На правах рукописи

Тихонова Ирина Михайловна

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Егоров Иван Егорович.**

Официальные оппоненты:
Петрушко Игорь Мелетиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет "МЭИ"», Институт электроэнергетики, кафедра высшей математики, профессор.

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», Математический факультет, кафедра математического анализа, заведующий кафедрой.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Защита состоится 2018 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2018 г.

Ученый секретарь	
диссертационного совета	Рудой
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук	Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящее время теория неклассических уравнений математической физики является интенсивно развивающимся разделом современной теории уравнений с частными производными. К данной теории относятся уравнения смешанного и смешанно-составного типов, уравнения соболевского типа, уравнения с меняющимся направлением времени, вырождающиеся уравнения с частными производными

Исследования краевых задач для неклассических уравнений математической физики начались с работ Ф. Трикоми, С.Геллерстеда в 20-30 годах прошлого века. Тогда впервые были поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа

$$y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} = f,$$

которые в одной части области определения являются уравнением эллиптического типа, а в другой части – гиперболического типа. Такие краевые задачи называют задачами Трикоми и Геллерстеда.

Следующим этапом развития теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики стали работы М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, С.А. Христиановича, С.А. Чаплыгина , А.В. Бицадзе, К.Г. Гудерлей, Ф.И. Франкля, М.В. Келдыша и др. Они указали на важность изучения проблемы неклассических уравнений математической физики при решении задач, возникающих в трансзвуковой газовой динамике, в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в до- и сверхзвуковых течениях сжимающей жидкости и во многих других прикладных задачах механики и физики.

Теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов теории неклассических уравнений математической физики. Проблемой разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа занимались А.В. Бицадзе, А.М. Нахушев, М.М. Смирнов, Г.Д. Каратопраклиев, Т.Ш. Кальменов, М.С. Салахитдинов, Т.Д. Джураев, Н. Попиванов, И.М. Петрушко, А.П. Солдатов, А.И. Кожанов, К.Б. Сабитов и др.

Построение общей теории уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа началось с работ Врагова В.Н. и ряда других авторов. Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка занимались Н.А. Ларькин, А.Н. Терехов, Б.А. Бубнов, И.Е. Егоров, Г.Д. Каратопраклиев. Далее начались исследования уравнений смешанного типа высокого порядка. Врагов В.Н., Егоров И.Е., Пятков С.Г., Федоров В.Е. и др. начали построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка с произвольным многообразием изменения типа.

Отдельный интерес представляют нелинейные уравнения смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа. Так, в работе А.Г. Кузьмина рассмотрена краевая задача Врагова для нелинейного уравнения смешанного типа второго порядка с вещественным параметром. Также А.В. Чуешевым исследован обширный класс уравнений смешанного типа высокого порядка с вещественным параметром. Уравнения смешанного типа со спектральным (комплексным) параметром рассматривались в работах Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева, М.С. Салахитдинова, И.Е. Егорова и др.

К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись теория сингулярных интегральных уравнений, функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галеркина. Отметим работы следующих ученых: А.В.Бицадзе, Т.Д. Джураев, М.М. Смирнов, М.С.Салахитдинов, В.Н. Врагов, Н.А. Ларькин, Хе Кан Чер, Б.А. Бубнов, И.Е. Егоров и др.

Проекционные и проекционно-разностные методы исследования применяются для решения различных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и других задач. Основателями этих методов являются Б.Г. Галеркин, И.Г. Бубнов, Г.И. Петров , В. Ритц, М.В. Келдыш и другие.

Метод Галеркина широко применяется к решению краевых задач для уравнений математической физики. Отметим работы М.И. Вишика, С.Г. Михлина, О.А. Ладыженской, Ю.А. Дубинского. В работах А.В. Джишкариани, А.Г. Зарубина, П.В. Виноградовой получены оценки погрешности метода Галеркина для эллиптических и параболических уравнений.

