На правах рукописи

Жалнина Александра Анатольевна

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СМЕСЕЙ ОТ ОБЛАСТИ: ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ

01.01.02 - дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждениии высшего образования «Кемеровский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Кучер Николай Алексеевич**

Официальные оппоненты:

Алексеев Геннадий Валентинович д-р физ.-мат. наук, проф.,Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, научно-исследовательская группа вычислительной аэрогидродинамики, главный научный сотрудник.

Папин Александр Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный университет», кафедра дифференциальных уравнений, заведующий кафедрой.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 23 января 2018 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «_____» ____________________2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук Рудой Евгений Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

С краевыми задачами механики сплошных сред, имеющими многочисленные приложения, тесно связаны также вариационные задачи по определению оптимальных форм конструкций. Интерес к исследованиям в области оптимального проектирования значительно возрос в настоящее время в связи с интенсивным развитием авиационной и космической техники, судостроения, точного машиностроения. На основе оптимального проектирования достигается значительное снижение веса летательных аппаратов, улучшение механических характеристик конструкций. Таким образом исследования в этой области имеют несомненное важное прикладное значение.

Проблемы оптимального управления имеют и теоретическое значение, поскольку представляет интерес выделение и исследование новых классов математических задач в этой области, учет при оптимальном проектировании различных физических факторов, разработке эффективных методов оптимизации.

Начиная с 80-х годов двадцатого столетия активно изучаются задачи оптимального управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, управляющими параметрами в которых выступают пространственные и временные области изменения аргументов искомых функций.

В настоящей диссертационной работе изучается задача об управлении формой области для системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей пространственные движения смеси вязких сжимаемых жидкостей:

$$\rho_1(\vec{u}^{(1)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(1)}+\nabla p_1+a\left(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}\right)=\sum_{j=1}^{2}\left[\mu_{1j}\Delta\vec{u}^{(j)}+(\mu_{1j}+\lambda_{1j})\nabla\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\right], \qquad (1a)$$

$$\rho_2(\vec{u}^{(2)}\cdot\nabla)\vec{u}^{(2)}+\nabla p_2-a\left(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(2)}\right)=\sum_{j=1}^{2}\left[\mu_{2j}\Delta\vec{u}^{(j)}+(\mu_{2j}+\lambda_{2j})\nabla\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\right], \qquad (1b)$$

$$\mathrm{div}\left(\rho_1\vec{u}^{(1)}\right)=0,\quad \mathrm{div}\left(\rho_2\vec{u}^{(2)}\right)=0. \qquad (1c)$$

Здесь $\vec{u}^{(i)}, i=1,2,$ - поле скоростей i-той компоненты смеси, заполняющей некоторую область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $x=(x_1,x_2,x_3)$; $\rho_i, i=1,2,$ - скалярные поля плотностей составляющих компонент; давление p_i i-той компоненты предполагается известной достаточно гладкой функцией плотности ρ_i; слагаемые $\vec{J}^{(i)}=(-1)^{(i)}a\left(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}\right)$ характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси. Из термодинамических соображений постоянные коэффициенты вязкости μ_{ij}, $\lambda_{ij}, i,j=1,2,$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим эллиптичность по Петровскому дифференциального оператора

$$L(\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)})=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{2}L_{1j}(\vec{u}^{(j)})\\ \sum\limits_{j=1}^{2}L_{2j}(\vec{u}^{(j)})\end{pmatrix},\ L_{ij}(\vec{u})=-\mu_{ij}\triangle\vec{u}-(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla div\vec{u}.$$

В целом уравнения (1) представляют собой весьма сложную нелинейную систему составного типа: уравнения сохранения импульсов (1a), (1b) являются эллиптической системой относительно искомых функций $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$, а уравнения сохранения масс компонентов (1c) можно трактовать как уравнения первого порядка относительно плотностей ρ_1, ρ_2.

В диссертации изучается задача об обтекании семейства препятствий трехмерным потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей, приводящая к неоднородной краевой задаче для системы уравнений (1).

Большая часть известных результатов для уравнений Навье-Стокса сжимаемых вязких жидкостей и тем более для уравнений смесей таких сред касается потоков в областях, ограниченных непроницаемыми стенками, в то время как результаты исследований неоднородных граничных задач остаются достаточно скромными. Из работ, посвященных последней проблеме, укажем статьи S. Novo[1], V. Girinon[2] в которых доказана теорема существования в случае граничных условий специального вида и статьи R. Farwig[3], J. R. Kweon , R. B. Kellogg[4],[5] для двумерных областей в предположении, что на границе области течения поле скоростей близко к заданному постоянному. Важные результаты о существовании сильных решений неоднородных краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса в случае малых чисел Рейнольдса и Маха получены П.И. Плотниковым и Ж.Соколовским

Настоящая диссертационная работа имеет своими целями:

- Исследование корректности задачи обтекания семейства препятствий потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Построение сильного решения.
- Исследование зависимости решений задачи обтекания (сформулированной в предыдущем пункте) от формы области течения.
- Доказательство существования материальных производных от решения краевой задачи для уравнений вида (1).
- Исследование дифференцируемости по области решений краевой задачи и функционала сопротивления препятствия набегающему потоку смеси.

Первые общематематические постановки задач оптимального управления формой области были сделаны в начале 70-х годов двадцатого столетия Ж.-Л. Лионсом. Одними из первых работ, посвященных исследованию задач оптимального управления для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости, являются работы А.В. Фурсикова, которому принадлежит большое количество работ по данной тематике с полным списком которых(до 1999г.) а также с общей теорией оптимального управления для систем уравнений с частными производными, можно познакомиться по его книге[6]. Здесь же изучена задача о минимизации силы сопротивления тела, движущегося в жидкости, заполняющей пространство, причем минимизация производилась за счет управления скоростью жидкости на границе тела. В работах данного автора, вышедших после 2000 г. рассматриваются задачи минимизации работы производимой вязкой несжимаемой жидкостью, обтекающей ограниченное трехмерное тело. При этом минимизация проводится за счет управления скоростью жидкости с границы обтекаемого тела.

---

[1]Novo, S. Compressible Navier-Stokes model with inflow-outflow boundary conditions / S. Novo // J. Math. Fluid Mech. – V. 7. – 2005. – P. 485 – 514.

[2]Girinon, V. Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions in a bounded three-dimensional domain / V. Girinon // J. Math. Fluid Mech. – V. 13. – 2011. – P. 309 – 339.

[3]Farwig, R. Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition / R. Farwig // Comm. Partial Dierential Equations. – V.14. – 1989. – P.1579–1606.

[4]Kweon, J. R. Compressible Navier-Stokes equations in a bounded domain with inflow boundary condition / J. R. Kweon, R. B. Kellogg // SIAM J. Math. Anal. – V. 28. – 1997. – P. 94 – 108.

[5]Kweon, J. R. Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations for compressible barotropic flows on a polygon / J. R. Kweon, R. B. Kellogg // Arch. Ration. Mech. Anal. – V. 163. – 2000. – P. 35 – 64.

[6]Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

Первый глобальный результат о зависимости от области решений сжимаемых уравнений Навье-Стокса принадлежит Е. Файрайзелу[7], который затем получил развитие в серии работ Плотникова П.И., Соколовского Ж., Рубан Е.В. В монографии P.Plotnikov, J. Sokolowski[8] представлена математическая теория оптимизации формы в аэродинамике и изложены новые результаты для сжимаемых уравнений Навье-Стокса.

Методы исследования

В работе использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными, в частности: методы теории пространств Соболева, теоремы о неподвижных точках, результаты о разрешимости краевых задач для уравнений Стокса и транспортных уравнений, методы сопряженных задач.

