial_t(\rho_i) + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) &= 0, \\ p_i &= \rho_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 1, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{3}$$

начали изучаться с 1978 года: А. В. Кажиховым и А. Н. Петровым [18] была доказана глобальная по времени теорема существования сильного решения начально-краевой задачи в случае одномерного движения с плоскими волнами, когда решение зависит лишь от одной пространственной переменной. В работах [12, 46] получены результаты о стабилизации решения данной задачи и дано обобщение на случай неизотермического движения.

Первые результаты для модели смеси в случае более одной пространственной переменной получены J. Frehse, S. Goj, J. Malek. В [70] доказано существование слабых решений во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ линейной системы типа Стокса

$$\begin{aligned} \nabla p_i &= \sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) + p_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \\ \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) &= 0, \\ p_i &= \rho_i(\rho_1 + \rho_2)^{\gamma-1}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{4}$$

с условиями

$$\vec{u}^{(i)} \rightarrow 0, \quad \rho_i \rightarrow \rho_{i\infty} \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \quad \text{где} \quad \rho_{i\infty} \text{ заданы.} \tag{5}$$

В [71] получен результат о единственности решения задачи (4)-(5) при условии, что массовые силы $\vec{f}^{(i)}$ и слагаемые $\vec{J}^{(i)}$, учитывающие обмен импульсом между компонентами смеси, равны нулю.

Frehse J. и Weigant W. [72] провели исследование квазистационарной модели смеси сжимаемых жидкостей

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) &= 0, \\ \nabla p_i &= \sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

в ограниченной области со специальными граничными условиями

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

В работах Н. А. Кучера и Д. А. Прокудина [21, 22] построены стационарные решения первой краевой задачи для полных уравнений (1) в случае трех пространственных переменных, а в [23] доказано существование слабых решений системы уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей с учетом теплопроводности. Работы [20, 24–26] содержат доказательство глобальной корректности начально-краевой задачи для нестационарных баротропных течений смеси вязких сжимаемых жидкостей.

Другие модели движения смесей вязких жидкостей в одномерном случае изучались в работах А. А. Папина [42–45].

В монографии А. М. Блохина и В. Н. Доровского [9] представлены математические модели многоскоростных сред и, в частности, изучены некоторые вопросы (проблемы симметризации, корректность краевых задач об устойчивости сильных разрывов) связанные с математическими моделями двухскоростных сред.

В настоящей диссертационной работе изучается задача об обтекании компактного препятствия трехмерным потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей в следующей постановке.

Область течения представляет собой область $\Omega = B \setminus S$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, где B - ограниченное множество с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 , S - компактное множество с достаточно гладкой границей ∂S , лежащее строго внутри B .

Пусть $\vec{U}^{(j)}$, $j = 1, 2$ – заданные во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ векторные поля класса $C^3(\mathbb{R}^3)$ ($\vec{U}^{(j)}$ можно трактовать как вектор скорости j -ой компоненты на бесконечности),

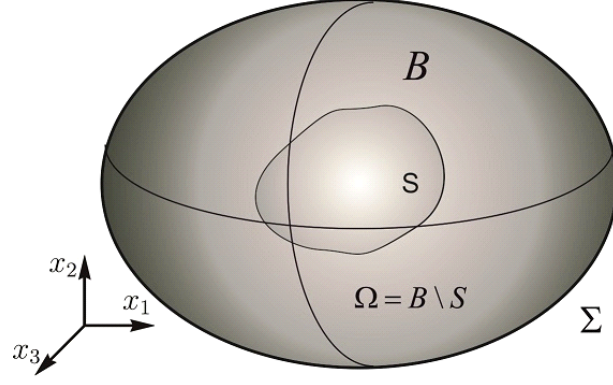


Рис. 1: Область $\Omega = B \setminus S \subset \mathbb{R}^3$, заполненная бинарной смесью вязких сжимаемых жидкостей.

обращающиеся в нуль в окрестности множества S . На границе Σ области B , выделим участки «втекания»: $\Sigma_{in}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} < 0\}$, $j = 1, 2$, и участки «вытекания»: $\Sigma_{out}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} > 0\}$, $j = 1, 2$, где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе Σ .

Требуется найти поля скоростей $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$ и поля плотностей ρ_1 , ρ_2 смеси, удовлетворяющие системе уравнений (записанных в безразмерной форме [76])

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) + \text{Re} \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} + \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2} \nabla p_i(\rho_i) + (-1)^{(i)} a (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (6a)$$

$$\text{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (6b)$$

$$L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) = -\mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \text{div} \vec{u}^{(j)}, \quad i, j = 1, 2,$$

и граничным условиям

$$\vec{u}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S, \quad \rho_j = \rho_j^0 \text{ на } \Sigma_{in}^j, \quad j = 1, 2, \quad (6c)$$

где ρ_j^0 , $j = 1, 2$ – заданные положительные постоянные. Символы Re и Ma обозначают соответственно числа Рейнольдса и Маха; a – заданное положительное число.

Цели и задачи диссертационной работы:

- Исследование корректности задачи обтекания семейства препятствий потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Построение сильного решения.
- Исследование зависимости решений задачи обтекания (сформулированной в предыдущем пункте) от формы области течения.

- Доказательство существования материальных производных от решения краевой задачи вида (6).
- Исследование дифференцируемости по области решений краевой задачи и функционала сопротивления препятствия $J_D(S)$ набегающему потоку смеси вязких сжимаемых жидкостей.

$$J_D(S) = -\vec{U}^\infty \sum_{i=1}^2 \int_{\partial S} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} I \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) I \right) \cdot \vec{n} ds.$$

Большая часть известных результатов для уравнений Навье-Стокса сжимаемых вязких жидкостей и тем более для уравнений смесей таких сред касается потоков в областях, ограниченных непроницаемыми стенками, в то время как результаты исследований неоднородных граничных задач (таковой является задача (6)) остаются достаточно скромными. Из работ, посвященных последней проблеме, укажем статью [89], в которой доказана теорема существования для нестационарных уравнений Навье-Стокса вязкой сжимаемой жидкости при постоянных граничных условиях, и работу [77], в которой установлено существование слабого решения уравнений баротропных течений вязкого газа в выпуклых областях с выходным отверстием, не зависящим от временной переменной. Локальные сильные решения (близкие к равномерному потоку) стационарных задач с неоднородными краевыми условиями исследованы в работах [67, 85, 86] для двумерных областей в предположении, что на границе области течения поле скоростей близко к заданному постоянному. Важные результаты о существовании сильных решений неоднородных краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса в случае малых чисел Рейнольдса и Маха получены в работах [47, 92, 93].

С краевыми задачами механики сплошных сред тесно связаны вариационные задачи по определению оптимальных форм конструкций. Интерес к исследованию в области оптимального проектирования значительно возрос в связи с интенсивным развитием авиационной и космической техники, судостроения, точного машиностроения. На основе оптимального проектирования достигается значительное снижение веса летательных аппаратов, улучшение механических характеристик конструкций. Таким образом исследования в этой области имеют несомненное прикладное значение.

Проблемы оптимального управления имеют и теоретическое значение. Представляет интерес выделение и исследование новых классов математических задач в этой

области, учет при оптимальном проектировании различных физических факторов, разработка эффективных методов оптимизации.

Начиная с 80-х годов XX столетия активно изучаются задачи оптимального управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными. Управляющими параметрами в таких системах являются, чаще всего:

- I. Коэффициенты дифференциальных операторов или слагаемые в дифференциальных операторах;
- II. Начальные условия;
- III. Граничные условия;
- IV. Пространственные и временные области изменения аргументов искомых функций.

В настоящей работе изучается задача управления формой области (IV). Первые задачи подобного сорта возникли в механике сплошных сред и относились к теории оптимизации конструкций [4–7, 34, 35, 48, 50, 53, 82, 88]. С математической точки зрения подобные задачи качественно отличаются от традиционных задач оптимального управления в ситуациях I–III. Первые общематематические постановки задач оптимального управления формой области были сделаны в работах Ж.-Л. Лионса [31, 32]. Исследование вопросов существования оптимальных областей для эллиптических управляемых систем было проведено в работах Ю.С. Осипова и А.П. Суетова [38–40]. В работе Охезина С.П. [41] предлагается использовать метод штрафа по форме области, позволяющий свести задачу, заданную на семействе областей к задаче, определенной в заранее выбранном фиксированном множестве. Последняя по своей структуре отличается от первоначальной только наличием дополнительного слагаемого, содержащего всю информацию о форме области и имеющего билинейную структуру.

С описанием общей теории и библиографией на эту тему можно познакомиться по источникам [59, 62, 64, 65, 81, 83, 90, 104, 108].

Одними из первых работ, посвященных исследованию задач оптимального управления для уравнений Навье-Стокса, являются работы Фурсикова А.В. [54–56]. Их автору принадлежит большое количество работ по данной тематике с полным списком которых (до 1999г.) а также с общей теорией оптимального управления для систем уравнений с частными производными, можно познакомиться по его книге [57]. Здесь же в [57] изучена задача о минимизации силы сопротивления тела, движущегося в жидкости,

заполняющей пространство, причем минимизация производилась за счет управления скоростью жидкости на границе тела. Указанная задача была сведена к исследованию оптимального управления двумерным потоком жидкости, обтекающим двумерную ограниченную область с управлением на границе этой области. Проведено доказательство разрешимости указанной экстремальной задачи и вывод системы оптимальности. Из работ данного автора, вышедших после 2000 г. отметим работы [58, 73, 74], посвященные трехмерным нестационарным течениям жидкости. Здесь рассматриваются задачи минимизации работы, производимой вязкой несжимаемой жидкостью, обтекающей ограниченное трехмерное тело. При этом минимизация проводится за счет управления скоростью жидкости с границы обтекаемого тела.

В настоящее время теория управления течением вязкой несжимаемой жидкости — это достаточно обширная область современной математической физики. Изложение состояния теории в случае стационарного потока жидкости имеется в монографиях Алексеева Г.В. и Терешко Д. А. [2] и Алексеева Г.В. [3].

Первый глобальный результат о зависимости от области решений сжимаемых уравнений Навье-Стокса принадлежит Файрайзелу [68], который затем получил развитие в серии работ [92–97]. В этих работах предложен также алгоритм вычисления производных функционала сопротивления, определенного на семействе областей. В монографии P. Plotnikov, J. Sokolowski [92] представлена математическая теория оптимизации формы в аэродинамике и изложены новые результаты для сжимаемых уравнений Навье-Стокса.

Современный обзор по задачам оптимизации формы содержится в монографии [90], в которой детально описываются современные достижения в оптимизации формы для эллиптических краевых задач. Здесь представлен широкий спектр примеров и методов использования современной математики к оптимизации формы.

Топологическая производная в [90] определяется как первое приближение асимптотического разложения заданного функционала относительно малого параметра, который измеряет размер возмущений области. За последнее десятилетие топологический асимптотический анализ расширял область исследования как в теоретическом так и в численном направлении. Оптимизация формы — одно из его приложений. Авторами A. Novotny, J. Sokolowski [90] представлена теория, которая объединяет классический анализ чувствительности в оптимизации формы с асимптотическим анализом

посредством построения асимптотических разложений для эллиптических краевых задач. Представленная теория топологических производных является естественным следствием техники анализа чувствительности формы, развитой в монографии [104] J. Sokolowski, J.-P. Zolesio.

Дифференцируемость по области решений неоднородных краевых задач для стационарных уравнений Навье - Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости и функционалов от этих решений исследовалась в работах J. Simon [101], J. A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Simon [61], J. A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Lemoine, J. Simon [60], T. Slawig, [102, 103].

Обзор результатов, посвященных численным методам и приложениям оптимизации формы представлен в [63, 66, 79, 80, 87].

Задачи оптимизации формы для нестационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкой сжимаемой жидкости исследовалась в работах E. Feireisl, A. H. Novotny, H. Petzeltova [69], E. Feireisl [68], Z. Tan, Y.H. Zhang [105], P. I. Plotnikov, J. Sokolowski [98, 99].

Краткое изложение содержания работы

В первой главе приводятся некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, которые используются в основной части диссертации. В первом параграфе этой главы приводятся необходимые сведения из теории интерполяции, функциональные пространства типа Соболева-Слободецкого с дробными показателями дифференцируемости, негативные пространства, теоремы вложения, оценки классических операторов векторного анализа в специальных функциональных пространствах, специальные оценки сложных функций, некоторые теоремы о разрешимости операторных уравнений, оценки норм и разложения матричнозначных функций. Материал второго параграфа касается результатов о разрешимости классической задачи Стокса и некоторых ее модификаций, а также о разрешимости краевых задач для уравнений переноса в различных функциональных пространствах.

Вторая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящается исследованию разрешимости неоднородной краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей и анализу зависимости ее решения от деформаций области течения.

Первый параграф содержит постановку задачи об обтекании семейства компактных препятствий, которая заключается в следующем:

Область течения смеси вязких сжимаемых жидкостей представляет собой область $\Omega = B \setminus S$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, где B - ограниченное множество (например шар достаточно большого радиуса) с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 , S - компактное множество с границей ∂S класса C^3 , лежащее строго внутри B . Пусть $x \mapsto \vec{T}(x)$ обозначает векторное поле класса $C^2(\mathbb{R}^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ . Определим отображение $x \mapsto y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \vec{T}(x)$, задающее возмущение формы обтекаемого препятствия S . Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ - возмущенное обтекаемое препятствие.

Стационарное движение смеси в области Ω_ε описывается следующими уравнениями (записанными в безразмерной форме):

$$\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right] - \operatorname{Re} \bar{\rho}_{i\varepsilon} (\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} \nabla p_i(\bar{\rho}_{i\varepsilon}) + (-1)^{i+1} a \left(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, i = 1, 2, \quad (7a)$$

$$\operatorname{div}(\bar{\rho}_{i\varepsilon} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, i = 1, 2, \quad (7b)$$

где $\vec{u}_\varepsilon^{(1)}, \vec{u}_\varepsilon^{(2)}$ обозначают поля скоростей компонент смеси ($\vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, 2$); $\bar{\rho}_{1\varepsilon}, \bar{\rho}_{2\varepsilon}$ - функции плотностей компонент ($\bar{\rho}_{i\varepsilon} : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^+, i = 1, 2$), а соответствующие давления $p_{i\varepsilon} = p_{i\varepsilon}(\bar{\rho}_{i\varepsilon}), i = 1, 2$, предполагаются известными функциями из $C^2(\mathbb{R}^+)$; постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} удовлетворяют условиям (2). Слагаемые $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)} a (\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}), a = \operatorname{const} > 0, i = 1, 2$, характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси. Уравнения (7a) и (7b) отражают соответственно законы сохранения импульсов и массы компонент смеси.

Относительно векторных полей $\vec{U}^{(j)}, j = 1, 2$ и структуры участков «втекания» Σ_{in}^j и участков «вытекания»: Σ_{out}^j предполагаются выполненными следующие условия.

Условие 0.1. Множества $\Gamma^j = cl \Sigma_{in}^j \cap (\Sigma \setminus \Sigma_{in}^j), j = 1, 2$, («характеристические» части поверхности) представляют собой замкнутые одномерные многообразия, такие что $\Sigma = \Sigma_{in}^j \cup \Gamma^{(j)} \cup \Sigma_{out}^j$ и кроме того:

$$\bullet \int_{\Sigma} \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} ds = 0, j = 1, 2;$$

- существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla \left(\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} \right) > C > 0 \text{ на } \Gamma^j, \quad j = 1, 2.$$

К уравнениям (7a), (7b) присоединим граничные условия

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}_\varepsilon^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon, \quad \bar{\rho}_{i\varepsilon} = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2, \quad (7c)$$

где ρ_j^0 , $j = 1, 2$, - заданные положительные постоянные.

Задачу (7) удобно свести к краевой задаче в невозмущенной области Ω для однопараметрического семейства дифференциальных уравнений с возмущенными коэффициентами. С этой целью вводятся функции $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$ и $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, 2$, определенные в Ω согласно формулам:

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) = \mathbf{N}(x) \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x + \varepsilon \vec{T}(x)), \quad \rho_{i\varepsilon}(x) = \bar{\rho}_{i\varepsilon}(x + \varepsilon \vec{T}(x)), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $N(x) = (\det M(x))M^{-1}(x)$, $M(x) = I + \varepsilon D\vec{T}(x)$, $D\vec{T}(x) = \left\{ \frac{\partial T_i(x)}{\partial x_j} \right\}$ - матрица Якоби отображения $x \mapsto \vec{T}(x)$.

Доказывается, что если $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(y), \bar{\rho}_{i\varepsilon}(y))$, $i = 1, 2$, - решение задачи (7), то пары $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x), \rho_{i\varepsilon}(x))$, $i = 1, 2$, определенные по формулам (8) являются решением следующей задачи (индекс ε для краткости записи опущен)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - \nabla q_i = \\ & = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}) + \text{Re } \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\text{div} \vec{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j - \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \text{ в } \Omega, \quad (9b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j = \rho_i \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \text{ в } \Omega, \quad (9c)$$

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \quad \rho_i = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2, \quad (9d)$$

Здесь $q_i = - \sum_{j=1}^2 g^{-1} (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \text{div} \vec{u}^{(j)} + \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2} p_i(\rho_i)$, $i = 1, 2$, - эффективные вязкие потоки; $g = g(x; N) = \sqrt{\det N(x)}$; линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ и нелинейное отображение $\mathcal{B}$ определены по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{u}) &= \mathcal{A}(\vec{u}; N) = \Delta \vec{u} - (\mathbf{N}^T)^{-1} \text{div} (g^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u})), \\ \mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}) &= \mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}; N) = \rho (\mathbf{N}^T)^{-1} (\vec{u} \cdot \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{w})), \\ \mathcal{S}(\vec{u}) &= \mathcal{S}(\vec{u}; N) = g \cdot a (\mathbf{N}^T)^{-1} \mathbf{N}^{-1} \vec{u}; \end{aligned} \quad (10)$$

γ_{ij} - элементы матрицы $\varkappa^{-1}$, обратной к матрице $\varkappa$, элементы которой есть $\mu_{ij} + \lambda_{ij}$, $i, j = 1, 2$; $\sigma_{ij} = \frac{Re}{Ma^2} \gamma_{ij}$.

Решение краевой задачи (9) строится в виде возмущения специальным образом выбранного потока. Более точно, решение $\vec{u}^{(i)}, \rho_i, q_i, i = 1, 2$, задачи (9) ищется в виде:

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}, \quad \rho_i = \rho_i^* + \varphi_i, \quad q_i = q_i^* + \pi_i + \Lambda \cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j, \quad (11)$$

где $\rho_i^* = \rho_i^0 = const$, $\Lambda = \frac{Re}{Ma^2}$, m_j - постоянные, служащие инструментом контроля масс компонентов смеси в области Ω , $\vec{u}_*^{(i)}, q_i^{(*)}, i = 1, 2$, - достаточно гладкое решение следующей задачи типа Стокса

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}_*^{(j)} - \nabla q_i^* &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \text{div} \vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \vec{u}_*^{(i)} &= \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \quad \Pi q_i^* = q_i^*, \quad i = 1, 2, \quad (\Pi q = q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q dx). \end{aligned} \quad (12)$$

В итоге основным объектом исследования становится задача для возмущений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{v}^{(j)} - \nabla \pi_i &= \\ = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}; N) + Re \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}; N) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}; N) &\text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\text{div} \vec{v}^{(i)} = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i \text{ в } \Omega, \quad (13b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i + \tau_{ii} \varphi_i = \Psi_i[\vec{\theta}] + g m_i \rho_i \text{ в } \Omega, \quad (13c)$$

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \Pi \pi_i = \pi_i, \quad (13d)$$

$$\begin{aligned} \vec{m} &= (m_1, m_2)^T, \quad \vec{m} = (kI - A)^{-1} \vec{f}, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \vec{f} = (f_1, f_2)^T, \\ k &= \int_{\Omega} g dx, \quad a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} g \cdot \rho_j \cdot \zeta_i^{(j)} dx, \quad f_i = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \zeta_i^{(j)} \cdot \Psi_j[\vec{\theta}] - g \Phi_i[\vec{\theta}] \right) dx; \end{aligned} \quad (13e)$$

$$-\text{div}(\vec{u}^{(i)} \cdot \zeta_j^{(i)}) + \tau_{ii} \cdot \zeta_j^{(i)} = \tau_{ji} g \text{ в } \Omega, \quad \zeta_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \quad i, j = 1, 2. \quad (13f)$$

Здесь τ_{ij} - элементы матрицы $\mathcal{T} = R^* \cdot \varkappa^{-1} \cdot P^*$,

$$P^* = P(\rho^*) = \begin{pmatrix} p'_1(\rho_1^*) & 0 \\ 0 & p'_2(\rho_2^*) \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} \rho_1^* & 0 \\ 0 & \rho_2^* \end{pmatrix},$$

$$\Phi_i[\vec{\theta}] = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} (q_j^* + \pi_j) - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} H_j(\varphi_j), \quad i = 1, 2,$$

$$H_j(\varphi_j) = p_j(\rho_j^* + \varphi_j) - p_j(\rho_j^*) - p'_j(\rho_j^*) \varphi_j,$$

$$\Psi_1[\vec{\theta}] = -g\tau_{12}\varphi_2 - g\frac{1}{\rho_1^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{1j}\varphi_1\varphi_j + g\rho_1\Phi_1[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{11}\varphi_1,$$

$$\Psi_2[\vec{\theta}] = -g\tau_{21}\varphi_1 - g\frac{1}{\rho_2^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{2j}\varphi_2\varphi_j + g\rho_2\Phi_2[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{22}\varphi_2.$$

Второй параграф посвящается исследованию корректности задачи о возмущениях (13), где доказана теорема существования.

Теорема 0.2. Пусть поверхность Σ и векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условию 0.1. Тогда найдутся такие числа $\sigma^* > 1$ и $\tau^* \in (0, 1)$, что если матрица N выбрана из условия $\|I - N\|_{l_2(\Omega)} \leq \tau^2, \tau \in (0, \tau^*], p_j(\rho_j) \in C^3(0, \infty), j = 1, 2$, а параметры задачи таковы, что $\frac{1}{\Lambda} \leq \tau^2, \text{Re} \leq \tau^2, a \leq \tau^2, |\tau_{12}| \leq \tau, |\tau_{21}| \leq \tau, \tau_{ii} \geq \sigma^*, i = 1, 2, \tau \in (0, \tau^*]$, то задача (13) имеет решение $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$, $m_i, \zeta_i^{(j)}, i, j = 1, 2$, такое, что $\vec{\theta} \in V^{s,r} \times X^{s,r}$, $m_i \in \mathbb{R}, \zeta_i^{(j)} \in X^{s,r}$, где показатели $s \in (0, 1), r \in (1, \infty)$ удовлетворяют условиям $s \cdot r > 3, 2s - \frac{3}{r} < 1$. При этом вектор $\vec{\theta}$ принадлежит шару B_τ радиуса τ с центром в нуле пространства $V^{s,r} \times X^{s,r}$.

Здесь $V^{s,r}, X^{s,r}$ обозначают пространства

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), \quad V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),$$

где $W^{s,r}(\Omega)$ (s - вещественное число, $1 \leq r < \infty$) - стандартное пространство Соболева-Слободецкого (более подробно об этом см. в гл. 1). Принадлежность векторной величины $\vec{F}$ прямому произведению пространств $W_1 \times W_2$ следует понимать в том смысле, что $\vec{F}$ составлен из двух компонентов (векторных или скалярных), разделенных точкой с запятой $\vec{F} = (F_1; F_2)$ и при этом $F_1 \in W_1, F_2 \in W_2$. Если $W_1 = W_2 = W$, то пишем $\vec{F} \in W$ и компоненты вектора разделяем запятой.

Здесь уместно описать и некоторые другие функциональные пространства, которые встретятся в дальнейшем тексте. Через $W_0^{s,r}(\Omega)$, $0 \leq s \leq 1$ обозначается замкнутое подпространство $W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, состоящее из всех функций $u \in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль вне области Ω . Для $0 < s < 1, 1 < r < \infty$ обозначим через $W_0^{s,r}(\Omega)$ интерполяционное пространство $[W_0^{0,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)]_{s,r}$ с нормой, определенной методом вещественной

интерполяции. Пусть $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Через $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ обозначим замыкание $L^r(\Omega)$ относительно нормы

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)} = \sup_{u \in \mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} u \cdot v dx \right|.$$

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} = 1$$

Пространство $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ топологически и алгебраически изоморфно Банахову пространству $\left(\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)\right)'$, сопряженному $\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)$, и может быть отождествлено с ним.

Для любых $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$, Банахово пространство $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ представляет собой замыкание $L^r(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)} = \|\mathcal{L}_v\|_{(W^{s,r'}(\Omega))'},$$

где $\mathcal{L}_v(u) = \langle v, u \rangle = \int_{\Omega} v(x) \cdot u(x) dx$ - непрерывный функционал на пространстве $W^{s,r'}(\Omega)$, непрерывно вложенном в $L^{r'}(\Omega)$. Если Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса C^1 , то $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ алгебраически и топологически изоморфно двойственному пространству $(W^{s,r'}(\Omega))'$ и может быть отождествлено с ним. Введем обозначения

$$\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \quad Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

$$\mathcal{E}^{s,r} = Z^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{s,r} = V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}.$$

Важнейшим этапом исследования задачи оптимизации формы является доказательство единственности решения задачи (13) и дифференцируемости ее решения относительно параметра ε . Для этого прежде всего необходимо исследовать зависимость этих решений от матрицы N , чему посвящается **третий параграф** второй главы. На данном этапе структура матрицы N не имеет значения и поэтому сформулированные ниже результаты справедливы для произвольной гладкой матричнозначной функции $N(x)$, $x \in \Omega$.

Линейная задача для разности. Для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$,

$$\vec{q}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}; \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \zeta_{1i}^{(1)}, \zeta_{2i}^{(1)}, \zeta_{1i}^{(2)}, \zeta_{2i}^{(2)}; m_1^i, m_2^i), i = 0, 1,$$

решений задачи (13), построенных в теореме 0.2 и соответствующих различным матрицам $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$, введем обозначения

$$\begin{aligned}\vec{w}^{(j)} &= \vec{v}_0^{(j)} - \vec{v}_1^{(j)}, \quad \omega_j = \pi_j^0 - \pi_j^1, \quad \psi_j = \varphi_j^0 - \varphi_j^1, \quad n_j = m_j^0 - m_j^1, \\ \xi_j^{(k)} &= \zeta_{j0}^{(k)} - \zeta_{j1}^{(k)}, \quad k, j = 1, 2.\end{aligned}\tag{14}$$

Из (13) следует, что вектор-функция

$$\vec{q}_0 - \vec{q}_1 = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$$

является решением следующей линейной задачи

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \\ &+ \text{Re} \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i + (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})),\end{aligned}\tag{15a}$$

$$\text{div} \vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d,\tag{15b}$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \text{ в } \Omega,\tag{15c}$$

$$-\text{div}(\vec{u}_0^{(i)} \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} = \text{div}(\vec{w}^{(i)} \zeta_{j1}^{(i)}) + \tau_{ji} d \text{ в } \Omega,\tag{15d}$$

$$\vec{w}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \omega_i = \Pi \omega_i, \quad \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i,\tag{15e}$$

$$n_i = \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^2 (\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)}) \right] dx, \quad i, j = 1, 2.\tag{15f}$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\mathcal{A}_k(\vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad \mathcal{B}_k(\rho, \vec{u}, \vec{w}) = \mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad \mathcal{S}_k(\vec{w}) = \mathcal{S}(\vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad k = 0, 1,$$

$$\mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) = \mathcal{B}_0(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{w}^{(i)}),\tag{16}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_0(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}) - \mathcal{S}_1(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) \right) + \text{Re} \left(\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) - \mathcal{B}_1(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) \right), \\ d &= g_0 - g_1, \quad g_k = \sqrt{\det \mathbf{N}_k}.\end{aligned}\tag{17}$$

Символы χ_{ik}^0 обозначают элементы матрицы $(k(\mathbf{N}_0)I - A(\mathbf{N}_0, \vec{\theta}_0))^{-1}$. Коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i, \delta_i, \hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i, \tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\delta}_i, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (15b), (15c) и (15f) зависят от решений $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$ и рассматриваются как известные функции.

Сопряженная задача. Задача (15) для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ имеет ту особенность, что к уравнениям (15с), входящим в состав этой задачи неприменимы известные результаты о транспортных уравнениях, в силу того, что слагаемое $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ не удовлетворяет нужным условиям гладкости (не является ни гладким, ни ограниченным). Однако из теоремы существования вытекает принадлежность слагаемых $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ пространству $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, двойственному к $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и поэтому возникает возможность трактовать разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ как очень слабое решение задачи (15). В связи с этим сформулируем сопряженную задачу следующим образом.

Для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1, 2$ найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы $n_i^*, i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* - \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})) - \text{Re} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ & + (-1)^{i+1} \mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\text{div} \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} & -\text{div}(\psi_i^* \vec{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = \text{Re} \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ & + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (18c)$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ij} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad (18d)$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, \quad (18e)$$

$$\vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i, j = 1, 2. \quad (18f)$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{M}_i$ определены формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(\vec{h}) &= \rho_i^1 \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} - (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \text{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})), \\ \mathcal{M}_i(\vec{h}) &= (\vec{u}_0^{(i)} \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)})) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Дальнейшее содержание этого параграфа посвящается доказательству существования и единственности сильных и слабых решений сопряженной задачи (18). Эти результаты позволяют вывести оценки норм разностей $\vec{w}^{(i)}, \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(j)}, n_i$.

Четвертый параграф второй главы содержит доказательство теоремы единственности и доказательство относительной компактности совокупности решений задачи о возмущениях $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m})$ в пространстве $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$

В **третьей** главе проводится исследование дифференцируемости по области функционала сопротивления и решений краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей.

Доказательство дифференцируемости существенным образом использует понятие так называемых материальных производных от решения задачи (13), описанию которых и выводу уравнений для них посвящается **первый** параграф третьей главы.

Так как решение $\vec{q} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}; m_1, m_2)$ задачи (13) является функцией пространственной переменной $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ и параметра ε , положим $\vec{q}(\varepsilon) = \langle \langle x \rightarrow q(x, \varepsilon) \rangle \rangle$ и будем рассматривать $\vec{q}$ (и, разумеется, компоненты $\vec{q}$) как функцию от ε со значениями в пространстве функций от x . Материальная производная $\vec{q}'(0) = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$ решения

$$\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(\varepsilon); \pi_1(\varepsilon), \pi_2(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(\varepsilon), \zeta_1^{(1)}(\varepsilon), \zeta_2^{(1)}(\varepsilon), \zeta_1^{(2)}(\varepsilon), \zeta_2^{(2)}(\varepsilon); m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon))$$

задачи (13) при $\varepsilon = 0$ определяются следующим образом

$$\vec{w}^{(j)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{w}_\varepsilon^{(j)}, \quad \omega_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{j\varepsilon}, \quad \psi_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{j\varepsilon}, \quad \xi_j^{(i)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_{j\varepsilon}^{(i)}, \quad n_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n_{j\varepsilon}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_\varepsilon^{(j)} &= -\varepsilon^{-1} (\vec{v}^{(j)}(0) - \vec{v}^{(j)}(\varepsilon)), \quad \omega_{j\varepsilon} = -\varepsilon^{-1} (\pi_j(0) - \pi_j(\varepsilon)), \\ \psi_{j\varepsilon} &= -\varepsilon^{-1} (\varphi_j(0) - \varphi_j(\varepsilon)), \quad \xi_{j\varepsilon}^{(i)} = -\varepsilon^{-1} (\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon)), \\ n_{j\varepsilon} &= -\varepsilon^{-1} (m_j(0) - m_j(\varepsilon)), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

при условии, что пределы в (20) существуют в некотором смысле.

Уравнения для материальных производных могут быть легко получены формально подстановкой $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и $\vec{q}(\varepsilon)$ в уравнения (13) и дифференцированием результата по ε в нуле. Эта формальная процедура дает следующую систему уравнений и краевых

условий для материальных производных.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i &= \mathfrak{L}^* (\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i^* + (-1)^i (\mathcal{E}^* + a (\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})) \text{ в } \Omega, \\
\operatorname{div} \vec{w}^{(i)} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^* \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}^* \omega_j + \gamma_i^* n_i + \delta_i^* d^* \text{ в } \Omega, \\
\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i &= -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij}^* \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij}^* \omega_j + \hat{\gamma}_i^* n_i + \hat{\delta}_i^* d^* \text{ в } \Omega, \\
-\operatorname{div} \left(\vec{u}^{(i)}(0) \xi_j^{(i)} \right) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} &= \operatorname{div} \left(\vec{w}^{(i)} \zeta_j^{(i)}(0) \right) + \tau_{ji} d^* \text{ в } \Omega, \\
z \vec{w}^{(i)} &= 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \omega_i = \Pi \omega_i, \quad \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \\
n_i &= \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k^* d^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\alpha}_{kj}^* \psi_j + \tilde{\beta}_{kj}^* \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj}^* \xi_j^{(k)} \right) \right] dx, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{22}$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{(i)}(0) &= \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(0), \quad \rho_i(0) = \rho_i^* + \varphi_i(0); \\
\mathcal{D}_i^* &= -\operatorname{Re} \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)) + \mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) + \mathbb{D}^T \Delta \vec{u}^{(i)}(0) + \Delta (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)));
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^* (\psi_i, \vec{w}^{(i)}) &= \operatorname{Re} (\psi_i \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0) + \rho_i(0) \vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0) + \rho_i \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{w}^{(i)}) ; \\
\mathcal{E}^* &= a \mathbb{T} (\vec{u}^{(2)}(0) - \vec{u}^{(1)}(0)) ; \quad d^* = \operatorname{div} \vec{T}; \quad \mathbb{D} = \operatorname{div} \vec{T} I - D \vec{T}; \quad \mathbb{T} = \operatorname{div} \vec{T} I - D \vec{T} - (D \vec{T})^T.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*, \gamma_i^*, \delta_i^*, \hat{\alpha}_{ij}^*, \hat{\beta}_{ij}^*, \hat{\gamma}_i^*, \hat{\delta}_i^*, \tilde{\alpha}_{ij}^*, \tilde{\beta}_{ij}^*, \tilde{\gamma}_{ij}^*, \tilde{\delta}_i^*, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (22) зависят от решения задачи (13), соответствующего $\varepsilon = 0$.

Для доказательства разрешимости задачи (22) вводится в рассмотрение сопряженная задача в следующей постановке: для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1, 2$, найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы $n_i^*, i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) - \operatorname{Re} \mathcal{H}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + (-1)^{i+1} a (\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i(0) + \\
+ \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \\
\operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega, \\
\vec{w}_*^{(j)} = 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i = 1, 2;
\end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}(\psi_i^* \vec{u}^{(i)}(0)) + \tau_{ii} \psi_i^* = \operatorname{Re} \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji}^* + \mu_{kj} \alpha_{ji}^* \omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2;
\end{aligned} \tag{24b}$$

$$\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij}^* \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2; \tag{24c}$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i^* \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i^* \psi_i^* \right) dx + s_i, i = 1, 2; \tag{24d}$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i^*$ и $\mathcal{M}_i^*$ определены формулами

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_i^* (\vec{h}) &= \rho_i(0) \nabla (\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} - \operatorname{div} (\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \otimes \vec{h}), \\
\mathcal{M}_i^* (\vec{h}) &= (\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{h}, i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{25}$$

В первом параграфе третьей главы доказано, что для каждой вектор функции $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, задача (24) имеет единственное решение $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$.

Во **втором** параграфе третьей главы доказана теорема о существовании материальных производных, то есть что существует такой $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i) \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ что $\vec{w}_\varepsilon^{(i)} \rightarrow \vec{w}^{(i)}$ слабо в $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $(\omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}) \rightarrow (\omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ слабо в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $n_{i\varepsilon} \rightarrow n_i$ в $\mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, для любых $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, выполнено тождество

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_i s_i \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^*) \right) \right\} dx,
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, - решение задачи (24); $\mathcal{D}_i^*$, $\mathcal{E}^*$ и d^* определены формулами (23). Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ обозначают соотношение двойственности между парами пространств $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{s,r}(\Omega)$ соответственно для $s \in (0, 1)$, $r \in (1, \infty)$. Тождество (26) означает, что $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$ является очень слабым решением задачи (22).

Заключительный **третий** параграф третьей главы посвящается вычислению производной по области функционала сопротивления. В п.3.1 этого параграфа устанавливается связь материальной производной и производной по области. В п.3.2 получены

результаты о формуле представления производной по области функционала сопротивления. Более точно получены следующие результаты.

Каждой матрице $N(\varepsilon)$ соответствует единственное решение $\vec{q}(\varepsilon)$ задачи (13), которое в свою очередь порождает решение задачи (9):

$$\begin{aligned}\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) &= \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon), \quad \rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon), \\ q_i(\varepsilon) &= q_i^* + \pi_i(\varepsilon) + \Lambda \cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j(\varepsilon), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{27}$$

Сила сопротивления набегающему потоку со стороны препятствия S_ε выражается посредством формулы

$$J_D(S_\varepsilon) = -\vec{U}^\infty \sum_{i=1}^2 \int_{\partial S_\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + (\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} I \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho_\varepsilon) I \right) \cdot \vec{n} ds\tag{28}$$

где $\vec{U}^\infty$ - постоянный вектор, имитирующий скорость потока на «бесконечности». Переходя в формуле (28) к невозмущенной области Ω , получаем для функционала сопротивления следующее представление

$$\begin{aligned}J_D(\Omega_\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \cdot \left\langle \int_{\Omega} Re \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right) - q_i \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx \right\rangle,\end{aligned}\tag{29}$$

где η - произвольная гладкая функция, тождественно равная 1 в окрестности препятствия S и тождественно равная нулю в окрестности границы Σ . Принимая в качестве $\vec{u}^{(i)}$, ρ_i , q_i в (29) функции (27), получим:

$$J_D(\Omega_\varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \left(\vec{U}_\infty \cdot \vec{J}_1^i(\Omega_\varepsilon) + \vec{U}_\infty \cdot \vec{J}_2^i(\Omega_\varepsilon) \right),\tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{J}_1^i(\Omega_\varepsilon) &= - \int_{\Omega} Re \eta \rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) dx, \\ \vec{J}_2^i(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega} q_i(\varepsilon) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g(\varepsilon)^{-1} \left(\mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T \mathbf{N}(\varepsilon) - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) \right) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx.\end{aligned}\tag{31}$$

В разделе 3.2 получена явная формула для производной

$$dJ_D(\Omega) \left[\vec{T} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J_D(\Omega_\varepsilon) - J_D(\Omega)) \quad (32)$$

в терминах материальных производных решений задачи (13). А именно, производная $dJ_D(\Omega) \left[\vec{T} \right]$, определяемая по формуле (32) существует и может быть представлена в виде

$$dJ_D(\Omega) \left[\vec{T} \right] = L_u \left(\vec{T} \right) + L_e \left(\vec{T} \right). \quad (33)$$

Здесь форма L_u определена равенством

$$L_u \left(\vec{T} \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\left\langle \vec{B}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, A \rangle_0 + \langle \psi_i, C_i \rangle_0 \right), \quad (34)$$

где $\vec{w}^{(i)}, \omega_i, \psi_i, i = 1, 2$ - материальные производные;

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(i)} &= \left[(\mu_{1i} + \mu_{2i}) \Delta \eta \vec{U}_\infty + Re \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \cdot \vec{U}_\infty - Re \rho_i(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \vec{U}_\infty \eta \right], \\ A &= \nabla \eta \cdot \vec{U}_\infty, \quad C_i = -Re \eta (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{U}_\infty. \end{aligned} \quad (35)$$

L_e имеет вид:

$$\begin{aligned} L_e \left(\vec{T} \right) &= - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty Re \int_{\Omega} [\rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)] dx + \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} (q_i(0) \mathbb{D}^T) \nabla \eta dx - \\ &- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(0))) \right) \nabla \eta dx + \\ &- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} [(\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(0)))^T] \right) \nabla \eta dx + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(0))^T - \text{div} (\vec{u}^{(j)}(0)) \mathbf{I}) \right) (D\vec{T})^T \nabla \eta dx, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\mathbb{D} = \text{div} \vec{T} \mathbf{I} - D\vec{T}$.

Формулы (33)-(36) показывают, что производная функционала $dJ(\Omega_\varepsilon)$ состоит из двух частей L_u и L_e . Геометрическая часть L_e - это интеграл линейной формы от $\vec{T}$ по области Ω . Коэффициенты этой формы определены через решение задачи (13) с $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ (невозмущенный случай). Следовательно, L_e нетрудно вычислить для всех гладких $\vec{T}$. Динамическая часть L_u , напротив, зависит от $\vec{T}$ неявно. Чтобы вычислить L_u следует найти очень слабое решение линеаризованной задачи, и затем подставить это решение в (34). Очень слабое решение зависит от $\vec{T}$ неявным образом. Если потребуется найти

L_u для другого векторного поля $\vec{T}$, то придется повторить все вычисления. Однако, ситуация может быть радикально улучшена, если выразить L_u через, так называемое, сопряженное состояние, чему посвящен раздел 3.3 третьего параграфа.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы из 108 наименований. Главы разбиты на параграфы. Объем диссертации составляет 151 страницы машинописного текста. Текст иллюстрируют 5 рисунков. Нумерация формул и утверждений (а также определений, замечаний и т. п.) сквозная по всему тексту вида $N.k$, где N — номер главы, k — порядковый номер формулы в данной главе (утверждения, и др.). При этом утверждения, определения и т.п.объекты находятся под единой нумерацией, т. е., например, за Утверждением $N.k$ следует Определение $N.(k+1)$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13, 15–17, 27–29, 84, 106, 106, 107].

Автор благодарен своему научному руководителю - профессору, доктору физико-математических наук Н. А. Кучеру, а также члену-корреспонденту РАН П. И. Плотникову за постоянное внимание к работе.

Глава 1

Вспомогательные сведения и обозначения

§ 1. Вспомогательные сведения из функционального анализа.

1.1. Элементы теории интерполяции.

Определение 1.1. Пара банаховых пространств $X = (X_0, X_1)$ называется интерполяционной парой, если они оба непрерывно и линейно вложены в некоторое хаусдорфово (отделимое), линейное топологическое пространство χ .

Это обстоятельство позволяет определить линейные пространства

$$\Sigma(X) = X_0 + X_1 = \{x \in \chi : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}, \quad \Delta(X) = X_0 \cap X_1, \quad (1.1)$$

и ввести в них нормы

$$\|x\|_{\Sigma(X)} = \inf \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}, \quad (1.2)$$

$$\|x\|_{\Delta(X)} = \max \{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}. \quad (1.3)$$

Оба пространства $\Sigma(X)$ и $\Delta(X)$ являются банаховыми.

Метод вещественной интерполяции.

Опишем так называемый K -метод [1, 91].

Пусть (X_0, X_1) интерполяционная пара. Для $t \geq 0$ и $x \in \Sigma(X)$ определим так называемый K -функционал $K(t, x) = K(t, x, X)$ по формуле

$$K(t, x) = \inf \{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x_0 + x_1 = x\}, \quad (1.4)$$

При каждом $t > 0$ это норма в $\Sigma(X)$, эквивалентная исходной. При фиксированном x это непрерывная возрастающая выпуклая вверх функция переменного t [8, 52].

Функции $K(t, x, X)$ и $t^{-1}K(t, x, X)$ ограничены сверху. Более того существуют конечные пределы: $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, x, X)$ и $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}K(t, x, X)$. Отметим так же равенство

$$t^{-1}K(t, x, (X_0, X_1)) = K(t^{-1}, x, (X_1, X_0)) \quad (1.5)$$

Определение 1.2. *Вещественным интерполяционным пространством $X_{\theta,q} = [X_0, X_1]_{\theta,q}$ при $0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty$ называется линейное пространство, состоящее из всех $x \in \Sigma(X)$, для которых*

$$\|x\|_{X_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, x))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) – норма и это пространство полное. При $q = \infty$ норма определяется формулой

$$\|x\|_{X_{\theta,\infty}} = \sup_{t>0} [t^{-\theta} K(t, x)]. \quad (1.7)$$

Все пространства $X_{\theta,q}$ содержат $\Delta(X)$ и содержатся в $\Sigma(X)$. Справедливы также следующие утверждения.

Лемма 1.3. *Пусть $\Delta(X)$ плотно в $X_0 \cup X_1$. Тогда*

1. $[X_0, X_1]_{\theta,q} = [X_1, X_0]_{1-\theta,q}$;
2. $\Delta(X)$ плотно в $X_{\theta,q}$ при $q < \infty$;
3. Если $X_1 \subset X_0$, то $X_{\theta_1,q} \subset X_{\theta_2,q}$ при $\theta_2 < \theta_1$;
4. Если $q_1 < q_2$, то $X_{\theta,q_1} \subset X_{\theta,q_2}$;
5. Если X_0 и X_1 совпадают, то с ними совпадают все $X_{\theta,q}$.