Целью диссертационной работы является применение стационарного и нестационарного метода Галеркина к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие научные результаты:

- для исследуемых краевых задач впервые получены глобальные априорные оценки для приближенных решений, построенных по стационарному и модифицированному (нестационарному) методам Галеркина;

- на основе полученных априорных оценок доказаны теоремы об однозначной регулярной разрешимости поставленных краевых задач при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнений;

- впервые получены оценки погрешности галеркинских приближений относительно точных решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

Методы исследования. В диссертации применяются стационарный метод Галеркина со специальным выбором базиса и модифицированный (нестационарный) метод Галеркина с привлечением метода ε-регуляризации. Регулярная разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа доказывается на основе глобальных априорных оценок для приближенных решений, построенных по методу Галеркина. При этом для каждой задачи установлена оценка погрешности метода Галеркина.

На защиту выносятся:

– новые доказательства однозначной регулярной разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа при определенных условиях на коэффиценты и правую часть уравнения на основе впервые полученных глобальных априорных оценок;

– вывод оценок погрешности приближенных решений краевых задач, построенных по стационарному методу Галеркина,через собственные значения спектральной задачи для оператора Лапласа (для квазиэллиптического оператора в случае уравнения высокого порядка) по пространственным переменным и по времени;

– вывод оценок погрешности приближенных решений краевых задач построенных по нестационарного методу Галеркина, через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа по пространственным переменным.

Степень достоверности и апробация работы.

Все выводы и положения выносимые на защиту основываются на строгих математических доказательствах.

Основные результаты диссертации докладывались:

– на научном семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством члена-корреспондента РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова (2016);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО

РАН "Избранные вопросы математического анализа" под руководством профессора Г.В. Демиденко (2017);

– на семинаре Научно-исследовательского института математики СВФУ "Неклассические уравнения математической физики" под руководством профессора И.Е. Егорова (2010-2017);

– на Международной школе-конференции «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 2016);

–на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Удэ, 2015);

– на VI и VII Международных конференциях по математическому моделированию (г. Якутск, 2011, 2014);

– на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (г. Новосибирск, 2013);

– на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики" (г. Новосибирск, 2012);

– на III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации" (г. Якутск, 2012);

– на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2011);

– на XIII и XVII Лаврентьевских чтениях (г. Якутск, 2009, 2013).

Работа выполнена при поддержке: Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект №3047) и на 2017-2019 гг. (проект №1.6069.2017/8.9); ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 17 работ, из них 7 - в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ. В совместных публикациях соавторам принадлежат постановки задач и методика их исследования, а автором непосредственно произведены доказательства утверждений лемм и теорем. В работе [1] результаты получены автором единолично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую благодарность профессору И.Е. Егорову и доценту В.Е. Федорову за постановку задач и постоянное внимание к ним.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Первая глава состоит из 4-х параграфов и посвящена исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с помощью стационарного метода Галеркина. В **первом параграфе** рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа в постановке В.Н. Врагова.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная односвязная область с гладкой границей S. Положим $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $T = const > 0$; $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $t \in [0,T]$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \ (x,t) \in Q. \tag{1}$$

Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\},$$

$$P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T)^{>0}_{<0}, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача Врагова. Найти решение уравнения (1) в области Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{\overline{P_0^+}} = 0, \ \ u_t|_{\overline{P_T^-}} = 0. \tag{3}$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3).

Введем следующие обозначения: $\widetilde{W}_2^1(Q)$ - замыкание C_L по норме $||\cdot||_1$, $\widehat{W}_2^1(Q)$ - подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условиями

$$\eta|_{S_T} = 0, \ \ \eta|_{\overline{P_0^-}} = 0, \ \ \eta|_{\overline{P_T^+}} = 0.$$

Пусть сначала $k(x,0) > 0, \ \ k(x,T) \geq 0, \ \ x \in \overline{\Omega}$. Тогда краевые условия (3) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\widetilde{L}v \equiv k(x,t)v_{tt} - \triangle v + (a + k_t)v_t + cv = g(x,t), \ \ (x,t) \in Q, \tag{5}$$

где $g \in L_2(Q)$.