Основные результаты

На защиту выносятся следующие основные результаты:

- Доказано существование и единственность сильного решения неоднородной краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений составного типа, моделирующей обтекание семейства компактных препятствий потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей.
- Проведено исследование зависимости решения задачи обтекания препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей от формы области течения. В частности проведено построение очень слабых решений одного класса линейных задач с сингулярными коэффициентами.
- Доказана дифференцируемость решения задачи обтекания по области.
- Доказана дифференцируемость по области функционала сопротивления обтекаемого препятствия набегающему потоку смеси вязких сжимаемых жидкостей. Получена формула представления этой производной в виде суммы двух слагаемых, одно из которых явно зависит от отображения, задающего форму области, а другое может быть выражено в терминах сопряженного состояния, зависящего только от решения исходной задачи в недеформированной области.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, их достоверность устанавливается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Все основные результаты в ней формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Практическая ценность работы следует из возможных приложений результатов диссертации для построения численных алгоритмов поиска оптимальной фомы тела, обтекаемого потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей.

[7]Feireisl, E. Shape optimization in viscous compressible fluids / E. Feireisl // Appl. Math. Optim. – V. 47. – 2003. – P. 59–78.

[8]Plotnikov, P. Compressible Navier-Stokes equations: theory and shape optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Basel: Birkhauser, 2012, – 474 p.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- на семинарах "Краевые задачи механики сплошных сред"кафедры дифференциальных уравнений Кемеровского государственного университета (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор Н. А. Кучер);
- на семинаре "Математические модели механики сплошных сред"института гидродинамики им. М .А. Лаврентьева СО РАН (руководители семинара: чл.-корр. РАН, профессор П. И. Плотников и доктор физ.-мат. наук В. Н. Старовойтов);
- на семинаре лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководители семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор В. С. Белоносов, доктор физ.-мат. наук М. В. Фокин);
- на семинаре "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики"института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор А. М. Блохин) ;

а также на следующих научных конференциях:

- XII Всероссийская научная конференция с международным участием «Краевые задачи и математическое моделирование». 29-30 ноября 2014 г., г. Новокузнецк.
- X (XLII) Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей». 20-24 апреля 2015 г., г. Кемерово.
- Международная научно-практическая конференция «Теоретический и практический взгляд на современное состояние науки». 29-30 сентября 2015г., г.Кемерово.
- Всероссийская научно-практическая конференция «Информационно - телекоммуникационные системы и технологии» 16-17 октября 2015 г., г.Кемерово.
- Международная научно-практическая конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования », 26-28 апреля 2016 года. г.Рязань.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-11], список которых приведен в конце автореферата. Все результаты диссертации получены лично автором. В совместных работах с Н. А. Кучером научному руководителю принадлежат постановка задачи и общее руководство.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, двух приложений и списка литературы из 108 наименований. Объем диссертации составляет 151 страниц машинописного текста. Текст иллюстрируют 5 рисунков.

Краткое изложение содержания работы

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность темы и сформулированы цели исследования, его научная новизна, методы исследования, теоретическая и практическая значимость, даны сведения об апробации работы, изложено краткое содержание работы и выносимые на защиту положения.

В первой главе приводятся некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, которые используются в основной части диссертации. В первом параграфе этой главы приводятся необходимые сведения из теории интерполяции, функциональные пространства типа Соболева-Слободецкого с вещественными показателями дифференцируемости, негативные пространства, теоремы вложения, оценки классических операторов векторного анализа в специальных функциональных пространствах, специальные оценки сложных функций, некоторые теоремы о разрешимости операторных уравнений, оценки норм и разложения матричнозначных функций. Материал второго параграфа касается результатов о разрешимости классической задачи Стокса и некоторых ее модификаций, а также о разрешимости краевых задач для уравнений переноса в различных функциональных пространствах.

Вторая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящается исследованию разрешимости нодноородной краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей и анализу зависимости ее решения от деформаций области течения.

Первый параграф содержит постановку задачи об обтекании семейства компактных препятствий, которая заключается в следующем: Область течения смеси

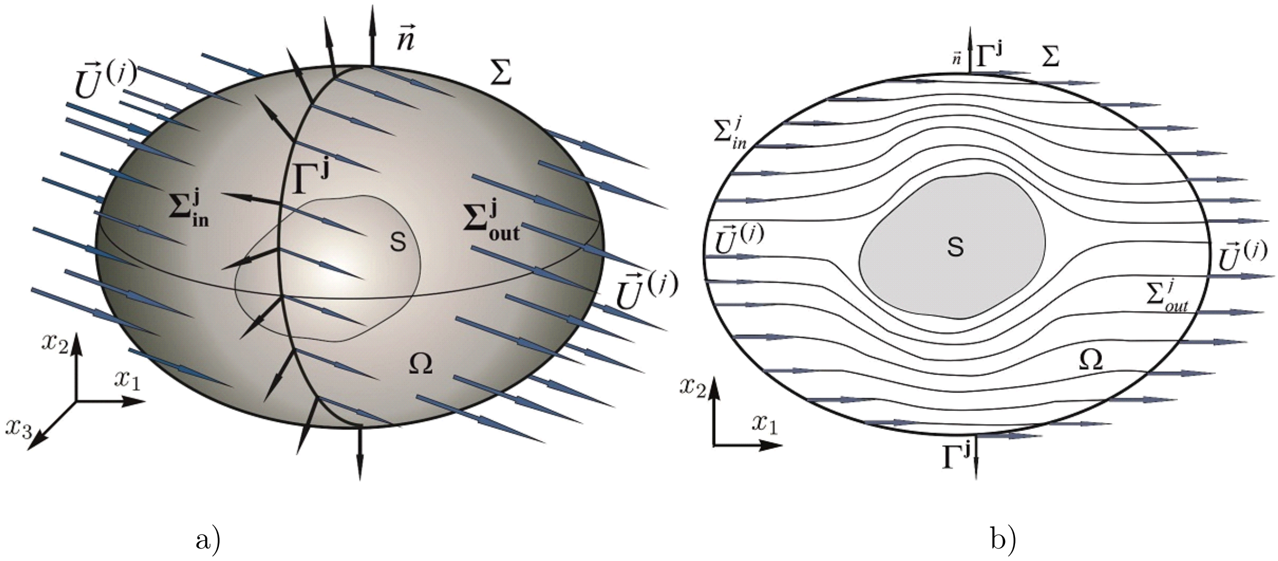

Рис. 1: Схемы обтекания препятствия j-той компонентой смеси: a) трехмерный поток; b) плоское сечение.

вязких сжимаемых жидкостей представляет собой область $\Omega = B\backslash S$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, где B - ограниченное множество (например шар достаточно большого радиуса) с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3, S - компактное множество с границей ∂S класса C^3, лежащее строго внутри B. Пусть $x \mapsto \vec{T}(x)$ обозначает векторное поле класса $C^2(\mathbb{R}^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ. Определим отображение $x \mapsto y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\vec{T}(x)$, задающее возмущение формы обтекаемого препятствия S. Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \backslash S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ - возмущенное обтекаемое препятствие. Пусть $\vec{U}^{(j)},\ j = 1,2$ – заданные во всем пространстве векторные поля класса $C^3(\mathbb{R}^3)$ ($\vec{U}^{(j)}$ можно трактовать как вектор скорости j-ой компоненты на бесконечности), обращающиеся в нуль в окрестности множества S. На границе Σ области B, выделим так называемые участки «втекания»: $\Sigma^j_{in} = \{x \in \Sigma :\ \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} < 0\},\ j = 1,2$, и участки «вытекания»: $\Sigma^j_{out} = \{x \in \Sigma :\ \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} > 0\},\ j = 1,2$, где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе Σ. Предположим выполненными следующие условия.

