ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА СО РАН

На правах рукописи

УДК 536.46 534.2 662.612

Трилис Артем Валерьевич

Акустические колебания и устойчивость цилиндрического фронта горения в плоско-радиальной кольцевой камере сгорания

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. А. А. Васильев

НОВОСИБИРСК – 2017

Оглавление

Введение

Идея сжигания смеси в режиме детонации для создания двигателей, использующих энергию горения, появилась много лет назад. Вопрос о детонационном сжигании топлива впервые был теоретически рассмотрен в 1940 году Я. Б. Зельдовичем [1]. Он показал, что детонационное горение при одинаковых начальных состояниях более выгодно, чем дефлаграция, так как при детонации продукты имеют меньшую энтропию.

В настоящее время создание двигателей, основанных на детонационном сжигании топлива, является перспективным направлением. Поиски возможности применения детонации в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей и воздушно-реактивных двигателей ведутся в двух направлениях: *импульсные* и *непрерывные* детонационные двигатели. Непрерывное детонационное сжигание топлива имеет преимущество перед импульсным в силу отсутствия ограничений по времени наполнения камеры сгорания смесью, а также необходимости повторно выполнять инициирование детонации.

Непрерывное детонационное горение в покоящейся стационарной детонационной волне возможно в сверхзвуковом набегающем потоке горючей смеси, так как скорость детонации сверхзвуковая. Однако практическое осуществление сверхзвуковых течений горючих смесей сталкивается с определёнными техническими трудностями из-за высоких температур торможения потока, что приводит к воспламенению на стенках камеры сгорания. В первых экспериментальных исследованиях [2]-[7], посвящённых непрерывному детонационному горению, для предотвращения преждевременного воспламенения использовались очень бедные горючие смеси, а сжигание проводилось в стационарных скачках уплотнения, возникающих при выходе сверхзвуковой струи в атмосферу или перед тупым телом.

Профессор Б. В. Войцеховский был первым, кто предложил сжигать смесь в режиме непрерывной детонации с помощью *поперечных вращающихся волн* [8, 9]. Он использовал аналогию с процессом сжигания смеси в бегущей волне при спиновой (вращающейся) детонации в круглой трубе [10]-[12], где поперечная волна движется за передним ударным фронтом по спиральной траектории относительно трубы и сжигает ударно-сжатую смесь. Непрерывный детонационный процесс был назван Б. В. Войцеховским «стационарная спиновая детонация» или «непрерывная спиновая детонация». Термин «непрерывный» означает, что детонация, будучи однажды инициированной, не прекращается, пока подаются исходные топливные компоненты и отводятся продукты реакции. В настоящее время созданием двигателя со стационарно вращающимися поперечными детонационными волнами заняты двигателестроительные корпорации многих ведущих стран, поскольку двигатели на режиме традиционного горения практически исчерпали свой ресурс для увеличения тяговых характеристик.

Первая камера, в которой Б.В. Войцеховский реализовал непрерывный детонационный режим сжигания ацетиленкислородных смесей, представляла собой плоский кольцевой канал (рис. 1). Предварительно подготовленная горючая смесь подавалась из ресивера через внутреннюю узкую кольцевую щель, а продукты сжигания выбрасывались через более широкую наружную щель. Поперечная детонационная волна (ПДВ) распространялась внутри канала перпендикулярно натекаю-

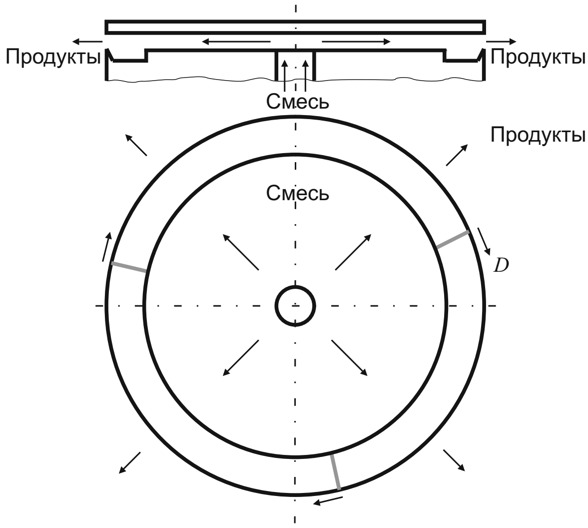


Рис. 1. Схема плоско-радиальной кольцевой камеры сгорания Б.В. Войцеховского [8, 9]

щей смеси. В этих экспериментах для фоторегистрации структуры ПДВ применялся эффективный метод компенсации скорости, когда скорость плёнки устанавливается по величине и направлению равной скорости перемещения изображения [10]-[12]. По результатам измерений было установлено, что скорости ПДВ в 2-3 раза больше скорости звука в горючей смеси и *приближаются к скорости звука в продуктах реакции.*

В.В. Михайлов и М.Е. Топчиян [13] продолжили исследования режима непрерывной детонации в плоско-радиальной кольцевой камере. Они также наблюдали *околозвуковые скорости* вращения (распространения) ПДВ. Работа не прояснила до конца структуру волны. Позднее Эдвардс [14] осуществил режим непрерывной спиновой детонации этилена в трубчатом кольцевом канале с выводом продуктов через кольцевую щель, но, в отличие от выше указанных исследователей, использовал раздельную подачу горючего и окислителя. Наблюдаемые скорости ПДВ *были близки к скорости звука в продуктах реакции.* Структура волн оптически не разрешалась. В своей работе Эдвардс также выдвинул гипотезу о связи между распространением ПДВ и акустической неустойчивостью дефлаграционного горения.

Исследования вращающихся ПДВ в плоско-радиальных кольцевых камерах сгорания выявили важную особенность - **скорость распространения редко достигает величины скорости идеальной детонации D_0 и чаще всего лежит в диапазоне от D_0 до скорости звука в продуктах c_d (для газовых горючих смесей $c_d \approx 0.55D_0$)**. Объяснения такому поведению до сих пор не существует. В силу этого такие ПДВ принято называть *квазидетонационными*.

Из экспериментов [8, 9, 13] следует, что на начальном этапе поджига горючей смеси в кольцевой камере реализуется дефлаграционное горение, и возникают неустойчивые колебания и окружные волны с малыми амплитудами, распространяющиеся (бегущие) вдоль кольцевого канала поперёк течения горючей смеси (см. рис. 1). С течением времени неустойчивости развиваются в вышеописанные квазидетонационные волны. Необходимо также отметить, что процессы, сходные с развитием и динамикой поперечных квазидетонационных волн, наблюдались при высокочастотной окружной неустойчивости горения в ЖРД с выходом на автоколебательный (вибрационный) режим [15]-[17]. При этом развитие неусточивостей всегда связано с акустическими характеристиками камер сгорания: структурой потока, геометрией, влиянием системы подачи топлива и др.

Целью настоящей диссертационной работы является моделирование и выявление особенностей начального (линейного) этапа развития вращающихся поперечных квазидетонационных волн с точки зрения исследований линейной модовой устойчивости цилиндрического фронта горения к окружным вращающимся волнам малой амплитуды в плоско-радиальной кольцевой камере сгорания. Работа содержит подходы и методы, помогающие описать начальный (линейный) этап развития автоколебательного горения в квазидетонационном режиме и помогающие понять физику появления поперечных квазидетонационных волн.

Известно, что одним из способов описания устойчивости горения является представление его поверхностью сильного разрыва, распространяющейся вдоль своей нормали с определённой скоростью. На поверхности должны выполняться условия, связывающие газодинамические параметры течения реагентов и продуктов горения и являющиеся следствием законов сохранения массы, импульса и энергии. Такой подход называется газодинамическим, который в литературе чаще называется гидродинамическим. Л. Д. Ландау был одним из первых, кто применил газодинамический подход для исследования устойчивости неограниченного ламинарного бесконечно тонкого плоского фронта горения в линейной постановке задачи. В своей работе [18] он показал, что такой фронт горения на линейной стадии развития возмущений абсолютно неустойчив. В работе [19] показано, что аналогичный вывод справедлив и для *ограниченного* стенками трубы бесконечно тонкого плоского фронта горения.

Кроме устойчивости горения, обсусловленной возмущениями (в частности, акустическими) газодинамических параметров потока реагентов и продуктов, также существует устойчивость горения с точки зрения диффузионно-тепловых процессов. В работах [20]-[22] показано, что такие процессы могут вносить стабилизирующие эффекты в изначально газодинамически неустойчивые пламена, рассматривавшиеся в выше упомянутых работах [18, 19]. Работа [23] посвящена обзору различных способов моделирования и расчёта динамики и устойчивости плоских фронтов горения, рассматриваемых как поверхность сильного разрыва при учёте процессов теплопроводности, диффузии, вязкости потоков, а также нелинейных стадий развития.

Как правило, учёт в расчётах нелинейной стадии и диффузионно-тепловых процессов, приводит к стационарной искривлённой ячеисто-складчатой и тюльпанообразной формам фронта горения. В работах [24]-[32] излагаются теоретические расчёты и экспериментальные результаты исследований появления и поведения ячеистых и тюльпанообразных фронтов при распространении горения в прямых каналах. В работе [31] проведено численное моделирование ячеистой и тюльпанообразной конфигурации фронта горения при числах Льюиса и Прандтля, равных единице; определена структура течения вблизи фронта горения и его тепловая структура; показано, что ячеистая конфигурация формируется при наличии условия проскальзывания газа на стенках канала (нормальная составляющая скорости потока на стенках $V_n = 0$), а тюлпанообразная – при наличии условия прилипания газа к стенкам канала (скорость потока на стенках $\mathbf{V} = 0$). Монография Дж. Г. Маркштейна [33] содержит результаты различных экспериментальных наблюдений ячеистых и тюльпанообразных форм пламени и описания способов моделирования фронта горения как поверхности сильного разрыва. В книге также описан подход Маркштейна, который первым предложил грубо учитывать тепловую структуру пламени через зависимость локальной скорости горения от локальной кривизны фронта.

Исследования устойчивости изначально неплоских расходящихся фронтов горения имеет свою специфику, связанную с тем, что у них в отличие от плоского пламени непрерывно увеличивается поверхность горения. Это, в свою очередь, приводит к тому, что возмущения могут возрастать медленнее, чем увеличивается сам фронт горения. В работе [34] исследовалась устойчивость сферического расходящегося фронта горения в линейной гидродинамической постановке Л.Д. Ландау–Дж. Маркштейна. За критерий неустойчивости было взято возрастание со временем *отнесённой* к радиусу сферического фронта амплитуды возмущения поверхности горения. Это приводит к тому, что по отношению к первым сферическим гармоникам возмущений фронт горения оказывается устойчивым, потому что скорость роста этих гармоник оказывается меньше скорости распространения фронта горения. В работах [35] и [36] исследовались в слабонелинейной постановке задачи расходящиеся цилиндрические и сферические фронты горения, соответственно. В предположении близкого к единице отношения плотностей горючей смеси и продуктов, $E = \rho_1/\rho_2$, было получено нелинейное уравнение эволюции фронта, выявлена складчатая (ячеистая) структура поверхности фронта горения и показано, что расходящиеся цилиндрические и сферические фронты имеют свойство самоускоряться, что находится в согласии с экспериментальными наблюдениями. В работе [37] при аналогичных предположениях работы [35] было показано, что средняя скорость распространения расходящегося цилиндрического фронта горения, сначала растёт со временем, достигает максимума и в дальнейшем уменьшается, асимптотически приближаясь к скорости невозмущённого цилиндрического фронта. Также было показано, что с увеличением скорости растёт количество складок на возмущённом фронте горения.

В настоящей работе для ответа на вопрос о скорости вращения поперечных квазидетонационных волн на начальном (линейном) этапе их развития предлагается исследовать возможные акустические колебания и волны, а также линейную модовую устойчивость цилиндрического фронта горения в плоско-радиальной кольцевой камере сгорания. Скорость горения направлена навстречу стационарному радиально расходящемуся из центра потоку (см. рис. 1) так, что фронт горения покоится в лабораторной системе отсчёта. Не вдаваясь в детали тепловых и диффузионных процессов, фронт рассматривается как поверхность сильного разрыва газодинамических параметров, на которой выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии, а также условие дефлаграции Чепмена-Жуге в приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции. Ширина зоны горения считается много меньшей, чем длины волн акустических возмущений. В силу этого в приближении длинных волн фронт горения рассматривается как бесконечно тонкая поверхность. Основными задачами диссертационной работы являются:

- При пренебрежении скоростью радиально расходящегося потока исследовать акустические свойства двух слоёв газов с разными температурами и их границы раздела, возникающих при горении в кольцевом канале;

- При учёте радиально расходящегося потока получить систему граничных условий на фронте горения, связывающую возмущения потока свежей смеси и продуктов горения;

- Исследовать механику акустических колебаний и волн системы «поток горючей смеси-фронт горения-поток продуктов» в кольцевом канале;

- Исследовать модовую устойчивость цилиндрического фронта горения;

- Исследовать механику поверхностных вращающихся окружных волн возмущения фронта горения, возникающих на начальном этапе поджига горючей смеси в кольцевой камере, получить скорости вращения этих волн;

- Сравнить скорости вращения поперечных окружных волн возмущения фронта горения со скоростями звука в горючей смеси и продуктах горения;

- Исследовать поведение скоростей вращения поверхностных волн и скоростей роста (инкрементов) амплитуд неустойчивых мод при изменении параметров стационарного радиально расходящегося потока горючей смеси и изменения положения фронта горения в кольцевом канале.

Для достижения сформулированных целей в диссертационной работе использованы следующие подходы и методы. В первом приближении на начальном этапе поджига предлагается пренебречь дозвуковым радиально расходящимся потоком в кольцевой камере. В этом случае исследуются акустические свойства двух слоев неравномерно нагретых газов (горючая смесь и продукты) и их границы раздела, моделирующей фронт горения в кольцевом канале. Установившиеся акустические волновые процессы в слоях описываются уравнениями Гельмгольца с соответствующими физической постановке задачи краевыми условиями на передней и задней стенках канала. На границе раздела слоёв ставятся условия «сшивания», представляющие собой условия равенства нормальных составляющих к границе возмущений скоростей и равенства возмущений давления. На втором этапе рассматриваются акустические колебания и модовая устойчивость цилиндрического фронта горения в дозвуковом радиально расходящемся потоке горючей смеси. На фронте горения из общих законов сохранения массы, импульса и энергии выводится система граничных условий, которая связывает параметры акустических возмущений перед и за фронтом. При выводе системы условий используется полученная в приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции зависимость скорости дефлаграционного горения Чепмена-Жуге от температуры горючей смеси. Из уравнений акустики движущейся неоднородной среды, в предположении малых чисел Маха стационарного потока, выводятся уравнения, описывающие поведение акустических (малых) возмущений. Задача решается методом разделения переменных. В результате решения находятся квазисобственные частоты и моды колебаний и волн, вычисляются скорости вращения окружных волн на поверхности горения.

Диссертация содержит 94 страницы, 27 рисунков. Библиографический список состоит из 58 работ.

Результаты, полученные в диссертационной работе, постоянно докладывались и обсуждались на семинарах лаборатории гидроаэроупругости ИГиЛ СО РАН (2013-2014 гг.), на спецсеминарах «Волны в неоднородных средах» кафедры гидродинамики Новосибирского государственного университета (2013-2017 гг.). На семинаре по физике и механике высокоэнергетических процессов ИГиЛ СО РАН (2017 г.). На конкурсе научных работ молодых учёных ИГиЛ СО РАН (2016 г.) диссертационная работа заняла первое место. Результаты работы также докладывались и обсуждались на научных конференциях:

1. 50 Международной научной студенческой конференции «Студент и научно технический прогресс» в г. Новосибирске, (2012 г.). Доклад отмечен дипломом III степени;

2. IX Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» в г. Новосибирске (2012 г.);

3. На II Всероссийской конференции «Полярная механика» в г. Санкт-Петербурге (2014 г.);

4. На 8 международном семинаре «Flame Structure 2014» в г. Берлине, ФРГ (2014 г.);

5. На Всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и но-

вые приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова в г. Новосибирске (2016 г.);

6. На X Всероссийской конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» в г. Новосибирске (2016 г.). Доклад отмечен дипломом I степени;

7. На XI Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» в п. Шерегеш Таштагольского р-на Кемеровской области (2017 г.);

8. На Международной конференции, посвящённой 60-летию ИГиЛ СО РАН, в г. Новосибирске (2017 г.);

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [38]–[46].

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. А.А. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе. Автор также выражает благодарности д.ф.-м.н. С.В. Сухинину и к.ф.-м.н. В.С. Юрковскому за оказанную помощь в работе.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Каждая глава разделена на параграфы. Нумерация формул в диссертации двухиндексная, первое число – номер главы, в котором приведена формула, второе – порядковый номер в данной главе.

Во введении обоснована актуальность работы, изложены основные идеи и методы, используемые в диссертации, дано краткое описание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию зависимости скорости дефлаграции от термодинамических параметров горючей смеси.

Параграф 1.1 содержит краткое описание основ классической теории детонации и горения.

Параграф 1.2 содержит основные идеи и методы классической теории, позволяющие получить зависимость скорости горения от начальной температуры.

В параграфе 1.3 рассматривается горение реальных смесей в приближении химического равновесия реагентов и продуктов. Рассмотрены зависимости скорости горения реальных смесей от давления и температуры реагентов для топливно–воздушных и топливно–кислородных смесей. Построены поверхности скоростей горения, показана непрерывная зависимость скорости горения от начальных параметров.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию акустических свойств слоёв неравномерно нагретых газов в кольцевом канале, возникающих при горении.

Параграф 2.1 содержит математическую постановку двухмерной задачи. В нем приведены уравнения и краевые условия, метод решения. Показано существование вращающихся окружных волн на границе раздела слоёв, приведены рассчитанные числовые значения скоростей вращения для различных мод колебаний и волн. Проведён анализ зависимостей скоростей вращения окружных волн возмущения границы раздела слоёв от положения границы раздела в кольцевом канале. Выполнено сравнение с экспериментальными данными по скоростям вращения поперечных квазидетонационных волн в кольцевой камере.

В параграфе 2.2 описана математическая постановка, краевые условия и метод решения трёхмерной задачи. Построены трёхмерные поверхности возмущённой границы раздела горячего и холодного слоёв газов.

Третья глава посвящена исследованиям модовой устойчивости цилиндрического фронта горения в радиально расходящемся потоке с малым числом Маха.

Параграф 3.1 содержит описание горения в стационарном радиально расходящемся потоке.

В параграфе 3.2 приведён вывод уравнений и условий на фронте горения для малых возмущений стационарного потока и фронта горения.

В параграфе 3.3 приведена полная постановка задачи и граничных условий для возмущений стационарного горения при малых числах Маха радиально расходящегося потока. Выявлены и описаны основные свойства возникающих математических моделей модовой устойчивости цилиндрического фронта горения в кольцевой камере.

Параграфе 3.4 содержит пример расчёта малых возмущений горения в конкретной кольцевой камере. Проведены исследования модовой устойчивости цилиндрического фронта горения при различных граничных условиях на начальной границе радиального потока (различное устройство системы подачи горючей смеси). Вычислены скорости вращения поперечных окружных волн возмущения фронта горения и проведено сравнение с экспериментально наблюдаемыми скоростями вращения поперечных квазидетонационных волн. Проведён анализ зависимости скоростей вращения окружных волн от начальной скорости стационарного радиального потока. Также проведён анализ зависимости скоростей роста по времени амплитуд возмущений у неустойчивых мод от начальной скорости стационарного радиального потока и от дискретных номеров мод.

В заключении сформулированы основные выводы.

Глава 1

Зависимость скорости дефлаграционного горения от температуры и давления горючей смеси

Зависимость скорости горения от давления и температуры является определяющей в задаче об ускорении пламени и перехода горения в детонацию. На данный момент недостаточно достоверных экспериментальных данных о скоростях горения в зависимости от давления и температуры, особенно необходимых для моделирования динамики перехода горения в детонацию и других промежуточных режимов типа квазидетонационных волн. Физические причины ускорения низкоскоростного ламинарного пламени до высоких трансзвуковых скоростей вплоть до перехода горения в детонацию (ПГД) остаются до сих пор дискуссионными. Развитие моделей турбулентности, как одного из важнейших механизмов ускорения пламени, идет по пути учета новых факторов и усложнения процедур усреднения, однако вплоть до настоящего времени использование подобных моделей для описания ПГД дает лишь качественное согласие с экспериментальными данными.

Нормальная скорость ламинарного горения определяется процессами диффузии и теплопроводности и для корректного их моделирования необходимо иметь информацию о зависимости этих коэффициентов от параметров среды, постоянно меняющихся в процессе ускорения пламени. Очевидно, что для корректного математического моделирования процесса ускорения пламени после его воспламенения необходимы не только физически обоснованные модели турбулизации течения, но и корректные в широком диапазоне изменения основных газодинамических параметров в зависимости от всех основных коэффициентов, определяющих развитие процесса.

До сих пор традиционно зависимость скорости пламени W от давления P и температуры T задается в виде эмпирического соотношения (с большой степенью неопределенности):

$$W = W_{00}(P/P_{00})^n(T/T_{00})^m \,, \tag{1.1}$$

где индексом 00 отмечены значения параметров при некотором стандартном состоянии, а показатели n и m определяются на основе экспериментальных данных.

Следует отметить, что в величинах экспериментальных значений скоростей пламени существует заметный разброс, обусловленный не только различными методиками определения нормальной скорости пламени: горелка Бунзена, распространение пламени в вертикальной трубе вниз или вверх по отношению к вектору земного тяготения $\mathbf{g}$, расширение сферического пламени в мыльном пузыре или бомбе постоянного объёма, горение во встречных потоках горючего и окислителя и т.д. Часто скорость нормального пламени W пересчитывается через видимую скорость пламени W_* с помощью соотношения:

$$W = W_*/\sigma \,, \tag{1.2}$$

где σ – степень расширения продуктов сгорания [47].

1.1 Классическая теория волновых процессов в горючих смесях

К задаче о функциональной зависимости скорости горения W от давления и температуры (формула типа (1.1)) можно подойти с точки зрения задачи о распространении волн горения и детонации в реагирующих системах, основанной на законах сохранения массы, импульса и энергии (например, [48, 49]):

$$\begin{gathered} \rho_0 D = \rho(D-u) \\ P_0 + \rho_0 D^2 = P + \rho(D-u)^2 \,. \\ I_0 + Q + D^2/2 = I + (D-u)^2/2 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь ρ – плотность смеси (удельный объем $V{=}1/\rho$), P – давление, D и u волновая и массовая скорости, I – энтальпия, Q – энерговыделение смеси.