Лемма 1.4. *Если $\tilde{X}_i$ – замкнутое подпространство в $X_i, i = 0, 1$. Тогда $[\tilde{X}_0, \tilde{X}_1]_{\theta,q} \subset [X_0, X_1]_{\theta,q}$ и $\|x\|_{[X_0, X_1]_{\theta,q}} \leq \|x\|_{[\tilde{X}_0, \tilde{X}_1]_{\theta,q}}$*

Лемма 1.5. *Пусть X_0, X_1 – интерполяционная пара и $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 . Пусть $0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty$. Тогда банаховы пространства $[X'_0, X'_1]_{\theta,q'}$ и $[X_0, X_1]'_{\theta,q}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, изоморфны топологически и алгебраически. Следовательно, эти пространства могут быть отождествлены.*

Пусть $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$ – две интерполяционные пары и T – линейный ограниченный оператор из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$. Обозначим сужение T на X_j через T_j , а сужение на $X_{\theta,q}$ через $T_{\theta,q}$.

Теорема 1.6. Пусть T_j – ограниченные операторы из X_j в Y_j с нормами $\|T_j\| = M_j$, ($j = 0, 1$). Тогда $T_{\theta,q}$ ограниченный оператор из $X_{\theta,q}$ в $Y_{\theta,q}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$) с нормой $M_{\theta,q}$, удовлетворяющей неравенству

$$M_{\theta,q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta. \quad (1.8)$$

1.2. Функциональные пространства.

Этот раздел содержит справочный материал относительно тех функциональных пространств, которые используются в работе. Сюда помещены также другие связанные с ними факты, которые потребуются для изложения доказательств различных утверждений.

Пусть Ω область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}$ точек $x = (x_1, x_2, x_3)$.

$C(\Omega)$ обозначает банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$ ($0 \leq k < \infty$ – целое число) – банахово пространство всех непрерывных в Ω функций u таких, что

$$D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ для всех } |\alpha| \leq k \text{ и } \|u\|_{C^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\Omega)} < \infty,$$

$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_i^{\alpha_i} u = \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Пространство $C^0(\Omega)$ отождествляется с $C(\Omega)$.

Для каждого неотрицательного $k \geq 0$ и вещественного числа $\beta \in (0, 1)$ через $C^{k+\beta}(\Omega)$ обозначаем банахово пространство всех функций $u \in C^k(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{k+\beta}(\Omega)} = \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\beta}.$$

$C^\infty(\Omega)$ – линейное пространство функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, производная $D^\alpha u$ любого порядка которых принадлежит классу $C(\Omega)$.

$C_0^\infty(\Omega)$ – линейное подпространство в $C^\infty(\Omega)$, состоящее из функций, носитель которых представляет собой компактное множество, лежащее в Ω .

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество. Через $|\Omega| = meas \Omega$ мы обозначаем меру Лебега этого множества. Через $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, (соответственно $L^\infty(\Omega)$) обозначим линейное пространство, определенных почти всюду на Ω вещественных функций $u(x)$ таких, что $|u(x)|^p$ интегрируемы (по Лебегу) на Ω . Это пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(соответственно $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$) является банаховым пространством. При $p = 2$ мы получаем гильбертово пространство $L^2(\Omega)$, норма в котором ассоциирована со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx.$$

Пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega)$ с целым неотрицательным m и $0 < p < \infty$ – это подпространство функций из $L^p(\Omega)$ все частные производные (в смысле Соболева) которых до порядка $|\alpha| \leq m$ принадлежат $L^p(\Omega)$. $W^{m,p}(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) dx.$$

Пространство $W_0^{m,p}(\Omega)$ (m – целое неотрицательное число) определим как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{m,p}(\Omega)$. В частности $H_0^m(\Omega) \equiv W_0^{m,2}(\Omega)$.

Для вещественных $s \in (0, 1)$, $r \in (1, \infty)$ функциональное пространство Соболева $W^{s,r}(\Omega)$ получается методом вещественной интерполяции между $L^r(\Omega)$ и $W^{1,r}(\Omega)$ и состоит из измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \|u\|_{L^r(\Omega)} + |u|_{s,r,\Omega}, \quad |u|_{s,r,\Omega}^r = \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^{-3} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \right)^r dx dy.$$

В общем случае пространство $W^{l+s,r}(\Omega)$, $0 < s < 1$, $1 \leq r < \infty$, $l \geq 0$ – целое число, определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{l+s,r}(\Omega)} = \|u\|_{W^{l,r}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Сформулируем теперь ряд утверждений из теории вложения функциональных пространств.

Теорема 1.7. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с границей класса C^1 , либо $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Пусть $s \cdot r > n$ и $0 \leq \alpha < s - \frac{n}{r}$. Тогда вложение $W^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\Omega)$ непрерывно. Если Ω - ограниченная область с границей класса C^1 , то вложение компактно (т.е. каждое ограниченное подмножество в $W^{s,r}(\Omega)$ является относительно компактным в $C^\alpha(\Omega)$).

Кроме того, при условии $s \cdot r > n$ справедливо неравенство

$$\|uv\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(s, r) \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Пусть Ω - ограниченная область с границей класса C^1 . Если $s \cdot r < n$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{s}{n}$, то вложение $W^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ непрерывно.

Если $s > 0$, $1 < r < q < \infty$, $l = s - \frac{n}{r} + \frac{n}{q}$, то

$$\|u\|_{W^{l,q}(\Omega)} \leq c(s, r, l, q, \Omega) \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Через $W_0^{s,r}(\Omega)$, $0 \leq s \leq 1$ обозначается замкнутое подпространство $W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, состоящее из всех функций $u \in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль вне области Ω . Для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ обозначим через $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ интерполяционное пространство $[W_0^{0,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)]_{s,r}$ с нормой, определенной методом вещественной интерполяции. Отметим, что $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega) \subset W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$ т.е. $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ состоит из всех элементов из $W^{s,r}(\Omega)$, таких что их продолжение нулем вне Ω имеет конечную $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ норму; $W_0^{1,r}(\Omega) \subset \mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ и $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$.

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$ или Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^1 .

Определим соотношение

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v dx. \quad (1.9)$$

для всех функций, для которых правая часть равенства имеет смысл. Для $r \in (1, \infty)$ каждый элемент $v \in L^r(\Omega)$ определяет линейный непрерывный функционал на $W_0^{s,r'}(\Omega)$, где $r' = \frac{r}{r-1}$, $s \geq 0$. Этот функционал мы обозначим через L_v и положим $L_v(u) = \langle u, v \rangle$.

Для элемента $v \in L^r(\Omega)$ определим $(-s, r)$ - норму как норму функционала L_v , т.е.

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{-s,r}(\Omega)} &= \sup_{u \in W_0^{s,r'}(\Omega)} |L_v(u)|. \\ \|u\|_{W_0^{s,r'}(\Omega)} &= 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Пусть $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Через $W^{-s,r}(\Omega)$ обозначим пополнение пространства $L^r(\Omega)$ относительно $(-s, r)$ -нормы, определяемой по формуле (1.10). Для целых значений s пространство $W^{-s,r}(\Omega)$ топологически и алгебраически изоморфно пространству $\left(W_0^{s,r'}(\Omega)\right)'$, сопряженному к пространству $W_0^{s,r'}(\Omega)$ [92].

Символ $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ обозначает замыкание $L^r(\Omega)$ относительно нормы

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)} &= \sup_{u \in \mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} |\langle u, v \rangle|. \\ \|u\|_{\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} &= 1 \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ топологически и алгебраически изоморфно банахову пространству $\left(\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)\right)'$, сопряженному к $\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)$ и может быть отождествлено с ним [92].

Отображение $v \mapsto L_v$, $L_v(u) = \langle v, u \rangle = \int_{\Omega} v(x) \cdot u(x) dx$, $v \in L^r(\Omega)$, $r \in (1, \infty)$, $u \in L^{r'}(\Omega)$, $r' = \frac{r}{r-1}$, определяет изометрию между пространствами $L^r(\Omega)$ и $(L^{r'}(\Omega))'$. Так как пространство $W^{s,r'}(\Omega)$, $s > 0$, непрерывно вложено в $L^{r'}(\Omega)$, то L_v является непрерывным функционалом на $W^{s,r'}(\Omega)$ с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|v\|_{(W^{s,r'}(\Omega))'} &= \sup_{u \in W^{s,r'}(\Omega)} |L_v(u)|. \\ \|u\|_{W^{s,r'}(\Omega)} &= 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Для каждого $s \in (0, 1]$ и $r \in (0, \infty)$, банахово пространство $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ определим как пополнение $L^r(\Omega)$ по норме (1.11), то есть

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)} = \|L_v\|_{(W^{s,r'}(\Omega))'}.$$

Как известно, $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ алгебраически и топологически изоморфно двойственному пространству $(W^{s,r}(\Omega))'$ и может быть отождествлено с ним. Кроме того, $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ является интерполяционным пространством

$$\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega) = [L^r(\Omega), \mathbb{W}^{-1,r}(\Omega)]_{s,r} = \left([L^{r'}(\Omega), W^{1,r'}(\Omega)]_{s,r'} \right)'.$$

1.3. Специальные функциональные пространства и неравенства

Условимся принадлежность векторной величины $\vec{F}$ прямому произведению пространств $W_1 \times W_2 \times W_3$ понимать в том смысле, что $\vec{F}$ составлен из трех компонентов

(векторных или скалярных), разделенных точкой с запятой $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$ и при этом $F_1 \in W_1$, $F_2 \in W_2$, $F_3 \in W_3$. Если $W_1 = W_2 = W_3 = W$, то пишем $\vec{F} \in W$ и компоненты вектора разделяем запятой.

Для формулировки результата о корректности краевой задачи для уравнений Стокса в пространствах Соболева-Слободецкого с вещественными показателями дифференцируемости введем следующие функциональные пространства:

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), \quad V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),$$

$$Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad T^{s,r} = W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega) \cap W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega), \quad 0 < s < 1, 1 < r < \infty,$$

с нормами, определенными соответственно по формулам

$$\|\varphi\|_{X^{s,r}} = \|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad \|v\|_{V^{s,r}} = \|v\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|v\|_{W^{2,2}(\Omega)},$$

$$\|f\|_{Z^{s,r}} = \|v\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}; \quad \|g\|_{T^{s,r}} = \|g\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} + \|g\|_{W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Для всех $s \in (0, 1)$ и $r \in (1, \infty)$ введем следующие обозначения для произведений пространств

$$\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{E}^{s,r} = Z^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{s,r} = V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}.$$

Имеют место следующие утверждения

Лемма 1.8. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная область с границей класса C^1 и $0 < s < 1 < r < \infty$. Тогда пространства $W^{s,r}(\Omega)$, $W^{s+1,r}(\Omega)$, $X^{s,r}$ и $V^{s,r}$ рефлексивны.

Лемма 1.9. Предположим, что показатели s, r удовлетворяют условиям

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad 2s - 3r^{-1} < 1, \quad sr > 3, \quad (1-s)r > 3.$$

Тогда пространство $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ содержится в $\mathcal{E}^{s,r}$ и плотно в $\mathcal{U}^{s,r}$.

Лемма 1.10. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная область с границей класса C^1 и $0 < s < 1 < r < \infty$. Тогда существует константа c , зависящая от Ω, s, r , такая что

$$\|uv\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (1.12)$$

$$\|uv\|_{X^{s,r}} \leq c\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{X^{s,r}} + c\|u\|_{X^{s,r}}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.13)$$

Если к тому же $sr > 3$, то

$$\|uv\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}\|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \quad (1.14)$$

$$\|uv\|_{X^{s,r}} \leq c\|u\|_{X^{s,r}}\|v\|_{X^{s,r}}. \quad (1.15)$$

Лемма 1.11. Пусть Ω ограниченная область с границей класса C^1 и $0 < s < 1 < r < \infty$. Тогда операторы $\operatorname{div} : W^{s,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ и $\nabla : W^{s,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ непрерывны. В частности, существует константа c , зависящая только от Ω, s, r , такая что

$$\|\operatorname{div} u\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \quad \|\nabla u\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Лемма 1.12. Пусть Ω ограниченная область с границей класса C^1 и $0 < s < 1 < r < \infty$. Тогда для каждой матричнозначной функции $\mathbf{M} \in C^1(\Omega)$ и $\vec{w} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$

$$\|\mathbf{M}\vec{w}\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c(\Omega, s, r) \|\mathbf{M}\|_{C^1(\Omega)} \|\vec{w}\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)}.$$

Лемма 1.13. Пусть показатели r и s удовлетворяют условиям

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad sr > 3, \quad (1-s)r > 3, \quad (1.16)$$

а функции $\varsigma \in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, $w \in W^{1-s,r'}(\mathbb{R}^3)$, $r' = r/(r-1)$, имеют компактные носители в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\varsigma w\|_{W^{1-s,r'}(\mathbb{R}^3)} \leq c \|w\|_{W^{1-s,r'}(\mathbb{R}^3)} \|\varsigma\|_{W^{s,r}(\mathbb{R}^3)} \quad (1.17)$$

где константа c зависит только от r, s и диаметра шара B .

Лемма 1.14. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная область с границей класса C^1 . Пусть для показателей $s \in (0, 1)$ и $r \in (0, \infty)$ выполнены неравенства

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad sr > 3, \quad (1-s)r > 3, \quad (1.18)$$

и $\varphi, \varsigma \in W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ и $\vec{w} \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. Тогда существует постоянная c , зависящая только от s, r и Ω , такая, что трилинейная форма $\mathbf{B}(\vec{w}, \varphi, \varsigma) = \int_{\Omega} \varsigma \vec{w} \cdot \nabla \varphi dx$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{B}(\vec{w}, \varphi, \varsigma)| \leq c \|\vec{w}\|_{\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\varsigma\|_{W^{s,r}(\Omega)} \quad (1.19)$$

и может быть непрерывно продолжена до $\mathbf{B} : \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. В частности,

$$\varsigma \nabla \varphi \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ и } \|\varsigma \nabla \varphi\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\varsigma\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \quad (1.20)$$

Доказательство лемм 1.8 - 1.14 имеются, например, в [92].

Оценки сложных функций.

Пусть Ω область в $\mathbb{R}^3$, где $B_K = \{x : |x| \leq K\} \subset \mathbb{R}^3$ - шар радиуса K .

Лемма 1.15. Пусть $u, v \in W^{s,r}(\Omega)$, $s \in (0, 1)$, $sr > 3$, - произвольные функции, области значений которых лежат в шаре B_K и $f \in C^2(\Omega \times B_K)$, тогда имеют место оценки

$$\|f(\cdot, u)\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(s, r)\|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)}(1 + \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}), \quad (1.21)$$

$$\|f(\cdot, v) - f(\cdot, u)\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(s, r)\|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)}(1 + \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,r}(\Omega)})\|u - v\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \quad (1.22)$$

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения (1.21). Отметим, что для каждой функции f

$$\|f\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + |f|_{s,r,\Omega}.$$

Так как функция $|f(x, u(x))|$ ограничена величиной $\|f\|_{C(\Omega \times B_K)}$, достаточно оценить $|f|_{s,r,\Omega}$. Имеем

$$|f(x, u(x)) - f(y, u(y))|^r \leq c(r)\|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)}^r(|x - y|^r + |u(x) - u(y)|^r)$$

которое вместе с неравенством $-3 - sr + r > -3$ дает

$$\begin{aligned} |f(\cdot, u)|_{s,r,\Omega}^r &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x, u(x)) - f(y, u(y))|^r |x - y|^{-3-rs} dx dy \leq \\ &\leq c\|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)}^r \times \\ &\times \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} |x - y|^{-3-rs+r} dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega} |u(x) - u(y)|^r |x - y|^{-3-rs} dx dy \right\} \leq \\ &\leq c\|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)}^r (1 + \|u\|_{s,r,\Omega}^r) \leq c\|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)}^r (1 + \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}^r). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Неравенство (1.21) доказано.

Докажем (1.22). Имеем

$$f(x, u(x)) - f(x, v(x)) = (u - v) \int_0^1 \nabla_u f(x, tu + (1-t)v) dt.$$

Согласно доказанному

$$\begin{aligned} \|\nabla_u f(\cdot, tu + (1-t)v)\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq c\|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)}(1 + \|tu + (1-t)v\|_{W^{s,r}(\Omega)}) \\ &\leq c\|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)}(1 + t\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + (1-t)\|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 \nabla_u f(\cdot, tu + (1-t)v) dt \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq \int_0^1 \|\nabla_u f(\cdot, tu + (1-t)v)\|_{W^{s,r}(\Omega)} dt \leq \\ &\leq c\|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)} \int_0^1 (1 + t\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + (1-t)\|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}) dt \leq \\ &\leq c\|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)} (1 + \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (1.14) получаем

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, v) - f(\cdot, u)\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq \|u - v\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \int_0^1 \nabla_u f(\cdot, tu + (1-t)v) dt \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c(s, r) \|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)} (1 + \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,r}(\Omega)}) \|u - v\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Лемма 1.16. *Предположим, что $f \in C^2(\Omega \times B_K)$ и функции $u, v \in X^{s,r}$, $s \in (0, 1)$, $sr > 3$, таковы, что $\sup_{\Omega} |u(x)| \leq K$, $\sup_{\Omega} |v(x)| \leq K$. Тогда имеют место оценки*

$$\|f(\cdot, u)\|_{X^{s,r}} \leq c(s, r) \|f\|_{C^1(\Omega \times B_K)} (1 + \|u\|_{X^{s,r}}), \quad (1.24)$$

$$\|f(\cdot, v) - f(\cdot, u)\|_{X^{s,r}} \leq c(s, r) \|f\|_{C^2(\Omega \times B_K)} (1 + \|u\|_{X^{s,r}} + \|v\|_{X^{s,r}}) \|u - v\|_{X^{s,r}}. \quad (1.25)$$

Лемма 1.16 доказана в [92].

1.4. Некоторые теоремы из анализа

Обратимость линейных операторов.

Лемма 1.17. *Пусть V рефлексивное банахово пространство, V' - его сопряженное, и $A : V \rightarrow V'$ - линейный оператор, для некоторого $\sigma > 0$ удовлетворяющий неравенству*

$$\langle A[\varphi], \varphi \rangle \geq \sigma \|\varphi\|_V^2 \text{ для всех } \varphi \in V.$$

Тогда A имеет обратный $A^{-1} : V' \rightarrow V$ и

$$\|A^{-1}[\psi]\|_V \leq \sigma^{-1} \|\psi\|_{V'} \text{ для всех } \psi \in V'.$$

Теорема Тихонова

Теорема 1.18. *Пусть A - рефлексивное банахово пространство, такое что A' является сепарабельным. Пусть $K \subset A$ замкнутый шар и $\varphi : K \rightarrow K$ секвенциально непрерывное отображение т.е., $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ для любой последовательности $K \ni u_n \rightharpoonup u \in K$. Тогда существует $w \in K$ такое, что $w = \varphi(w)$.*

Оценки норм матричнозначных функций

Лемма 1.19. *Пусть $\mathbf{N}(x)$, $x \in \Omega$, - квадратная матрица класса $C^2(\Omega)$. Существуют такие абсолютные постоянные $\tau_0 \in (0, 1)$ и $c > 0$, что из условия $\|\mathbf{I} - \mathbf{N}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2$, $\tau \in (0, \tau_0)$, следуют неравенства*

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2, \quad \|1 - g^{\pm 1}\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2.$$

Здесь $g = \sqrt{\det \mathbf{N}(x)}$.

Доказательство леммы 1.19 имеется в [92].

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область и $\vec{T} \in \mathbb{R}^3$ - векторное поле класса $C^2(\Omega)$. Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \vec{T}(x)$ является диффеоморфизмом области Ω на область $\Omega_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(\Omega)$. Определим матрицу $\mathbf{N}(\varepsilon)$ как присоединенную матрицу для матрицы Якоби отображения $\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T}$, т.е. $\mathbf{N}(x) = \det(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T}(x)) (\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T}(x))^{-1}$, $D\vec{T}(x) = \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x) \right\}$. Введем обозначение $g(x) = \sqrt{\det \mathbf{N}(x)}$.

Лемма 1.20. *Существуют числа $\varepsilon_1 > 0$ и c, c_1 , зависящие от $\|\vec{T}\|_{C^2(\Omega)}$ такие, что для любого $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$ имеет место представление*

$$\mathbf{N}(\varepsilon)^{\pm 1} = \mathbf{I} \pm \varepsilon \mathbb{D} + \varepsilon^2 \mathbb{D}^\pm, \mathbf{g}(\varepsilon)^{\pm 1} = 1 \pm \varepsilon \operatorname{div} \vec{T} + \varepsilon^2 \mathbf{g}^\pm, \quad (1.26)$$

где $\mathbb{D} = \operatorname{div} \vec{T} \mathbf{I} - D\vec{T}$ и справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}^\pm\|_{C^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}^\pm\|_{C^2(\Omega)} \leq c. \quad (1.27)$$

Отклонения $\mathbf{N}(\varepsilon)^{\pm 1} - \mathbf{I}$ и $\mathbf{g}(\varepsilon)^{\pm 1} - 1$ удовлетворяют неравенству

$$\|\mathbf{N}(\varepsilon)^{\pm 1} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}(\varepsilon)^{\pm 1} - 1\|_{C^2(\Omega)} \leq c_1 \varepsilon. \quad (1.28)$$

§ 2. Вспомогательные сведения из теории дифференциальных уравнений

2.1. Задача Стокса.

- Операции

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

позволяют рассматривать множество $C_0^\infty(\Omega)$ как линейное пространство. На множестве $C_0^\infty(\Omega)$ может быть введена локально выпуклая топология, сходимости $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в которой означает, что существует компактное множество $K \subset \Omega$ такое, что $\operatorname{supp} f_n \subset K \forall n = 1, 2, \dots$, и для любого дифференциального оператора D^α последовательность $\{D^\alpha f_n(x)\}$ сходится к $D^\alpha f(x)$ равномерно на K . Топологизированное таким способом множество $C_0^\infty(\Omega)$ обозначают через $D(\Omega)$ и называют пространством основных функций.

- Элементы сопряженного пространства $D'(\Omega)$, т.е. линейные непрерывные функционалы, заданные на локально выпуклом линейном топологическом пространстве $D(\Omega)$ называются «распределениями» или «обобщенными функциями» в смысле Соболева-Шварца.

- Через $\mathcal{V}$ обозначим следующее линейное пространство (без топологии):

$$\mathcal{V} = \{\vec{u} \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$$

- H – замыкание линейного множества $\mathcal{V}$ в пространстве $L^2(\Omega)$
- V – замыкание линейного множества $\mathcal{V}$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Это пространство может быть охарактеризовано следующим образом [51]:

Если Ω – ограниченная область с липшицевой границей, то

$$V = \{\vec{u} \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}.$$

- **Векторное поле с суммируемой дивергенцией.** Рассмотрим следующее линейное множество

$$E(\Omega) = \{\vec{u} \in (L^2(\Omega))^n : \operatorname{div} \vec{u} \in L^2(\Omega)\}.$$

Будучи снабжено скалярным произведением

$$((\vec{u}, \vec{v}))_{E(\Omega)} = (\vec{u}, \vec{v}) + (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}),$$

это множество становится гильбертовым пространством, полным в ассоциированной норме

$$\|\vec{u}\|_{E(\Omega)} = \{((\vec{u}, \vec{u}))_{E(\Omega)}\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- Напомним некоторые факты, касающиеся теорем о следах. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Известно, что тогда определен линейный оператор $\gamma_0 \in L(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$ (оператор следа), такой что $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$ для каждой функции $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$. Пространство $H_0^1(\Omega)$ совпадает с ядром оператора γ_0 . Образ $\gamma_0(H^1(\Omega))$ пространства $H^1(\Omega)$ является плотным подпространством в $L^2(\Gamma)$; оно обозначается через $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; пространство $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ может быть снабжено нормой, индуцированной из $H^1(\Omega)$ с помощью γ_0 . Кроме того, существует непрерывный

оператор (оператор поднятия) $l_\Omega \in L(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^1(\Omega))$, такой что $\gamma_0 \circ l_\Omega$ есть тождественный оператор в $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Эти результаты доказаны, например, в [33].

Для вектор функций из $E(\Omega)$ имеет место следующий результат о следах [51].

Теорема 1.21. *Пусть Ω ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, тогда существует линейный непрерывный оператор $\gamma_n \in L(E(\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ такой, что $\gamma_n \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{n} |_\Gamma$, для всех $\vec{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Для всех $\vec{u} \in E(\Omega)$ и $w \in H^1(\Omega)$ имеет место формула Стокса.*

$$(\vec{u}, \nabla w) + (\operatorname{div} \vec{u}, w) = \langle \gamma_n \vec{u}, \gamma_0 w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (1.29)$$

Здесь через $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ обозначено пространство, сопряженное к $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает соотношение двойственности между пространствами $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Приведем теперь результаты о корректности задачи типа Стокса в той форме, в которой это потребуется в дальнейшем, в частности, в пространствах Соболева-Слободецкого с вещественными показателями.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ и $\vec{f} \in L^2(\Omega)$ – заданная вектор-функция на Ω . Ищется вектор функция $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и скалярная функция p , которые определены в Ω и удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям

$$-\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ в } \Omega, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1.31)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (1.32)$$

Если $\vec{u}, p, \vec{f}$ – гладкие функции, удовлетворяющие (1.30)-(1.32), то умножая (1.30) скалярно на вектор-функцию $\vec{v} \in \mathcal{V}$ и интегрируя по частям приходим к равенству.

$$((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.33)$$

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v}, \quad (\vec{f}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

Определение 1.22. *Обобщенным решением задачи (1.30)-(1.32) называется функция $\vec{u} \in V$, удовлетворяющая равенству*

$$((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (1.34)$$

Замечание 1.23. В том случае, когда Ω – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$ данное выше определение решения (называемое иногда "вариационной формулировкой задачи (1.30)-(1.32)") эквивалентно следующему:

(i) $\vec{u} \in H_0^1(\Omega)$;

(ii) существует $p \in L^2(\Omega)$, такое что

$$-\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ в } D'(\Omega); \quad (1.35)$$

(iii)

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ в } D'(\Omega); \quad (1.36)$$

(iv)

$$\gamma_0 \vec{u} = 0. \quad (1.37)$$

Классический результат о разрешимости задачи Стокса формулируется следующим образом [30, 51, 75].

Теорема 1.24. Для произвольной ограниченной области Ω класса C^2 и для каждого $\vec{f} \in L^2(\Omega)$ задача (1.34) имеет единственное решение $\vec{u}$ и найдется функция $p \in L^2(\Omega)$ такая, что для $(\vec{u}, p)$ выполнены уравнения (1.35)-(1.37). Эти результаты остаются справедливыми и при $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)$

Сформулируем теперь более общий результат [51] о разрешимости задачи Стокса:

Теорема 1.25. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ класса C^2 . Пусть заданы $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ и $\vec{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, такие, что

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds \quad (1.38)$$

Тогда существует пара $\vec{u} \in H^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$, являющаяся решением неоднородной задачи Стокса

$$-\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ в } \Omega, \quad (1.39)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = g \text{ в } \Omega, \quad (1.40)$$

$$\gamma_0 \vec{u} = \vec{\varphi}, \quad (1.41)$$

причем $\vec{u}$ – единственно и p определяется с точностью до аддитивной постоянной

Замечание 1.26. Поскольку $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, то существует $\vec{u}_0 \in H^1(\Omega)$, такое что $\gamma_0 \vec{u}_0 = \vec{\varphi}$. Из формулы Стокса (1.29) и условия (1.38) следует равенство

$$\int_{\Omega} (g - \operatorname{div} \vec{u}_0) \, dx = 0 \quad (1.42)$$

Обозначим через $\vec{u}_1$ решение следующей задачи

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = g - \operatorname{div} \vec{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \gamma_0 \vec{u}_1 = 0. \quad (1.43)$$

Согласно результатам Боговского [10] решение задачи (1.43) существует и принадлежит классу $H_0^1(\Omega)$. Таким образом обобщенным решением задачи ((1.39)-(1.41)) называется векторное поле $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}_0 + \vec{u}_1$ и скалярное поле p , где $(\vec{v}, p)$ есть решение следующей задачи Стокса

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f} + \Delta(\vec{u}_0 + \vec{u}_1) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \vec{v} &= 0, \text{ на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Общий результат о существовании и регулярности решения в пространствах $W^{m,r}(\Omega)$ с целым неотрицательным m и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ или $n = 3$ дает следующая теорема [51].

Теорема 1.27. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2; 3$, класса C^k , $k = \max(m + 2, 2)$, где m – целое, $m \geq -1$. Пусть заданы $\vec{f} \in W^{m,r}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,r}(\Omega)$ и $\vec{\varphi} \in W^{m+2-\frac{1}{r},r}(\Gamma)$, $1 < r < \infty$, удовлетворяющие условию согласования

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds \quad (1.44)$$

Тогда существуют единственные функции $\vec{u}$ и p (p единственно с точностью до аддитивной постоянной), являющиеся решением задачи (1.39)-(1.41), принадлежащие классу $\vec{u} \in W^{m+2,r}(\Omega)$, $p \in W^{m+1,r}(\Omega)$ и удовлетворяющие оценке

$$\|\vec{u}\|_{W^{m+2,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c_0 \left\{ \|\vec{f}\|_{W^{m,r}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m+1,r}(\Omega)} + \|\vec{\varphi}\|_{W^{m+2-\frac{1}{r},r}(\Gamma)} \right\} \quad (1.45)$$

Замечание 1.28. Решение $(\vec{u}, p) \in W^{m+2,r}(\Omega) \times W^{m+1,r}(\Omega)$, $m \geq -1$ задачи (1.39)-(1.41) принадлежит пространству $W^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)$ и является слабым решением данной задачи следующей структуры:

- $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}_0 + \vec{u}_1$, где $\vec{u}_0 \in W^{1,r}(\Omega)$ и $\gamma_0 \vec{u}_0 = \vec{\varphi} \in W^{1-\frac{1}{r},r}(\Gamma)$;
- $\vec{u}_1 \in W^{1,r}(\Omega)$ – есть решение задачи Боговского [10]:

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = g - \operatorname{div} \vec{u}_0 \in L^r(\Omega), \quad \gamma_0 \vec{u}_1 = 0$$

- пара $(\vec{v}, p) \in W_0^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)$ является решением задачи Стокса

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f} + \Delta(\vec{u}_0 + \vec{u}_1) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \vec{v} &= 0, \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

в том смысле, что тождество $\int_{\Omega} \nabla \vec{v} : \nabla \vec{\psi} \, dx = \langle \vec{F}, \vec{\psi} \rangle_{W^{-1,r}(\Omega); W_0^{1,r'}(\Omega)}$ удовлетворяется для любой вектор-функции $\vec{\psi} \in \mathfrak{D}_0^{1,r'}(\Omega)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, где $\mathfrak{D}_0^{1,r'}(\Omega) = \{\vec{\psi} \in W_0^{1,r'}(\Omega) : \operatorname{div} \vec{\psi} = 0\}$ (замкнутое подпространство $W_0^{1,r'}(\Omega)$)

Для формулировки результата о корректности краевой задачи для уравнений Стокса в пространствах типа Соболева-Слободецкого с вещественными показателями дифференцируемости используем пространства, введенные выше в разделе 1.3.:

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), \quad V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), \quad Z^{s,r} = W^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

и пространства следов $T^{s,r} = W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega) \cap W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)$, $0 < s < 1, 1 < r < \infty$, норма в которых определяется формулой

$$\|g\|_{T^{s,r}} = \|g\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} + \|g\|_{W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Лемма 1.29. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$ и $\vec{F} \in W^{s-1,r}(\Omega)$, $G \in W^{s,r}(\Omega)$, $\vec{\varphi} \in W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)$, где $0 < s < 1, 1 < r < \infty$. Тогда краевая задача

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = \vec{F}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = \Pi G \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{u} = \vec{\varphi} \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi p = p, \quad \Pi q = q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q \, dx \quad (1.46)$$

имеет единственное решение $\vec{u} \in W^{s+1,r}(\Omega), p \in W^{s,r}(\Omega)$ такое, что

$$\|\vec{u}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(\Omega, r, s) \left(\|\vec{F}\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|G\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\vec{\varphi}\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right) \quad (1.47)$$

Если $s = 0, 1, 1 < r < \infty$ и $\vec{F} \in W^{s-1,r}(\Omega)$, $G \in W^{s,r}(\Omega)$, $\vec{\varphi} \in W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)$, то краевая задача (1.46) имеет единственное решение $\vec{u} \in W^{s+1,r}(\Omega), p \in W^{s,r}(\Omega)$, для которого имеет место оценка

$$\|\vec{u}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(\Omega, r, s) \left(\|\vec{F}\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|G\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\vec{\varphi}\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right). \quad (1.48)$$

В частности, из (1.47) и (1.48) следует неравенство

$$\|\vec{u}\|_{V^{s,r}} + \|p\|_{X^{s,r}} \leq c(\Omega, r, s) \left(\|\vec{F}\|_{Z^{s,r}} + \|G\|_{X^{s,r}} + \|\vec{\varphi}\|_{T^{s,r}} \right). \quad (1.49)$$

Доказательство леммы 1.29 опирается на приведенные выше результаты о корректности задачи Стокса и результаты теории интерполяции.

Действительно, если $s = 0$ или $s = 1$, то согласно теореме 1.27 для любых $\vec{F} \in W^{s-1,r}(\Omega)$, $G \in W^{s,r}(\Omega)$, $\vec{\varphi} \in W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)$ краевая задача (1.46) имеет единственное решение $\vec{u} \in W^{s+1,r}(\Omega), p \in W^{s,r}(\Omega)$, для которого имеет место оценка

$$\|\vec{u}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c(\Omega, r, s) \left(\|\vec{F}\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|G\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\vec{\varphi}\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right). \quad (1.50)$$

Таким образом отображение $(\vec{F}, G, \vec{\varphi}) \rightarrow (\vec{u}, p)$ задает ограниченный линейный оператор $T : W^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega) \rightarrow W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega)$, действующий в двух интерполяционных парах (соответствующих значениям $s = 0$ и

$s = 1$). Согласно теореме 1.6 оператор T определен и является ограниченным из $(W^{-1,r}(\Omega), L^r(\Omega))_{s,r} \times (L^r(\Omega), W^{1,r}(\Omega))_{s,r} \times (W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega), W^{2-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega))_{s,r}$ в пространство $(W^{1,r}(\Omega), W^{2,r}(\Omega))_{s,r} \times (L^r(\Omega), W^{1,r}(\Omega))_{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega)$. Лемма доказана.

Замечание 1.30. Заметим, что для любого $0 < s < 1$ решение задачи (1.46) принадлежит пространству $W^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)$, причем поле $\vec{u} \in W^{1,r}(\Omega)$ имеет фиксированный след $\gamma_0 \vec{u} = \vec{\varphi} \in W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)$ и пара $(\vec{u}, p)$ является слабым решением задачи (1.46) в смысле определения, сформулированного в замечании 1.28.

В заключении этого раздела сформулируем результат о корректности задачи, обобщающую рассмотренную выше задачу Стокса.

Теорема 1.31. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Требуется найти векторные поля $\vec{u}^{(j)} = (\vec{u}_1^{(j)}, \vec{u}_2^{(j)}, \vec{u}_3^{(j)})$, $j = 1, 2$, и скалярные поля p_j , $j = 1, 2$, такие, что

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - \nabla p_i = \vec{F}^{(i)} \text{ в } \Omega, \operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = \Pi G_i \text{ в } \Omega, \quad (1.51)$$

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{\varphi}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \Pi p_i = p_i, \quad i = 1, 2,$$

где постоянные коэффициенты μ_{ij} , $i, j = 1, 2$, удовлетворяют условию $\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} > 0$.

Предположим, что $\vec{F}^{(i)} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $G_i \in W^{s,r}(\Omega)$, $\vec{\varphi}^{(i)} \in W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)$, где $0 < s < 1, 1 < r < \infty$. Тогда краевая задача (1.51) имеет единственное решение $\vec{u}^{(i)} \in W^{s+1,r}(\Omega)$, $p_i \in W^{s,r}(\Omega)$, $i = 1, 2$, такое, что

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}^{(i)}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|p_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c(\Omega, r, s) \left(\sum_{j=1}^2 \left[\|\vec{F}^{(j)}\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \|G_j\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\vec{\varphi}^{(j)}\|_{W^{s+1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right] \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Если $\vec{F} \in Z^{s,r}$, $G \in X^{s,r}$, $\vec{\varphi} \in T^{s,r}$, где $0 < s < 1, 1 < r < \infty$, то задача 1.51 имеет единственное решение $(\vec{u}^{(i)}, p_i) \in V^{s,r} \times X^{s,r}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\vec{u}^{(i)}\|_{V^{s,r}} + \|p_i\|_{X^{s,r}} \leq c(\Omega, r, s) \left(\sum_{j=1}^2 \left[\|\vec{F}^{(j)}\|_{Z^{s,r}} + \|G_j\|_{X^{s,r}} + \|\vec{\varphi}^{(j)}\|_{T^{s,r}} \right] \right), \quad i = 1, 2. \quad (1.53)$$

Доказательство. Вводя новые искомые вектор-функции

$$\vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{u}^{(j)}, \quad i = 1, 2, \quad (1.54)$$

получим для пар $(\vec{w}^{(i)}, p_i)$, $i = 1, 2$, задачи вида (1.46) с правыми частями

$$\vec{F}^{(i)}, \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} G_j, \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{\varphi}^{(j)}, \quad (1.55)$$

которые удовлетворяют условиям леммы 1.29. Из оценок вида (1.47), (1.49) для $\vec{w}^{(i)}$, p_i , $i = 1, 2$, и формул (1.54), (1.55) вытекают неравенства (1.52), (1.53).

2.2. Краевые задачи для уравнений переноса.

Важное место в исследовании краевой задачи для уравнений движения смеси вязких жидкостей занимают результаты о корректности краевых задач для транспортных уравнений, которые собраны в этом параграфе.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная область с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 и $\vec{U}$ - заданное векторное поле, принадлежащее $C^3(\mathbb{R}^3)$. Введем на границе $\Sigma = \partial B$ участок «втекания»: $\Sigma_{in} = \{x \in \Sigma : \vec{U} \cdot \vec{n} < 0\}$ и участок «вытекания»: $\Sigma_{out} = \{x \in \Sigma : \vec{U} \cdot \vec{n} > 0\}$, где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе. Пусть S – компактное множество с границей $\partial S \in C^3$, лежащее строго внутри области B . Положим $\Omega = B \setminus S$.

Рассмотрим следующие краевые задачи для транспортных уравнений:

$$\mathcal{L}\varphi = \vec{u} \cdot \nabla \varphi + \sigma \varphi = \vec{f} \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Sigma_{in}, \quad (1.56)$$

$$\mathcal{L}^*\varphi^* = -\operatorname{div}(\vec{u} \cdot \varphi^*) + \sigma \cdot \varphi^* = \vec{f} \text{ в } \Omega, \quad \varphi^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}, \quad (1.57)$$

где $\vec{u} \in C^1(\Omega)$, $\vec{u} = \vec{U}$ на Σ , $\vec{u} = 0$ на ∂S ; причем $\vec{U}$ обращается в нуль в окрестности S . Ограниченные функции φ и φ^* называются слабыми решениями задачи (1.56) и (1.57) соответственно, если интегральные тождества

$$\int_{\Omega} (\varphi \mathcal{L}^* \psi^* - \vec{f} \psi^*) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (\varphi^* \mathcal{L} \psi - \vec{f} \psi) dx = 0$$

выполняются для всех функций $\psi^*, \psi \in C(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ соответственно таких, что $\psi^* = 0$ на Σ_{out} , а $\psi = 0$ на Σ_{in} .

Относительно $\partial\Omega$ и векторного поля $\vec{U}$ сформулируем следующие условия.

Условие 1.32. 1. Граница $\partial\Omega$ есть замкнутая поверхность класса C^3 и множество $\Gamma = cl(\Sigma_{in} \cap (\Sigma \setminus \Sigma_{in}))$ представляет собой одномерное многообразие такое, что $\Sigma = \Sigma_{in} \cup \Gamma \cup \Sigma_{out}$.

2. $\vec{U} \in C^3(\partial\Omega)$ и $\int_{\Sigma} \vec{U} \cdot \vec{n} ds = 0$. Векторное поле $\vec{U} \in C^3(\mathbb{R}^3)$ и обращается в нуль в окрестности S .

3. Существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\vec{U} \cdot \nabla (\vec{U} \cdot \vec{n}) > C > 0 \text{ на } \Gamma.$$

Лемма 1.33. *Предположим, что $\partial\Omega$ и $\vec{U}$ удовлетворяют условию 1.32, а векторное поле $\vec{u}$ принадлежит классу $C^1(\Omega)$ и удовлетворяет условию*

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u} = 0 \text{ на } \partial S.$$

Кроме того, пусть показатели s и r удовлетворяют неравенствам:

$$0 < s \leq 1, \quad 1 < r < \infty, \quad sr > 3, \quad 2s - 3r^{-1} < 1,$$

Тогда существуют положительные константы $\sigma^ > 1$ и c , зависящие от Ω , $\vec{U}$, s , r , $\|\vec{u}\|_{C^1(\Omega)}$ и не зависящие от σ , такие, что для любых $\sigma > \sigma^*$ и $\vec{f} \in W^{s,r}(\Omega)$ задача (1.56) имеет единственное решение $\varphi \in W^{s,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \cdot \sigma^{-1+\alpha} \|\vec{f}\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \quad \alpha = \max\{0, s - r^{-1}, 2s - 3r^{-1}\}.$$

Детали доказательства этой и следующей леммы имеются в [92].

Лемма 1.34. *Предположим, что $\Sigma = \partial B$ и $\vec{U}$ удовлетворяют условиям 1.32, а показатели s , r - неравенствам:*

$$0 < s \leq 1, \quad 1 < r < \infty, \quad sr > 3, \quad 2s - 3r^{-1} < 1.$$

Пусть векторное поле $\vec{u} \in V^{s,r}$ удовлетворяет граничным условиям

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u} = 0 \text{ на } \partial S.$$

Тогда существуют постоянные $\sigma_0 > 1$ и $c > 0$, зависящие только от Ω , $\vec{U}$, s , r и $\|\vec{u}\|_{V^{s,r}}$, такие, что для любого $\sigma > \sigma_0$ и $\vec{f} \in X^{s,r}$ задача (1.56) имеет единственное решение $\varphi \in X^{s,r}$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|\varphi\|_{X^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{X^{s,r}}, \quad \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sigma^{-1} \cdot \|\vec{f}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

и задача (1.57) имеет единственное решение $\varphi^ \in X^{s,r}$, удовлетворяющее оценкам*

$$\|\varphi^*\|_{X^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{X^{s,r}}, \quad \|\varphi^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (\sigma - \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{C(\Omega)})^{-1} \|\vec{f}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Глава 2

Корректность неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей

§ 1. Постановка задачи об обтекании семейства компактных препятствий

1.1. Формулировка задачи обтекания

Задачу обтекания компактного препятствия S трехмерным потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей сформулируем следующим образом.

Область течения бинарной смеси представляет собой область $\Omega = B \setminus S$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, где B - ограниченное множество (например, шар достаточно большого радиуса) с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 , S - компактное множество с достаточно гладкой границей ∂S , лежащее строго внутри B . Предполагая, что во всей области течения существует единая связь давления p_i i -той компоненты смеси с плотностью ρ_i (т. е. $p_i = p_i(\rho_i)$ - заданная функция), поля скоростей $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$ и плотности ρ_1 , ρ_2 составляющих смеси ищутся как решения следующей системы уравнений (записанных в безразмерной форме)

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) + \operatorname{Re} \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} \nabla p_i(\rho_i) + (-1)^{(i)} a (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.1b)$$

где $L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) = -\mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^{(j)}$, $i, j = 1, 2$, причем коэффициенты μ_{ij} и λ_{ij}

(безразмерные коэффициенты вязкости) удовлетворяют условиям

$$\mu_{11} > 0, \mu_{22} > 0, \mu_{11} \cdot \mu_{22} - \mu_{12} \cdot \mu_{21} \neq 0, \quad (2.1c)$$

$$\chi_{ij} = \lambda_{ij} + \mu_{ij}, \chi_{11} > 0, \chi_{22} > 0, \chi_{11} \cdot \chi_{22} - \chi_{12} \cdot \chi_{21} \neq 0.$$

Символы Re и Ma обозначают соответственно числа Рейнольдса и Маха; a - заданное положительное число, а слагаемые $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)} a (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)})$ характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси [19, 36].