Условие 1. *Множества $\Gamma^j = cl\Sigma^j_{in} \cap \left(\Sigma \backslash \Sigma^j_{in}\right),\ j = 1,2$, («характеристические» части поверхности) представляют собой замкнутые одномерные многообразия, такие что $\Sigma = \Sigma^j_{in} \cup \Gamma^{(j)} \cup \Sigma^j_{out}$ и кроме того:*

- $\displaystyle\int_\Sigma \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} ds = 0,\ j = 1,2;$
- *существует такая постоянная $C > 0$, что*

$$\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla\left(\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}\right) > C > 0 \text{ на } \Gamma^j,\ j = 1,2.$$

Ищутся поля скоростей $\vec{u}^{(i)}_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ и поля плотностей $\rho_{i\varepsilon} : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^+, i = 1,2$ компонент смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}(\vec{u}^{(j)}_\varepsilon) + \mathrm{R}e\rho_{i\varepsilon}(\vec{u}^{(i)}_\varepsilon \cdot \nabla)\vec{u}^{(i)}_\varepsilon + \frac{\mathrm{R}e}{\mathrm{M}a^2}\nabla p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon}) + \vec{J}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon,\ i = 1,2, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}iv(\rho_{i\varepsilon}\vec{u}^{(i)}_\varepsilon) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon,\ i = 1,2, \tag{3}$$

$$\vec{u}^{(j)}_\varepsilon = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma, \qquad \vec{u}^{(j)}_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon,\ \rho_{j\varepsilon} = \rho^0_j \text{ на } \Sigma^j_{in},\ j = 1,2, \tag{4}$$

где $\rho^0_j,\ \ j = 1,2$, - заданные положительные постоянные. В уравнениях (2) Re и Ma обозначают числа Рейнольдса и Маха соответственно. Давления $p_{i\varepsilon} = p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon}),\ i = 1,2$, предполагаются известными функциями плотностей класса $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^+)$. Постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} удовлетворяют условиям

$$\mu_{11} > 0,\ \mu_{22} > 0,\ \mu_{11} \cdot \mu_{22} - \mu_{12} \cdot \mu_{21} \neq 0,$$

$$\chi_{ij} = \lambda_{ij} + \mu_{ij},\ \chi_{11} > 0,\ \chi_{22} > 0,\ \chi_{11} \cdot \chi_{22} - \chi_{12} \cdot \chi_{21} \neq 0.$$

Задачу (2)-(4) удобно свести к краевой задаче в невозмущенной области Ω для однопараметрического семейства дифференциальных уравнений с возмущенными коэффициентами. С этой целью вводятся функции $\vec{u}^{(i)}$ и $\rho_i, i = 1,2$, определенные в Ω согласно формулам:

$$\vec{u}^{(i)}(x) = N(x)\vec{u}^{(i)}_\varepsilon(x + \varepsilon\vec{T}(x)),\ \rho_i(x) = \rho_{i\varepsilon}(x + \varepsilon\vec{T}(x)),\ x \in \Omega, i = 1,2, \tag{5}$$

где $N(x) = (\mathrm{d}etM(x))M^{-1}(x)$, $M(x) = I + \varepsilon D\vec{T}(x)$, $D\vec{T}(x) = \left\{\frac{\partial T_i(x)}{\partial x_j}\right\}$ - матрица Якоби отображения $x \mapsto \vec{T}(x)$.

Лемма 2. *Пусть $(\vec{u}^{(i)}_\varepsilon(y),\ \rho_{i\varepsilon}(y)),\ i = 1,2$ – решение задачи* (2)-(4). *Тогда пары $(\vec{u}^{(i)}(x),\ \rho_i(x)),\ i = 1,2$, определенные по формулам* (5) *являются решением следую-*

щей задачи

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\triangle\vec{u}^{(j)}+\nabla\left(g^{-1}\sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}-\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}p_i(\rho_i)\right)=$$
$$=\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\vec{u}^{(j)}\right)+\mathrm{Re}\mathcal{B}\left(\rho_i,\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)}\right)+(-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\ \text{в}\ \Omega, \tag{6a}$$

$$\mathrm{div}(\rho_i\vec{u}^{(i)})=0\ \text{в}\ \Omega, \tag{6b}$$

$$\vec{u}^{(i)}=\vec{U}^{(i)}\ \text{на}\ \Sigma,\quad \vec{u}^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial S,\ \rho_i=\rho_i^0\ \text{на}\ \Sigma_{in}^i,\ i=1,2. \tag{6c}$$

Здесь $g=g(x;N)=\sqrt{\mathrm{det}N(x)}$; линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ и нелинейное отображение $\mathcal{B}$ определены по формулам

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\vec{u})=\mathcal{A}(\vec{u};N)=\triangle\vec{u}-\left(\mathbf{N}^T\right)^{-1}\mathrm{div}\left(g^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{u}\right)\right),\\ \mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w})=\mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w};N)=\rho\left(\mathbf{N}^T\right)^{-1}\left(\vec{u}\ \nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{w}\right)\right),\\ \mathcal{S}(\vec{u})=\mathcal{S}(\vec{u};N)=g\cdot a\ \left(\mathbf{N}^T\right)^{-1}\mathbf{N}^{-1}\ \vec{u}.\end{gathered} \tag{7}$$

Вводя по формулам $q_i=-\sum\limits_{j=1}^{2}g^{-1}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}+\dfrac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}\ p_i(\rho_i),\ i=1,2,$ эффективные вязкие потоки, задачу (6) об обтекании семейства препятствий перепишем в виде:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\triangle\vec{u}^{(j)}-\nabla q_i=\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\ \mathcal{A}\left(\vec{u}^{(j)}\right)+$$
$$+\mathrm{Re}\ \mathcal{B}\left(\rho_i,\ \vec{u}^{(i)},\ \vec{u}^{(i)}\right)+(-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\ \text{в}\ \Omega, \tag{8a}$$

$$\mathrm{div}\vec{u}^{(i)}=\sum_{j=1}^{2}g\sigma_{ij}p_j-\sum_{j=1}^{2}g\gamma_{ij}q_j\ \text{в}\ \Omega, \tag{8b}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\triangledown\rho_i+\rho_i\sum_{j=1}^{2}g\sigma_{ij}p_j=\rho_i\sum_{j=1}^{2}g\gamma_{ij}q_j\ \text{в}\ \Omega, \tag{8c}$$

$$\vec{u}^{(i)}=\vec{U}^{(i)}\ \text{на}\ \Sigma,\quad \vec{u}^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial S,\quad \rho_i=\rho_i^0\ \text{на}\ \Sigma_{in}^i,\ i=1,2, \tag{8d}$$

где γ_{ij} - элементы матрицы $\varkappa^{-1}$, обратной к матрице $\varkappa$ элементы которой есть $\mu_{ij}+\lambda_{ij},i,j=1,2;\ \sigma_{ij}=\dfrac{\mathrm{R}e}{\mathrm{Ma}^2}\gamma_{ij}$.