Определение 1.1.1 *Функция $v(x,t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи* (5), (2), (4) *если выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_Q [-kv_t\eta_t + \sum_{i=1}^n v_{x_i}\eta_{x_i} + av_t\eta + cv\eta]dQ = (g,\eta) \;\; \forall \eta \in \widehat{W}_2^1(Q).$$

Теорема 1.1.1. *Пусть коэффициент $c(x) \geq c_0 > 0$ достаточно большой и выполнены условия $k(x,0) \geq 0,\;\; k(x,T) \geq 0,\;\; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$. Тогда краевая задача* (5), (2), (4) *может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(Q)$.*

Теорема 1.1.2. *Пусть коэффициент $c(x) \geq c_0 > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(x,0) > 0,\;\; k(x,T) \geq 0,\;\; x \in \overline{\Omega};$$

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0,\;\; a + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t, f_{tt} \in L_2(Q);\;\; f|_{t=0} = 0,\;\; f_t|_{t=0} = 0.$$

Тогда для единственного решения краевой задачи (1), (2), (4) *из $W_2^2(Q)$ имеет место $u_t \in W_2^2(Q)$.*

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta}v \equiv v_{tt} + \Delta v = -\lambda v,\;\; (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0,\;\; v|_{t=0} = 0,\;\; v_t|_{t=T} = 0. \tag{6}$$

При этом λ_k - соответствующие собственные числа спектральной задачи, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение краевой задачи (1), (2), (4) ищется в виде

$$u^N = \sum_{l=1}^N c_l^N \int\limits_0^t \varphi_l(x,\tau)d\tau,$$

где коэффициенты c_l^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(e^{-2\gamma t}Lu^N, \varphi_l) = (e^{-2\gamma t}f, \varphi_l),\;\; l = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Теорема 1.1.3. *Пусть коэффициент $k(x,t)$ равен $k(t)$, $c(x) \geq c_0 > 0$ и*

$$k(0) > 0, \;\; k(T) \geq 0; \;\; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t \in L_2(Q), \;\; f|_{t=0} = 0, \;\; f|_{t=T} = 0.$$

Тогда галеркинские приближения u^N вычисляются при всех N однозначно из системы (7), для них верна оценка

$$||u^N||_2 \leq C_1(||f|| + ||f_t||), \;\; C_1 > 0,$$

и при $N \to \infty$ они слабо сходятся в $W_2^2(Q)$ к решению краевой задачи (1), (2), (4) из пространства $W_2^2(Q)$.

Теорема 1.1.4. *Пусть коэффициент $c(x) \geq c_0 > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) > 0, \;\; k(T) \geq 0; \;\; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; a + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0;$$

$$f, f_t, f_{tt} \in L_2(Q); \;\; f|_{t=0} = 0, \; f|_{t=T} = 0, \; f_t|_{t=0} = 0.$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи (1), (2), (4) справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_2(||f|| + ||f_t|| + ||f_{tt}||)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_2 > 0,$$

где λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (6).

Теперь рассмотрим случай $k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0$. Тогда краевые условия (3) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \; u_t|_{t=T} = 0. \tag{8}$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи (6).

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t),$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - специальным образом подобранные неотрицательные функции из $C^{\infty}[0,T]$.

Теорема 1.1.5. *Функции $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Приближенное решение краевой задачи (1), (2), (8) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t).$$

При этом коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \;\; k = \overline{1, N}.$$

Теорема 1.1.6. *Пусть коэффициент $k(x,t)$ равен $k(t)$ и*

$$k(0) < 0, \;\; k(T) < 0\ ;\ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи (1), (2), (8) из пространства $W_2^2(Q)$. При этом приближенные решения $u^N(x,t)$ слабо сходятся к $u(x,t)$ в пространстве $W_2^2(Q)$.

Теорема 1.1.7. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) < 0, \;\; k(T) < 0, \;\; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0\ ;\ f, \; f_t \in L_2(Q).$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи (1), (2), (8) справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_3(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4}\ , \;\; C_3 > 0,$$

где постоянная C_3 не зависит от функций f, u, u^N и λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (6).

Во **втором параграфе** рассматривается новая краевая задача, отличная от постановки Врагова и первой краевой задачи.