Пусть $\vec{U}^{(j)}$, $j = 1, 2$, - заданные во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ векторные поля класса C^3 ($\vec{U}^{(j)}$ можно трактовать как вектор скорости j -ой компоненты на бесконечности), обращающиеся в нуль в окрестности множества S . На границе Σ области B выделим так называемые участки «втекания»: $\Sigma_{in}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} < 0\}$, $j = 1, 2$, и участки «вытекания»: $\Sigma_{out}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} > 0\}$, $j = 1, 2$, где $\vec{n}$ - вектор внешней нормали к границе Σ .

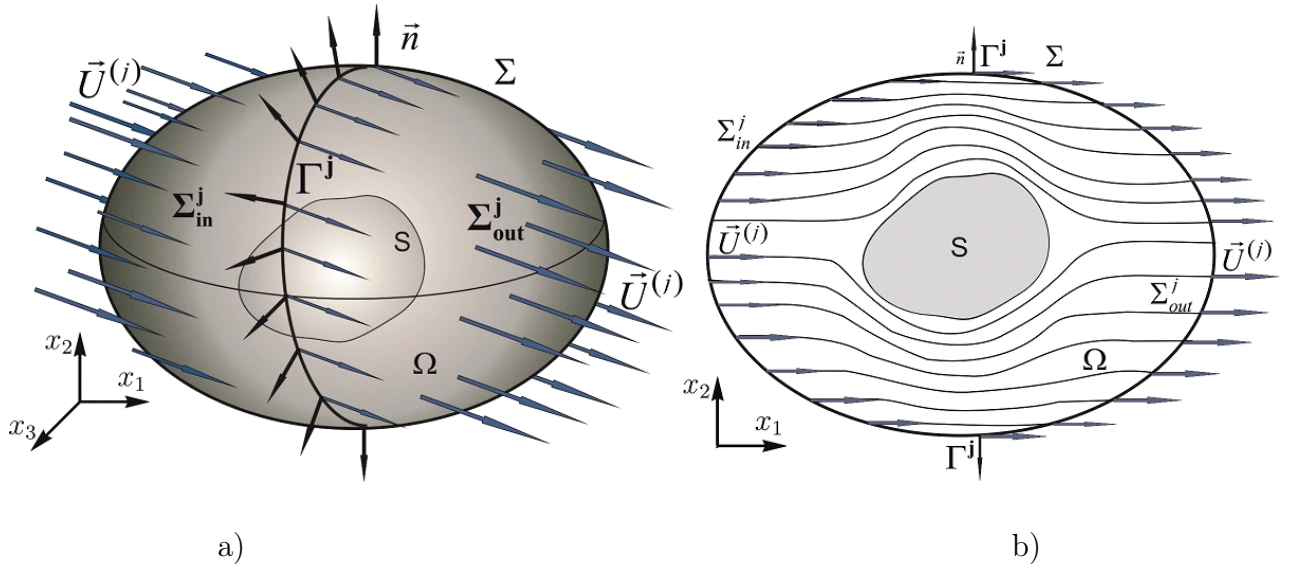


Рис. 2.1: Схемы обтекания препятствия j -той компонентой смеси: а) трехмерный поток; б) плоское сечение.

Будем считать выполненными следующие условия.

Условие 2.1. 1. Компоненты Σ и ∂S границы $\partial\Omega$ есть замкнутые поверхности класса C^3 и множества $\Gamma^j = cl\Sigma_{in}^j \cap (\Sigma \setminus \Sigma_{in}^j)$, $j = 1, 2$, - замкнутые одномерные многообразия, такие что $\Sigma = \Sigma_{in}^j \cup \Gamma^j \cup \Sigma_{out}^j$.

2. Векторные поля $\vec{U}^{(j)} \in C^3(\partial\Omega)$ удовлетворяют условиям:

$$\int_{\Sigma} \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} ds = 0, \quad j = 1, 2,$$

и допускают продолжение класса C^3 на все пространство $\mathbb{R}^3$, обращающиеся в нуль в окрестности препятствия S .

3. Существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla (\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}) > C > 0 \text{ на } \Gamma^j, j = 1, 2.$$

Так как векторные поля $\vec{U}^{(j)}$ являются касательными к $\partial\Omega$ на Γ^j , то величина $\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla (\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n})$ определена значениями $\vec{U}^j$ на $\Gamma^{(j)}$. Очевидно, что условие 2.1.3 выполнено для всех строго выпуклых областей и постоянных векторных полей. Геометрическая интерпретация условия 2.1.3 состоит в том, что величины $\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}$ обращаются в нуль на Γ^j только до первого порядка.

К уравнениям (2.1a), (2.1b) присоединим граничные условия

$$\vec{u}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S, j = 1, 2, \quad (2.1d)$$

$$\rho_j = \rho_j^0 \text{ на } \Sigma_{in}^j, j = 1, 2, \quad (2.1e)$$

где $\rho_j^0, j = 1, 2$, - заданные положительные постоянные.

1.2. Возмущение области течения. Преобразование задачи.

Поскольку в настоящей работе предполагается изучить зависимость решений сформулированной выше задачи обтекания от формы обтекаемого препятствия, рассмотрим следующий класс деформаций области течения Ω . Выберем векторное поле $\vec{T} \in C^2(R^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ , и определим отображение $y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \vec{T}(x)$, задающее возмущение формы обтекаемого препятствия S . Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ - возмущенное обтекаемое препятствие.

В возмущенной области Ω_ε рассмотрим краевую задачу (2.1) и ее решение обозначим через $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}, \bar{\rho}_{i\varepsilon}), i = 1, 2$, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right] - \operatorname{Re} \bar{\rho}_{i\varepsilon} (\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} - \\ - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} \nabla p_i(\bar{\rho}_{i\varepsilon}) + (-1)^{i+1} a \left(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)} \right) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\operatorname{div}(\bar{\rho}_{i\varepsilon} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \quad (2.2b)$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}_\varepsilon^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon, \quad (2.2c)$$

$$\bar{\rho}_{i\varepsilon} = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2, \quad (2.2d)$$

Таким образом решения краевой задачи (2.2) и функционалы от $\bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $\bar{\rho}_{i\varepsilon}$ становятся функциями параметра ε , и мы приходим к анализу зависимости решений краевой задачи для уравнений динамики смеси вязких сжимаемых жидкостей от формы области течения.

Данную задачу удобно свести к исследованию зависимости решений от коэффициентов системы дифференциальных уравнений, которая возникает в результате замены пространственных переменных. С этой целью введем функции $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$ и $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, 2$, определенные в невозмущенной области Ω по формулам:

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) = \mathbf{N}(x) \bar{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}(x + \varepsilon \vec{T}(x)), \quad \rho_{i\varepsilon}(x) = \bar{\rho}_{i\varepsilon}(x + \varepsilon \vec{T}(x)), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{N}(x) = (\det \mathbf{M}(x))\mathbf{M}^{-1}(x)$, $\mathbf{M}(x) = \mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T}(x)$, $D\vec{T}(x) = \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x) \right\}$ – матрица Якоби отображения $x \mapsto \vec{T}(x)$. Введем также обозначение $g(x) = \sqrt{\det \mathbf{N}(x)}$.

Лемма 2.2. Пусть $(\bar{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}(y), \bar{\rho}_{i\varepsilon}(y))$, $i = 1, 2$, – решение задачи (2.2). Тогда пары $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x), \rho_{i\varepsilon}(x))$, $i = 1, 2$, определенные по формулам 2.3, являются решением следующей задачи

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + \nabla \left(g^{-1} \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} p_i(\rho_{i\varepsilon}) \right) = \quad (2.4a)$$

$$= \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) + \operatorname{Re} \mathcal{B}(\rho_{i\varepsilon}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}) \quad \text{в } \Omega,$$

$$\operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.4b)$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \quad \text{на } \Sigma, \quad \vec{u}_\varepsilon^{(i)} = 0 \quad \text{на } \partial S, \quad (2.4c)$$

$$\rho_{i\varepsilon} = \rho_i^0 \quad \text{на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.4d)$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ и нелинейное отображение $\mathcal{B}$ определены по формулам

$$\mathcal{A}(\vec{u}) = \Delta \vec{u} - (\mathbf{N}^T)^{-1} \operatorname{div} (g^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u})), \quad (2.4e)$$

$$\mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}) = \rho (\mathbf{N}^T)^{-1} (\vec{u} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{w})), \quad \mathcal{S}(\vec{u}) = g \cdot a \quad (\mathbf{N}^T)^{-1} \mathbf{N}^{-1} \vec{u}. \quad (2.4f)$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\varphi(y) \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ справедливо равенство

$$(\nabla_y \varphi)(y(x)) = \left((\mathbf{M}^T)^{-1} \nabla_x \tilde{\varphi} \right)(x), \quad \text{где } \tilde{\varphi} = \varphi(y(x)), \quad (2.5)$$

а для векторного поля $\vec{a} \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ имеет место формула

$$(\operatorname{div}_y \vec{a})(y(x)) = g^{-1} \operatorname{div}_x (\mathbf{N} \cdot \vec{a}(y(x))). \quad (2.6)$$

Полагая $\vec{a}(y) = \bar{\rho}_{i\varepsilon}(y) \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(y)$, в силу формулы (2.6) имеем

$$\operatorname{div}_y \left(\bar{\rho}_{i\varepsilon} \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \right) (y(x)) = g^{-1} \operatorname{div}_x \left(\rho_{i\varepsilon}(x) \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) \right),$$

поэтому в силу уравнений (2.2b) приходим к уравнениям (2.4b). Учитывая тождество $(M^T)^{-1} = g^{-1} \mathbf{N}^T$, из равенства

$$\operatorname{div}_y \left(\sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) (y(x)) = g^{-1}(x) \operatorname{div}_x \left(\sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(x) \right)$$

и формулы 2.5 получим

$$\begin{aligned} & \nabla_y \left[\operatorname{div}_y \left(\sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y) \right) - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} p_i(\bar{\rho}_{i\varepsilon}(y)) \right] (y(x)) = \\ & = g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla_x \left[g^{-1} \operatorname{div}_x \left(\sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(x) \right) - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} p_i(\bar{\rho}_{i\varepsilon}(x)) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В силу формул (2.5), (2.6) имеет место равенство

$$\left(\Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) (y(x)) = \left(\operatorname{div}_y \left(\nabla_y \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) \right) (y(x)) = g^{-1} \operatorname{div}_x \left(g^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \nabla_x (\mathbf{N}^{-1} \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(j)}) \right) (x),$$

и поэтому, если ввести линейный оператор $\mathcal{A}(\vec{u})$ по формуле (2.4e), то получаем тождество

$$\left(\Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) (y(x)) = g^{-1} \mathbf{N}^T \left[\Delta \vec{u}_\varepsilon^{(j)} - \mathcal{A}(\vec{u}_\varepsilon^{(j)}) \right] (x). \quad (2.8)$$

Рассмотрим теперь выражение $\left(\vec{u}_\varepsilon^{(j)} \cdot \nabla \right) \vec{u}_\varepsilon^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{u}_\varepsilon^{(j)} \cdot \nabla \right) \vec{u}_\varepsilon^{(j)} (y(x)) &= \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) \cdot \left(\nabla_y \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right) (y(x)) = \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) \cdot g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla_x \left(\vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) \right) = \\ &= g^{-1} \mathbf{N} \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) \nabla_x (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(j)})(x) = g^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(x) \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(j)})(x). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}) = \rho (\mathbf{N}^T)^{-1} (\vec{u} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{w})),$$

получаем соотношение

$$\bar{\rho}_{i\varepsilon} \left(\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \right) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} (y(x)) = g^{-1} \mathbf{N}^T \mathcal{B}(\rho_{i\varepsilon}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}). \quad (2.9)$$

Наконец, вводя линейный оператор

$$\mathcal{S}(\vec{u}) = ga \left(\mathbf{N}^T \right)^{-1} \mathbf{N}^{-1} \vec{u},$$

можем записать, что

$$(-1)^{i+1} a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)})(y(x)) = (-1)^{i+1} g^{-1} \mathbf{N}^T \mathcal{S}(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)})(x) \quad (2.10)$$

Из формул (2.7)-(2.10) и уравнений (2.2а) вытекают уравнения (2.4а). Лемма доказана.

Задачу (2.4) удобно переписать в несколько иной форме, опуская ради краткости записи параметр ε .

Введем эффективные вязкие потоки по формулам:

$$q_i = - \sum_{j=1}^2 g^{-1} (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} p_i(\rho_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.11)$$

Из условия (2.1с) следует невырожденность матрицы $\varkappa = \{\mu_{ij} + \lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2$, и поэтому равенства (2.11) могут быть переписаны в виде

$$\operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j - \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.12)$$

где $\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$ – элементы матрицы $\varkappa^{-1}$, $\sigma_{ij} = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} \gamma_{ij}, i, j = 1, 2$. Уравнения неразрывности (2.4b) в силу формул 2.12 запишем в виде

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j = \rho_i \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, краевая задача (2.4) об обтекании семейства препятствий может быть переписана в форме

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - \nabla q_i = \\ & = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j - \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \quad \text{в } \Omega, \quad (2.13b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j = \rho_i \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \quad \text{в } \Omega, \quad (2.13c)$$

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \quad (2.13d)$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.13e)$$

1.3. Задача о возмущениях.

Решение краевой задачи (2.13) построим в виде возмущения специальным образом выбранного потока. Более точно, решение $\vec{u}^{(i)}, \rho_i, q_i, i = 1, 2$, задачи (2.13) будем искать в виде:

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}, \quad \rho_i = \rho_i^* + \varphi_i, \quad q_i = q_i^* + \pi_i + \Lambda \cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j, \quad (2.14)$$

где $\rho_i^* = \rho_i^0 = \text{const}$, $\Lambda = \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2}$, m_j – постоянные, служащие инструментом контроля масс компонентов смеси в области Ω , $\vec{u}_*^{(i)}, q_i^{(*)}, i = 1, 2$, – достаточно гладкое решение следующей задачи типа Стокса

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{u}_*^{(j)} - \nabla q_i^* = 0 \text{ в } \Omega, \quad \text{div} \vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.15a)$$

$$\vec{u}_*^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \quad p q_i^* = q_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (2.15b)$$

Из условий 2.1 следует, что для любых $0 < s < 1, 1 < r < \infty$ векторные поля $\vec{U}^{(j)}$ принадлежат пространству $V^{s,r}$ а, следовательно, решение $\vec{u}_*^{(i)}, q_i^{(*)}, i = 1, 2$, задачи (2.15) принадлежит классу $V^{s,r} \times X^{s,r}$ и имеет место оценка

$$\|\vec{u}_*^{(i)}\|_{V^{s,r}} + \|q_i^*\|_{X^{s,r}} \leq c_0, \quad i = 1, 2, \quad (2.16)$$

с постоянной c_0 , зависящей от области Ω , показателей s, r , коэффициентов вязкости μ_{ij} и $\|\vec{U}^{(j)}\|_{V^{s,r}}$.

Из уравнений (2.13) и формул (2.14) получим следующие соотношения для новой искомой функции $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$

$$\text{div} \vec{v}^{(i)} = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i \text{ в } \Omega, \quad (2.17a)$$

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.17b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i + \tau_{ii} \varphi_i = \Psi_i[\vec{\theta}] + g m_i \rho_i \text{ в } \Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i = 1, 2, \quad (2.18)$$

где τ_{ij} – элементы матрицы $\mathcal{T} = R^* \cdot \mathcal{K}^{-1} \cdot P^*$,

$$P^* = P(\rho^*) = \begin{pmatrix} p'_1(\rho_1^*) & 0 \\ 0 & p'_2(\rho_2^*) \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} \rho_1^* & 0 \\ 0 & \rho_2^* \end{pmatrix},$$

$$\Phi_i[\vec{\theta}] = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} (q_j^* + \pi_j) - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} H_j(\varphi_j), \quad i = 1, 2, \quad (2.19)$$

$$H_j(\varphi_j) = p_j(\rho_j^* + \varphi_j) - p_j(\rho_j^*) - p'_j(\rho_j^*) \varphi_j,$$

$$\Psi_1[\vec{\theta}] = -g\tau_{12}\varphi_2 - g\frac{1}{\rho_1^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{1j}\varphi_1\varphi_j + g\rho_1\Phi_1[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{11}\varphi_1, \quad (2.20)$$

$$\Psi_2[\vec{\theta}] = -g\tau_{21}\varphi_1 - g\frac{1}{\rho_2^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{2j}\varphi_2\varphi_j + g\rho_2\Phi_2[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{22}\varphi_2.$$

Для вычисления постоянных m_1, m_2 используем функции $\zeta_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$, представляющие собой решения следующих краевых задач

$$-\operatorname{div}(\vec{u}^{(i)} \cdot \zeta_j^{(i)}) + \tau_{ii} \cdot \zeta_j^{(i)} = \tau_{ji} g \text{ в } \Omega, \quad \zeta_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^{(i)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.21)$$

Интегрируя уравнения (2.17a) по области Ω , получим с учетом граничных условий (2.17b) соотношения

$$m_i \int_{\Omega} g dx = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \int_{\Omega} g \varphi_j dx - \int_{\Omega} g \Phi_i[\vec{\theta}] dx, \quad i = 1, 2. \quad (2.22)$$

Умножая уравнения (2.21) при фиксированном значении i и произвольном j на функцию φ_i , удовлетворяющую задаче (2.18), и интегрируя по частям, получаем равенства

$$\int_{\Omega} \zeta_j^{(i)} \cdot \Psi_i[\vec{\theta}] dx + m_i \int_{\Omega} g \cdot \rho_i \cdot \zeta_j^{(i)} dx = \int_{\Omega} \tau_{ji} \cdot g \cdot \varphi_i dx, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и (2.23) получаем систему уравнений для определения констант m_1, m_2

$$m_i \int_{\Omega} g dx = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \zeta_i^{(j)} \cdot \Psi_j[\vec{\theta}] dx + \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 m_j \int_{\Omega} g \cdot \rho_j \cdot \zeta_i^{(j)} dx - \int_{\Omega} g \Phi_i[\vec{\theta}] dx, \quad i = 1, 2, \quad (2.24)$$

из которой следует формула

$$\vec{m} = (m_1, m_2)^T, \quad \vec{m} = (k\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{f}, \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \vec{f} = (f_1, f_2)^T, \quad (2.25)$$

$$k = \int_{\Omega} g dx, \quad a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} g \cdot \rho_j \cdot \zeta_i^{(j)} dx, \quad f_i = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} (\zeta_i^{(j)} \cdot \Psi_j[\vec{\theta}] - g \Phi_i[\vec{\theta}]) dx.$$

Таким образом приходим к следующей задаче для возмущений. Пусть $(\vec{u}_*^{(1)}, \vec{u}_*^{(2)}, q_1^*, q_2^*)$ заданы как решения задачи (2.15). Требуется найти векторное поле $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$ и постоянные m_1, m_2 (зависящие от параметра ε) такие, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{v}^{(j)} - \nabla \pi_i = \\ & = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(i)} = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i \text{ в } \Omega, \quad (2.26b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i + \tau_{ii} \varphi_i = \Psi_i[\vec{\theta}] + g m_i \rho_i \text{ в } \Omega, \quad (2.26c)$$

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \Pi \pi_i = \pi_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.26d)$$

$$\text{выполнены уравнения (2.25) и (2.21)} \quad (2.26e)$$

операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ определены по формулам (2.4e), (2.4f); функции $\Phi_i[\vec{\theta}]$, $\Psi_i[\vec{\theta}]$ заданы в (2.19), (2.20), $\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}$, $\rho_i = \rho_i^* + \varphi_i$.

§ 2. Теорема существования решения задачи о возмущениях

Рассмотрим замкнутое подпространство E банахова пространства $V^{s,r} \times X^{s,r}$,

$$\begin{aligned} E = \left\{ \vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) : \vec{v}^{(i)} \in V^{s,r}, \pi_i \in X^{s,r}, \varphi_i \in X^{s,r}, \right. \\ \left. \vec{v}^{(i)}|_{\partial\Omega} = 0, \varphi_i|_{\Sigma_{in}^i} = 0, \Pi \pi_i = \pi_i, i = 1, 2 \right\}, \end{aligned}$$

с нормой

$$\|\vec{\theta}\|_E = \sum_{j=1}^2 (\|\vec{v}^{(j)}\|_{V^{s,r}} + \|\varphi_j\|_{X^{s,r}} + \|\pi_j\|_{X^{s,r}}).$$

Замкнутый шар радиуса τ с центром в точке $\vec{\theta} = 0$ из E обозначим через B_τ .

Основной результат раздела доставляет следующая теорема.

Теорема 2.3. *Предположим, что поверхность Σ и заданные векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условиям 2.1. Пусть кроме того для чисел r и s выполнены условия*

$$0 < s < 1, \quad 1 < r < \infty, \quad sr > 3, \quad 2s - 3r^{-1} < 1. \quad (2.27)$$

Тогда существует положительное число $\sigma^* > 1$, зависящее только от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s$ и обладающее следующими свойствами: для любых $\tau_{11} \geq \sigma^*, \tau_{22} \geq \sigma^*$ найдутся положительные числа τ^* и s , зависящие только от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s, \tau_{11}, \tau_{22}$, такие что, если

$$\tau \in (0, \tau^*], \Lambda^{-1}, a, Re \in (0, \tau^2], \tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau], \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2, \quad (2.28)$$

то задача (2.26) имеет решение $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) \in B_\tau$, $\vec{\zeta} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}) \in X^{s,r}$, $\vec{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее неравенствам

$$|\vec{m}| \leq c(\max\{\tau_{11}, \tau_{22}\})^{1+\frac{1}{\alpha}} \tau^2, \alpha \in (0, s - 3r^{-1}), \quad (2.29)$$

$$\|\zeta_i^{(3-i)}\|_{X^{s,r}} \leq c\tau, \quad \|\zeta_i^{(i)}\|_{X^{s,r}} \leq c\tau_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad (2.30)$$

$$\|(k\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \leq c \cdot \sigma^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \sigma = \max\{\tau_{11}, \tau_{22}\}, \quad \alpha \in (0, s - 3r^{-1}). \quad (2.31)$$

Замечание 2.4. Допустимые значения параметров $(Re, Ma, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{21})$, $\chi_{ij} = \lambda_{ij} + \mu_{ij}, i, j = 1, 2$, заполняют «прямой цилиндр» $Q_1 \times Q_2$, образующие которого Q_1 и Q_2 изображены на рис. 2.2 и 2.3 соответственно.

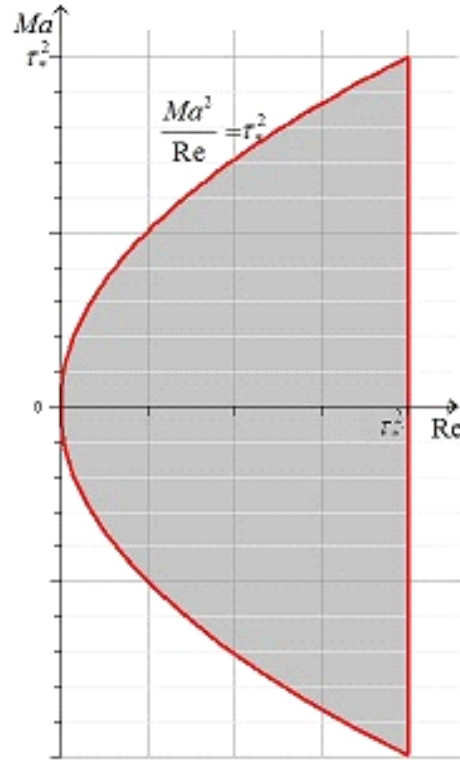
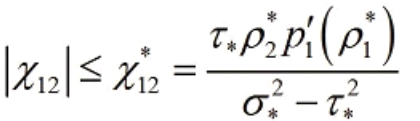


Рис. 2.2: Q_1 – область допустимых значений параметров Re, Ma



Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов, отмеченных ниже номерами 2.1, 2.2, 2.3.

Фиксируем шар B_τ радиуса $\tau \in (0, 1)$ и выбираем произвольную матрицу $\mathbf{N}$ ю, что

затем выбираем произвольный элемент $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) \in B_\tau$ и полагаем

Рассмотрим следующую краевую задачу.

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \tau_{ii} \varphi_i^1 = \Psi_i[\vec{\theta}] + g \, m_i \rho_i, \quad \varphi_i^1 = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{v}_1^{(j)} - \nabla \pi_i^1 = \\ & = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.32b)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_1^{(i)} = \Pi \left(g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j^1 - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i \right) \text{ в } \Omega, \quad (2.32c)$$

$$\vec{v}_1^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \pi_i^1 = \pi_i^1, \quad i = 1, 2. \quad (2.32d)$$

Постоянные m_i определяются по формулам

$$\begin{aligned} \vec{m} &= (m_1, m_2)^T, \quad \vec{m} = (k\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{f}, \\ \mathbf{A} &= \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} g \cdot \rho_j \cdot \zeta_i^{(j)} dx, \quad k = \int_{\Omega} g dx, \\ \vec{f} &= (f_1, f_2)^T, \quad f_i = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left(\zeta_i^{(j)} \cdot \Psi_j[\vec{\theta}] - g \Phi_i[\vec{\theta}] \right) dx, \end{aligned} \quad (2.32e)$$

где $\zeta_i^{(j)}$ – решение следующей краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\vec{u}^{(i)} \cdot \zeta_j^{(i)}) + \tau_{ii} \cdot \zeta_j^{(i)} = \tau_{ji} g \text{ в } \Omega, \quad \zeta_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^{(i)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.32f)$$

Ниже будет показано, что задача (2.32) доставляет полную систему уравнений и граничных условий для однозначного определения вектора $\vec{\theta}_1$ и, следовательно, определяет отображение $W : \vec{\theta} \rightarrow \vec{\theta}_1$. Неподвижная точка отображения W доставляет решение задачи (2.26), которую можно интерпретировать в форме операторного уравнения $\vec{\theta} = W(\vec{\theta})$.

2.2. Свойства оператора $W(\vec{\theta})$

Теорема 2.5. *Предположим выполненными следующие условия:*

- поверхность Σ и векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют

$$\text{условиям 2.1;} \quad (2.33a)$$

- постоянная $\tau_0 \in (0, 1)$ и матрица $\mathbf{N}$ выбраны в соответствии

$$\text{с леммой 1.19;} \quad (2.33b)$$

- параметры $s \in (0, 1)$, $r \in (1, \infty)$, таковы что

$$s \cdot r > 3, \quad (2.33c)$$

$$2s - \frac{3}{r} < 1; \quad (2.33d)$$

- параметры задачи удовлетворяют требованиям

$$\frac{1}{\Lambda} \leq \tau^2, \quad p_j(\rho_j) \in C^3(0, \infty), \quad j = 1, 2 \quad (2.33e)$$

$$\text{Re} \leq \tau^2, \quad a \leq \tau^2; \quad (2.33f)$$

$$|\tau_{12}| \leq \tau, \quad |\tau_{21}| \leq \tau, \quad (2.33g)$$

где $\tau \in (0, \tau_0]$.

Тогда справедливы утверждения:

- (i) Найдется такое число $\sigma_1 > 1$, что если $\tau_{ii} \geq \sigma_1, i = 1, 2$, то для каждого $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) \in B_\tau$ задача (2.32) имеет единственное решение

$$\vec{\theta}_1 = \left(\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}, \pi_1^1, \pi_2^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1 \right) \in E.$$

- (ii) Найдется такое $\tau^* \leq \tau_0$, что для $\tau \in (0, \tau^*]$ отображение W переводит шар B_τ в себя.

- (iii) Отображение W секвенциально слабо непрерывно.

Доказательство теоремы 2.5 основано на последовательной реализации следующих шагов:

I. оценка правых частей уравнений (2.32a), (2.32b), (2.32c);

II. оценка решений задачи (2.32a)-(2.32d);

III. оценка констант m_1, m_2 ;

IV. доказательство утверждения (ii);

V. доказательство утверждения (iii).

I. Оценки правых частей.

Из свойств операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, установленных в [92] при выполнении условий (2.33b) и (2.33c):

$$\|\mathcal{A}(\vec{u})\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau^2 \|\vec{u}\|_{V^{s,r}}, \quad \|\mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{u})\|_{Z^{s,r}} \leq c \cdot \|\rho\|_{X^{s,r}} \|\vec{u}\|_{X^{s,r}} \|\nabla \vec{u}\|_{X^{s,r}},$$

оценки оператора $\mathcal{S}$:

$$\|\mathcal{S}(\vec{u})\|_{Z^{s,r}} \leq c \cdot a \|\vec{u}\|_{V^{s,r}}$$

и условий (2.33f) следует неравенство

$$\left\| \vec{F}^{(i)}(\rho_i, u^{(1)}, u^{(2)}) \right\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau^2, \quad (2.34)$$

где

$$\vec{F}^{(i)}(\rho_i, u^{(1)}, u^{(2)}) = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\vec{u}^{(j)}) + \text{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}).$$

Оценим функции $\Phi_i[\vec{\theta}]$. По формуле Тейлора функции $H_j(\varphi_j)$ могут быть представлены в виде $H_j(\varphi_j) = f_j(\varphi_j) \cdot \varphi_j^2$, где $f_j \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Поэтому согласно оценке суперпозиции (лемма 1.16)

$$\|H_j(\varphi_j)\|_{X^{s,r}} \leq c \cdot \|f_j(\varphi_j)\|_{X^{s,r}} \cdot \|\varphi_j\|_{X^{s,r}}^2 \leq c \cdot (1 + \|\varphi_j\|_{X^{s,r}}) \cdot \|\varphi_j\|_{X^{s,r}}^2.$$

Отсюда в силу того, что $\vec{\theta} \in B_\tau$ получим

$$\|H_j(\varphi_j)\|_{X^{s,r}} \leq c\tau^2. \quad (2.35)$$

Из формулы (2.19), неравенства (2.35) и условия (2.33e) следует оценка

$$\left\| \Phi_i[\vec{\theta}] \right\|_{X^{s,r}} \leq c\tau_{ii}\tau^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.36)$$

Неравенства

$$\left\| \Psi_i[\vec{\theta}] \right\|_{X^{s,r}(\Omega)} \leq c\tau_{ii}\tau^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.37)$$

доказываются (при выполнении дополнительных условий (2.33g)) аналогично.

II. Оценки решений задачи (2.32a)-(2.32d)

Согласно лемме 1.34 найдется постоянная $\sigma_1 > 1$ и c , зависящая только от Ω , $\vec{U}^{(i)}$, $i = 1, 2$, s , r , μ_{ij} , $i, j = 1, 2$, такая, что для любых параметров $\tau_{11} > \sigma_1$, $\tau_{22} > \sigma_1$

задачи (2.32a) имеют единственные решения $\varphi_1^1, \varphi_2^1 \in X^{s,r}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq c \cdot \|\Psi_i[\vec{\theta}]\|_{X^{s,r}} + c|m_i|, \quad i = 1, 2.$$

Которые вместе с (2.37) дают оценки

$$\|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq c\tau_{ii}\tau^2 + c|m_i| \leq c \cdot \tau^2 \cdot \max\{\tau_{11}, \tau_{22}\} + c|m_i|, \quad i = 1, 2. \quad (2.38)$$

Согласно теореме 1.31 задача (2.32b)-(2.32d) имеет единственное решение $(\vec{v}_1^{(i)}, \pi_i^1) \in V^{s,r} \times X^{s,r}$, $i = 1, 2$, для которого имеют место оценки

$$\|\vec{v}_1^{(i)}\|_{V^{s,r}} + \|\pi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq c_i \left(\sum_{j=1}^2 \left[\|\vec{F}^{(j)}(\rho_j, u^{(1)}, u^{(2)})\|_{Z^{s,r}} + \|G_j\|_{X^{s,r}} \right] \right), \quad (2.39)$$

где

$$G_i = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j^1 - g\Phi_i[\vec{\theta}] - gm_i.$$

Так как, очевидно

$$\|G_i\|_{X^{s,r}} \leq c \left[\sum_{j=1}^2 |\tau_{ij}| \|\varphi_j^1\|_{X^{s,r}} + \|\Phi_i[\vec{\theta}]\|_{X^{s,r}} + |m_i| \right], \quad i = 1, 2,$$

то в силу доказанных выше неравенств (2.36) и (2.38) получаем

$$\|G_i\|_{X^{s,r}} \leq c \max\{\tau_{11}, \tau_{22}\} \tau^2 + c \sum_{j=1}^2 |m_j|, \quad i = 1, 2. \quad (2.40)$$

Таким образом имеет место факт существования единственного решения $\vec{\theta}_1 \in E$ задачи (2.32), для которого в силу неравенств (2.34), (2.38)-(2.40) имеет место оценка

$$\|\vec{\theta}_1\|_E \leq c \cdot \tau^2 \cdot \max\{\tau_{11}, \tau_{22}\} + c|m_1| + c|m_2|. \quad (2.41)$$

III. Оценки констант $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$

Поскольку константы $\vec{m} = (m_1, m_2)^T$ определяются по формулам (2.32e), то сначала оценим снизу квадратичную форму

$$\left((k\mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) = \sum_{i=1}^2 (k - a_{ii}) \xi_i^2 - (a_{12} + a_{21}) \xi_1 \xi_2.$$

В силу формул (2.32e) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
k - a_{ii} &= \int_{\Omega} g \left(1 - \rho_i^{*-1} \rho_i \cdot \zeta_i^{(i)} \right) dx = \\
&= \int_{\Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right) dx + \int_{\Omega} (g - 1) \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right) dx - \int_{\Omega} g \rho_i^{*-1} \varphi_i \cdot \zeta_i^{(i)} dx \geq \\
&\geq \int_{\Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^+ dx - \left| \int_{\Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- dx \right| - \\
&- \left| \int_{\Omega} (g - 1) \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right) dx \right| - \left| \int_{\Omega} g \rho_i^{*-1} \varphi_i \cdot \zeta_i^{(i)} dx \right|.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Так как $\zeta_i^{(i)} \in X^{s,r}(\Omega)$ и $sr > 3$, то $\zeta_i^{(i)}$ непрерывны в Ω и принадлежат классу $W^{1,2}(\Omega)$. Тогда и $\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^-$ также являются непрерывными функциями принадлежащими $W^{1,2}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\nabla \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- &= -\nabla \zeta_i^{(i)}, \quad \text{п.в. на множестве } \left\{ x : 1 - \zeta_i^{(i)} < 0 \right\} \\
\nabla \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- &= 0, \quad \text{п.в. на множестве } \left\{ x : 1 - \zeta_i^{(i)} \geq 0 \right\}
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что поскольку $\zeta_i^{(i)}$ – решение задачи (2.32f), то функции $\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^-$ удовлетворяют уравнению

$$-\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- + \tau_{ii} \cdot \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- = f^{(i)}, \quad \text{п.в. в } \Omega, \tag{2.43}$$

и граничному условию

$$\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- = 0 \quad \text{на } \Sigma_{out}^{(i)},$$

где $f^{(i)} = -\zeta_i^{(i)} \operatorname{div} \vec{v}^{(i)} - \tau_{ii} (g - 1)$, п.в. на множестве $\left\{ x : 1 - \zeta_i^{(i)} < 0 \right\}$,

$$f^{(i)} = 0, \quad \text{п.в. на множестве } \left\{ x : 1 - \zeta_i^{(i)} \geq 0 \right\}.$$

Умножая уравнение (2.43) на произвольную функцию $q \in C^1(\Omega)$, обращаясь в нуль в окрестности $\Sigma \setminus \Sigma_{out}^{(i)}$, получаем тождество

$$\int_{\Omega} \left[\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- (\operatorname{div}(\vec{u}^{(i)} \cdot q) + \tau_{ii} \cdot q) - f^{(i)} \cdot q \right] dx = 0.$$

Таким образом функции $\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- \in C(\Omega)$ являются ограниченными слабыми решениями (1.56), в которой роль объектов $\vec{u}^{(i)}$, $\vec{U}^{(i)}$ и $\Sigma_{in}^{(i)}$ играют соответственно $-\vec{u}^{(i)}$, $-\vec{U}^{(i)}$ и $\Sigma_{out}^{(i)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \tau_{ii}^{-1} \left(\left\| \zeta_i^{(i)} \cdot \operatorname{div} \vec{v}^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + |\tau_{ii}| \|g - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leq \\
&\leq \tau_{ii}^{-1} \left(\left\| \zeta_i^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left\| \operatorname{div} \vec{v}^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + |\tau_{ii}| \|g - 1\|_{C^2(\Omega)} \right) \leq \\
&\leq c \cdot \tau_{ii}^{-1} \cdot \tau \left\| \zeta_i^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + c \cdot \tau^2, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

При этом лемма 1.34 также гарантирует неравенство ($\zeta_i^{(i)}$ – решение задачи типа (1.57))

$$\begin{aligned} \left\| \zeta_i^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \left(\tau_{ii} - \left\| \operatorname{div} \vec{v}^{(i)} \right\|_{C(\Omega)} \right)^{-1} \cdot \tau_{ii} \cdot \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \tau_{ii} \cdot c (\tau_{ii} - c \cdot \tau)^{-1} \leq c (1 - c \cdot \tau)^{-1}, \quad (\text{т.к. } \tau_{ii} > 1). \end{aligned}$$

Выбираем параметр $\tau_1 > 0$ так, что $c \cdot \tau_1 < \frac{1}{2}$. Тогда получим

$$\left\| \zeta_i^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2c \text{ для всех } \tau \in (0, \tau_1]. \quad (2.45)$$

Из (2.44) и (2.45) вытекают оценки

$$\left\| \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^- \right\|_{C(\Omega)} \leq c \cdot \tau_{ii}^{-1} \cdot \tau + c \cdot \tau^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.46)$$

Так как функции $\zeta_i^{(i)}$ обращаются в нуль на $\Sigma_{out}^{(i)}$, то для всех $x : \operatorname{dist} \left(x, \Sigma_{out}^{(i)} \right) \leq d_i$ имеем

$$|\zeta_i^{(i)}| \leq c \cdot \tau_{ii} \cdot d_i^\alpha, \quad i = 1, 2. \quad (2.47)$$

Действительно, в силу леммы 1.34 и ограниченности вложения $W^{s,r}(\Omega)$ в $C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha < s - \frac{3}{r}$ справедливы неравенства

$$\|\zeta_i^{(i)}\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq c_0(\Omega) \cdot \|\zeta_i^{(i)}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \cdot \tau_{ii} \cdot \|g\|_{X^{s,r}(\Omega)} \leq c \cdot \tau_{ii}, \quad i = 1, 2. \quad (2.48)$$

Если $\operatorname{dist} \left(x, \Sigma_{out}^{(i)} \right) \leq d_i$, то, очевидно,

$$|\zeta_i^{(i)}(x)| \leq \|\zeta_i^{(i)}\|_{C^\alpha(\Omega)} \cdot d_i^\alpha. \quad (2.49)$$

Из (2.48) и (2.49) вытекают оценки (2.47).

Положим $d_i = (2c \cdot \tau_{ii})^{-\frac{1}{\alpha}}$ (c – постоянная из неравенства (2.47)). Тогда получим

$$|\zeta_i^{(i)}(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{если } \operatorname{dist} \left(x, \Sigma_{out}^{(i)} \right) \leq d_i.$$

Обозначим через $O(d_i)$ d_i -окрестность $\Sigma_{out}^{(i)}$ в $\mathbb{R}^3$. Так как $\Sigma_{out}^{(i)}$ многообразие класса C^1 , то существует постоянная c_1 зависящая только от Ω такая, что $\operatorname{meas} (O(d_i) \cap \Omega) \geq c_1^{-1} d_i$.

Тогда справедливо неравенство

$$\int_{O(d_i) \cap \Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right) dx \geq 2c_2^{-1} \cdot (c \cdot \tau_{ii})^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad c_2 = 2^{2+1/\alpha} \cdot c_1, \quad i = 1, 2. \quad (2.50)$$

Так как функции $\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^+$ совпадают с $\left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)$ на $O(d_i) \cap \Omega$, то

$$\int_{\Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right)^+ dx \geq \int_{O(d_i) \cap \Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)} \right) dx, \quad i = 1, 2,$$

и, следовательно, в силу (2.50) получаем неравенство

$$\int_{\Omega} \left(1 - \zeta_i^{(i)}\right)^+ dx \geq c^{-1} \cdot \tau_{ii}^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.51)$$

Из леммы 1.19 и неравенства (2.45) нетрудно получить оценку

$$\left| \int_{\Omega} (g - 1) \left(1 - \zeta_i^{(i)}\right) dx \right| \leq c \cdot \tau^2. \quad (2.52)$$

Принимая во внимание неравенства (2.45) и условия $\|\varphi_i\|_{X^{s,r}} \leq \tau$, получим

$$\left| \int_{\Omega} g \rho_i^{*-1} \varphi_i \cdot \zeta_i^{(i)} dx \right| \leq c \cdot \tau. \quad (2.53)$$

Из (2.42), (2.46), (2.51) – (2.53) следует, что может быть указана постоянная $c > 0$, для которой справедливы неравенства

$$k - a_{ii} \geq c^{-1} \cdot \tau_{ii}^{-\frac{1}{\alpha}} - c \cdot \tau, \quad i = 1, 2. \quad (2.54)$$

Так как в силу лемм 1.34 и 1.19 имеют место оценки

$$\left\| \xi_i^{(j)} \right\|_{X^{s,r}} \leq |\tau_{ij}| \|g\|_{X^{s,r}} \leq c |\tau_{ij}|, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.55)$$

из условия (2.33g) имеем $\left\| \xi_i^{(3-i)} \right\|_{X^{s,r}} \leq c \cdot \tau$, $i = 1, 2$, и, следовательно,

$$|a_{12}| = \left| \frac{1}{\rho_1^*} \int_{\Omega} g \cdot (\rho_2^* + \varphi_2) \cdot \zeta_1^{(2)} dx \right| \leq c \cdot \tau. \quad (2.56)$$

Точно также доказывается неравенство

$$|a_{21}| \leq c \cdot \tau. \quad (2.57)$$

Положим $\sigma = \max \{\tau_{11}, \tau_{22}\}$. В силу оценок (2.54), (2.56), (2.57) имеем

$$\left((k\mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) \geq \left(c^{-1} \cdot \sigma^{-\frac{1}{\alpha}} - 2c \cdot \tau \right) \left| \vec{\xi} \right|^2. \quad (2.58)$$

Выбирая параметр τ из условия $2c^2 \cdot \sigma^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau \leq \frac{1}{2}$, из (2.58) получим неравенство

$$\left((k\mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) \geq \frac{1}{2} c^{-1} \cdot \sigma^{-\frac{1}{\alpha}} \left| \vec{\xi} \right|^2,$$

из которого согласно лемме 1.17 вытекает, что

$$\left\| (k\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{\xi} \right\| \leq 2c \cdot \sigma^{\frac{1}{\alpha}} \left| \vec{\xi} \right|. \quad (2.59)$$

Таким образом из свойства (2.59) и формулы (2.32e) получаем оценку

$$|\vec{m}| \leq 2c \cdot \sigma^{\frac{1}{\alpha}} \left| \vec{f} \right|. \quad (2.60)$$

Из оценок (2.36), (2.37), (2.45) и ограниченности вложения $X^{s,r}(\Omega)$ в $C(\Omega)$ ($s \cdot r > 3$), очевидно, следуют неравенства

$$|f_i| \leq c \cdot \sigma \tau^2, \quad i = 1, 2,$$

и поэтому согласно (2.60) получим

$$|\vec{m}| \leq c \sigma^{1+\frac{1}{\alpha}} \tau^2. \quad (2.61)$$

IV. Автоморфизм.

Теперь можно доказать, что для достаточно малых значений параметра τ отображение W переводит шар B_τ в себя.

Из (2.41) и (2.61) следует, что для всех $\tau_{11} > \sigma_1$ и $\tau_{22} > \sigma_1$ решение $\vec{\theta}_1 = W(\vec{\theta})$ задачи (2.32) удовлетворяет неравенству

$$\left\| \vec{\theta}_1 \right\|_E \leq c \cdot \tau^2 \cdot \sigma + c \sigma^{1+\frac{1}{\alpha}} \tau^2, \text{ где } \sigma = \max \{ \tau_{11}, \tau_{22} \}.$$

Так как σ фиксированное число, то можно выбрать $\tau^* \in (0, \tau_1]$ настолько малым, что

$$c \cdot \tau \cdot \sigma + c \sigma^{1+\frac{1}{\alpha}} \tau < 1 \text{ для всех } \tau \in (0, \tau^*].$$

При таком выборе τ будет выполняться неравенство

$$\left\| \vec{\theta}_1 \right\|_E = \sum_{j=1}^2 \left(\left\| \vec{v}_1^{(j)} \right\|_{V^{s,r}(\Omega)} + \left\| \varphi_j^1 \right\|_{X^{s,r}(\Omega)} + \left\| \pi_j^1 \right\|_{X^{s,r}(\Omega)} \right) \leq \tau,$$

означающее, что вектор $\vec{\theta}_1 = W(\vec{\theta})$ содержится в шаре B_τ . Так как вектор $\vec{\theta} \in B_\tau$ был выбран произвольно, то отображение W переводит шар B_τ в себя.