Решение краевой задачи (8) строится в виде возмущения специальным образом выбранного потока. Более точно, решение $\vec{u}^{(i)},\rho_i,q_i,i=1,2,$ задачи (8) ищется в виде:

$$\vec{u}^{(i)}=\vec{u}_*^{(i)}+\vec{v}^{(i)},\quad \rho_i=\rho_i^*+\varphi_i,\ q_i=q_i^*+\pi_i+\Lambda\cdot p_i(\rho_i^*)+\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}+\lambda_{ij}\right)m_j, \tag{9}$$

где $\rho_i^*=\rho_i^0=const,\quad \Lambda=\dfrac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}$, m_j – постоянные, служащие инструментом контроля масс компонентов смеси в области Ω, $\vec{u}_*^{(i)}$, $q_i^{(*)},i=1,2,$ – достаточно гладкое решение следующей задачи типа Стокса

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\triangle\vec{u}_*^{(j)}-\nabla q_i^*=0\ \text{в}\ \Omega,\ \mathrm{div}\vec{u}_*^{(i)}=0\ \text{в}\ \ \Omega,$$
$$\vec{u}_*^{(i)}=\vec{U}^{(i)}\ \text{на}\ \Sigma,\ \vec{u}_*^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial S,\ \Pi q_i^*=q_i^*,\ i=1,2,(\Pi q=q-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}qdx). \tag{10}$$

В итоге основным объектом исследования становится задача для возмущений:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{v}^{(j)}-\nabla\pi_i=$$
$$=\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}(\vec{u}^{(j)};N)+Re\mathcal{B}(\rho_i,\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)};N)+(-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)};N)\text{ в }\Omega, \tag{11a}$$

$$\mathrm{d}iv\vec{v}^{(i)}=g\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho_i^*}\tau_{ij}\varphi_j-g\Phi_i[\vec{\theta}]-gm_i\text{ в }\Omega, \tag{11b}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i+\tau_{ii}\varphi_i=\Psi_i[\vec{\theta}]+gm_i\rho_i\text{ в }\Omega, \tag{11c}$$

$$\vec{v}^{(i)}=0\text{ на }\partial\Omega,\quad \varphi_i=0\text{ на }\Sigma_{in}^i,\quad \Pi\pi_i=\pi_i, \tag{11d}$$

$$\vec{m}=(m_1,m_2)^T,\ \vec{m}=(kI-A)^{-1}\vec{f},\ A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^2,\vec{f}=(f_1,f_2)^T,$$
$$k=\int\limits_{\Omega}gdx,\ a_{ij}=\frac{1}{\rho_i^*}\int\limits_{\Omega}g\cdot\rho_j\cdot\zeta_i^{(j)}dx, f_i=\frac{1}{\rho_i^*}\int\limits_{\Omega}(\sum_{j=1}^{2}\zeta_i^{(j)}\cdot\Psi_j[\vec{\theta}]-g\Phi_i[\vec{\theta}])dx; \tag{11e}$$

$$-\mathrm{d}iv(\vec{u}^{(i)}\cdot\zeta_j^{(i)})+\tau_{ii}\cdot\zeta_j^{(i)}=\tau_{ji}g\ \text{ в }\Omega,\ \zeta_j^{(i)}=0\ \text{ на }\Sigma_{out}^i,\ i,j=1,2. \tag{11f}$$

Здесь τ_{ij} – элементы матрицы $\mathcal{T}=R^*\cdot\varkappa^{-1}\cdot P^*$,

$$P^*=P(\rho^*)=\begin{pmatrix}p_1'(\rho_1^*) & 0\\ 0 & p_2'(\rho_2^*)\end{pmatrix},\quad R^*=\begin{pmatrix}\rho_1^* & 0\\ 0 & \rho_2^*\end{pmatrix},$$

$$\Phi_i[\vec{\theta}]=\frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{2}\frac{\tau_{ij}}{p_j'\left(\rho_j^*\right)\rho_j^*}\left(q_j^*+\pi_j\right)-\sum_{j=1}^{2}\frac{\tau_{ij}}{p_j'\left(\rho_j^*\right)\rho_j^*}H_j(\varphi_j),\ i=1,2, \tag{12}$$

$$H_j(\varphi_j)=p_j\left(\rho_j^*+\varphi_j\right)-p_j\left(\rho_j^*\right)-p_j'\left(\rho_j^*\right)\varphi_j,$$

$$\Psi_1[\vec{\theta}]=-g\tau_{12}\varphi_2-g\frac{1}{\rho_1^*}\sum_{j=1}^{2}\tau_{1j}\varphi_1\varphi_j+g\rho_1\Phi_1[\vec{\theta}]+(1-g)\tau_{11}\varphi_1,$$
$$\Psi_2[\vec{\theta}]=-g\tau_{21}\varphi_1-g\frac{1}{\rho_2^*}\sum_{j=1}^{2}\tau_{2j}\varphi_2\varphi_j+g\rho_2\Phi_2[\vec{\theta}]+(1-g)\tau_{22}\varphi_2. \tag{13}$$

Второй параграф посвящается исследованию корректности задачи о возмущениях (11), где доказана основная теорема.

Теорема 3. *Пусть поверхность Σ и векторные поля $\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условию 1. Тогда найдутся такие числа $\sigma^*>1$ и $\tau^*\in(0,1)$, что если матрица N выбрана из условия $\|I-N\|_{C^2(\Omega)}\le\tau^2,\tau\in(0,\tau^*]$, $p_j(\rho_j)\in C^3(0,\infty),j=1,2$, а параметры задачи таковы, что $\frac{1}{\Lambda}\le\tau^2$, $\mathrm{Re}\le\tau^2$, $a\le\tau^2$, $|\tau_{12}|\le\tau$, $|\tau_{21}|\le\tau$, $\tau_{ii}\ge\sigma^*,i=1,2$, $\tau\in(0,\tau^*]$, то задача (11) имеет решение $\vec{\theta}=(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)};\pi_1,\pi_2,\varphi_1,\varphi_2)$, m_i, $\zeta_i^{(j)},i,j=1,2$, такое, что $\vec{\theta}\in V^{s,r}\times X^{s,r}$, $m_i\in\mathbb{R}$, $\zeta_i^{(j)}\in X^{s,r}$, где показатели $s\in(0,1)$, $r\in(1,\infty)$ удовлетворяют условиям $s\cdot r>3$, $2s-\frac{3}{r}<1$. При этом вектор $\vec{\theta}$ принадлежит шару B_τ радиуса τ с центром в нуле пространства $V^{s,r}\times X^{s,r}$.*

Здесь $V^{s,r}$, $X^{s,r}$ обозначают пространства

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega),\ V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),$$

причем $W^{l,p}(\Omega)$ (l - целое неотрицательное число, $1 \le p < \infty$) - стандартное пространство С.Л. Соболева, состоящее из измеримых в Ω функций, имеющих обобщенные производные в Ω до порядка l включительно, суммируемые со степенью p. Для вещественных $s \in (0,1)$, $r \in (1,\infty)$ функциональное пространство $W^{s,r}(\Omega)$ получается методом вещественной интерполяции между $L^r(\Omega)$ и $W^{1,r}(\Omega)$ и состоит из измеримых функций с конечной нормой

$$\| u\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \| u\|_{L^r(\Omega)} + |u|_{s,r,\Omega},\ |u|_{s,r,\Omega} = \int\limits_{\Omega\times\Omega} |x-y|^{-3} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)^r dxdy.$$

В общем случае пространство $W^{l+s,r}(\Omega)$, $0 < s < 1$, $1 \le r < \infty$, $l \ge 0$ - целое число, определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{l+s,r}(\Omega)} = \|u\|_{W^{l,r}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Опишем и некоторые другие функциональные пространства, которые встретятся в дальнейшем тексте. Через $W_0^{s,r}(\Omega)$, $0 \le s \le 1$ обозначается замкнутое подпространство $W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, состоящее из всех функций $u \in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль вне области Ω. Для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ обозначим через $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ интерполяционное пространство $[W_0^{0,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)]_{s,r}$ с нормой, определенной методом вещественной интерполяции. Пусть $0 \le s \le 1$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Через $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ обозначим замыкание $L^r(\Omega)$ относительно нормы

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in \mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega) \\ \|u\|_{\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} = 1}} \left| \int\limits_\Omega u \cdot v dx \right|.$$

Как известно, пространство $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ топологически и алгебраически изоморфно Банахову пространству $\left(\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)\right)$, сопряженному $\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)$, и может быть отождествлено с ним.

