ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА"

На правах рукописи

ТИХОНОВА ИРИНА МИХАЙЛОВНА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Егоров И.Е.

Якутск – 2017

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Теория неклассических уравнений математической физики является интенсивно развивающимся разделом современной теории уравнений с частными производными. К данной теории относятся уравнения с меняющимся направлением времени, вырождающиеся уравнения или уравнения соболевского типа, и уравнения смешанного и смешанно-составного типов.

Исследования краевых задач для неклассических уравнений математической физики начались с работ Ф. Трикоми [87], С.Геллерстеда [101] в 20-30 годах прошлого века. Тогда впервые были поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа

$$y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} = f,$$

которые в одной части области определения являются уравнением эллиптического типа, а в другой части – гиперболического типа. Такие задачи называют задачами Трикоми и Геллерстеда.

Следующим этапом развития теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики стали работы М.А. Лаврентьева [53], И.Н. Векуа [10],С.А. Христиановича [90], С.А. Чаплыгина [91], А.В. Бицадзе [6], К.Г. Гудерлея [18], Ф.И. Франкля [88, 89], М.В. Келдыша [44, 45] и др . Они указали на важность изучения проблемы неклассических уравнений математической физики при решении задач, возникающих в трансзвуковой газовой динамике, в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, до- и сверхзвуковых течениях сжимаемой жидкости и во многих других прикладных задачах механики и физики.

В настоящее время проблемой разрешимости неклассических уравнений математической физики занимаются многие математики. Так, проблема разрешимости уравнений с меняющимся направлением времени наиболее широко раскрыта в работах С.А. Терсенова [77,78], А.М. Нахушева [63], И.Е. Егорова [24], С.Г. Пяткова [70], И.М. Петрушко [67], С.В. Попова [68], Н.В. Кислова [46] и др [72, 98, 116]. Разрешимостью уравнений соболевского типа занимаются Г.В. Демиденко [97], А.И. Кожанов [102], Г.А. Свиридюк [114], В.Е. Федоров [99] и др [94, 100, 109]. Проблемой разрешимости уравнений смешанного и смешанно-составного типа занимаются И.Е. Егоров [38], Е.И. Моисеев [105], М.С. Салахитдинов [112], К.Б. Сабитов [111] и др [51, 103, 106, 107, 113, 117, 118].

Наиболее полную библиографию по проблемам разрешимости неклассических уравнений математической физики можно найти в монографиях В.Н. Врагова [15], И.Е. Егорова [24, 27], С.В. Успенского [19], Е.И. Моисеева [60] Г.А. Свиридюка [115], М.С. Салахитдинова [74], А.И. Кожанова [50], А.Г. Кузьмина [52].

Теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов теории неклассических уравнений математической физики. Проблемой разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа начали заниматься А.В. Бицадзе [2–6], М.М. Смирнов [75], А.М. Нахушев [2,61,62], Г.Д. Каратопраклиев [43], Т.Ш. Кальменов [40, 41], М.С. Салахитдинов [73, 74], Т.Д. Джураев [23], Е.И. Моисеев [59, 104], M.H. Protter [108], N. Popivanov [69] и др. [47–49, 66, 71, 95].

Построение общей теории уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа началось с работ Врагова В.Н. [14–16] и ряда других авторов. Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка занимались Н.А. Ларькин [56,57], А.Н. Терехов [76], Б.А. Бубнов [9], И.Е. Егоров [28], Г.Д. Каратопраклиев [42]. Далее начались исследования уравнений смешанного типа высокого порядка. В.Н. Врагов [16], И.Е. Егоров, С.Г. Пятков [27] и В.Е. Федоров [28] начали построение общей теории краевых задач для уравнения смешанного типа высокого порядка с произвольным многообразием изменения типа.

Отдельный интерес представляют нелинейные уравнения смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа. Так, в работе А.Г. Кузьмина [52] рассмотрена краевая задача Врагова для нелинейного уравнения смешанного типа второго порядка с вещественным параметром. Также А.В. Чуешевым [93] исследован обширный класс уравнений смешанного типа высокого порядка с вещественным параметром. Уравнения смешанного типа со спектральным (комплексным) параметром рассматривались в работах Е.И. Моисеева [60], М.С. Салахитдинова [73] и И.Е. Егорова [29].

В работе В.Н.Врагова [14] впервые была дана постановка корректной краевой задачи для уравнений смешанного типа второго порядка в цилиндрической области $D = G \times (0,T)$, где G — ограниченная область переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с кусочно гладкой границей γ:

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)u_{x_j}) + a(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t). \quad (1)$$

$$u\mid_{S_T} = 0,\; u\mid_{t=0} = 0,\; u_t\mid_{\overline{P}_0^+} = 0,\; u_t\mid_{\overline{P}_T^-} = 0, \quad (2)$$

где $S_T = \gamma \times (0,T)$,

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\},$$

$$P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\}.$$

Так как на знак старшего коэффициента уравнения (1) внутри области D не наложено никаких условий, то в класс таких уравнений входят уравнения эллиптического, гиперболического, параболического, эллиптико-гиперболического типов, уравнение Трикоми и др. В данной работе при некоторых условиях на старший коэффициент доказана обобщенная разрешимость краевой задачи. Разрешимость доказывается регуляризацией уравнения (1) уравнением составного типа. Также при выполнении определенных условий доказывается регулярная разрешимость. В настоящее время краевую задачу (1)-(2) принято называть краевой задачей Врагова.

Затем результаты этой работы были обобщены В.Н.Враговым [16] на случай уравнения смешанного типа четного порядка $2m$ в цилиндрической области $Q = (0,1) \times \Omega$:

$$Lu = \sum_{i=1}^{2m} k_i(x,t) D_t^i u + (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(t,x) D_x^\beta u) +$$

$$+(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=2m-2} a_\alpha D_x^\alpha u = f(x,t), \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_S = 0, \ i = 0,1,...,m-1;$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \ i = \overline{1, m-1}; \ D_t^m u|_{\overline{P_0^+}} = 0;$$

$$D_t^j u|_{t=1} = 0, \ j = \overline{0, m-1}; \ D_t^m u|_{\overline{P_1^-}} = 0, \tag{4}$$

где $\nu = (\nu_0, ..., \nu_n)$ - вектор внутренней нормали; $S = (0,1) \times \partial\Omega$,

$$P_0^\pm = \{(x,0): \ x \in \Omega, \ (-1)^{m-1} k_{2s}(x,0)^{>0}_{<0}\},$$

$$P_T^\pm = \{(x,T): \ x \in \Omega, \ \ (-1)^{m-1} k_{2s}(x,T)^{>0}_{<0}\}.$$

В работе Терехова А.Н. [76] исследована первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка (1) с краевыми условиями

$$u\ |_{S_T} = 0, \ \ u\ |_{t=0} = 0, \ u_t\ |_{\overline{P_0^+}} = 0, \ u\ |_{\overline{P_T^-}} = 0. \tag{5}$$

Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений высокого порядка занимались И.Е. Егоров, В.Е. Федоров. Так, в работе [28] ими были изучены первая краевая задача и задача Врагова для уравнения смешанного типа четного порядка с произвольным многообразием изменения типа, которая, имеет разный порядок по времени и по пространственным переменным:

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u + (-1)^m \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(t,x) D_x^\beta u) + a_0(x)u = f(x,t). \tag{6}$$

Чуешев А.В. в работе [92] исследовал разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения вида

$$Lu = k(t)u^{(l)} + a(t)u^{(l-1)} + \sum_{j=0}^{l-2} a_j(t)u^{(j)} - \sum_{|\alpha|\leqslant 2v} b_\alpha(x) D_x^\alpha u +$$

$$+ \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{|\alpha|\leqslant \frac{2v(l-1-k)}{d}} a_{k,\alpha}(t,x) D_t^k D_x^\alpha u = f(x,t).$$

К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись теория сингулярных интегральных уравнений, функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галеркина [5, 6, 14, 15, 23, 28, 74, 75].

Проекционные и проекционно-разностные методы исследования применяются для решения различных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и других задач. Основателями этих методов являются Б.Г. Галеркин [17], И.Г. Бубнов [8], Г.И. Петров [64, 65], В. Ритц [110], М.В. Келдыш [45] и другие.

Метод Галеркина широко применяется к решению краевых задач для уравнений математической физики [11–13, 20–22, 54, 58]. В работах [11, 12, 22] получены оценки погрешности метода Галеркина для эллиптических и параболических уравнений.

Целью диссертационной работы является применение стационарного и нестационарного метода Галеркина к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

– получение глобальных априорных оценок;

– доказательство регулярной разрешимости краевых задач;

– установление оценок погрешности приближенных решений.

Методы исследования. В диссертации применяются стационарный метод Галеркина со специальным выбором базиса и модифицированный (нестационарный) метод Галеркина с привлечением метода ε-регуляризации . Регулярная разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа доказывается на основе глобальных априорных оценок для приближенных решений, построенных по методу Галеркина. При этом для каждой задачи установлена оценка погрешности метода Галеркина.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие научные результаты:

- для исследуемых краевых задач впервые получены глобальные априорные оценки на всей области исследования для приближенных решений, построенных по стационарному и модифицированному (нестационарному) методам Галеркина;

- на основе полученных априорных оценок, доказаны теоремы об однозначной регулярной разрешимости поставленных краевых задач при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения;

- впервые получены оценки погрешности приближенных решений, построенных по методам Галеркина, относительно точного решения, для исследованных задач.

Все выводы и положения выносимые на защиту основываются на строгих математических доказательствах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались:

– на научном семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством член-корр. РАН П.И. Плотникова (2016);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Избранные вопросы математического анализа"под руководством профессора Г.В. Демиденко (2017);

– на семинаре Научно-исследовательского института математики СВФУ "Неклассические уравнения математической физики"под руководством профессора И.Е. Егорова (2010-2017);

– на Международной школе-конференции «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 2016);

–на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование»(г. Улан-Удэ, Россия, 2015);

– на VI и VII Международных конференциях по математическому моделированию (г. Якутск, Россия, 2011, 2014);

– на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений"(г. Новосибирск, 2013);

– на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики"(г. Новосибирск, 2012);

– на III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации"(г. Якутск, 2012);

– на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(г. Москва, 2011);

– на XII и XIV Лаврентьевских чтениях(г. Якутск, 2009, 2010).

Работа выполнена при поддержке: Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект №3047) и на 2017-2019 гг. (проект №1.6069.2017/8.9); ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 17 работ, из них 7 [25, 26, 30, 33, 37, 39, 84] - в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ, 8 [31, 34, 36, 80–83, 85] - тезисы докладов. В совместных публикациях соавторам принадлежат постановки задачи и методика их исследования, а автором непосредственно произведены доказательства утверждений лемм и теорем. В работе [84] результаты получены автором единолично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 89 страниц. Список литературы содержит 118 наименований.

Содержание работы. В диссертационной работе с помощью метода Галеркина исследованы краевые задачи для уравнения смешанного типа второго и четного порядков. Для всех задач доказана регулярная разрешимость. Также для каждой из этих краевых задач получена оценка погрешности метода Галеркина. Задачи исследуются в цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset R^n$ - ограниченная односвязная область с гладкой границей S. $S_T = S \times (0, T),\ T = const > 0;\ \Omega_t = \Omega \times \{t\},\ t \in [0, T]$.

Первая глава состоит из 4-х параграфов и посвящена исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с помощью стационарного метода Галеркина. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина получена через собственные функции оператора Лапласа по пространственным переменным и по времени.

В **первом** параграфе рассмотрена краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в известной постановке В.Н. Врагова. В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \ (x,t) \in Q. \quad (0.1)$$

Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\},$$

$$P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача Врагова: Найти решение уравнения (0.1) в области Q такое, что выполнялись условия

$$u|_{S_T} = 0, \quad (0.2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{\overline{P_0^+}} = 0, \ \ u_t|_{\overline{P_T^-}} = 0. \quad (0.3)$$

Для краевой задачи Врагова рассмотрено два случая, когда уравнение (0.1) принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу вблизи верхнего основания цилиндрической области и эллиптическому типу вблизи обоих оснований цилиндрической области.

В случае, когда $k(x,0) > 0, \ \ k(x,T) \geq 0$, краевые условия (0.3) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = 0. \quad (0.3^*)$$

В случае когда $k(x,0) < 0, \ \ k(x,T) < 0$, краевые условия (0.3) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=T} = 0. \quad (0.3^{**})$$

Во **втором** параграфе рассматривается новая краевая задача, условно названной "второй"краевой задачей.

Вторая краевая задача: Найти в области Q решение уравнения (0.1), такое, что выполняются условия (0.2) и

$$u_t \mid_{\overline{P}_0^-} = 0, \; u \mid_{\overline{P}_T^+} = 0, \; u_t \mid_{t=T} = 0. \tag{0.4}$$

Для данной краевой задачи рассмотрен случай когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи обоих оснований цилиндрической области.

В этом случае, когда $k(x,0) < 0, \; k(x,T) < 0$ краевые условия (0.4) принимают вид

$$u_t \mid_{t=0} = 0, \; u_t \mid_{t=T} = 0. \tag{0.4*}$$

В **третьем** параграфе рассматривается частный случай первой краевой задачи, когда уравнение смешанного типа принадлежит эллиптическому типу вблизи нижнего и верхнего оснований цилиндрической области.

В случае, когда $k(x,0) < 0, \; k(x,T) < 0$ исследована

Первая краевая задача: Найти решение уравнения (0.1) в области Q, такое, что выполняются условие (0.2) и

$$u \mid_{t=0} = 0, \; u \mid_{t=T} = 0. \tag{0.5}$$

В **четвертом** параграфе рассматривается уравнение четного порядка

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x)u = f(x,t), \tag{0.6}$$

где $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

В случае, когда $(-1)^{s-1} k_{2s}(x,0) < 0, \; (-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) < 0$ исследована следующая

Краевая задача: Найти решение уравнения (0.1) в области Q, такое, что выполнялись условия (0.2) и

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}. \tag{0.7}$$

Во **второй** главе рассматриваются краевые задачи для уравнения смешанного типа второго порядка с помощью модифицированного метода Галеркина. Оценка погрешности нестационарного метода Галеркина получена через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа по пространственным переменным.

В **первом** параграфе исследована краевая задача Врагова (0.1)-(0.3) в четырех случаях:

$$k(x,0) > 0,\ \ k(x,T) \geqslant 0;$$

$$k(x,0) > 0,\ \ k(x,T) < 0;$$

$$k(x,0) < 0,\ \ k(x,T) < 0;$$

$$k(x,0) < 0,\ \ k(x,T) \geqslant 0.$$

Во **втором** параграфе исследована "вторая"краевая задача (0.1), (0.2), (0.4), в случае $k(x,0) < 0$. В случае $k(x,0) > 0$ краевая задача (0.1), (0.2), (0.4) совпадает с краевой задачей Врагова (0.1)-(0.3).