V. Секвенциальная слабая непрерывность отображения W .

Покажем, что отображение W секвенциально слабо непрерывно. Пусть последовательность $\vec{\theta}_n = \left(\vec{v}_n^{(1)}, \vec{v}_n^{(2)}, \pi_1^n, \pi_2^n, \varphi_1^n, \varphi_2^n \right) \in B_\tau$ сходится слабо в E . В силу рефлексивности этого пространства предельный элемент $\vec{\theta}$ данной последовательности так же принадлежит E и более того $\vec{\theta} \in B_\tau$, так как шар B_τ есть множество замкнутое и выпуклое. Поскольку элемент $\vec{\theta}_{1,n} = W(\vec{\theta}_n)$ содержится в шаре $B_\tau \in E$, то существует подпоследовательность $\left\{ \vec{\theta}_{1,n_k} \right\} \subset \left\{ \vec{\theta}_{1,n} \right\}$ и элемент $\vec{\theta}_1 \in B_\tau$, такой, что $\vec{\theta}_{1,n_k} \rightarrow \vec{\theta}_1$ слабо в E .

Из (2.55) следует ограниченность в $X^{s,r}$ последовательностей функций $\{\zeta_{i,n}^{(j)}\}$, $i, j = 1, 2$, ($\zeta_{i,n}^{(j)}$ – решение задачи (2.32f), соответствующее элементу $\vec{u}_n^{(j)} = \vec{u}_*^{(j)} + \vec{v}_n^{(j)}$). В силу рефлексивности пространства $X^{s,r}$ (лемма 1.8) можем считать, что подпоследовательности $\{\zeta_{i,n_k}^{(j)}\} \subset \{\zeta_{i,n}^{(j)}\}$ сходятся слабо в $X^{s,r}$ к функциям $\zeta_i^{(j)} \in X^{s,r}$, в частности, $\nabla \zeta_{i,n_k}^{(j)} \rightharpoonup \nabla \zeta_i^{(j)}$ слабо в $L^2(\Omega)$. В силу компактности вложения $X^{s,r} \subset C(\Omega)$ и $E \subset C(\Omega)$, имеем, что $\vec{\theta}_n \rightarrow \vec{\theta}$ в $C(\Omega)$, $\vec{\theta}_{1,n_k} \rightarrow \vec{\theta}_1$ в $C(\Omega)$ и $\zeta_{i,n_k}^{(j)} \rightarrow \zeta_i^{(j)}$ в $C(\Omega)$.

В уравнениях вида (2.32), связывающих вектор-функции $\vec{\theta}_{n_k}$ и $\vec{\theta}_{1,n_k}$, в силу вышесказанного возможен предельный переход при $n_k \rightarrow \infty$, в результате чего получим соотношение $\vec{\theta}_1 = W(\vec{\theta})$. Таким образом любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{\vec{\theta}_{1,n_k}\}$ последовательности $\{\vec{\theta}_{1,n}\}$ имеет своим пределом единственный элемент $\vec{\theta}_1 \in B_\tau$. Следовательно, слабо сходящейся к $\vec{\theta}_1$ является и вся последовательность $\{\vec{\theta}_{1,n}\}$, что доказывает секвенциальную слабую непрерывность отображения W . Теорема 2.5 доказана.

2.3. Применение теоремы о неподвижной точке

Из теоремы 2.5 и теоремы Тихонова о неподвижной точке (теорема 1.18) следует, что существует такой элемент $\vec{\theta} \in B_\tau$, что $W(\vec{\theta}) = \vec{\theta}$. Осталось доказать, что неподвижная точка $\vec{\theta} = W(\vec{\theta}) \in E$ является решением задачи (2.26). Из определения отображения W и уравнений (2.32) следует, что вектор $\vec{\theta}$ и соответствующие функции $\zeta_i^{(j)}$ являются сильным решением краевой задачи которая отличается от задачи (2.26) наличием оператора проектирования в правой части уравнения (2.32с). Следовательно, достаточно показать, что

$$\Pi \left(g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i \right) = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что функция

$$\Upsilon_i = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\vec{\theta}] - g m_i$$

имеет нулевое среднее значение на Ω , т.е. $\int_{\Omega} \Upsilon_i(x) dx = 0$, $i = 1, 2$, что отражено формулой (2.22). Таким образом построенная вектор - функция $\vec{\theta} \in B_\tau$ является решением задачи (2.26).

§ 3. Зависимость решений от деформации области

Теорема 2.3 гарантирует существование решения (быть может не единственного) $\vec{q} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}; m_1, m_2)$ задачи (2.26) для всех достаточно малых Re , Λ^{-1} , a , τ_{12} , τ_{21} и всех матриц $\mathbf{N}$ близких к единичной матрице $\mathbf{I}$.

Важным этапом исследования задачи оптимизации формы является доказательство единственности решения задачи (2.26) и дифференцируемости ее решения относительно параметра ε . Для этого прежде всего необходимо исследовать зависимость этих решений от матрицы $\mathbf{N}$, полностью определяемой деформацией $x + \varepsilon \vec{T}(x)$ области и заданной формулой (2.3). На данном этапе структура матрицы $\mathbf{N}$ не имеет значения, и поэтому полученные результаты будут иметь место для произвольной гладкой матричнозначной функции $\mathbf{N}(x)$, $x \in \Omega$.

3.1. Линейная задача для разности.

Для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$,

$$\vec{q}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}; \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \zeta_{1i}^{(1)}, \zeta_{2i}^{(1)}, \zeta_{1i}^{(2)}, \zeta_{2i}^{(2)}; m_1^i, m_2^i), i = 0, 1,$$

решений задачи (2.26), построенных в теореме 2.3 и соответствующих различным матрицам $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$, введем обозначения

$$\begin{aligned} \vec{w}^{(j)} &= \vec{v}_0^{(j)} - \vec{v}_1^{(j)}, \quad \omega_j = \pi_j^0 - \pi_j^1, \quad \psi_j = \varphi_j^0 - \varphi_j^1, \quad n_j = m_j^0 - m_j^1, \\ \xi_j^{(k)} &= \zeta_{j0}^{(k)} - \zeta_{j1}^{(k)}, \quad k, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Из (2.26) следует, что вектор-функция

$$\vec{q}_0 - \vec{q}_1 = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$$

является решением следующей линейной задачи (вывод этих уравнений приведен в приложении В):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \\ + \text{Re} \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i &+ (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \tag{2.63a}$$

$$\text{div} \vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d \text{ в } \Omega, \tag{2.63b}$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \text{ в } \Omega, \quad (2.63c)$$

$$-div(\vec{u}_0^{(i)} \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} = div(\vec{w}^{(i)} \zeta_{j1}^{(i)}) + \tau_{ji} d \text{ в } \Omega, \quad (2.63d)$$

$$\vec{w}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \omega_i = \Pi \omega_i, \quad \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \quad (2.63e)$$

$$n_i = \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^2 (\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)}) \right] dx, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.63f)$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\mathcal{A}_k(\vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad \mathcal{B}_k(\rho, \vec{u}, \vec{w}) = \mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad \mathcal{S}_k(\vec{w}) = \mathcal{S}(\vec{w}; \mathbf{N}_k), \quad k = 0, 1,$$

$$\mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) = \mathcal{B}_0(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{w}^{(i)}), \quad (2.64)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_0(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}) - \mathcal{S}_1(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}),$$

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) \right) + \text{Re} \left(\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) - \mathcal{B}_1(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) \right), \quad (2.65)$$

$$d = g_0 - g_1, \quad g_k = \sqrt{\det \mathbf{N}_k}.$$

Символы χ_{ik}^0 обозначают элементы матрицы $(k(\mathbf{N}_0)\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{N}_0, \vec{\theta}_0))^{-1}$.

Коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i, \delta_i, \hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i, \tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\delta}_i, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (2.63b), (2.63c) и (2.63f) задаются формулами

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{ii} &= \tau_{ii} (1 - g_0) + g_0 \Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - g_0 \rho_i^1 \Theta_{ii} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) - \frac{\tau_{ii} g_0}{\rho_i^*} (\varphi_i^0 + \varphi_i^1) - \frac{g_0}{\rho_i^*} \tau_{i,3-i} \varphi_{3-i}^1 + g_0 m_i^1; \\ \hat{\alpha}_{ij} &= -g_0 \rho_i^1 \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) - \frac{g_0 \varphi_i^0}{\rho_i^*} \tau_{ij} - g_0 \tau_{ij}, \quad i \neq j; \\ \hat{\beta}_{ij} &= \frac{g_0 \rho_i^1}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j' (\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \hat{\gamma}_i = g_0 \rho_i^0; \\ \hat{\delta}_i &= \rho_i^1 \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} (\varphi_i^1)^2 - \tau_{ii} \varphi_i^1 + m_i^1 \rho_i^1 - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 - \tau_{i,(3-i)} \frac{\varphi_i^1 \varphi_{3-i}^0}{\rho_i^*}; \\ \alpha_{ij} &= g_0 \left(\Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \frac{\tau_{ij}}{\rho_i^*} \right); \quad \beta_{ij} = -\frac{g_0}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j' (\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \gamma_i = -g_0; \\ \delta_i &= -\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} \varphi_i^1 - m_i^1 + \frac{\tau_{i,(3-i)}}{\rho_i^*} \varphi_{3-i}^1 \\ \tilde{\alpha}_{ij} &= \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} (\hat{\alpha}_{jj} - m_j^1 g_0) + \frac{m_j^1 g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} - g_0 \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \hat{\alpha}_{3-j,j}; \\ \tilde{\beta}_{ij} &= \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{jj} + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{3-j,j} + \beta_{ij}; \quad \tilde{\gamma}_{ij} = \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right]}{\rho_i^*} + g_0 m_j^1 \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right); \\ \tilde{\delta}_i &= \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \left(\hat{\delta}_j - m_j^1 \rho_j^1 \right) - m_j^1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\rangle; \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\Theta_{ij}(\varphi_i^0, \varphi_i^1) = \frac{\tau_{ij}}{p_i'(\rho_i^*) \rho_i^*} \int_0^1 H_i'(\varphi_i^0 s + \varphi_i^1 (1-s)) ds. \quad (2.67)$$

Эти функции зависят от решений $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$ и рассматриваются как известные.

Для удобства ссылок сформулируем в одном блоке условия, вытекающие из теоремы существования 2.3.

Условие 2.6.

- Граница $\partial\Omega$ и векторные поля $\vec{U}^{(1)}$, $\vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условиям 2.1.
- Для показателей r и s выполнены неравенства

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad 2s - 3r^{-1} < 1, \quad sr > 3, \quad (1-s)r > 3. \quad (2.68)$$

- Параметры $\sigma^* > 1$ и $\tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}) < 1$, $\tau_{11}, \tau_{22} \in (\sigma^*, \infty)$ заданы в теореме 2.3.
- Пусть $\tau_{11} \geq \sigma^*$, $\tau_{22} \geq \sigma^*$ и $\tau \in (0, \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})]$.
- Пусть

$$a, \Lambda^{-1}, Re \in (0, \tau^2], \quad \tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau], \quad \|\mathbf{N}_i - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2, i = 0, 1. \quad (2.69)$$

- $\tau \in (0, \tau_0]$, где τ_0 - абсолютная константа, заданная в лемме 1.19 и тем самым обеспечивающая неравенства

$$\|\mathbf{N}_i^{\pm 1} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} + \|g_i^{\pm 1} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2, i = 0, 1. \quad (2.70)$$

- При выполнении вышеперечисленных условий теорема 2.3 гарантирует существование решений $\vec{q}_i$, соответствующих матрицам $\mathbf{N}_i$ задачи (2.26), таких что $\vec{\theta}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}, \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i) \in B_\tau$ и выполнены неравенства (2.29)-(2.31).
- $\vec{u}_i^{(j)} = \vec{u}_*^{(j)} + \vec{v}_i^{(j)}$ и $\rho_j^i = \rho_j^* + \varphi_j^i$, $i = 0, 1$; $j = 1, 2$.

Следующая лемма касается оценок коэффициентов (2.66), которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 2.7. Пусть выполнено условие 2.6. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\{ \|\alpha_{ij}\|_{X^{s,r}}, i \neq j, \|\beta_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\delta_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} &\leq c\tau, \\ \left\{ \|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} &\leq c\tau, \\ \|\alpha_{ii}\|_{X^{s,r}}, \|\gamma_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\gamma}_i\|_{X^{s,r}} &\leq c, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где параметр τ обозначает радиус шара в пространстве $V^{s,r} \times X^{s,r}$, которому принадлежат решения $\vec{\theta}_0$ и $\vec{\theta}_1$. Через c обозначена постоянная, зависящая только от области Ω , векторных полей $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ и параметров $r, s, \tau_{11}, \tau_{22}$.

Доказательство. Так как матрицы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$ выбраны в соответствии с условием 2.6, то справедливо неравенство

$$\|g_0 - 1\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2. \quad (2.72)$$

В силу тех же условий 2.6 вектор функции $\vec{\theta}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}, \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i)$, $i = 0, 1$, принадлежат шару B_τ и, следовательно, для функций $\Psi_k[\vec{\theta}_i]$ и $\Phi_k[\vec{\theta}_i]$, $k = 1, 2; i = 0, 1$, справедливы неравенства вида (2.36) и (2.37)

$$\left\| \Psi_k[\vec{\theta}_i] \right\|_{X^{s,r}} \leq c\tau^2, \quad \left\| \Phi_k[\vec{\theta}_i] \right\|_{X^{s,r}} \leq c\tau^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.73)$$

полученные при доказательстве теоремы 2.5.

По условию функции $H_i(s) = p_i(\rho_i^* + s) - p_i(\rho_i^*) - p'_i(\rho_i^*)s$, $i = 1, 2$, принадлежат классу $C^3(\mathbb{R})$ и при этом производная $H'_i(\varphi_i) = p'_i(p_i^* + \varphi_i) - p'_i(p_i^*) \in C^2(\mathbb{R})$ обращается в нуль в точке $s = 0$. Следовательно, функция $\Theta_{ij}(t_1, t_2)$, определенные в (2.67) принадлежат $C^2(\mathbb{R}^2)$ и $\Theta_{ij} \Big|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = 0$. Тем самым имеет место представление

$$\Theta_{ij}(t_1, t_2) = t_1 \Theta_{ij}^0(t_1, t_2) + t_2 \Theta_{ij}^1(t_1, t_2), \quad (2.74)$$

где $\Theta_{ij}^0, \Theta_{ij}^1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $i, j = 1, 2$. Так как $\vec{\theta}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}, \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i) \in B_\tau$, то

$$\|\varphi_j^i\|_{X^{s,r}} \leq \tau, \quad j = 1, 2; i = 0, 1. \quad (2.75)$$

Следовательно, суперпозиция $x \rightarrow \Theta_{ij}(\varphi_i^0(x), \varphi_i^1(x))$ принадлежит пространству $X^{s,r}$ и в силу тождества (2.74) и леммы 1.16 имеют место неравенства

$$\|\Theta_{ij}(\varphi_i^0, \varphi_i^1)\|_{X^{s,r}} \leq c \|\varphi_i^0\|_{X^{s,r}} \|\Theta_{ij}^0(\varphi_i^0, \varphi_i^1)\|_{X^{s,r}} + c \|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \|\Theta_{ij}^1(\varphi_i^0, \varphi_i^1)\|_{X^{s,r}} \leq c\tau. \quad (2.76)$$

Кроме того согласно условию 2.6 для функций $\zeta_{ki}^{(j)}$ и констант $m_{ki}^j, k, j = 1, 2, i = 0, 1$, справедливы неравенства

$$\left\| \zeta_{ji}^{(3-j)} \right\|_{X^{s,r}} \leq c\tau, \quad \left\| \zeta_{ji}^j \right\|_{X^{s,r}} \leq c, \quad |\vec{m}_i| \leq c\tau, \quad i = 0, 1, j = 1, 2. \quad (2.77)$$

Применяя к формулам (2.66) оценки (2.72)–(2.77) и, учитывая что $\Lambda^{-1} \in (0, \tau^2]$, $|\tau_{12}|, |\tau_{21}| \in (0, \tau]$, приходим к (2.71).

3.2. Сопряженная задача.

Задача (2.63) для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ имеет ту особенность, что к уравнениям (2.63с), входящим в состав этой задачи неприменимы известные результаты (см. лемма 1.33 и

лемма 1.34) о транспортных уравнениях, в силу того, что слагаемое $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ не удовлетворяет нужным условиям гладкости (не является ни гладким, ни ограниченным). Однако из теоремы существования вытекает принадлежность слагаемых $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ пространству $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, двойственному к $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, и поэтому возникает возможность трактовать разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ как очень слабое решение задачи (2.63). В связи с этим сформулируем сопряженную задачу следующим образом.

Для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1, 2$ найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы $n_i^*, i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* - \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})) - \text{Re} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ & + (-1)^{i+1} \mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.78a)$$

$$\text{div} \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega, \quad (2.78b)$$

$$\begin{aligned} & -\text{div}(\psi_i^* \vec{w}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = \text{Re} \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ & + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.78c)$$

$$\vec{w}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ij} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad (2.78d)$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, \quad (2.78e)$$

$$\vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i, j = 1, 2. \quad (2.78f)$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{M}_i$ определены формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(\vec{h}) &= \rho_i^1 \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{w}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} - (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \text{div}(\rho_i^1 \vec{w}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})), \\ \mathcal{M}_i(\vec{h}) &= (\vec{w}_0^{(i)} \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{w}_0^{(i)})) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Содержание следующего раздела посвящается доказательству существования и единственности сильных и слабых решений сопряженной задачи (2.78). Эти результаты позволяют вывести оценки норм разностей $\vec{w}^{(i)}, \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(j)}, n_i$, что является основной целью данного параграфа.

3.3. Исследование сопряженной задачи

Напомним обозначения функциональных пространств, приведенных в первой главе:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{s,r} &= \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{E}^{s,r} &= Z^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{s,r} = V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}, \quad s \in (0, 1), \quad r \in (1, \infty).\end{aligned}$$

и сформулируем теорему о корректности сопряженной задачи (2.78).

Теорема 2.8. Пусть выполнены условия 2.6. Тогда найдутся числа c , σ_c и τ_c , зависящие от данных задачи и параметров s, r такие, что если $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} > \sigma_c$ и $0 < \tau \leq \tau_c$, то для каждой вектор функции $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, задача (2.78) имеет единственное решение $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\vec{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \quad (2.80)$$

Если наложить более ограничительное условие на правую часть $\vec{f}$, а именно $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$, то решение $\vec{h}$ принадлежит классу $\mathcal{F}^{s,r}$ и при этом имеет место неравенство

$$\|\vec{h}\|_{\mathcal{F}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}. \quad (2.81)$$

Доказательство теоремы 2.8

Уравнения (2.78a)-(2.78e) сопряженной задачи представим в символическом виде

$$\mathbf{A}[\vec{h}_*] - \mathbf{B}[\vec{h}_*] = \vec{F}, \quad \vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)}), \quad \vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*),$$

где интегро-дифференциальные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются посредством формул

$$\begin{aligned}\mathbf{A}[\vec{h}_*] &= (\mathbf{A}_1[\vec{h}_*], \mathbf{A}_2[\vec{h}_*]), \\ \mathbf{A}_i[\vec{h}_*] &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \\ &div \vec{w}_*^{(i)} \\ &-\vec{w}_0^{(i)} \nabla \psi_i^* + \tau_{ii} \psi_i^* - \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* \\ &\vec{w}_0^{(i)} \nabla \xi_1^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_1^{(i)*} \\ &\vec{w}_0^{(i)} \nabla \xi_2^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_2^{(i)*} \\ &n_i^* - \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{B}[\vec{h}_*] = (\mathbf{B}_1[\vec{h}_*], \mathbf{B}_2[\vec{h}_*]), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{B}_i[\vec{h}_*] = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) - \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1 \\ \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right] \\ \operatorname{Re} \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \psi_i^* \operatorname{div} \vec{w}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} \right] \\ \tilde{\gamma}_{i1} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \\ \tilde{\gamma}_{i2} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу, присоединяя к системе уравнений

$$\mathbf{A}[\vec{h}_*] = \vec{F} \quad (2.84)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \vec{w}_*^{(j)} &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \\ \xi_1^{(i)*} &= 0, \quad \xi_2^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Следующая лемма доставляет точную формулировку утверждений о разрешимости задачи (2.84), (2.85).

Лемма 2.9. Пусть выполнено условие 2.6, тогда существуют постоянные $\sigma_3 \geq \sigma^*$ и c , зависящие от Ω , $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$, r , s такие, что если $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} \geq \sigma_3$, то для всех $\vec{F} = (\vec{F}^{(1)}, \vec{F}^{(2)}), \vec{F}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}, i = 1, 2$, задача (2.84), (2.85) имеет решение $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)}), \vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}, i = 1, 2$, такое что

$$\|\vec{h}_*\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{F}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \quad (2.86)$$

Если, кроме того $\vec{F} \in \mathcal{E}^{s,r}$, то

$$\|\vec{h}_*\|_{\mathcal{F}^{s,r}} \leq c \|\vec{F}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}. \quad (2.87)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для каждой правой части $\vec{F} = (\vec{F}^{(1)}, \vec{F}^{(2)}), \vec{F}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$, из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ краевая задача (2.84), (2.85) распадается на несколько независимых линейных граничных задач, а именно, функции

$\xi_j^{(i)*}, i, j = 1, 2$, определяются независимо как решения следующей задачи для транспортного уравнения

$$\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.88)$$

После этого компоненты $\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, i = 1, 2$, находятся как решения задач типа Стокса, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) &= \vec{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} &= \operatorname{PG}_i \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \operatorname{P}\omega_i^* = \omega_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Следующий шаг – определение компонент ψ_i^* как решения краевой задачи

$$-\vec{u}_0^{(i)} \nabla \psi_i^* + \tau_{ii} \psi_i^* = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.90)$$

Завершает процедуру построения решения задачи (2.84), (2.85) нахождение постоянных n_i^* по формулам

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.91)$$

Рассмотрим задачу (2.88). Согласно условию 2.6, векторные поля $\vec{u}_0^{(j)} = \vec{u}_*^{(j)} + \vec{v}_0^{(j)} \in V^{s,r}$, и, следовательно, $\vec{u}_0^{(j)} \in C^1(\Omega)$ в силу непрерывности вложения $V^{s,r}$ в $C^1(\Omega)$, причем

$$\left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{C^1(\Omega)} \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} \leq c, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, условия 2.6 гарантируют, что $\Omega, \vec{u}_0^{(i)}, s, r$ удовлетворяют всем требованиям лемм 1.33 и 1.34, и, следовательно, если $M_{ji} \in W^{s,r}(\Omega), i, j = 1, 2$, то, согласно лемме 1.33, существует такое число $\sigma_3 > 1$, зависящее от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s$, что для каждого $\tau_{ii} > \sigma_3, i = 1, 2$, краевая задача (2.88) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\left\| \xi_j^{(i)*} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \|M_{ji}\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.92)$$

Если $M_{ji} \in X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), i, j = 1, 2$, то лемма 1.34 гарантирует существование единственного решения $\xi_j^{(i)*}$ задачи (2.88) в пространстве $X^{s,r}$ и неравенства

$$\left\| \xi_j^{(i)*} \right\|_{X^{s,r}} \leq c \|M_{ji}\|_{X^{s,r}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.93)$$

Константа c в (2.92), (2.93) зависит только от Ω , $\vec{U}^{(1)}$, $\vec{U}^{(2)}$, r , s . Очевидно, можно брать $\sigma_3 \geq \sigma^*$.

Обратимся теперь к задаче (2.89) и покажем, что правые части, $\vec{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*}$, $i = 1, 2$, уравнений принадлежат пространству $Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Действительно, в силу условия 2.6 (гарантирующего утверждения теоремы существования 2.3) для функций $\zeta_{j1}^{(k)}$, $k, j = 1, 2$, имеет место оценка $\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \right\|_{X^{s,r}} \leq c$, которая вместе с соотношением (1.20) леммы 1.14

$$\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \zeta_{j1}^{(k)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \xi_j^{(k)*} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}$$

приводит к неравенству

$$\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \xi_j^{(k)*} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \quad (2.94)$$

В силу неравенств $\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \right\|_{C(\Omega)} \leq c \left\| \zeta_{j1}^{(k)} \right\|_{X^{s,r}} \leq c$ (вложение $X^{s,r} \hookrightarrow C(\Omega)$ ограничено) имеем

$$\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \zeta_{j1}^{(k)} \right\|_{C(\Omega)} \left\| \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \xi_j^{(k)*} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left\| \xi_j^{(k)*} \right\|_{X^{s,r}}. \quad (2.95)$$

Неравенства (2.94), (2.95) означают, что

$$\left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{Z^{s,r}} \leq c \left\| \xi_j^{(k)*} \right\|_{X^{s,r}}. \quad (2.96)$$

На основании доказанных ранее оценок (2.92), (2.93) из неравенств (2.94), (2.96) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} &\leq c \|M_{jk}\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \\ \left\| \zeta_{j1}^{(k)} \cdot \nabla \xi_j^{(k)*} \right\|_{Z^{s,r}} &\leq c \|M_{jk}\|_{X^{s,r}}, \quad j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Таким образом, если функции $\vec{H}^{(i)} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $G_i \in W^{s,r}(\Omega)$, $i = 1, 2$, то теорема 1.31 гарантирует существование единственного решения $(\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*) \in W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega)$, $i = 1, 2$, задачи (2.89), такого, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \left(\left\| \vec{w}_*^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \left\| \omega_i^* \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right) \leq \\ &\leq c \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \vec{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \|G_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Если $\vec{H}^{(i)} \in Z^{s,r}$ и $G_i \in X^{s,r}$, $i = 1, 2$, то по теореме 1.31 решение $(\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*)$, $i = 1, 2$, принадлежит пространству $V^{s,r} \times X^{s,r}$ и имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^2 (\|\vec{w}_*^{(i)}\|_{V^{s,r}} + \|\omega_i^*\|_{X^{s,r}}) \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \vec{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \right\|_{Z^{s,r}} + \|G_i\|_{X^{s,r}(\Omega)} \right). \quad (2.99)$$

Из неравенств (2.98), (2.99) с учетом оценок (2.97) получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 (\|\vec{w}_*^{(i)}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|\omega_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)}) \leq \\ & \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{H}^{(i)}\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|G_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \|M_{ji}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\sum_{i=1}^2 (\|\vec{w}_*^{(i)}\|_{V^{s,r}} + \|\omega_i^*\|_{X^{s,r}}) \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{H}^{(i)}\|_{Z^{s,r}} + \|G_i\|_{X^{s,r}} + \sum_{j=1}^2 \|M_{ji}\|_{X^{s,r}} \right). \quad (2.101)$$

На этом этапе функции $\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}$, $i = 1, 2$, определены, и теперь рассмотрим автономные для ψ_i^* , $i = 1, 2$, краевые задачи (2.90) для транспортных уравнений.

Поскольку по условию 2.6 граница $\partial\Omega$ и векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условиям 2.1, то $\partial\Omega$ и $-\vec{U}^{(1)}, -\vec{U}^{(2)}$ также удовлетворяют этим условиям. Таким образом, для вектор-функций $-\vec{u}_0^{(i)} \in V^{s,r}$, $i = 1, 2$ (по теореме вложения одновременно $-\vec{u}_0^{(i)} \in C^1(\Omega)$) и $\partial\Omega$, $-\vec{U}^{(1)}, -\vec{U}^{(2)}$ выполнены все условия леммы 1.33 и леммы 1.34, если поменять ролями множества Σ_{in}^i и Σ_{out}^i . Кроме того заметим, что слагаемые $\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^*$ в правых частях уравнений (2.90) принадлежат пространству $W^{s,r}(\Omega)$, если $\omega_k^* \in W^{s,r}(\Omega)$, и пространству $X^{s,r}$ — если $\omega_k^* \in X^{s,r}$. При этом имеют место неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \sum_{k=1}^2 \|\omega_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \quad (2.102)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* \right\|_{X^{s,r}} \leq c \sum_{k=1}^2 \|\omega_k^*\|_{X^{s,r}}, \quad (2.103)$$

которые легко получить, воспользовавшись свойствами (1.14) и (1.15) норм в $W^{s,r}(\Omega)$ и $X^{s,r}$ и оценками (2.71). Таким образом, в силу леммы 1.33 можно выбрать число σ_3 , зависящее от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s$, так, что для $\tau_{ii} > \sigma_3$, $i = 1, 2$, и $F_i, \omega_i^* \in W^{s,r}(\Omega)$, $i = 1, 2$, краевая задача

$$-\vec{u}_0^{(i)} \nabla \psi_i^* + \tau_{ii} \psi_i^* = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \quad i = 1, 2,$$

имеет единственное решение $\psi_i^* \in W^{s,r}(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \|\alpha_{ji} \omega_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|F_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right),$$

Если $F_i, \omega_i^* \in X^{s,r}$, $i = 1, 2$, то решение $\psi_i^*, i = 1, 2$, принадлежит $X^{s,r}$ и

$$\|\psi_i^*\|_{X^{s,r}} \leq c \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \|\alpha_{ji} \omega_k^*\|_{X^{s,r}} + \|F_i\|_{X^{s,r}} \right).$$

В силу свойств (1.14) и (1.15) норм в $W^{s,r}(\Omega)$ и $X^{s,r}$, оценок (2.71) и (2.100), (2.101) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} & \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \left(\sum_{k=1}^2 \left(\left\| \vec{H}^{(k)} \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|G_k\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \|M_{jk}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right) + \|F_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\|\psi_i^*\|_{X^{s,r}} \leq c \left(\sum_{k=1}^2 \left(\left\| \vec{H}^{(k)} \right\|_{Z^{s,r}} + \|G_k\|_{X^{s,r}} + \sum_{j=1}^2 \|M_{jk}\|_{X^{s,r}} \right) + \|F_i\|_{X^{s,r}} \right). \quad (2.105)$$

Константы n_i^* , $i = 1, 2$, определяемые по формулам (2.91), могут быть на основании неравенств (2.71) оценены следующим образом¹

$$|n_i^*| \leq c \left(\sum_{j=1}^2 \|\omega_j^*\|_{L^1(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{L^1(\Omega)} \right) + |s_i| \quad (2.106)$$

Оценки (2.92), (2.93), (2.100), (2.101), (2.104)–(2.106) доказывают неравенства (2.86) и (2.87), заявленные в лемме 2.9.

Утверждения леммы 2.9 мы трактуем как существование обратного линейного ограниченного оператора $\mathbf{A}^{-1}$, сопоставляющего элементу $\vec{F} \in \mathcal{U}^{s,r}$ ($\vec{F} \in \mathcal{E}^{s,r}$) единственное решение $\vec{h}_* = \mathbf{A}^{-1}[\vec{F}]$ из $\mathcal{V}^{s,r}$ (соответственно из $\mathcal{F}^{s,r}$) краевой задачи (2.84), (2.85), причем имеют место неравенство (2.86) (соответственно (2.87)).

Методика исследования задачи (2.78) использует оценки операторов (2.79), которые мы приведем в следующей лемме.

Лемма 2.10. Пусть выполнено условие 2.6. Тогда существует постоянная $c > 0$, зависящая от s , r и Ω , такая, что

$$(i) \quad \left\| \mathcal{A}_0(\vec{h}) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \quad \text{для всех } \vec{h} \in W^{s+1,r}(\Omega); \quad (2.107)$$

$$\left\| \mathcal{A}_0(\vec{h}) \right\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}} \quad \text{для всех } \vec{h} \in V^{s,r}; \quad (2.108)$$

¹Неравенство (2.106) вытекает из того, что $\|\gamma_i\|_{C(\Omega)} \leq \|\gamma_i\|_{X^{s,r}} \leq c$, $\|\hat{\gamma}_i\|_{C(\Omega)} \leq \|\hat{\gamma}_i\|_{X^{s,r}} \leq c$, $i = 1, 2$.

$$(ii) \quad \left\| S_0(\vec{h}) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \quad \text{для всех } \vec{h} \in W^{s+1,r}(\Omega); \quad (2.109)$$

$$\left\| S_0(\vec{h}) \right\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}} \quad \text{для всех } \vec{h} \in V^{s,r}; \quad (2.110)$$

$$(iii) \quad \left\| \mathcal{M}_i(\vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}, i = 1, 2, \quad \text{для всех } \vec{h} \in W^{s+1,r}(\Omega); \quad (2.111)$$

$$\left\| \mathcal{M}_i(\vec{h}) \right\|_{X^{s,r}} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}}, i = 1, 2, \quad \text{для всех } \vec{h} \in V^{s,r}; \quad (2.112)$$

$$(iv) \quad \left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)}, i = 1, 2, \quad \text{для всех } \vec{h} \in W^{s+1,r}(\Omega); \quad (2.113)$$

$$\left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{Z^{s,r}} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}}, i = 1, 2, \quad \text{для всех } \vec{h} \in V^{s,r}. \quad (2.114)$$

Постоянная c в (2.113), (2.114) зависит от s, r, Ω и векторных полей $\vec{U}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Доказательство.

(i) Оператор $\mathcal{A}_0(\vec{h}) = \mathcal{A}(\vec{h}; \mathbf{N}_0)$, определенный в (2.64), (2.4e) может быть представлен в виде

$$\mathcal{A}_0(\vec{h}) = \operatorname{div} \left((\mathbf{I} - \mathbf{S}) \nabla \vec{h} + \mathbf{S} \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right) + \nabla (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \cdot \left(\mathbf{N}_0^T \mathbf{S} \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right),$$

где $\mathbf{S} = g_0 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T$, а символ $\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - квадратные матрицы с элементами $(A)_{im}, (B)_{im}$) обозначает вектор столбец с компонентами

$$\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_j \sum_m \frac{\partial (A)_{im}}{\partial x_j} (B)_{mj}.$$

В силу тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{S} &= \mathbf{I} - g_0 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T = \\ &= (\mathbf{I} - g_0) (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T + (\mathbf{I} - (\mathbf{N}_0^T)^{-1}) \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T + (\mathbf{I} - \mathbf{N}_0) \mathbf{N}_0^T + (\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^T) \end{aligned}$$

и неравенств (2.70) имеем

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{S}\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2, \quad \|\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2. \quad (2.115)$$

Согласно лемме 1.11

$$\left\| \operatorname{div} \left((\mathbf{I} - \mathbf{S}) \nabla \vec{h} + \mathbf{S} \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \nabla \vec{h} + \mathbf{S} \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)},$$

а из неравенств (2.115) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \nabla \vec{h} + \mathbf{S} \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \|\mathbf{I} - \mathbf{S}\|_{C^2(\Omega)} \cdot \left\| \nabla \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c \|\mathbf{S}\|_{C^2(\Omega)} \cdot \left\| \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \tau^2 \left\| \nabla \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c \left\| \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + c \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$\left\| \operatorname{div} \left((\mathbf{I} - \mathbf{S}) \nabla \vec{h} + \mathbf{S} \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}_0^{-1}) \vec{h}) \right) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)}. \quad (2.116)$$

Заметим, что

$$\left\| \nabla ((\mathbf{N}_0^T)^{-1}) \right\|_{C^1(\Omega)} = \left\| \nabla ((\mathbf{N}_0^T)^{-1} - \mathbf{I}) \right\|_{C^1(\Omega)} \leq \left\| (\mathbf{N}_0^T)^{-1} - \mathbf{I} \right\|_{C^2(\Omega)} \leq c \tau^2.$$

Согласно леммам 1.11, 1.12

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \cdot (\mathbf{N}_0^T \mathbf{S} \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq \left\| \nabla (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \right\|_{C^1(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^T \mathbf{S} \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \tau^2 \left\| \mathbf{N}_0^T \mathbf{S} \right\|_{C^1(\Omega)} \left\| \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Объединяя (2.116) и (2.117), приходим к (2.107).

Аналогично, используя (2.115) получаем неравенства

$$\left\| \mathcal{A}_0(\vec{h}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{2,2}(\Omega)} \quad \text{для всех } \vec{h} \in W^{2,2}(\Omega),$$

объединяя которое с (2.107), получим (2.108) (напомним, что $\|\mathcal{A}_0(\vec{h})\|_{Z^{s,r}} = \|\mathcal{A}_0(\vec{h})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|\mathcal{A}_0(\vec{h})\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\vec{h}\|_{V^{s,r}} = \|\vec{h}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|\vec{h}\|_{W^{2,2}(\Omega)}$).

Утверждения (i) доказаны.

(ii) Рассмотрим оператор

$$S_0(\vec{h}) = g_0 \cdot a \cdot (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}.$$

Из (2.69), (2.70) следует, что

$$\left\| g_0 \cdot a \cdot (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \right\|_{C^2(\Omega)} \leq c\tau^2.$$

Применяя лемму 1.12 получим

$$\left\| S_0(\vec{h}) \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)}. \quad (2.118)$$

В силу ограниченности вложения² $W^{s+1,r}(\Omega)$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ из (2.118) следует (2.109).

Объединяя (2.109) с очевидной оценкой

$$\left\| S_0(\vec{h}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c\tau^2 \left\| \vec{h} \right\|_{W^{2,2}(\Omega)},$$

приходим к неравенству (2.110).

(iii) Для операторов

$$\mathcal{M}_i(\vec{h}) = \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}, i = 1, 2,$$

имеет место следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.119)$$

доказывающая оценку (2.111).

Затем мы имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} + c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{u}_0^{(i)} \in V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \left(\left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} \right) \leq c, \\ & \left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} \leq c \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left\| \vec{u}_0^{(i)} \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}} \quad (2.120)$$

Из неравенства (2.111) и (2.120) вытекает оценка (2.112).

²Оператор вложения i ограничен в парах пространств $i : W^{1,r}(\Omega) \rightarrow W^{-1,r}(\Omega)$, $i : W^{2,r}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ и тем самым ограничен из $W^{s+1,r}(\Omega) = [W^{1,r}(\Omega), W^{2,r}(\Omega)]_{s,r}$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) = [W^{-1,r}(\Omega), L^r(\Omega)]_{s,r}$.

(iv) Обратимся к операторам

$$\mathcal{H}_i(\vec{h}) = \rho_i^1 \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} - (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \operatorname{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \rho_i^1 \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \\ & \leq c \left\| \rho_i^1 \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}, \end{aligned}$$

поскольку пространство $W^{s,r}(\Omega)$ есть банахова алгебра. Выражение в правой части этого неравенства может быть оценено сверху величиной

$$c \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Таким образом

$$\left\| \rho_i^1 \nabla(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \quad (2.121)$$

Применяя леммы 1.11 и 1.12, получим

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \operatorname{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})) \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \\ & \leq c \left\| \operatorname{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})) \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c \left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Объединяя неравенства (2.121) и (2.122) приходим к (2.113).

Так как

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{Z^{s,r}} &= \left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}} &= \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \left\| \vec{h} \right\|_{W^{2,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

то для доказательства (2.114) достаточно показать, что

$$\left\| \mathcal{H}_i(\vec{h}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}}. \quad (2.123)$$

Так как $X^{s,r}$ непрерывно вложено в $C(\Omega)$, а $V^{s,r}$ непрерывно вложено в $C^1(\Omega)$, мы имеем

$$\left\| \rho_i^1 \right\|_{C(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \right\|_{X^{s,r}} \leq c, \quad \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{C^1(\Omega)} \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} \leq c. \quad (2.124)$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
& \left\| \rho_i^1 \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \right\|_{C(\Omega)} \left\| \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{C(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq c \left\| \nabla (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \\
& \leq c \left\| \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{V^{s,r}}.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Затем мы имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \operatorname{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h}) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \\
& \leq c \left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + c \left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \vec{h} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Так как вложение $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow X^{s,r}$ непрерывно, из неравенств (2.124) следует

$$\left\| \rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left\| \rho_i^1 \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c.$$

Отсюда и из (2.124), (2.126) получаем

$$\left\| (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \operatorname{div}(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1} \vec{h})) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left\| \vec{h} \right\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Объединяя последнее неравенство с (2.125), приходим к (2.123), которое вместе с (2.113) доказывает неравенство (2.114).

Замечание. Доказательства неравенств (2.107)-(2.108), (2.111)-(2.114) по существу имеются в работе [92] и здесь приведены с целью полноты изложения и для облегчения чтения.

Обратимся теперь к интегрально-дифференциальному оператору $\mathbf{B}$, заданному формулами (2.83), и отметим следующие его свойства.

Лемма 2.11. Пусть выполнено условие 2.6. Тогда $\mathbf{B}$ – ограниченный линейный оператор из $\mathcal{V}^{s,r}$ в $\mathcal{U}^{s,r}$ и из $\mathcal{F}^{s,r}$ в $\mathcal{E}^{s,r}$ и при этом выполняются неравенства

$$\left\| \mathbf{B} \vec{h} \right\|_{\mathcal{U}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \left\| \vec{h} \right\|_{\mathcal{V}^{s,r}}, \tag{2.127}$$

$$\left\| \mathbf{B} \vec{h} \right\|_{\mathcal{E}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \left\| \vec{h} \right\|_{\mathcal{F}^{s,r}}. \tag{2.128}$$

Здесь постоянная c , зависит только от Ω , векторных полей $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ и параметров r, s .

Доказательство. Введем временные обозначения. Пусть $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)}) = \mathbf{B}[\vec{h}_*]$, где $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}; n_i), i = 1, 2$ (компоненты вектора $\vec{h}^{(i)}$ - есть строки формулы (2.83)).

Оценим

$$\vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) - \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1, i = 1, 2.$$

Согласно условию 2.6 имеем, что $\|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq \tau$, тем самым

$$\|\varphi_i^1\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq \tau. \quad (2.129)$$

Из непрерывности вложения $W^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ имеем

$$\|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} \leq c \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}}. \quad (2.130)$$

Применяя лемму 1.14, получим

$$\|\psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\varphi_i^1\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c\tau \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \quad (2.131)$$

Так как $X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, то из неравенств (2.129), (2.130) следует

$$\|\psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} \|\nabla \varphi_i^1\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}} \|\varphi_i^1\|_{X^{s,r}} \leq c\tau \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}}$$

. Объединяя последнее неравенство с (2.131) и учитывая, что $Z^{s,r} = W^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, приходим к оценке

$$\|\psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}}. \quad (2.132)$$

Поскольку $a, Re \in (0, \tau^2]$ и выполнены оценки (2.107), (2.109), (2.113), (2.131), то

$$\begin{aligned} \|\vec{w}^{(i)}\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} &\leq \|S_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \|\mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \\ &+ Re \|\mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} + \|\psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq c\tau \left(\sum_{j=1}^2 \|\vec{w}_*^{(j)}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Кроме того из оценок (2.108), (2.110), (2.114), (2.132) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\vec{w}^{(i)}\|_{Z^{s,r}} &\leq \|S_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)})\|_{Z^{s,r}} + \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \|\mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})\|_{Z^{s,r}} + \\ &+ Re \|\mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)})\|_{Z^{s,r}} + \|\psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1\|_{Z^{s,r}} \leq c\tau \left(\sum_{j=1}^2 \|\vec{w}_*^{(j)}\|_{V^{s,r}} + \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}} \right). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Оценим теперь $\omega_i = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right]$. Учитывая, что $W^{s,r}(\Omega)$ и $X^{s,r}$ – банаховы алгебры и применяя лемму 2.7, получим

$$\begin{aligned} \|\omega_i\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq c \sum_{k=1}^2 \left\| \hat{\beta}_{ki} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\psi_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \\ &+ c \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \left(|n_k^*| |\chi_{kj}^0| \left\| \tilde{\beta}_{ji} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} + |\mu_{kj}| \|\beta_{ji}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\omega_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right) \right] \leq \\ &\leq c\tau \sum_{k=1}^2 \left[\|\psi_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} + |n_k^*| + \|\omega_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (2.135)$$

и

$$\begin{aligned} \|\omega_i\|_{X^{s,r}} &\leq c \sum_{k=1}^2 \left\| \hat{\beta}_{ki} \right\|_{X^{s,r}} \|\psi_k^*\|_{X^{s,r}} + \\ &+ c \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \left(|n_k^*| |\chi_{kj}^0| \left\| \tilde{\beta}_{ji} \right\|_{X^{s,r}} + |\mu_{kj}| \|\beta_{ji}\|_{X^{s,r}} \|\omega_k^*\|_{X^{s,r}} \right) \right] \leq \\ &\leq c\tau \sum_{k=1}^2 \left[\|\psi_k^*\|_{X^{s,r}} + |n_k^*| + \|\omega_k^*\|_{X^{s,r}} \right]. \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\text{Рассмотрим компоненту } \psi_i = \text{Re} \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \psi_i^* \text{div} \vec{u}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} \right].$$

В силу условий 2.6 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \text{div} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} &= \left\| \text{div} \vec{v}_0^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \left\| \vec{v}_0^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \leq c\tau; \\ \left\| \text{div} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{X^{s,r}} &= \left\| \text{div} \vec{v}_0^{(i)} \right\|_{X^{s,r}} \leq \left\| \vec{v}_0^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} \leq c\tau. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Применяя лемму 2.7, оценки (2.111), (2.112), (2.137), получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi}_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq \text{Re} \left\| \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \text{div} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left[\|\hat{\alpha}_{ki}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\psi_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 |n_k^*| |\chi_{kj}^0| \|\tilde{\alpha}_{ji}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right] \leq \\ &\leq c\tau \left(\left\| \vec{w}_*^{(i)} \right\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} + \sum_{k=1}^2 \left(|n_k^*| + \|\psi_k^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.138)$$

и

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi}_i^*\|_{X^{s,r}} &\leq \text{Re} \left\| \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) \right\|_{X^{s,r}} + \|\psi_i^*\|_{X^{s,r}} \left\| \text{div} \vec{u}_0^{(i)} \right\|_{X^{s,r}} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left[\|\hat{\alpha}_{ki}\|_{X^{s,r}} \|\psi_k^*\|_{X^{s,r}} + \sum_{j=1}^2 |n_k^*| |\chi_{kj}^0| \|\tilde{\alpha}_{ji}\|_{X^{s,r}} \right] \leq \\ &\leq c\tau \left(\left\| \vec{w}_*^{(i)} \right\|_{V^{s,r}} + \sum_{k=1}^2 \left(|n_k^*| + \|\psi_k^*\|_{X^{s,r}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.139)$$

В заключении рассмотрим компоненты $\xi_j^{(i)} = \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0$. Из леммы 2.7 очевидно следуют неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \xi_j^{(i)} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} &\leq \|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \sum_{k=1}^2 |n_k^*| |\chi_{ki}^0| \leq c\tau \sum_{k=1}^2 |n_k^*|, \\ \left\| \xi_j^{(i)} \right\|_{X^{s,r}} &\leq \|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{X^{s,r}(\Omega)} \sum_{k=1}^2 |n_k^*| |\chi_{ki}^0| \leq c\tau \sum_{k=1}^2 |n_k^*|. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Объединяя оценки (2.133) – (2.136), (2.138) – (2.140), получим заявленные неравенства (2.127) и (2.128).