Для любых $0 \le s \le 1$, $1 < r < \infty$, Банахово пространство $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ представляет собой замыкание $L^r(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)} = \|\mathcal{L}_v\|_{(W^{s,r'}(\Omega))'},$$

где $\mathcal{L}_v(u) =< v, u >= \int\limits_\Omega v(x) \cdot u(x)dx$ - непрерывный функционал на пространстве $W^{s,r'}(\Omega)$, непрерывно вложенном в $L^{r'}(\Omega)$. Известно, что если Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса C^1, то $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ алгебраически и топологически изоморфно двойственному пространству $(W^{s,r'}(\Omega))'$ и может быть отождествлено с ним. Для $s \in (0,1)$, $r \in (1,\infty)$ обозначим через $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_1$ и $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_0$ соотношение двойственности между парами пространств $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $W^{s,r}(\Omega)$ соответственно. Введем, кроме того, функциональные пространства

$$\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R},\ \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R},\ Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\cap L^2(\Omega),$$

$$\mathcal{E}^{s,r} = Z^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R},\ \mathcal{F}^{s,r} = V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R},$$

Принадлежность векторной величины $\vec{F}$ прямому произведению пространств $W_1 \times W_2 \times W_3$ следует понимать в том смысле, что $\vec{F}$ составлен из трех компонентов (векторных или скалярных), разделенных точкой с запятой $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$ и при этом $F_1 \in W_1$, $F_2 \in W_2$, $F_3 \in W_3$. Если $W_1 = W_2 = W_3 = W$, то пишем $\vec{F} \in W$ и компоненты вектора разделяем запятой.

Важнейшим этапом исследования задачи оптимизации формы является доказательство единственности решения задачи (11) и дифференцируемости ее решения относительно параметра ε. Для этого прежде всего необходимо исследовать зависимость этих решений от матрицы N, чему посвящается **третий параграф** второй главы. На данном этапе структура матрицы N не имеет значения и поэтому полученные ниже результаты справедливы для произвольной гладкой матричнозначной функции $N(x),\ x \in \Omega$.

Линейная задача для разности. Для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$,

$$\vec{q}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}; \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \zeta_{1i}^{(1)}, \zeta_{2i}^{(1)}, \zeta_{1i}^{(2)}, \zeta_{2i}^{(2)}; m_1^i, m_2^i), i = 0, 1,$$

решений задачи (11), построенных в теореме 3 и соответствующих различным матрицам $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$, введем обозначения

$$\begin{gathered}\vec{w}^{(j)} = \vec{v}_0^{(j)} - \vec{v}_1^{(j)},\ \omega_j = \pi_j^0 - \pi_j^1,\ \psi_j = \varphi_j^0 - \varphi_j^1,\ n_j = m_j^0 - m_j^1, \\ \xi_j^{(k)} = \zeta_{j0}^{(k)} - \zeta_{j1}^{(k)},\ k, j = 1, 2\end{gathered} \tag{14}$$

Из (11) следует, что вектор-функция

$$\vec{q}_0 - \vec{q}_1 = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$$

является решением следующей линейной задачи

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i = \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \\ + \mathrm{Re} \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i + (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})),\end{gathered} \tag{15a}$$

$$div \vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d, \tag{15b}$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^{2} \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{2} \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \text{ в } \Omega, \tag{15c}$$

$$-div(\vec{u}_0^{(i)} \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} = div(\vec{w}^{(i)} \zeta_{j1}^{(i)}) + \tau_{ji} d \text{ в } \Omega, \tag{15d}$$

$$\vec{w}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega,\ \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i,\ \omega_i = \Pi \omega_i,\ \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \tag{15e}$$

$$n_i = \sum_{k=1}^{2} \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^{2} (\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)}) \right] dx, i, j = 1, 2. \tag{15f}$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_k(\vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{w}; \mathbf{N}_k),\ \mathcal{B}_k(\rho, \vec{u}, \vec{w}) = \mathcal{B}(\rho, \vec{u}, \vec{w}; \mathbf{N}_k),\ \mathcal{S}_k(\vec{w}) = \mathcal{S}(\vec{w}; \mathbf{N}_k),\ k = 0, 1, \\ \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) = \mathcal{B}_0(\psi_i, \vec{u}_0^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{w}^{(i)}, \vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{w}^{(i)}), \\ \mathcal{E} = \mathcal{S}_0(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}) - \mathcal{S}_1(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}),\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \left(\mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)}) \right) + \mathrm{Re} \left(\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) - \mathcal{B}_1(\rho_i^1, \vec{u}_1^{(i)}, \vec{u}_1^{(i)}) \right), \\ d = g_0 - g_1,\ g_k = \sqrt{\det \mathbf{N}_k}.\end{gathered} \tag{17}$$

Символы χ_{ik}^0 обозначают элементы матрицы $(k(\mathbf{N}_0)I - A(\mathbf{N}_0, \vec{\theta}_0))^{-1}$. Коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i, \delta_i,\ \hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i,\ \tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\delta}_i, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (15b), (15c) и (15f) зависят от решений $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$ и рассматриваются как известные функции. При выполнении условий теоремы 3 имеют место оценки

$$\begin{gathered}\left\{ \|\alpha_{ij}\|_{X^{s,r}}, i \neq j, \|\beta_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\delta_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} \leq c\tau, \\ \left\{ \|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} \leq c\tau, \\ \{ \|\alpha_{ii}\|_{X^{s,r}}, \|\gamma_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\gamma}_i\|_{X^{s,r}} \} \leq c, \ i,j = 1,2, \end{gathered} \tag{18}$$

здесь параметр τ обозначает радиус шара в пространстве $V^{s,r} \times X^{s,r}$, которому принадлежат решения $\vec{\theta}_0$ и $\vec{\theta}_1$. Через c обозначена постоянная, зависящая только от области Ω, векторных полей $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$, и параметров r, s, τ_{11}, τ_{22}.

Сопряженная задача. Задача (15) для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ имеет ту особенность, что к уравнениям (15c), входящим в состав этой задачи непременимы известные результаты о транспортных уравнениях, в силу того, что слагаемое $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla\varphi_i^1$ не удовлетворяет нужным условиям гладкости (не является ни гладким, ни ограниченным). Однако из теоремы существования вытекает принадлежность слагаемых $\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla\varphi_i^1$ пространству $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, двойственному к $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и поэтому возникает возможность трактовать разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ как очень слабое решение задачи (15). В связи с этим сформулируем сопряженную задачу следующим образом.

Для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1,2$ найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы n_i^*, $i,j = 1,2$, такие, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} \mu_{ji} \left(\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* - \mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)}) \right) - \mathrm{Re}\mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ +(-1)^{i+1}\mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla\varphi_i^1 + \sum_{j=1}^{2} \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \end{gathered} \tag{19a}$$

$$div \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^{2} \left[\hat{\beta}_{ki}\psi_k^* + \sum_{j=1}^{2} (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj}\beta_{ji}\omega_k^*) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega, \tag{19b}$$

$$\begin{gathered}-div(\psi_i^* \vec{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii}\psi_i^* = \mathrm{Re}\mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)}) + \\ + \sum_{k=1}^{2} \left[\hat{\alpha}_{ki}\psi_k^* + \sum_{j=1}^{2} (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj}\alpha_{ji}\omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \end{gathered} \tag{19c}$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii}\xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^{2} n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \tag{19d}$$

$$n_i^* = \int_\Omega \left(\gamma_i \sum_{j=1}^{2} \mu_{ji}\omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, \tag{19e}$$

$$\vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \Pi\omega_i^* = \omega_i^*, i,j = 1,2. \tag{19f}$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{M}_i$ определены формулами