В результате алгебраических преобразований из законов сохранения массы и импульса можно получить уравнение прямой Михельсона-Рэлея (ПМР), проходящей через точку начального состояния (P_0, V_0):

$$\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) = -\frac{\gamma_0 D^2}{c_0^2}\left(\frac{V}{V_0} - 1\right) \,, \tag{1.4}$$

а из уравнения энергии (в рамках модели идеального газа с независящей от температуры теплоёмкостью при постоянном объеме $I{=}\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{P}{\rho}$) адиабату продуктов реакции $P{=}f(V,Q)$ (адиабату энерговыделения (АЭ)):

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\dfrac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1} - \dfrac{V}{V_0} + \dfrac{2\gamma_0 Q}{c_0^2}}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{V}{V_0} - 1} \,, \tag{1.5}$$

представляющую собой гиперболу в плоскости (P, V), выпуклую в сторону начала координат. Показатели адиабаты для исходной смеси и продуктов реакции обозначены как γ_0 и γ соответственно, энерговыделение Q считается постоянным на АЭ в рамках идеализированной одностадийной модели, или является переменной величиной вдоль АЭ (функцией параметров системы) в рамках модели химического равновесия продуктов. На рис. 1.1 схематически изображены ПМР *3* и *4*, ударная адиабата *2* без энерговыделения, адиабата энерговыделения *1*, а также все характерные точки. На этой АЭ выделяют детонационную (при $P{>}P_0$ и $V{<}V_0$) и дефлаграционную (при $P{<}P_0$ и $V{>}V_0$) ветви. Поскольку точка O исход-

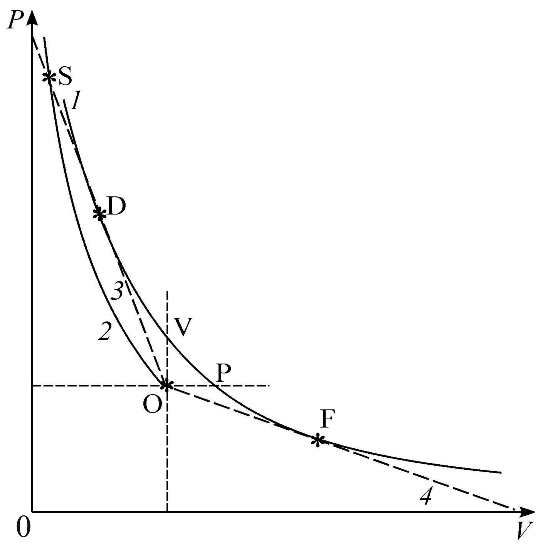


Рис. 1.1. Типичная диаграмма состояний исходной горючей смеси, продуктов реакции и её особые точки

ного состояния лежит вне гиперболы, то из этой точки можно провести прямолинейные секущие (как к детонационной, так и к дефлаграционной ветвям адиабаты энерговыделения) с двумя точками пересечения этой прямой с каждой ветвью адиабаты энерговыделения. Точки пересечения стягиваются в одну, когда секущая превращается в касательную (самоподдерживающаяся волна Чепмена-Жуге). Замечательной особенностью системы уравнений для описания волн горения и детонации является то, что скорости волн, соответствующие условию касания ПМР *3* и *4* к детонационной и дефлаграционной ветвям, не являются произвольными, а оказываются взаимосвязанными. Этот и позволяет получить зависимость скорости горения от давления и температуры, как будет видно из дальнейшего изложения.

1.2 Взгляд на горение со стороны детонации и зависимость скорости горения от давления и температуры

Рассмотрим детонационную волну (ДВ) относительно точки исходного состояния O (рис. 1.1). Ударная волна переводит газ из состояния O в состояние S, соответствующее химпику ДВ, затем начинается химическая реакция и после ее завершения продукты реакции попадают в точку D. Переход из S в D осуществляется вдоль прямой Михельсона, являющейся касательной к адиабате энерговыделения относительно исходного состояния O. Но прямая Михельсона из O в S одновременно является касательной к адиабате энерговыделения, проведенной из точки S как начальной [50]. Следует уточнить, что адиабаты энерговыделения, построенные относительно точек O и S, не совпадают друг с другом, сохраняется лишь условие и точка касания D. При этом изэнтропа в точке D касается снизу адиабаты энерговыделения, построенной относительно точки O, и касается сверху адиабаты, построенной относительно точки S. Иными словами, точка D соответствует как параметрам детонации относительно исходного состояния O, так и параметрам дефлаграционного горения с исходным состоянием в точке S. Отметим, что уже в классических работах (например, [48, 49]) высказывалась мысль о том, что детонация может быть представлена как горение за ударной волной.

Этот взгляд (со стороны детонации на горение) позволяет проанализировать изменение дефлаграционных скоростей в состояниях с различными начальными давлениями и температурами и даже получить аналитическую формулу для скорости дефлаграционного горения в зависимости от P_0 и T_0. В работе [51] состояние в химпике детонационной волны (ДВ) рассматривалось как исходное состояние для дефлаграционного горения в потоке горючей смеси за ударным фронтом ДВ в рамках модели идеального газа с постоянными Q и γ и была получена формула для оценки скорости горения в зависимости от исходных параметров смеси следующим образом.

Полагая показатели адиабаты γ разными для исходной смеси и в продуктах реакции, при совместном решении уравнений (1.4) и (1.5) можно получить координаты точек пересечения прямых Михельсона-Рэлея с адиабатой энерговыделения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\dfrac{\gamma}{\gamma_0}c_0^2 + \gamma D^2 \pm \sqrt{D^4 + f(\gamma, \gamma_0, Q)c_0^2 D^2 + \dfrac{\gamma^2}{\gamma_0^2}c_0^4}}{(\gamma+1)D^2}\,, \tag{1.6}$$

где $\sigma{=}V/V_0$, $c_0^2{=}\gamma_0 P_0/\rho_0$ – скорость звука в исходной горючей смеси, $f(\gamma_0, \gamma, Q)$ – громоздкий коэффициент, отвечающий за энерговыделение в смеси, который в дальнейшем обсуждении не потребуется. При $D > c_0$ получается секущая и две точки пересечения с детонационной ветвью АЭ ($P{>}P_0$, $V{<}V_0$), при $D < c_0$ – с дефлаграционной ветвью АЭ ($P{<}P_0$, $V{>}V_0$) (рис. 1.1). Две точки пересечения стягиваются в одну тогда и только тогда, когда подкоренное выражение в (1.6) равно нулю [48]:

$$D^4 + f(\gamma, \gamma_0, Q)c_0^2 D^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}c_0^4 = 0\,. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) и есть условие касания ПМР и АЭ (условие Чепмена-Жуге), которое замыкает систему уравнений (1.3) и позволяет вычислить все неизвестные газодинамические параметры как за самоподдерживающейся ДВ, так и за волной горения.

Решение уравнения (1.7) дает касательную *3* с точкой касания D и скоростью детонации Чепмена-Жуге $\pm D_{DO}$, а также касательную *4* с точкой касания F и скоростью самоподдерживающейся волны горения Чепмена-Жуге $\pm D_{FO}$ (рис. 1.1). Отметим, что уравнение (1.7) является биквадратным уравнением относительно скорости D, то есть для него справедлива формула Виета, согласно которой произведение квадратов корней уравнения равно свободному члену:

$$D_{DO}^2 D_{FO}^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} c_0^4$$

или

$$D_{DO} D_{FO} = \frac{\gamma}{\gamma_0} c_0^2 \,. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) является основным соотношением между самоподдерживающимися скоростями горения и детонации относительно исходного состояния в точке O. С его помощью можно получить зависимость скорости горения от давления и температуры.

Для состояния S скорость газа относительно фронта ударной волны представляет собой скорость дефлаграции, потому можно написать

$$(D_{DO} - u_S) = D_{FS} = \rho_0 D_{DO}/\rho_S = D_{DO}/\sigma_S \,. \tag{1.9}$$

Из формул (1.8)–(1.9) получается соотношение между скоростями дефлаграционного горения, выражаемое через число Маха ударной волны и степень сжатия за ней:

$$D_{FS}/D_{FO} = \frac{\gamma_0 D_{DO}^2}{\gamma \sigma_S c_0^2} = \frac{\gamma_0 \mathrm{M}_0^2}{\gamma \sigma_S} \,. \tag{1.10}$$

Обращая известное соотношение для давления за фронтом ударной волны как функцию числа Маха $P{=}f(\mathrm{M})$

$$\frac{P}{P_0} = \pi = \frac{2\gamma_0 \mathrm{M}^2 - (\gamma_0 - 1)}{\gamma_0 + 1} \approx \frac{2\gamma_0 \mathrm{M}^2}{\gamma_0 + 1} \tag{1.11}$$

к виду $\mathrm{M}{=}g(P)$, переписывается соотношение между дефлаграционными скоростями, из которого ясно видна линейная зависимость скорости горения от температуры начального состояния горючей смеси [51]:

$$D_{FS} = D_{FO} \frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma} \frac{\pi_S}{\sigma_S} = D_{FO} \frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma} \frac{T_S}{T_0}\,. \tag{1.12}$$

Последняя формула, кроме того, является обоснованием достаточно произвольной формулы (1.1).

1.3 Особенности горения реальных смесей

1.3.1 Зависимость скорости горения от начальных параметров в приближении химического равновесия реагентов и продуктов

Для проверки соотношения (1.12) в *приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции* были выполнены расчеты параметров дефлаграционного горения и детонации стехиометрических смесей водорода и типичных углеводородов (метана, этилена и ацетилена, как представителей с одинарной, двойной и тройной химической связью) с кислородом и воздухом при варьировании начального давления в диапазоне 0,001-100 атм и начальной температуры в диапазоне 200-1800 K, заведомо перекрывающих области применения [52]. Некоторые результаты представлены на рис. 1.2 – 1.5. Дополнительно были выполнены расчеты параметров горения и детонации при исходном состоянии, соответствующем точке S (одновременное изменение P и T). Следует подчеркнуть, что условие $Q{=}const$ вдоль адиабаты энерговыделения является сильной идеализацией, оправданной только возможностью простых алгебраических преобразований с законами сохранения. Уже в приближении химического равновесия продуктов Q меняется вдоль адиабаты: например, для смеси $2H_2{+}O_2$ в характерных точках адиабаты $Q_D = 972{,}6$, $Q_V = 1057{,}5$, $Q_P = 1117{,}6$, $Q_{DF} = 1199{,}7$ кал/г. Если в качестве начального выбрать состояние в точке S, то в точке D, представляющей дефлаграционную точку, $Q_{DF} = 1580{,}4$ кал/г. Сравнивая с величиной Q для точки D, как детонационной точки относительно состояния O, можно заметить, что эти величины заметно различаются (см. вышеизложенное о несовпадении адиабат энерговыделения для точек O и S).

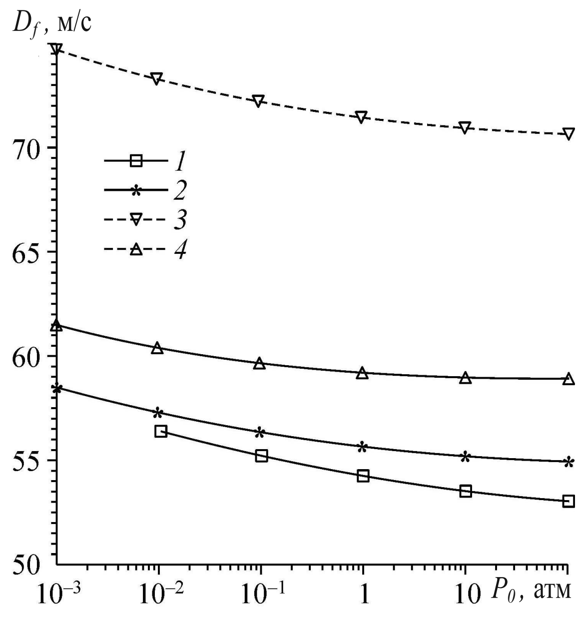


Рис. 1.2. Зависимость скорости горения от начального давления для топливно-воздушных смесей. $0{,}4C_2H_2{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*1*), $C_2H_4{+}3(O_2{+}3{,}76N_2)$ (*2*), $2H_2{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*3*), $0{,}5CH_4{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*4*)

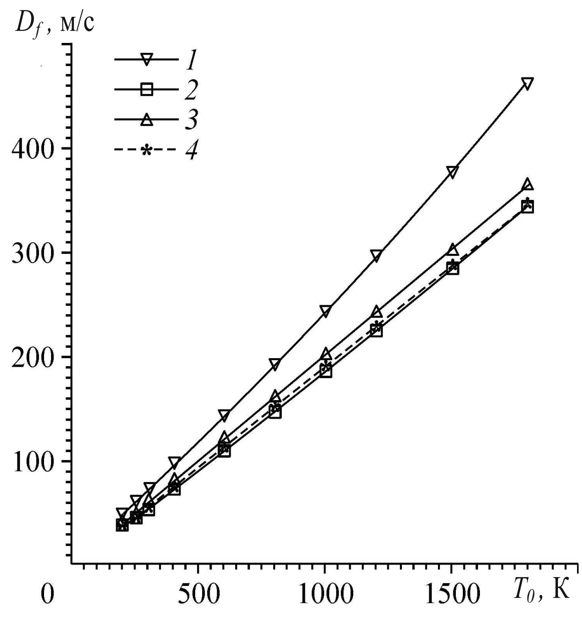


Рис. 1.3. Зависимость скорости горения от начальной температуры для топливно-воздушных смесей. $2H_2{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*1*), $0{,}4C_2H_2{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*2*), $0{,}5CH_4{+}O_2{+}3{,}76N_2$ (*3*), $C_2H_4{+}3(O_2{+}3{,}76N_2)$ (*4*)

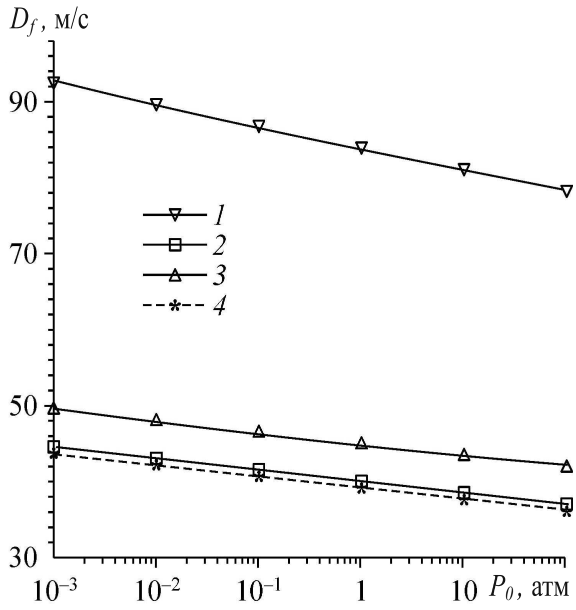


Рис. 1.4. Зависимость скорости горения от начального давления для топливно-кислородных смесей. $2H_2+O_2$ (*1*), $2C_2H_2+5O_2$ (*2*), CH_4+2O_2 (*3*), $C_2H_4+3O_2$ (*4*)

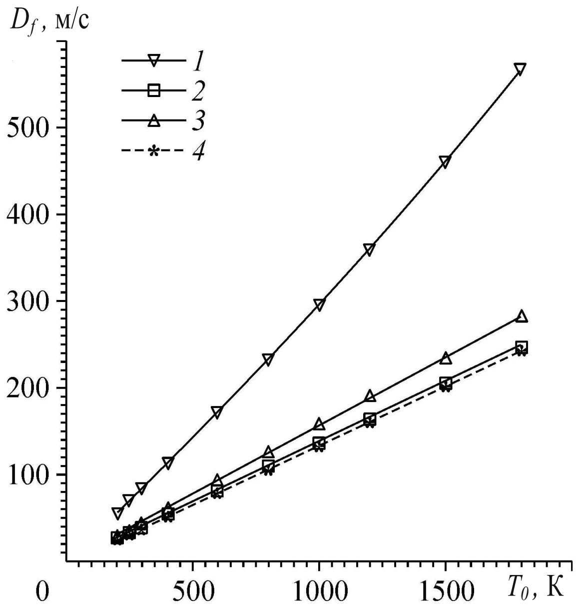


Рис. 1.5. Зависимость скорости горения от начальной тепературы для топливно-кислородных смесей. $2H_2+O_2$ (*1*), $2C_2H_2+5O_2$ (*2*), CH_4+2O_2 (*3*), $C_2H_4+3O_2$ (*4*)

На рис. 1.2 и 1.4 [52] представлены данные о скорости горения от начального давления для топливно-кислородных и топливно-воздушных смесей: при общем для всех смесей снижении скорости с увеличением начального давления видно, что изменение скорости незначительно и составляет не более 20 % при изменении давления на пять порядков. Скорость дефлаграционного горения слабо зависит от химического состава топлива, а также от окислителя. На рис. 1.3 и 1.5 [52] для этих же смесей представлены данные о скорости горения в зависимости от начальной температуры: зависимости практически линейны, что полностью согласуется с формулой (1.12).

1.3.2 Поверхности скоростей горения

Следует отметить, что параметры точки S как исходного состояния не входят в начальную регулярную сетку давлений и температур $\{P_0, T_0\}$,

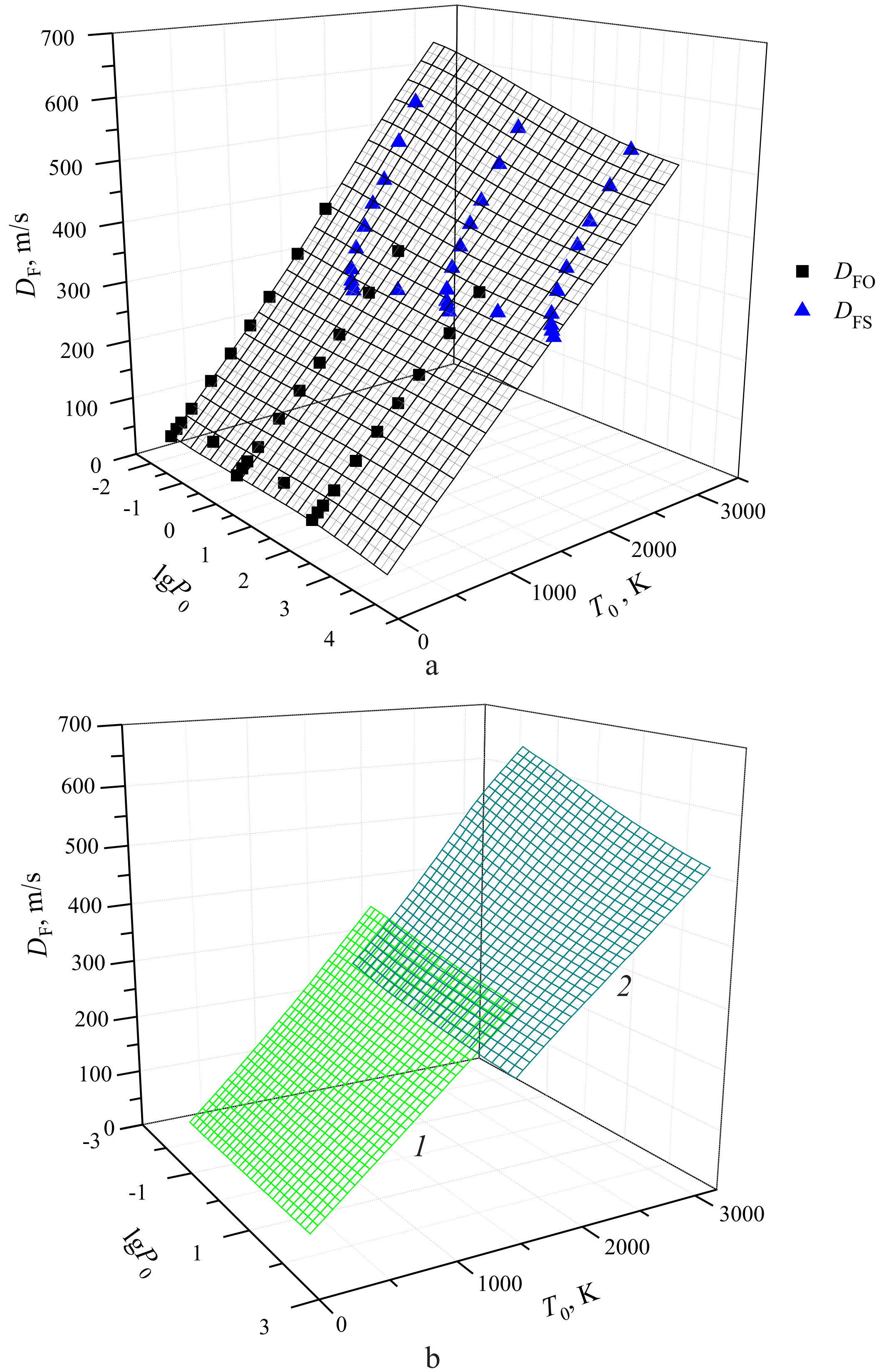
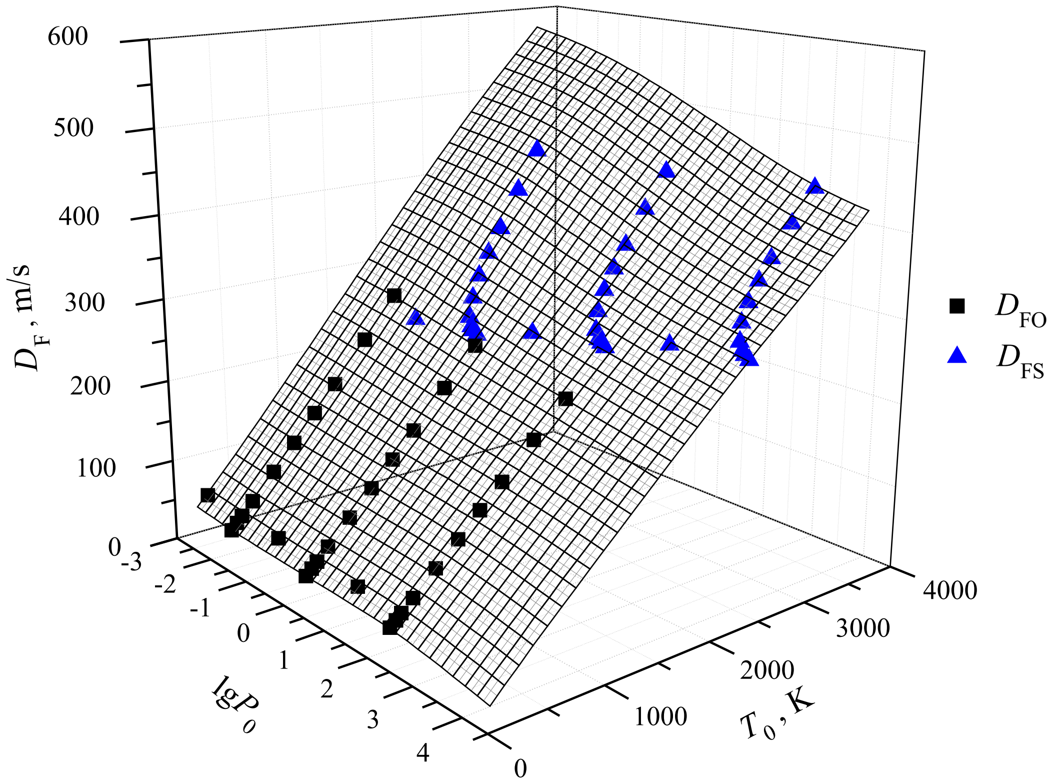
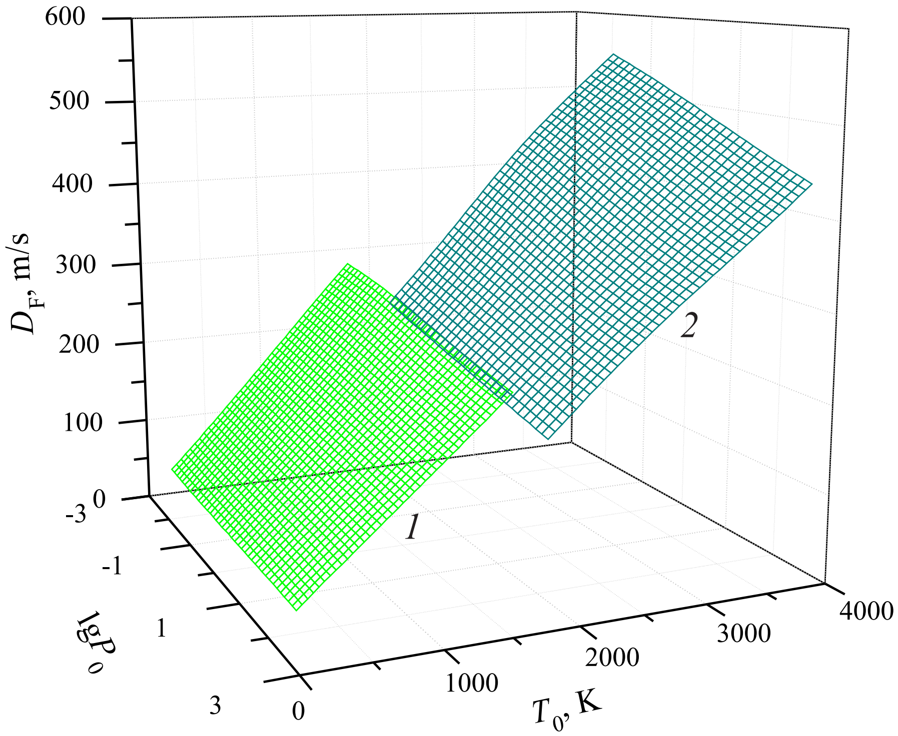