Лемма 2.11 доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство существования и единственности решения сопряженной задачи.

Положим $\sigma_c = \sigma_3$ (максимальное значение из параметров σ^* , из условия 2.6, и σ_3 , указанного в лемме 2.9). Пусть $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} > \sigma_c$.

Сопряженная задача (2.78) может быть записана в виде операторного уравнения

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\vec{h} = \mathbf{A}^{-1}\vec{f}. \quad (2.141)$$

В силу (2.80) и (2.127) линейные операторы $\mathbf{A}^{-1} : \mathcal{U}^{s,r} \rightarrow \mathcal{V}^{s,r}$ и $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} : \mathcal{V}^{s,r} \rightarrow \mathcal{V}^{s,r}$ ограничены, причем

$$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \leq c_V \cdot \tau, \quad (2.142)$$

где постоянная c_V зависит только от данных задачи и параметров r, s . На основании условия 2.6 параметр τ удовлетворяет условиям $0 < \tau \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})$. Выберем постоянную τ_c так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \tau_c \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \quad \tau_c \cdot c_V \leq q < 1.$$

Из (2.142) следует, что для $\tau \in (0; \tau_c]$ норма $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})}$ отделена от единицы и на основании известной теоремы оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ существует и ограничен

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \leq \frac{1}{1 - q}.$$

Таким образом для указанных значений τ и любых $\vec{f} \in \mathcal{U}^{s,r}$ сопряженная задача (2.78) имеет единственное решение $\vec{h} \in \mathcal{V}^{s,r}$ и для него имеет место неравенство (2.80).

Пусть теперь правая часть $\vec{f}$ задачи (2.78) принадлежит пространству $\mathcal{E}^{s,r}$. Так как оператор $\mathbf{A}^{-1}$ решения задачи (2.84), (2.85) является ограниченным линейным оператором, действующим из $\mathcal{E}^{s,r}$ в $\mathcal{F}^{s,r}$, то в силу оценок (2.87), (2.128) имеем

$$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|_{L(\mathcal{F}^{s,r})} \leq c_F \cdot \tau.$$

Если параметр τ подчинен условию $\tau \in (0; \tau_c]$, где

$$0 < \tau_c \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \quad \tau_c \cdot c_F \leq q < 1,$$

то подобно предыдущему случаю получаем, что при условии $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$ решение $\vec{h}$ задачи (2.78) принадлежит классу $\mathcal{F}^{s,r}$ и справедлива оценка (2.81).

Теорема 2.8 доказана.

3.4. Оценки разностей

Для $s \in (0, 1)$, $r \in (1, \infty)$ обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ соотношение двойственности между парами пространств $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $W^{s,r}(\Omega)$ соответственно.

Лемма 2.12. Пусть выполнены условия теоремы 2.8. Тогда векторные поля $\vec{w}^{(j)}$, $j = 1, 2$, скалярные поля ω_j , ψ_j , $\xi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$, и постоянные n_j , $j = 1, 2$, определенные по формулам (2.62) принадлежат соответственно пространствам $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{R}$ и удовлетворяют тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \rangle_0 + n_i s_i \right] = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_i^*) \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (2.143)$$

где $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$, — произвольные функции из $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, а $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, — соответствующее решение сопряженной задачи (2.78).

Доказательство. Поскольку множество $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ содержится в $\mathcal{E}^{s,r}$ и плотно в $\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ (лемма 1.9), то для любого элемента $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$, из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ найдется последовательность $\vec{f}_n = (\vec{f}_n^{(1)}, \vec{f}_n^{(2)})$, $\vec{f}_n^{(i)} = (\vec{H}_n^{(i)}; G_{in}, F_{in}, M_{1in}, M_{2in}; s_{in})$, $\vec{f}_n^{(i)} \in L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, такая, что

$$\vec{f}_n \rightarrow \vec{f} \text{ в } \mathcal{U}^{s,r}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.144)$$

Поэтому докажем тождество (2.143) сначала для вектор функции $\vec{f}$ из пространства $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$. В этом случае соответствующее решение $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, сопряженной задачи (2.78) принадлежит классу $V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R} = \mathcal{F}^{s,r}$ (в частности, это означает, что векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$ обладают непрерывными производными первого порядка и производными второго порядка, суммируемыми с квадратом, и скалярные функции $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}$ непрерывны и обладают производными первого порядка, суммируемыми с квадратом). В силу условия 2.6 можем утверждать, что $\vec{w}^{(i)}, \vec{v}_k^{(i)}, \vec{u}_k^{(i)} \in V^{s,r}$, $\omega_i, \psi_i, \xi_j^{(i)}, \rho_i^k, \pi_i^k, \varphi_i^k, \zeta_{jk}^{(i)} \in X^{s,r}$, $i, j = 1, 2, k = 0, 1$. Непрерывность вложений $V^{s,r}$ в $C^1(\Omega)$ обеспечивает непрерывную дифференцируемость в Ω векторных полей $\vec{w}^{(i)}, \vec{v}_k^{(i)}, \vec{u}_k^{(i)}$ и, разумеется, принадлежность их $W^{2,2}(\Omega)$. Непрерывность вложения $X^{s,r}$ в $C(\Omega)$ влечет непрерывность скалярных функций $\omega_i, \psi_i, \xi_j^{(i)}, \rho_i^k, \pi_i^k, \varphi_i^k, \zeta_{jk}^{(i)}$, принадлежащих так же пространствам $W^{1,2}(\Omega)$. Отсюда следует, что уравнения задачи (2.63) выполнены в сильном смысле. Умножая эти уравнения соответственно на решение $\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}, n_i^*, i = 1, 2$, сопряженной задачи (2.78), соответствующее элементу $\vec{f} \in L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ и интегрируя по частям, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Omega} \left(\vec{w}^{(i)} \vec{H}^{(i)} + \omega_i G_i + \psi_i F_i + \xi_1^{(i)} M_{1i} + \xi_2^{(i)} M_{2i} \right) dx + n_i s_i \right] = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_i^*) \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Действительно, после умножения уравнения (2.63а) скалярно на $\vec{w}_*^{(i)}$, $i = 1, 2$, и интегрирования по частям (с учетом граничных условий (2.63е), (2.78f)) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{w}^{(j)} \Delta \vec{w}_*^{(i)} + \int_{\Omega} \omega_i \operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} dx = \\ & = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{w}^{(j)} \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(i)}) dx + \int_{\Omega} \operatorname{Re} \vec{w}^{(i)} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) dx + \int_{\Omega} \operatorname{Re} \psi_i \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) dx + \\ & + \int_{\Omega} (\mathcal{D}_i + (-1)^i [\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})]) \cdot \vec{w}_*^{(i)} dx. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Переписав уравнение (2.63b) в виде

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \operatorname{div} \vec{w}^{(j)} = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \sum_{k=1}^2 \alpha_{jk} \psi_k + \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \sum_{k=1}^2 \beta_{jk} \omega_k + \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \gamma_j n_j + \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \delta_j d, \quad i = 1, 2,$$

и умножив его на ω_i^* , получим после интегрирования по частям:

$$- \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \vec{w}^{(j)} \nabla \omega_i^* dx = \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \omega_i^* (\mu_{ij} \alpha_{jk} \psi_k + \mu_{ij} \beta_{jk} \omega_k) dx + \sum_{j=1}^2 \omega_i^* (\mu_{ij} \gamma_j n_j + \mu_{ij} \delta_j d) \right] dx, i = 1, 2. \quad (2.147)$$

Из (2.63c) и (2.63d) следуют тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_i \left(-\operatorname{div} \left(\vec{u}_0^{(i)} \psi_i^* \right) + \tau_{ii} \psi_i^* \right) dx &= - \int_{\Omega} \vec{w}^{(i)} + (\psi_i^* \nabla \varphi_i^1) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \right) \psi_i^* dx, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\int_{\Omega} \xi_j^{(i)} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} \right) dx = - \int_{\Omega} \vec{w}^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} dx + \int_{\Omega} \tau_{ji} d \xi_j^{(i)*} dx, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.149)$$

Последнее уравнение (2.63f) умножаем на n_i^* :

$$n_i n_i^* = \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k n_i^* d + \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\alpha}_{kj} n_i^* \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} n_i^* \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} n_i^* \xi_j^{(k)} \right) \right] dx, \quad i = 1, 2. \quad (2.150)$$

Складывая равенства (2.146) - (2.150) и суммируя результат по i от 1 до 2 получаем формулу Грина для задачи (2.63)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}^{(i)} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* - \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})) - \operatorname{Re} \mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla v_j^{(i)} - (-1)^i S_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \omega_i \left(\operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} - \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^* \right) \right] \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \psi_i \left(-\operatorname{div} \left(\psi_i^* \vec{u}_0^{(i)} \right) + \tau_{ii} \psi_i^* - \operatorname{Re} \mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ji} \psi_j^* - \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj} b_{21}^{ji} \omega_k^* \right) \right] \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \xi_j^{(i)} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} - \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + n_i \left(n_i^* - \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx \right) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}_*^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_i^* \right) \right) dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Обратим внимание на то, что функции $\vec{w}_*^{(i)}$, $i = 1, 2$, непрерывно-дифференцируемы в Ω и принимают нулевое значение на $\partial\Omega$, поэтому

$$\text{Pdiv} \vec{w}_*^{(i)} = \text{div} \vec{w}_*^{(i)} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div} \vec{w}_*^{(i)} dx = \text{div} \vec{w}_*^{(i)} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \vec{w}_*^{(i)} \cdot \vec{n} ds = \text{div} \vec{w}_*^{(i)}.$$

С другой стороны, в силу (2.63e) $\text{P}\omega_i = \omega_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \omega_i \left(\text{div} \vec{w}_*^{(i)} - \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^* \right) \right] \right) dx = \\ & = \int_{\Omega} \omega_i \left(\text{div} \vec{w}_*^{(i)} - \text{P} \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^* \right) \right] \right) dx. \end{aligned} \quad (2.152)$$

В силу уравнений (2.78) из формул (2.151), (2.152) следует соотношение (2.145).

Заметим, что вектор-функции $(\vec{H}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ и $(\vec{w}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i})$ принадлежат двойственным пространствам $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$ и $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega)$ соответственно. Действительно, $\vec{H}^{(i)} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ поскольку $\vec{H}^{(i)} \in L^r(\Omega)$ и имеет место ограниченное вложение $L^r(\Omega)$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$. Скалярные поля $\omega_i, \psi_i, \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$ есть элементы $W^{s,r}(\Omega)$, а в силу вложений $W^{s,r}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \subset \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$ ($r > 3, 1 < r' = \frac{r}{r-1} < r$) получаем, что эти функции принадлежат $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$.

Далее, векторное поле $\vec{w}^{(i)} \in V^{s,r}$ и, следовательно, $\vec{w}^{(i)} \in C^1(\Omega)$. Кроме того $\vec{w}^{(i)}$ принимает нулевое значение на $\partial\Omega$. Таким образом, ясно, что $\vec{w}^{(i)} \in W_0^{1,r'}(\Omega)$. Так как $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ – интерполяционное пространство $\left[L^{r'}(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega) \right]_{1-s,r'}$ и $W_0^{1,r'}(\Omega) \subset L^{r'}(\Omega)$, то $W_0^{1,r'}(\Omega) \subset \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. Итак, имеет место включение $\vec{w}^{(i)} \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. С другой стороны элементы G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} принадлежат, очевидно, $W^{s,r}(\Omega)$. В силу вышесказанного, интегралы в левой части тождества (2.145) могут быть записаны в терминах форм двойственности и, таким образом, тождество (2.143) леммы 2.12 доказано для вектор-функций $(\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$ из более узкого функционального пространства $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, т.е. имеем право написать

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \langle \vec{H}_n^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_{in} \rangle_0 + \langle \psi_i, F_{in} \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1in} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2in} \rangle_0 + n_i s_{in} \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_{n*}^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_{in}^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_{jn}^{(i)*} + n_{in}^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_{in}^*) \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.153)$$

где $\vec{h}_n = (\vec{h}_n^{(1)}, \vec{h}_n^{(2)})$, $\vec{h}_n^{(i)} = (\vec{w}_{n*}^{(i)}; \omega_{in}^*, \psi_{in}^*, \xi_{1n}^{(i)*}, \xi_{2n}^{(i)*}; n_{in}^*)$, – решение задачи (2.78), соответствующее "правой части" $\vec{f}_n = (\vec{f}_n^{(1)}, \vec{f}_n^{(2)})$. Из (2.144) в силу теоремы 2.8 имеем, что

$$\vec{h}_n = (\vec{h}_n^{(1)}, \vec{h}_n^{(2)}) \rightarrow \vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)}) \text{ в } \mathcal{V}^{s,r}, n \rightarrow \infty. \quad (2.154)$$

Совершая в (2.153) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем в силу (2.144),(2.154) заявленное в лемме 2.12 тождество (2.143). Лемма 2.12 доказана.

Доказанное в лемме 2.12 тождество (2.143) означает, что разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ является очень слабым решением линейной задачи (2.63).

Лемма 2.13. Пусть выполнены условия леммы 2.12. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{w}^{(i)}\|_{\mathcal{W}_0^{1-s,r'}} + \|\psi_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\omega_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\xi_1^{(i)}\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\xi_2^{(i)}\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + |n_i| \right) \leq \\ \leq c \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (2.155)$$

где постоянная c зависит от данных задачи и параметров r, s .

Доказательство. Обращаясь к тождеству (2.143), заметим, что поскольку коэффициенты $\hat{\delta}_i, \tilde{\delta}_i, \delta_i$ ограничены по модулю константой, зависящей только от данных задачи и r, s (см. (2.71)), то правая часть этого тождества может быть оценена величиной

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{w}_*^{(i)}\|_{C(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\omega_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\xi_1^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + \|\xi_2^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + |n_i^*| \right) \cdot \\ \cdot \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right) \cdot c \end{aligned} \quad (2.156)$$

Кроме того, в силу теоремы вложения и оценки (2.80) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{w}_*^{(i)}\|_{C(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\omega_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\xi_1^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + \|\xi_2^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + |n_i^*| \right) \leq \\ \leq c \|\vec{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Из (2.156) и (2.157) получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^2 \left\{ \langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \rangle_0 + n_i s_i \right\} \right| \leq \\ \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_i\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right) \|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Из неравенства (2.158), очевидно, следует оценка (2.155). Лемма 2.13 доказана.

Из неравенства (2.155) следует, что отображение, сопоставляющее матричнозначной функции $\mathbf{N}$ решение $\vec{q}$ неоднородной краевой задачи (2.26), является липшицевым в слабой норме.

§ 4. Теорема единственности. Относительная компактность совокупности решений задачи о возмущениях

Следующая лемма отражает факт относительной компактности совокупности решений задачи о возмущениях (2.26).

Лемма 2.14. Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и $\Theta_{\mathbf{N}} \subset B_{\tau} \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$ множество всех решений $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m})$ задачи (2.26), соответствующих матрице $\mathbf{N}$. Тогда для каждой матрицы $\mathbf{N}$, такой что $\|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2$, существует непустое подмножество $\Theta'_{\mathbf{N}} \subset \Theta_{\mathbf{N}}$, такое что множество $\bigcup_{\mathbf{N}: \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2} \Theta'_{\mathbf{N}}$ является относительно компактным в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$.

Доказательство. Докажем, что множество решений $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m}) \in B_{\tau} \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$ задачи (2.26) содержит подмножество, которое является относительно компактным в $W^{s+1,r}(\Omega)^6 \times W^{s,r}(\Omega)^8 \times R^2$. Выберем число $s_0 > s$ так, что пара s_0 и r удовлетворяет условиям (2.27) на показатели s и r , заданным в теореме 2.3 с s замененным на s_0 , т. е.

$$0 < s_0 < 1, \quad 1 < r < \infty, \quad s_0 r > 3, \quad 2s_0 - 3r^{-1} < 1.$$

Теперь можно выбрать такие числа $\sigma^* > 1$ и $\tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})$, что для всех $\tau_{11} > \sigma^*$, $\tau_{22} > \sigma^*$, $\tau \in (0, \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})]$, $a, \Lambda^{-1}, Re \in (0, \tau^2]$, $\tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau]$, $\|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2$ задача (2.26) имеет решение $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m}) \in B_{\tau}^0 \times W^{s_0,r}(\Omega) \times R^2$, где

$$B_{\tau}^0 = \left\{ \vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) : \sum_{j=1}^2 (\|\vec{v}^{(j)}\|_{V^{s_0,r}} + \|\pi_j\|_{X^{s_0,r}} + \|\varphi_j\|_{X^{s_0,r}}) \leq \tau \right\} \subset B_{\tau}.$$

Так как вложения $V^{s_0,r} \hookrightarrow W^{s_0+1,r}(\Omega)$, $X^{s_0,r} \hookrightarrow W^{s_0,r}(\Omega)$ непрерывны, B_{τ}^0 - ограниченное подмножество $W^{s_0+1,r}(\Omega) \times W^{s_0,r}(\Omega)$. С другой стороны из оценок (2.29) и (2.30) с s замененным на s_0 следует, что функции $\zeta_j^{(i)}$ и константы m_i ограничены в $X^{s_0,r}(\Omega)^4 \times R^2$. Следовательно, множество построенных решений $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m}) \in B_{\tau} \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$ задачи (2.26) ограничено в $W^{s_0+1,r}(\Omega) \times W^{s_0,r}(\Omega) \times R^2$. Так как $s_0 > s$, то это множество является относительно компактным в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times R^2$. Лемма доказана.

Следующая теорема указывает условия, обеспечивающие факты существования и единственности решения задачи о возмущениях (2.26) и свойства компактности совокупности решений, соответствующих различным матрицам $\mathbf{N}$.

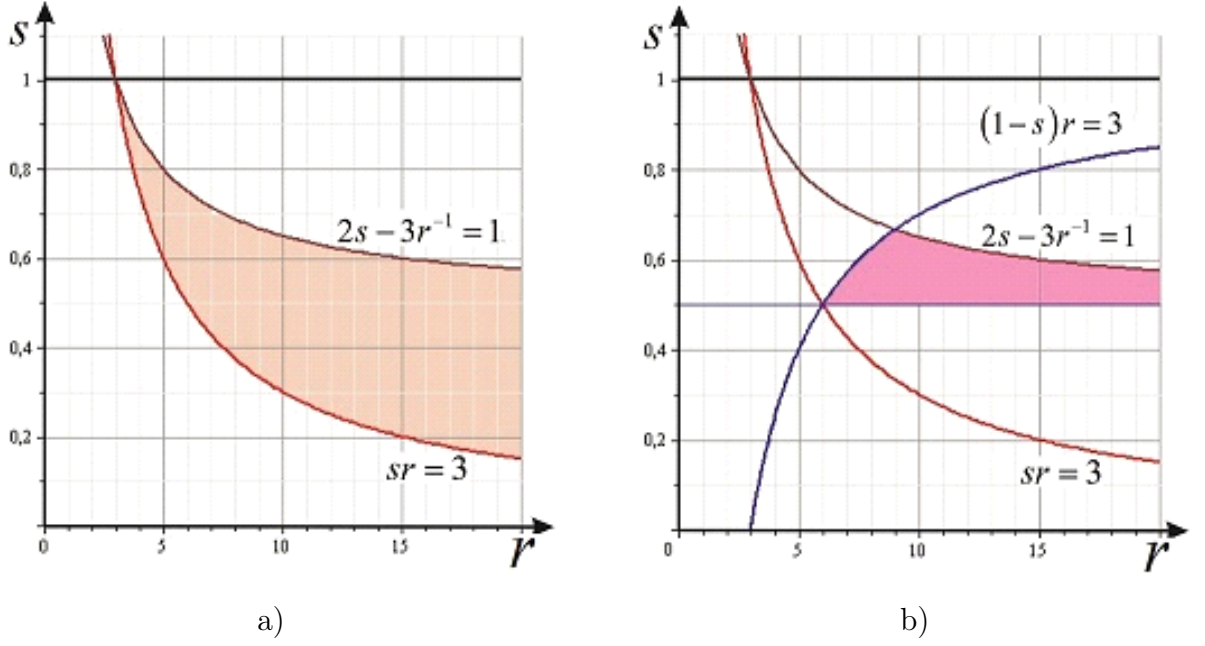


Рис. 2.4: Допустимые значения параметров s, r при которых доказано существование сильного решения (а) и существование и единственность (б).

Теорема 2.15. *Предположим, что поверхность Σ , заданные векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условиям 2.1. Кроме того, для чисел r и s выполнены неравенства*

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad 2s - 3r^{-1} < 1, \quad sr > 3, \quad (1-s)r > 3. \quad (2.159)$$

Тогда существует такое положительное число $\sigma_* > 1$, зависящее от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s$, что для любых $\tau_{11} \geq \sigma_*, \tau_{22} \geq \sigma_*$ найдутся такие положительные числа $\tau_*(\tau_{11}, \tau_{22})$ и σ , зависящие от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s, \tau_{11}, \tau_{22}$, что если

$$\tau \in (0, \tau_*], \quad a, \Lambda^{-1}, Re \in (0, \tau^2], \quad \tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau], \quad \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2, \quad (2.160)$$

то задача (2.26) имеет единственное решение $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2) \in B_\tau$, $\vec{\zeta} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}) \in X^{s,r}$, $\vec{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее неравенствам (2.29)-(2.31). Совокупность решений $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m})$ задачи (2.26), соответствующих всем матричнозначным функциям $\mathbf{N}$ из шара $B(\tau^2) = \{\mathbf{N} : \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2\}$, является относительно компактным подмножеством $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Пусть $\tau_*(\tau_{11}, \tau_{22}) = \min \{\tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \tau_c(\tau_{11}, \tau_{22}), \tau_0\}$ и $\sigma_* = \max \{\sigma^*, \sigma_c\}$, где постоянные σ^* и $\tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})$ заданы теоремой 2.3, σ_c и $\tau_c(\tau_{11}, \tau_{22})$ - теоремой 2.8, и τ_0 определена в лемме 1.19. При таком выборе параметров условия теорем 2.3, 2.8 и 2.13 выполнены.

Применяя теорему 2.3, делаем вывод, что если $\tau_{11} \geq \sigma_*$ и $\tau_{22} \geq \sigma_*$, и если $\tau, a, \Lambda^{-1}, Re, \tau_{12}, \tau_{21}, \mathbf{N}$ удовлетворяют условию (2.160) и $\tau \in [0, \tau_*)$, то задача (2.26) имеет решение $\vec{\theta} \in B_\tau, \vec{\zeta} \in X^{s,r}, \vec{m} \in R^2$, для которого выполняются (2.29)–(2.31).

Докажем, что это решение единственно. Если для некоторой матрицы $\mathbf{N}$ задача (2.26) имеет два решения $(\vec{\theta}_i, \vec{\zeta}_i, \vec{m}_i)$, $i = 0, 1$, то соответствующие разности $\vec{w}^{(j)}, \omega_j, \psi_j, \xi_j^{(i)}, n_j$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют всем условиям теоремы 2.13 с функциями d и операторами $\mathcal{D}_i, i = 1, 2$, и $\mathcal{E}$ равными нулю. Поэтому элементы $\vec{w}^{(j)}, \omega_j, \psi_j, \xi_j^{(i)}, n_j, i, j = 1, 2$, равны нулю. Следовательно, решения $(\vec{\theta}_i, \vec{\zeta}_i, \vec{m}_i)$ совпадают.

Таким образом множество $\Theta_{\mathbf{N}} \subset B_\tau \times (X^{s,r}) \times R^2$ решений $(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m})$, соответствующих матрице $\mathbf{N}$ состоит из единственного элемента. Из леммы 2.14 следует, что совокупность $\bigcup_{\mathbf{N} \in B(\tau^2)} \Theta_{\mathbf{N}}$ всех таких решений относительно компактна в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}^2$.

Глава 3

Дифференцируемость по области функционала сопротивления и решений краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей

§ 1. Постановка задачи для материальных производных.

Для доказательства дифференцируемости функционала сопротивления важным инструментом являются материальные производные решения задачи (2.26), исследованию которых посвящается значительная часть данной главы. В предыдущей главе проведено исследование задачи (2.26) в возмущенной области, причем структура матрицы $\mathbf{N}$ не играла никакой роли, и полученные результаты справедливы для произвольной гладкой матрицы $\mathbf{N}$, близкой к единичной. Но в первоначальной постановке, зависящей от области, матрица $\mathbf{N}$ была определена семейством деформаций $x \mapsto x + \varepsilon \vec{T}(x)$ невозмущенной области Ω , а именно матрица $\mathbf{N}$ является присоединенной матрицей для матрицы Якоби отображения $\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T}$,

$$\mathbf{N}(\varepsilon) = g(\varepsilon) \left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T} \right)^{-1}, \quad g(\varepsilon) = \det \left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T} \right). \quad (3.1)$$

Поэтому, решение $\vec{q} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}; m_1, m_2)$ задачи (2.26) является функцией пространственной переменной $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ и параметра ε . Положим $\vec{q}(\varepsilon) = \langle \langle x \rightarrow q(x, \varepsilon) \rangle \rangle$ и будем рассматривать $\vec{q}$ (и, разумеется, компоненты

$\vec{q}$) как функцию от ε со значениями в пространстве функций от x . В данной главе детально рассмотрен вопрос о дифференцируемости этой функции (что иногда трактуется как анализ чувствительности) и показано, что подходящая производная существует в слабом смысле.

Из леммы 1.20 следует, что при достаточно малых значениях параметра ε матрицы $\mathbf{N}(\varepsilon)$ из (3.1) удовлетворяют условиям теоремы 2.15, и тем самым мы располагаем фактом существования и единственности решения задачи (2.26) для семейства матриц $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon)$, определенных по формуле (3.1).

На протяжении этой главы будем считать выполненными следующие условия на область потока и данные задачи, которые обеспечивают существование и единственность решений задачи (2.26) с матрицей $\mathbf{N}(\varepsilon) = g(\varepsilon) \left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T} \right)^{-1}$, $g(\varepsilon) = \det \left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T} \right)$.

Условие 3.1. а) Граница $\partial\Omega$ класса C^3 и векторные поля $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)} \in C^3(\Omega)$ удовлетворяют условиям 2.1.

б) Для показателей r и s выполнены неравенства

$$1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad 2s - 3r^{-1} < 1, \quad sr > 3, \quad (1 - s)r > 3.$$

в) Для чисел $\sigma_* > 1$ и $\tau_*(\tau_{11}, \tau_{22}) \in (0; 1]$ выполнены условия теоремы 2.15.

г) $\tau_{11} \geq \sigma_*$, $\tau_{22} \geq \sigma_*$ и $\tau \in (0, \tau_c(\tau_{11}, \tau_{22}))$, где $\tau_c(\tau_{11}, \tau_{22})$ задано в условиях теоремы 2.8. и

$$a, \Lambda^{-1}, Re \in (0, \tau^2], \quad \tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau].$$

е) $\varepsilon \in [0; \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* = \min \{c_1^{-1}\tau^2, \varepsilon_1\}$, где константы c_1 и ε_1 , заданны в лемме 1.20.

Лемма 3.2. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда для каждого $\varepsilon \in [0; \varepsilon_*]$ и $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon)$ задача (2.26) имеет единственное решение $\left(\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon) \right) \in B_\tau \times X^{s,r} \times \mathbb{R}$. Совокупность всех таких решений является относительно компактным подмножеством $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Лемма 1.20 и выбор ε_* приводят к тому, что неравенство $\|\mathbf{N}(\varepsilon) - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2$ выполняется для всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_*]$. Из условия 3.1 следует, что Ω , $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s, \tau_{11}, \tau_{22}, a, \Lambda, Re$ и $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.15, применение которой завершает доказательство.

Материальная производная $\vec{q}'(0) = \left(\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2 \right)$ решения

$$\vec{q}(\varepsilon) = \left(\vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(\varepsilon); \pi_1(\varepsilon), \pi_2(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(\varepsilon), \zeta_1^{(1)}(\varepsilon), \zeta_2^{(1)}(\varepsilon), \zeta_1^{(2)}(\varepsilon), \zeta_2^{(2)}(\varepsilon); m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon) \right)$$

задачи (2.26) при $\varepsilon = 0$ определяются следующим образом

$$\vec{w}^{(j)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{w}_\varepsilon^{(j)}, \quad \omega_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{j\varepsilon}, \quad \psi_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{j\varepsilon}, \quad (3.2)$$

$$\xi_j^{(i)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_{j\varepsilon}^{(i)}, \quad n_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n_{j\varepsilon}, \quad i, j = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_\varepsilon^{(j)} &= -\varepsilon^{-1} (\vec{v}^{(j)}(0) - \vec{v}^{(j)}(\varepsilon)), \quad \omega_{j\varepsilon} = -\varepsilon^{-1} (\pi_j(0) - \pi_j(\varepsilon)), \\ \psi_{j\varepsilon} &= -\varepsilon^{-1} (\varphi_j(0) - \varphi_j(\varepsilon)), \quad \xi_{j\varepsilon}^{(i)} = -\varepsilon^{-1} (\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon)), \\ n_{j\varepsilon} &= -\varepsilon^{-1} (m_j(0) - m_j(\varepsilon)), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

при условии, что пределы в (3.2) существуют в некотором смысле.

Уравнения для материальных производных могут быть легко получены формально подстановкой $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и $\vec{q}(\varepsilon)$ в уравнения (2.26) и дифференцированием результата по ε в нуле. Эта формальная процедура дает следующую систему уравнений и краевых условий для материальных производных.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i &= \mathfrak{L}^* (\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i^* + (-1)^i (\mathcal{E}^* + a (\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})) \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{w}^{(i)} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^* \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}^* \omega_j + \gamma_i^* n_i + \delta_i^* d^* \quad \text{в } \Omega, \\ \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i &= -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij}^* \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij}^* \omega_j + \hat{\gamma}_i^* n_i + \hat{\delta}_i^* d^* \quad \text{в } \Omega, \\ -\operatorname{div} (\vec{u}^{(i)}(0) \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} &= \operatorname{div} (\vec{w}^{(i)} \zeta_j^{(i)}(0)) + \tau_{ji} d^* \quad \text{в } \Omega, \\ \vec{w}^{(i)} &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \quad \omega_i = \Pi \omega_i, \quad \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \\ n_i &= \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k^* d^* + \sum_{j=1}^2 (\tilde{\alpha}_{kj}^* \psi_j + \tilde{\beta}_{kj}^* \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj}^* \xi_j^{(k)}) \right] dx, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\vec{u}^{(i)}(0) = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(0), \quad \rho_i(0) = \rho_i^* + \varphi_i(0);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i^* &= -Re \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)) + \mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) + \mathbb{D} \mathbb{T} \Delta \vec{u}^{(i)}(0) + \Delta (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0))); \\ \mathfrak{L}^* (\psi_i, \vec{w}^{(i)}) &= Re (\psi_i \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0) + \rho_i(0) \vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0) + \rho_i \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{w}^{(i)}); \\ \mathcal{E}^* &= a \mathbb{T} (\vec{u}^{(2)}(0) - \vec{u}^{(1)}(0)); \quad d^* = \operatorname{div} \vec{T}; \\ \mathbb{D} &= \operatorname{div} \vec{T} I - D \vec{T}; \quad \mathbb{T} = \operatorname{div} \vec{T} I - D \vec{T} - (D \vec{T})^T. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*, \gamma_i^*, \delta_i^*, \hat{\alpha}_{ij}^*, \hat{\beta}_{ij}^*, \hat{\gamma}_i^*, \hat{\delta}_i^*, \tilde{\alpha}_{ij}^*, \tilde{\beta}_{ij}^*, \tilde{\gamma}_{ij}^*, \tilde{\delta}_i^*, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (3.4) зависят от решения задачи (2.26), соответствующего $\varepsilon = 0$ и определены по формулам

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{ii}^* &= \Phi_i \left[\vec{\theta}(0) \right] - \frac{2\tau_{ii}}{\rho_i^*} \varphi_i(0) - \frac{\tau_{i,3-i}}{\rho_i^*} \varphi_{3-i}(0) + m_i(0); \quad \hat{\alpha}_{ij}^* = -\frac{\varphi_i(0)}{\rho_i^*} \tau_{i,j} - \tau_{i,j}, i \neq j; \\
\hat{\delta}_i^* &= \rho_i(0) \Phi_i \left[\vec{\theta}(0) \right] - \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} (\varphi_i(0))^2 - \tau_{ii} \varphi_i(0) + m_i(0) \rho_i(0) - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}(0) - \tau_{i,(3-i)} \frac{\varphi_i(0) \varphi_{3-i}(0)}{\rho_i^*} \\
\hat{\beta}_{ij}^* &= \frac{\rho_i(0)}{\Lambda} \frac{\tau_{i,j}}{p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \hat{\gamma}_i^* = \rho_i(0); \\
\alpha_{ij}^* &= \frac{\tau_{ij}}{\rho_i^*}; \quad \beta_{ij}^* = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \gamma_i^* = -1; \quad \delta_i^* = -\Phi_i \left[\vec{\theta}(0) \right] + \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} \varphi_i(0) - m_i(0) + \frac{\tau_{i,(3-i)}}{\rho_i^*} \varphi_{3-i}(0); \\
\tilde{\alpha}_{ij}^* &= \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} (\hat{\alpha}_{jj}^* - m_j(0)) + \frac{m_j(0) \zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} + \frac{\zeta_i^{(3-j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\alpha}_{3-j,j}^*; \\
\tilde{\beta}_{ij}^* &= \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{jj}^* + \frac{\zeta_i^{(3-j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{3-j,j}^* + \beta_{ij}^*; \\
\tilde{\gamma}_{ij}^* &= \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}(0) \right]}{\rho_i^*} + m_j(0) \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j(0)}{\rho_i^*} \right); \\
\tilde{\delta}_i^* &= \Phi_i \left[\vec{\theta}(0) \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} \left(\hat{\delta}_j^* - m_j(0) \rho_j \right) - m_j(0) \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j \zeta_i^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\rangle. \\
\chi_{ik} &= \left(\left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j(0) \zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} \right) \right\}_{i,j=1}^2 \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для доказательства разрешимости задачи (3.4) введем в рассмотрение сопряженную задачу в следующей постановке: для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1, 2$, найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы $n_i^*, i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) - Re \mathcal{H}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + (-1)^{i+1} a (\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i(0) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \\
div \vec{w}_*^{(i)} &= \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega, \\
\vec{w}_*^{(j)} &= 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i = 1, 2;
\end{aligned} \tag{3.7a}$$

$$-div(\psi_i^* \vec{u}^{(i)}(0)) + \tau_{ii} \psi_i^* = Re \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji}^* + \mu_{kj} \alpha_{ji}^* \omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2; \quad (3.7b)$$

$$\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij}^* \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2; \quad (3.7c)$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i^* \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i^* \psi_i^* \right) dx + s_i, i = 1, 2; \quad (3.7d)$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i^*$ и $\mathcal{M}_i^*$ определены формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^* (\vec{h}) &= \rho_i(0) \nabla (\vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{h} - div \left(\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \otimes \vec{h} \right), \\ \mathcal{M}_i^* (\vec{h}) &= (\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{h}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Факт корректности сопряженной задачи (3.7) является результатом следующей леммы.

Лемма 3.3. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда для каждой вектор функции $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, задача (3.7) имеет единственное решение $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$.

Доказательство. Задача (3.7) является частным случаем задачи (2.78) с $\mathbf{N}_0 = \mathbf{I}$ и $g_0 = 1$, $\vec{q}_0 = \vec{q}(0)$, $\vec{u}_0^{(j)} = \vec{u}_*^{(j)} + \vec{v}^{(j)}(0)$, $\rho_j^0 = \rho_j^* + \varphi_j(0)$, $j = 1, 2$. Поэтому утверждение леммы является прямым следствием теоремы 2.8.

Линейные уравнения (3.4) получаются формальным дифференцированием и тот факт, что пределы $\vec{w}^{(i)}, \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, n_i, i, j = 1, 2$, в (3.2) на самом деле существуют и удовлетворяют равенствам (3.4), не является очевидным. Далее будет показано, что они существуют в слабом смысле, определены как элементы пространства $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ и представляют собой очень слабое решение линейной задачи (3.4).

Теперь можно сформулировать основной результат текущего раздела.

Теорема 3.4. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда существует $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$ $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i) \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ такое, что $\vec{w}_\varepsilon^{(i)} \rightarrow \vec{w}^{(i)}$ слабо в $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $(\omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}) \rightarrow (\omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ слабо в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $n_{i\varepsilon} \rightarrow n_i$ в $\mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, для любых $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, выполнено тождество

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_i s_i \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^*) \right) \right\} dx,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$ - решение задачи (3.7), заданное леммой 3.3; $\mathcal{D}_i^*$, $\mathcal{E}^*$ и d^* определены формулами (3.5).

§ 2. Доказательство теоремы о существовании материальных производных

Доказательство теоремы 3.4 представляет собой последовательную реализацию следующих этапов.

- I. Выбираем матрицу $\mathbf{N}(\varepsilon)$ согласно формуле (3.1) и обозначаем $\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon))$ соответствующее ей решение задачи (2.26), существование которого гарантировано леммой 3.2.
- II. Выписываем линейную систему уравнений типа (2.63) для разностей $\vec{q}(0) - \vec{q}(\varepsilon) = (\vec{v}^{(1)}(0) - \vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(0) - \vec{v}^{(2)}(\varepsilon); \pi_1(0) - \pi_1(\varepsilon), \pi_2(0) - \pi_2(\varepsilon),$
 $\varphi_1(0) - \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(0) - \varphi_2(\varepsilon), \zeta_1^{(1)}(0) - \zeta_1^{(1)}(\varepsilon), \zeta_2^{(1)}(0) - \zeta_2^{(1)}(\varepsilon),$
 $\zeta_1^{(2)}(0) - \zeta_1^{(2)}(\varepsilon), \zeta_2^{(2)}(0) - \zeta_2^{(2)}(\varepsilon); m_1(0) - m_1(\varepsilon), m_2(0) - m_2(\varepsilon))$
- III. Рассматриваем соответствующую сопряженную задачу и констатируем ее однозначную разрешимость и тождество, связывающее разностные отношения $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, с решением сопряженной задачи.
- IV. Доказываем равномерную по ε ограниченность в соответствующих пространствах разностных отношений $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$.
- V. Доказываем непрерывную зависимость решений возмущенной задачи (2.26) от параметра ε в точке $\varepsilon = 0$.
- VI. Осуществляем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнениях сопряженной задачи.

VII. Доказываем, что материальные производные (т.е. слабые пределы разностных отношений $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$) являются очень слабым решением линейной задачи (3.4).

Итак, приступаем к доказательству.

I. Пусть матрица $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и скалярная функция $g(\varepsilon)$ определены по формулам (3.1), а $\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon))$ - решение задачи о возмущениях (2.26), существование которого гарантировано леммой 3.2.

II. Положим

$$\begin{aligned}\vec{u}^{(i)}(0) &= \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(0), \quad \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon), \\ \rho_i(0) &= \rho_i^* + \varphi_i(0), \quad \rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Введем в рассмотрение для разностей $\vec{q}(0) - \vec{q}(\varepsilon)$ линейную краевую задачу вида (2.63), коэффициенты уравнений которой определяются по формулам

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{ii}(\varepsilon) &= \Phi_i \left[\vec{\theta}(0) \right] - \rho_i(\varepsilon) \Theta_{ii}(\varphi_i(0), \varphi_i(\varepsilon)) - \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*}(\varphi_i(0) + \varphi_i(\varepsilon)) - \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{i,3-i} \varphi_{3-i}(\varepsilon) + m_i(\varepsilon); \\ \hat{\alpha}_{ij}(\varepsilon) &= -\rho_i(\varepsilon) \Theta_{i,3-i}(\varphi_i(0), \varphi_i(\varepsilon)) - \frac{\varphi_i(0)}{\rho_i^*} \tau_{i,(3-i)} - \tau_{i,(3-i)}, \quad i \neq j; \\ \hat{\beta}_{ij}(\varepsilon) &= \frac{\rho_i(\varepsilon)}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \hat{\gamma}_i(\varepsilon) = \rho_i(0); \\ \hat{\delta}_i(\varepsilon) &= \rho_i(\varepsilon) \Phi_i \left[\vec{\theta}(\varepsilon) \right] - \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*}(\varphi_i(\varepsilon))^2 - \tau_{ii} \varphi_i(\varepsilon) + m_i(\varepsilon) \rho_i(\varepsilon) - \\ &\quad - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}(\varepsilon) - \tau_{i,(3-i)} \frac{\varphi_i(\varepsilon) \varphi_{3-i}(0)}{\rho_i^*}; \\ \alpha_{ij}(\varepsilon) &= \Theta_{i,j}(\varphi_i(0), \varphi_i(\varepsilon)) + \frac{\tau_{ij}}{\rho_i^*}; \quad \beta_{ij}(\varepsilon) = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}; \quad \gamma_i(\varepsilon) = -1; \\ \delta_i(\varepsilon) &= -\Phi_i \left[\vec{\theta}(\varepsilon) \right] + \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} \varphi_i(\varepsilon) - m_i(\varepsilon) + \frac{\tau_{i,(3-i)}}{\rho_i^*} \varphi_{3-i}(\varepsilon); \\ \tilde{\alpha}_{ij}(\varepsilon) &= \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} (\hat{\alpha}_{jj}(\varepsilon) - m_j(\varepsilon)) + \frac{m_j(\varepsilon) \zeta_i^{(j)}(\varepsilon)}{\rho_i^*} - \Theta_{ij}(\varphi_i(0), \varphi_i(\varepsilon)) + \frac{\zeta_i^{(3-j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\alpha}_{3-j,j}(\varepsilon), \\ \tilde{\beta}_{ij}(\varepsilon) &= \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{jj}(\varepsilon) + \frac{\zeta_i^{(3-j)}(0)}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{3-j,j}(\varepsilon) + \beta_{ij}(\varepsilon); \\ \tilde{\gamma}_{ij}(\varepsilon) &= \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}(\varepsilon) \right]}{\rho_i^*} + m_j(\varepsilon) \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j(0)}{\rho_i^*} \right), \\ \tilde{\delta}_i(\varepsilon) &= \Phi_i \left[\vec{\theta}(\varepsilon) \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_i^{(j)}(0)}{\rho_i^*} \left(\hat{\delta}_j(\varepsilon) - m_j(\varepsilon) \rho_j(\varepsilon) \right) - m_j(\varepsilon) \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j(\varepsilon) \zeta_i^{(j)}(\varepsilon)}{\rho_i^*} \right) \right\rangle;\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij}(\varphi_i(0), \varphi_i(\varepsilon)) &= \frac{\tau_{ij}}{p'_i(\rho_i^*)\rho_i^*} \int_0^1 H'_i(\varphi_i(0)s + \varphi_i(\varepsilon)(1-s)) ds; \\
H'_i(\varphi_i) &= p'_i(\rho_i^* + \varphi_i) - p'_i(\rho_i^*); \chi_{ij} = \left(\left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j \zeta_i^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\}_{i,j=1}^2 \right)^{-1}; \\
\mathcal{D}_i(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left((\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} \operatorname{div} (g(\varepsilon)^{-1} \mathbf{N}(\varepsilon) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) - \Delta \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) + \\
&\quad + Re \rho_i(\varepsilon) \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - (\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} (\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) \right), \\
\mathcal{E}(\varepsilon) &= a \left(\mathbf{I} - g(\varepsilon) \cdot (\mathbf{N}^T(\varepsilon))^{-1} \mathbf{N}^{-1}(\varepsilon) \right) (\vec{u}^{(2)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(1)}(\varepsilon)), \quad (3.12) \\
d(\varepsilon) &= 1 - g(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Для краткости данную задачу назовем задачей А.