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_i(\vec{h}) = \rho_i^1 \nabla(\mathbf{N}_0^{-1}\vec{u}_0^{(i)})\mathbf{N}_0^{-1}\vec{h} - (\mathbf{N}_0^T)^{-1} div(\rho_i^1 \vec{u}_1^{(i)} \otimes (\mathbf{N}_0^{-1}\vec{h})), \\ \mathcal{M}_i(\vec{h}) = (\vec{u}_0^{(i)} \ \nabla(\mathbf{N}_0^{-1}\vec{u}_0^{(i)})) \cdot \mathbf{N}_0^{-1}\vec{h}, i = 1,2. \end{gathered} \tag{20}$$

Дальнейшее содержание этого параграфа посвящается доказательству существования и единственности сильных и слабых решений сопряженной задачи (19). Эти результаты позволяют вывести оценки норм разностей $\vec{w}^{(i)}$, ω_i, $\psi_i, \xi_i^{(j)}, n_i$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда найдутся числа* c, σ_c *и* τ_c, *зависящие от данных задачи и параметров* s, r *такие, что если* $min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} > \sigma_c$ *и* $0 < \tau \le \tau_c$, *то для каждой вектор функции* $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, *задача (19) имеет единственное решение* $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, *удовлетворяющее неравенству* $\|\vec{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \le c\|\vec{f}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}$. *Если наложить более ограничительное условие на правую часть* $\vec{f}$, *а именно* $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$, *то решение* $\vec{h}$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}^{s,r}$ *и при этом имеет место неравенство* $\|\vec{h}\|_{\mathcal{F}^{s,r}} \le c\|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}$.

Оценки разностей. Из теоремы 4 следует, что разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ является очень слабым решением линейной задачи (15) и при этом имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\Big(\|\vec{w}^{(i)}\|_{\mathcal{W}_0^{1-s,r'}} + \|\psi_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\omega_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\xi_1^{(i)}\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + \|\xi_2^{(i)}\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}} + |n_i|\Big) \le \\ \le c\left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)}\right)\end{gathered} \tag{21}$$

где постоянная c зависит от данных задачи и параметров r, s. Из неравенства (21) вытекает, что отображение, сопоставляющее матричнозначной функции $\mathbf{N}$ решение $\vec{q}$ неоднородной краевой задачи (11) является липшицевым в слабой норме.

Четвертый параграф второй главы содержит доказательство теоремы единственности и доказательство относительной компактности совокупности решений задачи о возмущениях.

Теорема 5. *Предположим, что поверхность* Σ *заданные векторные поля* $\vec{U}^{(1)}$, $\vec{U}^{(2)}$ *удовлетворяют условиям 1. Кроме того, для чисел* r *и* s*выполнены неравенства* $1/2 < s < 1, \quad r < \infty, \quad 2s - 3r^{-1} < 1, \quad sr > 3, \quad (1-s)\,r > 3$. *Тогда существует такое положительное число* $\sigma_* > 1$, *зависящее от* Ω, $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$, r, s, *что для любых* $\tau_{11} \ge \sigma_*$, $\tau_{22} \ge \sigma_*$ *найдутся такие положительные числа* $\tau_*(\tau_{11}, \tau_{22})$ *и* c, *зависящие от* Ω, $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$, r, s, τ_{11}, τ_{22}, *что если*

$$\tau \in (0, \tau_*] \;\; a, \Lambda^{-1}, Re \in \left(0, \tau^2\right], \quad \tau_{12}, \tau_{21} \in (0, \tau]\,, \quad \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \le \tau^2,$$

то задача (11) *имеет единственное решение* $\vec{\theta} = \left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2\right) \in B_\tau$, $\vec{\zeta} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}) \in X^{s,r}$, $\vec{m} = (m_1, m_2) \in R^2$. *Совокупность решений* $\left(\vec{\theta}, \vec{\zeta}, \vec{m}\right)$ *задачи* (11), *соответствующих всем матричнозначным функциям* $\mathbf{N}$ *из шара* $B\left(\tau^2\right) = \left\{\mathbf{N} : \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \le \tau^2\right\}$, *является относительно компактным подмножеством* $W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}^2$.

В **третьей** главе приводится исследование дифференцируемости по области функционала сопротивления и решений краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей.

Доказательство дифференцируемости по области существенным образом использует понятие так называемых материальных производных решения задачи (11), постановке задачи для которых посвящается **первый** параграф третьей главы. Решение $\vec{q} = (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}; m_1, m_2)$ задачи (11) зависит от матрицы $\mathbf{N}(\varepsilon) = \mathrm{g}(\varepsilon)\left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T}\right)^{-1}$, $\mathrm{g}(\varepsilon) = \det\left(\mathbf{I} + \varepsilon D\vec{T}\right)$ и поэтому может рассматриваться как функция параметра ε со значениями в пространстве функций от x. Материальная производная $\vec{q}\,'(0) = \left(\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2\right)$

решения

$\vec{q}(\varepsilon)=(\vec{v}^{(1)}(\varepsilon),\vec{v}^{(2)}(\varepsilon);\pi_1(\varepsilon),\pi_2(\varepsilon),\varphi_1(\varepsilon),\varphi_2(\varepsilon),\zeta_1^{(1)}(\varepsilon),\zeta_2^{(1)}(\varepsilon),\zeta_1^{(2)}(\varepsilon),\zeta_2^{(2)}(\varepsilon);m_1(\varepsilon),m_2(\varepsilon))$

задачи (11) при $\varepsilon=0$ определяются следующим образом

$$\vec{w}^{(j)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\vec{w}_\varepsilon^{(j)},\ \omega_j=\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{j\varepsilon},\ \psi_j=\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_{j\varepsilon},\xi_j^{(i)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_{j\varepsilon}^{(i)},\ n_j=\lim_{\varepsilon\to 0}n_{j\varepsilon},\tag{22}$$

$$\vec{w}_\varepsilon^{(j)}=-\varepsilon^{-1}\left(\vec{v}^{(j)}(0)-\vec{v}^{(j)}(\varepsilon)\right),\ \ \omega_{j\varepsilon}=-\varepsilon^{-1}\left(\pi_j(0)-\pi_j(\varepsilon)\right),$$
$$\psi_{j\varepsilon}=-\varepsilon^{-1}\left(\varphi_j(0)-\varphi_j(\varepsilon)\right),\xi_{j\varepsilon}^{(i)}=-\varepsilon^{-1}(\zeta_j^{(i)}(0)-\zeta_j^{(i)}(\varepsilon)),\ n_{j\varepsilon}=-\varepsilon^{-1}\left(m_j(0)-m_j(\varepsilon)\right).$$

при условии, что пределы в (22) существуют в некотором смысле.

Формулировке основного результата о существовании материальных производных предпошлем небольшое замечание технического характера

Лемма 6. *Существуют числа $\varepsilon_1>0$ и c, c_1, зависящие от $\left\|\vec{T}\right\|_{C^2(\Omega)}$ такие, что для любого $\varepsilon\in[0;\varepsilon_1]$ имеют место представления*

$$N\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}=I\pm\varepsilon\mathbb{D}+\varepsilon^2\mathbb{D}^{\pm},\mathrm{g}\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}=1\pm\varepsilon div\vec{T}+\varepsilon^2\mathrm{g}^{\pm}\tag{23}$$

где $\mathbb{D}=div\vec{T}\ I-D\vec{T}$ и $\|\mathbb{D}^{\pm}\|_{C^2(\Omega)}+\|g^{\pm}\|\le c$, и отклонения $N\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}-I$, $g\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}-1$ удовлетворяют неравенству $\left\|N\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}-I\right\|_{C^2(\Omega)}+\left\|g\left(\varepsilon\right)^{\pm 1}-1\right\|_{C^2(\Omega)}\le c_1\varepsilon$

Уравнения для материальных производных могут быть легко получены формально подстановкой $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и $\vec{q}(\varepsilon)$ в виде (23) в уравнения (11) и дифференцированием результата по ε в нуле. Эта формальная процедура дает следующую систему уравнений и краевых условий для материальных производных.