Рис. 1.6. Поверхность скоростей горения для смеси ацетилена с воздухом. a – общая поверхность для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}, b – поверхности, построенные независимо для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}: *1* – D_{FO}, *2* – D_{FS}



a



b

Рис. 1.7. Поверхность скоростей горения для смеси ацетилена с кислородом. a – общая поверхность для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}, b – поверхности, построенные независимо для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}: *1* – D_{FO}, *2* – D_{FS}

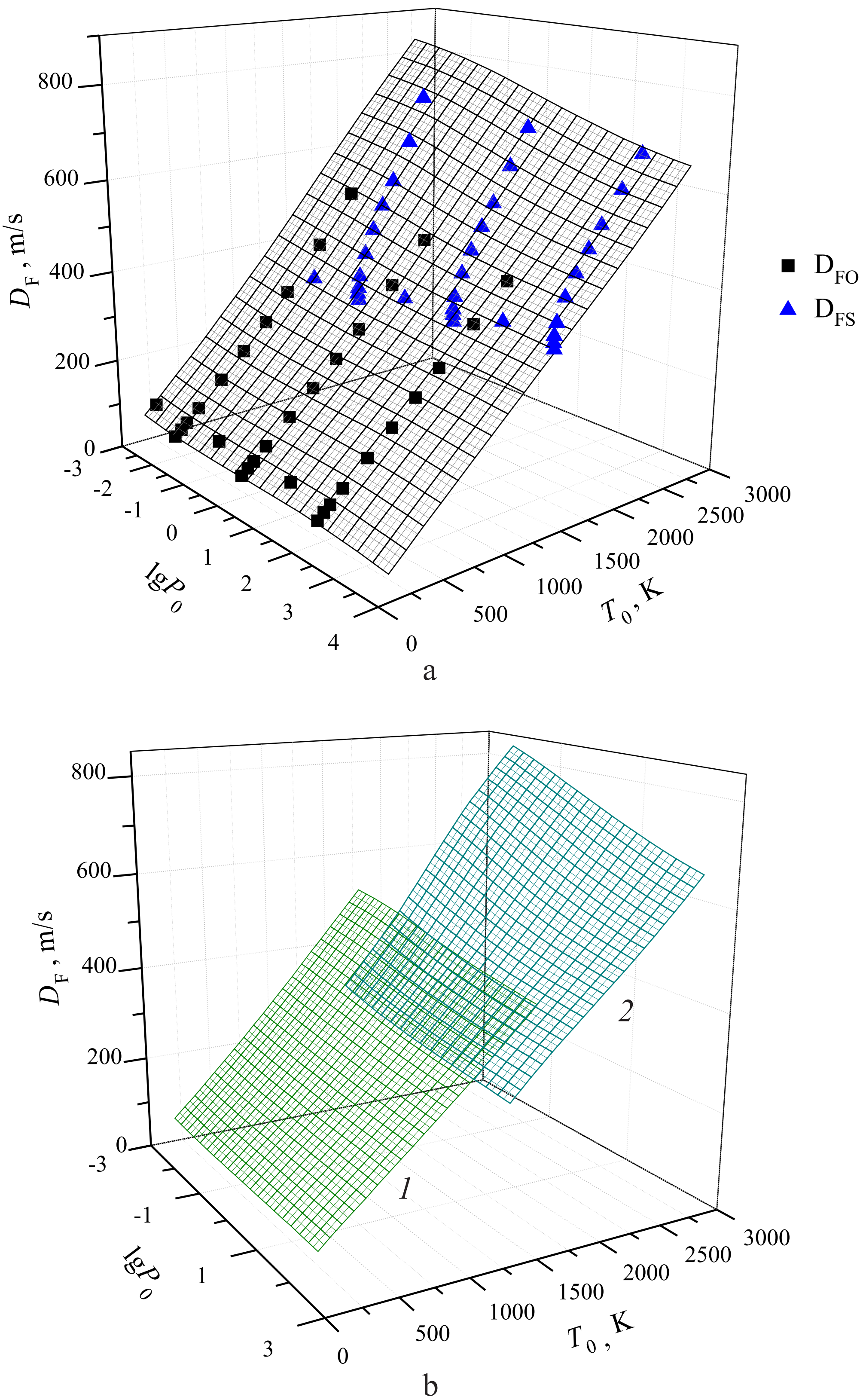


Рис. 1.8. Поверхность скоростей горения для смеси водорода с воздухом. а – общая поверхность для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}, b – поверхности, построенные независимо для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}: *1* – D_{FO}, *2* – D_{FS}

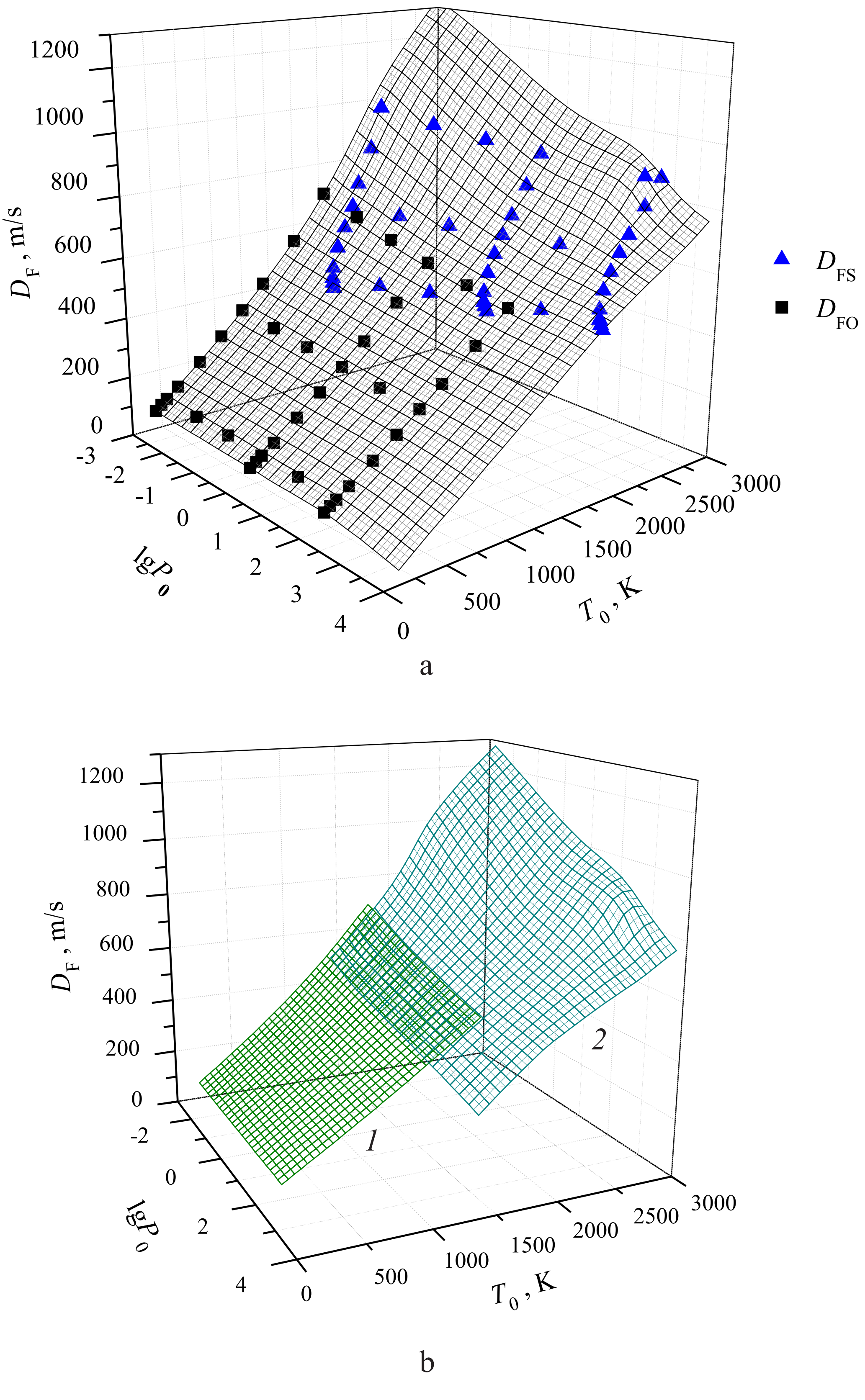


Рис. 1.9. Поверхность скоростей горения для смеси водорода с кислородом. a – общая поверхность для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}, b – поверхности, построенные независимо для двух групп данных D_{FS} и D_{FO}: *1* – D_{FO}, *2* – D_{FS}

поскольку ограничены рамками законов сохранения. Возникает естественный вопрос о том, укладываются ли скорости дефлаграционного горения для нерегулярных начальных условий на некую поверхность скоростей, построенных по сетке с регулярными данными. Другими словами, является ли поверхность скоростей горения единой для произвольных начальных данных. На языке математики существование единой поверхности означает наличие непрерывной зависимости решения от начальных условий. Использование точки S в качестве точки начального состояния расширяет диапазон температур до 4000 K, а диапазон давлений до 6000 атм.

Как отмечено выше, зависимость скорости горения D_{FO} от начальных параметров $\{P_0, T_0\}$ образует поверхность скоростей горения в трехмерном пространстве $\{P_0, T_0, D_{FO}\}$. Оказалось, что скорости горения D_{FS} относительно состояния S с повышенными нерегулярными параметрами $\{P_S, T_S\}$ также принадлежат поверхности $\{P_0, T_0, D_{FO}\}$ скоростей горения, образованной регулярной начальной сеткой $\{P_0, T_0\}$. Это иллюстрируют рис. 1.6 – 1.9, для топливно-кислородных и топливно-воздушных смесей. На рисунках изображены общая поверхность для разных групп данных и поверхности, построенные независимо для двух групп данных: $\{P_0, T_0, D_{FO}\}$ и $\{P_0, T_0, D_{FS}\}$. Это свидетельствует о существовании единой поверхности скоростей горения для различных режимов распространения. *Другими словами, наблюдается непрерывная зависимость решения (скорость горения) от начальных условий.*

1.3.3 Проверка выполнения определяющего соотношения между скоростями дефлаграции и детонации Чепмена-Жуге в реальных смесях

Введём следующую величину: $\delta = D_{DO} D_{FO} / c_0^2$. В рамках предположений классической теории детонации и горения эта величина в точности должна быть равна единице, в силу выполнения определяющего соотношения (1.8) между самоподдерживающимися скоростями детонации и горения. Ниже в таблицах приведены значения этой величины для различных смесей в зависимости от начальных условий в приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции. Из таблиц видно, что отклонение от единицы для смесей водорода с кислородом и воздухом (таблицы 1.1 – 1.2) составляет 13-20 %, в то время как для смесей ацетилена с кислородом и воздухом (табл. 1.3 – 1.4) отклонение менее существенно и составляет 4-16 % от единицы.

Таблица 1.1. Зависимость величины δ от начальных давления и температуры смеси водород-кислород

P_0, атм	T_0, K	δ
1	298,15	0,82
1	1000	0,83
1	1800	0,86
0,001	298,15	0,80
1	298,15	0,82
100	298,15	0,83

Таблица 1.2. Зависимость величины δ от начальных давления и температуры смеси водород-воздух

P_0, атм	T_0, K	δ
1	298,15	0,84
1	1000	0,86
1	1800	0,87
0,001	298,15	0,80
1	298,15	0,84
100	298,15	0,86

Таблица 1.3. Зависимость величины δ от начальных давления и температуры смеси ацетилен-кислород

P_0, атм	T_0, K	δ
1	298,15	0,89
1	1000	0,95
1	1800	0,96
0,001	298,15	0,85
1	298,15	0,89
100	298,15	0,91

Таблица 1.4. Зависимость величины δ от начальных давления и температуры смеси ацетилен-воздух

P_0, атм	T_0, K	δ
1	298,15	0,84
1	1000	0,89
1	1800	0,91
0,001	298,15	0,82
1	298,15	0,84
100	298,15	0,86

На основе проведенных исследований зависимости скорости дефлаграционного горения от давления и температуры получены следующие результаты:

- Приведены дополнительные расчетные данные о скорости горения для типичных газовых смесей при давлениях до 6000 атм и температурах до 4000 K

- Проведены исследования поведения скорости горения в стехиометрических смесях в приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции

- Установлено, что основной вклад в скорость горения дает влияние начальной температуры, зависимость от давления весьма слабая

- Скорости горения в диапазоне изменения режимов от дефлаграции до детонации, D_{FO-S}, для топливно-кислородных и топливно-воздушных смесей в зависимости от начальных параметров $\{P, T\}$ образуют единую поверхность в трехмерном пространстве $\{P, T, D_{FO-S}\}$, что свидетельствует о непрерывной зависимости решения (скорость горения) от начальных условий.

Глава 2

Акустические свойства слоёв неравномерно нагретых газов в кольцевом канале

Как было отмечено во введении, сразу после процесса инициирования непрерывной спиновой детонации в плоско-радиальном кольцевом канале реализуется дефлаграционное горение с вращающимися окружными неустойчивостями, которые затем развиваются в квазидетонационные волны. При этом в канале в течение характерного для этой стадии времени присутствуют два слоя газа: свежая горючая смесь и высокотемпературные продукты горения. В настоящей главе предпринята попытка описать числовое значение скорости вращающейся квазидетонационной волны на *начальном этапе её развития* с точки зрения исследования акустических (малые амплитуды колебаний и волн) свойств системы «холодный газ – граница раздела – горячий газ» в кольцевом канале и возможных в ней колебаний и волн.

Скорость радиального потока в кольцевой камере, поперёк которого распространяются квазидетонационные волны в кольцевом канале, является дозвуковой. Так как скорость потока, подающего горючую смесь в канал, и скорость горения, распространяющегося навстречу потоку, примерно на порядок меньше скорости звука в смеси [8, 9], то в пределах характерных времён, соответствующих начальному этапу поджига, этими скоростями можно пренебречь, считая среду покоящейся.

2.1 Двухмерная задача

2.1.1 Постановка двухмерной задачи

На рис. 2.1 изображена геометрия канала в кольцевой камере сгорания плоско-радиального типа, представляющего углубление между круговыми внутренней и внешней стенками радиусов R_1 и R_2, соответственно. На стенках сверху вдоль окружности расположены узкие щели (ширина щели в 10 раз меньше углубления канала h) для подачи горючей смеси в канал из центра концентрических окружностей R_1, R_2 и выхода продуктов горения, соответственно.

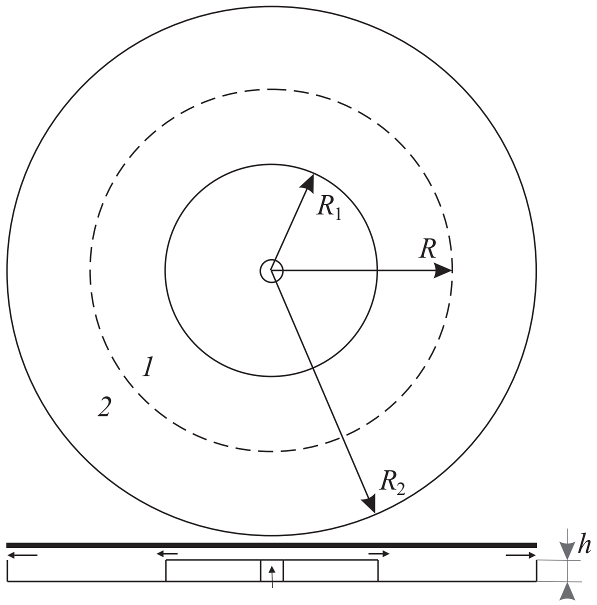


Рис. 2.1. Схематичное изображение канала в кольцевой камере сгорания

Сформулируем плоскую (двухмерную) задачу. Для этого выберем полярные координаты (r, φ) с началом в центре окружностей R_1 и R_2. При выше сделанных допущениях покоящаяся цилиндрическая граница раздела радиуса R, моделирующая фронт горения, разделит газ на два слоя с равными давлениями:

1. $\Omega_1 = \{(r, \varphi) | R_1 < r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ – слой горючей смеси с газодинамическим состоянием $(p_1, \rho_1, T_1, u_1 = 0)$;

2. $\Omega_2 = \{(r,\varphi)|R < r < R_2, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ – слой высокотемпературных продуктов горения с состоянием $(p_2, \rho_2, T_2, u_2 = 0)$.

Здесь и далее p обозначает давление, ρ – плотность, T – температура, u – массовая скорость. Следует отметить, что в силу разных температур отличаться будут и значения скоростей звука в слоях.

Будем рассматривать установившиеся колебания сплошной среды и все возмущения параметров периодическими зависящими от времени: $\delta\tilde{x}(r,\varphi,t) = \delta x(r,\varphi)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$, где δx – комплексная амплитуда возмущения какого-либо из параметров, ω – круговая частота периодических колебаний. Здесь и далее $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Процесс распространения возмущений считается изоэнтропическим. Горячий и холодный газы в слоях считаются невязкими и термически совершенными с постоянными теплоёмкостями. Тогда для комплексных амплитуд акустических возмущений параметров справедливы следующие соотношения [53]:

$$\Delta\delta p_j + \frac{\omega^2}{c_j^2}\,\delta p_j = 0 \tag{2.1}$$

$$i\omega\delta\mathbf{u}_j = \frac{\nabla\delta p_j}{\rho_j} \tag{2.2}$$

$$\delta p_j = c_j^2\,\delta\rho_j \tag{2.3}$$

где $j{=}1,2$ – индекс, обозначающий слои Ω_1 и Ω_2 , Δ – оператор Лапласа, $c_j^2 \equiv \gamma_j\,p_1/\rho_j = \gamma_j R_g\,T_j/\mu_j$ – скорости звука в слоях (γ_j – показатели политропы газов в слоях, μ_j – молярные массы газов, R_g – универсальная газовая постоянная). Уравнения (2.1), (2.2), (2.3) являются следствием линеаризации на покой законов сохранения массы, импульса и энергии, соответственно. На границах R_1 и R_2 (рис. 2.1) будут рассматриваться два типа условий. Это условия постоянства давления:

$$\begin{aligned} &\delta p_1 = 0;\ r = R_1 \\ &\delta p_2 = 0;\ r = R_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

и условия равенства нулю нормальной составляющей возмущения скорости (условия непротекания) согласно (2.2):

$$\begin{aligned} i\omega\rho_1\delta u_{1r} \equiv \frac{\partial\delta p_1}{\partial r} = 0;\ r = R_1 \\ i\omega\rho_2\delta u_{2r} \equiv \frac{\partial\delta p_2}{\partial r} = 0;\ r = R_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Возмущение границы раздела слоёв R моделируется следующим образом:

$$\tilde{R}(\varphi, t) = R + A(\varphi)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}\,, \tag{2.6}$$

где $A(\varphi)$ – малая амплитуда возмущения границы раздела. Нормальная скорость движения границы раздела согласно (2.6), в линейном приближении, будет иметь вид:

$$D_n \equiv \frac{\partial\tilde{R}}{\partial t} = -i\omega A(\varphi)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}\,. \tag{2.7}$$

На границе раздела горячего и холодного слоёв R ставятся два условия:

$$\begin{gathered} \delta p_1 = \delta p_2;\ r = R \\ \delta u_{1r} = \delta u_{2r} = D_n \Longleftrightarrow \beta\frac{\partial\delta p_1}{\partial r} = \frac{\partial\delta p_2}{\partial r} = \rho_2\omega^2 A(\varphi);\ r = R\,, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где первое соотношение – динамическое условие равенства возмущений давлений, а второе – кинематическое условие равенства нормальных компонент возмущений скорости, соответственно;

$$\beta = \frac{\rho_2}{\rho_1} \equiv \frac{\gamma_2 c_1^2}{\gamma_1 c_2^2} \tag{2.9}$$

– отношение плотностей газов в горячем и холодном слоях.

Таким образом, получаем две задачи сопряжения слоёв Ω_1 и Ω_2. Задачу с условиями постоянства давления на границах R_1 и R_2 кольцевого канала:

$$\begin{gathered}
\Delta\delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\,\delta p_1 = 0, \Delta\delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}\,\delta p_2 = 0 \\
\delta p_1 = 0;\; r = R_1\,, \delta p_2 = 0;\; r = R_2 \\
\delta p_1 = \delta p_2;\; r = R \\
\beta\frac{\partial\delta p_1}{\partial r} = \frac{\partial\delta p_2}{\partial r} = \rho_2\omega^2 A(\varphi);\; r = R
\end{gathered} \tag{2.10}$$

и задачу с условиями непротекания на границах R_1 и R_2 кольцевого канала:

$$\begin{gathered}
\Delta\delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\,\delta p_1 = 0, \Delta\delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}\,\delta p_2 = 0 \\
\frac{\partial\delta p_1}{\partial r} = 0;\; r = R_1\,, \frac{\partial\delta p_2}{\partial r} = 0;\; r = R_2 \\
\delta p_1 = \delta p_2;\; r = R \\
\beta\frac{\partial\delta p_1}{\partial r} = \frac{\partial\delta p_2}{\partial r} = \rho_2\omega^2 A(\varphi);\; r = R
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Задача (2.10) с условиями постоянства давления на границах R_1 и R_2 далее будет называться З-1, а задача (2.11) с условиями непротекания – З-2.

2.1.2 Метод решения

При разделении переменных методом Фурье в полярных координатах [54] уравнения в задачах З-1 и З-2 имеют следующие решения в виде мод:

$$
\begin{aligned}
\delta p_1^{(k)}(r,\varphi) &= [a_1^{(k)} H^{(1)}(k, \frac{\omega}{c_1} r) + a_2^{(k)} H^{(2)}(k, \frac{\omega}{c_1} r)]\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi} \\
\delta p_2^{(k)}(r,\varphi) &= [a_3^{(k)} H^{(1)}(k, \frac{\omega}{c_2} r) + a_4^{(k)} H^{(2)}(k, \frac{\omega}{c_2} r)]\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где k – константа разделения переменных, целое число, выделяющее отдельную угловую моду колебаний; $a_s^{(k)}$, $s{=}1,..,4$ – произвольные постоянные комплексные амплитуды; $H^{(1)}(k,\omega r)$, $H^{(2)}(k,\omega r)$ – функции Ганкеля целого индекса k первого и второго рода, соответственно.