III. Сопряженная задача к задаче А заключается в отыскании функции $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющей следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_{*\varepsilon}^{(j)} - \nabla \omega_{j\varepsilon}^*) - Re \mathcal{H}_{i\varepsilon} (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) - (-1)^i a (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(2)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(1)}) + \psi_{i\varepsilon}^* \cdot \nabla \varphi_i(\varepsilon) + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad (3.13a)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}(\varepsilon) \psi_{k\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 (n_{k\varepsilon}^* \chi_{kj} \tilde{\beta}_{ji}(\varepsilon) + \mu_{kj} \beta_{ji}(\varepsilon) \omega_{k\varepsilon}^*) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \omega_{i\varepsilon}^* = \omega_{i\varepsilon}^*, i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div} (\psi_{i\varepsilon}^* \vec{u}^{(i)}(0)) + \tau_{ii} \psi_{i\varepsilon}^* = Re \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki}(\varepsilon) \psi_{k\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 (n_{k\varepsilon}^* \chi_{kj} \tilde{\alpha}_{ji}(\varepsilon) + \mu_{kj} \alpha_{ji}(\varepsilon) \omega_{k\varepsilon}^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_{i\varepsilon}^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2; \quad (3.13b)
\end{aligned}$$

$$\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij}(\varepsilon) \sum_{k=1}^2 n_{k\varepsilon}^* \chi_{ki} + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2; \quad (3.13c)$$

$$n_{i\varepsilon}^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i(\varepsilon) \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_{j\varepsilon}^* + \hat{\gamma}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* \right) dx + s_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.13d)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{h}) &= \rho_i(\varepsilon) \nabla (\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} - \operatorname{div} (\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \otimes \vec{h}), \\
\mathcal{M}_i^*(\vec{h}) &= (\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{h}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Лемма 3.5. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда

1. Для любого $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, задача (3.13) имеет единственное решение $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, $i = 1, 2$. Это решение удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{h}_{*\varepsilon}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}, \quad (3.15)$$

где c не зависит от ε .

2. Функции $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, заданные формулами (3.3), принадлежат $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяют тождеству.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_{i\varepsilon}, G_i \rangle_0 + \langle \psi_{i\varepsilon}, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_{2\varepsilon}^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_{i\varepsilon} s_i \right\} = \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i(\varepsilon) + (-1)^i \mathcal{E}(\varepsilon)) + \right. \\ \left. + d(\varepsilon) \left(\hat{\delta}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + n_{i\varepsilon}^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j(\varepsilon) + \mu_{ij} \delta_j(\varepsilon) \omega_{i\varepsilon}^* \right) \right) dx \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, - решение задачи (3.13).

Доказательство.

1. Заметим, что задача (3.13) является частным случаем задачи (2.78) (соответствующей паре матриц $\mathbf{N}_0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}(\varepsilon)$). Поэтому разрешимость задачи (3.13) и оценки (3.15) следуют непосредственно из теоремы 2.8.

2. Применяя лемму 2.12 находим, что разности $\vec{q}(0) - \vec{q}(\varepsilon)$ удовлетворяют тождеству типа 2.143, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left[\left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{v}^{(i)}(0) - \vec{v}^{(i)}(\varepsilon) \right\rangle_1 + \langle \pi_i(0) - \pi_i(\varepsilon), G_i \rangle_0 + \langle \varphi_i(0) - \varphi_i(\varepsilon), F_i \rangle_0 + \right. \\ \left. + \langle \zeta_1^{(i)}(0) - \zeta_1^{(i)}(\varepsilon), M_{1i} \rangle_0 + \langle \zeta_2^{(i)}(0) - \zeta_2^{(i)}(\varepsilon), M_{2i} \rangle_0 + (m_i(0) - m_i(\varepsilon)) s_i \right] = \\ = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} (\mathcal{D}_i(\varepsilon) + (-1)^i \mathcal{E}(\varepsilon)) + \right. \\ \left. + d(\varepsilon) \left(\hat{\delta}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + n_{i\varepsilon}^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j(\varepsilon) + \mu_{ij} \delta_j(\varepsilon) \omega_{i\varepsilon}^*) \right) \right] dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

В силу формул (3.3) из (3.17) вытекает соотношение (3.16).

IV. Четвертый этап - доказательство равномерной по ε ограниченности разностных отношений $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, в соответствующих пространствах, удобно представить в виде следующих двух лемм, первая из которых

играет вспомогательную роль и существенно используется для доказательства основной второй леммы.

Лемма 3.6. *Пусть выполнено условие 3.1. Тогда*

(i) *Имеют место разложения*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i(\varepsilon) &= -\varepsilon \mathcal{D}_{1i}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{D}_{2i}(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad \mathcal{E}(\varepsilon) = -\varepsilon \mathcal{E}_1(\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{E}_2(\varepsilon), \\ d(\varepsilon) &= -\varepsilon \operatorname{div} \vec{T} + \varepsilon^2 d_2(\varepsilon),\end{aligned}\tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{1i}(\varepsilon) &= -\operatorname{Re} \rho_i(\varepsilon) \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) + \mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) + \mathbb{D}^T \Delta \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) + \Delta (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) \right), \\ \mathcal{E}_1(\varepsilon) &= a \mathbb{T} (\vec{u}^{(2)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(1)}(\varepsilon)),\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\mathbb{T} = \operatorname{div} \vec{T} \mathbf{I} - D \vec{T} - \left(D \vec{T} \right)^T, \quad \mathbb{D} = \operatorname{div} \vec{T} \mathbf{I} - D \vec{T}.$$

(ii) *Для остатков $\mathcal{D}_{2i}(\varepsilon)$, $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ и $d_2(\varepsilon)$ выполнены оценки*

$$\|\mathcal{D}_{21}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{D}_{22}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{E}_2(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} + \|d_2(\varepsilon)\|_{C(\Omega)} \leq c,\tag{3.20}$$

где c не зависит от ε .

Доказательство. По лемме 1.20

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(\varepsilon) &= \mathbf{g}(\varepsilon)^{-1} \mathbf{N}(\varepsilon) \mathbf{N}(\varepsilon)^T = \\ &= \left(1 - \varepsilon \operatorname{div} \vec{T} + \varepsilon^2 \mathbf{g}^- \right) (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D} + \varepsilon^2 \mathbb{D}^+) (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D} + \varepsilon^2 \mathbb{D}^+)^T = \mathbf{I} - \varepsilon \mathbb{T} + \varepsilon^2 \mathbb{S}_2(\varepsilon),\end{aligned}$$

где для матрицы $\mathbb{S}_2$ выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}_2(\varepsilon)\|_{C^2(\Omega)} \leq c.\tag{3.21}$$

Подставляя $\mathbb{S}(\varepsilon)$ и разложение (1.26) в (3.12) приходим представлению (3.18) с

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{2i}(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left[(\mathbb{D}^T)^{-1} \operatorname{div} (\mathbb{S}(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} \mathbb{S}_2(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \varepsilon \operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left[(\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} \operatorname{div} (\mathbb{S}(\varepsilon) \nabla (\mathbb{D}^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{D}^T \Delta (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \mathbb{D}^T \operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) \right] + \\ &+ \operatorname{Re} \rho_i(\varepsilon) \left[\mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \mathbb{D}^{-T} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbb{D}^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) \right].\end{aligned}\tag{3.22}$$

По лемме 1.20

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_3(\varepsilon) &= \mathbf{g}(\varepsilon) (\mathbf{N}(\varepsilon)^T)^{-1} \mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} = \\ &= \left(1 + \varepsilon \operatorname{div} \vec{T} + \varepsilon^2 \mathbf{g}^+\right) (\mathbf{I} - \varepsilon \mathbb{D} + \varepsilon^2 \mathbb{D}^-)^T (\mathbf{I} - \varepsilon \mathbb{D} + \varepsilon^2 \mathbb{D}^-) = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{T} + \varepsilon^2 \mathbb{S}_4(\varepsilon),\end{aligned}$$

где для матрицы $\mathbb{S}_4$ выполнена оценка $\|\mathbb{S}_4(\varepsilon)\|_{C^1(\Omega)} \leq c$. Подставляя $\mathbb{S}_3(\varepsilon)$ в (3.12) для $\mathcal{E}(\varepsilon)$, приходим представлению (3.18) с

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) = -a\mathbb{S}_4(\varepsilon) (\vec{u}^{(2)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(1)}(\varepsilon)).$$

Согласно лемме 3.2 вектор-функция $\vec{\theta}(\varepsilon) = (\vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(\varepsilon), \pi_1(\varepsilon), \pi_2(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(\varepsilon))$ принадлежат шару B_τ и поэтому $\sum_{i=1}^2 (\|\vec{v}^{(i)}(\varepsilon)\|_{V^{s,r}} + \|\varphi_i(\varepsilon)\|_{X^{s,r}}) \leq \tau$. Так как $V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ и $X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, $sr > 3$, функции $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon)$ и $\rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{u}^{(i)}(\varepsilon)\|_{W^{2,2}} + \|\rho_i(\varepsilon)\|_{C(\Omega)} \right) \leq c, \quad (3.23)$$

где c не зависит от ε . Из неравенств (1.27), (3.21) и (3.23) следует, что для $\mathcal{D}_{2i}(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, и $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ из (3.22) выполнена оценка (3.20).

Остается отметить, что $d_2(\varepsilon) = -\mathbf{g}(\varepsilon)^+$ и неравенство (3.20) для d_2 является прямым следствием (1.27).

Лемма доказана.

Лемма 3.7. Пусть выполнено условие 3.1 и $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, заданны формулами (3.3), тогда существует число c , не зависящее от ε , такое, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \left(\|\vec{w}_\varepsilon^{(i)}\|_{W_0^{1-s,r'}(\Omega)} + \|\psi_{i\varepsilon}\|_{W^{-s,r'}(\Omega)} + \|\omega_{i\varepsilon}\|_{W^{-s,r'}(\Omega)} + \right. \\ \left. + \|\xi_{1\varepsilon}^{(i)}\|_{W^{-s,r'}(\Omega)} + \|\xi_{2\varepsilon}^{(i)}\|_{W^{-s,r'}(\Omega)} + |n_{i\varepsilon}| \right) \leq c.\end{aligned} \quad (3.24)$$

Доказательство. Достаточно показать, что для всех $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_{i\varepsilon}, G_i \rangle_0 + \langle \psi_{i\varepsilon}, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_{2\varepsilon}^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_{i\varepsilon} s_i \right\} \right| \leq \\ \leq c \sum_{i=1}^2 \left\| \vec{f}^{(i)} \right\|_{\mathcal{U}^{s,r}}.\end{aligned} \quad (3.25)$$

Заметим, что из леммы 2.7 и ограниченности вложения $X^{s,r} \hookrightarrow C(\Omega)$ коэффициенты $\delta_i, \hat{\delta}_i, \tilde{\delta}_i$ по модулю ограничены константой, зависящей только от $\Omega, \vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, r, s, \tau_{11}, \tau_{22}$. Из этого и (3.16) получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}_{\varepsilon}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_{i\varepsilon}, G_i \rangle_0 + \langle \psi_{i\varepsilon}, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_{2\varepsilon}^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_{i\varepsilon} s_i \right\} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \|\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}\|_{C(\Omega)} \cdot |\mathcal{D}_i(\varepsilon) + (-1)^i \mathcal{E}(\varepsilon)| + \right. \\ & \quad \left. + c|d(\varepsilon)| \left(\|\psi_{i\varepsilon}^*\|_{C(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \left(\|\xi_{j\varepsilon}^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + |n_{i\varepsilon}^*| + \|\omega_{i\varepsilon}^*\|_{C(\Omega)} \right) \right) dx \right\} \leq \\ & \leq \varepsilon^{-1} c \sum_{i=1}^2 \left(\|\mathcal{D}_i(\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}(\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} + \|d(\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \right) \|\vec{h}_{*\varepsilon}\|_{C(\Omega) \times \mathbb{R}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, - решения задачи (3.13). Так как вложение $\mathcal{V}^{s,r} \hookrightarrow C^1(\Omega) \times C(\Omega) \times \mathbb{R}$ непрерывно, то из оценки (3.15) леммы 3.5 следует, что

$$\|\vec{h}_{*\varepsilon}\|_{C(\Omega) \times \mathbb{R}} \leq c \|\vec{h}_{*\varepsilon}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \quad (3.27)$$

С другой стороны, из леммы 3.6 следует

$$\varepsilon^{-1} \|\mathcal{D}_i(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq c; \quad \varepsilon^{-1} \|\mathcal{E}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq c; \quad \varepsilon^{-1} \|d(\varepsilon)\|_{C(\Omega)} \leq c. \quad (3.28)$$

В силу (3.27) и (3.28) из неравенства (3.26) следует (3.25). Лемма доказана.

V. Несмотря на то, что лемма 3.2 устанавливает существование и единственность решений $\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon))$ основной задачи (2.26), она ничего не говорит о зависимости этих решений от ε . Теперь возможно доказать, что они непрерывны при $\varepsilon = 0$.

Лемма 3.8. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда решение $\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon))$ задачи (2.26) непрерывно в точке $\varepsilon = 0$, т.е. $(\vec{\theta}(\varepsilon), \vec{\zeta}(\varepsilon), \vec{m}(\varepsilon)) \rightarrow (\vec{\theta}(0), \vec{\zeta}(0), \vec{m}(0))$ в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство.

Напомним, что $\mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ и введем временное обозначение

$$\mathcal{T}^{s,r} = \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}.$$

В силу леммы 3.2 последовательность $q(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, относительно компактна в $\mathcal{V}^{s,r}$. Следовательно, она содержит подпоследовательность, за которой сохраним прежнее

обозначение, которая сходится в $\mathcal{V}^{s,r}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому $\vec{q}_* = (\vec{\theta}_*, \vec{\zeta}_*, \vec{m}_*)$, где $\vec{\theta}_* = (\vec{v}_*^{(1)}, \vec{v}_*^{(2)}, \pi_1^*, \pi_2^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*)$, $\vec{\zeta}_* = (\zeta_{1*}^{(1)}, \zeta_{2*}^{(1)}, \zeta_{1*}^{(2)}, \zeta_{2*}^{(2)})$, $\vec{m}_* = (m_1^*, m_2^*)$.

Заметим, что поскольку $\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{v}_*^{(i)}$ в $W^{s+1,r}(\Omega)$, то по теореме вложения $\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{v}_*^{(i)}$ в $C^1(\Omega)$. Так как $\vec{v}^{(i)}(\varepsilon)$ обращается в нуль на $\partial\Omega$, то $\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{v}_*^{(i)}$ в $W_0^{1,r'}(\Omega)$. С другой стороны, $W_0^{1,r'}(\Omega)$ непрерывно вложено и плотно в интерполяционном пространстве $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) = [L^{r'}(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega)]_{1-s,r'}$. Поэтому, $\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{v}_*^{(i)}$ в $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$.

Затем, $(\pi_i(\varepsilon), \varphi_i(\varepsilon), \zeta_1^{(i)}(\varepsilon), \zeta_2^{(i)}(\varepsilon)) \rightarrow (\pi_i^*, \varphi_i^*, \zeta_{1*}^{(i)}, \zeta_{2*}^{(i)})$, $i = 1, 2$, в $W^{s,r}(\Omega)$ и, следовательно, в $L^r(\Omega)$. Так как $r > r'$, пространство $L^r(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^{r'}(\Omega)$. В свою очередь $L^{r'}(\Omega)$ непрерывно вложено и плотно в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) = [L^{r'}(\Omega), W^{-1,r'}(\Omega)]_{s,r'}$. Следовательно, $(\pi_i(\varepsilon), \varphi_i(\varepsilon), \zeta_1^{(i)}(\varepsilon), \zeta_2^{(i)}(\varepsilon)) \rightarrow (\pi_i^*, \varphi_i^*, \zeta_{1*}^{(i)}, \zeta_{2*}^{(i)})$, $i = 1, 2$, в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$. Таким образом $q(\varepsilon) \rightarrow q^*$ в $\mathcal{T}^{s,r}$. С другой стороны из формулы (3.3) и леммы 3.7 следует, что

$$q(0) - q(\varepsilon) = \varepsilon \left(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}, \vec{w}_\varepsilon^{(2)}, \omega_{1\varepsilon}, \omega_{2\varepsilon}, \psi_{1\varepsilon}, \psi_{2\varepsilon}, \xi_{1\varepsilon}^{(1)}, \xi_{2\varepsilon}^{(1)}, \xi_{1\varepsilon}^{(2)}, \xi_{2\varepsilon}^{(2)}, n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon} \right) \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{T}^{s,r}.$$

Поэтому, предел $q^* = q(0)$ не зависит от выбора сходящейся подпоследовательности последовательности $q(\varepsilon)$. Значит вся последовательность $q(\varepsilon)$ сходится к $q(0)$ в $\mathcal{V}^{s,r}$.

VI. Наш следующий этап – переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сопряженных уравнениях (3.13). Начнем с рассмотрения коэффициентов этих уравнений.

Лемма 3.9. Пусть выполнено условие 3.1. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \{\alpha_{ij}(\varepsilon), \beta_{ij}(\varepsilon), \gamma_i(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon)\} &\rightarrow \{\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*, \gamma_i^*, \delta_i^*\} \text{ в } W^{s,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \{\hat{\alpha}_{ij}(\varepsilon), \hat{\beta}_{ij}(\varepsilon), \hat{\gamma}_i(\varepsilon), \hat{\delta}_i(\varepsilon)\} &\rightarrow \{\hat{\alpha}_{ij}^*, \hat{\beta}_{ij}^*, \hat{\gamma}_i^*, \hat{\delta}_i^*\} \text{ в } W^{s,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \{\tilde{\alpha}_{ij}(\varepsilon), \tilde{\beta}_{ij}(\varepsilon), \tilde{\gamma}_{ij}(\varepsilon), \tilde{\delta}_i(\varepsilon)\} &\rightarrow \{\tilde{\alpha}_{ij}^*, \tilde{\beta}_{ij}^*, \tilde{\gamma}_{ij}^*, \tilde{\delta}_i^*\} \text{ в } W^{s,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\mathcal{H}_{i\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}_i^* \text{ в } L(W^{s+1,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)), \quad i = 1, 2 \quad (3.30)$$

$$-\varepsilon^{-1}\mathcal{E}(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{E}^* \text{ в } L^2(\Omega) \quad (3.31)$$

$$-\varepsilon^{-1}d(\varepsilon) \rightarrow d^* \text{ в } C(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.32)$$

где $\alpha_{ij}(\varepsilon), \dots, \tilde{\delta}_i(\varepsilon)$ заданы формулами (3.11), $\alpha_{ij}^*, \dots, \tilde{\delta}_i^*$ заданы формулами (3.6). Линейные операторы $\mathcal{H}_{i\varepsilon}$ и $\mathcal{H}_i^*$ заданы в (3.14) и (3.8) соответственно; $\mathcal{E}(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ заданы формулами (3.12), а $\mathcal{E}^*$, d^* - в (3.5).

Доказательство.

Из (3.11) очевидно, что коэффициенты $\alpha_{ij}(\varepsilon), \dots, \tilde{\delta}_i(\varepsilon)$, входящие в уравнения сопряженной задачи (3.13), – функции класса C^3 от $\vec{q}(\varepsilon)$ и $\vec{q}(0)$, определенные при любых значениях указанных аргументов. Отметим также справедливость соотношений $\alpha_{ij}^* = \alpha_{ij}(0), \dots, \tilde{\delta}_i^* = \tilde{\delta}_i(0)$. С другой стороны, по лемме 3.8 $\vec{q}(\varepsilon)$ сходится к $\vec{q}(0)$ в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Все перечисленные коэффициенты $\alpha_{ij}(\varepsilon), \dots, \tilde{\delta}_i(\varepsilon)$ представляют собой операторы композиции, действующие из $W^{s,r}(\Omega)$ в $W^{s,r}(\Omega)$, удовлетворяющие условиям леммы 1.15 и, следовательно, непрерывные. Поэтому соотношения (3.29) являются прямым следствием леммы 1.15.

Оценим нормы разностей $\mathcal{H}_{i\varepsilon} - \mathcal{H}_i^*$, $i = 1, 2$. Выберем вектор $\vec{h} \in W^{s+1,r}(\Omega)$, такой что $\|\vec{h}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \leq 1$. Принимая во внимание тождества (3.10), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{h}) - \mathcal{H}_i^*(\vec{h}) &= \\ &= \rho_i(\varepsilon) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} - \operatorname{div}(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \otimes \vec{h}) - \rho_i(0) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} + \\ &+ \operatorname{div}(\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \otimes \vec{h}) = \\ &= (\rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon)) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} - \operatorname{div}(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \otimes \vec{h}) - (\rho_i^* + \varphi_i(0)) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} + \\ &+ \operatorname{div}(\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \otimes \vec{h}) = \\ &= (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h} - \operatorname{div}((\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0)) \otimes \vec{h}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.11 к слагаемому $-\operatorname{div}((\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0)) \otimes \vec{h})$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{h}) - \mathcal{H}_i^*(\vec{h})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c \|(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0)) \otimes \vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Так как $W^{s,r}(\Omega)$ банахова алгебра и $\|\nabla \vec{u}(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq c \|\vec{u}(0)\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \leq c$, то

$$\begin{aligned} &\|(\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)) \nabla(\vec{u}^{(i)}(0)) \vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\nabla(\vec{u}^{(i)}(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Затем

$$\begin{aligned} &\|(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0)) \otimes \vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} & \rho_i(\varepsilon)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(0) = \\ & = \rho_i(\varepsilon)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) + \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(0) = \\ & = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) + \rho_i(0)(\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{v}^{(i)}(0)), \end{aligned}$$

и замечая, что $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon)$ и $\rho_i(\varepsilon)$ равномерно ограничены в $W^{s,r}(\Omega)$, получаем

$$\begin{aligned} & \|(\rho_i(\varepsilon)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(0))\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c\|\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c\|\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{v}^{(i)}(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом доказано неравенство

$$\begin{aligned} & \|(\rho_i(\varepsilon)\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \rho_i(0)\vec{u}^{(i)}(0)) \otimes \vec{h}\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c\|\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c\|\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{v}^{(i)}(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из (3.33)-(3.35) следует, что

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{h}) - \mathcal{H}_i^*(\vec{h})\|_{W^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ & \leq c\|\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c\|\vec{v}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{v}^{(i)}(0)\|_{W^{s,r}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $\mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{h}) \rightarrow \mathcal{H}_i^*(\vec{h})$ в $W^{s-1,r}(\Omega)$ равномерно на единичном шаре в $W^{s+1,r}(\Omega)$, что приводит к соотношению (3.30).

Докажем утверждения (3.31) и (3.32). Из леммы 3.6 и выражений (3.5), (3.18), (3.20) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* + \varepsilon^{-1}\mathcal{E}(\varepsilon) &= a\mathbb{T}(\vec{u}^{(2)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(1)}(\varepsilon)) + \varepsilon^{-1}(-\varepsilon a\mathbb{T}(\vec{u}^{(2)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(1)}(\varepsilon)) + \varepsilon^2\mathcal{E}_2(\varepsilon)) = \\ &= \varepsilon\mathcal{E}_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ в } C^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^* + \varepsilon^{-1}d(\varepsilon) &= \operatorname{div}\vec{T} \cdot \mathbf{I} + \varepsilon^{-1}(1 - g(\varepsilon)) = \operatorname{div}\vec{T} \cdot \mathbf{I} + \varepsilon^{-1}(1 - 1 - \varepsilon\operatorname{div}\vec{T} - \varepsilon^2\mathbf{g}^+) = \\ &= \operatorname{div}\vec{T} \cdot \mathbf{I} + \varepsilon^{-1}(1 - 1 - \varepsilon\operatorname{div}\vec{T} - \varepsilon^2\mathbf{g}^+) = -\varepsilon\mathbf{g}^+ = \varepsilon d_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ в } C(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что решения сопряженной задачи сходятся к решениям задачи (3.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$

Лемма 3.10. Пусть выполнено условие 3.1. Пусть $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, - решения задачи (3.13). Тогда $\vec{h}_{*\varepsilon} \rightarrow \vec{h}_*$ слабо в $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, - решение задачи (3.7).

Доказательство.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнениях (3.13).

Напомним обозначение $\mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$. По Лемме 1.8 пространство $\mathcal{V}^{s,r}$ рефлексивно. Ввиду леммы 3.5 последовательность $\vec{h}_{*\varepsilon}$ ограничена в $\mathcal{V}^{s,r}$. Следовательно, существуют $\vec{h}_* \in \mathcal{V}^{s,r}$ и подпоследовательность, также обозначаемая через $\vec{h}_{*\varepsilon}$, которая сходится слабо в $\mathcal{V}^{s,r}$ к $\vec{h}_*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Докажем, что $\vec{h}_*$ удовлетворяют уравнениям (3.7).

Задача (3.13a) может быть переписаны следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_{*\varepsilon}^{(j)} - \nabla \omega_{j\varepsilon}^*) &= Q_{i\varepsilon}, \quad \text{div} \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} = \Pi P_{i\varepsilon} \text{ в } \Omega, \\ \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \omega_{i\varepsilon}^* = \omega_{i\varepsilon}^*, i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$Q_{k\varepsilon} = Re\mathcal{H}_{k\varepsilon}(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(k)}) + (-1)^k a(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(2)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(1)}) - \psi_{k\varepsilon}^* \cdot \nabla \varphi_k(\varepsilon) - \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(k)}(\varepsilon) \cdot \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(k)} + \vec{H}^{(k)},$$

$$P_{i\varepsilon} = \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}(\varepsilon) \psi_{k\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_{k\varepsilon}^* \chi_{kj} \tilde{\beta}_{ji}(\varepsilon) + \mu_{kj} \beta_{ji}(\varepsilon) \omega_{k\varepsilon}^* \right) \right] + G_i, k, i = 1, 2,$$

Обозначим

$$Q_i = Re\mathcal{H}_i^*(\vec{w}_*^{(i)}) + (-1)^i a(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) - \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i(0) - \sum_{j=1}^2 \zeta_j(0)^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)} + \vec{H}^{(i)},$$

$$P_i = \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj} \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + G_i, i = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_i - Q_{i\varepsilon} &= Re\mathcal{H}_i^*(\vec{w}_*^{(i)}) + (-1)^i a(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) - \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i(0) - \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} + \vec{H}^{(i)} - \\ &- \left(Re\mathcal{H}_{i\varepsilon}(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) + (-1)^i a(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(2)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(1)}) - \psi_{i\varepsilon}^* \cdot \nabla \varphi_i(\varepsilon) - \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + \vec{H}^{(i)} \right) = \\ &= Re(\mathcal{H}_i^* - \mathcal{H}_{i\varepsilon})(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) - \psi_{i\varepsilon}^* \nabla(\varphi_i(0) - \varphi_i(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^2 \left(\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \right) \cdot \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + \\ &+ Re\mathcal{H}_i^*(\vec{w}_*^{(i)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) - (\psi_i^* - \psi_{i\varepsilon}^*) \cdot \nabla \varphi_i(0) - \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla (\xi_j^{(i)*} - \xi_{j\varepsilon}^{(i)*}) + \\ &+ a \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} (\vec{w}_*^{(j)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(j)}). \end{aligned}$$

По лемме 3.9

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{H}_i^* - \mathcal{H}_{i\varepsilon})(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)})\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} &\leq \|\mathcal{H}_i^* - \mathcal{H}_{i\varepsilon}\|_{L(W^{s+1,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega))} \|\vec{w}_*^{(i)}\|_{W^{s+1,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|\mathcal{H}_i^* - \mathcal{H}_{i\varepsilon}\|_{L(W^{s+1,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega))} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из леммы 1.14 следует, что билинейное отображение

$$(W^{s,r}(\Omega))^2 \ni (\varphi, \psi) \mapsto \psi \nabla \varphi \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$$

непрерывно. Этот факт и лемма 3.8 приводят к тому, что

$$\begin{aligned} &\|\psi_{i\varepsilon}^* \nabla (\varphi_i(0) - \varphi_i(\varepsilon))\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \left\| \left(\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \right) \cdot \nabla \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} \right\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\varphi_i(0) - \varphi_i(\varepsilon))\|_{W^{s,r}(\Omega)} \|\psi_{i\varepsilon}^*\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c \sum_{j=1}^2 \left\| \left(\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \right) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \left\| \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \|(\varphi_i(0) - \varphi_i(\varepsilon))\|_{W^{s,r}(\Omega)} + c \sum_{j=1}^2 \left\| \left(\zeta_j^{(i)}(0) - \zeta_j^{(i)}(\varepsilon) \right) \right\|_{W^{s,r}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Оператор $\mathcal{H}_i^*$ является частным случаем оператора $\mathcal{H}_i$ с $\mathbf{N}_0 = \mathbf{I}$ и $\vec{u}_0^{(i)} = \vec{u}^{(i)}(0)$. Лемма 2.10 показывает, что оператор $\mathcal{H}_i^* : W^{s+1,r}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ является непрерывным и, следовательно, непрерывен в слабой топологии, что приводит к

$$\mathcal{H}_i^* (\vec{w}_*^{(i)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) \rightarrow 0 \text{ слабо в } \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

Из леммы 1.14 следует, что трилинейная форма

$$(W^{s,r}(\Omega))^2 \times \mathcal{W}^{1-s,r'}(\Omega) \ni (\varphi, \psi, \vec{w}) \mapsto \langle \psi \nabla \varphi, \vec{w} \rangle_1 \in \mathbb{R},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ обозначает соотношение двойственности между $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ и $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}$, является непрерывной. Следовательно, для фиксированного $\varphi \in W^{s,r}(\Omega)$ и $\vec{w} \in \mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ отображение $\psi \mapsto \langle \psi \nabla \varphi, \vec{w} \rangle_1$ определяет линейный непрерывный функционал на $W^{s,r}(\Omega)$. Так как $\psi_i^* - \psi_{i\varepsilon}^* \rightarrow 0$ слабо в $W^{s,r}(\Omega)$, то

$$\langle (\psi_i^* - \psi_{i\varepsilon}^*) \cdot \nabla \varphi_i(0), \vec{w} \rangle_1 \rightarrow 0 \text{ для всех } \vec{w} \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это означает, что $(\psi_i^* - \psi_{i\varepsilon}^*) \cdot \nabla \varphi_i(0) \rightarrow 0$ слабо* в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$. Заметим, что $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ является рефлексивным как двойственное пространство к рефлексивному $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}$. Таким образом получаем

$$(\psi_i^* - \psi_{i\varepsilon}^*) \cdot \nabla \varphi_i(0) \rightarrow 0 \text{ слабо в } \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla \left(\xi_j^{(i)*} - \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} \right) \rightarrow 0 \text{ слабо в } \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

Так как $\vec{w}_{*\varepsilon}^{(j)}$ сходится к $\vec{w}_*^{(j)}$ слабо в $W^{s,r}(\Omega)$, то

$$a \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \left(\vec{w}_*^{(j)} - \vec{w}_{*\varepsilon}^{(j)} \right) \rightarrow 0 \text{ слабо в } \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Объединяя (3.38)- (3.42) получаем

$$Q_{i\varepsilon} \rightarrow Q_i \text{ слабо в } \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Рассмотрим последовательность $P_{i\varepsilon}$. По лемме 3.9 коэффициенты $\hat{\beta}_{ki}(\varepsilon)$, $\tilde{\beta}_{ji}(\varepsilon)$, $\beta_{ji}(\varepsilon)$ сходятся к $\hat{\beta}_{ki}^*$, $\tilde{\beta}_{ji}^*$, β_{ji}^* в $W^{s,r}(\Omega)$. С другой стороны последовательности $\omega_{k\varepsilon}^*$, $\psi_{k\varepsilon}^*$ сходятся слабо к ω_k^* , ψ_k^* соответственно в $W^{s,r}(\Omega)$ и числовая последовательность $n_{k\varepsilon}^*$ сходится к n_k^* в $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}(\varepsilon) \psi_{k\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_{k\varepsilon}^* \chi_{kj} \tilde{\beta}_{ji}(\varepsilon) + \mu_{kj} \beta_{ji}(\varepsilon) \omega_{k\varepsilon}^* \right) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] \text{ слабо в } W^{s,r}(\Omega), \end{aligned}$$

откуда

$$P_{i\varepsilon} \rightarrow P_i \text{ слабо в } W^{s,r}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.44)$$

Из леммы 1.29 следует, что оператор

$$T : \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \rightarrow W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega),$$

сопоставляющий паре $(Q_{i\varepsilon}, P_{i\varepsilon})$ решение $(\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}, \omega_{i\varepsilon}^*)$ задачи (3.36), является непрерывным и, следовательно, он непрерывен в слабой топологии. Вместе с (3.43) и (3.44) это приводит к выводу, что слабый предел решений задачи (3.36) удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) = Q_i, \quad \operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} = \Pi P_i \text{ в } \Omega, \\ & \vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

которые совпадают с (3.7a).

Осталось доказать, что ψ_i^* , $\xi_1^{(i)*}$, $\xi_2^{(i)*}$, $i = 1, 2$, удовлетворяют транспортным уравнениям из (3.7b) и (3.7c). Отметим, что эти уравнения понимаются в слабом смысле.

Рассмотрим краевые задачи (3.13b) для функций $\psi_{i\varepsilon}^*$, $i = 1, 2$. Функции $\psi_{i\varepsilon}^*$ являются слабыми решениями этих задач, если и только если интегральные тождества

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\psi_{i\varepsilon}^* \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \phi + \phi \left(\tau_{ii} \psi_{i\varepsilon}^* - Re \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) - \sum_{k=1}^2 \hat{\alpha}_{ki}(\varepsilon) \psi_{k\varepsilon}^* \right) \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[\phi \left(- \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 (n_{k\varepsilon}^* \chi_{kj} \tilde{\alpha}_{ji}(\varepsilon) + \mu_{kj} \alpha_{ji}(\varepsilon) \omega_{k\varepsilon}^*) \right] - F_i \right) \right] dx = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

выполняются для каждой $\phi \in C^1(\Omega)$, обращающейся в нуль в окрестности $\partial\Omega \setminus \Sigma_{out}^i$. Так как вложение $W^{s+1,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,r}(\Omega)$ компактно, последовательность $\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}$ сходится к $\vec{w}_*^{(i)}$ сильно в $W^{s,r}(\Omega)$. С другой стороны, из леммы 2.10 вытекает непрерывность оператора $\mathcal{M}_i^* : W^{s,r}(\Omega) \rightarrow W^{s,r}(\Omega)$. Таким образом получаем

$$\mathcal{M}_i^* (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) \rightarrow \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(i)}) \quad \text{в } W^{s,r}(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда $\mathcal{M}_i^* (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}) \rightarrow \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(i)})$ в $C(\Omega)$. Так как вложение $W^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ компактно, последовательности функций $\{\omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)}\}$ сходятся к $\{\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}\}$ равномерно в Ω при $\varepsilon \rightarrow 0$. По лемме 3.9 функции $\{\hat{\alpha}_{ki}(\varepsilon), \tilde{\alpha}_{ji}(\varepsilon), \alpha_{ji}(\varepsilon)\}$ сходятся к $\{\hat{\alpha}_{ki}^*, \tilde{\alpha}_{ji}^*, \alpha_{ji}^*\}$ в $C(\Omega)$. Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в (3.45), получаем тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\psi_i^* \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \phi + \phi \left(\tau_{ii} \psi_i^* - Re \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(i)}) - \sum_{k=1}^2 \hat{\alpha}_{ki}^* \psi_k^* \right) \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[\phi \left(- \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj} \tilde{\alpha}_{ji}^* + \mu_{kj} \alpha_{ji}^* \omega_k^*) \right] - F_i \right) \right] dx = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

которое означает, что $\psi_i^*, i = 1, 2$, удовлетворяют задаче (3.7b).

С помощью аналогичных рассуждений легко доказывается, что слабые пределы $\xi_j^{(i)*} \in W^{s,r}(\Omega), i, j = 1, 2$ последовательностей $\xi_{j\varepsilon}^{(i)*}$ решений задачи (3.13c) удовлетворяют транспортным уравнениям (3.7c) и соответствующим граничным условиям.

Наконец, поскольку последовательности $\gamma_i(\varepsilon), \hat{\gamma}_i(\varepsilon)$ сходятся в $W^{s,r}(\Omega)$ (а значит и в $C(\Omega)$) к γ_i^* и $\hat{\gamma}_i^*$ соответственно, то в силу вышесказанного очевидно, что

$$\int_{\Omega} \left(\gamma_i(\varepsilon) \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_{j\varepsilon}^* + \hat{\gamma}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \left(\gamma_i^* \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i^* \psi_i^* \right) dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Другими словами имеют место соотношения (3.7d).

Объединение полученных результатов приводит к выводу, что $\vec{h}_*$ удовлетворяет уравнениям задачи (3.7). Таким образом доказано, что каждый слабый предел $\vec{h}_*$ последовательности $\vec{h}_{*\varepsilon}$ является решением краевой задачи (3.7). Так как такое решение является единственным, то вся последовательность $\vec{h}_{*\varepsilon}$ сходится слабо в $\mathcal{V}^{s,r}$ к $\vec{h}_*$.

VII. Завершающий этап доказательства теоремы 3.4 начнем с рассмотрения следующей леммы, играющей вспомогательную роль.

Лемма 3.11. Пусть выполнено условие 3.1. Пусть $\mathcal{D}_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, заданы формулами (3.12). Тогда для любой последовательности $\vec{w}_\varepsilon \in W^{s+1,r}(\Omega)$, обладающей свойством $\vec{w}_\varepsilon \rightarrow \vec{w}$ слабо в $W^{s+1,r}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\vec{w}_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega$, $\vec{w} = 0$ на $\partial\Omega$ имеют место соотношения

$$-\varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \vec{w}_\varepsilon \mathcal{D}_i(\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega} \vec{w} \mathcal{D}_i^* dx \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.46)$$

где $\mathcal{D}_i^*$ заданы в (3.5).

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \vec{w}_\varepsilon \mathcal{D}_i(\varepsilon) + \vec{w} \mathcal{D}_i^*) dx = \\ & \int_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon) + \mathcal{D}_i^*) \vec{w} dx + \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon) (\vec{w}_\varepsilon - \vec{w}) dx = J_\varepsilon^{i,1} + J_\varepsilon^{i,2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Очевидно, $J_\varepsilon^{i,2} = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon) (\vec{w}_\varepsilon - \vec{w}) dx \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, на основании того, что имеет место равномерная по ε оценка $\|\varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq c$ (лемма 3.6) и $\vec{w}_\varepsilon \rightarrow \vec{w}$ в $C^1(\Omega)$ (вложение $W^{s+1,r}(\Omega)$ в $C^1(\Omega)$ компактно).

Рассмотрим интегралы $J_\varepsilon^{i,1} = \int_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon) + \mathcal{D}_i^*) \vec{w} dx$. В силу формул (3.5), (3.18), (3.19) справедливо равенство

$$\mathcal{D}_i^* + \varepsilon^{-1} \mathcal{D}_i(\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{D}_{2i}(\varepsilon) + \mathcal{D}_{3i}(\varepsilon) + Re \mathcal{D}_{4i}(\varepsilon), \quad (3.48)$$

где $\mathcal{D}_{2i}(\varepsilon)$ определены формулами (3.22) и для них имеет место равномерная по ε оценка (3.20), т.е.

$$\|\mathcal{D}_{2i}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \quad (\text{лемма 3.6}). \quad (3.49)$$

Выражения $\mathcal{D}_{3i}(\varepsilon)$, $\mathcal{D}_{4i}(\varepsilon)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{3i}(\varepsilon) = & \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left[\operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) + \mathbb{D}^T \Delta (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) + \right. \\ & \left. + \Delta (\mathbb{D} (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))) \right], \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{4i}(\varepsilon) = & \rho_i(\varepsilon) (\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) + \mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) - \\ & - \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)) + \mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Следовательно,

$$J_\varepsilon^{i,1} = \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{D}_{2i}(\varepsilon) \vec{w} dx + \int_{\Omega} \mathcal{D}_{3i}(\varepsilon) \vec{w} dx + \int_{\Omega} \operatorname{Re} \mathcal{D}_{4i}(\varepsilon) \vec{w} dx = I_\varepsilon^{i,1} + I_\varepsilon^{i,2} + I_\varepsilon^{i,3}. \quad (3.52)$$

Ясно, что $I_\varepsilon^{i,1} = \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{D}_{2i}(\varepsilon) \vec{w} dx \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $\vec{w} \in W^{s+1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$ и имеет место оценка (3.49). Интегралы $I_\varepsilon^{i,2} = \int_{\Omega} \mathcal{D}_{3i}(\varepsilon) \vec{w} dx$ в соответствии с формулой (3.50) представим в виде

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{i,2} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} [\operatorname{div} (\mathbb{T} \nabla (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)))] \vec{w} dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} [\mathbb{D}^{\mathbb{T}} \Delta (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))] \vec{w} dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 [\Delta (\mathbb{D} (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)))] \vec{w} dx = \\ &= K_\varepsilon^{i,1} + K_\varepsilon^{i,2} + K_\varepsilon^{i,3}. \end{aligned}$$

Так как $\vec{w} = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$K_\varepsilon^{i,1} = - \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \int_{\Omega} [\mathbb{T} \nabla (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))] : \nabla \vec{w} dx.$$

Поскольку $\mathbb{T} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, то

$$|K_\varepsilon^{i,1}| \leq c \|\mathbb{T}\|_{C^1(\mathbb{R}^3)} \int_{\Omega} |\nabla (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))| \cdot |\nabla \vec{w}| dx.$$

Согласно лемме 3.8 и формуле (3.10) $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{u}^{(i)}(0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $W^{s+1,r}(\Omega)$ и следовательно $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{u}^{(i)}(0)$ в $C^1(\Omega)$ (вложение $W^{s+1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$ непрерывно). Таким образом, очевидно, $|K_\varepsilon^{i,1}| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогично доказывается, что $K_\varepsilon^{i,2} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} [\mathbb{D}^{\mathbb{T}} \Delta (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))] \vec{w} dx \rightarrow 0$ и

$$K_\varepsilon^{i,3} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 [\Delta (\mathbb{D} (\vec{u}^{(i)}(0) - \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)))] \vec{w} dx \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В итоге имеем $I_\varepsilon^{i,2} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим $I_\varepsilon^{i,3} = \int_{\Omega} \operatorname{Re} \mathcal{D}_{4i}(\varepsilon) \vec{w} dx$. Так как $\rho_i(\varepsilon) \rightarrow \rho_i(0)$ в $W^{s,r}(\Omega)$ (лемма 3.8 и равенство (3.10)) и вложение $W^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ непрерывно, то $\rho_i(\varepsilon) \rightarrow \rho_i(0)$ в $C(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. К тому же $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{u}^{(i)}(0)$ в $C^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\mathcal{D}_{4i}(\varepsilon) \rightarrow 0$ равномерно в Ω . Отсюда вытекает, что $I_\varepsilon^{i,3} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге получаем $J_\varepsilon^{i,1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом соотношение (3.46) доказано.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 3.4. Так как по лемме 3.7 последовательность $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, заданная в (3.3) ограничена в рефлексивном пространстве $\mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$, то можно предположить, переходя если необходимо к подпоследовательности, что существуют $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i) \in \mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$, такие что

$$\vec{w}_\varepsilon^{(i)} \rightarrow \vec{w}^{(i)} \text{ слабо в } \mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega),$$

$$\left\{ \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)} \right\} \rightarrow \left\{ \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)} \right\} \text{ слабо в } \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega), n_{i\varepsilon} \rightarrow n_i \text{ в } \mathbb{R} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны, из леммы 3.5 для $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{W}^{s-1, r}(\Omega) \times W^{s, r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_{i\varepsilon}, G_i \rangle_0 + \langle \psi_{i\varepsilon}, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_{2\varepsilon}^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_{i\varepsilon} s_i \right\} = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i(\varepsilon) + (-1)^i \mathcal{E}(\varepsilon)) + \right. \\ & \quad \left. + d(\varepsilon) \left(\hat{\delta}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + n_{i\varepsilon}^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j(\varepsilon) + \mu_{ij} \delta_j(\varepsilon) \omega_{i\varepsilon}^* \right) \right) dx \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где $\vec{h}_{*\varepsilon} = (\vec{h}_{*\varepsilon}^{(1)}, \vec{h}_{*\varepsilon}^{(2)})$, $\vec{h}_{*\varepsilon}^{(i)} = (\vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}^*, \psi_{i\varepsilon}^*, \xi_{1\varepsilon}^{(i)*}, \xi_{2\varepsilon}^{(i)*}; n_{i\varepsilon}^*)$, - решение задачи (3.13). Так как пространство $\mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ является сопряженным к $\mathcal{W}^{s-1, r}(\Omega) \times W^{s, r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, то, переходя к пределу в левой части этого тождества, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_{i\varepsilon}, G_i \rangle_0 + \langle \psi_{i\varepsilon}, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_{1\varepsilon}^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_{2\varepsilon}^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_{i\varepsilon} s_i \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, G \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_i s_i \right\} \\ & \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как вложение $\mathcal{V}^{s, r} = W^{s+1, r}(\Omega) \times W^{s, r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ в $C^1(\Omega) \times C(\Omega) \times \mathbb{R}$ компактно, то из леммы 3.10 следует, что

$$\vec{h}_{*\varepsilon} \rightarrow \vec{h}_* \text{ в } C^1(\Omega) \times C(\Omega) \times \mathbb{R}.$$

Здесь $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, - решение задачи (3.7), заданное леммой 3.3.