В **заключении** приведены основные результаты работы.

ГЛАВА 1.

Стационарный метод Галеркина для уравнений смешанного типа

В первой главе рассматриваются краевые задачи для уравнений смешанного типа второго и четного порядков с произвольным многообразием изменения типа. Используя стационарный метод Галеркина с выбором специального базиса, доказана регулярная разрешимость данных задач. Также для каждой из этих краевых задач получена оценка погрешности стационарного метода Галеркина.

1.1 Исследование разрешимости краевой задачи Врагова

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с гладкой границей S, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \le t \le T$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1.1}$$

коэффициенты которого являются достаточно гладкими функциями.

Коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Поэтому уравнение (1.1.1) является уравнением смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа.

Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

В данном параграфе рассматриваются частные случаи краевой задачи в известной постановке В.Н. Врагова, когда уравнение смешанного типа принадлежит:

1. гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу вблизи верхнего основания цилиндрической области;

2. эллиптическому типу вблизи обоих оснований цилиндрической области.

Краевая задача Врагова. Найти решение уравнения (1.1.1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{1.1.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \;\; u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \;\; u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \tag{1.1.3}$$

Отметим, что краевая задача Врагова впервые была изучена В.Н. Враговым [14] с помощью метода регуляризации.

Для целого $k \geq 1$ через $||\cdot||_k$ будем обозначать норму пространства Соболева $W_2^k(Q)$ и

$$(u,v) = \int\limits_Q u(x,t)v(x,t)dQ, \;\; ||u|| = \sqrt{(u,u)}, \;\; u,v \in L_2(Q).$$

Пусть C_L – класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.1.2), (1.1.3).

Справедлива следующая лемма [14, 28].

Лемма 1.1.1 *Пусть выполнены условия* $c(x) \geq c_0 > 0, \;\; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$ *Тогда существует константа* $\gamma > 0$ *такая, что имеет место неравенство*

$$(Lu, e^{-2\gamma t}u_t) \geq C_1||u||_1^2, \;\; C_1 = e^{-2\gamma T} min\{\delta/2, \gamma, \gamma c_0\},$$

для всех функций $u \in C_L$.

Введем следующие обозначения: $\widetilde{W}_2^1(Q)$ – замыкание C_L по норме $||\cdot||_1$, $\widehat{W}_2^1(Q)$ – подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условиями

$$\eta|_{S_T}=0,\ \ \eta|_{\overline{P_0^-}}=0,\ \ \eta|_{\overline{P_T^+}}=0.$$

Для уравнения смешанного типа (1.1.1) рассмотрим случай когда $k(x,0)>0,\quad k(x,T)\geq 0$. Тогда краевая задача Врагова примет следующий вид:

Краевая задача 1.1.1 Найти решение уравнения (1.1.1) в области Q такое, что выполняются условия (1.1.2) и

$$u|_{t=0}=0,\ \ u_t|_{t=0}=0. \tag{1.1.4}$$

Отметим, что Лемма 1.1.1, будет справедлива и для краевой задачи 1.1.1.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\widetilde{L}v\equiv k(x,t)v_{tt}-\triangle v+(a+k_t)v_t+cv=g(x,t),\ \ (x,t)\in Q, \tag{1.1.5}$$

где $g\in L_2(Q)$.

Определение 1.1.1 *Функция $v(x,t)\in\widetilde{W}_2^1(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи* (1.1.5), (1.1.2), (1.1.4), *если выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_Q[-kv_t\eta_t+\sum_{i=1}^n v_{x_i}\eta_{x_i}+av_t\eta+cv\eta]dQ=(g,\eta)\ \ \forall\eta\in\widehat{W}_2^1(Q). \tag{1.1.6}$$

Теорема 1.1.1 *Пусть коэффициент $c(x)\geq c_0>0$ достаточно большой и выполнены условия $k(x,0)\geq 0,\quad k(x,T)\geq 0,\quad a-\frac{1}{2}k_t\geq\delta>0$. Тогда краевая задача* (1.1.5), (1.1.2), (1.1.4) *может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В тождестве (1.1.6) с $g \equiv 0$ возьмем функцию

$$\eta(x,t) = \int\limits_t^T e^{-2\gamma\tau} v d\tau.$$

Поскольку функция v принадлежит $\widetilde{W}_2^1(Q)$, интегрируя по частям, имеем равенство

$$0 = \int\limits_Q \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k \right) e^{-2\gamma t} v^2 + \gamma e^{2\gamma\tau} \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_t^T e^{-2\gamma\tau} v_{x_i} d\tau \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \gamma c e^{2\gamma t} \left(\int\limits_t^T e^{-2\gamma\tau} v d\tau \right)^2 - a_t v \int\limits_t^T e^{-2\gamma\tau} v d\tau \right] dQ + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} k e^{-2\gamma T} v^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_0^T e^{-2\gamma\tau} v_{x_i} d\tau \right)^2 + c(x) \left(\int\limits_0^T e^{-2\gamma\tau} v d\tau \right)^2 \right] dx.$$

Выберем число $\gamma > 0$ так, чтобы $a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k \geq \delta/2$. Тогда из последнего равенства с учетом условий теоремы, используя неравенство Коши с малым параметром, получаем, что $v(x,t) = 0$ для почти всех $(x,t) \in Q$.

Теорема 1.1.1 доказана.

Теорема 1.1.2 *Пусть коэффициент $c(x) \geq c_0 > 0$ достаточно большой и выполнены условия*

$$k(x,0) > 0, \quad k(x,T) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t, f_{tt} \in L_2(Q); \quad f|_{t=0} = 0, \quad f_t|_{t=0} = 0.$$

Тогда для единственного решения краевой задачи 1.1.1 из $W_2^2(Q)$ имеет место $u_t \in W_2^2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что при выполнении условий теоремы 1.1.2 краевая задача 1.1.1 имеет единственное решение $u(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q)$ [14, 28]. Нетрудно показать, что функция $u_t \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ является обобщенным решением краевой задачи (1.1.5), (1.1.2), (1.1.4) при $g = f_t - a_t u_t$. Заметим, что $g, g_t \in L_2(Q)$ и $g|_{t=0} = 0$. Тогда краевая задача (1.1.5), (1.1.2), (1.1.4) имеет единственное решение $v(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q)$, которое также будет обобщенным решением краевой задачи (1.1.5), (1.1.2), (1.1.4). Теперь в силу теоремы 1.1.1 получаем, что $v = u_t$. Следовательно, имеем $u_t \in W_2^2(Q)$.

Теорема 1.1.2 доказана.

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta} v \equiv v_{tt} + \Delta v = -\lambda v, \quad (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=T} = 0. \tag{1.1.7}$$

При этом λ_k – соответствующие собственные числа спектральной задачи, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение краевой задачи 1.1.1 ищется в виде

$$u^N = \sum_{l=1}^{N} c_l^N \int_0^t \varphi_l(x,\tau)d\tau,$$

где коэффициенты c_l^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(e^{-2\gamma t} L u^N, \varphi_l) = (e^{-2\gamma t} f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \tag{1.1.8}$$

Теорема 1.1.3 *Пусть коэффициент* $k(x,t)$ *равен* $k(t)$, $c(x) \geq c_0 > 0$ *и*

$$k(0) > 0, \quad k(T) \geq 0; \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t \in L_2(Q), \quad f|_{t=0} = 0, \quad f|_{t=T} = 0.$$

Тогда галеркинские приближения u^N вычисляются при всех N однозначно из системы (1.1.8), *для них верна оценка*

$$||u^N||_2 \leq C_2(||f|| + ||f_t||), \quad C_2 > 0, \tag{1.1.9}$$

и при $N \to \infty$ они слабо сходятся в $W_2^2(Q)$, к решению краевой задачи 1.1.1 из пространства $W_2^2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала выбираем число $\gamma > 0$ так, чтобы

$$a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k \geq \delta/2, \quad a + \frac{1}{2}k_t - \gamma(k+2) \geq \delta/2.$$

Для системы (1.1.8) имеет место теорема единственности. Действительно, если u^N есть решение однородной системы (1.1.8), то, умножая каждое уравнение на c_l^N и складывая по l, приходим к соотношению

$$(e^{-2\gamma t} Lu^N, u_t^N) = 0.$$

Из которого в силу леммы 1.1.1 получим $u_t^N \equiv 0$, т.е. все $c_l^N = 0$. Итак, система (1.1.8) однозначно определяет u^N. Умножим каждое уравнение из (1.1.8) на c_l^N и сложим по l от 1 до N. Это дает равенство

$$(e^{-2\gamma t} Lu^N, u_t^N) = (e^{-2\gamma t} f, u_t^N),$$

из которого в силу леммы 1.1.1 следует оценка

$$||u^N||_1 \leq C_3||f||, \quad C_3 > 0. \tag{1.1.10}$$

Теперь, умножая каждое из (1.1.8) на $\lambda_l c_l^N$ и складывая по l, приходим к равенству

$$-(e^{-2\gamma t} Lu^N, \widetilde{\triangle} u_t^N) = -(e^{-2\gamma t} f, \widetilde{\triangle} u_t^N). \tag{1.1.11}$$

Заметим, что функции u^N удовлетворяют краевым условиям

$$u^N|_{S_T} = 0, \quad u^N|_{t=0} = 0, \quad u_t^N|_{t=0} = 0, \quad u_{tt}^N|_{t=T} = 0.$$

Тогда левая часть равенства (1.1.11) принимает вид

$$-\int\limits_Q e^{-2\gamma t} Lu^N \widetilde{\triangle} v_t dQ = \int\limits_Q e^{-2\gamma t} \left[\left(a + \frac{1}{2}k_t - \gamma k \right) (u_{tt}^N)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k + \gamma \right) \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^N)^2 + \gamma(\triangle u^N)^2 \right] dQ + \int\limits_Q e^{-2\gamma t} \{ 2\gamma \triangle u^N u_{tt}^N +$$

$$+ [(a_t - 2\gamma a + c)u_t^N - 2\gamma c u^N] u_{tt}^N + \sum_{i=1}^{n} (a_{x_i} u_t^N + c u_{x_i}^N + c_{x_i} u^N) u_{tx_i}^N \} dQ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} k (u_{tt}^N)^2 dx + \frac{1}{2} e^{-2\gamma T} \int\limits_{\Omega_T} [(k+1) \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^N)^2 + (\triangle u^N)^2] dx.$$

Отсюда, используя неравенство Коши, получим

$$-\int\limits_Q e^{-2\gamma t} Lu^N \widetilde{\triangle} u_t^N dQ \geq \int\limits_Q e^{-2\gamma t} \{ (a + \frac{1}{2}k_t - \gamma k - 2\gamma - \varepsilon_1)(u_{tt}^N)^2 +$$

$$+ (a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k + \gamma - \varepsilon_2) \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^N)^2 + \frac{\gamma}{2} (\triangle u^N)^2 \} dQ -$$

$$-C_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2) ||u^N||_1^2, \ \varepsilon_1 > 0, \ \varepsilon_2 > 0. \qquad (1.1.12)$$

В неравенстве (1.1.12) выбирая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta/4$, из равенства (1.1.11) с учетом (1.1.10), получим оценку

$$\int\limits_Q [(u_{tt}^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^N)^2 + (\triangle u^N)^2] dQ \leq C_5 (||f||^2 + ||f_t||^2), \ \ C_5 > 0. \quad (1.1.13)$$

Теперь из (1.1.10), (1.1.13) следует оценка (1.1.9), из которой получаем утверждения теоремы.

Теорема 1.1.3 доказана.

Теорема 1.1.4 *Пусть коэффициент* $c(x) \geq c_0 > 0$ *достаточно большой и выполнены условия*

$$k(0) > 0, \ \ k(T) \geq 0; \ \ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \ \ a + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t, f_{tt} \in L_2(Q); \quad f|_{t=0} = 0, \; f|_{t=T} = 0, \; f_t|_{t=0} = 0.$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.1.1 справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \le C_6(||f|| + ||f_t|| + ||f_{tt}||)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_6 > 0, \tag{1.1.14}$$

где λ_{N+1} *– собственное число спектральной задачи* (1.1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.1.2 краевая задача 1.1.1 имеет единственное решение из $W_2^2(Q)$, такое, что $u_t \in W_2^2(Q)$, $\quad u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k, \;\; c_k = (u_t, \varphi_k)$.

Справедливо равенство

$$-\widetilde{\triangle} u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

Отсюда в силу равенства Парсеваля получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = ||\widetilde{\triangle} u_t||^2 < \infty.$$

Тогда из теоремы 1.1.2 следует оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 \le C_7(||f||^2 + ||f_t||^2 + ||f_{tt}||^2). \tag{1.1.15}$$

Пусть H_N - линейное подпространство $W_2^1(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$, и P_N - оператор проектирования на H_N. Из равенств (1.1.8) нетрудно получить соотношения

$$(e^{-2\gamma t} L u^N, \eta) = (e^{-2\gamma t} f, \eta), \;\; (e^{-2\gamma t} L u, \eta) = (e^{-2\gamma t} f, \eta) \;\; \forall \eta \in H_N.$$

Отсюда получаем равенство

$$(e^{-2\gamma t} L(u - u^N), \eta) = 0 \;\; \forall \eta \in H_N.$$

Полагая в полученном равенстве $\eta = w - u_t^N$ с произвольной функцией w из H_N, будем иметь

$$(e^{-2\gamma t}L(u-u^N), u_t - u_t^N) = (e^{-2\gamma t}L(u-u^N), u_t - w).$$

Отсюда в силу леммы 1.1.1 получаем оценку

$$||u-u^N||_1^2 \le C_8(||f|| + ||f_t||)||u_t - w||, \;\; C_8 > 0. \tag{1.1.16}$$

Имеем

$$||u_t - P_N u_t||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \le \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2. \tag{1.1.17}$$

Из неравенства (1.1.16), полагая в нем $w = P_N u_t$ и используя (1.1.18), (1.1.17), получаем оценку (1.1.14) погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.1.1.

Теорема 1.1.4 доказана.