При подстановке мод (2.12) в соответствующие граничные условия в задачах З-1 или З-2 мы получим однородную систему из четырёх линейных уравнений для нахождения неизвестных постоянных комплексных амплитуд $\vec{x}{=}(a_s^{(k)})$, $s{=}1,..,4$ с матрицей $\hat{G}(\omega;k)$:

$$
\hat{G}(\omega;k)\cdot\vec{x} = 0 \tag{2.13}
$$

Известно, что система (2.13) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю:

$$
\det(\hat{G}(\omega;k)) = 0 \tag{2.14}
$$

Уравнение (2.14) определяет собственные частоты колебаний газов в слоях Ω_1 и Ω_2. Для каждого k существует набор собственных частот ω_{kl}, соответствующих радиальным модам колебаний, где l – радиальный номер моды. При $k{=}0$ уравнение (2.14) даёт частоты чисто радиальных осесимметричных колебаний слоёв и границы раздела. Комплексную амплитуду возмущения границы раздела $a_5^{(k)}$ можно найти при помощи решения (2.12) и кинематического условия в (2.8), предварительно разложив функцию $A(\varphi)$ в ряд Фурье по угловой координате:

$$A(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_5^{(k)}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}$$

$$\frac{\partial \delta p_2^{(k)}}{\partial r} = \rho_2 \omega^2 a_5^{(k)}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi};\ r = R$$

Общее решение задач З-1 и З-2, в силу их линейности, представляется рядом Фурье-Бесселя по модам:

$$\delta p_1(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [a_1^{(kl)} H^{(1)}(k, \frac{\omega_{kl}}{c_1}\, r) + a_2^{(kl)} H^{(2)}(k, \frac{\omega_{kl}}{c_1}\, r)]\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}$$

$$\delta p_2(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [a_3^{(kl)} H^{(1)}(k, \frac{\omega_{kl}}{c_2}\, r) + a_4^{(kl)} H^{(2)}(k, \frac{\omega_{kl}}{c_2}\, r)]\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}$$

2.1.3 Вращающиеся окружные волны возмущения границы раздела слоёв

Выражение для возмущённой границы раздела, соответствующей моде $\{k{-}l\}$ имеет вид:

$$\tilde{R}(\varphi,t) = R + a_5^{(kl)} \exp[ik\varphi - i\omega_{kl}\, t] = R + a_5^{(kl)} \exp[ik(\varphi - \frac{\omega_{kl}}{k} t)] \qquad (2.15)$$

Из соотношения (2.15) видно, что существует окружная волна возмущения границы раздела, распространяющаяся (вращающаяся) по кругу радиуса R с угловой скоростью ω_{kl}/k. Для мод $\{k{-}l\}$ возмущённая граница раздела будет иметь k локальных пучностей («горбов»), вращающихся по окружности радиуса R с соответствующей угловой скоростью ω_{kl}/k. Для наглядности на рис. 2.2 приведены формы возмущённой границы раздела слоёв горячего и холодного газов.

Для моды $\{k{-}l\}$ можно также рассчитать линейную скорость распространения поперечной окружной волны возмущения вдоль окружной координаты по кругу радиуса R:

$$V_{kl}=\frac{\omega_{kl}}{k}R \tag{2.16}$$

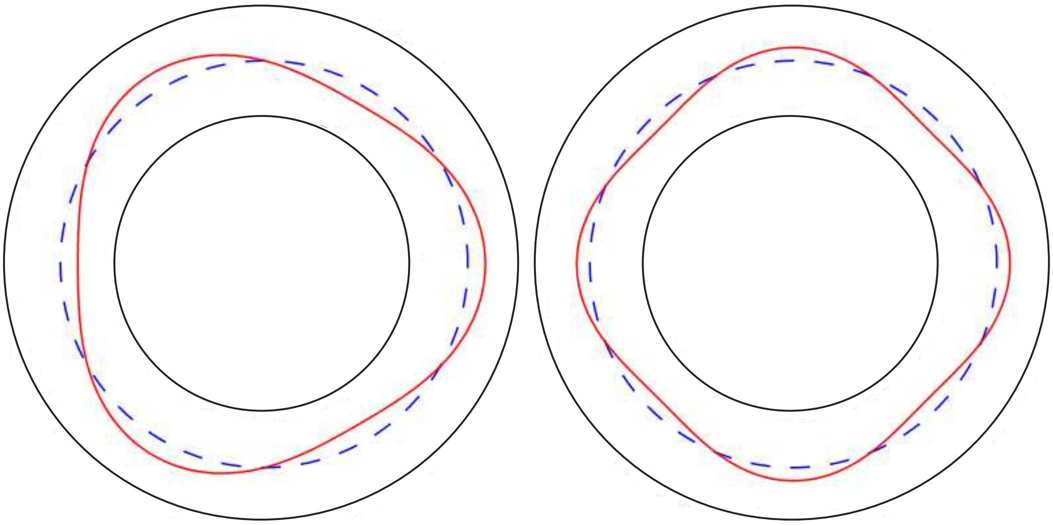


Рис. 2.2. Формы возмущённой границы раздела слоёв для мод $\{3-l\}$ (слева) и $\{4-l\}$ (справа). Пунктирная синяя линия – невозмущённая граница раздела R, красная линия – возмущённая граница раздела

2.1.4 Расчёт скоростей вращения окружных волн на границе раздела

Проведём конкретные расчёты для кольцевого канала камеры сгорания Войцеховского, на которой проводились эксперименты по сжиганию топлива в поперечных квазидетонационных волнах [8, 9, 13]. Радиус внутренней стенки канала $R_1 = 88 \cdot 10^{-3}$ м, внешней стенки – $R_2 = 118 \cdot 10^{-3}$ м. Радиус (положение) границы раздела, R, возьмём средним арифметическим радиусов внутренней и внешней стенок канала: $R=103 \cdot 10^{-3}$ м. В эксперименте в канал подавалась стехиометрическая ацетилен-кислородная смесь с температурой T_1=321 K, молярной массой $\mu_1 = 0{,}03$ кг/моль и показателем политропы $\gamma_1 = 1{,}33$. Таким образом, скорость звука в холодном слое Ω_1: $c_1 = 342{,}48$ м/с. Скорость звука и показатель политропы горячего слоя Ω_2 можно получить из параметров дефлаграции Чепмена-Жуге для ацетилен-кислородной смеси в приближении химического равновесия реагентов и продуктов реакции [51]: $c_2 = 1126{,}33$ м/с, $\gamma_2 = 1{,}22$. Таким образом, отношение плотностей горячего и холодного газов (2.9) будет следующим: $\beta = 0{,}08$.

Таблица 2.1. Скорости вращения окружных волн вдоль окружности радиуса $R = (R_1 + R_2)/2$ в задаче З-2

	мода			
	{3–1}	{3–2}	{4–1}	{4–2}
V_{kl}, м/с	777	1699	740	1377

Таблица 2.2. Скорости вращения окружных волн вдоль окружности радиуса $R = (R_1 + R_2)/2$ в задаче З-1

	мода			
	{3–1}	{3–2}	{4–1}	{4–2}
V_{kl}, м/с	2275	4010	1730	3051

В экспериментах по сжиганию топлива в поперечных волнах изучались режимы с тремя и четырьмя волнами (головами) [8, 9, 13]. В таблицах 2.1 и 2.2 приведены скорости вращения вдоль окружной координаты, вычисленные по соотношению (2.16) в задачах З-2 и З-1 для некоторых мод с тремя и четырьмя «горбами». Из таблицы 2.1 видно, что скорости вращения «горбов» при постановке условий непротекания на границах R_1 и R_2 (задача З-2) в 2-5 раз выше $c_1 = 342{,}48$ м/с – скорости звука в холодном слое. С увеличением радиального номера l скорость вращения возрастает, а с увеличением k, количества «горбов» – падает. Из таблицы 2.1 также видно, что существуют моды, скорость вращения которых располагается в диапазоне выше $c_2 = 1126{,}33$ м/с – скорости звука в горячем слое. Именно такое качественное поведение скоростей квазидетонационных волн наблюдается в эксперименте [8, 9, 13].

Из таблицы 2.2 видно, что скорости вращения при постановке условий постоянства давления на границах R_1 и R_2 (задача З-1) примерно в 1,5-2,5 раза выше соответствующих скоростей, рассчитанных при постановке условий непротекания на границах R_1 и R_2 (задача З-2), и всегда выше скорости звука c_2 в горячем слое.

Экспериментально наблюдаемые скорости распространения квазидетонационных волн [8, 9, 13] составляют 852 м/с и 767 м/с для режимов с тремя и четырьмя волнами, соответственно. Как видно из вышеприведённых таблиц – для мод $\{3-1\}$ и $\{4-1\}$ скорости вращения окружных волн ближе к экспериментальным данным при постановке условий непротекания (2.5) в задаче З-2, чем при постановке условий постоянства давления (2.4) на границах кольцевого канала в задаче З-1.

Следует отметить, что скорость вращения «горбов» по окружной координате, возникающая из акустических возмущений границы раздела горячего и холодного слоёв, является скоростью точки контакта слоёв. Эта скорость может существенно отличаться от скорости звука, поэтому возможен сверхзвуковой режим вращения «горбов».

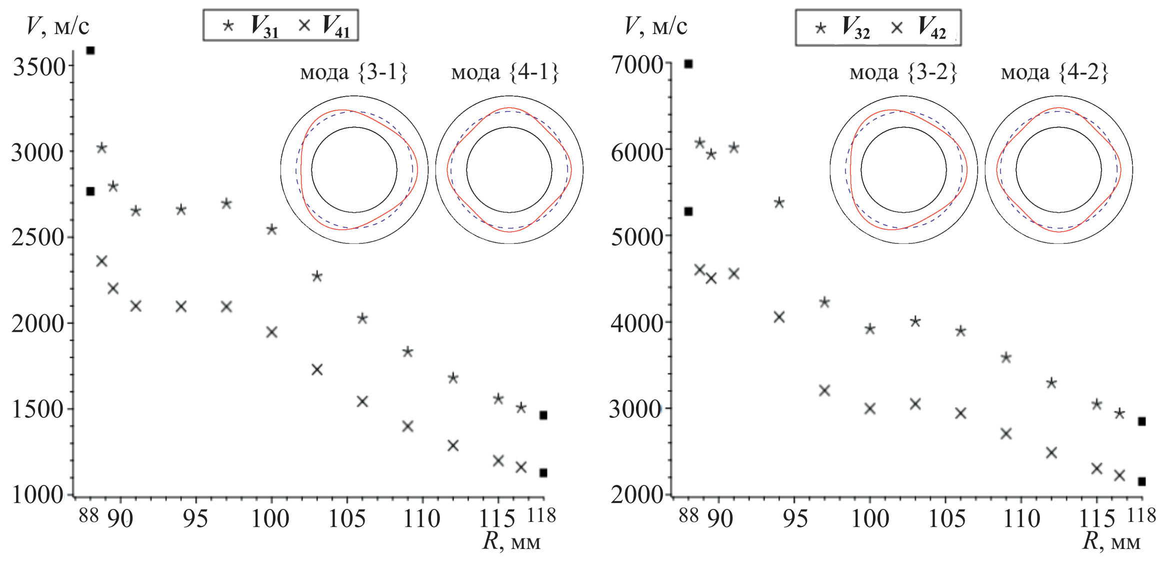


Рис. 2.3. Зависимости скоростей вращения окружных волн от расположения границы раздела в кольцевом канале в задаче З-1

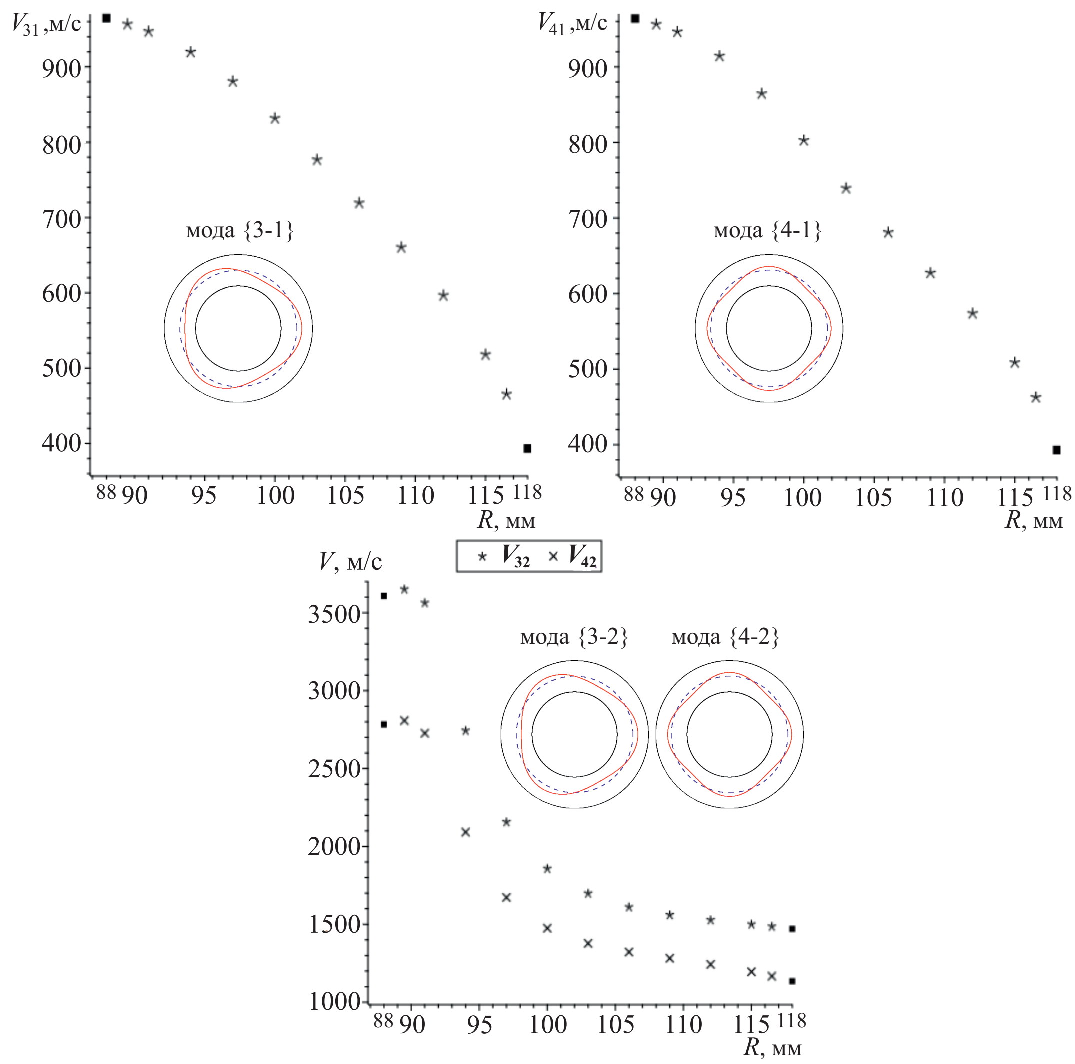


Рис. 2.4. Зависимости скоростей вращения окружных волн от расположения границы раздела в кольцевом канале в задаче З-2

Интересно также посмотреть изменение скоростей вращения окружных волн в зависимости от положения границы раздела горячего и холодного слоёв в кольцевом канале. При этом с увеличением радиуса границы раздела R площадь холодного слоя увеличивается, а горячего – уменьшается. И, наоборот, с уменьшением радиуса R площадь холодного слоя уменьшается, а горячего – увеличивается (рис. 2.1). На рис. 2.3–2.4 представлены зависимости скорости вращения окружных волн от радиуса R для некоторых мод с тремя и четырьмя «горбами» на возмущённой границе раздела в задачах З-1 и З-2. Чёрными квадратными метками отмечены предельные значения скорости вращения при $R = R_1 = 88 \cdot 10^{-3}$ м (в канале полностью отсутствует холодный слой газа) и $R = R_2 = 118 \cdot 10^{-3}$ м (в канале полностью отсутствует горячий слой газа).

Как видно из зависимостей, представленных на рис. 2.3–2.4, скорости вращения окружных волн, стремящиеся к своим предельным значениям при стремлении R к значениям R_1 и R_2, всегда больше скорости звука c_1 в слое холодного газа. Из рис. 2.3–2.4 также видно, что зависимости скорости вращения окружных волн для представленных мод при условиях задачи З-2 (условия непротекания на границах R_1 и R_2) являются *монотонными*, а при условиях задачи З-1 (условия постоянства давления на границах R_1 и R_2) – *немонотонными*.

2.2 Трёхмерная задача

При постановке трёхмерной задачи учитывается толщина кольцевого канала h (рис. 2.1). Для описания используем цилиндрические координаты (r, φ, z), которые являются естественным обобщением плоских полярных координат при помощи добавления оси z, перпендикулярной плоскости (r, φ). Начало координаты z выберем на верхней стенке канала и в центре концентрических окружностей R_1 и R_2, а направление – снизу вверх (рис. 2.1). Таким образом, нижняя стенка канала будет иметь координату $z = -h$.

В дополнение к граничным условиям двумерных задач З-1 и З-2 на границах $z = 0$ (верхняя стенка) и $z = -h$ (нижняя стенка) ставятся условия непротекания, которые, в терминах возмущений давления имеют вид согласно (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta p_j}{\partial z} &= 0;\ z = 0 \\ \frac{\partial \delta p_j}{\partial z} &= 0;\ z = -h \end{aligned} \tag{2.17}$$

где индекс $j = 1{,}2$ обозначает слои Ω_1 и Ω_2, соответственно. В трёхмерной постановке в цилиндрических координатах возмущения давления будут удовлетворять уравнениям:

$$\left(\Delta_{r,\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\delta p_j + \frac{\omega^2}{c_j^2}\,\delta p_j = 0\,, \tag{2.18}$$

где $\Delta_{r,\varphi}$ – полярная (плоская) часть оператора Лапласа.

Решение уравнений (2.18) ищется в виде $\delta p_j(r,\varphi,z){=}F_j(r,\varphi)G_j(z)$. Нетрудно заметить, что при подстановке решения такого вида в уравнения (2.18) и отделения переменной z трёхмерная постановка задачи на нахождение собственных частот колебаний и мод сводится к двухмерным задачам З-1 (2.10) и З-2 (2.11) при соответствующих заменах в их формулировках функций δp_j на F_j и коэффициентов ω^2/c_j^2 на $\left(\omega^2/c_j^2 - \kappa^2\right)$, где κ - константа отделения переменной z [54].

Функции $G_j(z)$ при отделении переменной z удовлетворяют следующей краевой задаче, согласно (2.17)–(2.18):

$$\begin{gathered}\frac{d^2G_j}{dz^2}{+}\kappa^2 G_j = 0\\ \frac{dG_j}{dz} = 0;\ z = 0,\ \frac{dG_j}{dz} = 0;\ z = -h\end{gathered} \tag{2.19}$$

которая имеет следующее решение:

$$G_j^{(m)}(z) = G_j^{(m)}\cos\kappa z,\ \kappa = \frac{\pi\, m}{h}\,, \tag{2.20}$$

где $G_j^{(m)}$ – постоянные амплитуды, m – целое число, выделяющее отдельную моду колебаний по координате z.

Таким образом, общее решение трёхмерной задачи выражается в виде ряда Фурье-Бесселя по модам $\{k\text{-}l\text{-}m\}$:

$$\delta p_1(r,\varphi,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[a_1^{(klm)}H^{(1)}(k,\lambda_1 r)+a_2^{(klm)}H^{(2)}(k,\lambda_1 r)]\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi m}{h}z\right)\mathrm{e}^{ik\varphi};$$
$$\delta p_2(r,\varphi,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[a_3^{(klm)}H^{(1)}(k,\lambda_2 r)+a_4^{(klm)}H^{(2)}(k,\lambda_2 r)]\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi m}{h}z\right)\mathrm{e}^{ik\varphi}, \tag{2.21}$$

где $\lambda_{1,2}=\sqrt{\omega_{klm}^2/c_{1,2}^2-\pi^2m^2/h^2}$. Возмущённая граница раздела горячего и холодного слоёв для моды $\{k\text{-}l\text{-}m\}$ представляется следующим выражением:

$$\tilde{R}(\varphi,z,t)=R+a_5^{(klm)}\cos\left(\frac{\pi m}{h}z\right)\exp[ik\varphi-i\omega_{klm}t] \tag{2.22}$$

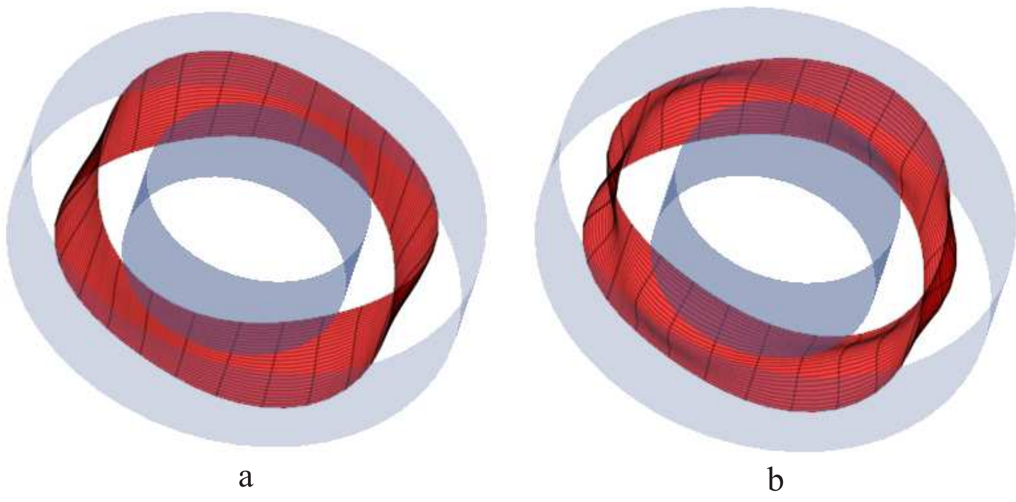


Рис. 2.5. Формы возмущённой поверхности раздела слоёв для мод $\{3{-}l{-}1\}$ (a) и $\{3{-}l{-}2\}$ (b). Серый цвет – внутренняя и внешняя стенки R_1 и R_2 кольцевого канала

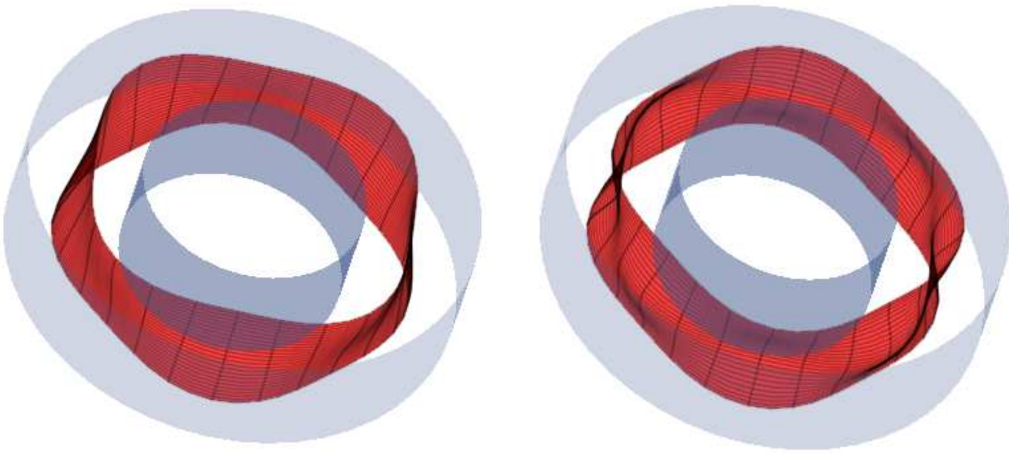


Рис. 2.6. Формы возмущённой поверхности раздела слоёв для мод $\{4{-}l{-}1\}$ (a) и $\{4{-}l{-}2\}$ (b). Серый цвет – внутренняя и внешняя стенки R_1 и R_2 кольцевого канала

На рисунках 2.5–2.6 изображены формы возмущённых границ раздела горчего и холодного слоёв в кольцевом канале для некоторых мод в трёхмерном случае. Невозмущённая граница в данном случае будет иметь форму цилиндрической поверхности радиуса R и толщины h.