Свойства (3.29)-(3.32) леммы 3.9 и соотношение (3.46) леммы 3.11 позволяют совершить предельный переход в при $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части тождества (3.53)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_{*\varepsilon}^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i(\varepsilon) + (-1)^i \mathcal{E}(\varepsilon)) + \right. \\ & \quad \left. + d(\varepsilon) \left(\hat{\delta}_i(\varepsilon) \psi_{i\varepsilon}^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_{j\varepsilon}^{(i)*} + n_{i\varepsilon}^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j(\varepsilon) + \mu_{ij} \delta_j(\varepsilon) \omega_{i\varepsilon}^* \right) \right) \right\} dx \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_*^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^* \right) \right) \right\} dx \end{aligned}$$

Таким образом в результате предельного перехода в (3.53) получаем тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_i s_i \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_*^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^* \right) \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, - решение задачи (3.7). Таким образом доказано, что каждый слабый предел $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i)$, последовательности $\vec{h}_\varepsilon = (\vec{h}_\varepsilon^{(1)}, \vec{h}_\varepsilon^{(2)})$, $\vec{h}_\varepsilon^{(i)} = (\vec{w}_\varepsilon^{(i)}; \omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)}; n_{i\varepsilon})$, удовлетворяет тождеству (3.54).

Осталось показать, что последовательность имеет единственную слабую предельную точку и, следовательно, сходится слабо к этой точке. Предположим, что существует пара векторов $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i)$, и $\vec{h}' = (\vec{h}'^{(1)}, \vec{h}'^{(2)})$, $\vec{h}'^{(i)} = (\vec{w}'^{(i)}; \omega'_i, \psi'_i, \xi_i'^{(1)}, \xi_i'^{(2)}; n'_i)$, из $\mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$, каждый из которых удовлетворяет тождеству (3.54). Тогда для всех $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{W}^{s-1, r}(\Omega) \times W^{s, r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} - \vec{w}'^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i - \omega'_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i - \psi'_i, F_i \rangle_0 \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \xi_1^{(i)} - \xi_1'^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)} - \xi_2'^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + (n_i - n'_i) s_i \right\} = 0. \end{aligned}$$

Так как пространство $\mathcal{W}_0^{s-1, r}(\Omega) \times W^{s, r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ является сопряженным к $\mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$, то из этого тождества следует, что $\vec{h} = \vec{h}'$.

§ 3. Производная по области функционала сопротивления.

3.1. Связь материальной производной и производной по области.

Исследование влияния возмущения области на решения краевой задачи (2.1) приводит к необходимости оперировать к таким понятиям как материальная производная и производная по области. Напомним подход, который реализуется в данной работе.

Чтобы описать возмущения области рассматривается однопараметрическое семейство областей $\Omega_\varepsilon = (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})(\Omega)$, где $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ - произвольное достаточно гладкое отображение с компактным носителем. Таким образом мы получаем две краевые задачи. Первая – краевая задача (2.1) для физических параметров течения $(\vec{u}^{(i)}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, в невозмущенной области Ω , и вторая – краевая задача (2.2) для параметров $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}, \bar{\rho}_i^\varepsilon)$, $i = 1, 2$, в возмущенной области Ω_ε . Отметим, что поля скоростей $\vec{u}^{(i)}(x)$ и поля плотностей $\rho_i(x)$, $i = 1, 2$, вычисляются в физических точках $x \in \Omega$, а поля скоростей $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(y)$ и поля плотностей $\bar{\rho}_i^\varepsilon(y)$, $i = 1, 2$, вычисляются в физических точках y возмущенной области Ω_ε . Таким образом физические параметры течений $(\vec{u}^{(i)}, \rho_i)$ и $(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}, \bar{\rho}_i^\varepsilon)$ определены в разных областях и для того, чтобы иметь возможность их сравнивать, используются преобразованные поля скоростей $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$ и поля плотностей ρ_i^ε , $i = 1, 2$, которые определены в невозмущенной области Ω посредством формул (см. (2.3))

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) = \mathbf{N}(\varepsilon)(x) \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x + \varepsilon \vec{T}(x)) \rho_i^\varepsilon(x) = \bar{\rho}_i^\varepsilon(x + \varepsilon \vec{T}(x)), \quad x \in \Omega,$$

где

$$\mathbf{N}(\varepsilon) = \det(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T})(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T})^{-1}.$$

По этой причине мы говорим о невозмущенной области Ω как об «опорной» области, чтобы акцентировать внимание на том, что при $\varepsilon \neq 0$ точки этой области нельзя рассматривать как точки «физического» евклидова пространства.

Замена независимых переменных в задаче (2.2) привела нас к задаче (2.4) для преобразованных функций. Построение решений задачи (2.4) сведено к построению решений задачи (2.26) - задачи для возмущений в «опорной» области.

Теорема 2.15 и лемма 3.2 устанавливают существование однопараметрического семейства решений $\vec{\theta}(\varepsilon) = (\vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(\varepsilon), \pi_1(\varepsilon), \pi_2(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(\varepsilon))$ задачи (2.26). В свою очередь, функции $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon)$, $\rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, являются решением задачи (2.4). Здесь $(\vec{u}_*^{(i)}, \rho_i^*)$, $i = 1, 2$, - характеристики «базового» течения, описываемые задачей (2.15).

Теорема 3.4 показывает, что существуют $\vec{w}^{(i)} \in \mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega)$ и $\psi_i \in \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\varepsilon^{-1} (\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(i)}) \rightarrow \vec{w}^{(i)} \text{ слабо в } \mathcal{W}_0^{1-s, r'}(\Omega), \quad \varepsilon^{-1} (\rho_i(\varepsilon) - \rho_i) \rightarrow \psi_i \text{ слабо в } \mathbb{W}^{-s, r'}(\Omega).$$

Функции $\vec{w}^{(i)}$ и ψ_i , $i = 1, 2$, называются материальными производными решений задачи (2.4) и обозначаются так:

$$\dot{\vec{u}}^{(i)}(0) = \vec{w}^{(i)}, \quad \dot{\rho}_i(0) = \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Эти искусственные величины не имеют физического смысла, поскольку они выражают производные преобразованных скоростей и производные плотностей в нефизической «опорной» области. Настоящие производные по области скоростей и плотностей в фиксированной точке реального физического пространства определяются следующим образом:

$$\vec{u}'^{(i)}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (\vec{u}_\varepsilon^{(i)} - \vec{u}^{(i)}), \quad \rho_i'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (\bar{\rho}_i^\varepsilon - \rho_i), \quad i = 1, 2.$$

Формально установить связь между материальной производной и производной по области можно используя формулы

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = (\mathbf{N}(\varepsilon))^{-1} \circ (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \circ (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})^{-1} \bar{\rho}_i^\varepsilon = \rho_i(\varepsilon) \circ (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})^{-1}.$$

Прямые вычисления показывают, что производные по области могут быть восстановлены из материальных производных:

$$\vec{u}'^{(i)}(0) = \dot{\vec{u}}^{(i)}(0) - \nabla \vec{u}^{(i)} \vec{T} + D\vec{T} \vec{u}^{(i)} - \text{div} \vec{T} \vec{u}^{(i)}, \quad \rho_i'(0) = \dot{\rho}_i(0) - \nabla \rho_i \cdot \vec{T}, \quad i = 1, 2.$$

Так как $\vec{u}^{(i)} \in W^{2,2}(\Omega)$ и $\rho_i \in W^{1,2}(\Omega)$, все слагаемые в правых частях определены.

3.2. Производная по области функционала сопротивления.

Предположим выполненным условие 3.1. Тогда каждой матрице $N(\varepsilon)$ соответствует единственное решение

$$\vec{q}(\varepsilon) = (\vec{v}^{(1)}(\varepsilon), \vec{v}^{(2)}(\varepsilon); \pi_1(\varepsilon), \pi_2(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \varphi_2(\varepsilon), \zeta_1^{(1)}(\varepsilon), \zeta_2^{(1)}(\varepsilon), \zeta_1^{(2)}(\varepsilon), \zeta_2^{(2)}(\varepsilon); m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon))$$

задачи (2.26), которое в свою очередь порождает решение задачи (2.4):

$$\begin{aligned}\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) &= \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon), \quad \rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon), \\ q_i(\varepsilon) &= q_i^* + \pi_i(\varepsilon) + \Lambda \cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j(\varepsilon), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Обратимся к функционалу сопротивления $J_D(\Omega_\varepsilon)$, записанному в невозмущенной области Ω (см. приложение А):

$$\begin{aligned}J_D(\Omega_\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \cdot \left\langle \int_{\Omega} \operatorname{Re} \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right) - q_i \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx \right\rangle,\end{aligned}\tag{3.56}$$

где η - произвольная гладкая функция, тождественно равная 1 в окрестности препятствия S и тождественно равная нулю в окрестности границы Σ . Подставляя функции (3.55) в выражение (3.56), получим:

$$J_D(\Omega_\varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \left(\vec{U}_\infty \cdot \vec{J}_1^{(i)}(\Omega_\varepsilon) + \vec{U}_\infty \cdot \vec{J}_2^{(i)}(\Omega_\varepsilon) \right),\tag{3.57}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{J}_1^{(i)}(\Omega_\varepsilon) &= - \int_{\Omega} \operatorname{Re} \eta \rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)) dx, \\ \vec{J}_2^{(i)}(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega} q_i(\varepsilon) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g(\varepsilon)^{-1} (\mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \\ &\quad \left. + \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T \mathbf{N}(\varepsilon) - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Хотя решения задачи (2.4) не имеют определенного физического смысла, сопротивление $\operatorname{Re}^{-1} J(\Omega_\varepsilon)$ является реальной физической величиной. Оно равно силе, порожденной гидродинамической силой действующей на тело S_ε . Вычисление сопротивления и его изменений относительно возмущений препятствия S имеет практическое значение, например, для построения численного алгоритма поиска оптимальной формы обтекаемого препятствия.

В этом разделе будет получена явная формула для производной

$$dJ_D(\Omega) \left[\vec{T} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J_D(\Omega_\varepsilon) - J_D(\Omega)).\tag{3.59}$$

Заметим, что возмущенные области $\Omega_\varepsilon = (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})(\Omega)$ порождаются деформациями $\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T}$ окружающего пространства $\mathbb{R}^3$. Кроме того Ω_ε может быть представлена как сдвиг Ω вдоль интегральных линий векторного поля $\mathbf{T}(x, \varepsilon) = \left(\vec{T} \circ (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})^{-1} \right)(x)$. С этой точки зрения величина (3.59) - не что иное, как производная Гато функционала формы $J_D(\Omega)$ в направлении $\vec{T}$. Вычислять $dJ_D(\Omega) [\vec{T}]$ удобно в терминах материальных производных решений задачи (2.26). Соответствующий результат приводится в следующей теореме, которая является прямым следствием теоремы 3.4.

Теорема 3.12. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.4. Тогда производная $dJ_D(\Omega) [\vec{T}]$, определяемая по формуле (3.59) существует и может быть представлена в виде*

$$dJ_D(\Omega) [\vec{T}] = L_u(\vec{T}) + L_e(\vec{T}). \quad (3.60)$$

Здесь форма L_u определена равенством

$$L_u(\vec{T}) = \sum_{i=1}^2 \left(\left\langle \vec{B}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, A \rangle_0 + \langle \psi_i, C_i \rangle_0 \right), \quad (3.61)$$

где материальные производные $\vec{w}^{(i)}, \omega_i, \psi_i$, $i = 1, 2$, заданы теоремой 3.4, и

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(i)} &= \left[(\mu_{1i} + \mu_{2i}) \Delta \eta \vec{U}_\infty + Re \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \cdot \vec{U}_\infty - Re \rho_i(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \vec{U}_\infty \eta \right] \\ A &= \nabla \eta \cdot \vec{U}_\infty, \quad C_i = -Re \eta (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0)) \cdot \vec{U}_\infty, \end{aligned} \quad (3.62)$$

и L_e имеет вид

$$\begin{aligned} L_e(\vec{T}) &= - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty Re \int_{\Omega} [\rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(0)] dx + \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} (q_i(0) \mathbb{D}^T) \nabla \eta dx - \\ &- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(0))) \right) \nabla \eta dx + \\ &- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left[(\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(0)))^T \right] \right) \nabla \eta dx + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla (\vec{u}^{(j)}(0)) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(0))^T - \text{div} (\vec{u}^{(j)}(0)) \mathbf{I} \right) \right) (D\vec{T})^T \nabla \eta dx, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где $\mathbb{D} = \text{div} \vec{T} \mathbf{I} - D\vec{T}$.

Доказательство. В соответствии с формулой (3.57) разностное отношение $\frac{1}{\varepsilon} (J_D(\Omega_\varepsilon) - J_D(\Omega))$ может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} (J_D(\Omega_\varepsilon) - J_D(\Omega)) = \sum_{i=1}^2 \left(\vec{U}_\infty \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(\vec{J}_1^{(i)}(\Omega_\varepsilon) - \vec{J}_1^{(i)}(\Omega) \right) + \vec{U}_\infty \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(\vec{J}_2^{(i)}(\Omega_\varepsilon) - \vec{J}_2^{(i)}(\Omega) \right) \right),$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \left(\bar{J}_1^{(i)}(\Omega_\varepsilon) - \bar{J}_1^{(i)}(\Omega) \right) &= \frac{Re}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta \left[\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla \left((\mathbf{I} - \mathbf{N}(\varepsilon)^{-1}) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) \right] dx - \\
&- \frac{Re}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta \left[\rho_i(\varepsilon) \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(i)}(0) \right) \nabla \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) \right] dx - \\
&- \frac{Re}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta \left[(\rho_i(\varepsilon) - \rho_i(0)) \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) \right] dx + \\
&+ \frac{Re}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta \left[\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \left(\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(i)}(0) \right) \right] dx,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \left(\bar{J}_2^{(i)}(\Omega_\varepsilon) - \bar{J}_2^{(i)}(\Omega) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left[q_i(\varepsilon) (\mathbf{N}(\varepsilon)^T - \mathbf{I}) + (q_i(\varepsilon) - q_i(0)) \mathbf{I} \right] \nabla \eta dx \\
&- \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g(\varepsilon)^{-1} (\mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \\
&\quad \left. + \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T \mathbf{N}(\varepsilon) - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)}(\varepsilon) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) \right) \nabla \eta dx - \\
&- \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(j)}(0)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(j)}(0))^T - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(j)}(0)) \mathbf{I} \right) \right) \nabla \eta dx
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Из формул (3.64), (3.65) и соотношений

$$\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) - \vec{u}^{(i)}(0) = \varepsilon \vec{w}_\varepsilon^{(i)}, \quad \rho_i(\varepsilon) - \rho_i(0) = \varepsilon \psi_{i\varepsilon}, \quad q_i(\varepsilon) - q_i(0) = \varepsilon \omega_{i\varepsilon} + \varepsilon \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) n_{j\varepsilon}, \quad i = 1, 2,$$

легко вытекает следующая формула представления разностного отношения

$$\frac{1}{\varepsilon} (J_D(\Omega_\varepsilon) - J_D(\Omega)) = L_{\varepsilon, u} + L_{\varepsilon, e}, \tag{3.66}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon, u} &= - \sum_{i=1}^2 Re \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \eta \left[\rho_i(\varepsilon) \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) + \psi_{i\varepsilon} \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) + \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \right] dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla \vec{w}_\varepsilon^{(j)} + \nabla (\vec{w}_\varepsilon^{(j)})^T - \operatorname{div} (\vec{w}_\varepsilon^{(j)}) \mathbf{I} \right) \right) \nabla \eta dx + \\
&+ \sum_{i=1}^2 \vec{U}_\infty \int_{\Omega} \left(\omega_{i\varepsilon} + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) n_{j\varepsilon} \right) \mathbf{I} \nabla \eta dx,
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon L_{\varepsilon, e} = & \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} Re \int_{\Omega} \eta [\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla ((\mathbf{I} - \mathbf{N}(\varepsilon)^{-1}) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))] dx + \\
& + \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) - q_i(\varepsilon) \mathbf{I} \right) \nabla \eta dx - \\
& - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g(\varepsilon)^{-1} (\mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \\
& \quad \left. + \nabla (\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T \mathbf{N}(\varepsilon) - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) - q_i(\varepsilon) \mathbf{I} \right) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Отметим, что $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon), \vec{u}^{(i)}(0), \vec{w}_{\varepsilon}^{(i)}, i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы в Ω и принадлежат классу $W^{2,2}(\Omega)$. В свою очередь $\rho_i(\varepsilon), \rho_i(0), \psi_{i\varepsilon}, q_i(\varepsilon), q_i(0), \omega_{i\varepsilon}, i = 1, 2$, непрерывны в области Ω и принадлежат классу $W^{1,2}(\Omega)$. Таким образом, принимая во внимание что $\vec{w}_{\varepsilon}^{(i)}$ равны нулю на $\partial\Omega$ и выполнены уравнения $\operatorname{div} (\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0)) = 0, i = 1, 2$, в Ω , произведем преобразование следующих интегралов

$$\int_{\Omega} Re \rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{w}_{\varepsilon}^{(i)} \eta dx = - \int_{\Omega} Re \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \vec{w}_{\varepsilon}^{(i)} dx, \tag{3.69}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left\{ \mu_{ij} \left(\nabla \vec{w}_{\varepsilon}^{(j)} + \nabla (\vec{w}_{\varepsilon}^{(j)})^T - \operatorname{div} (\vec{w}_{\varepsilon}^{(j)}) \mathbf{I} \right) \right\} \nabla \eta dx = - \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \int_{\Omega} \vec{w}_{\varepsilon}^{(j)} \Delta \eta dx.$$

Так как функция η обращается в нуль в окрестности Σ и равна единице в окрестности ∂S , то

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 (\mu_{ik} + \lambda_{ik}) n_{k\varepsilon} \nabla \eta dx = - \sum_{k=1}^2 (\mu_{ik} + \lambda_{ik}) n_{k\varepsilon} \int_{\partial S} \vec{n} ds = 0. \tag{3.70}$$

Принимая во внимание формулы (3.69) и (3.70), функционал $L_{\varepsilon, u}$ из (3.67) преобразуем следующим образом

$$L_{\varepsilon, u} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\vec{B}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \vec{w}_{\varepsilon}^{(i)} + \omega_{i\varepsilon} \cdot A + \psi_{i\varepsilon} \cdot C_{i\varepsilon} \right) dx,$$

где

$$\vec{B}_{\varepsilon}^{(i)} = (\mu_{1i} + \mu_{2i}) \Delta \eta \vec{U}_{\infty} + Re \rho_i(0) (\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta) \cdot \vec{U}_{\infty} - Re \rho_i(\varepsilon) \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \vec{U}_{\infty} \eta,$$

$$A = \nabla \eta \cdot \vec{U}_{\infty}, \quad C_{i\varepsilon} = -Re \eta \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \vec{U}_{\infty}.$$

Из (3.55), леммы 3.8 и непрерывности вложений $W^{s+1, r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$ и $W^{s, r}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ следует, что

$$\vec{B}_{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow \vec{B}^{(i)} \text{ в } C(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В частности, из непрерывности вложений $C(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ заключаем, что $\vec{B}_\varepsilon^{(i)}$ сходится к $\vec{B}^{(i)}$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$.

С другой стороны, ввиду теоремы 3.4 функции $\vec{w}_\varepsilon^{(i)}$ сходятся к $\vec{w}^{(i)}$ слабо в $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. Таким образом мы получаем

$$\int_{\Omega} \vec{B}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{w}_\varepsilon^{(i)} dx = \langle \vec{B}_\varepsilon^{(i)}, \vec{w}_\varepsilon^{(i)} \rangle_1 \rightarrow \langle \vec{B}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \rangle_1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.71)$$

В силу леммы 3.8 $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{u}^{(i)}(0)$ в $W^{s+1,r}(\Omega)$ и, следовательно, $\nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \nabla \vec{u}^{(i)}(0)$ в $W^{s,r}(\Omega)$. Тогда

$$C_{i\varepsilon} = -Re\eta \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \vec{U}_\infty \rightarrow -Re\eta \vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \vec{U}_\infty = C_i \text{ в } W^{s,r}(\Omega).$$

Теорема 3.4 обеспечивает слабую сходимост $\psi_{i\varepsilon} \rightarrow \psi_i$ в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, что приводит к соотношению

$$\int_{\Omega} \psi_{i\varepsilon} C_{i\varepsilon} dx = \langle \psi_{i\varepsilon}, C_{i\varepsilon} \rangle_0 \rightarrow \langle \psi_i, C_i \rangle_0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.72)$$

Наконец заметим, что $A \in C^1(\Omega) \subset W^{s,r}(\Omega)$ и $\omega_{i\varepsilon} \rightarrow \omega_i$ слабо в $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, что дает

$$\int_{\Omega} \omega_{i\varepsilon} A dx = \langle \omega_{i\varepsilon}, A \rangle_0 \rightarrow \langle \omega_i, A \rangle_0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.73)$$

Объединяя (3.71) – (3.73) получаем

$$L_{\varepsilon,u}(\vec{T}) \rightarrow L_u(\vec{T}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.74)$$

Чтобы перейти к пределу в выражении для $L_{\varepsilon,e}$, заметим, что $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon)$ ограничены в $C^1(\Omega)$ и $\rho_i(\varepsilon)$, $q_i(\varepsilon)$ ограничены в $C(\Omega)$. Подставляя представление (1.26) для $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и

$g(\varepsilon)$ в (3.68) получаем

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon,e} &= O(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 U_{\infty} Re \int_{\Omega} \eta [\rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla ((\varepsilon \mathbb{D}) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon))] dx + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) - q_i(\varepsilon) \mathbf{I} \right) \nabla \eta dx - \\
&- \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 U_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(1 - \varepsilon \operatorname{div} \vec{T} \right) \left((\mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D})^T \nabla ((\mathbf{I} - \varepsilon \mathbb{D})^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \nabla ((\mathbf{I} - \varepsilon \mathbb{D})^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D}) - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) - q_i(\varepsilon) \mathbf{I} \right) (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D})^T \nabla \eta dx = \\
&= O(\varepsilon) - \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} Re \int_{\Omega} [\rho_i(\varepsilon) (\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \cdot \nabla \eta) \mathbb{D} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon)] dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \right. \\
&\quad \left. + (\mathbb{D}^T \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) - \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon)))^T \right) - q_i(\varepsilon) \mathbb{D}^T \nabla \eta dx + \\
&+ \sum_{i=1}^2 \vec{U}_{\infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) + \nabla (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon))^T - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}(\varepsilon)) \mathbf{I} \right) \right) (D \vec{T})^T \nabla \eta dx.
\end{aligned}$$

Как было упомянуто выше $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow \vec{u}^{(i)}(0)$ в $C^1(\Omega)$ и $\{q_i(\varepsilon), \rho_i(\varepsilon)\} \rightarrow \{q_i(0), \rho_i(0)\}$ в $C(\Omega)$. Таким образом мы получаем

$$L_{\varepsilon,e}(\vec{T}) \rightarrow L_e(\vec{T}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.75)$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в (3.66), в силу соотношений (3.74), (3.75) приходим к формуле (3.60).

Теорема доказана.

Замечание 3.13. Функция $\eta \in C^{\infty}(\Omega)$ - произвольная функция такая, что $\eta=1$ в окрестности ∂S и $\eta=0$ в окрестности $\Sigma = \partial B$. В частности, $\nabla \eta = 0$ в окрестности $\partial \Omega$. Функционалы $J_D(\Omega)$ и $dJ_D(\Omega)[\vec{T}]$ не зависят от выбора функции η . С другой стороны $\vec{T} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ - произвольное векторное поле, обращающееся в нуль в окрестности Σ . Следовательно, для заданного $\vec{T}$ можно всегда выбрать такую функцию η , что $L_e(\vec{T}) = 0$.

Формулы, аналогичные (3.60) широко используются для решения задач оптимизации формы. Стандартная градиентная схема в оптимизации формы выглядит следующим образом. Выбираем произвольное компактное множество $S \subset B$ как начальную точку итерационного процесса. Затем находим векторное поле $\vec{T}$ такое, что $dJ_D(\Omega)[\vec{T}] < 0$. Множество $S_{\varepsilon} = (\mathbf{I} + \varepsilon \vec{T})(S)$ может быть принято в качестве следующего итерационного шага. Затем берем $\Omega = \Omega(\varepsilon)$ и повторяем вычисления. Можно

надеясь, что после некоторого числа шагов получим форму, близкую к оптимальной. Реализация такой схемы требует эффективного метода для вычисления производной по области первого порядка dJ_D .

Однако, с точки зрения численных методов представление (3.60) не вполне удовлетворительно.

Далее будем называть задачу (2.26) с $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ (невозмущенный случай) уравнением состояния. Решения этой задачи $\vec{\theta} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$, $\vec{\zeta} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)})$ и $\vec{m} = (m_1, m_2)$ называть переменными состояния. Переменные состояния полностью описывают поток в невозмущенной области Ω и не зависят от векторного поля $\vec{T}$. Теорема 3.12 показывает, что производная функционала $dJ_D(\Omega_\varepsilon)$ состоит из двух частей L_u и L_e . Геометрическая часть L_e - это просто интеграл линейной формы от $\vec{T}$ по области Ω . Коэффициенты этой формы определены через переменные состояния. Следовательно, L_e нетрудно вычислить для всех гладких $\vec{T}$. Динамическая часть L_u , напротив, зависит от $\vec{T}$ неявно. Чтобы вычислить L_u следует найти очень слабое решение линеаризованной задачи, и затем подставить это решение в (3.61). Очень слабое решение задается теоремой 3.4 и зависит от $\vec{T}$ неявным образом. Если потребуется найти L_u для другого векторного поля $\vec{T}$, то придется повторить все вычисления. К счастью, ситуация может быть радикально улучшена, если выразить L_u через, так называемое, сопряженное состояние.

3.3. Представление производной функционала сопротивления в терминах сопряженного состояния.

Известный факт теории оптимизации состоит в том, что для того, чтобы вычислить производную по области первого порядка dJ_D от функционала, не требуется вычислять материальные производные или производные по области решений краевой задачи. Кроме того, можно выразить dJ_D как интеграл от линейной формы от $\vec{T}$ с коэффициентами, зависящими только от переменных состояния и сопряженного состояния, которое определяется следующим образом.

Определение 3.14. *Сопряженное состояние - это решение $\vec{h}_* = (\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)})$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, сопряженной*

задачи.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) - Re \mathcal{H}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + (-1)^{i+1} a (\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i + \\ + \sum_{j=1}^2 \zeta_j^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{B}^{(i)} \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\begin{aligned} div \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + \Pi A \text{ в } \Omega, \\ \vec{w}_*^{(j)} = 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i = 1, 2; \\ -div (\psi_i^* \vec{u}^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = Re \mathcal{M}_i^* (\vec{w}_*^{(j)}) + \\ + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji}^* + \mu_{kj} \alpha_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + C_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2; \end{aligned} \quad (3.76b)$$

$$\vec{u}^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij}^* \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \text{ в } \Omega, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2; \quad (3.76c)$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i^* \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i^* \psi_i^* \right) dx, i = 1, 2; \quad (3.76d)$$

где коэффициенты $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*, \gamma_i^*, \delta_i^*, \hat{\alpha}_{ij}^*, \hat{\beta}_{ij}^*, \hat{\gamma}_i^*, \hat{\delta}_i^*, \tilde{\alpha}_{ij}^*, \tilde{\beta}_{ij}^*, \tilde{\gamma}_{ij}^*, \tilde{\delta}_i^*, i, j = 1, 2$, заданы формулами (3.6), функции $A, \vec{B}^{(i)}, C_i$ заданы формулами (3.62), и

$$\mathcal{H}_i^* (\vec{h}) = \rho_i \nabla (\vec{u}^{(i)}) \vec{h} - div (\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{h}), \quad \mathcal{M}_i^* (\vec{h}) = (\vec{u}^{(i)} \nabla \vec{u}^{(i)}) \cdot \vec{h}, i = 1, 2.$$

Коэффициенты и заданные функции определены через переменные состояния. Следовательно, сопряженное состояние полностью определено через переменные состояния и не зависит от $\vec{T}$.

Отметим, что $\vec{B}^{(i)} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ и $A, C_i \in W^{s,r}(\Omega)$. Следовательно, согласно лемме 3.3 краевая задача для сопряженного состояния имеет единственное решение класса $W^{s+1,r}(\Omega) \times \mathbb{W}^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$. Поэтому сопряженное состояние корректно определено и единственно. Следующая теорема показывает, что L_u можно представить как интеграл от линейной формы от $\vec{T}$.

Теорема 3.15. В предположениях теоремы 3.12 справедлива формула

$$L_u (\vec{T}) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}_*^{(i)} \cdot (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^* \right) \right) dx \right\}$$

где $(\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}, n_i^*), i = 1, 2$, - сопряженное состояние и

$$\mathcal{D}_i^* = -Re \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)}) + \mathbb{D}^T \vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}) + \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} (div (\mathbb{T} \nabla \vec{u}^{(i)}) + \mathbb{D}^T \Delta \vec{u}^{(i)} + \Delta (\mathbb{D} \vec{u}^{(i)})),$$

$$\mathcal{E}^* = a\mathbb{T} \left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} \right); d^* = \frac{1}{2}Tr(\mathbb{D}) = div\vec{T} \cdot \mathbf{I}, \mathbb{D} = div\vec{T} \cdot \mathbf{I} - D\vec{T}, \mathbb{T} = div\vec{T}\mathbf{I} - D\vec{T} - \left(D\vec{T} \right)^T.$$

Доказательство. Выбирая $\left(\vec{H}^{(i)}, G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}, s_i \right) = \left(\vec{B}^{(i)}, A, C_i, 0, 0, 0 \right), i = 1, 2,$ и применяя теорему 3.4, получаем

$$\begin{aligned} L_u \left(\vec{T} \right) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{B}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, A \rangle_0 + \langle \psi_i, C_i \rangle_0 \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \vec{w}_*^{(i)} \cdot \left(\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^* \right) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 \left(\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij} \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^* \right) \right) dx \right\}. \end{aligned}$$

Заключение

На защиту выносятся следующие основные результаты:

- Доказано существование и единственность сильного решения неоднородной краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений составного типа, моделирующей движение смеси вязких сжимаемых жидкостей.
- Проведено исследование зависимости решения задачи обтекания препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей от формы области течения. В частности проведено построение очень слабых решений одного класса линейных задач с сингулярными коэффициентами.
- Доказана дифференцируемость решения задачи обтекания по области.
- Доказана дифференцируемость по области функционала сопротивления обтекаемого препятствия набегающему потоку смеси вязких сжимаемых жидкостей. Получена формула представления этой производной в виде суммы двух слагаемых, одно из которых явно зависит от отображения, задающего форму области, а другое может быть выражено в терминах сопряженного состояния, зависящего только от решения исходной задачи в недеформированной области.

Литература

- [1] Агранович, М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. – М.: МЦНМО, 2013. — 379 с.
- [2] Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко. – Владивосток : Дальнаука, 2008. – 364 с.
- [3] Алексеев, Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г. В. Алексеев – М: Научный мир, 2010. – 411 с.
- [4] Баничук, Н. В. Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел / Н. В. Баничук // Прикладная математика и механика. – Т. 39. – вып. 6. – 1975. – С. 1082 – 1092.
- [5] Баничук, Н. В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах / Н. В. Баничук // Прикладная математика и механика. – Т. 41. – вып. 5. – 1977. – С. 566 – 569.
- [6] Баничук, Н. В. Оптимизация форм упругих тел / Н. В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
- [7] Баничук, Н. В. Введение в оптимизацию конструкций / Н. В. Баничук. – М.: Наука, 1986. - 304 с.
- [8] Берг, Й. Интерполяционные пространства : Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
- [9] Блохин, А. М. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума / А. М. Блохин, В. Н. Доровский – Новосибирск: Объед. ин-т геологии и геофизики, 1994. - 183 с.

- [10] Боговский, М. Е. Аналитико-численные методы для уравнений Навье–Стокса: Учеб. пособие / М. Е. Боговский. – М.: РУДН, 2008. – 231 с.
- [11] Бернштейн, С. Н. О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям / С. Н. Бернштейн, И. Г. Петровский // Успехи математических наук. – вып. 8. – 1941. – С. 8 – 31.
- [12] Злотник, А. А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси / А. А. Злотник // Математические заметки. – Т. 58. – № 2. – 1995. – С. 307 – 312.
- [13] Жалнина, А. А. О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина, Н. А. Кучер // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 18. – № 3. – 2015. – С. 26 – 39.
- [14] Жалнина, А. А. Зависимость от области решений краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина, Н. А. Кучер // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 20. – № 1(69). – 2017. – С.41-52.
- [15] Жалнина, А. А. Влияние формы области на решение задачи об обтекании препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – № 5(43). – 2016. – С. 5 – 20.
- [16] Жалнина, А. А. Оптимизация формы препятствия в потоке смеси вязких сжимаемых жидкостей. / А. А. Жалнина // Сборник материалов Всерос., научно-практической конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии», 16–17 окт. 2015 г., Кемерово [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева». – Кемерово: КузГТУ — 2015.
- [17] Жалнина, А. А. О разрешимости линейной краевой задачи, возникающей при оптимизации формы препятствия, обтекаемого потоком смеси вязких жидкостей / А. А. Жалнина // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Теоретический и практический взгляд на современное состояние науки». – Кемерово: КузГТУ — 2015. – С. 7 – 11.

- [18] Кажихов, А. В. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси / А. В. Кажихов, А. Н. Петров // Динамика сплошной среды. – Выпуск 35. – 1978. – С. 61 – 73.
- [19] Крайко, А. Н. Механика многофазных сред / А. Н. Крайко, Р. Н. Нигматулин, В. К. Старков, Л. Е. Стернин // Итоги науки и техники. – Серия гидромеханика. – Т. 6. – 1972. – С. 93 – 174.
- [20] Кучер, Н. А. Нестационарные задачи механики вязких сжимаемых сред: монография / Н. А. Кучер. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 202 с.
- [21] Кучер, Н. А. Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник Новосибирского государственного университета. – Т. 9. – № 3. – 2009. – С. 33 – 53.
- [22] Кучер, Н. А. Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 12. – № 3 (39). – 2009. – С. 52 – 65.
- [23] Кучер, Н. А. Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин // Сибирский математический журнал. – Т. 53. – № 6 (39). – 2012. – С. 1338 – 1353.
- [24] Кучер, Н. А. Глобальная разрешимость регуляризованной задачи о движении смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, М. В. Краюшкина, О. В. Малышенко // Вестник Кемеровского государственного университета. – Т. 1. – № 2(54). – 2013. – С. 80 – 85.
- [25] Кучер, Н. А. О конечномерной аппроксимации уравнений движения смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, М. В. Краюшкина, О. В. Малышенко // Вестник Кемеровского государственного университета. – Т. 1. – № 3(55). – 2013. – С. 61 – 66.
- [26] Кучер, Н. А. Краевые задачи механики смесей жидкостей. – Ч.3: Нестационарные задачи: учебное пособие / Н. А. Кучер, О. В. Малышенко, А. А. Жалнина. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 179 с.

- [27] Кучер, Н. А. О корректности стационарной задачи обтекания препятствия потоком смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Вестник Кемеровского государственного университета. – Т. 3. – № 4 (60). – 2014. – С. 47 – 53.
- [28] Кучер, Н. А. О корректности краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей в областях с подвижными границами / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. / НФИ «КемГУ»; под общ. Ред. Е.А. Вячкиной, В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2014. – 239 с. – С.106 – 113.
- [29] Кучер, Н. А. Существование глобально определенных слабых решений уравнений движения смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования [Электронный ресурс] : материалы Международной научно-практической конференции, 26-28 апреля 2016 года / под общ. ред. Е. Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина. – Рязань, 2016 – С. 117 – 120.
- [30] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
- [31] Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.- 412 с.
- [32] Лионс, Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределительными системами / Ж.-Л. Лионс // УМН – Т. 28. – № 4. – 1973. – С. 15 – 46.
- [33] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
- [34] Лурье, К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. – М.: Наука, 1975 – 478 с.
- [35] Лурье, К. А. Эффективные характеристики композитных материалов и оптимальное проектирование элементов конструкций / К. А. Лурье, А. В. Черкаев // Успехи механики. – Т. 9. – № 2. – 1986. – С. 3 – 81.
- [36] Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. Ч. 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.

- [37] Никольский, С. Л. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. Л. Никольский. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
- [38] Осипов, Ю. С. Об одной задаче Ж.-Л. Лионса / Ю. С. Осипов, А. П. Суетов // Докл. АН СССР. – Т. 276. – № 2. – 1984. – С. 288 – 291.
- [39] Осипов, Ю. С. Качественные вопросы теории оптимизации конструкций / Ю. С. Осипов, А. П. Суетов // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 237 – 244.
- [40] Осипов, Ю. С. Существование оптимальных форм эллиптических систем. Случай краевых условий Дирихле / Ю. С. Осипов, А. П. Суетов // Научный доклад ИММ УрО АН СССР. – Свердловск, 1990. – 98 с.
- [41] Охезин, С. П. Об одной аппроксимации в задаче управления формой области для параболической системы / С. П. Охезин // Прикладная математика и механика. – Т. 54. – вып. 3. – 1990. – С. 361 – 365.
- [42] Папин, А. А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения / А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 9. – № 2 (26). – 2006. – С. 116 – 136.
- [43] Папин, А. А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости / А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 9. – № 3 (27). – 2006. – С. 111 – 123.
- [44] Папин, А. А. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси / А. А. Папин. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 2007.
- [45] Папин, А. А. Краевые задачи двухфазной фильтрации / А. А. Папин. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 2009.
- [46] Петров, А. Н. Корректность начально-краевой задачи для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов / А. Н. Петров // Динамика сплошной среды. – вып. 56. – 1982. – С. 105 – 121.

- [47] Плотников, П. И. Стационарные краевые задачи для уравнений Навье-Стокса с показателем адиабаты $\gamma < 3/2$ / П. И. Плотников, Ж. Соколовски // Докл. РАН. – вып. 397. – № 2. – 2004. – С. 166 – 169.
- [48] Райтум, У. Б. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений / У. Б. Райтум. – Рига: Зинатне, 1989. – 274 с.
- [49] Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
- [50] Суворов, С. Г. Существование оптимального управления в случае, когда управлением служит область / С. Г. Суворов // В кн.: Дифф. уравн. с частными производными. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 193 – 201.
- [51] Темам, Р. Уравнения Навье—Стокса / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
- [52] Трибель, Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980.
- [53] Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
- [54] Фурсиков, А. В. Об одной задаче управления и о результате, касающемся однозначной разрешимости трехмерной системы Навье — Стокса / А. В. Фурсиков // Успехи математических наук. – Т. 35. – вып. 4. – 1980. – С. 148.
- [55] Фурсиков, А. В. О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье — Стокса и Эйлера / А. В. Фурсиков // Докл. АН СССР. – Т. 252. – N 5. – 1980. – С. 1066 – 1070.
- [56] Фурсиков, А. В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье — Стокса и Эйлера / А. В. Фурсиков // Мат. сб., Т. 115. – N 2. – 1981. – С. 281 – 306.
- [57] Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

- [58] Фурсиков, А. В. Обтекание тела вязкой несжимаемой жидкостью: задачи минимизации работы жидкости / А. В. Фурсиков // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т. 37. – 2010. – С. 83–130.
- [59] Allaire, G.. Conception Optimale de structures / G.Allaire. – Heidelberg: Springer, 2007. – 291 p.
- [60] Bello, J. A. The differentiability of the drag with respect to the variations of a Lipschitz domain in a Navier-Stokes flow / J. A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Lemoine, J. Simon // SIAM J. Control. Optim. V. 35. – № 2. – 1997. – P. 626–640.
- [61] Bello, J. A. Optimal shape design for Navier-Stokes flow, in: System Modelling and Optimization / J. A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Simon // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. – V. 180. – 1992. – P. 481 – 489.
- [62] Bucur, D. Variational Methods in Shape Optimization Problems / D. Bucur, G. Buttazzo. – Boston: Birkhauser, 2005. – 216 p.
- [63] Buttazzo, G. Variational Analysis and Aerospace Engineering / G. Buttazzo, A. Frediani. - Springer, 2009. – 518 p.
- [64] Cea, J. Problems of shape optimal design. / J. Cea // Optimization of Distributed Parameters Structures. – V. 2. – 1981. – P. 1005 – 1048
- [65] Delfour, M. C. Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus and Optimization / M. C. Delfour, J.-P. Zolesio. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. – 482 p.
- [66] Farhadinia, B. Shape optimization of an airfoil in the presence of compressible and viscous flows / B. Farhadinia // Computational Optimization and Applications. – V. 50. – I. 1. – 2011. – P. 147-162.
- [67] Farwig, R. Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition / R. Farwig // Comm. Partial Dierential Equations. – V.14. – 1989. – P.1579–1606.
- [68] Feireisl, E. Shape optimization in viscous compressible fluids / E. Feireisl // Appl. Math. Optim. – V. 47. – 2003. – P. 59–78.

- [69] Feireisl E. On the domain dependence of solutions to the compressible Navier-Stokes equations of a barotropic fluid / E. Feireisl, A. H. Novotny, H. Petzeltova // Math. Methods Appl. Sci. – V. 25. – 2002. – P. 1045–1073.
- [70] Frehse, J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // SIAM J. Math. Anal. – V. 36. – № 4. – 2005. – P. 1259 – 1281.
- [71] Frehse, J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // Appl. Math. – V. 50. – № 6. – 2005. – P. 527 – 541.
- [72] Frehse, J. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids / J. Frehse, W. Weigant // Appl. Math. – V. 53. – № 4. – 2008. – P. 319 – 345.
- [73] Fursikov, A. V. Boundary value problems for three-dimensional evolutionary Navier-Stokes equations / A. V. Fursikov, M. Gunzburger, L. Hou // J. Math. Fluid Mech. – V. 4. – 2002. – P. 45–75.
- [74] Fursikov, A. V. Optimal boundary control for evolutionary Navier-Stokes system: the three-dimensional case / A. V. Fursikov, M. Gunzburger, L. Hou // SIAM J. Control Optim. – V. 43. – 2005. – P. 2191–2232.
- [75] Galdi, G. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations / G. Galdi. – Heidelberg: Springer – 2011, – 1033 p.
- [76] Garg, S. K. Dynamics of gas-fluidized beds / S. K. Garg, J. W. Pritchett // J. Appl. Phys. – V. 46. – 1975. – P. 4493 – 4500.
- [77] Girinon, V. Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions in a bounded three-dimensional domain / V. Girinon // J. Math. Fluid Mech. – V. 13. – 2011. – P. 309 – 339.
- [78] Haslinger, J. Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications / J. Haslinger, P. Neittaanmaki. - New York: John Wiley Sons Inc. 1988.
- [79] Hazra, S.B. Large-scale PDE-constrained optimization in applications / S. B. Hazra. – Heidelberg: Springer – 2010, – 214 p.