Теперь рассмотрим случай $k(x,0) < 0, \quad k(x,T) < 0$. Тогда краевая задача Врагова примет следующий вид:

<u>Краевая задача 1.1.2</u> Найти решение уравнения (1.1.1) в области Q такое, что выполняются условия (1.1.2) и

$$u|_{t=0} = 0, \; u_t|_{t=T} = 0. \tag{1.1.18}$$

Из условий на $k(x,0), \quad k(x,T)$ следует, что существуют положительные числа $t_0 < T_0$ и δ_1, δ_2 такие, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0, \;\; 0 \le t \le t_0; \;\; k(x,t) \le -\delta_2 < 0, \;\; T_0 \le t \le T.$$

Лемма 1.1.2 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и*

$$k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; x \in \overline{\Omega}\,; \; a - \frac{1}{2}k_t \ge \delta > 0.$$

Тогда для всех функций $u \in C_L$ справедливо неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \ge C_9 ||u||_1^2, \;\; C_9 > 0. \tag{1.1.19}$$

для некоторых бесконечно дифференцируемых и неотрицательных функций $\xi(t), \eta(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \;\; \xi(0) = \xi(T) = 0, \;\; \xi(t) = \mu, \;\; t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geq 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0 \; ; \; \xi_t \leq 0, \;\; T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq \delta^{-1}(\max_{\overline{Q}} |k| + \delta)$.

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.1.2), (1.1.18) получаем соотношение

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) = \int_Q [(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t)]u_t^2 dQ + \int_Q (\eta - \frac{1}{2}\xi_t)[\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2 + cu^2]dQ +$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q [(k\eta)_{tt} - (a\eta)_t]u^2 dQ - \frac{\mu}{2}\int_{\Omega_0} ku_t^2 dx. \qquad (1.1.20)$$

Теперь выберем $\mu \geq \delta^{-1}(\delta_1 + max \mid k \mid)$. Тогда имеем

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t) \geq \delta_1 > 0, \;\; (\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geq 1.$$

В силу выбора $\xi(t), \eta(t)$ и условий леммы из (1.1.20) получаем априорную оценку (1.1.19).

Лемма 1.1.2 доказана.

Лемма 1.1.3 *Пусть коэффициент* $k(x,t)$ *равен* $k(t)$ *и*

$$k(0) < 0, \;\; k(T) < 0 \; ; \; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда для всех функций $u(x,t)$ из C_L имеет место неравенство

$$-(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_{10} \int\limits_Q [u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2] dQ - C_{11}||u||_1^2, \quad (1.1.21)$$

где $C_{10},\ C_{11} > 0$ и $\widetilde{\Delta}u = u_{tt} + \Delta u$, функции $\xi(t), \eta(t)$ определены при доказательстве леммы 1.1.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число μ удовлетворяет условию $\mu \geq\ 2\delta^{-1}(\max\limits_{\overline{Q}} |k| + \delta_1)$.

В силу выбора функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

$$\left(a - \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right) \geqslant \delta_1 + 1,$$

$$\left(a + \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) \geqslant \delta_1,$$

$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \geqslant 1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1,\ \eta + \frac{1}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.1.2), (1.1.18) получаем:

$$(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) = \int\limits_Q \left\{ \left[\left(a + \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)\right] u_{tt}^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta u)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right)\right] \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \right\} dQ + ..., \quad (1.1.22)$$

где многоточием обозначены подчиненные члены. Используя неравенство Коши и теоремы вложения [1], из равенства (1.1.22) получаем априорную оценку (1.1.21).

Лемма 1.1.3 доказана.

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t),$$

где функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи (1.1.7).

Теорема 1.1.5 *Функции* $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ *линейно независимы и множество их линейных комбинаций плотно в* $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место равенство

$$0 = \sum_{k=1}^{N} c_k\psi_k = \sum_{k=1}^{N} c_k\xi\varphi_{kt} + \sum_{k=1}^{N} c_k\eta\varphi_k. \tag{1.1.23}$$

Введем обозначение: $z = \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k$. Умножим равенство (1.1.23) на z и полученное соотношение проинтегрируем по Q. Тогда получаем

$$0 = \int_Q \xi z_t z dQ + \int_Q \eta z^2 dQ = \int_Q (-\frac{1}{2}\xi_t + \eta) z^2 dQ \geq \sum_{k=1}^{N} c_k^2.$$

Отсюда следует что $c_k = 0,\ k = 1,2,...,N$. Следовательно, $\{\psi_k(x,t)\}$ - система линейно независимых функций в $L_2(Q)$. Теперь допустим, что для $v \in W_2^{0,1}(Q)$ выполнено равенство

$$0 = \int_Q v \sum_{k=1}^{N} c_k\psi_k dQ = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_Q \xi v\varphi_{kt} dQ + \sum_{k=1}^{N} c_k \int_Q \eta v\varphi_k dQ =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \int_Q [(\eta - \xi_t)v - \xi v_t]\varphi_k dQ,\ \forall c_k,\ \forall N. \tag{1.1.24}$$

Обозначим: $d_k = \int_Q [(\eta - \xi_t)v - \xi v_t]\varphi_k dQ$. Тогда из (1.1.24) получим

$$\sum_{k=1}^{N} c_k d_k = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $c_k = d_k$, получим $d_k = 0$. Теперь с учетом разложения v по функциям φ_k, будем иметь равенство

$$0 = \int_Q [(\eta - \xi_t)v^2 - \xi v_t v] dQ = \int_Q (\eta - \frac{1}{2}\xi_t)v^2 dQ.$$

Из этого равенства следует, что $\nu = 0$ для почти всех $(x, t) \in Q$, и множество $\{\psi_k(x,t)\}$ плотно в $L_2(Q)$, поскольку $W_2^{0,1}(Q)$ плотно в $L_2(Q)$.

Теорема 1.1.5 доказана.

Приближенное решение краевой задачи 1.1.2 ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t).$$

При этом коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{1.1.25}$$

Теорема 1.1.6 *Пусть выполнены условия лемм 1.1.2, 1.1.3. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи 1.1.2 из пространства $W_2^2(Q)$. При этом приближенные решения $u^N(x,t)$ слабо сходятся к $u(x,t)$ в пространстве $W_2^2(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 1.1.6 заметим, что из равенств (1.1.25) получаются соотношения

$$(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) = (f, \xi u_t^N + \eta u^N),$$

$$-(Lu^N, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N) = (f, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N).$$

Отсюда в силу (1.1.19), (1.1.21) следует справедливость оценки

$$||u^N||_2 \le C_{12}(||f|| + ||f_t||), \quad C_{12} > 0,$$

которая позволяет получить утверждения теоремы 1.1.6. Из теоремы 1.1.5 будем иметь, что уравнение (1.1.1) выполняется для почти всех $(x, t) \in Q$.

Замечание 1.1.1 *В силу единственности регулярного решения краевой задачи 1.1.2 вся последовательность* $\{u^N\}$ *слабо сходится к функции* u *в* $W_2^2(Q)$.

Теорема 1.1.7 *Пусть коэффициент* $c(x) > 0$ *достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) < 0, \;\; k(T) < 0, \;\; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0 \; ; \; f, \; f_t \in L_2(Q).$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.1.2 справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_{13}(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4} \; , \;\; C_{13} > 0,$$

где постоянная C_{13} *не зависит от функций* f, u, u^N *и* λ_{N+1} *- собственное число спектральной задачи* (1.1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения $u(x,t)$ краевой задачи 1.1.2, гарантированного теоремой 1.1.6, справедливы разложение в ряд Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \; , \;\; c_k = (u, \varphi_k)$$

и равенство

$$-\widetilde{\triangle} u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

Отсюда получаем неравенство

$$||\widetilde{\triangle} u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 \leq C_{14}(||f||^2 + ||f_t||^2), \;\; C_{14} > 0. \qquad (1.1.26)$$

Пусть H_N – линейное подпространство $W_2^1(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$, и P_N – оператор проектирования на H_N. Из равенств (1.1.25) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \; k = \overline{1, N}. \qquad (1.1.27)$$

Теперь из (1.1.25) и (1.1.27) получаем равенство

$$(L(u-u^N), \xi v_t + \eta v) = 0, \ \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = \omega - u^N$ с произвольной функцией ω из H_N, имеем

$$(L(u-u^N), \xi(u_t - u_t^N) + \eta(u-u^N)) = (L(u-u^N), \xi(u_t-\omega_t) + \eta(u-\omega)).$$

Отсюда в силу леммы 1.1.2 получаем оценку

$$||u-u^N||_1^2 \leq C_{15}(||f|| + ||f_t||)\|u-\omega\|, \ C_{15} > 0. \tag{1.1.28}$$

С другой стороны, имеем:

$$||u-P_N u||_1^2 \leq C_{16}\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k c_k^2 \leqslant C_{16}\lambda_{N+1}^{-1}\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2\lambda_k^2, \ C_{16}>0. \tag{1.1.29}$$

Из неравенства (1.1.28), полагая в нем $\omega = P_N u$ и используя (1.1.26), (1.1.29), получаем оценку погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.1.2.

1.2 Исследование разрешимости второй краевой задачи

В данном параграфе исследована новая краевая задача для уравнения (1.1.1), условно названная "второй"краевой задачей. Рассматривается случай, когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи обоих оснований цилиндрической области. Впервые постановка второй краевой задачи была рассмотрена в работе [79].

Вторая краевая задача. [79] Найти в области Q решение уравнения (1.1.1), такое, что выполняются условия (1.1.2) и

$$u_t \mid_{\overline{P}_0^-} = 0, \; u \mid_{\overline{P}_T^+} = 0, \; u_t \mid_{t=T} = 0.$$

Для второй краевой задачи для уравнения смешанного типа рассмотрим случай $k(x,0) < 0, \; k(x,T) < 0$. Тогда вторая краевая задача примет следующий вид:

Краевая задача 1.2. Найти в области Q решение уравнения (1.1.1), такое, что выполняются условия (1.1.2) и

$$u_t \mid_{t=0} = 0, \; u_t \mid_{t=T} = 0. \tag{1.2.1}$$

Через C_L обозначим класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.1.2), (1.2.1).

Лемма 1.2.1 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия:*

$$k(x,0) < 0, \; k(x,T) < 0, \; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \; \eta(t) \in C^\infty[0,T]$, такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \|u\|_1^2; \; C_1 = const > 0. \tag{1.2.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется положительное число $t_0 < T$, а так же числа $t_1,\ t_2$, такие, что

$$k(x,t) \leqslant -\delta_1 < 0,\ t \in [0,t_0],\ 0 < t_2 < t_1 < t_0 < T.$$

Выбираем функции $\xi(t),\ \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ таким образом, чтобы

$$\xi(0) = 0,\ \xi_t(t) \geqslant 0,\ t \in [0,t_2];\ \xi_t(t) \leqslant 0,\ t \in [t_2,T];$$

$$\xi(t) = e^{-2\lambda t},\ t \in [t_1,T],\ \lambda > 0;$$

$$\eta(t) = 1 + \frac{1}{2}\xi_t(t),\ t \in [0,t_2];\ \eta(t) = 1 - \frac{1}{2}\xi_t(t),\ t \in [t_2,t_1];$$

$$\eta_t(t) \leqslant 0,\ t \in [t_1,T];\ \eta(t) = 0,\ t \in [t_0,T].$$

Для функций $u \in C_L$ с помощью интегрирования по частям получим соотношение

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) = \int_Q \Bigg\{[(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - (\eta + \frac{1}{2}\xi_t)k]u_t^2 + \\ +(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)\left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + cu^2\right] + [a\eta - (k\eta)_t]u_t u\Bigg\} dQ + I, \quad (1.2.3)$$

где

$$I \equiv \frac{1}{2}e^{-2\lambda T}\int_{\Omega_T}\left(cu^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)dx \geqslant 0.$$

Теперь выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\delta + \lambda k \geqslant \delta/2$. Тогда получим, что

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\delta e^{-2\lambda T}\},\ \eta - \frac{1}{2}\xi_t \geqslant \min\{1, \lambda e^{-2\lambda T}\}.$$

Далее из соотношения (1.2.3), используя неравенство Коши и условия леммы, получаем утверждение леммы 1.2.1.

Лемма 1.2.1 доказана.

Следствие 1.2.1 *Пусть выполнены все условия леммы 1.2.1. Тогда краевая задача 1.2 может иметь не более одного решения из пространства* $W_2^2(Q)$.

Лемма 1.2.2 *Пусть выполнены условия:*

$$k(x,t) \equiv k(t),\ k(0) < 0,\ k(T) < 0,\ a \pm \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t),\ \eta(t) \in C^\infty[0,T]$, *такие, что для всех функций* $u \in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_2 \int_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2\right] dQ - C_3\|u\|_1^2,\ C_2, C_3 > 0, \tag{1.2.4}$$

где $\widetilde{\Delta}u = -u_{tt} - \Delta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $k(0) < 0,\ \ k(T) < 0$, то существуют положительные числа $t_0 < T_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(t) \leq -\delta_1 < 0,\ \ 0 \leq t \leq t_0;\ \ k(t) \leq -\delta_1 < 0,\ \ T_0 \leq t \leq T.$$

Функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0,\ \ \xi(0) = \xi(T) = 0,\ \ \xi(t) = \mu,\ \ t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t(t) \geq 0,\ \ 0 \leq t \leq t_0\ ;\ \xi_t(t) \leq 0,\ \ T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq 2\delta^{-1}(\max_{\overline{Q}} |k| + \delta_1)$.

В силу такого выбора функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

$$\left(a - \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right) \geqslant \delta_1 + 1,$$

$$\left(a+\frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta-\frac{1}{2}\xi_t\right) \geqslant \delta_1,$$

$$\eta-\frac{1}{2}\xi_t \geqslant 1,\ \eta-\frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1,\ \eta+\frac{1}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.1.2),(1.2.1) получаем:

$$(Lu,\xi\widetilde{\Delta}u_t+\eta\widetilde{\Delta}u) = \int\limits_Q \left\{\left[\left(a+\frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta-\frac{1}{2}\xi_t\right)\right]u_{tt}^2 + \left(\eta-\frac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta u)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\left(a-\frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta+\frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta-\frac{3}{2}\xi_t\right)\right]\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2\right\} dQ + ..., \qquad (1.2.5)$$

где многоточием обозначены подчиненные члены. Используя неравенство Коши и теоремы о вложении [1], из равенства (1.2.5) получаем априорную оценку (1.2.4).

Лемма 1.2.2 доказана.

Замечание 1.2.1 *Отметим, что априорная оценка* (1.2.2) *остается справедливой и для новых функций* $\xi(t), \eta(t)$ *из доказательства леммы 1.2.2.*

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta}v \equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, \ \ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \ \ v_t|_{t=0} = 0, \ \ v_t|_{t=T} = 0. \qquad (1.2.6)$$

В дальнейшем будем считать, что собственные числа данной спектральной задачи пронумерованы следующим образом: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t),$$

где $\xi(t), \eta(t)$ удовлетворяют лемме 1.2.2.