Следует отметить, что все расчёты, проведённые при решении двухмерных задач З-1 (2.10) и З-2 (2.11) в разделе 2.1, с точки зрения трёхмерной постановки в цилиндричеких координатах являются случаем, когда модовое число $m = 0$. Следует также отметить, что, в силу замены коэффициентов ω^2/c_j^2 на $(\omega^2/c_j^2 - \pi^2 m^2/h^2)$ при сведении трёхмерных задач к двухмерным, все собственные частоты ω_{klm} и скорости вращения волн вдоль окружной координаты V_{klm} будут больше, чем соответствующие собственные частоты для двумерного плоского случая при $m = 0$. Иными словами, выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \omega_{k\,l\,m} &> \omega_{k\,l\,0} \equiv \omega_{k\,l} \\ V_{k\,l\,m} &> V_{k\,l\,0} \equiv V_{k\,l} \end{aligned} \tag{2.23}$$

На основе проведенных в рамках акутического приближения исследований слоёв неравномерно нагретых газов в плоско-радиальном кольцевом канале получены следующие результаты:

- При помощи численно-аналитических исследований изучена механика акустических колебаний и волн, возникающих в слоях и на границе раздела в двухмерном и трёхмерном случаях. Получены собственные моды и частоты колебаний.

- Обнаружены вращающиеся окружные волны возмущения границы раздела слоёв с конечным количеством локальных пучностей вдоль окружной координаты φ и получены скорости вращения этих волн.

- Показано, что скорости вращения окружных волн всегда больше скорости звука в холодном слое и могут располагаться в диапазоне выше скорости звука в горячем слое.

- Исследована зависимость скоростей вращения окружных волн от радиуса границы раздела в кольцевом канале. Показано, что при любом положении границы раздела слоёв в канале скорости вращения больше скорости звука в холодном слое.

- Результаты расчётов скоростей вращения окружных волн возмущения границы раздела слоёв качественно совпадают с результатами экспериментальных наблюдений [8, 9, 13] по распространению поперечных квазидетонационных волн.

Глава 3

Модовая устойчивость цилиндрического фронта горения в радиально расходящемся потоке

Согласно неоднократно упоминавшимся ранее экспериментальным исследованиям [8, 9, 13] следует, что на начальном этапе поджига горючей смеси в кольцевой камере реализуется дефлаграционное горение, и возникают неустойчивые колебания и бегущие волны с малыми амплитудами. С течением времени неустойчивости развиваются в квазидетонационные волны. В работах [35, 37] исследовалась устойчивость цилиндрических фронтов горения, расходящихся из центра, в нелинейной постановке. В данной главе предпринята попытка описать числовое значение скорости вращающейся квазидетонационной волны с точки зрения исследований *линейной модовой* устойчивости цилиндрического фронта горения, распространяющегося навстречу радиально расходящемуся из центра потоку в кольцевой камере сгорания.

3.1 Моделирование стационарного горения

3.1.1 Расчётная идеализация процесса горения.

В кольцевой камере сгорания скорость газа в режиме стационарного течения является дозвуковой, а поперечная волна горения инициируется принудительно на определённом радиусе поперёк течения. Используя теорию экзотермического скачка [48], это позволяет смоделировать фронт горения как сильный разрыв газодинамических параметров, в котором радиальная скорость горения будет дозвуковой (волна дефлаграции). Следует сделать одну важную оговорку: введение линии разрыва вместо зоны горения вполне оправдано для случая, когда рассматриваемые длины волн возмущений оказываются много большими, чем ширина зоны горения. Другими словами, такая замена корректна, когда процессы внутри зоны горения устанавливаются намного быстрее, чем происходит существенное изменение газодинамических параметров. При таком подходе считается, что горение происходит «мгновенно» в зоне «нулевой» ширины, а все существенные особенности горения можно свести к **определённым условиям на линии разрыва** [55]. Следует отметить, что под зоной горения здесь понимается не только собственно область химического превращения смеси в продукты, но и область в которой происходят процессы (диффузия, теплопроводность и т. д.), отвечающие за распространение волны дефлаграции.

3.1.2 Описание стационарного горения.

В упомянутых ранее работах [35, 37] исследовалась устойчивость цилиндрического пламени, расходящегося из центра, при покоящихся продуктах горения. В настоящем исследовании иная схема потока: пламя распространяется навстречу расходящемуся из центра потоку и стационар-

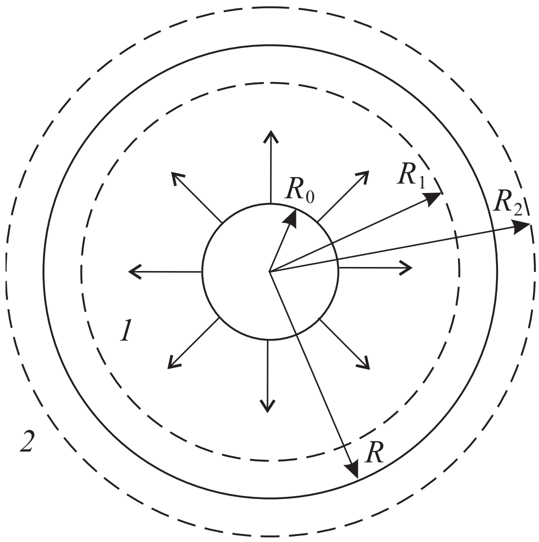


Рис. 3.1. Схема потока в кольцевой камере сгорания

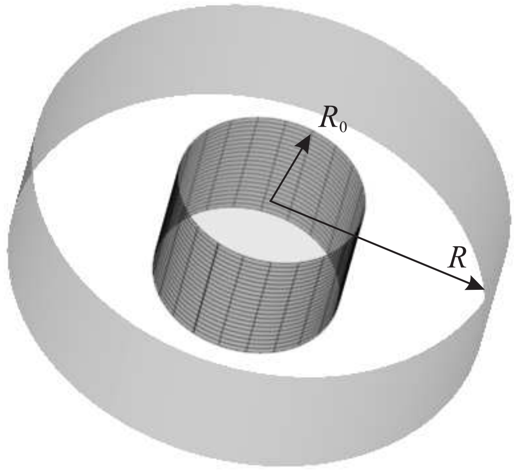


Рис. 3.2. Цилиндрический фронт пламени

но на определённом радиусе при равенстве скоростей потока и горения. Также в работах [35, 37] используется предположение о том, что отношение плотностей реагентов и продуктов, $E = \rho_1/\rho_2$, близко к единице, что равносильно $\varepsilon \equiv (\rho_1/\rho_2 - 1) \ll 1$. Модель, излагаемая далее, свободна от этого предположения.

Рассмотрим плоский радиально расходящийся стационарный <u>дозвуковой</u> поток горючей (перемешанной) смеси из начальной цилиндрической границы радиусом R_0 (рис. 3.1). Пунктирными линиями на рис. 3.1 схематично изображены внутренняя и внешняя границы R_1 и R_2 кольцевого канала. Следует отметить, что дозвуковые скорости потока и горения в области $r<R$ абсолютно не исключают проникновения акустических (звуковых) возмущений фронта пламени вплоть до оси кольцевого канала и соответствующего их влияния на исходную смесь.

Для описания потока выберем плоские полярные координаты (r, φ). Скорость истекающей смеси уменьшается с радиусом и на некотором определённом радиусе R достигнет величины, численно совпадающей со скоростью сгорания данной горючей смеси. Если на этом радиусе R смесь поджечь против её движения, то всё течение разделится фронтом горения на две области: область $\Omega_1=\{(r,\varphi)|R_0<r<R, 0\leq\varphi<2\pi\}$ – поток исходной горючей смеси (холодной) и область $\Omega_2=\{(r,\varphi)|r>R, 0\leq\varphi<2\pi\}$ – область потока высокотемпературных продуктов реакции. Параметры стационарного потока не зависят от времени (все производные по времени от параметров в уравнениях будут равны нулю) и угловой координаты, а цилиндрический фронт пламени, изображённый на рис. 3.2, будет покоиться в лабораторной системе отсчёта. Газ (смесь и продукты горения) будем считать*невязким, нетеплопроводным и совершенным с постоянными теплоёмкостями. Течение смеси и продуктов горения будем считать изоэнтропическим.* Тогда уравнения, описывающие стационарные течения смеси и продуктов в полярных координатах для истечения только по радиусу будут иметь вид:

$$u_j\frac{du_j}{dr} = -\frac{1}{\rho_j}\frac{dp_j}{dr}\,,\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\rho_j u_j\right) = 0\,,\ p_j = A_j\,\rho_j^{\gamma_j} \tag{3.1}$$

где u – это радиальная скорость, p – давление, ρ – плотность, γ – показатель политропы, A – постоянная, зависящая от термодинамических параметров на границах R_0 и R; индекс $j = 1{,}2$ обозначает параметры течения в областях Ω_1 и Ω_2. Уравнения (3.1) являются законами сохранения импульса, массы и энергии, соответственно.

Известно, что относительные изменения плотности в потоке связаны с квадратом числа Маха потока [56]. В дозвуковых потоках при числах Маха меньших 1/3 относительные изменения плотности потока не превышают 4%, и их изменениями можно пренебречь. Далее считается, что число Маха в области Ω_1 меньше 1/3 (см. раздел 3.4) и, соответственно, плотность стационарного потока считается постоянной. *Число Маха, таким образом, является малым параметром задачи.* Учитывая всё это, уравнения (3.1) имеют нижеследующие решения.

В области Ω_1:

$$u_1(r) = \frac{u_{01}R_0}{r}; p_1(r) = p_{01} + \frac{\rho_{01}u_{01}^2}{2} - \frac{\rho_{01}u_{01}^2R_0^2}{2r^2};$$
$$\rho_1 = \rho_{01}; T_1(r) = \frac{\mu_1\, p_1(r)}{\rho_{01}R_g}; c_1^2(r) = \frac{\gamma_1 p_1(r)}{\rho_{01}} \tag{3.2}$$

В области Ω_2 [56]:

$$R\rho_2(R)u_2(R) = r\rho_2(r)u_2(r);$$
$$\frac{u_2^2(R)}{2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\frac{p_2(R)}{\rho_2(R)} = \frac{u_2^2(r)}{2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\frac{p_2(r)}{\rho_2(r)}; \tag{3.3}$$
$$\frac{p_2(r)}{p_2(R)} = \left(\frac{\rho_2(r)}{\rho_2(R)}\right)^{\gamma_2}; T_2(r) = \frac{\mu_2 p_2(r)}{\rho_2(r)R_g}; c_2^2(r) = \frac{\gamma_2 p_2(r)}{\rho_2(r)},$$

где μ – молярная масса, R_g – универсальная газовая постоянная, T – температура, c^2 – квадрат скорости звука, $(u_{01}, p_{01}, \rho_{01})$ – значения газодинамических параметров на границе $r{=}R_0$; $(u_2(R), p_2(R), \rho_2(R))$ – значения газодинамических параметров на границе $r{=}R$ со стороны области Ω_2. Необходимо отметить, что стационарность решений (3.2) и (3.3) следует из условий постоянства расхода на границах $r{=}R_0$ и $r{=}R$.

Пусть $h_j{\equiv}\dfrac{\gamma_j}{\gamma_j-1}\dfrac{p_j}{\rho_j}$ – энтальпия единицы массы, D_f – скорость нормального горения, Q – теплота энерговыделения. На фронте горения $r{=}R$ ставятся условия экзотермического скачка ($Q{>}0$), представляющие собой законы сохранения, массы, импульса, энергии и условие стационарности фронта в лабораторной системе отсчёта:

$$\rho_{01}u_1 = \rho_2 u_2; r = R$$
$$p_1{+}\rho_{01}u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; r = R$$
$$h_1{+}Q + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}; r = R \tag{3.4}$$
$$D_f(p_1, T_1)|_R = u_1|_R \equiv \frac{u_{01}R_0}{R}$$

Нетрудно заметить, что первые три уравнения, при учёте неподвижности фронта горения в лабораторной системе отсчёта и заменах D на u_1 и $D-u$ на u_2, идентичны уравнениям (1.3), приведённым в разделе 1.1 при изложении общих положений классической теории волновых процессов горючих смесях. Следует также подчеркнуть, что условия (3.4) являются локальными и выполняются для каждой точки цилиндрического фронта горения R, где начальным состоянием являются параметры потока перед фронтом. Если известна зависимость скорости горения от термодинамических параметров задачи, то четвёртое уравнение в (3.4) позволяет вычислить расположение R стационарного фронта.

При известном энерговыделении Q, скорость горения можно вычислить при помощи условия Чепмена-Жуге (1.7) – условия касания прямой Михельсона к нижней, дефлаграционной, ветви адиабаты энерговыделения (см. рис. 1.1), так как поток дозвуковой. Как показано в разделе 1.3, в предположении химического равновесия исходной стехиометрической смеси и продуктов горения скорость *стационарного* дефлаграционного горения в точке Чемпена-Жуге зависит линейно от температуры и не зависит ни от давления, ни от кривизны фронта горения:

$$D_f(T_1) = \alpha\, T_1 \tag{3.5}$$

где коэффициент α зависит от конкретной горючей смеси. Если известна скорость горения (3.5), то при помощи условия Чепмена-Жуге (1.7) можно рассчитать равновесное энерговыделение Q, подставляя вместо скорости D зависимость (3.5).

При помощи условия Чепмена-Жуге (1.7) и уравнения прямой Михельсона (1.4) также можно рассчитать все газодинамические параметры за скачком ($u_2(R)$, $p_2(R)$, $\rho_2(R)$), необходимые для построения газодинамического решения (3.3) в области Ω_2. Однако решение (3.3) не потребуется в дальнейшем.

Условие равенства местной скорости звука за фронтом массовой скорости потока является одной из эквивалентных формулировок условия Чепмена-Жуге:

$$u_2(R) = c_2(R) = \sqrt{\frac{\gamma_2 p_2(R)}{\rho_2(R)}} \tag{3.6}$$

Это соотношение понадобится в дальнейшем при преобразовании граничных условий на фронте пламени для нестационарных возмущений параметров.

Рассмотрим подробнее последнее уравнение в системе соотношений (3.4). Используя соотношение (3.5) и решение (3.2), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\alpha T_{01}}{c_{01}} \left(1 + \frac{\gamma_1 M_{01}^2}{2} - \frac{\gamma_1 M_{01}^2}{2} \frac{R_0^2}{R^2} \right) = \frac{M_{01} R_0}{R};\ R > R_0\,,$$

разрешив которое относительно R/R_0, получим:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{M_{01} c_{01}}{2\alpha T_{01\text{tot}}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\gamma_1 \alpha^2 T_{01\text{tot}}^2}{c_{01\text{tot}}^2}} \right)\,, \tag{3.7}$$

где $T_{01\text{tot}} = T_{01}(1 + \frac{\gamma_1 M_{01}^2}{2})$, $c_{01\text{tot}}^2 = c_{01}^2(1 + \frac{\gamma_1 M_{01}^2}{2})$; T_{01}, $c_{01} = \sqrt{\gamma_1 p_{01}/\rho_{01}}$, $M_{01} = u_{01}/c_{01}$ – температура, скорость звука и число Маха на границе $r = R_0$, соответственно.

3.2 Малые возмущения стационарного горения

Рассмотрим теперь нестационарную задачу при допущениях, отмеченных в разделе 3.1.1. Наложим на все стационарные параметры малые возмущения, гармонически зависящие от времени:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{u}}_j(r,\varphi,t) = u_j(r)\mathbf{e}_r + (\delta u_{jr}(r,\varphi)\mathbf{e}_r + \delta u_{j\varphi}(r,\varphi)\mathbf{e}_\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t}\\
&\tilde{\rho}_j(r,\varphi,t) = \rho_j + \delta\rho_j(r,\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t}\\
&\delta p_1(r,\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t} = c_1^2(r)\delta\rho_1(r,\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t}\\
&\delta p_2(r,\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t} = [c_2^2(r)\delta\rho_2(r,\varphi) + \delta s_2(r,\varphi)p_2(r)/c_{v2}]\mathrm{e}^{-i\omega t}\\
&\tilde{R}(\varphi,t) = R + A(\varphi)\mathrm{e}^{-i\omega t}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

здесь и далее $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Так как на границе $r = R_0$ *не предполагается наличия возмущений энтропии, то третье соотношение в* (3.8) *показывает, что возмущения распространяются изоэнтропически в области* Ω_1*. Также предполагается, что возмущения скорости в области* Ω_1 *потенциальны.* На фронте горения происходит выделение тепла, следовательно, за фронтом горения и в области Ω_2 могут появиться возмущения энтропии. В силу этого в (3.8) выражение для возмущения давления в области записано в общем виде при наличии возмущений энтропии. Возмущение фронта горения моделируется функцией $A(\varphi)$ в пятом уравнении системы соотношений (3.8).

3.2.1 Условия для малых возмущений на фронте горения

Запишем известные [56] условия на фронте горения (сильный разрыв) в системе отсчёта фронта, представляющие собой законы сохранения массы, импульса, энергии и кинематическое условие, связывающее нормальную скорость горения относительно газа с нормальной скоростью движения границы:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\rho}_1(\tilde{u}_{1n}-\dot{\tilde{R}}_n)=\tilde{\rho}_2(\tilde{u}_{2n}-\dot{\tilde{R}}_n)\\
\tilde{p}_1+\tilde{\rho}_1(\tilde{u}_{1n}-\dot{\tilde{R}}_n)^2=\tilde{p}_2+\tilde{\rho}_2(\tilde{u}_{2n}-\dot{\tilde{R}}_n)^2;\ \tilde{\mathbf{u}}_{1\tau}=\tilde{\mathbf{u}}_{2\tau}\\
h_1(\tilde{p}_1,\tilde{\rho}_1)+Q(\tilde{p}_1,\tilde{\rho}_1)+\frac{(\tilde{u}_{1n}-\dot{\tilde{R}}_n)^2}{2}=h_2(\tilde{p}_2,\tilde{\rho}_2)+\frac{(\tilde{u}_{2n}-\dot{\tilde{R}}_n)^2}{2}\\
\tilde{u}_{1n}-\tilde{D}_f=\dot{\tilde{R}}_n
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Индексы n и τ обозначают нормальные и касательные составляющие скоростей, соответственно. *Возмущённая скорость горения* $\tilde{D}_f$ *в каждый момент времени является скоростью горения Чепмена-Жуге* (3.5) *и не зависит, например, от кривизны фронта горения, в отличие от модели Маркштейна* [57]. В линейном по возмущениям приближении:

$$
\tilde{u}_{jn}=u_j+\delta u_{jr}\mathrm{e}^{-i\omega t};\ \tilde{u}_{j\tau}=u_j\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\delta u_{j\varphi}\mathrm{e}^{-i\omega t};\ \dot{\tilde{R}}_n=\frac{\partial\tilde{R}}{\partial t}
$$

Далее будут использоваться следующие безразмерные величины:

$$
\begin{gathered}
\bar{\mathbf{u}}_1=\frac{\delta\mathbf{u}_1}{c_{01}};\ \bar{p}_1=\frac{\delta p_1}{\gamma_1 p_{01}};\ \bar{\rho}_1=\frac{\delta\rho_1}{\rho_{01}};\ \bar{c}_1^2=\frac{c_1^2}{c_{01}^2};\ \bar{T}_1=\frac{\delta T_1}{\gamma_1 T_{01}};\\
\bar{\omega}=\omega\frac{R-R_0}{c_{01}};\ \bar{A}(\varphi)=\frac{A(\varphi)}{R-R_0};\ \bar{r}=\frac{r}{R-R_0};\ \bar{t}=\frac{tc_{01}}{R-R_0};\\
\frac{\partial\bar{\tilde{R}}}{\partial\bar{t}}=\frac{1}{c_{01}}\frac{\partial\tilde{R}}{\partial t};\ M_1(\bar{r})=\frac{u_1((R-R_0)\bar{r})}{c_{01}}
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{\mathbf{u}}_2=\frac{\delta\mathbf{u}_2}{c_2(R)};\ \bar{p}_2=\frac{\delta p_2}{\gamma_2 p_2(R)};\ \bar{\rho}_2=\frac{\delta\rho_2}{\rho_2(R)};\ \bar{c}_2^2=\frac{c_2^2}{c_2^2(R)};\\
\bar{s}_2=\frac{\delta s_2}{c_{p2}};\ \bar{T}_2=\frac{\delta T_2}{\gamma_2 T_2(R)};\ M_2(\bar{r})=\frac{u_2((R-R_0)\bar{r})}{c_2(R)}
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

где $c_{01}^2=\gamma_1 p_{01}/\rho_{01}$ – значение скорости звука на границе R_0 со стороны области Ω_1.

Подставляя выражения (3.8) в условия (3.9) и пренебрегая членами более высокого порядка малости, чем первый по возмущениям, мы получим линейную систему уравнений для связи амплитуд возмущений между областями Ω_1 и Ω_2:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\bar{u}_{1r} + i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)}{M_1} + \bar{\rho}_1 = \frac{K_2\bar{u}_{2r} + i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)}{M_2K_2} + \bar{\rho}_2;\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
&2(\bar{u}_{1r}{+}i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)){+}\frac{M_1^2{+}\bar{c}_1^2}{M_1}\bar{\rho}_1{=}2(K_2\bar{u}_{2r}{+}i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)){+}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad{+}\frac{K_2(M_2^2{+}1)}{M_2}\bar{\rho}_2{+}\frac{K_2\bar{s}_2}{M_2};\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
&M_1\frac{R-R_0}{R}\frac{d\bar{A}(\varphi)}{d\varphi} + \bar{u}_{1\varphi} = M_2K_2\frac{R-R_0}{R}\frac{d\bar{A}(\varphi)}{d\varphi} + K_2\bar{u}_{2\varphi};\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
&(\bar{c}_1^2{+}\bar{Q})\bar{\rho}_1{+}M_1(\bar{u}_{1r}{+}i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)){=}K_2^2\bar{\rho}_2{+}\\
&\qquad\qquad{+}M_2K_2(K_2\bar{u}_{2r}{+}i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)){+}\frac{K_2^2\gamma_2\bar{s}_2}{\gamma_2{-}1};\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
&\bar{u}_{1r} - \frac{\alpha T_{01}\bar{c}_1^2(\gamma_1-1)}{c_{01}}\bar{\rho}_1 = -i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi);\ \bar{r}{=}\bar{R}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
K_2 = \frac{c_2(R)}{c_{01}};\ \bar{Q} = \frac{\rho_{01}}{c_{01}^2}\left(c_1^2\frac{\partial Q}{\partial\rho_1} + \frac{\partial Q}{\partial p_1}\right)
$$

При выводе системы (3.12) был использован закон сохранения массы в системе граничных условий (3.4) на фронте горения для стационарного случая: $\rho_{01}u_1{=}\rho_2u_2; r{=}R$.