- [80] Hassine, M. Topology Optimization of Fluid Mechanics Problems / M. Hassine // Advanced Methods for Practical Applications in Fluid Mechanics. – 2012, – P. 209–230.
- [81] Henrot, A. Variation et optimisation de formes: une analyse geometrique / A. Henrot, M. Pierre. – Paris: Springer, – 2005, – 345 p.
- [82] Hlavacek, I. Optimization of the domain in elliptic unilateral boundary value problems by finite element method. R.A.I.R.O. Analyse numerique / I. Hlavacek, J. Necas // Numerical Analysis. – V. 16. – № 4. – 1982. – P. 351 – 373.
- [83] Kawohl, B. Optimal Shape Design / B. Kawohl, O. Pironneau, L. Tartar, J.-P. Zolesio. – Berlin: Springer, – 2000, – 388 p.
- [84] Kucher, N. A. Shape differentiability of drag functional and boundary value problem solutions for fluid mixture equations / N. A. Kucher, A. A. Zhalnina // Science Evolution. – V. 2. – № 2. – 2016. – P. 41-56.
- [85] Kweon, J. R. Compressible Navier-Stokes equations in a bounded domain with inflow boundary condition / J. R. Kweon, R. B. Kellogg // SIAM J. Math. Anal. – V. 28. – 1997. – P. 94 – 108.
- [86] Kweon, J. R. Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations for compressible barotropic flows on a polygon / J. R. Kweon, R. B. Kellogg // Arch. Ration. Mech. Anal. – V. 163. – 2000. – P. 35 – 64.
- [87] Mohammadi, B. Applied Shape Optimization for Fluids / B. Mohammadi, O. Pironneau. – USA, Oxford University Press, – 2010, – 292 p.
- [88] Neittaanmaki, P. Optimization of the domain in elliptic variational inequalities / P. Neittaanmaki, J. Sokolowski, J. P. Zolesio // Appl Math Optim. – 1988 – P. 18–85.
- [89] Novo, S. Compressible Navier-Stokes model with inflow-outflow boundary conditions / S. Novo // J. Math. Fluid Mech. – V. 7. – 2005. – P. 485 – 514.
- [90] Novotny, A. Topological Derivatives in Shape Optimization / A. Novotny, J. Sokolowski. – Heidelberg: Springer, – 2013, – 423 p.
- [91] Peetre, J. A theory of interpolation of normed spaces / J. Peetre // Notes de Matematica. № 39. Rio de Janeiro. – 1968. – P. 1 – 88.

- [92] Plotnikov, P. Compressible Navier-Stokes equations: theory and shape optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Basel: Birkhauser, 2012, – 474 p.
- [93] Plotnikov, P. I. Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes and transport equations / P. I. Plotnikov, E. V. Ruban, J. Sokolowski // J. Math. Pures Appl. – V. 92. – 2009. – P. 113 – 162.
- [94] Plotnikov, P. I. Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes equations, well-posedness and sensitivity analysis / P. I. Plotnikov, E. V. Ruban, J. Sokolowski // SIAM J. Math. Anal. – V. 40. 2008. – P. 1152 – 1200.
- [95] Plotnikov, P. Domain dependence of solutions to compressible Navier-Stokes equations / P. Plotnikov, J. Sokolowski // SIAM J. Control Optim. – V. 45. – 2006. – P. 1165–1197.
- [96] Plotnikov, P. On compactness, domain dependence and existence of steady state solutions to compressible isothermal Navier-Stokes equations / P. Plotnikov, J. Sokolowski // J. Math. Fluid Mech. – V. 7. – 2005. – P. 529 – 573.
- [97] Plotnikov, P. I. Shape derivative of drag functional / P. Plotnikov, J. Sokolowski // SIAM J. Control Optim. – V. 48. – 2010. – P. 4680–4706.
- [98] Plotnikov, P. I. Optimal shape control of airfoil in compressible gas flow governed by Navier-Stokes equations / P. Plotnikov, J. Sokolowski // Evolution Equations and Control Theory. – V. 2. – 2013. – P. 495 – 516.
- [99] Plotnikov, P. I. Shape Sensitivity Analysis of the Work Functional for the Compressible Navier–Stokes Equations. Optimization with PDE Constraints / P. Plotnikov, J. Sokolowski // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – V.101. – 2014. – P. 343-378.
- [100] Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – London: World Scientific Publishing, – 1995, – 198 p.
- [101] Simon, J. Domain variation for drag in Stokes flow / J. Simon // Control Theory of Distributed Parameter Systems and Applications. – Berlin: Springer, – 1991, – P. 28–42.

- [102] Slawig, T. An explicit formula for the derivative of a class of cost functionals with respect to domain variations in Stokes flow / T. Slawig // SIAM J. Control Optim. – V.39. – 2000. – P. 141–158.
- [103] Slawig, T. A formula for the derivative with respect to domain variations in Navier-Stokes flow based on an embedding domain method / T. Slawig // SIAM J. Control Optim. – V. 42. – 2003. – P. 495–512.
- [104] Sokolowski, J. Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis / J. Sokolowski, J.-P. Zolesio. – Berlin: Springer, – 1992, – 250 p.
- [105] Tan, Z. Shape optimization in two-dimensional viscous compressible fluids / Z. Tan, Y.H. Zhang // Acta Mathematica Sinica, English Series Sep. – V.26. – №9. – 2010. – P. 1793–1806.
- [106] Zhalnina, A. A. On the Well-Posedness of an Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Equations of Mixtures of Viscous Compressible Fluids / A. A. Zhalnina, N. A. Kucher // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – V. 9. – №4. – 2015. – P. 598 – 610.
- [107] Zhalnina, A. A. Domain dependence of solutions to the boundary value problem for equations of mixtures of compressible viscous fluids / A. A. Zhalnina, N. A. Kucher // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – V. 11. – №1. – 2017. – P. 145 – 155.
- [108] Zolesio, J-P. The Material Derivative (or speed) Method for Shape Optimization / J-P Zolesio // Optimization of Distributed Parameter Structures. – 1981, – P. 421 – 443.

Приложение А

О функционале сопротивления препятствия набегающему потоку смеси вязких сжимаемых жидкостей

Тензор напряжения i -той компоненты смеси имеет вид:

$$P^{(i)} = \sigma^{(i)} - p_i I, \quad i = 1, 2,$$

где $\sigma^{(i)}$ - вязкая часть тензора напряжений i -той компоненты смеси:

$$\sigma^{(i)} = \mu_{i1} \left(\nabla \vec{u}^{(1)} + (\nabla \vec{u}^{(1)})^T \right) + \mu_{i2} \left(\nabla \vec{u}^{(2)} + (\nabla \vec{u}^{(2)})^T \right) + \lambda_{i1} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} \mathbf{I} + \lambda_{i2} \operatorname{div} \vec{u}^{(2)} \mathbf{I}.$$

Сила, действующая со стороны i -той компоненты смеси на точку границы $x \in \partial S$, связана с тензором напряжений формулой

$$\vec{R}_f^{(i)} = -P^{(i)} \cdot \vec{n} = -(\sigma^{(i)} - p_i I) \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ - вектор внешней нормали к ∂S . Действующая на тело гидродинамическая сила i -той компоненты смеси определяется следующим образом [68, 92]:

$$\vec{J}^{(i)}(S) = - \int_{\partial S} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) \mathbf{I} \right) \cdot \vec{n} ds.$$

Действующая на тело результирующая гидродинамическая сила равна сумме гидродинамических сил составляющих ее компонент:

$$\vec{J}(S) = \vec{J}^{(1)}(S) + \vec{J}^{(2)}(S). \quad (\text{A.1})$$

Функционалом сопротивления препятствия набегающему потоку смеси жидкостей $J_D(S)$ является компонента гидродинамической силы параллельная $\vec{U}_\infty$ ($\vec{U}_\infty$ - постоянный вектор, скорость смеси на бесконечности)

$$\begin{aligned} J_D(S) &= \vec{U}_\infty \cdot \vec{J}(S) = \\ &= -\vec{U}_\infty \cdot \sum_{i=1}^2 \int_{\partial S} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) \mathbf{I} \right) \cdot \vec{n} ds. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Замена переменных в формуле для функционала сопротивления

Проведем замену переменных в формуле для функционала сопротивления. Пусть $\eta \in C^\infty(\Omega)$ - произвольная функция, равная 1 в окрестности тела S и нулю в окрестности Σ . Тогда формулу для гидродинамической силы (A.1) можно переписать следующим образом

$$\vec{J}(S) = - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial S} \eta \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) \mathbf{I} \right) \cdot \vec{n} ds, \quad (\text{A.3})$$

где $\vec{n}$ - внешняя единичная нормаль к ∂S .

Используя тот факт, что $\eta = 0$ на Σ и применяя к интегралу (A.3) формулу Гаусса-Остроградского, получаем следующее выражение для функции $\vec{J}(S)$

$$\vec{J}(S) = - \sum_{i=1}^2 \left\langle \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}_i) \eta dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \nabla \eta dx \right\rangle, \quad (\text{A.4})$$

где введены обозначения

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) \mathbf{I}.$$

В силу уравнений (2.1a) имеем

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}_i) = Re \rho_i \left(\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \right) \vec{u}^{(i)} + (-1)^i a \left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} \right). \quad (\text{A.5})$$

Из формул (A.5) и (A.4) следует, что:

$$\begin{aligned}
\vec{J}(S) &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \int_{\Omega} \left[Re \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} + (-1)^i a (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \right] \eta dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \nabla \eta dx \right\rangle = \\
&= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \int_{\Omega} \left[Re \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} \right] \eta dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \nabla \eta dx \right\rangle = \\
&= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}^{(j)} + (\nabla \vec{u}^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho) \mathbf{I} \right) \nabla \eta dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta \rho_i (\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(i)} dx.
\end{aligned}$$

Сила сопротивления, действующая на возмущенное препятствие S_ε , задается формулой

$$\begin{aligned}
\vec{J}(S_\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \int_{\Omega_\varepsilon} Re \bar{\eta}_\varepsilon \bar{\rho}_{i\varepsilon} \left(\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \right) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} dy + \right. \\
&+ \left. \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + (\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \mathbf{I} \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\bar{\rho}_{i\varepsilon}) \mathbf{I} \right) \nabla \bar{\eta}_\varepsilon dy \right\rangle. \quad (A.6)
\end{aligned}$$

где $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$, $\bar{\rho}_{i\varepsilon}$, $i = 1, 2$, - решение задачи (2.2) в области Ω_ε , $\bar{\eta}_\varepsilon$ - гладкая функция, равная 1 в окрестности S_ε и нулю в окрестности Σ . Положим $\eta_\varepsilon = \bar{\eta}_\varepsilon(x + \varepsilon \vec{T}(x))$. Используя замену переменных (2.3) и формулы, полученные при доказательстве леммы 2.2:

$$\left(\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \right) \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(y(x)) = g^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(i)})(x),$$

$$\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) = g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(x),$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)}(y(x)) = g^{-1} \operatorname{div} (\mathbf{N} \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(j)})(x),$$

получим следующее выражение для силы сопротивления:

$$\begin{aligned}
\vec{J}(S_\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta_\varepsilon \rho_{i\varepsilon} g^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) g dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(j)}) + (g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}_\varepsilon^{(j)}))^T \right) + \lambda_{ij} g^{-1} \operatorname{div} (\vec{u}_\varepsilon^{(j)}) \mathbf{I} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho_{i\varepsilon}) \mathbf{I} \right) g^{-1} \mathbf{N}^T \nabla \eta_\varepsilon g dx.
\end{aligned}$$

Опуская индекс ε в правой части последнего равенства, и используя формулу (2.11)

для эффективного вязкого давления, получим

$$\begin{aligned}
\vec{J}(S_\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} \right) + \lambda_{ij} g^{-1} \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho_i) \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx = \\
&= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^2 g^{-1} (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} - \frac{Re}{Ma^2} p_i(\rho_i) \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx = \\
&= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx - \\
&- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right) - q_i \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx.
\end{aligned}$$

Следовательно, функционал сопротивления можно записать в виде

$$\begin{aligned}
J_D(\Omega_\varepsilon) &= J_D(S_\varepsilon) = -\vec{U}_\infty \cdot \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Re \eta \rho_i \vec{u}^{(i)} \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(i)}) dx - \\
&- \vec{U}_\infty \cdot \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} g^{-1} \left(\mathbf{N}^T \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)}) + \nabla (\mathbf{N}^{-1} \vec{u}^{(j)})^T \mathbf{N} - \operatorname{div} (\vec{u}^{(j)}) \mathbf{I} \right) \right. \\
&\quad \left. - q_i \mathbf{I} \right) \mathbf{N}^T \nabla \eta dx.
\end{aligned}$$

Приложение В

Вывод уравнений для разности

В этом приложении приведен вывод уравнений (2.63), которые используются для исследования зависимости решения задачи (2.26) от деформации области.

Вывод уравнений (2.63a). Из (2.26a) следует равенство

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\Delta \vec{v}_0^{(j)} - \Delta \vec{v}_1^{(j)} \right) - (\nabla \pi_1^0 - \nabla \pi_1^1) = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\mathcal{A}_0(\vec{u}_0^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) \right) + \\ + Re \left(\mathcal{B}_0 \left(\rho_i^0, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) \right) + (-1)^i \left(\mathcal{S}_0 \left(\vec{u}_0^{(2)} - \vec{u}_0^{(1)} \right) - \mathcal{S}_1 \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) \right), \quad (\text{B.1})$$

где $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{S}_i$ заданы формулами (2.4e)-(2.4f) с $\mathbf{N}_i$ вместо $\mathbf{N}$. В силу формул (2.14) и (2.62) имеем

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\Delta \vec{v}_0^{(j)} - \Delta \vec{v}_1^{(j)} \right) - (\nabla \pi_1^0 - \nabla \pi_1^1) = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i; \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{A}_0(\vec{u}_0^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) = \mathcal{A}_0(\vec{u}_0^{(j)}) - \mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) + \mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) = \\ = \mathcal{A}_0(\vec{u}_0^{(j)} - \vec{u}_1^{(j)}) + \mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) = \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}); \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{B}_0 \left(\rho_i^0, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) = \\ = \rho_i^0 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \underbrace{\rho_i^1 (\mathbf{N}_1^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_1^{-1} \vec{u}_1^{(i)} \right) \right)}_{\mathcal{B}_1(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)})} = \\ = \rho_i^0 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) + \\ + \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) = \\ = \underbrace{\psi_i (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right)}_{\mathcal{B}_0(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)})} + \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_0^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \\ - \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) + \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) = \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{B}_0 \left(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) + \underbrace{\rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\overbrace{\left(\vec{u}_0^{(i)} - \vec{u}_1^{(i)} \right)}^{\vec{w}^{(i)}} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right)}_{\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)})} + \\
&+ \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_0^{(i)} \right) \right) - \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_1^{(i)} \right) \right) + \\
&+ \rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_1^{(i)} \right) \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) = \\
&= \mathcal{B}_0 \left(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) + \mathcal{B}_0 \left(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) + \underbrace{\rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \left\langle \overbrace{\vec{u}_0^{(i)} - \vec{u}_1^{(i)}}^{\vec{w}^{(i)}} \right\rangle \right) \right)}_{\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{w}^{(i)})} + \\
&+ \underbrace{\rho_i^1 (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \left(\vec{u}_1^{(i)} \nabla \left(\mathbf{N}_0^{-1} \vec{u}_1^{(i)} \right) \right)}_{\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)})} - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) = \mathcal{B}_0 \left(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) + \\
&+ \mathcal{B}_0 \left(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)} \right) + \mathcal{B}_0 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right) + \mathcal{B}_0 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right) - \mathcal{B}_1 \left(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)} \right), \\
&\mathcal{S}_0 \left(\vec{u}_0^{(2)} - \vec{u}_0^{(1)} \right) - \mathcal{S}_1 \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) = \\
&= g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_0^{(2)} - \vec{u}_0^{(1)} \right) - g_1 a (\mathbf{N}_1^T)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) = \\
&= g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_0^{(2)} - \vec{u}_0^{(1)} \right) - g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) + \\
&+ g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) - g_1 a (\mathbf{N}_1^T)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) = \\
&= g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\underbrace{\left\langle \vec{u}_0^{(2)} - \vec{u}_1^{(2)} \right\rangle}_{\vec{w}^{(2)}} - \underbrace{\left\langle \vec{u}_0^{(1)} - \vec{u}_1^{(1)} \right\rangle}_{\vec{w}^{(1)}} \right) + \tag{B.5} \\
&+ g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) - g_1 a (\mathbf{N}_1^T)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) = \\
&= g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)} \right) + g_0 a (\mathbf{N}_0^T)^{-1} \mathbf{N}_0^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) - \\
&- g_1 a (\mathbf{N}_1^T)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) = \\
&= \mathcal{S}_0 \left(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)} \right) + \mathcal{S}_0 \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right) - \mathcal{S}_1 \left(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)} \right).
\end{aligned}$$

Объединяя равенства (B.1)-(B.5), получим уравнения (2.63a)

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \text{Re} \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i + (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})).$$

Вывод уравнений (2.63b). Из уравнений (2.26b), соответствующих матрицам $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$ следует формула

$$\text{div} \vec{w}^{(i)} = - (g_0 m_i^0 - g_1 m_i^1) + \left(\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 - \frac{g_1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 \right) + \left(-g_0 \Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] + g_1 \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] \right) \tag{B.6}$$

Преобразуем правую часть (B.6)

$$g_0 m_i^0 - g_1 m_i^1 = \underbrace{g_0 m_i^0 - g_0 m_i^1}_{g_0 n_i} + \underbrace{g_0 m_i^1 - g_1 m_i^1}_{m_i^1 d} = g_0 n_i + m_i^1 d; \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} -g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] + g_1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] &= -g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] + \underbrace{g_1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] - g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_1]}_{-\Phi_i [\vec{\theta}_1] d} + g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_1] = \\ &= -\Phi_i [\vec{\theta}_1] d + g_0 \left(\Phi_i [\vec{\theta}_1] - \Phi_i [\vec{\theta}_0] \right) = \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} &-\Phi_i [\vec{\theta}_1] d - g_0 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p'_j (\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right); \\ &\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 - \frac{g_1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 = \\ &= \underbrace{\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 - \frac{g_1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1}_{\frac{d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1} + \underbrace{\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 - \frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1}_{\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j} = \\ &= \frac{d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + \frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Следовательно, правая часть (B.6) примет вид

$$\begin{aligned} &-(g_0 m_i^0 - g_1 m_i^1) + \left(\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 - \frac{g_1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 \right) + \left(-g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] + g_1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] \right) = \\ &= -g_0 n_i - m_i^1 d - \Phi_i [\vec{\theta}_1] d - g_0 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p'_j (\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right) + \\ &\frac{d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + \frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j = g_0 \underbrace{\left(\Theta_{ii} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} \right)}_{\alpha_{ii}} \psi_i - \underbrace{\frac{g_0}{\Lambda} \frac{\tau_{ii}}{p'_i (\rho_i^*) \rho_i^*} \omega_i}_{\beta_{ii}} - \underbrace{g_0 n_i}_{\gamma_i} + \\ &+ g_0 \underbrace{\left(\Theta_{i,3-i} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \frac{\tau_{i,(3-i)}}{\rho_i^*} \right)}_{\alpha_{i,3-i}} \psi_{3-i} - \underbrace{\frac{g_0}{\Lambda} \frac{\tau_{i,(3-i)}}{p'_{3-i} (\rho_{3-i}^*) \rho_{3-i}^*} \omega_{3-i}}_{\beta_{i,3-i}} + \\ &+ \underbrace{\left(-\Phi_i [\vec{\theta}_1] + \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} \varphi_i^1 - m_i^1 + \frac{\tau_{i,(3-i)}}{\rho_i^*} \varphi_{3-i}^1 \right)}_{\delta_i} d = \\ &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

В результате получаем уравнение (2.63b)

$$\text{div} \vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d.$$

Вывод уравнений (2.63с). Из (2.26с) вытекает равенство

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^0 - \vec{u}_1^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \tau_{ii} \varphi_i^0 - \tau_{ii} \varphi_i^1 = \Psi_i [\vec{\theta}_0] - \Psi_i [\vec{\theta}_1] + g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_1 m_i^1 \rho_i^1, \quad (\text{B.11})$$

преобразуя левую часть которого получаем

$$\begin{aligned} & \vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^0 - \vec{u}_1^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \tau_{ii} \varphi_i^0 - \tau_{ii} \varphi_i^1 = \\ & = \underbrace{\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^0 - \vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1}_{\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i} + \underbrace{\left(\vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}_0^{(i)} \right) \cdot \nabla \varphi_i^1 - \left(\vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}_1^{(i)} \right) \cdot \nabla \varphi_i^1}_{\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1} + \underbrace{\tau_{ii} \varphi_i^0 - \tau_{ii} \varphi_i^1}_{\tau_{ii} \psi_i} = \\ & = \vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i + \vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Преобразуем правую часть (B.11), используя формулы (2.20)

$$\begin{aligned} & \Psi_i [\vec{\theta}_0] - \Psi_i [\vec{\theta}_1] + g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_1 m_i^1 \rho_i^1 = \\ & = -g_0 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^0 - g_0 \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_i^0 \varphi_j^0 + g_0 \rho_i^0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] + (1 - g_0) \tau_{ii} \varphi_i^0 + g_1 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 + \\ & + g_1 \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^1 - g_1 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] - (1 - g_1) \tau_{ii} \varphi_i^1 + g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_1 m_i^1 \rho_i^1. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в равенство (B.13):

$$\begin{aligned} & (1 - g_0) \tau_{ii} \varphi_i^0 - (1 - g_1) \tau_{ii} \varphi_i^1 = \underbrace{(1 - g_0) \tau_{ii} \varphi_i^0 - (1 - g_0) \tau_{ii} \varphi_i^1}_{\tau_{ii} (1 - g_0) \psi_i} + \underbrace{g_1 \tau_{ii} \varphi_i^1 - g_0 \tau_{ii} \varphi_i^1}_{-\tau_{ii} \varphi_i^1 d} = \\ & = \tau_{ii} (1 - g_0) \psi_i - \tau_{ii} \varphi_i^1 d; \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} & g_0 \rho_i^0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] = g_0 (\rho_i^* + \varphi_i^0) \Phi_i [\vec{\theta}_0] - g_0 \varphi_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0] + g_0 \varphi_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0] = \\ & = \underbrace{g_0 \varphi_i^0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] - g_0 \varphi_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0]}_{g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] \psi_i} + \underbrace{g_0 \rho_i^* \Phi_i [\vec{\theta}_0] + g_0 \varphi_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0]}_{g_0 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0]} = g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] \psi_i + g_0 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_0]; \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$-g_1 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] = \underbrace{g_0 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] - g_1 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1]}_{\rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] d} - g_0 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] = \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] d - g_0 \rho_i^1 \Phi_i [\vec{\theta}_1]; \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} & g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_1 m_i^1 \rho_i^1 = \underbrace{g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_0 \rho_i^0 m_i^1}_{g_0 \rho_i^0 n_i} + \underbrace{g_0 \rho_i^0 m_i^1 - g_0 m_i^1 \rho_i^1}_{g_0 m_i^1 \psi_i} + \underbrace{g_0 m_i^1 \rho_i^1 - g_1 m_i^1 \rho_i^1}_{m_i^1 \rho_i^1 d} = \\ & = g_0 \rho_i^0 n_i + g_0 m_i^1 \psi_i + m_i^1 \rho_i^1 d; \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} & -g_0 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^0 + g_1 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 = \\ & \underbrace{g_1 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 - g_0 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1}_{-\tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 d} - \underbrace{g_0 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^0 + g_0 \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1}_{-g_0 \tau_{i,(3-i)} \psi_{3-i}} = \\ & = -\tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 d - g_0 \tau_{i,(3-i)} \psi_{3-i}; \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_i^0 \varphi_j^0 + \frac{g_1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^1 = \\
& = -\frac{g_0 \varphi_i^0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 + \underbrace{\frac{g_1 \varphi_i^1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 - \frac{g_0 \varphi_i^1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + \frac{g_0 \varphi_i^1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1}_{-\frac{\varphi_i^1 d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1} = \\
& = \frac{g_0}{\rho_i^*} \left(\underbrace{-\varphi_i^0 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^0 + \varphi_i^0 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1}_{-\varphi_i^0 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j} \underbrace{-\varphi_i^0 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + \varphi_i^1 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1}_{-\psi_i \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1} \right) - \frac{\varphi_i^1 d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 = \\
& = -\frac{\varphi_i^1 d}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 - \frac{g_0}{\rho_i^*} \left(\varphi_i^0 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j + \psi_i \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 \right). \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Подставляя (B.14)-(B.19) в (B.13) и группируя слагаемые при разностях, получаем

$$\begin{aligned}
& \Psi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - \Psi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + g_0 \rho_i^0 m_i^0 - g_1 m_i^1 \rho_i^1 = \\
& = \left(\tau_{ii} (1 - g_0) + g_0 \Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - \frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + g_0 m_i^1 \right) \psi_i + \\
& + \left(\rho_i^1 \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] - \tau_{ii} \varphi_i^1 - \frac{\varphi_i^1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + m_i^1 \rho_i^1 - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 \right) d - \\
& - \frac{g_0 \varphi_i^0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j - g_0 \tau_{i,(3-i)} \psi_{3-i} + g_0 \rho_i^0 n_i + g_0 \rho_i^1 \left(\Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] \right). \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Преобразуем последнее слагаемое в (B.20) с учетом формул (2.19) для Φ_i

$$\begin{aligned}
& g_0 \rho_i^1 \left(\Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] \right) = \\
& = g_0 \rho_i^1 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} (q_j^* + \pi_j^0) - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} H_j(\varphi_j^0) \right) - \\
& - g_0 \rho_i^1 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} (q_j^* + \pi_j^1) - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} H_j(\varphi_j^1) \right) = \\
& = g_0 \rho_i^1 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} (\pi_j^0 - \pi_j^1)}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} (H_j(\varphi_j^0) - H_j(\varphi_j^1)) \right) = \\
& = g_0 \rho_i^1 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \psi_j}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} \int_0^1 H'_j(\varphi_j^0 s + \varphi_j^1 (1-s)) ds \right) = \\
& = g_0 \rho_i^1 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p'_j(\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij}(\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right). \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Подставляем (B.21) в правую часть (B.20):

$$\begin{aligned}
& \left(\tau_{ii} (1 - g_0) + g_0 \Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - \frac{g_0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 + g_0 m_i^1 \right) \psi_i + \frac{g_0 \rho_i^1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p'_j (\rho_j^*) \rho_{j,i}^*} + \\
& + g_0 \rho_i^0 n_i - g_1 \tau_{i,(3-i)} \psi_{3-i} - \frac{g_0 \varphi_i^0}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \psi_j - g_0 \rho_i^1 \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \\
& + \left(\rho_i^1 \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\varphi_i^1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \varphi_j^1 - \tau_{ii} \varphi_i^1 + m_i^1 \rho_i^1 - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^0 \right) d = \\
& = \underbrace{\left(\tau_{ii} (1 - g_0) + g_0 \Phi_i \left[\vec{\theta}_0 \right] - g_0 \rho_i^1 \Theta_{ii} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) - \frac{\tau_{ii} g_0}{\rho_i^*} (\varphi_i^0 + \varphi_i^1) - \frac{g_0}{\rho_i^*} \tau_{i,3-i} \varphi_{3-i}^1 + g_0 m_i^1 \right)}_{\hat{\alpha}_{ii}} \psi_i + \\
& + \underbrace{\frac{g_0 \rho_i^1}{\Lambda} \frac{\tau_{ii}}{p'_i (\rho_i^*) \rho_i^*} \omega_i}_{\hat{\beta}_{ii}} + \underbrace{g_0 \rho_i^0 n_i}_{\hat{\gamma}_i} + \underbrace{\left(-g_0 \rho_i^1 \Theta_{i,3-i} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) - \frac{g_0 \varphi_i^0}{\rho_i^*} \tau_{i,(3-i)} - g_0 \tau_{i,(3-i)} \right)}_{\hat{\alpha}_{i,3-i}} \psi_{3-i} + \\
& + \underbrace{\frac{g_0 \rho_i^1}{\Lambda} \frac{\tau_{i,(3-i)}}{p'_{3-i} (\rho_{3-i}^*) \rho_{3-i}^*} \omega_{3-i}}_{\hat{\beta}_{i,3-i}} + \\
& + \underbrace{\left(\rho_i^1 \Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\tau_{ii}}{\rho_i^*} (\varphi_i^1)^2 - \tau_{ii} \varphi_i^1 + m_i^1 \rho_i^1 - \tau_{i,(3-i)} \varphi_{3-i}^1 - \tau_{i,(3-i)} \frac{\varphi_i^1 \varphi_{3-i}^0}{\rho_i^*} \right)}_{\hat{\delta}_i} d.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Объединяя равенства (B.11), (B.12), (B.20) и (B.22) с учетом введенных обозначений для коэффициентов, получаем уравнения (2.63с)

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d.$$

Вывод уравнений (2.63d). Из уравнений (2.21) процедурой вычитания получаем соотношение

$$-div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \zeta_{j0}^{(i)} \right) + div \left(\vec{u}_1^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right) + \underbrace{\tau_{ii} \cdot \zeta_{j0}^{(i)} - \tau_{ii} \cdot \zeta_{j1}^{(i)}}_{\tau_{ii} \cdot \xi_j^{(i)}} = \underbrace{\tau_{ji} g_0 - \tau_{ji} g_1}_{\tau_{ji} d}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
& -div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \zeta_{j0}^{(i)} \right) + div \left(\vec{u}_1^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right) = \\
& = \underbrace{-div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \zeta_{j0}^{(i)} \right) + div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right)}_{-div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \xi_j^{(i)} \right)} - \underbrace{div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right) + div \left(\vec{u}_1^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right)}_{-div \left(\vec{w}^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right)},
\end{aligned}$$

то получаем уравнения $-div \left(\vec{u}_0^{(i)} \cdot \xi_j^{(i)} \right) + \tau_{ii} \cdot \xi_j^{(i)} = div \left(\vec{w}^{(i)} \cdot \zeta_{j1}^{(i)} \right) + \tau_{ji} d$.

Вывод уравнений (2.63f). Из формул (2.25) следует

$$\vec{m}^0 - \vec{m}^1 = (k^0 E - A^0)^{-1} \vec{f}^0 - (k^1 E - A^1)^{-1} \vec{f}^1. \quad (\text{B.23})$$

Преобразуем правую часть (B.23):

$$\begin{aligned} & (k^0 E - A^0)^{-1} \vec{f}^0 - (k^1 E - A^1)^{-1} \vec{f}^1 = \\ & = (k^0 E - A^0)^{-1} \vec{f}^0 - (k^0 E - A^0)^{-1} \vec{f}^1 + (k^0 E - A^0)^{-1} \vec{f}^1 - (k^1 E - A^1)^{-1} \vec{f}^1 = \\ & = (k^0 E - A^0)^{-1} \left[(\vec{f}^0 - \vec{f}^1) + \vec{f}^1 - (k^0 E - A^0) (k^1 E - A^1)^{-1} \vec{f}^1 \right] = \\ & = (k^0 E - A^0)^{-1} \left[(\vec{f}^0 - \vec{f}^1) + (k^1 E - A^1) \vec{m}^1 + (k^0 E - A^0) \vec{m}^1 \right] = \\ & = (k^0 E - A^0)^{-1} \left[(\vec{f}^0 - \vec{f}^1) - \langle (k^0 E - A^0) - (k^1 E - A^1) \rangle \vec{m}^1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & f_i^0 - f_i^1 = \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_0] + g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] \right) dx - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \zeta_{i1}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1] + g_1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] \right) dx = \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \left(\zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_0] - \zeta_{i1}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1] \right) + g_0 \Phi_i [\vec{\theta}_0] - g_1 \Phi_i [\vec{\theta}_1] \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Так как

$$\begin{aligned} & \zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_0] - \zeta_{i1}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1] = \underbrace{\zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_0] - \zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1]}_{\zeta_{i0}^{(j)} (\Psi_j [\vec{\theta}_0] - \Psi_j [\vec{\theta}_1])} + \underbrace{\zeta_{i0}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1] - \zeta_{i1}^{(j)} \Psi_j [\vec{\theta}_1]}_{\Psi_j [\vec{\theta}_1] \xi_j^{(i)}} = \\ & = \zeta_{i0}^{(j)} \left(\tau_{jj} (1 - g_0) + g_0 \Phi_j [\vec{\theta}_0] - \frac{g_0}{\rho_j^*} \sum_{k=1}^2 \tau_{jk} \varphi_k^1 \right) \psi_j + \zeta_{i0}^{(j)} \frac{g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \sum_{k=1}^2 \frac{\tau_{jk} \omega_k}{p'_k (\rho_k^*) \rho_k^*} - \\ & - \zeta_{i0}^{(j)} g_1 \tau_{j,(3-j)} \psi_{3-j} - \zeta_{i0}^{(j)} \frac{g_0 \varphi_j^0}{\rho_j^*} \sum_{k=1}^2 \tau_{jk} \psi_k - \zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1 \sum_{k=1}^2 \psi_k \Theta_{jk} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) + \\ & + \zeta_{i0}^{(j)} \left(\rho_j^1 \Phi_j [\vec{\theta}_1] - \frac{\varphi_j^1}{\rho_j^*} \sum_{k=1}^2 \tau_{jk} \varphi_k^1 - \tau_{jj} \varphi_j^1 - \tau_{j,(3-j)} \varphi_{3-j}^0 \right) d + \Psi_j [\vec{\theta}_1] \xi_i^{(j)} = \\ & = \zeta_{i0}^{(j)} \left(\tau_{jj} (1 - g_0) + g_0 \Phi_j [\vec{\theta}_0] - g_0 \rho_j^1 \Theta_{jj} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{\tau_{jj} g_0}{\rho_j^*} (\varphi_j^0 + \varphi_j^1) - \frac{g_0}{\rho_j^*} \tau_{j,3-j} \varphi_{3-j}^1 \right) \psi_j + \\ & + \frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{jj}}{p'_j (\rho_j^*) \rho_j^*} \omega_i + \zeta_{i0}^{(j)} \left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{j,3-j} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{g_0 \varphi_j^0}{\rho_j^*} \tau_{j,(3-j)} - g_1 \tau_{j,(3-j)} \right) \psi_{3-j} + \\ & + \zeta_{i0}^{(j)} \left(\rho_j^1 \Phi_j [\vec{\theta}_1] - \frac{\tau_{jj}}{\rho_j^*} (\varphi_j^1)^2 - \tau_{jj} \varphi_j^1 - \tau_{j,(3-j)} \varphi_{3-j}^0 - \tau_{j,(3-j)} \frac{\varphi_j^1 \varphi_{3-j}^0}{\rho_j^*} \right) d + \\ & + \frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{j,(3-j)}}{p'_{3-j} (\rho_{3-j}^*) \rho_{3-j}^*} \omega_{3-j} + \Psi_j [\vec{\theta}_1] \xi_j^{(i)}, \end{aligned}$$

то с учетом (B.8) из (B.25) получаем

$$\begin{aligned}
f_i^0 - f_i^1 &= \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right] \xi_j^{(i)} \right] dx + \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(\tau_{jj} (1 - g_0) + g_0 \Phi_j \left[\vec{\theta}_0 \right] \right) \psi_j \right] dx + \\
&\frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{jj} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{\tau_{jj} g_0}{\rho_j^*} (\varphi_j^0 + \varphi_j^1) - \frac{g_0}{\rho_j^*} \tau_{j,3-j} \varphi_{3-j}^1 \right) \psi_j \right] dx + \\
&+ \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{j,3-j} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{g_0 \varphi_j^0}{\rho_j^*} \tau_{j,(3-j)} - g_1 \tau_{j,(3-j)} \right) \psi_{3-j} \right] dx + \\
&+ \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{jj}}{p_j' (\rho_j^*) \rho_j^*} \omega_j + \frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{j,(3-j)}}{p_{3-j}' (\rho_{3-j}^*) \rho_{3-j}^*} \omega_{3-j} \right] dx + \\
&+ \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(\rho_j^1 \Phi_j \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\tau_{jj}}{\rho_j^*} (\varphi_j^1)^2 - \tau_{jj} \varphi_j^1 - \tau_{j,(3-j)} \varphi_{3-j}^0 - \tau_{j,(3-j)} \frac{\varphi_j^1 \varphi_{3-j}^0}{\rho_j^*} \right) d \right] dx + \\
&+ \int_{\Omega} \left[\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] d + g_0 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p_j' (\rho_j^*) \rho_j^*} - \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right) \right] dx.
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&-g_0 \left(\frac{\rho_j^0 \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) = \\
&= g_0 \left(-\frac{(\rho_j^* + \varphi_j^0) \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} + \frac{(\rho_j^* + \varphi_j^1) \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) = g_0 \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \xi_i^{(j)} - \frac{\varphi_j^0 \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) = \\
&= g_0 \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \xi_i^{(j)} - \frac{1}{\rho_i^*} \left(\underbrace{\varphi_j^0 \zeta_{i0}^{(j)} - \varphi_j^0 \zeta_{i1}^{(j)}}_{\varphi_j^0 \xi_i^{(j)}} + \underbrace{\varphi_j^0 \zeta_{i1}^{(j)} - \varphi_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}_{\psi_j \zeta_{i1}^{(j)}} \right) \right) = \\
&= g_0 \xi_i^{(j)} \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} - \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) + \psi_j \left(-\frac{g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right),
\end{aligned}$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&g_0 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^0 \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) - g_1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) = \\
&= \underbrace{g_0 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^0 \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) - g_0 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right)}_{-g_0 \left(\frac{\rho_j^0 \zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right)} + \underbrace{g_0 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) - g_1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right)}_{\left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) d} = \\
&= \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) d + g_0 \xi_i^{(j)} \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} - \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) + \psi_j \left(-\frac{g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(k^0 E - A^0) - (k^1 E - A^1) = \left\{ \int_{\Omega} \left(\left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) d + g_0 \xi_i^{(j)} \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} - \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) + \psi_j \left(-\frac{g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right) dx \right\}_{i,j=1}^2. \quad (\text{B.27})$$

Таким образом, объединяя (B.27) и (B.26) получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\vec{f}^0 - \vec{f}^1 \right) - \langle (k^0 E - A^0) - (k^1 E - A^1) \rangle \vec{m}^1 \right\}_i = \\ &= \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right] \xi_j^{(i)} \right] dx + \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(\tau_{jj} (1 - g_0) + g_0 \Phi_j \left[\vec{\theta}_0 \right] \right) \psi_j \right] dx + \\ & \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{jj} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{\tau_{jj} g_0}{\rho_j^*} (\varphi_j^0 + \varphi_j^1) - \frac{g_0}{\rho_j^*} \tau_{j,3-j} \varphi_{3-j}^1 \right) \psi_j \right] dx + \\ & + \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{j,3-j} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{g_0 \varphi_j^0}{\rho_j^*} \tau_{j,(3-j)} - g_1 \tau_{j,(3-j)} \right) \psi_{3-j} \right] dx + \\ & + \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{jj}}{p_j' (\rho_j^*)} \omega_j + \frac{\zeta_{i0}^{(j)} g_0 \rho_j^1}{\Lambda} \frac{\tau_{j,(3-j)}}{p_{3-j}' (\rho_{3-j}^*)} \omega_{3-j} \right] dx + \\ & + \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left[\zeta_{i0}^{(j)} \left(\rho_j^1 \Phi_j \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\tau_{jj}}{\rho_j^*} (\varphi_j^1)^2 - \tau_{jj} \varphi_j^1 - \tau_{j,(3-j)} \varphi_{3-j}^0 - \tau_{j,(3-j)} \frac{\varphi_j^1 \varphi_{3-j}^0}{\rho_j^*} \right) d \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] d + g_0 \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij} \omega_j}{p_j' (\rho_j^*)} - \sum_{j=1}^2 \psi_j \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right) \right] dx \\ & - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left(\left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) d + g_0 \xi_i^{(j)} \left(-\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} - \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) + \psi_j \left(-\frac{g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right) m_j^1 dx = \\ & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \underbrace{\left(\tau_{jj} (1 - g_0) + g_0 \Phi_j \left[\vec{\theta}_0 \right] - g_0 \rho_j^1 \Theta_{jj} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{\tau_{jj} g_0}{\rho_j^*} (\varphi_j^0 + \varphi_j^1) - \right.}_{\hat{\alpha}_{jj}} \\ & \quad \left. - \frac{g_0}{\rho_j^*} \tau_{j,3-j} \varphi_{3-j}^1 + m_j^1 g_0 \right) \psi_j dx + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} (-m_j^1 g_0) + \frac{m_j^1 g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} - g_0 \Theta_{ij} (\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right\rangle \psi_j dx + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \underbrace{\left(-g_0 \rho_j^1 \Theta_{j,3-j} (\varphi_j^0, \varphi_j^1) - \frac{g_0 \varphi_j^0}{\rho_j^*} \tau_{j,(3-j)} - g_1 \tau_{j,(3-j)} \right)}_{\hat{\alpha}_{j,3-j}} \psi_{3-j} dx + \\ & + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \underbrace{\left(\rho_j^1 \Phi_j \left[\vec{\theta}_1 \right] - \frac{\tau_{jj}}{\rho_j^*} (\varphi_j^1)^2 - \tau_{jj} \varphi_j^1 - \tau_{j,(3-j)} \varphi_{3-j}^0 - \tau_{j,(3-j)} \frac{\varphi_j^1 \varphi_{3-j}^0}{\rho_j^*} \right)}_{\hat{\delta}_j - m_j^1 \rho_j^1} \right\rangle d \right) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left(\left[\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle -m_j^1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\rangle \right] d \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right]}{\rho_i^*} + g_0 m_j^1 \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) \right\rangle \xi_j^{(i)} \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \underbrace{\frac{g_0 \rho_j^1 \tau_{jj}}{\Lambda p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}}_{\hat{\beta}_{jj}} + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \underbrace{\frac{g_0 \rho_{3-j}^1 \tau_{(3-j),j}}{\Lambda p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}}_{\hat{\beta}_{3-j,j}} + \underbrace{\frac{g_0}{\Lambda} \frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*) \rho_j^*}}_{\beta_{ij}} \right\rangle \omega_j \right) dx = \\
& = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} (\hat{\alpha}_{jj} - m_j^1 g_0) + \frac{m_j^1 g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} - g_0 \Theta_{ij}(\varphi_i^0, \varphi_i^1) \right\rangle \psi_j dx + \\
& + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \tilde{\alpha}_{j,3-j} \psi_{3-j} dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{jj} + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{3-j,j} + \beta_{ij} \right) \omega_j dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\left[\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \left(\hat{\delta}_j - m_j^1 \rho_j^1 \right) - m_j^1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\rangle \right] d \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right]}{\rho_i^*} + g_0 m_j^1 \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) \right\rangle \xi_j^{(i)} \right) dx = \\
& = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \underbrace{\left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} (\hat{\alpha}_{jj} - m_j^1 g_0) + \frac{m_j^1 g_0 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} - g_0 \Theta_{ij}(\varphi_i^0, \varphi_i^1) + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \hat{\alpha}_{3-j,j} \right\rangle}_{\tilde{\alpha}_{ij}} \psi_j dx + \\
& + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \underbrace{\left(\frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{jj} + \frac{\zeta_{i0}^{(3-j)}}{\rho_i^*} \hat{\beta}_{3-j,j} + \beta_{ij} \right)}_{\tilde{\beta}_{ij}} \omega_j dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\underbrace{\left[\Phi_i \left[\vec{\theta}_1 \right] + \sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\zeta_{i0}^{(j)}}{\rho_i^*} \left(\hat{\delta}_j - m_j^1 \rho_j^1 \right) - m_j^1 \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j^1 \zeta_{i1}^{(j)}}{\rho_i^*} \right) \right\rangle}_{\tilde{\delta}_i} \right] d}_{\tilde{\delta}_i} \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^2 \left\langle \frac{\Psi_j \left[\vec{\theta}_1 \right]}{\rho_i^*} + g_0 m_j^1 \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} + \frac{\varphi_j^0}{\rho_i^*} \right) \right\rangle}_{\tilde{\gamma}_{ij}} \xi_j^{(i)} \right) dx = \\
& = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_{ij} \psi_j dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_{ij} \omega_j dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_{ij} \xi_j^{(i)} dx + \int_{\Omega} \tilde{\delta}_i d = \\
& = \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_i d + \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\alpha}_{ij} \psi_j + \tilde{\beta}_{ij} \omega_j + \tilde{\gamma}_{ij} \xi_j^{(i)} \right) \right] dx.
\end{aligned}$$

Следовательно, $n_i = \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)} \right) \right] dx.$