Теорема 1.2.1 *Функции $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимы и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Доказательство теоремы 1.2.1 полностью совпадает с доказательством теоремы 1.1.5.

Теорема 1.2.2 *Пусть выполнены условия лемм 1.2.1, 1.2.2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи 1.2 из пространства $W_2^2(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенное решение краевой задачи 1.2 ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

причем коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1,N}. \tag{1.2.7}$$

Из равенств (1.2.7) нетрудно получить соотношения

$$(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) = (f, \xi u_t^N + \eta u^N),$$

$$(Lu^N, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N) = (f, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N).$$

Отсюда с учетом гладкости функций $\varphi_k(x,t)$ и лемм 1.2.1, 1.2.2 будем иметь, что для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (1.2.2), (1.2.4). Следовательно, существуют подпоследовательность $u^{N_k}(x,t)$ и функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, такие, что $u^{N_k} \to u$ слабо в $W_2^2(Q)$. При этом справедлива оценка

$$||u||_2 \leq C_4(||f|| + ||f_t||), \quad C_4 > 0\ .$$

Теперь, переходя к пределу при $N_k \to \infty$ в равенстве (1.2.7), получаем

$$\int_Q [ku_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u]\psi_k dQ = \int_Q f(x,t)\psi_k dQ,\ k = 1, 2, ...$$

Отсюда в силу теоремы 1.2.1 будем иметь, что уравнение (1.1.1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (1.1.2), (1.2.1) удовлетворяются в среднем.

Теорема 1.2.2 доказана.

Теорема 1.2.3 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2. Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.2 справедлива оценка*

$$||u - u^N||_1 \leq C_5(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4}, C_5 > 0,$$

где постоянная C_5 не зависит от N и λ_{N+1} - собственное число спектральной задачи (1.2.6)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.2.2 краевая задача 1.2 имеет единственное решение $u \in W_2^2(Q)$. Имеет место разложение функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k\ ,\ \ c_k = (u, \varphi_k). \tag{1.2.8}$$

При этом ряд (1.2.8) сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнений (1.2.7) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k),\ k = \overline{1, N}. \tag{1.2.9}$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = \|\widetilde{\Delta} u\|^2 \leq C_6(||f||^2 + ||f_t||^2),\ \ C_6 > 0. \tag{1.2.10}$$

Пусть H_N - линейное подпространство $L_2(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$, и P_N - оператор проектирования на H_N. Из равенств (1.2.7) , (1.2.9) нетрудно получить равенство

$$(L(u-u^N), \xi v_t + \eta v) = 0, \ \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = \omega - u^N$ с произвольной функцией ω из H_N, имеем

$$(L(u-u^N), \xi(u_t - u_t^N) + \eta(u-u^N) = (L(u-u^N), \xi(u_t - \omega_t) + \eta(u-\omega).$$

Отсюда в силу леммы 1.2.1 получаем оценку

$$||u-u^N||_1^2 \leq C_7(||f|| + ||f_t||)\|u-\omega\|_{1,1}, \ C_7 > 0. \tag{1.2.11}$$

С другой стороны, имеем:

$$||u - P_N u||_1^2 \leq C_8 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant C_8 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \ C_9 > 0. \tag{1.2.12}$$

Из неравенства (1.2.11), полагая в нем $\omega = P_N u$ и используя (1.2.10), (1.2.12), получаем оценку погрешности стационарного метода Галеркина.

Теорема 1.2.3 доказана.

1.3 Исследование разрешимости первой краевой задачи для уравнения второго порядка

В этом параграфе рассматривается частный случай первой краевой задачи, когда уравнение смешанного типа принадлежит эллиптическому типу вблизи нижнего и верхнего оснований цилиндрической области.

Рассмотрим случай

$$k(x,0) < 0, \quad k(x,T) < 0.$$

Краевая задача 1.3 Найти решение уравнения (1.1.1) в области Q, такое, что выполняются условия (1.1.2) и

$$u\mid_{t=0} = 0,\ u\mid_{t=T} = 0. \tag{1.3.1}$$

Пусть C_L – класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.1.2), (1.3.1).

Лемма 1.3.1 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия:*

$$k(x,0) < 0, \quad k(x,T) < 0,\ x \in \overline{\Omega}, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^{\infty}[0,T]$ такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \parallel u \parallel_1^2,\ C_1 = const > 0. \tag{1.3.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $k(x,T) < 0$, то существуют числа T_0, δ_1 такие, что $0 < T_0 < T$, и выполнено неравенство

$$k(x,t) \leq -\delta_1 < 0, \quad T_0 \leq t \leq T.$$

Функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0,\ \xi(T) = 0,$$

$$\xi(t) = \mu,\ 0 \leq t \leq T_0;\ \xi_t \leq 0,\ T_0 \leq t \leq T;$$
$$\eta(t) = -\frac{1}{2}\xi_t + 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.1.2), (1.3.1) получаем соотношение

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) = \int_Q [(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t)]u_t^2 dQ + \int_Q (\eta - \frac{1}{2}\xi_t)[\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2 + cu^2]dQ +$$
$$+\frac{1}{2}\int_Q [(k\eta)_{tt} - (a\eta)_t]u^2 dQ - \frac{\mu}{2}\int_{\Omega_0} k u_t^2 dx. \qquad (1.3.3)$$

Теперь выберем $\mu \geq \delta^{-1}(\delta_1 + max \mid k \mid)$.

Тогда имеем

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t) \geq \delta_1 > 0,\ (\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geq 1.$$

В силу выбора $\xi(t), \eta(t)$ и условий леммы из (1.3.3) получаем априорную оценку (1.3.2).

Лемма 1.3.1 доказана.

Следствие 1.3.1 *Пусть выполнены все условия леммы 1.3.1, тогда краевая задача 1.3 может иметь не более одного решения из пространства $W_2^2(Q)$.*

Лемма 1.3.2 *Пусть выполнены условия:*

$$k(x,t) = k(t),\ k(0) < 0,\ k(T) < 0,\ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^{\propto}[0,T]$, такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$-(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_2 \int_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2\right] dQ - C_3 \parallel u \parallel_1^2,\ C_2,\ C_3 > 0,$$
$$(1.3.4)$$

где $\widetilde{\Delta}u = u_{tt} + \Delta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $k(0) < 0, k(T) < 0$, то существуют положительные числа $t_0 < T_0$ и $\delta_1,\ \delta_2$ такие, что $k(t) \leq -\delta_1 < 0$ при $0 \leq t \leq t_0,\ k(t) \leq -\delta_2 < 0$ при $T_0 \leq t \leq T$. Функции $\xi(t),\ \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0,\ \xi(0) = \xi(T) = 0,\ \xi(t) = \mu,\ t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geq 0,\ 0 \leq t \leq t_0;\ \xi_t \leq 0,\ T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0; \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0; \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq \delta^{-1}(max|k| + \delta)$.

В силу такого выбора функций $\xi(t),\ \eta(t)$ получаем:

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t) \geq min\{\delta, \delta_1, \delta_2\},$$

$$(a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geq \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\},$$

$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \geq 1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geq 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.1.2), (1.3.1) получаем:

$$-(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) = \int_Q \Big\{[(a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)]u_{tt}^2 + (\eta - \frac{1}{2}\xi_t)(\Delta u)^2 +$$

$$+[(a - \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta + \frac{1}{2}\xi_t) + (\eta - \frac{3}{2}k_t)]\sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2\Big\} dQ + ... \quad (1.3.5)$$

где многоточием обозначены подчиненные члены.

Используя неравенство Коши, из равенства (1.3.5) получаем априорную оценку (1.3.4).

Лемма 1.3.2 доказана.

Замечание 1.3.1 *Отметим, что априорная оценка* (1.3.2) *остается справедливой и для новых функций* $\xi(t), \eta(t)$ *из доказательства леммы 1.3.2.*

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta} v \equiv v_{tt} + \Delta v = -\lambda v, \ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \ v|_{t=0} = 0, \ v|_{t=T} = 0. \tag{1.3.6}$$

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt} + \eta(t)\varphi_k, \ k = 1, 2, \dots ,$$

где функции $\xi(t), \ \eta(t)$ – из леммы 1.3.2.

Теорема 1.3.1 *Функции* $\{\psi_k(x,t)\}$ *линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в* $L_2(Q)$.

Доказательство теоремы 1.3.1 полностью совпадает с доказательством теоремы 1.1.5.

Теорема 1.3.2 *Пусть выполнены условия лемм 1.3.1, 1.3.2. Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$, *такой, что* $f_t \in L_2(Q)$ *существует единственное регулярное решение краевой задачи 1.3 из пространства* $W_2^2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенное решение краевой задачи 1.3 ищется в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \ k = \overline{1, N}. \tag{1.3.7}$$

Из равенства (1.3.7) нетрудно получить соотношения

$$(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) = (f, \xi u_t^N + \eta u^N),$$

$$-(Lu^N, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N) = -(f, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N).$$

Отсюда с учетом гладкости функций $\varphi_k(x,t)$ и лемм 1.3.1, 1.3.2 будем иметь, что для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (1.3.2), (1.3.4). Следовательно, существуют подпоследовательность $\{u^{N_k}(x,t)\}$ и функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ такие, что $u^{N_k} \to u$ слабо в $W_2^2(Q)$ [54]. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leq C_4(\|f\| + \|f_t\|), \ C_4 > 0.$$

Теперь переходя к пределу при $N_k \to \infty$ в равенстве (1.3.7), получаем

$$\int_Q [k(t)u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u]\psi_k dQ = \int_Q f(x,t)\psi_k dQ, \ k = 1, 2, \dots .$$

Отсюда в силу теоремы 1.3.1 будем иметь, что уравнение $Lu = f(x,t)$ выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (1.1.2), (1.3.1) удовлетворяются в среднем.

Теорема 1.3.2 доказана.

Теорема 1.3.3 *Пусть коэффициент* $c(x) > 0$ *достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) < 0, \ \ k(T) < 0, \ \ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0 \ ; \ f, \ f_t \in L_2(Q).$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.3 справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_5(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4} \ , \ \ C_5 > 0,$$

где постоянная C_5 *не зависит от функций* f, u, u^N, λ_{N+1} *- собственное число спектральной задачи* (1.3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.3.2 краевая задача 1.3 имеет единственное решение $u \in W_2^2(Q)$. Имеем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \ , \ \ c_k = (u, \varphi_k). \tag{1.3.8}$$

При этом ряд (1.3.8) сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнений (1.3.7) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \ k = \overline{1, N}. \tag{1.3.9}$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = \|\widetilde{\Delta} u\|^2 \leq C_6(||f||^2 + ||f_t||^2), \ \ C_6 > 0. \tag{1.3.10}$$

Пусть H_N – линейное подпространство $L_2(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$, и P_N – оператор проектирования на H_N. Из равенств (1.3.7), (1.3.9) нетрудно получить равенство

$$(L(u - u^N), \xi v_t + \eta v) = 0, \ \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = \omega - u^N$ с произвольной функцией ω из H_N, имеем

$$(L(u - u^N), \xi(u_t - u_t^N) + \eta(u - u^N) = (L(u - u^N), \xi(u_t - \omega_t) + \eta(u - \omega).$$

Отсюда в силу леммы 1.2.1 получаем оценку

$$||u - u^N||_1^2 \leq C_7(||f|| + ||f_t||)\|u - \omega\|, \ C_7 > 0. \tag{1.3.11}$$

С другой стороны, имеем:

$$||u - P_N u||_1^2 \leq C_8 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant C_8 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \ C_9 > 0. \tag{1.3.12}$$

Из неравенства (1.3.11), полагая в нем $\omega = P_N u$ и используя (1.3.10), (1.3.12), получаем оценку погрешности стационарного метода Галеркина.

Теорема 1.3.3 доказана.

1.4 Исследование разрешимости первой краевой задачи для уравнения четного порядка

В данном параграфе с помощью стационарного метода Галеркина исследуется первая краевая задача для уравнения смешанного типа четного порядка. Случай уравнения смешанного типа второго порядка этой задачи рассмотрена в §1.3.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x)u = f(x,t), \qquad (1.4.1)$$

где $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$, s – произвольное натуральное число.

Отметим, что коэффициент $k_{2s}(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Поэтому в класс уравнений вида (1.4.1) входят эллиптико-параболические, гиперболо-параболические, эллиптико-гиперболические и другие уравнения. Предполагается, что коэффициенты уравнения – гладкие функции.

Рассмотрим случай когда

$$k(-1)^{s-1} k_{2s}(x,0) < 0,\ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) < 0.$$

Краевая задача 1.4 Найти решение уравнения (1.4.1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \qquad (1.4.2)$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}. \qquad (1.4.3)$$

$W_2^{m,s}(Q)$ – пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathrm{m},s} = \int_Q \left[D_t^s u D_t^s v + \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u D^\alpha v \right] dQ$$

и нормой $\|u\|^2_{m,s} = (u, v)_{m,s}$.

Пусть C_L – класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.4.2), (1.4.3), а $\overset{0}{W}{}^{1,s}_2(Q)$ – замыкание C_L по норме $\|u\|_{1,s}$.

Лемма 1.4.1 *Пусть коэффициент $a(x) > 0$ достаточно большой и*

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,0) < 0, (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) < 0,$$

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \ \ \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \|u\|^2_{1,s}, \ C_1 = const > 0. \tag{1.4.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(-1)^s k_{2s}(x,T) < 0$, то существуют числа T_0, δ_1 такие, что $0 < T_0 < T$ и выполнено неравенство

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,t) \leq -\delta_1 < 0 \ \ T_0 \leq t \leq T.$$

Функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \ \xi(T) = 0,$$

$$\xi(t) = \mu, \ 0 \leq t \leq T_0; \ \xi_t(t) \leq 0, \ T_0 \leq t \leq T;$$
$$\eta(t) = -\frac{2s-1}{2}\xi_t(t) + 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.4.2)-(1.4.3) получаем соотношение

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) = -\frac{(-1)^{s-1}\mu}{2}\int_{\Omega_0} k_{2s}(D^s_t u)^2 dx +$$

$$+\int_Q \left\{\frac{(-1)^{s-1}}{2}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}]\xi + (-1)^s k_{2s}[\frac{2s-1}{2}\xi_t + \eta]\right\}(D^s_t u)^2 dQ +$$

$$+\int_Q (\eta - \frac{1}{2}\xi_t)[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + au^2]dQ + ..., \qquad (1.4.5)$$

где члены, обозначенные многоточием, играют подчиненную роль.