Соотношение(3.6) в безразмерном виде эквивалентно тому, что число Маха за фронтом горения (M_2) равно единице. Если выразить возмущения на фронте со стороны области Ω_2 только через возмущения со стороны области Ω_1 и использовать соотношение (3.6) в безразмерном виде, то условия (3.12) существенно упрощаются (см. приложение):

$$
\begin{gathered}
\bar{\rho}_1 = 0;\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
\bar{u}_{1r} = -\,i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi);\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
\bar{s}_2 = 0;\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
\bar{u}_{2\varphi} = \frac{1}{K_2}\bar{u}_{1\varphi}{+}\left(\frac{M_1}{K_2} - 1\right)\frac{R{-}R_0}{R}\frac{d\bar{A}(\varphi)}{d\varphi};\ \bar{r}{=}\bar{R}
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

Согласно линейному приближению системы уравнений (3.12) и (3.13) записываются на стационарном фронте горения.

Четвёртое условие в (3.13) нужно для определения вихревых составляющих возмущений, которые могут появиться за фронтом горения. Так как на границе $r = R_0$ не предполагается вихревой составляющей возмущений, то возмущение скоростей в области Ω_1, как было отмечено ранее, можно описать одной скалярной функцией – потенциалом, градиент которого равен возмущению скорости.

Из (3.13), таким образом, видно, что система граничных условий расщепляется. Поэтому достаточно решить задачу в области Ω_1 с первыми двумя условиями в (3.13) на фронте горения, чтобы узнать поведение системы в целом.

3.2.2 Уравнения для малых возмущений

Введём безразмерную амплитуду потенциала возмущения скоростей:

$$\bar{f} = \frac{f}{c_{01}(R - R_0)}, \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\nabla} \bar{f} \, .$$

В нашем случае незавихренности и изоэнтропичности стационарного потока (3.2) и возмущений (3.8) в области Ω_1 потенциал $f' = f'(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (см. [53]):

$$\frac{d^2 f'}{dt^2} = c_1^2 \Delta f' + \frac{\nabla f' \cdot \nabla p_1}{\rho_1} + \frac{1}{c_1^2} \frac{df'}{dt} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla c_1^2 \, . \tag{3.14}$$

Возмущения давления и плотности удовлетворяют следующим соотношениям [53]:

$$\begin{gathered} \frac{\delta p_1}{\rho_1} = -\frac{\partial f'}{\partial t} - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla f' \equiv -\frac{df'}{dt} \\ \delta p_1 = c_1^2 \delta \rho_1 \end{gathered} \tag{3.15}$$

Учитывая периодическую зависимость возмущений от времени, соотношения (3.14)–(3.15) для случая стационарного потока (3.2) в безразмерных переменных и полярных координатах примут вид:

$$
\begin{gathered}
-\bar{\omega}^2 \bar{f} - 2i\bar{\omega} M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} + M_1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \right) = \\
= \bar{c}_1^2 \Delta \bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{p_1}{\rho_{01} c_{01}^2} \right) - i\omega \bar{f} \, \frac{M_1}{\bar{c}_1^2} \frac{\partial \bar{c}_1^2}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \frac{M_1^2}{\bar{c}_1^2} \frac{\partial \bar{c}_1^2}{\partial \bar{r}}
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{p}_1 = i\bar{\omega} \bar{f} - M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \\
\bar{p}_1 = \bar{c}_1^2 \bar{\rho}_1
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

где, согласно решению (3.2), использованы величины:

$$
\bar{c}_1^2 = \frac{\gamma_1 p_1}{\rho_{01} c_{01}^2} = 1 + \frac{\gamma_1 M_{01}^2}{2} - \frac{\gamma_1 M_1^2}{2}; \;\; \frac{p_1}{\rho_{01} c_{01}^2} = \frac{\bar{c}_1^2}{\gamma_1}; \;\; M_1 = \frac{M_{01} \bar{R}_0}{\bar{r}}
$$

Так как число Маха M_1 является малым параметром задачи, то с хорошей точностью $\bar{c}_1^2 = 1$, а в уравнениях всеми членами, пропорциональными более высокой степени числа Маха, чем первая, можно пренебречь. Приняв это во внимание, окончательно получим следующие уравнения в безразмерных переменных:

$$
\begin{gathered}
\bar{\omega}^2 \bar{f} + \Delta \bar{f} + 2i\bar{\omega} M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = 0 \\
\bar{p}_1 = \bar{\rho}_1 = i\bar{\omega} \bar{f} - M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}}
\end{gathered}
$$

Таким образом, в области Ω_1 в силу (3.13) получаем следующую задачу в терминах потенциала возмущения скоростей:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\omega}^2\bar{f} + \Delta\bar{f} + 2i\bar{\omega}M_1\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}} = 0\\
&\bar{\rho}_1 \equiv i\bar{\omega}\bar{f} - M_1\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}} = 0;\ \bar{r} = \bar{R}\\
&\bar{u}_{1r} \equiv \frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}} = -i\,\bar{\omega}\bar{A}(\varphi);\ \bar{r} = \bar{R}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Третье соотношение в (3.18) позволяет вычислить амплитуду возмущения фронта горения $\bar{A}(\varphi)$.

3.3 Модели малых возмущений стационарного горения и устойчивости цилиндрического фронта

3.3.1 Условия для возмущений на границе $r{=}R_0$

В предыдущем разделе было получено уравнение в области Ω_1 и граничное условие для потенциала на фронте горения R; согласно (3.18):

$$
\begin{aligned}
&\bar{\omega}^2\bar{f} + \Delta\bar{f} = -2i\bar{\omega}M_1\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}}\\
&\bar{\rho}_1 \equiv i\bar{\omega}\bar{f} - M_1\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}} = 0;\ \bar{r} = \bar{R}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

где $\Delta\bar{f} \equiv \dfrac{1}{\bar{r}}\dfrac{\partial}{\partial\bar{r}}(\bar{r}\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{r}}) + \dfrac{1}{\bar{r}^2}\dfrac{\partial^2\bar{f}}{\partial\varphi^2}$ – безразмерный оператор Лапласа в полярных координатах.

Для полного определения задачи в области Ω_1 нужно ещё поставить условие на границе $r{=}R_0$. Вид этого условия зависит от того, каким образом устроена подача горючей смеси. Мы рассмотрим три случая: постоянный расход, постоянная радиальная скорость, постоянное давление. Линеаризованные граничные условия для безразмерного потенциала, соответствующие этим ситуациям, приведены ниже:

$$\bar{q} \equiv i\bar{\omega}M_1\bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}}(1 - M_1^2) = 0;\ \bar{r} = \bar{R}_0 \tag{3.20}$$

$$\bar{u}_{1r} \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = 0;\ \bar{r} = \bar{R}_0 \tag{3.21}$$

$$\bar{p}_1 \equiv i\bar{\omega}\bar{f} - M_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = 0;\ \bar{r} = \bar{R}_0 \tag{3.22}$$

где $\bar{q} = \delta q/\rho_{01}u_{01}$ – безразмерное возмущение расхода. Следует отметить, что условие постоянства расхода (3.20) записано при учёте возмущений плотности основного потока (см. второе соотношение в (3.8)).

Соотношения (3.19) вместе с условием постоянства расхода (3.20) далее будем называть – модель М-1; (3.19) вместе с условием постоянства радиальной скорости (3.21) будем называть – модель М-2 и, наконец, (3.19) вместе с условием постоянства давления (3.22) – модель М-3.

При разделении переменных (метод Фурье) уравнение (3.19) в области Ω_1 имеет следующее общее решение, выражающееся через функции Бесселя нецелого индекса:

$$\begin{gathered} \bar{f}_k(\bar{r},\varphi) = \bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}[b_kJ(\chi,\bar{\omega}\bar{r}) + d_kJ(-\chi,\bar{\omega}\bar{r})]\mathrm{e}^{i\,k\,\varphi} \\ \chi = \sqrt{k^2 - (M_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega})^2} \end{gathered} \tag{3.23}$$

где k - константа разделения переменных, целое число, выделяющее отдельную угловую моду колебаний; (b_k, d_k) - произвольные постоянные комплексные амплитуды. Функция Бесселя нецелого индекса определяется следующим образом [54]:

$$J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p\,!\Gamma(1+\chi+p)}\left(\frac{\bar{\omega}\bar{r}}{2}\right)^{2p+\chi} \tag{3.24}$$

Комплексную амплитуду возмущения фронта горения a_k можно найти при помощи решения (3.23) и третьего соотношения в системе (3.18), предварительно разложив функцию $\bar{A}(\varphi)$ в ряд Фурье по угловой координате.

$$\bar{A}(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}$$

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{r}} = -i\bar{\omega} a_k \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi};\ \bar{r} = \bar{R}$$

3.3.2 Многозначность функций и мероморфность резольвенты

Из решения (3.23) видно, что каждая мода является многозначной аналитической функцией по переменным $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$. Интересен физический смысл многозначности мод. Согласно решению (3.23) и определению (3.24), значение функции на разных ветвях будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{f}_k(\bar{r},\varphi) =& \mathrm{e}^{2\pi M_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega} S_1}\,\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}} \times \\ & \times [b_k \mathrm{e}^{2\pi\chi S_2 i} J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}) + d_k \mathrm{e}^{-2\pi\chi S_3 i} J(-\chi,\bar{\omega}\bar{r})] \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}\end{aligned} \tag{3.25}$$

где S_j (j=1,2,3) - целые числа за исключением нуля, а теми же символами, что и в решении (3.23), обозначены значения функций на главной ветви, когда все $S_j = 0$. Из (3.25) видно, что изменение значений функций на разных ветвях относительно главной ветви равносильно определённому изменению значений аргументов (фаз) и значений модулей комплексных амплитуд. Отдельные ветви выделяет и знак корня χ согласно определению квадратного корня из комплексного числа. Смена знака корня на противоположный, как видно из (3.25), ничего не меняет с точностью до переобозначения комплексных амплитуд соответствующими символами. Таким образом, справедливо

Замечание 3.1. Изменение значений многозначного аналитического решения (3.25) на разных ветвях относительно главной ветви задаётся изменением комплексных амплитуд решения.

При подстановке моды (3.25) в соответствующие граничные условия, например, модели М-3 мы получим однородную систему из двух линейных уравнений для нахождения неизвестных комплексных амплитуд $\vec{x} = (b_k, d_k)$:

$$\hat{G}(\bar{\omega}; k) \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.26}$$

При делении уравнений (3.26) на не равный нулю множитель $\mathrm{e}^{2\pi M_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}S_1 + i\,k\,\varphi}$ (см. (3.25)) элементы матрицы системы для модели М-3 будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{G}_{11}{=}\mathrm{e}^{2\pi\chi S_2 i}[i\bar{\omega}\,\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}){-}M_1\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}))];\ \bar{r}{=}\bar{R}_0\\
&\hat{G}_{12}{=}\mathrm{e}^{-2\pi\chi S_3 i}[i\bar{\omega}\,\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(-\chi,\bar{\omega}\bar{r}){-}M_1\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(-\chi,\bar{\omega}\bar{r}))];\bar{r}{=}\bar{R}_0\\
&\hat{G}_{21}{=}\mathrm{e}^{2\pi\chi S_2 i}[i\bar{\omega}\,\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}){-}M_1\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0\,\bar{\omega}}J(\chi,\bar{\omega}\bar{r}))];\ \bar{r}{=}\bar{R}\\
&\hat{G}_{22}{=}\mathrm{e}^{-2\pi\chi S_3 i}[i\bar{\omega}\,\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0,\bar{\omega}}J(-\chi,\bar{\omega}\bar{r}){-}M_1\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}^{-iM_{01}\bar{R}_0,\bar{\omega}}J(-\chi,\bar{\omega}\bar{r}))];\bar{r}{=}\bar{R}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Известно, что система (3.26) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю:

$$\det(\hat{G}(\bar{\omega}; k)) = 0 \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28) определяет *квазисобственные частоты* $\bar{\omega}_k$ (реальные значения определяют частоты колебаний, а мнимые значения квазисобственных частот определяют развитие колебаний по времени). Для каждого k существует набор квазисобственных частот $\bar{\omega}_{kl}$, соответствующих радиальным модам колебаний, где l - радиальный номер моды. При k=0 уравнение даёт частоты чисто радиальных колебаний. Следует отметить, что высокие радиальные номера мод соответствуют более коротким волнам. Поэтому при достаточно высоких радиальных номерах длины волн возмущений станут сравнимыми с толщиной зоны горения, и данные модели перестанут быть корректными (см. раздел 3.1.1).

Согласно (3.27) определитель матрицы будет являться *многозначной аналитической функцией комплексного переменного* $\bar{\omega}$ *с дискретным количеством нулей.* Заметим, что *нули определителя на разных ветвях будут такими же, что и на главной ветви*, так как значения определителя на разных ветвях будут определяться умножением значения на главной ветви на не равный нулю множитель $\mathrm{e}^{2\pi\chi(S_2-S_3)i}$.

Как известно, матрица системы (3.26) обратима, если её определитель не равен нулю. Обратная матрица, называется резольвентой задачи:

$$\hat{\mathfrak{R}}(\bar{\omega};k)=\hat{G}^{-1}(\bar{\omega};k) \tag{3.29}$$

Резольвента также является многозначной аналитической функцией комплексного переменного $\bar{\omega}$ и имеет полюсы в точках нулей определителя (3.28). Таким образом, *резольвента задачи является мероморфной функцией комплексного переменного* $\bar{\omega}$ *на римановой поверхности ее аналитического продолжения.*

Если составить системы уравнений для нахождения произвольных комплексных амплитуд в моделях М-1 и М-2, то можно прийти к аналогичным выводам относительно определителя матрицы системы уравнений и резольвенты в этих моделях. Таким образом, справедливо

Замечание 3.2. Определитель матрицы системы уравнений для отыскания комплексных амплитуд возмущений в моделях М-1, М-2 и М-3 является многозначной аналитической функцией комплексного переменного $\bar{\omega}$ с дискретным количеством нулей. Резольвента в моделях М-1, М-2 и М-3 является мероморфной функцией на римановой поверхности.

Общая теория рассмотренных здесь краевых задач подробно излагается в книге [58].

3.4 Расчёт малых возмущений горения в кольцевой камере

Проведём конкретные расчёты для камеры, на которой проводились эксперименты по сжиганию топлива в поперечных квазидетонационных волнах [8, 9, 13].

В начальный момент в выходном сечении, радиуса R_{in}, подачи горючей смеси из исходного ресивера скорость истечения определяется перепадом давления в исходном ресивере и в ресивере для продуктов (классическая задача о распаде разрыва) и при большом их отношении достигает критической скорости истечения (равной местной скорости звука). Волна сжатия в области $r{>}R_{in}$ и волна разрежения в области $r{<}R_{in}$ вызовут нестационарное истечение смеси из исходного ресивера. Если объем резервуара с исходной горючей смесью достаточно велик, а истечение происходит в объем большого размера, то со временем поток станет стационарным. Параметры такого потока удовлетворяют уравнениям (3.1) и имеют следующее решение [56]:

$$
\begin{gathered}
R_{in}\rho_{cr}u_{cr} = r\rho_1(r)u_1(r);\\
\frac{u_{cr}^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_{cr}}{\rho_{cr}} = \frac{u_1^2(r)}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_1(r)}{\rho_1(r)};\\
\frac{p_1(r)}{p_{cr}} = \left(\frac{\rho_1(r)}{\rho_{cr}}\right)^{\gamma_1};\ T_1(r) = \frac{\mu_1 p_1(r)}{\rho_1(r)R_g};\ c_1^2(r) = \frac{\gamma_1 p_1(r)}{\rho_1(r)};\\
M_1 \equiv \frac{u_1}{c_1} \leq 1\,,
\end{gathered}
\tag{3.30}
$$

где индексом «*cr*» обозначены критические параметры в выходном сечении $R_{cr} = R_{in}$, которые можно вычислить по параметрам состояния горючей смеси в ресивере через известные соотношения [56].

Число Маха в потоке (3.30) монотонно уменьшается с увеличением радиуса и на определённом радиусе R_0 (рис. 3.1) достигнет значения 1/3. Далее можно считать плотность в потоке неизменной. Тогда для параметров течения в области Ω_1 справедливы соотношения (3.2), приведённые в разделе 3.1.2. Газодинамические параметры $(u_{01}, p_{01}, \rho_{01})$ на границе $r = R_0$ (в том числе и начальный радиус R_0) можно вычислить, используя соотношения (3.30) при условии, что на радиусе R_0 число Маха равно 1/3: $M_1(r)|_{r=R_0} = 1/3$.

В эксперименте использовалась стехиометрическая ацетилен-кислородная смесь с γ_1=1,3323, μ_1=0,0303 кг/моль в ресивере с давлением p_0=195 мм рт.ст. (25 787 Па) и температурой T_0=300 К. α=0,1369 м/(с·К) согласно работе [38]. Скорость звука в ресивере и плотность будут следующими: c_0=331,1625 м/с, ρ_0=0,3133 кг/м^3. Радиус выходного сечения R_{in}=3,75 мм. Тогда газодинамические параметры на радиусе R_0=7 мм (где M_1=1/3), согласно газодинамическому решению (3.30), будут следующими: p_{01}=23 964 Па, ρ_{01}=0,2965 кг/м^3, c_{01}=328,1474 м/с, T_{01}=294,5620 К, u_{01}=109,3825 м/с.

При выше указанных параметрах радиус R (положение фронта), вычисленный соотношению (3.7) будет меньше, чем положение срединного радиуса в кольцевом канале, где инициируется горение: $R_{exp} = (R_1 + R_2)/2 = 103$ мм [8, 9, 13]. Поэтому можно поступить следующим образом.

По известному фронту горения R_{exp} и найденным газодинамическим параметрам $(c_{01}, T_{01}, M_{01}{=}1/3)$, при помощи следствия из условия стационарности фронта (3.7), можно вычислить начальный радиус R_0. Вычисленный таким образом начальный радиус: R_0=40,35 мм. Здесь может возникнуть, недоразумение, связанное с тем, что фактический R_0, соответствующий числу Маха равному 1/3, будет меньше, чем вычисленный по соотношению (3.7) при сохранении всех газодинамических параметров. Однако инициирование производится принудительно на вышеуказанном радиусе поперёк течения смеси; к тому же неизвестен характер выхода на стационар основного радиального потока. Поэтому существует определённая степень свободы в выборе начальных данных (граничных условий) для соотношений (3.2) и (3.4) таким образом, чтобы радиус фронта горения соответствовал экспериментальному: R_{exp}=103 мм.

3.4.1 Устойчивость цилиндрического фронта горения

Сведём найденные при помощи уравнения (3.28) квазисобственные частоты в таблицы.

Таблица 3.1. Квазисобственные частоты $\bar{\omega}_{kl}$ в модели М-1 при $R=(R_1+R_2)/2$

k	l			
	1	2	3	4
0	$1{,}82-0{,}144\,i$	$4{,}73-0{,}161\,i$	$7{,}76-0{,}164\,i$	$10{,}82-0{,}165\,i$
1	$2{,}11-0{,}122\,i$	$4{,}84-0{,}158\,i$	$7{,}82-0{,}163\,i$	$10{,}86-0{,}165\,i$
2	$2{,}79-0{,}094\,i$	$5{,}14-0{,}149\,i$	$8{,}00-0{,}160\,i$	$10{,}99-0{,}163\,i$
3	$3{,}59-0{,}080\,i$	$5{,}63-0{,}135\,i$	$8{,}29-0{,}155\,i$	$11{,}19-0{,}161\,i$
4	$4{,}41-0{,}075\,i$	$6{,}27-0{,}119\,i$	$8{,}70-0{,}149\,i$	$11{,}48-0{,}158\,i$

В таблице 3.1 приведены квазисобственные частоты для граничных условий в модели М-1. Из таблицы 3.1 видно, что все квазисобственные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Так как при записи зависимости от времени мы использовали множитель $\mathrm{e}^{-i\bar{\omega}\bar{t}}$, то это значит, что **моды с приведёнными в таблице 3.1 квазисобственными частотами устойчивы по малым периодическим возмущениям.**

Таблица 3.2. Квазисобственные частоты $\bar{\omega}_{kl}$ в модели М-2 при $R{=}(R_1{+}R_2)/2$

k	l			
	1	2	3	4
0	$1{,}84 + 0{,}127\,i$	$4{,}75 + 0{,}179\,i$	$7{,}77 + 0{,}187\,i$	$10{,}82 + 0{,}190\,i$
1	$2{,}14 + 0{,}133\,i$	$4{,}85 + 0{,}188\,i$	$7{,}83 + 0{,}192\,i$	$10{,}87 + 0{,}193\,i$
2	$2{,}83 + 0{,}113\,i$	$5{,}17 + 0{,}210\,i$	$8{,}01 + 0{,}205\,i$	$10{,}99 + 0{,}200\,i$
3	$3{,}64 + 0{,}059\,i$	$5{,}67 + 0{,}231\,i$	$8{,}31 + 0{,}226\,i$	$11{,}20 + 0{,}212\,i$
4	$4{,}43 + 0{,}002\,i$	$6{,}34 + 0{,}227\,i$	$8{,}73 + 0{,}253\,i$	$11{,}50 + 0{,}230\,i$

Таблица 3.3. Квазисобственные частоты $\bar{\omega}_{kl}$ в модели М-3 при $R{=}(R_1{+}R_2)/2$

k	l			
	1	2	3	4
0	$3{,}03 + 0{,}199\,i$	$6{,}13 + 0{,}194\,i$	$9{,}21 + 0{,}194\,i$	$12{,}29 + 0{,}193\,i$
1	$3{,}15 + 0{,}163\,i$	$6{,}20 + 0{,}184\,i$	$9{,}26 + 0{,}189\,i$	$12{,}33 + 0{,}190\,i$
2	$3{,}51 + 0{,}089\,i$	$6{,}40 + 0{,}155\,i$	$9{,}40 + 0{,}174\,i$	$12{,}43 + 0{,}182\,i$
3	$4{,}02 + 0{,}021\,i$	$6{,}73 + 0{,}114\,i$	$9{,}63 + 0{,}153\,i$	$12{,}61 + 0{,}169\,i$
4	$4{,}63 - 0{,}024\,i$	$7{,}17 + 0{,}070\,i$	$9{,}95 + 0{,}125\,i$	$12{,}86 + 0{,}152\,i$

В таблице 3.2 приведены квазисобственные частоты для граничных условий в модели М-2. Все они имеют положительную мнимую часть. Таким образом, **в модели М-2 существуют моды, неустойчивые по малым периодическим возмущениям.**

В таблице 3.3 приведены квазисобственные частоты для граничных условий в модели М-3. Из таблицы 3.3 видно, что и в этом случае есть частоты, имеющие положительную мнимую часть. То есть, **в модели М-3 существуют моды, неустойчивые по малым периодическим возмущениям.**

Как показал Ландау в своей работе [18], неограниченный бесконечно тонки плоский фронт горения абсолютно неустойчив на *линейной* стадии развития возмущений. В работе [25] исследовался ограниченный плоский фронт горения, и показано, что на *нелинейной* стадии развития линейные неустойчивые возмущения исчезают.