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{w}^{(j)}-\nabla\omega_i=\mathfrak{L}^*\left(\psi_i,\vec{w}^{(i)}\right)+\mathcal{D}_i^*+(-1)^i\left(\mathcal{E}^*+a\left(\vec{w}^{(2)}-\vec{w}^{(1)}\right)\right)\ \text{ в }\Omega,\\
div\vec{w}^{(i)}=\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^*\psi_j+\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}^*\omega_j+\gamma_i^*n_i+\delta_i^*d^*\ \text{в }\Omega,\\
\vec{u}^{(i)}(0)\cdot\nabla\psi_i+\tau_{ii}\psi_i=-\vec{w}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i(0)+\sum_{j=1}^{2}\hat{\alpha}_{ij}^*\psi_j+\sum_{j=1}^{2}\hat{\beta}_{ij}^*\omega_j+\hat{\gamma}_i^*n_i+\hat{\delta}_i^*d^*\ \text{в }\Omega,\\
-div\left(\vec{u}^{(i)}(0)\xi_j^{(i)}\right)+\tau_{ii}\xi_j^{(i)}=div\left(\vec{w}^{(i)}\zeta_j^{(i)}(0)\right)+\tau_{ji}d^*\ \text{в }\ \Omega,\\
\vec{w}^{(i)}=0\text{ на }\partial\Omega,\quad \psi_i=0\text{ на }\Sigma_{in}^i,\quad \omega_i=\Pi\omega_i,\quad \xi_j^{(i)}=0\text{ на }\Sigma_{out}^i,\\
n_i=\sum_{k=1}^{2}\chi_{ik}^0\int\limits_\Omega\left[\tilde{\delta}_k^*d^*+\sum_{j=1}^{2}\left(\tilde{\alpha}_{kj}^*\psi_j+\tilde{\beta}_{kj}^*\omega_j+\tilde{\gamma}_{kj}^*\xi_j^{(k)}\right)\right]dx,\ i,j=1,2.
\end{gathered}\tag{24}$$

В записи данных уравнений используются обозначения

$$\begin{gathered}
\vec{u}^{(i)}(0)=\vec{u}_*^{(i)}+\vec{v}^{(i)}(0),\ \rho_i(0)=\rho_i^*+\varphi_i(0);\\
\mathcal{D}_i^*=-Re\rho_i(0)\left(\vec{u}^{(i)}(0)\cdot\nabla\left(\mathbb{D}\vec{u}^{(i)}(0)\right)+\mathbb{D}^{\mathbb{T}}\vec{u}^{(i)}(0)\cdot\nabla\vec{u}^{(i)}(0)\right)+\\
+\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\left(div\left(\mathbb{T}\nabla\vec{u}^{(i)}(0)\right)+\mathbb{D}^{\mathbb{T}}\Delta\vec{u}^{(i)}(0)+\Delta\left(\mathbb{D}\vec{u}^{(i)}(0)\right)\right);
\end{gathered}\tag{25}$$

$$\mathfrak{L}^*\left(\psi_i,\vec{w}^{(i)}\right)=Re\left(\psi_i\vec{u}^{(i)}(0)\cdot\nabla\vec{u}^{(i)}(0)+\rho_i(0)\vec{w}^{(i)}\cdot\nabla\vec{u}^{(i)}(0)+\rho_i\vec{u}^{(i)}(0)\cdot\nabla\vec{w}^{(i)}\right);$$
$$\mathcal{E}^*=a\mathbb{T}\left(\vec{u}^{(2)}(0)-\vec{u}^{(1)}(0)\right);\ d^*=div\vec{T};\ \mathbb{D}=div\vec{T}I-D\vec{T};\ \mathbb{T}=div\vec{T}I-D\vec{T}-\left(D\vec{T}\right)^T.$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}^*,\beta_{ij}^*,\gamma_i^*,\delta_i^*,\hat{\alpha}_{ij}^*,\hat{\beta}_{ij}^*,\hat{\gamma}_i^*,\hat{\delta}_i^*,\tilde{\alpha}_{ij}^*,\tilde{\beta}_{ij}^*,\tilde{\gamma}_{ij}^*,\tilde{\delta}_i^*,i,j=1,2$, в правых частях уравнений (24) зависят от решения задачи (11), соответствующего $\varepsilon=0$.

Для доказательства разрешимости задачи (24) вводится в рассмотрение сопряженная задача в следующей постановке: для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант s_i, $i = 1, 2$, найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы n_i^*, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{2} \mu_{ji} \left(\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* \right) - Re \mathcal{H}_i^* \left(\vec{w}_*^{(j)} \right) + (-1)^{i+1} a \left(\vec{w}_*^{(2)} - \vec{w}_*^{(1)} \right) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \zeta_j^{(i)}(0) \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \vec{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \tag{26a}$$

$$div \vec{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^{2} \left[\hat{\beta}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^{2} \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji}^* + \mu_{kj} \beta_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{w}_*^{(j)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i = 1, 2;$$

$$-div \left(\psi_i^* \vec{u}^{(i)}(0) \right) + \tau_{ii} \psi_i^* = Re \mathcal{M}_i^* \left(\vec{w}_*^{(j)} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \left[\hat{\alpha}_{ki}^* \psi_k^* + \sum_{j=1}^{2} \left(n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji}^* + \mu_{kj} \alpha_{ji}^* \omega_k^* \right) \right] + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2; \tag{26b}$$

$$\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij}^* \sum_{k=1}^{2} n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2; \tag{26c}$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i^* \sum_{j=1}^{2} \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i^* \psi_i^* \right) dx + s_i, i = 1, 2; \tag{26d}$$

где $\mathcal{H}_i^*(\vec{h}) = \rho_i(0) \nabla \left(\vec{u}^{(i)}(0) \right) \vec{h} - div \left(\rho_i(0) \vec{u}^{(i)}(0) \otimes \vec{h} \right), \mathcal{M}_i^*(\vec{h}) = \left(\vec{u}^{(i)}(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \right) \cdot \vec{h}$.

В первом параграфе третьей главы доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для каждой вектор функции* $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, *задача* (26) *имеет единственное решение* $\vec{h}_* = \left(\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)} \right)$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$.

Содержание **второго** параграфа третьей главы составляет доказательство следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 4,*

$$\varepsilon \in [0; \varepsilon_*], \text{ где } \varepsilon_* = \min \left\{ c_1^{-1} \tau^2, \varepsilon_1 \right\}.$$

Здесь константы c_1 и ε_1, выбраны в соответствии с леммой 6. Тогда существует такой $\vec{h} = (\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)} = \left(\vec{w}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}; n_i \right) \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega) \times \mathbb{R}$ *что* $\vec{w}_\varepsilon^{(i)} \to \vec{w}^{(i)}$ *слабо в* $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\left(\omega_{i\varepsilon}, \psi_{i\varepsilon}, \xi_{i\varepsilon}^{(1)}, \xi_{i\varepsilon}^{(2)} \right) \to \left(\omega_i, \psi_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)} \right)$ *слабо в* $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $i = 1, 2$, $n_{i\varepsilon} \to n_i$ *в* $\mathbb{R}$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Кроме того, для любых* $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, *выполнено тождество*

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ \left\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \right\rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \left\langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \right\rangle_0 + \left\langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \right\rangle_0 + n_i \mathrm{s}_i \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left\{ \vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i^* + (-1)^i \mathcal{E}^*) + d^* \left(\hat{\delta}_i^* \psi_i^* + \sum_{j=1}^{2} (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j^* + \mu_{ij} \delta_j^* \omega_i^*) \right) \right\} dx,$$

Здесь $\vec{h}_* = \left(\vec{h}_*^{(1)}, \vec{h}_*^{(2)} \right)$, $\vec{h}_*^{(i)} = (\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$ *- решение задачи* (26), *заданное леммой 7;* $\mathcal{D}_i^*$, $\mathcal{E}^*$ *и* d^* *определены формулами* (25).