Теперь выберем $\mu \geq 2\delta^{-1}(\delta_1 + max|k_{2s}|)$. Тогда имеем

$$\frac{(-1)^{s-1}}{2}[2k_{2s-1}+(1-2s)k_{2s,t}]\xi+(-1)^s k_{2s}[\frac{(2s-1)}{2}\xi_t+\eta] \geq \delta_1 > 0,\ (\eta-\frac{1}{2}\xi_t) \geq 1.$$

В силу выбора $\xi(t), \eta(t)$ и условий леммы из (1.4.5) получаем априорную оценку (1.4.4). При этом для оценки подчиненных членов использованы неравенства $\|D_t^j u\|^2 \leq \varepsilon \|u\|_{m,j}^2 + C_{2j}(\varepsilon)\|u\|^2,\ \ C_{2j}(\varepsilon),\ \ \varepsilon > 0,\ j = \overline{0, s-1}$.

Лемма 1.4.1 доказана.

Следствие 1.4.1 *Пусть выполнены все условия леммы 1.4.1. Тогда краевая задача 1.4 может иметь не более одного решения из пространства* $W_2^{2,2s}(Q)$.

Лемма 1.4.2 *Пусть выполнены условия:*

$$k_{2s}(x,t) = k_{2s}(t),\ (-1)^{s-1}k_{2s}(0) < 0,\ (-1)^{s-1}k_{2s}(T) < 0,$$

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \ \ \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2st}] \ \ \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t),\ \ \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ *такие, что для всех функций* $u \in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu, \xi\tilde{\Delta}u_t + \eta\tilde{\Delta}u) \geq$$

$$\geq C_3 \int_Q \left[(D_t^{2s}u)^2 + \sum_{i=1}^n (D_t^s u_{x_i})^2 + (\Delta u)^2 \right] dQ - C_4 \|u\|_{1,s}^2,\ C_3,\ C_4 > 0, \qquad (1.4.6)$$

где $\tilde{\Delta}u = (-1)^s D_t^{2s}u - \Delta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(0) < 0, \;\; (-1)^{s-1}k_{2s}(T) < 0,$$

то существуют положительные числа $t_0 < T_0$ и δ_1 такие, что $(-1)^{s-1}k(t) \le -\delta_1 < 0$ при $0 \le t \le t_0$, $(-1)^{s-1}k(t) \le -\delta_1 < 0$ при $T_0 \le t \le T$. Функции $\xi(t),\ \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \ge 0,\ \xi(0) = \xi(T) = 0,\ \xi(t) = \mu,\ t_0 \le t \le T_0,$$

$$\xi_t(t) \ge 0,\ 0 \le t \le t_0;\ \xi_t(t) \le 0,\ T_0 \le t \le T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{2s+1}{2}\xi_t(t) + 1, & 0 \le t \le t_0; \\ 1, & t_0 \le t \le T_0; \\ -\frac{2s-1}{2}\xi_t(t) + 1, & T_0 \le t \le T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \ge 2\delta^{-1}(max|k_{2s}| + \delta_1)$.

В силу такого выбора функций $\xi(t),\ \eta(t)$ получаем

$$(-1)^{s-1}(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2s,t})\xi + (-1)^s k_{2s}(\eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t) + (\eta - \frac{2s-1}{2}\xi_t) \ge \delta_1,$$

$$(-1)^{s-1}(k_{2s-1} + \frac{1}{2}k_{2s,t})\xi + (-1)^s k_{2s}(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \ge \delta_1,$$

$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \ge 1,\ \eta - \frac{2s+1}{2}\xi_t \ge 1,\ \eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t \ge 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (1.4.2), (1.4.3) получаем:

$$(Lu, \xi\tilde{\Delta}u_t + \eta\tilde{\Delta}u) =$$

$$= \int_Q \Bigg\{[(-1)^{s-1}(k_{2s-1} + \frac{1}{2}k_{2s,t})\xi + (-1)^s k_{2s}(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)](D_t^{2s}u)^2 +$$

$$+(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)(\Delta u)^2 + [(-1)^{s-1}(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2s,t})\xi +$$

$$+(-1)^s k_{2s}(\eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t) + (\eta - \frac{2s-1}{2}\xi_t)] \sum_{i=1}^{n}(D_t^s u_{x_i})^2\Bigg\} dQ + ..., \quad (1.4.7)$$

где многоточием обозначены подчиненные члены.

Используя неравенство Коши, из равенства (1.4.7) получаем априорную оценку (1.4.6).

Лемма 1.4.2 доказана.

Замечание 1.4.1 *Отметим, что априорная оценка* (1.4.4) *остается справедливой и для новых функций* $\xi(t), \eta(t)$ *из доказательства леммы 1.4.2.*

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\tilde{\Delta}v \equiv (-1)^s D_t^{2s} v - \Delta v = \lambda v, \ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \ D_t^i v|_{\substack{t=0 \\ t=T}} = 0, \ i = \overline{0, s-1.} \tag{1.4.8}$$

В дальнейшем будем считать, что собственные числа данной спектральной задачи пронумерованы следующим образом: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \ \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt} + \eta(t)\varphi_k, \ k = 1, 2, ... \ ,$$

где функции $\xi(t), \ \eta(t)$ – из леммы 1.4.2.

Теорема 1.4.1 *Функции* $\{\psi_k(x,t)\}$ *линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в* $L_2(Q)$.

Теорема 1.4.2 *Пусть выполнены условия лемм* 1.4.1, 1.4.2. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$, *такой, что* $f_t \in L_2(Q)$, *существует единственное регулярное решение краевой задачи 1.4 из пространства* $W_2^{2,2s}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенное решение краевой задачи 1.4 ищется в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k),\ k = \overline{1, N}. \tag{1.4.9}$$

Из равенства (1.4.9) нетрудно получить соотношения

$$(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) = (f, \xi u_t^N + \eta u^N),$$

$$(Lu^N, \xi \tilde{\Delta} u_t^N + \eta \tilde{\Delta} u^N) = (f, \xi \tilde{\Delta} u_t^N + \eta \tilde{\Delta} u^N).$$

Отсюда с учетом гладкости функций $\varphi_k(x,t)$ и лемм 1.4.1, 1.4.2 будем иметь, что для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (1.4.4), (1.4.6). Следовательно, существуют подпоследовательность $u^{N_k}(x,t)$ и функция $u(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ такие, что $u^{N_k} \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{2,2s} \leq C_5(\|f\| + \|f_t\|),\ C_5 > 0.$$

Теперь переходя к пределу при $N_k \to \infty$ в равенстве (1.4.9), получаем

$$\int_Q \left[\sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x) u \right] \psi_k dQ = \int_Q f(x,t) \psi_k dQ,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда в силу теоремы 1.4.1 будем иметь, что уравнение $Lu = f(x,t)$ выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (1.4.2), (1.4.3) удовлетворяются в среднем.

Теорема 1.4.2 доказана.

Теорема 1.4.3 *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.2. *Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи 1.4 справедлива оценка*

$$\left\| u - u^N \right\|_{1,s} \leq C_6(\|f\| + \|f_t\|) \lambda_{N+1}^{-1/4}, C_6 > 0,$$

где постоянная C_6 *не зависит от* N, λ_{N+1} *– собственное число спектральной задачи* (1.4.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.4.2 краевая задача 1.4 имеет единственное решение $u(x,t)$, такое, что $u \in W_2^{2,2s}(Q)$. Имеем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, {}_k = (u, \varphi_k). \qquad (1.4.10)$$

При этом ряд (1.4.10) сходится сильно в $\overset{0}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнения (1.4.1) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \ k = \overline{1, N}. \qquad (1.4.11)$$

С другой стороны в силу равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = ||\tilde{\Delta} u||^2 \le C_7(||f||^2 + ||f_t||^2), \ \ C_7 > 0. \qquad (1.4.12)$$

Пусть H_N – линейное подпространство $\overset{0}{W}{}_2^{1,s}(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$, и P_N – оператор проектирования на H_N. Из равенств (1.4.9), (1.4.11) нетрудно получить равенство

$$(L(u - u^N), \xi v_t + \eta v) = 0 \ \ \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = w - u^N$ с произвольной функцией w из H_N, имеем

$$(L(u - u^N), \xi(u_t - u_t^N) + \eta(u - u^N)) = (L(u - u^N), \xi(u_t - w_t) + \eta(u - w)).$$

Отсюда в силу леммы 1.4.1 получаем оценку

$$||u - u^N||_{1,s}^2 \le C_8(||f|| + ||f_t||)||u - w||_{1,s}, \ C_8 > 0. \qquad (1.4.13)$$

С другой стороны, имеем

$$||u - P_N u||_{1,s}^2 \le C_9 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \le C_9 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \ C_9 > 0 \qquad (1.4.14)$$

Из неравенства (1.4.13), полагая а нем $w = P_N u$ и используя (1.4.12), (1.4.14), получаем оценку скорости сходимости стационарного метода Галеркина.

Теорема 1.4.3 доказана.

2. ГЛАВА 2.
Нестационарный метод Галеркина для уравнений смешанного типа

Во второй главе рассмотрены краевые задачи для уравнения смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа. Для доказательства регулярной разрешимости используется нестационарный метод Галеркина, с привлечением ε - регуляризации. Также для этих краевых задач получены оценки погрешности нестационарного метода Галеркина.

2.1 Исследование разрешимости краевой задачи в постановке Врагова.

В области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \triangle u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.1.1}$$

коэффициенты которого являются достаточно гладкими функциями.

Положим

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача Врагова. Найти решение уравнения (2.1.1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \; u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P_0^+}} = 0, \quad u_t|_{\overline{P_T^-}} = 0. \tag{2.1.2}$$

Пусть C_L – класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2.1.2).

Справедлива следующая лемма [15, 28].

Лемма 2.1.1 *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0,\ a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существует число $\lambda > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\int_Q e^{-2\lambda t} u_t Lu dQ \geq C_1(\lambda)||u||_1^2,\ \ C_1 > 0,$$

для всех $u(x,t)$ из C_L.

Обозначим скалярное произведение в $L_2(Q)$ через (u, v), $||u||^2 = (u, u)$ для u, v из $L_2(Q)$ и

$$(f, g)_0 = \int_\Omega f(x)g(x)dx,\ ||f||_0^2 = (f, f)_0,\ f, g \in L_2(\Omega).$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются собственными функциями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega,\ \varphi|_S = 0. \tag{2.1.3}$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи Врагова ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x),\ \ N \geqslant 1,\ \ \varepsilon > 0,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{2.1.4}$$

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{2.1.5}$$

для случая $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{2.1.4^2}$$

для случая $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0 \tag{2.1.4^3}$$

для случая $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{2.1.4^4}$$

для случая $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$.

В силу леммы 2.1.1 для уравнения (2.1.4) с краевыми условиями (2.1.4^p), где $p = \overline{1,4}$, при достаточном малом $\lambda > 0$ устанавливается

Лемма 2.1.2 *Пусть выполнены условия леммы 2.1.1, и имеет место один из следующих случаев: либо* $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$*, либо* $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$*, либо* $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$*, либо* $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$*.*

Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что имеет место неравенство*

$$\varepsilon \|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 \leqslant C_2 \|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (2.1.4) на $e^{-2\lambda t} c_{kt}^{N,\varepsilon}$, просуммируем полученные равенства по k от 1 до N и проинтегрируем от 0 до T:

$$-\varepsilon \int_Q u_{ttt}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon} e^{-2\lambda t} dQ + (Lu^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t} u_t^{N,\varepsilon}) = \int_Q f u_t^{N,\varepsilon} e^{-2\lambda t} dQ.$$

Далее, используя лемму 2.1.1 и неравенство Коши, получаем оценку

$$\varepsilon \|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 \leqslant C_2 \|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \frac{C_1}{4\lambda^2}. \tag{2.1.6}$$

Оценка (2.1.6) гарантирует существование единственного решения краевой задачи (2.1.4), (2.1.4^p), где $p = \overline{1,4}$. Следовательно, приближенные решения $u^{N,\varepsilon}$ однозначно определяются краевой задачей (2.1.4), (2.1.4^p), где $p = \overline{1,4}$, и имеет место $c_k^{N,\varepsilon} \in W_2^3(0,T)$.

Лемма 2.1.2 доказана.

Лемма 2.1.3 *Пусть выполнены условия лемм 2.1.1, 2.1.2 и*

$$a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существует неотрицательные гладкие функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ *и число* $\varepsilon_1 > 0$ *такие, что имеет место неравенство*

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi D_t^3 u^{N,\varepsilon} + \eta D_t^2 u^{N,\varepsilon}) \geqslant C_3 \int_Q \Big((u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 +$$

$$+ \sigma \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 \Big) dQ - C_4 ||u^{N,\varepsilon}||_1^2, \quad C_3 > 0,\ C_4 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\sigma = 1$ *для* $k(x,T) < 0$ *и* $\sigma = 0$ *для* $k(x,T) \geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (2.1.4) на $-(\xi D_t^3 c_l^{N,\varepsilon} + \eta D_t^2 c_l^{N,\varepsilon})$, просуммируем полученные равенства по k от 1 до N и проинтегрируем от 0 до T:

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}) = \varepsilon \int_Q \xi (u_{ttt}^{N,\varepsilon})^2 dQ + \varepsilon \int_Q \eta u_{ttt}^{N,\varepsilon} u_{tt}^{N,\varepsilon} dQ$$

$$-(L u^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}),$$

где ξ, η – неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции.