Не следует ожидать, что в предельном случае очень большого радиуса (малая кривизна) цилиндрического фронта горения модели в данной работе перейдут в модель Ландау [18]. Это связано с тем, что всегда рассматривается конечная область пространства с неизбежным учётом влияния системы подачи горючей смеси (см. условия (3.20)-(3.22)). Поэтому о таком переходе говорить некорректно. Однако, о таком переходе можно говорить только локально, в малой окрестности около фронта горения при его малой кривизне. В этом случае модель данной работы *не перейдёт* в модель Ландау, так как в модели Ландау рассматривается горение *в режиме постоянного давления*, в отличие от настоящей работы, рассматривающей горение *в режиме Чепмена-Жуге*. Существенно также, что у Ландау [18] не рассматриваются малые возмущения плотности потока и закон сохранения энергии на фронте горения, в отличие от модели данной работы (см. условия (3.9), (3.12)).

3.4.2 Вращающиеся окружные волны возмущения фронта горения. Сравнение с экспериментом

Выражение для возмущённого фронта горения, соответствующего моде $\{k{-}l\}$ в моделях М-1, М-2 и М-3, в безразмерных величинах имеет имеет вид:

$$\bar{\bar{R}}(\varphi, t) = \bar{R} + a_{kl} \exp[ik\varphi - i\bar{\omega}_{kl}\bar{t}] \equiv \bar{R} + a_{kl} \exp[ik(\varphi - \frac{\bar{\omega}_{kl}}{k}\bar{t})] \qquad (3.31)$$

Из соотношения (3.31) (срав. с соотношением (2.15)) видно, что существует поперечная окружная волна возмущения фронта горения, распространяющаяся (вращающаяся) по кругу безразмерного радиуса $\bar{R}$ с угловой скоростью $\mathrm{Re}(\bar{\omega}_{kl})/k$. Для моды $\{k{-}l\}$, аналогично изложенному в разделе 2.1.3, возмущённый фронт горения будет иметь k локальных пучностей («горбов»), вращающихся по окружности безразмерного радиуса $\bar{R}$ с соответствующей угловой скоростью $\mathrm{Re}(\bar{\omega}_{kl})/k$ (см. рис. 2.2).

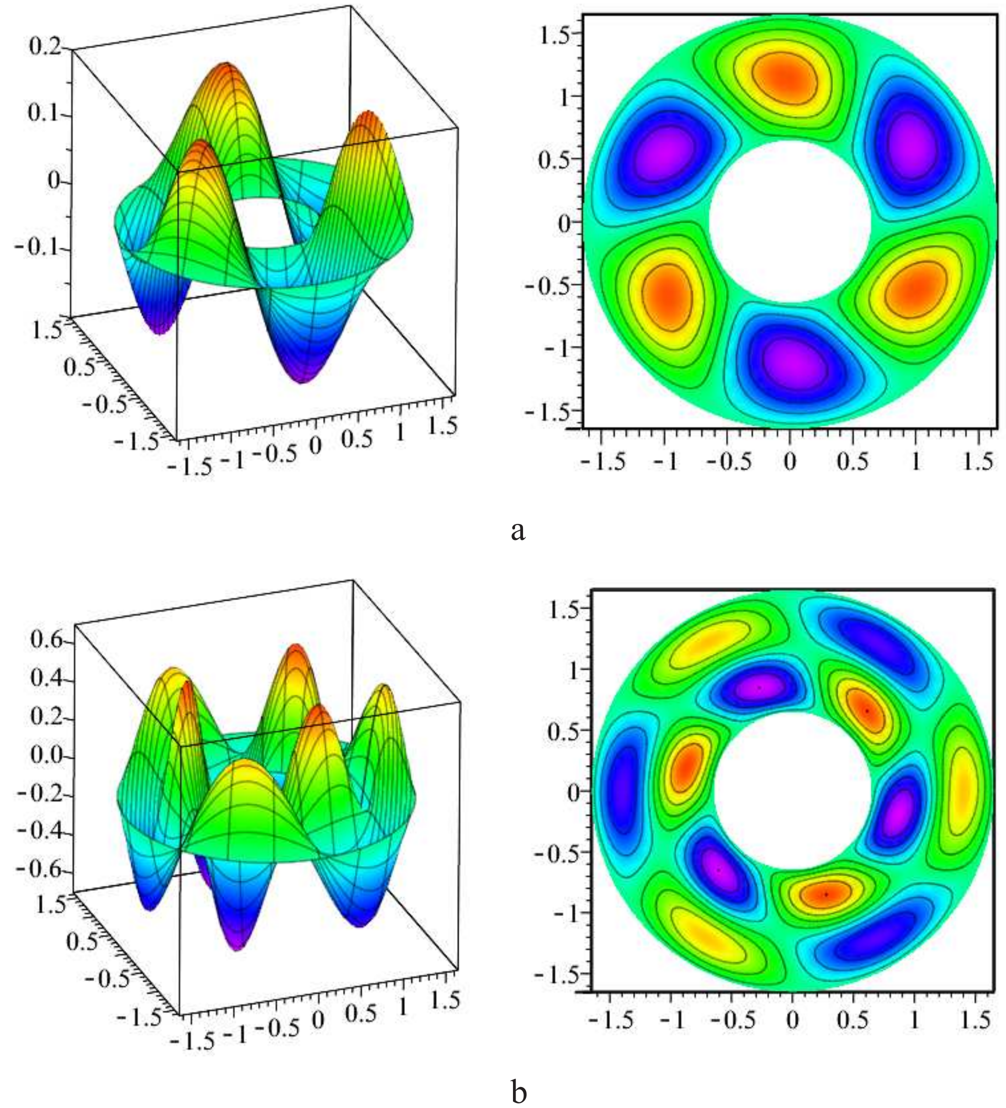


Рис. 3.3. Распределение возмущений давления для моды $\{3{-}1\}$ (a) и $\{3{-}2\}$ (b) в модели М-3

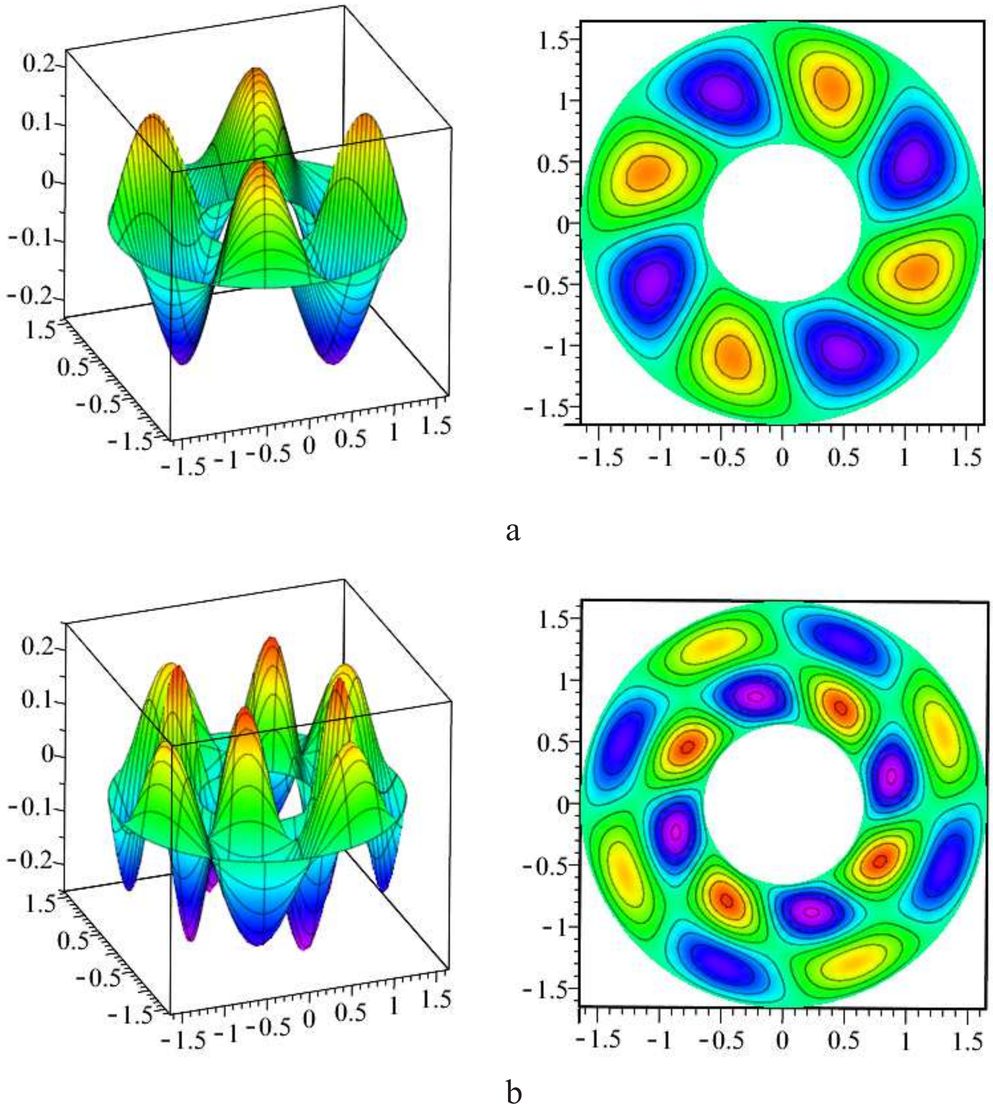


Рис. 3.4. Распределение возмущений давления для моды $\{4{-}1\}$ (a) и $\{4{-}2\}$ (b) в модели M-3

Для наглядности на рисунках 3.3 и 3.4 в области Ω_1 представлены распределения безразмерных возмущений давления по углу и безразмерному радиусу для некоторых мод в модели M-3 с равенством нулю возмущения давления на начальном радиусе. Для других граничных условий на начальном радиусе механика колебаний будет аналогичной. Отличаться могут значения функций на начальном радиусе, начальные фазы колебаний и устойчивость.

Также можно рассчитать скорость вращения «горбов» по окружности стационарного фронта радиуса R:

$$V_{kl} = \frac{c_{01}\mathrm{Re}(\bar{\omega}_{kl})}{k} \cdot \bar{R} \tag{3.32}$$

В экспериментах по сжиганию топлива в поперечных волнах изучались режимы с тремя и четырьмя волнами (головами) [8, 9]. В таблице 3.4 приведены скорости вращения вдоль окружной координаты, вычисленные по соотношению (3.32) для некоторых мод с тремя и четырьмя «горбами» и различных граничных условий на начальном радиусе R_0. Скорость звука $c_2(R)$ в продуктах реакции сразу за фронтом дефлаграции Чепмена-Жуге составляет 1126 м/с. Из таблицы 3.4 видно, что скорости вращения «горбов» в 2-5 раз выше, чем скорость звука в несгоревшей смеси перед фронтом горения ($c_1(R)$=338 м/с). С увеличением радиального номера l скорость вращения возрастает, а с увеличением k, количества «горбов» - падает. Из таблицы 3.4 видно, что существуют моды, скорость вращения которых располагается в диапазоне выше 1126 м/с – скорости звука в продуктах реакции. Именно такое качественное поведение скоростей квазидетонационных волн наблюдается в экспериментах [8, 9, 13], что было отмечено во введении.

Таблица 3.4: Скорости вращения окружных волн при R=(R_1+R_2)/2.

мода	V_{kl}, м/с		
	М-1: $\bar{q}\vert_{\bar{R}_0} = 0$	М-2: $\bar{u}_{1r}\vert_{\bar{R}_0} = 0$	М-3: $\bar{p}_1\vert_{\bar{R}_0} = 0$
$\{3{-}1\}$	647	654	724
$\{3{-}2\}$	1012	1020	1211
$\{3{-}3\}$	1491	1495	1732
$\{4{-}1\}$	595	599	625
$\{4{-}2\}$	846	857	967
$\{4{-}3\}$	1173	1177	1342

Следует отметить, что скорость вращения «горбов» по окружной координате, возникающая из акустических возмущений фронта горения является скоростью точки контакта слоёв реагентов и продуктов реакции. Эта скорость может существенно отличаться от скорости звука, поэтому возможен сверхзвуковой режим вращения «горбов».

Следует также отметить важное замечание, касающееся свойств моделей М-1, М-2 и М-3. Определитель в уравнении (3.28) (см. раздел 3.3.2), определяющем квазисобственные частоты, является следующей функцией начальных (граничных) условий:

$$\det \hat{G} = g\left(M_{01}, \bar{R}_0, \bar{R}, k; \bar{\omega}\right).$$

Откуда следует, что квазисобственные частоты будут являться функциями начальных (граничных) условий:

$$\bar{\omega}_{kl} = \bar{\omega}_{kl}\left(M_{01}, \bar{R}_0, \bar{R}\right). \tag{3.33}$$

Отношение радиуса фронта горения R к радиусу R_0 (3.7) (см. раздел 3.1.2) является функцией газодинамических параметров на границе $r{=}R_0$:

$$\frac{R}{R_0} = \Lambda\left(M_{01} \equiv u_{01}/c_{01}, c_{01}, T_{01}\right), \tag{3.34}$$

откуда следует, что безразмерные радиусы вычисляются по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{R} &\equiv \frac{R}{R - R_0} = \frac{\Lambda}{\Lambda - 1} \\ \bar{R}_0 &\equiv \frac{R_0}{R - R_0} = \frac{1}{\Lambda - 1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Из соотношений (3.35) видно, что для фиксированного набора газодинамических параметров (M_{01}, c_{01}, T_{01}) безразмерные радиусы будут постоянными для *любой* пары чисел (R_0, R), удовлетворяющей соотношению (3.34) (или (3.7)). Так как квазисобственные частоты являются функциями начальных условий (3.33) и скорости вращения поперечных окружных волн V_{kl} определяются формулой (3.32), то справедливо

Замечание 3.3. Для фиксированного набора газодинамических параметров (M_{01}, c_{01}, T_{01}) на начальной границе $r{=}R_0$ квазисобственные частоты $\bar{\omega}_{kl}$ и скорости вращения поперечных окружных волн возмущения фронта горения V_{kl} в моделях М-1, М-2, М-3 будут одинаковыми для любой пары чисел (R_0, R), удовлетворяющей условию стационарного фронта горения (3.7).

В частности, квазисобственные частоты и скорости вращения будут одинаковыми для пар радиусов (R_0=7 мм, $R{=}\Lambda R_0$) и (R_{exp}=103 мм, $R_0{=}R/\Lambda$=40,35 мм), так как для этих пар одинаковы начальные газодинамические параметры (M_{01}=1/3, c_{01}=328,1474 м/с, T_{01}=294,5620 K).

Как следует из замечания 3.3, скорости вращения могут измениться при изменении начальных газодинамических параметров на границе $r{=}R_0$. Интересно посмотреть изменение скоростей вращения окружных волн возмущения фронта горения для неустойчивых мод при изменении начальной скорости потока u_{01} и фиксированном радиусе границы $r{=}R_0$. Согласно условию стационарности фронта горения (3.7) изменение начальных газодинамических параметров влечёт за собой изменение положения фронта горения R и наоборот, причём соотношение (3.7) определяет зависимость $R\,(u_{01})$ явно и $u_{01}\,(R)$ – неявно.

На рис. 3.5–3.6 представлены зависимости скорости вращения окружных волн возмущения фронта горения от начальной скорости u_{01} на границе R_0=40,35 мм для некоторых мод с тремя и четырьмя «горбами». Чёрными квадратными метками отмечены границы существования решения при $R(u_{01}) = R_1$ и $R(u_{01}) = R_2$ – внутренней и внешней границам кольцевого канала, соответственно. На рис. 3.7 изображена зависимость скорости звука в горючей смеси перед фронтом горения от положения фронта в кольцевом канале.

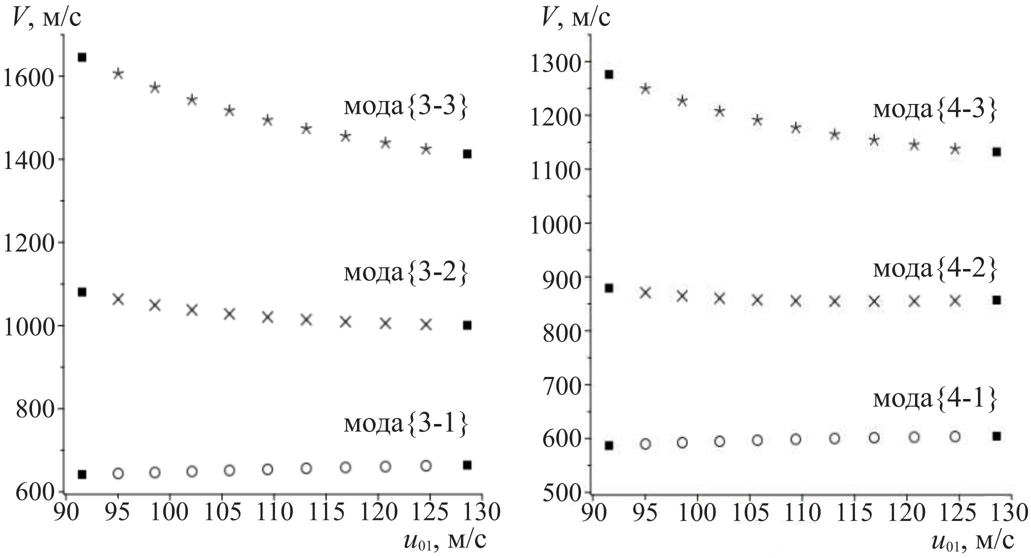


Рис. 3.5. Зависимость скоростей вращения окружных волн от начальной скорости потока в модели М-2

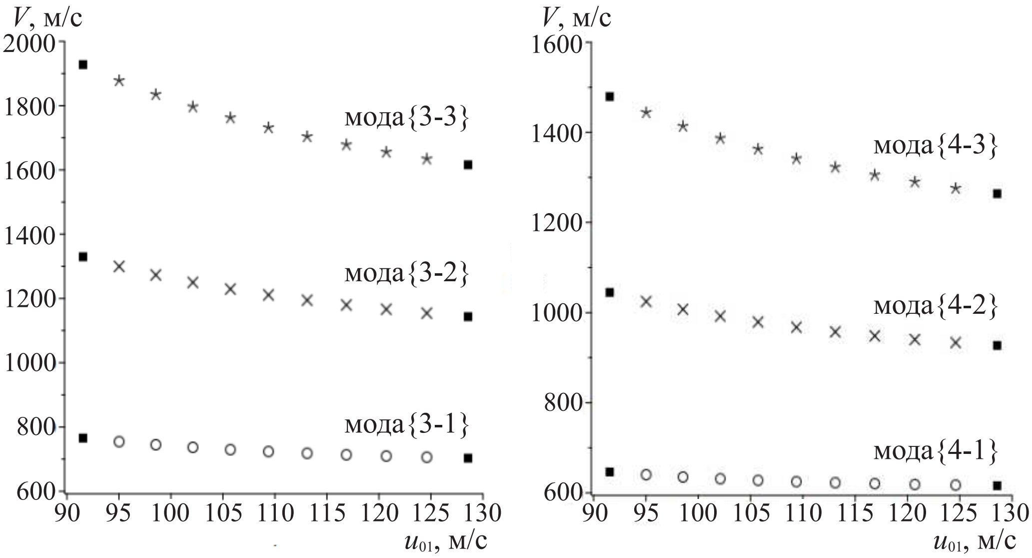


Рис. 3.6. Зависимость скоростей вращения окружных волн от начальной скорости потока в модели М-3

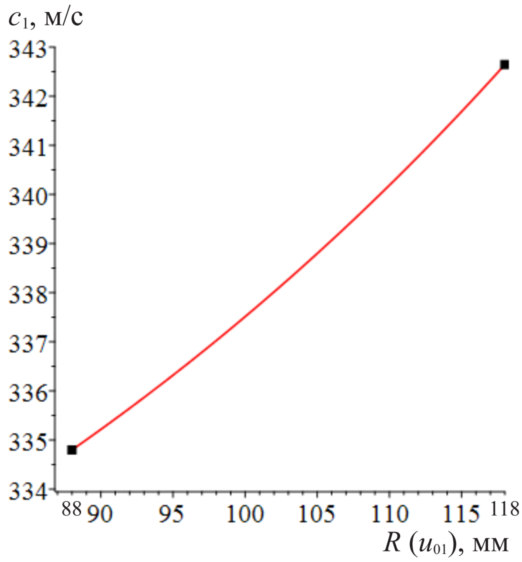


Рис. 3.7. Зависимость скорости звука перед фронтом горения от положения фронта в кольцевом канале (от начальной скорости потока u_{01})

Как видно из зависимостей, представленных на рис. 3.5–3.7, скорости вращения окружных волн всегда больше скорости звука c_1 в горючей смеси перед фронтом горения. Из рис. 3.6 видно, что для модели М-3 при увеличении начальной скорости u_{01} скорости вращения окружных волн у представленных мод монотонно убывают. В модели же М-2 (рис. 3.5) скорости вращения окружных волн у мод $\{3{-}1\}$ и $\{4{-}1\}$ при увеличении начальной скорости u_{01} монотонно возрастают.

3.4.3 Скорости роста неустойчивых мод

При записи зависимости от времени использовался множитель $\mathrm{e}^{-i\bar{\omega}_{kl}\bar{t}}$. Тогда безразмерная скорость роста амплитуды по времени у неустойчивой моды возмущения фронта горения, согласно определению квазисобственной частоты $\bar{\omega}_{kl}$, вычисляется следующим образом:

$$\psi = \mathrm{Im}(\bar{\omega}_{kl}) \tag{3.36}$$

Величина (3.36) также называется инкрементом амплитуды. В случае если инкремент амплитуды имеет отрицательное значение, то это значит, что имеет место быть устойчивость и затухание амплитуды по времени.

На рис. 3.8–3.9 представлены зависимости инкрементов амплитуды от начальной скорости потока u_{01} для некоторых мод.