Заключительный **третий** параграф третьей главы посвящается производной по области функционала сопротивления. В п.3.1 этого параграфа устанавливется связь материальной производной и производной по области. В п.3.2 получены результаты о формуле представления производной по области функционала сопротивления. Более подробно получены следующие результаты.

Сила сопротивления набегающему потоку со стороны препятствия S_ε выражается посредством формулы

$$J_D(S_\varepsilon) = -\vec{U}^\infty \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial S_\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{2} \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(\mathrm{j})} + \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(\mathrm{j})} \right)^T \right) + \lambda_{ij} div \vec{u}_\varepsilon^{(\mathrm{j})} I \right] - \frac{Re}{Ma^2} p_i\left(\rho_\varepsilon\right) I \right) \cdot \vec{n} ds \tag{27}$$

а так же может быть представлена в виде $J\left(\Omega_\varepsilon\right) = \sum\limits_{i=1}^{2} \left(\vec{U}_\infty \cdot J_1^i\left(\Omega_\varepsilon\right) + \vec{U}_\infty \cdot J_2^i\left(\Omega_\varepsilon\right) \right)$, где $\vec{U}^\infty$ - постоянный вектор, имитирующий скорость потока на «бесконечности»; $J_1^i\left(\Omega_\varepsilon\right) = -\int\limits_{\Omega} Re\ \eta \rho_i(\varepsilon) \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \nabla \left(\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(i)}(\varepsilon) \right) dx$;

$$J_2^i\left(\Omega_\varepsilon\right) = \int\limits_{\Omega} q_i(\varepsilon) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx - \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} g(\varepsilon)^{-1} \left(\mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \left(\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon) \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \nabla \left(\mathbf{N}(\varepsilon)^{-1} \vec{u}^{(j)}(\varepsilon) \right)^T \mathbf{N}(\varepsilon) - div \left(\vec{u}^{(j)}(\varepsilon) \right) \mathbf{I} \right) \right) \mathbf{N}(\varepsilon)^T \nabla \eta dx;$$

η - произвольная гладкая функция, тождественно равная 1 в окрестности препятствия S и тождественно равная нулю в окрестности границы Σ; $\vec{u}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}(\varepsilon)$, $q_i(\varepsilon) = q_i^* + \pi_i(\varepsilon) + \Lambda \cdot p_i\left(\rho_i^*\right) + \sum_{j=1}^{2} (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j(\varepsilon)$, $\rho_i(\varepsilon) = \rho_i^* + \varphi_i(\varepsilon), i = 1, 2$.

В разделе 3.2 получена явная формула для производной

$$dJ(\Omega)\left[\vec{T}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J\left(\Omega_\varepsilon\right) - J(\Omega) \right)$$

показывающая, что

$$dJ(\Omega)\left[\vec{T}\right] = L_u\left(\vec{T}\right) + L_e\left(\vec{T}\right).$$

где геометрическая часть L_e - это интеграл по области Ω от линейной формы от $\vec{T}$, коэффициенты которой определяются решенем задачи (11) в невозмущенной области (переменные состояния). Следовательно, L_e нетрудно вычислить для всех гладких $\vec{T}$. Динамическая часть L_u, напротив, зависит от $\vec{T}$ неявно. Чтобы вычислить L_u следует найти очень слабое решение задачи (24), зависящее от $\vec{T}$ неявным образом. Если потребуется найти L_u для другого векторного поля $\vec{T}$, то придется повторить все вычисления. Однако ситуация может быть радикально улучшена, если выразить L_u через так называемое сопряженное состояние (решение задачи (26), соответствующее правой части $\left(\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i \right) = \left(\vec{B}^{(i)}, A, C_i, 0, 0, 0 \right), i = 1, 2$, где $\vec{B}^{(i)} = \left(\mu_{1i} + \mu_{2i} \right) \Delta \eta \vec{U}_\infty + Re\ \rho_i(0) \left(\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \eta \right) \cdot \vec{U}_\infty - Re \rho_i(0) \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \cdot \vec{U}_\infty \eta,\ A = \nabla \eta \cdot \vec{U}_\infty$, $C_i = -Re \eta \left(\vec{u}^{(i)}(0) \cdot \nabla \vec{u}^{(i)}(0) \right) \cdot \vec{U}_\infty)$

В заключительном разделе 3.3 третьего параграфа показано, что L_u можно представить как интеграл от линейной формы от $\vec{T}$ с коэффициентами, зависящими только от переменных состояния и сопряженного состояния.

Автор диссертации благодарен своему научному руководителю - профессору, доктору физико-математических наук Н.А. Кучеру, а также члену-корреспонденту РАН П.И. Плотникову за постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации научных изданиях, рекомендованных ВАК

1. Кучер, Н. А. О корректности стационарной задачи обтекания препятствия потоком смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Вестник Кемеровского государственного университета. – Т. 3. – № 4 (60). – 2014. – С. 47 – 53.

2. Жалнина, А. А. О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина, Н. А. Кучер // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 18. – № 3. – 2015. – С. 26 – 39.

3. Zhalnina, A. A. On the Well-Posedness of an Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Equations of Mixtures of Viscous Compressible Fluids / A. A. Zhalnina, N. A. Kucher // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – V. 9. – №4. – 2015. – P. 598 – 610.

4. Жалнина, А. А. Влияние формы области на решение задачи об обтекании препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – № 5(43). – 2016. – С. 5 – 20.

5. Жалнина, А. А. Зависимость от области решений краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина, Н. А. Кучер // Сибирский журнал индустриальной математики. – Т. 20. – № 1(69). – 2017. – С.41–52.

6. Zhalnina, A. A. Domain dependence of solutions to the boundary value problem for equations of mixtures of compressible viscous fluids / A. A. Zhalnina, N. A. Kucher // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – V. 11. – №1. – 2017. – P. 145 – 155.

Прочие публикации

7. Кучер, Н. А, О корректности краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей в областях с подвижными границами / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. / НФИ «КемГУ»; под общ. Ред. Е.А. Вячкиной, В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2014. – 239 с. – С.106 – 113.

8. Жалнина, А. А. Оптимизация формы препятствия в потоке смеси вязких сжимаемых жидкостей. / А. А. Жалнина // Сборник материалов Всерос., научно-практической конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии», 16–17 окт. 2015 г., Кемерово [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева». – Кемерово: КузГТУ — 2015.

9. Жалнина, А. А. О разрешимости линейной краевой задачи, возникающей при оптимизации формы препятствия, обтекаемого потоком смеси вязких жидкостей / А. А. Жалнина // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Теоретический и практический взгляд на современное состояние науки». – Кемерово: КузГТУ — 2015. — С. 7 – 11.

10. Кучер, Н. А. Существование глобально определенных слабых решений уравнений движения смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. А. Жалнина // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования [Электронный ресурс] : материалы Международной научно-практической конференции, 26-28 апреля 2016 года / под общ. ред. Е. Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина. – Рязань, 2016 – С. 117 – 120.

11. Kucher, N. A. Shape differentiability of drag functional and boundary value problem solutions for fluid mixture equations / N. A. Kucher, A. A. Zhalnina // Science Evolution. – V. 2. – № 2. – 2016. – P. 41-56.