После интегрирования по частям с учетом условий (2.1.4^p), где $p = \overline{1,4}$, получаем:

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}) = \varepsilon \| \sqrt{\xi} u_{ttt}^{N,\varepsilon} \|^2 + \tag{2.1.7}$$

$$+ \int_Q \left\{ \left[(a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \right] (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + (\eta - \frac{3}{2}\xi_t) \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_1}^{N,\varepsilon})^2 \right\} dQ$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int_Q \eta_t (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dQ + \int_Q \left[(a\xi)_t + c\xi - a\eta\right] u_{tt}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon} dQ$$

$$+\int_Q (c\xi_t - c\eta)\, u_{tt}^{N,\varepsilon} u^{N,\varepsilon} dQ + \int_Q (\eta_t - \xi_{tt}) \sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_{x_i}^{N,\varepsilon} dQ + A,$$

где

$$A \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\varepsilon\eta - k\xi)(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + \xi \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 - 2a\xi u_{tt}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon} \right] dx|_{t=0}^{t=T}$$

$$+\int_{\Omega_T} \left\{ \left[(\Delta u^{N,\varepsilon} - c u^{N,\varepsilon}) \xi u_{tt}^{N,\varepsilon} \right] + (\xi_t - \eta) \sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_{x_i}^{N,\varepsilon} \right\} dx.$$

1. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$. В данном случае достаточно рассмотреть ситуацию, когда $\xi(t) = 1,\ \eta(t) = 0$. При этом будем иметь

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} k (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0,$$

$$I = (a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \delta > 0.$$

Далее в силу неравенства Коши из равенства (2.1.4) получаем априорную оценку леммы 2.1.3 при $\sigma = 0$

2. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) \geqslant k_0 > 0,\ k(x,T) < 0$. Тогда существуют положительные числа $T_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x,t) \leq -\delta_1 < 0,\ \ T_0 \leq t \leq T.$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0,\ \ \xi(T) = 0,\ \ \xi(t) = \mu,\ \ 0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \leq 0,\ \ T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 1 - \frac{1}{2}\xi_t, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом свойств выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) когда $0 \leq t \leq T_0$,

$$I = (a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \delta_2 = \delta\mu - \max|k| > 0,$$

$$\eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

b) когда $T_0 \leq t \leq T$,

$$I \geqslant \delta_1, \ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

С учетом условий леммы и (2.1.4^2) получаем, что $I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и

$$A = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \eta(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (k\xi - \varepsilon\eta)(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx.$$

Теперь выбираем положительное число ε_1 так, чтобы

$$\varepsilon_1 \leqslant k_0\mu, \ \min\{\delta_1, \delta_2\} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \max|\eta_t| \geqslant \delta_3 > 0.$$

Тогда величина $A \geqslant 0$, т. е. граничные интегралы в (2.1.7) будут неотрицательными, и

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon|\eta_t| \geqslant \delta_3, \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (2.1.7), получим априорную оценку леммы 2.1.3.

3. Рассмотрим случай, когда $k(x, 0) < 0, \ k(x, T) < 0$. Тогда существуют положительные числа $0 < t_0 < T_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, \ \ t \in [0, t_0] \bigcup [T_0, T].$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \;\; \xi(0) = \xi(T) = 0, \;\; \xi(t) = \mu, \;\; t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geqslant 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0, \; \xi_t \leqslant 0, \;\; T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}\xi_t, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ 1 - \frac{1}{2}\xi_t, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом свойств выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) если $0 \leq t \leq t_0$, то

$$I \geqslant \delta_1, \;\; \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

b) если $t_0 \leq t \leq T_0$, то

$$I \geqslant \delta_2, \;\; \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

c) если $T_0 \leq t \leq T$, то

$$I \geqslant \delta_1, \;\; \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

В силу условий леммы и $(2.1.4^3)$, получаем:

$$I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}, \;\; A = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \eta(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

Теперь утверждения леммы 2.1.3 следует из аналогичных рассуждений пункта 2.

4. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) \geqslant 0$. Также считаем, что существуют положительные числа $0 < t_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x,t) \leq -\delta_1 < 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0.$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \;\; \xi(0) = 0, \;\; \xi(t) = \mu, \;\; t_0 \leq t \leq T,$$

$$\xi_t \geq 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0,$$
$$\eta(t) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}\xi_t, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \geqslant 0, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$
$$\eta(T) = \eta_t(T) = 0.$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) когда $0 \leq t \leq t_0$,

$$I \geqslant \delta_1, \;\; \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1,$$

b) когда $t_0 \leq t \leq T$,

$$I \geqslant \delta_2, \;\; \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 0.$$

В силу условий леммы и $(2.1.4^4)$ получаем:

$$I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}, \;\; A = \frac{\mu}{2}\int_{\Omega_T}\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

Далее доказательство оценки леммы 2.1.3 проводится аналогично пункту 2.

Лемма 2.1.3 доказана.

Лемма 2.1.4 *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \;\; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,0) = 0$ *либо* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$, *либо*

$k(x,0)<0$, $k(x,T)<0$, $f(x,T)=0$, *либо* $k(x,0)<0$, $k(x,T)\geqslant 0$. *Тогда справедливы априорные оценки*

$$\int_Q \left[(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2+\sigma\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2\right]dQ\leqslant C_5[\|f\|^2+\|f_t\|^2],\quad C_5>0 \qquad (2.1.8)$$

$$\|\Delta u^{N,\varepsilon}\|^2\leqslant C_6(\|f\|^2+\|f_t\|^2),\quad C_6>0, \qquad (2.1.9)$$

где $\sigma=1$ *для* $k(x,T)<0$ *и* $\sigma=0$ *для* $k(x,T)\geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $k(x,0)>0$, $k(x,T)\geqslant 0$, $f(x,0)=0$

Если учесть условия леммы 2.1.4, то правая часть равенства (2.1.7) принимает вид

$$\int_Q[(f\xi)_t-f\eta]\,u_{tt}^{N,\varepsilon}dQ.$$

Тогда в силу неравенства Коши и леммы 2.1.2 неравенство (2.1.8) следует из оценки леммы 2.1.3.

Умножим (2.1.4) на $e^{-2\lambda t}\lambda_l D_t c_l^{N,\varepsilon}$, $\lambda>0$ и просуммируем полученные равенства по l от 1 до N, затем проинтегрируем по t от 0 до T.

Тогда получим

$$(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon})-(Lu^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon})=-(f,e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon}).$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, будем иметь:

$$\big((fe^{-2\lambda t})_t,\Delta u^{N,\varepsilon}\big)=\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}\sum_{i=1}^{n}(u_{ttx_i}^{N,\varepsilon})^2dQ+$$

$$+\lambda\int_Q e^{-2\lambda t}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2dQ+\int_Q e^{-2\lambda t}\left(a-\frac{1}{2}k_t+\lambda k\right)\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2dQ$$

$$+\int_Q e^{-2\lambda t}\left(\sum_{i=1}^{n} k_{x_i} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_{tt}^{N,\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} a_{x_i} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} (cu^{N,\varepsilon})_{x_i} u_{tx_i}^{N,\varepsilon}\right) dQ$$

$$-2\lambda\varepsilon \int_Q e^{-2\lambda t} \sum_{i=1}^{n} u_{ttx_i}^{N,\varepsilon} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} dQ + J, \qquad (2.1.10)$$

где

$$J \equiv \int_\Omega e^{-2\lambda t}\left[\varepsilon u_{tt}^{N,\varepsilon} \Delta u_t^{N,\varepsilon} + \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2\right] dx|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T} (\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx.$$

При $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$ с учетом краевых условий $(2.1.4^1)$ имеем:

$$J = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx.$$

При $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$ с учетом краевых условий $(2.1.4^2)$ имеем:

$$J = \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T} (\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

А при $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$ получаем, что

$$J = -\int_{\Omega_0} k \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T} (\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

В случае $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$ имеем:

$$J = \frac{1}{2}\int_\Omega k e^{-2\lambda t} \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T} (\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

В силу неотрицательности J, применяя неравенство Коши и оценки лемм 2.1.2, 2.1.3 и (2.1.8), из равенства (2.1.10) получаем неравенство (2.1.9) при достаточном малом $\lambda > 0$,для которого, $a - \frac{1}{2}k_t + \lambda k \geqslant \frac{\delta}{2}$.

Лемма 2.1.4 доказана.

Из неравенств (2.1.6), (2.1.8), (2.1.9) получаем, что для приближенных решений справедлива оценка

$$\|u^{N,\varepsilon}\|_2^2 \leqslant C_7(\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_7 > 0. \tag{2.1.11}$$

На основании оценки (2.1.11) получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.1 *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,0) = 0$, *либо* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) \geqslant 0$.

Тогда краевая задача Врагова имеет единственное решение $u(x,t)$ *из* $W_2^2(Q)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_2 \leqslant C_8(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_8 > 0.$$

Теорема 2.1.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина для краевой задачи Врагова справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_9(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \;\; C_9 > 0, \tag{2.1.12}$$

где u *- точное решение,* λ_{N+1} *– собственное число спектральной задачи* (2.1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.1.1 краевая задача (2.1.1), (2.1.2) имеет единственное решение из $W_2^2(Q)$. Так же $u_t \in W_2^1(Q)$, $\;u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \varphi_k$, $\;c_k = (u, \varphi_k)_0$, и справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^{n} (u_{tx_k})^2 dQ \leqslant C_{10}(\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \; C_{10} > 0. \tag{2.1.13}$$

Рассмотрим случай $k(x,0)>0,\ k(x,T)<0$.

В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N=\{\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}a_l(t)\varphi_l(x):\ a_l\in W_2^2(0,T),\ a_l(0)=a_l'(0)=a_l'(T)=0,$$
$$l=\overline{1,N}\},$$

Из равенств (2.1.4) и уравнения (2.1.1) нетрудно получить соотношения

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\eta_t)=(f,e^{-2\lambda t}\eta_t),\ \ \forall\eta\in H_N,$$

$$(Lu,e^{-2\lambda t}\eta_t)=(f,e^{-2\lambda t}\eta_t)\ \ \forall\eta\in H_N.$$

Отсюда получаем равенство

$$(L(u-u^{N,\varepsilon}),e^{-2\lambda t}\eta_t)=-(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\eta_t);\ \forall\eta\in H_N.$$

Положив $\eta=w-u^{N,\varepsilon}$ с произвольной функцией w из H_N, будем иметь

$$\int_Q L(u-u^{N,\varepsilon})e^{-2\lambda t}(u_t-u_t^{N,\varepsilon})dQ$$

$$=-\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}u_{ttt}^{N,\varepsilon}(\omega_t-u_t^{N,\varepsilon})dQ+\int_Q(f-Lu^{N,\varepsilon})e^{-2\lambda t}(u_t-w_t)dQ$$

$$=\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}u_{tt}^{N,\varepsilon}[(\omega_{tt}-u_{tt}^{N,\varepsilon})-2\lambda(\omega_t-u_t^{N,\varepsilon}]dQ$$
$$+\int_Q e^{-2\lambda t}(f-Lu^{N,\varepsilon})(u_t-w_t)dQ. \tag{2.1.14}$$

Пусть P_N - оператор проектирования на H_N. При

$$\omega=P_Nu=\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\varphi_k(x)$$

справедливо равенство

$$\int_\Omega|u_t-w_t|^2dx=||\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k'(t)\varphi_k||_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}|c_k'(t)|^2.$$

Тогда получаем, что

$$||u_t - P_N u_t||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt. \quad (2.1.15)$$

Используя лемму 2.1.1, с учетом неравенств (2.1.13), (2.1.15) из равенства (2.1.14) получаем оценку (2.1.12) погрешности модифицированного метода Галеркина для первого случая.

Для доказательства теоремы 2.1.2 в остальных случаях, линейное многообразие H_N в пространстве $L_2(Q)$ определяется следующим образом: в случае $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$

$$H_N = \{\eta(x,t) = \sum_{l=1}^{N} a_l(t)\varphi_l(x) :\ a_l \in W_2^2(0,T),\ a_l(0) = a_l'(0) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

в случае $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$

$$H_N = \{\eta(x,t) = \sum_{l=1}^{N} a_l(t)\varphi_l(x) :\ a_l \in W_2^2(0,T),\ a_l(0) = a_l'(T) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

в случае $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$

$$H_N = \{\eta(x,t) = \sum_{l=1}^{N} a_l(t)\varphi_l(x) :\ a_l \in W_2^2(0,T),\ a_l(0) = 0,\ l = \overline{1,N}\}.$$

Далее доказательство оценки проводится аналогично первому случаю.

Теорема 2.1.2 доказана.

2.2 Исследование разрешимости второй краевой задачи

<u>Вторая краевая задача</u> Найти в области Q решение уравнения (2.1.1), такое, что

$$u\mid_{S_T}=0,\ u\mid_{\overline{P}_0^+}=0,\ u_t\mid_{t=0}=0,\ u_t\mid_{\overline{P}_T^-}=0. \tag{2.2.1}$$

Отметим, что при $k(x,0)>0$ вторая краевая задача совпадает с задачей Врагова (2.1.1), (2.1.2).

Пусть C_L есть множество гладких функций, удовлетворяющих условиям (2.2.1).

Лемма 2.2.1 *Пусть коэффициент* $c(x)>0$ *достаточно большой, и выполнены условия:*

$$k(x,0)<0,\ a-\frac{1}{2}k_t\geq\delta>0.$$

Тогда существуют неотрицательные гладкие функции $\varphi(t),\ \psi(t)$*, такие, что для всех функций* $u\in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu,\varphi u_t+\psi u)\geq C_1\|u\|_1^2;\ C_1=const>0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется положительное число $t_0<T$, а так же числа $t_1,\ t_2$, такие, что

$$k(x,t)\leqslant-\delta_1<0,\ t\in[0,t_0],\ 0<t_2<t_1<t_0<T.$$

Выбираем функции $\varphi(t),\ \psi(t)\in C^\infty[0,T]$ таким образом, чтобы

$$\varphi(0)=0,\ \varphi_t(t)\geqslant0,\ t\in[0,t_2];\ \varphi_t(t)\leqslant0,\ t\in[t_2,T];$$

$$\varphi(t)=e^{-2\lambda t},\ t\in[t_1,T],\ \lambda>0;$$

$$\psi(t)=1+\frac{1}{2}\varphi_t(t),\ t\in[0,t_2];\ \psi(t)=1-\frac{1}{2}\varphi_t(t),\ t\in[t_2,t_1];$$

$$\psi_t(t)\leqslant0,\ t\in[t_1,T];\ \psi(t)=0,\ t\in[t_0,T].$$

Для функций $u \in C_L$ с помощью интегрирования по частям получим соотношение

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) = \int_Q \Big\{ [(a - \frac{1}{2}k_t)\varphi - (\psi + \frac{1}{2}\varphi_t)k]u_t^2 +$$

$$+ (\psi - \frac{1}{2}\varphi_t) \left[\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + cu^2 \right] + [a\psi - (k\psi)_t]u_t u \Big\} dQ + I, \quad (2.2.2)$$

где

$$I \equiv \frac{1}{2} e^{-2\lambda T} \left[\int_{P_T^+} k u_t^2 dx + \int_{\Omega_T} \left(cu^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \right) dx \right] \geqslant 0.$$

Теперь выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\delta + \lambda k \geqslant \delta/2$. Тогда получим, что

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\varphi - k(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t) \geqslant \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\delta e^{-2\lambda T}\}, \; \psi - \frac{1}{2}\varphi_t \geqslant \min\{1, \lambda e^{-2\lambda T}\}.$$

Далее из соотношения (2.2.2), используя неравенство Коши и условия леммы, получаем утверждение леммы 2.2.1.

Лемма 2.2.1 доказана.

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются собственными функциями спектральной задачи (2.1.3). При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

В дальнейшем будем считать, что $k(x, 0) < 0$. Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ второй краевой задачи ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) \equiv v(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad (2.2.3)$$

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1,N}, \tag{2.2.4}$$

при $k(x,T) < 0$ или

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1,N}, \tag{2.2.4^2}$$

при $k(x,T) > 0$.