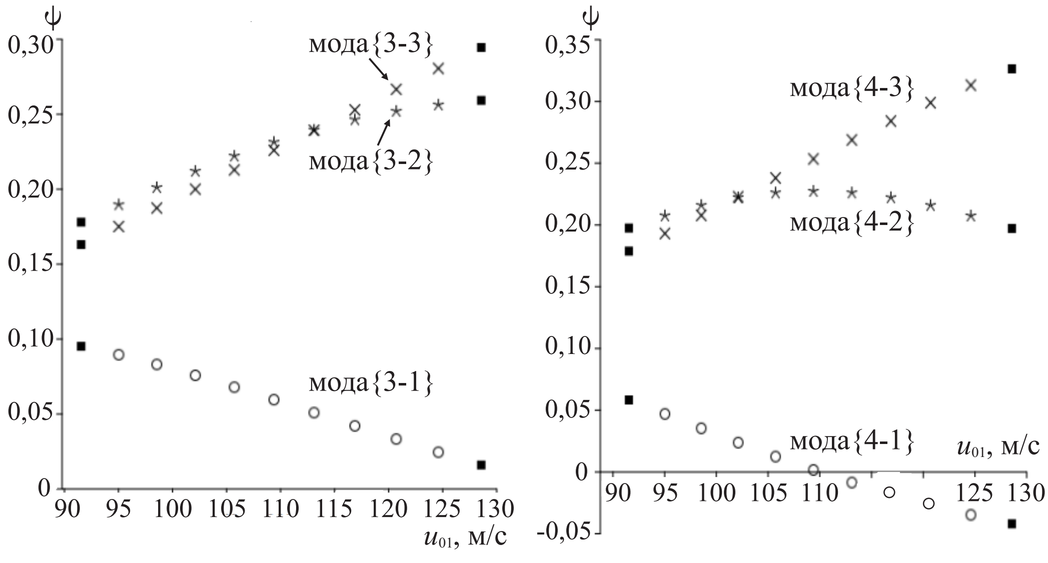


Рис. 3.8. Зависимость инкрементов амплитуды возмущений фронта горения от начальной скорости потока в модели М-2

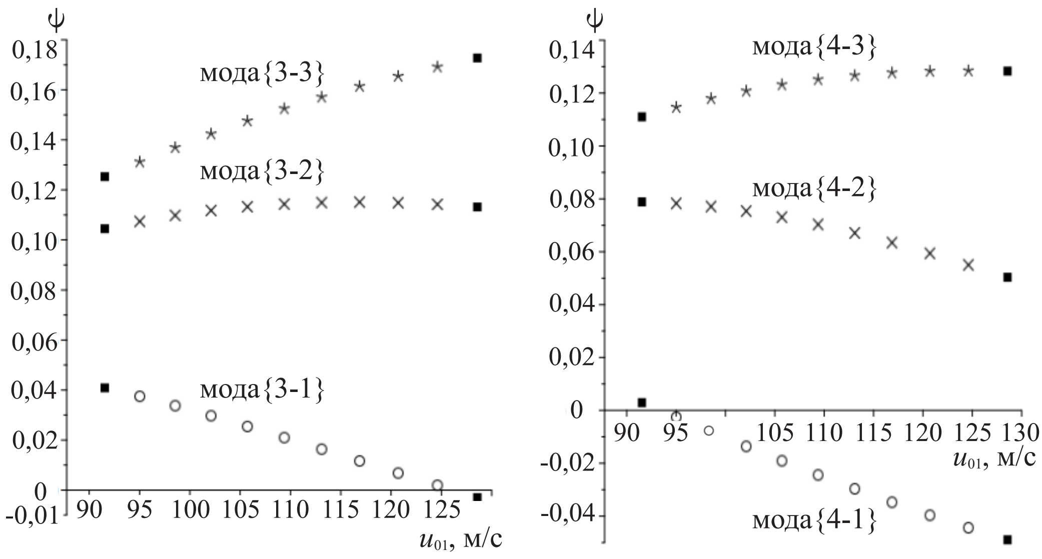


Рис. 3.9. Зависимость инкрементов амплитуды возмущений фронта горения от начальной скорости потока в модели М-3

Из рис. 3.8–3.9 видно, что при увеличении начальной скорости u_{01} и соответствующего увеличения положения фронта горения R в кольцевом канале неустойчивость у мод $\{3{-}1\}$ и $\{4{-}1\}$ может смениться на устойчивость. Также необходимо отметить, что для модели М-3 зависимости инкрементов амплитуды являются монотонными при увеличении скорости u_{01}, в отличие от модели М-2.

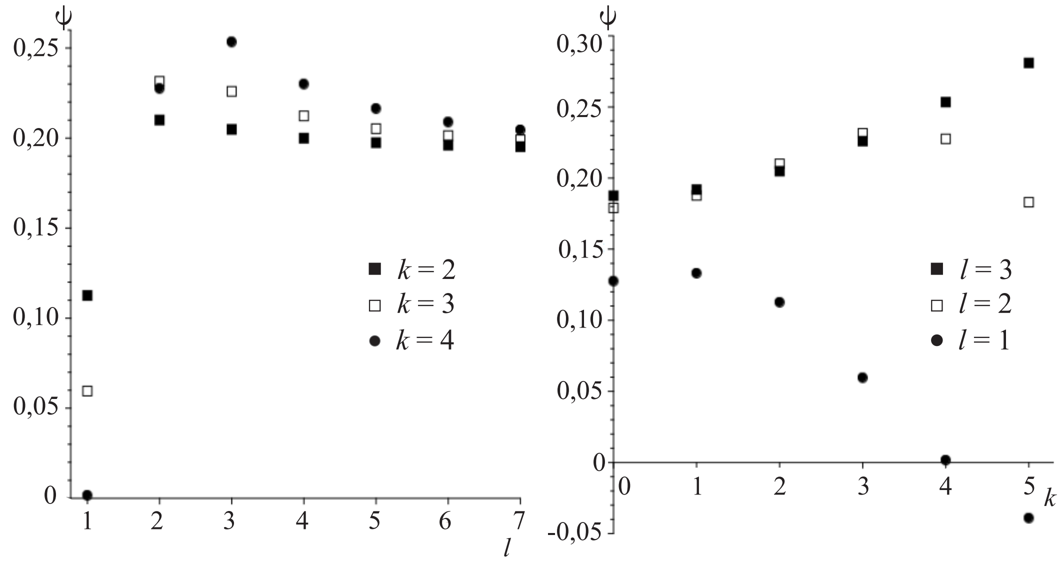


Рис. 3.10. Зависимость инкрементов амплитуды возмущений фронта горения от номера моды при $R{=}(R_1{+}R_2)/2$. Модель М-2

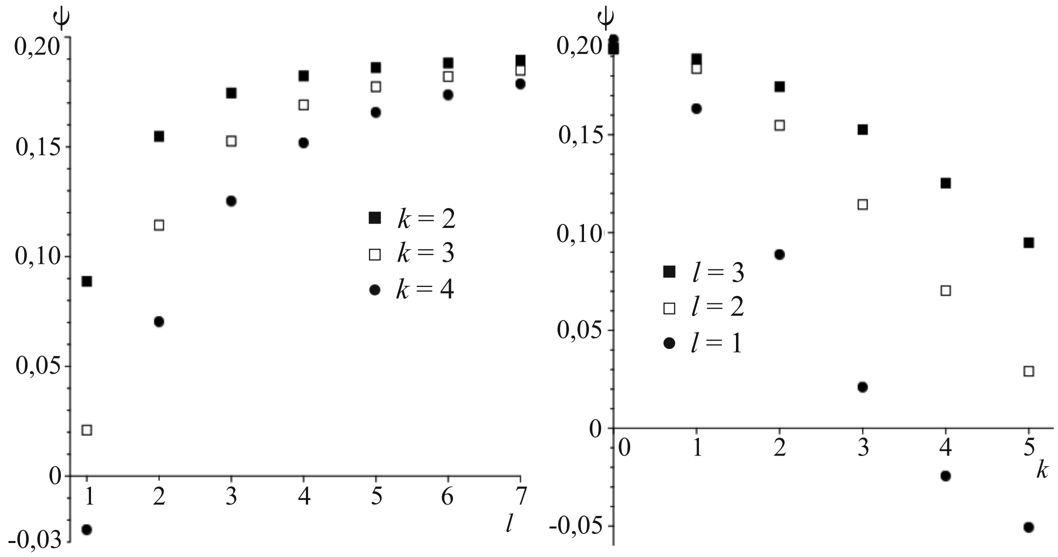


Рис. 3.11. Зависимость инкрементов амплитуды возмущений фронта горения от номера моды при $R{=}(R_1{+}R_2)/2$. Модель М-3

На рис. 3.10–3.11 представлены *дискретные* зависимости инкрементов амплитуды от углового и радиального номера моды, из которых видно, что в модели М-3 все зависимости являются монотонными на указанном интервале изменения номеров мод.

Приложение. Преобразование системы граничных условий на фронте горения

Перепишем систему (3.12) в эквивалентной форме, в которой возмущения в области Ω_2 выражаются только через возмущения в области Ω_1 и возмущение границы:

$$\bar{u}_{2r} = 1/(M_2^2 - 1)[g_{11}(-i\bar{\omega}\bar{A}) + g_{12}\bar{u}_{1r} + g_{13}\bar{\rho}_1]$$

$$\bar{\rho}_2 = 1/(M_2^2 - 1)[g_{21}(-i\bar{\omega}\bar{A}) + g_{22}\bar{u}_{1r} + g_{23}\bar{\rho}_1]$$

$$\begin{gathered}\bar{s}_2 = g_{31}(-i\bar{\omega}\bar{A}) + g_{32}\bar{u}_{1r} + g_{33}\bar{\rho}_1 \\ \bar{u}_{1r} - \frac{\alpha T_{01}\bar{c}_1^2(\gamma_1 - 1)}{c_{01}}\bar{\rho}_1 = -i\,\bar{\omega}\bar{A} \\ \bar{u}_{2\varphi} = \frac{1}{K_2}\bar{u}_{1\varphi} + \left(\frac{M_1}{K_2} - M_2\right)\frac{R-R_0}{R}\frac{d\bar{A}}{d\varphi}\end{gathered} \tag{a1}$$

где g_{mn} - коэффициенты, зависящие от M_2 и других параметров стационарных потоков перед и за фронтом $r = R$. В силу соотношения (3.6) число Маха за фронтом горения (M_2) равно единице. Тогда общие множители в первых двух уравнениях системы (a1) обращаются в бесконечность. Если первое и второе уравнения в системе (a1) умножить на $(M_2^2 - 1)$ и подставить всюду $M_2 = 1$, то получим следующую систему уравнений на фронте горения:

$$G_1(-i\bar{\omega}\bar{A}) - G_1\bar{u}_{1r} + G_2\bar{\rho}_1 = 0$$

$$-G_1(-i\bar{\omega}\bar{A}) + G_1\bar{u}_{1r} - G_2\bar{\rho}_1 = 0$$

$$\bar{s}_2 = F_1(-i\bar{\omega}\bar{A}) - F_1\bar{u}_{1r} + F_2\bar{\rho}_1 \tag{a2}$$

$$\bar{u}_{1r} - \frac{\alpha T_{01}\bar{c}_1^2(\gamma_1 - 1)}{c_{01}}\bar{\rho}_1 = -i\,\bar{\omega}\bar{A}$$

$$\bar{u}_{2\varphi} = \frac{1}{K_2}\bar{u}_{1\varphi} + \left(\frac{M_1}{K_2} - 1\right)\frac{R-R_0}{R}\frac{d\bar{A}}{d\varphi}$$

Из системы (a2) видно, что второе уравнение получено из первого умножением его на -1, то есть первые два уравнения равносильны друг другу. Если выразить скорость фронта горения $-i\,\bar{\omega}\bar{A}$ из четвёртого уравнения системы (a2) и подставить в первое, то можно увидеть, что возмущения плотности исчезают на фронте горения:

$$\bar{\rho}_1 = 0 \tag{a3}$$

При использовании условия (a3) в системе условий (a2) получаются условия (3.13), приведённые в разделе 3.2.1.

В рамках феноменологической теории горения смесей методом теории малых возмущений проведены исследования модовой устойчивости цилиндрического фронта горения при малых числах Маха стационарного радиально расходящегося потока и получены следующие результаты:

- Обнаружено, что существуют квазисобственные частоты, которые описывают возрастающие или убывающие по времени колебания и волны.

- Показано, что если массовый расход подачи горючей смеси на начальной границе $r{=}R_0$ постоянен (возмущение расхода равно нулю), то фронт горения устойчив. Обнаружено, что если в системе подачи горючей смеси возмущения давления или скорости подачи пренебрежимо малы, то существует дискретное множество частот и мод соответствующих колебаний и волн, для которых фронт горения является неустойчивым.

- Обнаружены вращающиеся окружные волны возмущения фронта горения с конечным количеством локальных пучностей и определены скорости вращения этих волн. Показано, что скорости вращения таких волн всегда больше скорости звука в горючей смеси и могут располагаться в диапазоне выше скорости звука в продуктах горения.

- Проведён анализ зависимости скоростей вращения поперечных окружных волн возмущения фронта горения от начальной скорости стационарного радиального потока. Показано, что скорости вращения всегда больше скорости звука в горючей смеси перед фронтом горения.

- Проведён анализ зависимости скоростей роста по времени амплитуд возмущений у неустойчивых мод от начальной скорости стационарного радиального потока и от дискретных номеров мод.

Заключение

В ходе проведенных в рамках феноменологической теории горения смесей исследований акустических колебаний и модовой устойчивости цилиндрического фронта горения в плоско-радиальной кольцевой камере получены следующие основные результаты:

1. При пренебрежении дозвуковым радиально расходящимся потоком:

    - при помощи численно-аналитических исследований изучена механика акустических колебаний и волн, возникающих в слоях и на границе раздела в двухмерном и трёхмерном случаях. Получены собственные моды и частоты колебаний;

    - обнаружены вращающиеся окружные волны возмущения границы раздела слоёв с конечным количеством локальных пучностей вдоль окружной координаты φ и получены скорости вращения этих волн;

    - показано, что скорости вращения окружных волн всегда больше скорости звука в холодном слое и могут располагаться в диапазоне выше скорости звука в горячем слое;

    - результаты расчётов скоростей вращения окружных волн возмущения границы раздела слоёв качественно совпадают с результатами экспериментальных наблюдений [8, 9, 13] по распространению поперечных квазидетонационных волн.

2. В плоском радиально расходящемся потоке с малым числом Маха:

- исследована механика акустических колебаний и волн системы «поток горючей смеси-фронт горения-поток продуктов»;
- обнаружено, что существуют квазисобственные частоты, которые описывают возрастающие или убывающие по времени колебания и волны;
- показано, что если массовый расход подачи горючей смеси на начальной границе $r{=}R_0$ постоянен (возмущение расхода равно нулю), то фронт горения устойчив. Обнаружено, что если в системе подачи горючей смеси возмущения давления или скорости подачи пренебрежимо малы, то существует дискретное множество частот и мод соответствующих колебаний и волн, для которых фронт горения является неустойчивым;
- показано, что скорости вращения окружных волн возмущения фронта горения всегда больше скорости звука в горючей смеси и могут располагаться в диапазоне выше скорости звука в продуктах горения.
- проведён анализ зависимости скоростей вращения поперечных окружных волн возмущения фронта горения от начальной скорости стационарного радиального потока. Показано, что скорости вращения всегда больше скорости звука в горючей смеси перед фронтом горения;
- результаты расчётов скоростей вращения окружных волн возмущения фронта горения качественно совпадают с результатами экспериментальных наблюдений [8, 9, 13] по распространению поперечных квазидетонационных волн.

Литература

[1] Зельдовия Я.Б. К вопросу об энергетическом использовании детонационного горения // Журн. техн. физики. 1940. Т. 10, вып. 17. С. 1453-1461.

[2] Dunlap R., Brehm R., Nicholls J.A. A preliminary study of the application of steady-state detonative combustion to a reaction engine // Jet Propultion. 1958. V. 28, N 7. P. 451-456.

[3] Nicholls J.A., Dabora E.K., Gealer R.L. Studies in connection with stabilizied gaseous detonations waves // 7th Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh, PA: Combustion Inst., 1959. P. 766-772.

[4] Soloukhin R.I., Bazhenova T.V. Gas ignition behind the shock waves // 7th Symp. on Combustion, London, 1959. P. 866-875.

[5] Gross R.A. Research of supersonic combustion // ARS Journal. 1960. V. 29, N 1. P. 63-72.

[6] Gross R.A., Chinitz W.A. A study of supersonic combustion // J. Aerospace Sci. 1960. V. 27, N 7. P. 517-524.

[7] Солоухин Р.И. Пульсирующее горение газа за ударной волной в сверхзвуковом потоке // ПМТФ. 1961. № 5. С. 57-60.

[8] Войцеховский Б.В. Стационарная детонация // ДАН СССР. 1959. Т. 129, № 6. С. 1254-1256.

[9] Войцеховский Б.В. Спиновая стационарная детонация // ПМТФ. 1960. № 3. С. 157-164.

[10] Щелкин К.И. Быстрое горение и спиновая детонация газов. М: Воен. изд-во Министерства обороны СССР, 1949.

[11] Войцеховский Б.В. О спиновой детонации // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 4. С. 717-720.

[12] Войцехоский Б.В., Митрофанов В.В., Топчиян М.Е. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963.

[13] Михайлов В.В., Топчиян М.Е. К исследованиям непрерывной детонации в кольцевом канале // ФГВ. 1965. Т. 1, № 4. С. 20-23.

[14] Edvards B.D. Maintained detonation waves in annular channel: a hypothesis which provides the link between calssical acoustic combustion instability and detonation waves // 16th Symp. (Intern.) on Combustion, Pittsburgh, Pennsylvania. 1976. P. 715-728.

[15] Баррер М., Жомотт А. и др. Ракетные двигатели. М.: Оборонгиз, 1962.

[16] Мелькумов Т.М., Мелик-Пашаев Н.И. и др. Ракетные двигатели. М.: Машиностроение, 1968.

[17] Тимнат И. Ракетные двигатели на химическом топливе: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

[18] Ландау Л.Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ. 1944. Т. 29, № 6. С. 240-244.

[19] Волков В.Э. Геометрическая форма фронта пламени и неустойчи-

вость горения в круглой трубе // Труды международного геометрического центра. 2012. Т. 5, № 2. С. 53-58.

[20] Баренблатт Г.И., Зельдович Я. Б., Истратов А.Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени // ПМТФ. 1962. № 4. С. 21-26.

[21] Истратов А.Г., Либрович В.Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени // ПММ. 1966. Т. 30, № 3. С. 451-466.

[22] Зельдович Я.Б. Об одном эффекте, стабилизирующем искривлённый фронт пламени // ПМТФ. 1966. № 1. С. 102-104.

[23] Bychkov V.V., Liberman M.A. Dynamics and stability of premixed flames // Physics Reports. 2000. V. 325, N 4-5. P. 115-237.

[24] Dunn-Runkin D., Berr P.K., Sawyer R.F. Numerical and experimental study of «tulip» flame formation in a closed vessel // Proc. of the 21st Intern. symp. on combustion. Pittsburgh: Combust. Inst. 1986. P. 1291–1301.

[25] Минаев С.С., Пирогов Е.А., Шарыпов О.В. Скорость распространения пламени при развитии гидродинамической неустойчивости // ФГВ. 1993. Т. 29, № 6. С. 19-25.

[26] Lee S.T., Tsai C.H. Numerical investigation of steady laminar flame propagation in a circular tube // Combust. Flame. 1994. V. 99, N 3-4. P. 484–490.

[27] Gonzalez M., Borghi R., Saouab A. Interaction of a flame front with its self-generated flow in an enclosure: The «tulip flame» phenomenon // Combust. Flame. 1992. V. 88, N. 2. P. 201–220.

[28] Gonzalez M. Acoustic instability of a premixed flame propagating in a tube // Combust. Flame. 1996. V. 107, N 3. P. 245–259.

[29] Hackert C.L., Ellzey J.L., Ezekoye O.A. Effect of thermal boundary conditions of flame shape and quenching in ducts // Combust. Flame. 1998. V. 112, N 1-2. P. 73-84.

[30] Karlin V., Makhviladze G., Roberts J., Melikhov V.I. Effect of Lewis number of flame front fragmentation in narrow closed channels // Combust. Flame. 2000. V. 120, N 1-2. P. 173–187.

[31] Истратов А.Г., Кидин Н.И., Федоров А.Ф. Ячеистая и тюльпанообразная конфигурации пламени // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 112-116.

[32] Самсонов В.П., Семенов О.Ю. и др. Моделирование гидродинамических явлений, сопровождающих распространение фронта пламени в трубе за поршнем // Журнал технической физики. 2014. Т. 84, № 1. С. 53- 60.

[33] Маркштейн Дж.Г. Нестационарное распространение пламени. М.: Мир, 1968.

[34] Истратов А.Г., Либрович В.Б. Об устойчивости распространения сферического пламени // ПМТФ. 1966. № 1. С. 67-78.

[35] Sivashinsky G.I. et al. On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames // Physica D. 1994. Vol. 72. P. 110-118.

[36] Guy Joulin. Nonlinear hydrodynamic instability of expanding flames: intrinsic dynamics // Physical Review E. 1994. Vol. 50. N 3. P. 2030-2047.

[37] Минаев С.С., Пирогов Е.А., Шарыпов О.В. Нелинейная модель гидродинамической неустойчивости расходящегося пламени // ФГВ. 1996. Т. 32, № 5. С. 8-16.

[38] Васильев А.А., Трилис А.В. Скорость дефлаграционного горения при повышенных давлениях и температурах // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 5. С. 615-622.

[39] Trilis A.V., Vasiliev A.A., Sukhinin S.V. Traveling circumferential unstable wave of cylindrical flame front [электронный ресурс] // Journal of physics: conference series. 2016. V. 722. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012039.

[40] Трилис А.В. Моделирование поперечных детонационных волн в плоскорадиальном кольцевом канале // Сибирский физический журнал. 2017. Т. 12, № 2. С. 60–65.

[41] Трилис А.В., Сухинин С.В., Васильев А.А. Устойчивость цилиндрического фронта пламени в кольцевой камере сгорания // СибЖИМ. 2017. Т. 20, № 4. С. 66-78.

[42] Трилис А.В. Зависимость скорости пламени в водородных смесях от давления и температуры // Доклады IX Всероссийской конференции молодых учёных по проблемам механики. Новосибирск: изд-во ИТПМ СО РАН, 2012. С. 273-276.

[43] Trilis A.V., Vasiliev A.A. Velocity of deflagration combustion at high pressures and temperatures [электронный ресурс] // Proceedings of 8th International Seminar on Flame Structure. Berlin. 2014. URL: http://flame-structure-2014.com/wp-content/uploads/Artyom-Trilis.pdf

[44] Трилис А.В., Юрковский В.С. Распространение фронта кристаллизации в переохлаждённой воде как аналог распространения фронта пламени в горючих смесях // Тезисы докладов II Всероссийской конференции «Полярная механика». СПб: Крыловский гос. науч. центр, 2014.

[45] Трилис А.В. Бегущие поперечные волны возмущения цилиндрического фронта горения // Сборник научных трудов X Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» в 9 ч. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2016. Часть 2. С. 151-152.

[46] Трилис А.В. Окружные волны возмущения цилиндрического фронта пламени в кольцевой камере сгорания // Доклады XI Всероссийской конференции молодых учёных по проблемам механики. Новосибирск: Параллель, 2017. С. 125-126.

[47] Гельфанд Б.Е., Попов О.Е., Чайванов Б.Б. Водород: параметры горения и взрыва. М.: Физматлит, 2008. 288 С.

[48] Митрофанов В.В. Детонация гомогенных и гетерогенных систем. Новосибирск: Изд. ИГиЛ СО РАН, 2003. 200 С.

[49] Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. Теория детонации. М.: Гостехиздат, 1955. 269 С.

[50] Щёлкин К.И., Трошин Я.К. Газодинамика горения. М.: Изд. академии наук СССР. 1963, 256 С.

[51] Васильев А.А. Оценка зависимости скорости пламени от давления и температуры // ФГВ. 2011. Т. 47, № 5. С. 13-17.

[52] Васильев А.А. Экспериментальная оценка скорости горения взрыв-

чатой смеси при повышенных давлениях и температурах // ФГВ. 1992. Т. 28, № 4. С. 44-48.

[53] Блохинцев Д.И. Акустика движущейся неоднородной среды. М.: Наука, Физматлит, 1981.

[54] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 С.

[55] Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Физматлит, 1961.

[56] Чёрный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.

[57] Markstein G.H. Experiental and theoretical studies of flame-front stability // J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18, N 3. P. 199-209.

[58] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.