Лемма 2.2.2 *Пусть выполнены условия леммы 2.2.1, $f \in L_2(Q)$ и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,T) < 0$, либо $k(x,T) > 0$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений второй краевой задачи справедлива оценка*

$$\varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ + \|v\|_1^2 \leqslant C_2 \|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{2.2.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.2.3), (2.2.4) получаем соотношение

$$(f, \varphi v_t + \psi v) = \varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ - \varepsilon \int_Q \left[\frac{1}{2}(3\psi_t + \varphi_{tt}) v_t^2 + \psi_{tt} v_t v\right] dQ$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega_T} \varphi_t v_t^2 dx + (Lv, \varphi v_t + \psi v). \tag{2.2.6}$$

Для функций v имеет место равенство (2.2.2). Достаточно рассмотреть случай $k(x,T) \geqslant \delta_2 > 0$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\lambda \varepsilon_0 \leqslant \frac{\delta_2}{2}$. Тогда имеем

$$I - \lambda \varepsilon e^{-2\lambda T} \int_{\Omega_T} v_t^2 dx \geqslant 0.$$

Теперь при необходимости уменьшая ε_0, с учетом (2.2.2) из соотношения (2.2.6) получаем априорную оценку (2.2.5).

Лемма 2.2.5 доказана.

Лемма 2.2.3 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия*

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0;\ f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0)<0,\ k(x,T)<0$, *либо* $k(x,0)<0,\ k(x,T)>0$. *Тогда существует число* $\varepsilon_0>0$, *такое, что для приближенных решений краевой задачи* (2.1.1), (2.2.1) *справедлива оценка*

$$\int_Q\left[v_{tt}^2+\sigma\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2\right]dQ\leqslant C_3\left[||f||^2+||f_t||^2\right],\ C_3>0,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0, \quad (2.2.7)$$

где $\sigma=1$ *при* $k(x,T)<0$ *и* $\sigma=0$ *при* $k(x,T)>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций $\xi(t),\ \eta(t)$ из (2.2.3), (2.2.4) получаем соотношение

$$-(f,\xi v_{ttt}+\eta v_{tt})=\varepsilon\int_Q\xi(v_{ttt})^2dQ-\frac{1}{2}\varepsilon\int_Q\eta_t v_{tt}^2dQ+$$

$$+\int_Q\left\{\left[(a+\frac{1}{2}k_t)\xi-k(\eta-\frac{1}{2}\xi_t)\right]v_{tt}^2+(\eta-\frac{3}{2}\xi_t)\sum_{i=1}^n(v_{tx_i})^2\right\}dQ$$

$$+\int_Q\left[(a\xi)_t+c\xi-a\eta\right]v_{tt}v_tdQ$$

$$+\int_Q(c\xi_t-c\eta)\,v_{tt}vdQ+\int_Q(\eta_t-\xi_{tt})\sum_{i=1}^n v_{tx_i}v_{x_i}dQ+J, \quad (2.2.8)$$

где

$$J\equiv\int_\Omega\left[\tfrac{1}{2}(\varepsilon\eta-k\xi)v_{tt}^2-a\xi v_{tt}v_t+\tfrac{1}{2}\xi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2+\right.$$

$$\left.\Delta v(\xi v_{tt}-\xi_tv_t)-c\xi vv_{tt}-\eta\sum_{i=1}^n v_{x_i}v_{tx_i}\right]dx|_{t=0}^{t=T}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $k(x,0)<0,\ k(x,T)<0$.Тогда найдется положительное число $T_0<T$ такое, что

$$k(x,t)\leq-\delta_1<0,\ \ T_0\leq t\leq T.$$

Выберем функции $\xi(t),\eta(t)$, такие, что

$$\xi(t)=\mu>0,\ 0\leq t\leq T_0;$$

$$\xi(T) = 0;\ \xi_t(t) \leqslant 0, \quad T_0 \le t \le T;$$

$$\eta(t) \equiv 1.$$

Теперь выберем число $\mu > 0$ так, чтобы

$$\delta\mu - \max_{\overline{Q}} |k| \geqslant \delta_2 > 0.$$

Тогда будем иметь

$$A \equiv (a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

В силу условий (2.2.4) получаем, что

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega_T} v_{tt}^2 dx \geqslant 0.$$

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (2.2.8), получим априорную оценку (2.2.7) при $\sigma = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) > 0$. Пусть $\xi(t) \equiv 1$, $\eta(t) \equiv 0$. Тогда с учетом условий леммы и (2.2.4^2) получаем, что

$$J = \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{n} v_{tx_i}^2 dx \geqslant 0,\ A \geqslant \delta.$$

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (2.2.8), получим априорную оценку (2.2.7) при $\sigma = 0$.

Лемма 2.2.3 доказана.

Лемма 2.2.4 *Пусть выполнены все условия леммы 2.2.3. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений второй краевой задачи справедлива оценка*

$$\|\Delta v\|^2 \leqslant C_4(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_4 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.2.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для неотрицательных гладких функций $\xi(t),\ \eta(t)$ из леммы 2.2.3 получаем соотношение

$$-(f,\xi\Delta v_t+\eta\Delta v)=\varepsilon\int_Q\left[\xi\sum_{i=1}^n v_{ttx_i}^2-\frac{1}{2}(\xi_{tt}+3\eta_t)\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2-\eta_{tt}\sum_{i=1}^n v_{x_i}v_{tx_i}\right]dQ+$$

$$+\int\limits_Q\Bigg\{\left(\eta-\tfrac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta v)^2+\left[a\xi-\tfrac{1}{2}(k\xi)_t\right]\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2+\xi v_{tt}\sum_{i=1}^n k_{x_i}v_{tx_i}+$$

$$+v_t\xi\sum_{i=1}^n a_{x_i}v_{tx_i}+\xi c\sum_{i=1}^n v_{tx_i}v_{x_i}+\xi v\sum_{i=1}^n c_{x_i}v_{tx_i}-\eta(kv_{tt}+av_t+cv)\Delta v\Bigg\}dQ+K, \tag{2.2.10}$$

где

$$K\equiv\int_\Omega\Bigg[\tfrac{1}{2}\varepsilon(\xi_t+\eta)\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2+\varepsilon\xi v_{tt}\Delta v_t+\varepsilon\eta_t\sum_{i=1}^n v_{tx_i}v_{x_i}+$$

$$+\varepsilon\eta v_{tt}\Delta v+\tfrac{1}{2}\xi(\Delta v)^2+\tfrac{1}{2}k\xi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2\Bigg]dx\Big|_{t=0}^{t=T}.$$

При $k(x,0)<0,\ k(x,T)<0$ предполагаем, что $\xi(t)=\varphi(t),\ \eta(t)=\psi(t)$, где функции $\varphi(t),\ \psi(t)$ построены в ходе доказательства леммы 2.2.1. С учетом условий леммы и (2.2.4) получаем, что

$$K=\frac{e^{-2\lambda T}}{2}\int_{\Omega_T}(\Delta v)^2dx\geqslant 0.$$

Теперь с учетом теоремы о следах для $f(x,T)$ и выражения для K, неравенства (2.2.5), оценки (2.2.7) при $\sigma=1$ из соотношения (2.2.10) получим оценку (2.2.9).

В случае $k(x,0)<0,\ k(x,T)>0$ достаточно положить $\xi(t)\equiv 0,\ \eta(t)\equiv 1$. С учетом условия (2.2.4^2) соотношение (2.2.10) принимает вид

$$-(f,\Delta v)=\int_Q\left[(\Delta v)^2-(kv_{tt}+av_t+cv)\Delta v\right]dQ+\frac{1}{2}\varepsilon\int_{\Omega_T}\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2dx.$$

Из последнего соотношения, используя неравенство Коши и оценки (2.2.5), (2.2.7) при $\sigma = 0$, получаем априорную оценку (2.2.9).

Лемма 2.2.4 доказана.

Теорема 2.2.1 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия*

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) > 0$. Тогда вторая краевая задача имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^2(Q)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leqslant C_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_5 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (2.2.5), (2.2.7), (2.2.9) и второго основного неравенства для оператора Лапласа [54] для приближенных решений краевой задачи (2.1.1), (2.2.1) имеет место оценка

$$\|u^{N,\varepsilon}\|_2 \leqslant C_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.2.11}$$

В силу оценки (2.2.11) стандартным образом доказывается существование искомого решения второй краевой задачи, а его единственность следует из леммы 2.2.1.

Теорема 2.2.1 доказана.

Теорема 2.2.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина для второй краевой задачи справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_6(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \; C_6 > 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{2.2.12}$$

где $u(x,t)$ – точное решение второй краевой задачи, λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (2.1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\xi(t) = \varphi(t),\ \eta(t) = \psi(t)$, построенные в ходе доказательства леммы 2.2.1. В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N = \{\gamma(x,t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x) :\ d_l \in W_2^2(0,T),\ d_l'(0) = d_l'(T) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

при $k(x,T) < 0$, или

$$H_N = \{\gamma(x,t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x) :\ d_l \in W_2^2(0,T),\ d_l'(0) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

при $k(x,T) > 0$.

Из равенств (2.2.3) путем арифметических действий легко получить соотношение

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi\gamma_t + \eta\gamma) = (f, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N.$$

Кроме того, $(Lu, \xi\gamma_t + \eta\gamma) = (f, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N$.

Из этих неравенств получаем:

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), \xi\gamma_t + \eta\gamma) = -(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon}, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N.$$

Для любой функции ω из H_N положим $\gamma = \omega - u^{N,\varepsilon}$. Тогда

$$\int_Q L(u - u^{N,\varepsilon})[\xi(u_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \eta(u - u^{N,\varepsilon})]dQ =$$

$$= \varepsilon \int_Q u_{tt}^{N,\varepsilon}[\xi(\omega_{tt} - u_{tt}^{N,\varepsilon}) + \eta(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \xi_t(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \eta_t(u - \omega)]dQ +$$

$$+ \int_Q (f - Lu^{N,\varepsilon})[\xi(u_t - \omega_t) + \eta(u - \omega)]dQ. \qquad (2.2.13)$$

В силу теоремы 2.2.1 краевая задача (2.1.1), (2.2.1) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^2(Q)$, такое, что

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \;\; u_t \in W_2^1(Q), \;\; u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \varphi_k, \;\; c_k = (u, \varphi_k)_0,$$

и справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^{n} (u_{tx_k})^2 dQ \leqslant C_7(\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \;\; C_7 > 0. \quad (2.2.14)$$

При $\omega = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t)\varphi_k(x)$ имеем:

$$\int_\Omega |u_t - \omega_t|^2 dx = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k'(t)\varphi_k \|_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k'(t)|^2.$$

Тогда

$$\|u_t - \omega_t\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt. \quad (2.2.15)$$

Аналогично справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^{n} (u_{x_k})^2 dQ \leqslant C_8 \|f\|^2, \;\; C_8 > 0, \quad (2.2.16)$$

а также равенство

$$\int_\Omega |u - \omega|^2 dx = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k(t)\varphi_k \|_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k(t)|^2.$$

Тогда

$$\|u - \omega\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k(t)|^2 dt. \quad (2.2.17)$$

Используя лемму 2.2.1, с учетом неравенств (2.2.14)–(2.2.17) из равенства (2.2.13) получаем оценку (2.2.12) погрешности модифицированного метода Галеркина.

Теорема 2.2.2 доказана.

Замечание 2.2.1 *Краевая задача* (2.1.1), (2.2.1) *при* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$ *и* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$ *совпадает с краевой задачей В.Н. Врагова. Следовательно, для краевой задачи* (2.1.1), (2.2.1) *в этих случаях справедливы аналогичные результаты из параграфа §2.1.*

Заключение

В диссертации с помощью стационарного и нестационарного методов Галеркина исследованы краевая задача Врагова, первая краевая задача, "вторая"краевая задача для уравнения смешанного типа.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1 Для исследуемых краевых задач получены глобальные априорные оценки на всей области исследования для приближенных решений построенных по методу Галеркина.

2 Доказаны теоремы об однозначной регулярной разрешимости поставленных краевых задач при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения.

3 Благодаря выводу глобальных априорных оценок на всей области исследования, для приближенных решений, получены оценки погрешности краевой задачи относительно точного решения. Оценка погрешности приближенного решения, построенного по стационарному методу Галеркина, выражена через собственные функции оператора Лапласа по пространственным переменным и по времени. А для нестационарного метода Галеркина, оценка погрешности получена через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа по пространственным переменным. При выводе оценки используется разложение в ряд Фурье и равенство Парсеваля.

Список литературы

[1] Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения. / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский – Москва: Наука, 1975. – 480с.

[2] Бицадзе, А. В. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях / А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, №12. – С. 2184–2191.

[3] Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнении второго порядка. / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1966. – 204 с.

[4] Бицадзе, А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанных областях // Доклады АН СССР. – 1958. – Т.122, №22. – С. 167 – 170.

[5] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнении в частных производных. / А.В. Бицадзе – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

[6] Бицадзе, А.В. Уравнение смешанного типа. / А.В. Бицадзе – Москва: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

[7] Бабенко, К.И. К теории уравнений смешанного типа. / К.И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1953. – Т. 8, №2. – 160 с.

[8] Бубнов, И.Г. Избранные труды. / И.Г. Бубнов – Ленинград: Судпромгиз., 1956. – 493 с.

[9] Бубнов, Б.А. Смешанная задача для некоторых параболо-гиперболических уравнений / Б.А. Бубнов. // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, №3 – С. 494-–501.

[10] Векуа, И.Н. Теория обобщенных аналитических функций и некоторые ее приложения в геометрии и механике / И.Н. Векуа – Ленинград: Гостехиздат, 1985.

[11] Виноградова, П.В. Метод Галеркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №2. – С. 242-249.

[12] Виноградова, П.В. Оценки погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, №9. – С. 1643–1651.

[13] Вишик, М.И. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений / М.И. Вишик, Ладыженская О.А. // УМН. – 1956. – В. 6, №11. – С. 41-–97.

[14] Врагов, В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа / В.Н. Врагов // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1098–1105.

[15] Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. / В.Н. Врагов – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. – 84 с.

[16] Врагов, В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешано-составного типа / В.Н. Врагов // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 5–13.

[17] Галеркин, Б.Г. Собрание сочинений. / Б.Г. Галеркин – М.: Издательство АН СССР, 1953 – Т.2.– 440 с.

[18] Гудерлей, К.Г. Теория оклозвуковых течений. / К.Г. Гудерлей – Москва: Иностранная литература, 1960. –

[19] Успенский, С.В. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. / С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин – Новосибирск: Наука, 1984. – 223 с.

[20] Дубинский, Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка / Ю.А. Дубинский // Успехи математических наук. – 1968. – Т. XXIII, В. 1(139). – С. 45–90.

[21] Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. / Ю.А. Дубинский. // В книге "Современные проблемы математики. – Москва: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5-–130

[22] Джишкариани А.В. О быстроте сходимости метода Бубнова-Галеркина / А.В. Джишкариани // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, №2. – С. 343–348.

[23] Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.

[24] Егоров, И.Е. Введение в теорию уравнения смешанного типа второго порядка. / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров – Якутск: Издательство Якутского университета, 1998. – 43 с.

[25] Егоров, И.Е. Модифицированный метод Галеркина для задачи Врагова / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Сибирские математические электронные известия. – 2015. – Т. 12. – С. 732–742.

[26] Егоров, И.Е. Модифицированный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка и оценка его погрешности / И.Е. Егоров, В.Е Федоров, И.М. Тихонова // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, №4. – С. 30–39.

[27] Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально–операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов – Новосибирск: Наука, 1999. – 336 с.

[28] Егоров, И.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров – Новосибирск: Издательство ВЦ СО РАН, 1995. – 133 с.

[29] Егоров, И.Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром / И.Е. Егоров // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т.21, №1. – С. 11–17.

[30] Егоров, И.Е. О скорости сходимости стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 14. – С. 53–58.

[31] Егоров, И.Е. О скорости сходимости стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики". – Новосибирск, 2012. – С. 367

[32] Егоров, И. Е. О смешанной задаче для одного гиперболо-параболического уравнения / И. Е. Егоров // Математические заметки. – 1978. - Т. 23. - №3. - С. 389—400.

[33] Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, Вып. 2. – С. 41–47.

[34] Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Всероссийский научный семинар "НУМФ-2010". – Якутск, 2010. – Т. 1. – С. 51-53.

[35] Егоров, И.Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е Федоров // Математические заметки ЯГУ. – 1999. – Т.6, №1. – С.26–35.

[36] Егоров, И.Е. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для задачи А.Н. Терехова / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений". – Новосибирск, 2013. – С. 132.

[37] Егоров, И.Е. Применение стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, Вып. 2. – С. 20–28.

[38] Егоров, И.Е. Применение модифицированного метода галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа /И.Е. Егоров // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22, №3. – С. 3–10.

[39] Егоров, И.Е. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки СВФУ. – 2014. - №4. - С. 14–19.

[40] Кальменов, Т. Ш. О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка, / Т. Ш. Кальменов // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №2. – С. 354—356.

[41] Кальменов, Т. Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Т. Ш. Кальменов // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, №8. – С. 1418–1425.

[42] Каратопраклиев, Г. Д., К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях. / Г. Д. Каратопраклиев // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, №1. – С. 64—75.

[43] Каратопраклиев, Г. Д. Об одном классе уравнений смешанного типа / Г. Д. Каратопраклиев // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, №1. – С. 199—205.

[44] Келдыш, М.В. Избранные труды. Механика / М.В. Келдыш – Москва: Наука, 1985. – 443 с.

[45] Келдыш, М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач / М.В. Келдыш // Известия АН СССР, серия "Математика". – 1942. – Т. 6. – С. 309-–330.

[46] Кислов, Н.В. Краевая задача с обобщенными условиями склейки для уравнения параболического типа / Н.В. Кислов, И.С Пулькин // Вестник МЭИ. – 2000. – № 6. – С. 51–59.

[47] Кислов, Н.В. Краевые задачи для уравнения смешанного типа в прямоугольной области / Н.В. Кислов // Доклады Академии наук СССР, 1980. – Т.225, №1. – С. 26–30.

[48] Кислов, Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально - операторного уравнения смешанного типа и их приложения / Н.В. Кислов // Математический сборник. – 1984. – Т.125, Вып.1. – С.19–37.

[49] Кожанов, А. И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа / А. И. Кожанов // Дифференциальные уравнения. – 1979. - Т. 15. - №2. - С. 272–280.

[50] Кожанов, А. И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А. И. Кожанов – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1999. – 132 с.

[51] Кожанов, А. И. О разрешимости обратных задач восстановления коэфиициентов в уравнениях составного типа. / А. И. Кожанов // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, №3. – С. 81–99

[52] Кузьмин, А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике./ А.Г. Кузьмин - Ленинград: Издательство ЛГУ, 1990. – 204 с.

[53] Лаврентьев, М.А. К проблеме уравнений смешанного типа Лаврентьев / М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе // Доклады Академии наук СССР. – 1950. – Т. 70, №3. – С. 373–376.

[54] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики. / О.А. Ладыженская – Москва: Наука, 1973. – 407 с.

[55] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.

[56] Ларькин, Н.А. Нелинейные уравнения переменного типа. / Н.А. Ларькин, В.А. Новиков, Н.Н. Яненко – Новосибирск:Наука, 1983. – 170 с.

[57] Ларькин, Н.А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа / Н.А. Ларькин // Сибирский математический журнал. – 1978. – Т. XIX, № 6. — С.1308-1314.

[58] Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике. / С.Г. Михлин – Москва: Наука, 1970. – 512 с.

[59] Моисеев, Е.И. О теоремах единственности для уравнений смешанного типа / Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук СССР. – 1978. – Т. 242, №1. – С. 48–51.

[60] Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. / Е.И. Моисеев – Москва: Издательство Мосскоского государственного униыерситета, 1988. – 149 с.

[61] Нахушев, А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, №1. – С. 190—191.

[62] Нахушев, А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, №1. – С. 44–59.

[63] Нахушев, А.М. О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой

/ А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т.9, № 1. – С. 130–135.

[64] Петров, Г.И. Оценка погрешности приближенно вычисленных собственных значений методом Галеркина / Г.И. Петров // ПММ. – 1957. – Т. 21. – С. 184.

[65] Петров, Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / Г.И. Петров // ПММ. – 1940. – Т. 4. – С. 1–13.

[66] Петрушко, И.М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа / И.М. Петрушко // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 1968. – Т. 103. – С. 181-200.

[67] Петрушко, И.М. О параболических уравнениях 2-го порядка с меняющимся направлением времени / И.М. Петрушко, Е.В. Черных // Вестник Московского энергетического института. – 2003. – №6. - С. 85–93.

[68] Попов, С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400, № 1. – С. 29–31.

[69] Попиванов, Н. И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в неограниченных областях. II. Существование сильного решения / Н. И. Попиванов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, №4. – С. 665–679.

[70] Пятков, С.Г. О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.Г. Пятков // Доклады АН СССР. – 1985. – Т.285, №6. – С. 1322–1327.

[71] Пятков, С.Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / С.Г. Пятков, Н.Л. Абашеева // Сибирский математический журналю – 2000. – Т.41, №6. – С. 1419–1435.

[72] Пятков, С.Г. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.Г. Пятков, А.Г. Подгаев // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, №3. – С. 184.

[73] Салахитдинов, М.С. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений смешанного типа / М. С. Салахитдинов, А. Толипов. // Дифференциальные уравнениях – 1973. - Т. 9, №1. – С. 142—148.

[74] Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа. / М. С. Салахитдинов - Ташкент, 1974. – 154 с.

[75] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов – Москва: Наука, 1970. – С. 296.

[76] Терехов, А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа / А.Н. Терехов // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. – Новосибирск, 1979. – С. 128–136.

[77] Терсенов, С.А. Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения / С.А. Терсенов // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, № 6. – С. 1413–1430.

[78] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов – Новосибирск: Наука, 1985. – 105 с.

[79] Тихонова, И.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М. Тихонова, В.Е Федоров // Математические заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, Вып. 2. – С.109–117.

[80] Тихонова, И.М. Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М. Тихонова // Тезисы докладов VI Международной конференции по математическому моделированию. – Якутск, 2011. – С. 73.

[81] Тихонова, И.М. Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М. Тихонова // Тезисы докладов III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации". – Якутск, 2012. – С. 118–121.

[82] Тихонова, И.М. Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М. Тихонова // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики". – Новосибирск, 2012. – С. 446.

[83] Тихонова, И.М. О модифицированном метода Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М Тихонова, И.Е. Егоров // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – Улан-Удэ, 2015. – С. 283.

[84] Тихонова, И.М. Применение стационарного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка / И.М. Тихонова // Математические заметки СВФУ. – 2016. – №4. – С. 73–81.

[85] Тихонова И.М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа / И.М. Тихонова // Тезисы докладов VII Международной конференции по математическому моделированию. – Якутск, 2014. – С. 74.

[86] Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал. / Ф.Трикоми – М.: Изд-во иностранной литературы, 1957.

[87] Трикоми, Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. / Ф.Трикоми – М.: Гостехиздат, 1947.

[88] Франкль, Ф. И. К теории сопел Лаваля / Ф. И. Франкль // Известия АН СССР. Серия математика. – 1945. – Т. 9, В. 5. – С. 387-–422.

[89] Франкль, Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений / Ф. И. Франкль // Известия АН СССР. Серия математика. – 1945. – Т. 9, В. 2. – С. 121—143.

[90] Христианович С.А. О сверхзвуковых течениях газа / С.А. Христианович – Москва: Издательство БНТ НКАП, 1941. – 44 с.

[91] Чаплыгин, С. А. О газовых струях. / С. А. Чаплыгин — Москва, 1902. — 121 с.

[92] Чуешев, А.В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка / А.В. Чуешев // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 42, №2. – С. 454–472.

[93] Чуешев, А.В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / А.В. Чуешев // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук – Новосибирск, 2001. – 183 с.

[94] Aristov, A.I. On a Certain Nonlinear Nonlocal Sobolev-Type Wave Equation / A.I. Aristov // Mathematical notes. – 2017. – V. 101, №1–2. – pp. 17–30.

[95] Dachev, G.D. Boundary-value-problems for a class of equations of mixed type / G.D. Dachev // Differential equations. – 1982. – V. 18, №11. – pp. 1356-1363.

[96] Dzuraev, T.D. To the theory of differential equations of the foeth order / T.D. Dzuraev, A. Sopuev. – Tashkent: Fan, 2000. – 144 p.

[97] Demidenko, G.V. Quasielliptic operators and Sobolev type equations / G.V. Demidenko // Siberian Mathematical Journal. – 2008. – V. 49, №5. – pp. 842–851.

[98] Efimova, E.S. Error estimate for the stationary Galerkin method applied to a semilinear parabolic equation with alternating time direction / E.S. Efimova, M.S. Kolesova, I.E. Egorov // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 213, №6. – pp. 838-843.

[99] Fedorov V.E. On nonlocal solutions of semilinear equations of the Sobolev type / V.E. Fedorov, P.N. Davydov // Differential Equations. – 2013. – V. 49, №3. – pp. 326-335.

[100] Fedorov, V. E. The problem of start control for a class of semilinear distributed systems of Sobolev type / V.E. Fedorov, M. V. Plekhanova // Proceedings of the Steklov institute of mathematics. – 2011. – V. 275, №1. – pp. 40–48.

[101] Gellerstedt, S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. / S. Gellerstedt. – Uppsala: These, 1935. – 92 p.

[102] Kozhanov, A.I. Inverse Problems for Determining Boundary Regimes for Some Equations of Sobolev Type / A.I. Kozhanov // Bulletin of the SUSU: series math. modelling prog and comp. software. – 2016. – V. 9, №2. – pp. 37–45.

[103] Lupo, D. Spectral theory for linear operators of mixed type and applications to nonlinear Dirichlet problems / D. Lupo, D.D. Monticelli, K.R. Payne // Communications in Partial Differential Equations. -— 2012. — Vol. 37, №. 9. — pp. 1495–1516.

[104] Moiseev, E.I. Certain boundary-value-problems for mixed-type equations / E.I. Moiseev // Differential Equations. – 1992. – V. 28, №1. – pp. 105–115.

[105] Moiseev, E.I. On the completeness of eigenfunctions of the Neumann–Tricomi prublem for a degenerate equation of mixed type / E.I. Moiseev, M. Mogimi // Differential Equations. – 2005. – V. 41, №12. – pp. 1789–1791.

[106] Morawetz, C.S. Mixed equations and transonic flow / C.S. Morawetz // Journal of Hyperbolic Differential Equations. – 2004. – V. 1. №. 1. – pp. 1–26.

[107] Popivanov, N. On the existence and uniqueness of a generalized solution of the Protter problem for (3+1)-D Keldysh-type equations / N. Popivanov, T. Hristov, A. Nikolov, M. Schneider // Boundary value problems. – 2017. – №26. – 30 p.

[108] Protter, M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // Journal of Rational Mechanics and Analysis. – 1954. – V. 3, №5. – pp. 435–446.

[109] Pyatkov, S.G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S.G. Pyatkov, S. N. Shergin // Bulletin of the South Ural state university series-mathematical modelling programming and computer software. – 2016. – V. 9, №2. – pp. 75-89.

[110] Ritz W. Uner eine neue Methode zur LËosung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik / W. Ritz // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1909. - -I. 135. – pp. 1–61.

[111] Sabitov, K.B. Solution of fixed sign of higher-order inhomogeneou equations of mixed elliptic-hyperbolic type / K.B. Sabitov // Mathematical Notes . – 2016 – V. 100, №3–4. – pp. 458–464.

[112] Salakhitdinov, M.S. A problem with a nonlocal boundary condition on the characteristic for a class of equations of mixed type / M.S. Salakhitdinov, M. Mirsaburov // Mathematical Notes. – 2009. – V. 86, №5–6. – pp. 704–715.

[113] Soldatov, A.P. The Poincare problem for a mixed-type equation / A.P. Soldatov // Doklady mathematics. – 2001. – V. 63, №2. – pp. 208-211.

[114] Sviridyuk, G.A. Evolution linear equations of the Sobolev type on a graph / G.A. Sviridyuk, P.O. Pivovarova // Differential Equations. – 2010. – V. 46. №8. – PP. 1157-1163.

[115] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

[116] Yong, J. Forward-backward evolution equations and applications / J. Yong // Mathematical control and related fields. – 2016. – V. 6, №4. – pp. 653-704 .

[117] Wen, G. General Tricomi–Rassias problem and oblique derivative problem for generalized Chaplygin equations / G. Wen, D. Chen, X. Cheng // Journal of mathematical analysis and applications. — 2007. — V. 333, №2. — pp. 679–694.

[118] Zarubin, A. N. Tricomi problem for a nonlinear equation of mixed type with functional delay and advance / A.N. Zarubin // Differential equations. – 2017. – V. 53, №8. – pp. 1035-1044.