"Вторая" краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), такое, что выполняются условие (2) и

$$u_t \,|_{\overline{P}_0^-} = 0, \; u \,|_{\overline{P}_T^+} = 0, \; u_t \,|_{t=T} = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим случай $k(x,0) < 0, \; k(x,T) < 0$. Тогда краевые условия (9) примут следующий вид:

$$u_t \,|_{t=0} = 0, \; u_t \,|_{t=T} = 0. \tag{10}$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta} v \equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, \quad (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=T} = 0. \tag{11}$$

При этом λ_k - соответствующие собственные числа спектральной задачи, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t),$$

где $\xi(t), \eta(t) \in C^{\infty}[0,T]$ - неотрицательные функции, которые можно выписать явным образом. Для функций $\psi_k(x,t)$ также будет справедлива теорема 1.1.5.

Приближенное решение краевой задачи (1), (2), (10) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

причем коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть выполнены условия* $k(x,t) \equiv k(t)$, $k(0) < 0$, $k(T) < 0$, $a \pm \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$, *такой, что* $f_t \in L_2(Q)$, *существует единственное регулярное решение краевой задачи* (1), (2), (10) *из пространства* $W_2^2(Q)$.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2. Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи* (1), (2), (10) *справедлива оценка*

$$||u - u^N||_1 \leq C_4(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4}, C_4 > 0,$$

где постоянная C_4 *не зависит от* N *и* λ_{N+1} *– собственное число спектральной задачи* (11).

В **третьем параграфе** рассматривается частный случай первой краевой задачи, когда уравнение смешанного типа принадлежит эллиптическому типу вблизи нижнего и верхнего оснований цилиндрической области.

Первая краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q, такое, что выполняются условие (2) и

$$u\,|_{t=0}=0,\ u_t\,|_{\overline{P}_0^+}=0,\ u\,|_{\overline{P}_T^-}=0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай

$$k(x,0)<0,\quad k(x,T)<0.$$

Тогда краевые условия (12) примут вид

$$u\,|_{t=0}=0,\ u\,|_{t=T}=0. \tag{13}$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta}v \equiv v_{tt}+\Delta v=-\lambda v,\ (x,t)\in Q,$$

$$v|_{S_T}=0,\ v|_{t=0}=0,\ v|_{t=T}=0. \tag{14}$$

При этом λ_k - соответствующие собственные числа спектральной задачи, такие, что $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$ и $\lambda_k\to+\infty$ при $k\to\infty$.

Положим

$$\psi_k(x,t)=\xi(t)\varphi_{kt}+\eta(t)\varphi_k,\ k=1,2,\dots\,,$$

где функции $\xi(t),\eta(t)\in C^\infty[0,T]$ - неотрицательные функции, которые можно выписать явным образом.

Для функций $\psi_k(x,t)$ также будет справедлива теорема 1.1.5 об их линейной независимости и плотности множества их линейных комбинаций в $L_2(Q)$.

Приближенное решение краевой задачи (1), (2), (13) ищется в виде

$$u^N=\sum_{i=1}^{N}c_k^N\varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N,\psi_k)=(f,\psi_k),\ k=\overline{1,N}.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть коэффициент $c(x)>0$ достаточно большой, $k(x,t)=k(t),\ k(0)<0,\ k(T)<0$ и*

$$a-\frac{1}{2}|k_t|\ge\delta>0.$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи (1), (2), (13) из пространства $W_2^2(Q)$.

Теорема 1.3.3. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) < 0, \ \ k(T) < 0, \ \ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0 \ ; \ f, \ f_t \in L_2(Q).$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи (1), (2), (13) справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_6(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4}\ , \ \ C_6 > 0,$$

где постоянная C_6 не зависит от функций f, u, u^N и λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (14).

В **четвертом** параграфе рассматривается уравнение четного порядка

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x)u = f(x,t), \tag{15}$$

где $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial^i t}$.

Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0): \ x \in \Omega, \ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,0)^{>0}_{<0}\},$$

$$P_T^{\pm} = \{(x,T): \ x \in \Omega, \ \ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,T)^{>0}_{<0}\}.$$

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ - анизатропное пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathrm{m},s} = \int_Q \left[D_t^s u D_t^s v + \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v \right] dQ$$

и нормой $\|u\|_{m,s}^2 = (u,v)_{m,s}$, а также $(u,v) = \int_Q uvdQ, \ \|u\|^2 = (u,u)$ норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим случай, когда

$$(-1)^{s-1} k_{2s}(x,0) < 0, \ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) < 0.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (15) в области Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{16}$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad D_t^i u|_{t=T} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}. \tag{17}$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\tilde{\Delta} v \equiv (-1)^s D_t^{2s} v - \Delta v = \lambda v, \ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \ D_t^i v|_{\substack{t=0\\t=T}} = 0, \ i = \overline{0, s-1}. \tag{18}$$

При этом λ_k - соответствующие собственные числа спектральной задачи, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \ \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt} + \eta(t)\varphi_k, \ k = 1, 2, \ldots ,$$

где функции $\xi(t), \eta(t) \in C^{\infty}[0,T]$ - неотрицательные функции, которые можно выписать явным образом.

Приближенное решение краевой задачи (15) - (17) ищется в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \ k = \overline{1, N}.$$

Теорема 1.4.1. *Функции $\{\psi_k(x,t)\}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Теорема 1.4.2. *Пусть коэффициент $k_{2s}(x,t) = k_{2s}(t)$, $(-1)^{s-1}k_{2s}(0) < 0$, $(-1)^{s-1}k_{2s}(T) < 0$ и $(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0$, $(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2st}] \geq \delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи* (15) - (17) *из пространства $W_2^{2,2s}(Q)$.*

Главным результатом этого параграфа является

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.2, тогда для погрешности стационарного метода Галеркина для краевой задачи* (15) - (17) *справедлива оценка*

$$\left\|u - u^N\right\|_{1,s} \leq C_7(\|f\| + \|f_t\|)\lambda_{N+1}^{-1/4}, C_7 > 0,$$

где постоянная C_7 не зависит от N и λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (18).

Во второй главе рассматривается применение модифицированного метода Галеркина к исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа второго порядка.

В **первом параграфе** исследована краевая задача Врагова (1), (2), (3).

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются собственными функциями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega,\ \varphi|_s = 0. \qquad (19)$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Обозначим через $(u, v)_0$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ для $u(x),\ v(x)$ из $L_2(\Omega)$.

Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0,\ l = \overline{1, N},$$

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0$$

для случая $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0$$

для случая $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0$$

для случая $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0$$

для случая $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0,\ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$ *либо* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,T) = 0$.

Тогда краевая задача (1), (2), (3) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^2(Q)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_2 \leqslant C_8(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_8 > 0.$$

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_9(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \ \ C_9 > 0,$$

где u *- точное решение краевой задачи* (1), (2), (3) *и* λ_{N+1} *– собственное число спектральной задачи* (19).

Во **втором параграфе** рассмотрена "вторая"краевая задача (1), (2), (9). Отметим, что при $k(x,0) > 0$ задача (1), (2), (9) совпадает с задачей Врагова (1)-(3).

В дальнейшем будем считать, что $k(x,0) < 0$. Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (1), (2), (9) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv v(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0,$$

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1, N},$$

при $k(x,T) < 0$ или

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1,N},$$

при $k(x,T) > 0$.

Теорема 2.2.1. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия*

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) > 0$. Тогда краевая задача (1), (2), (9) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^2(Q)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leqslant C_{10}(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_{10} > 0.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_{11}(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/4}),\ C_{11} > 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \quad (20)$$

где $u(x,t)$ – точное решение краевой задачи (1), (2), (9) и λ_{N+1} – собственное число спектральной задачи (19).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации с помощью стационарного и нестационарного методов Галеркина исследованы краевая задача Врагова, первая краевая задача, "вторая"краевая задача для уравнений смешанного типа.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1 Для исследуемых краевых задач получены глобальные априорные оценки для приближенных решений построенных по методу Галеркина.

2 Доказаны теоремы об однозначной регулярной разрешимости поставленных краевых задач при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения.

3 Благодаря выводу глобальных априорных оценок, для приближенных решений краевых задач, получены оценки их погрешности относительно точных решений. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина, выражена через собственные значения спектральной задачи для оператора Лапласа (для квазиэллиптического оператора в случае уравнения высокого порядка) по пространственным переменным и по времени. А для нестационарного метода Галеркина, оценка погрешности получена через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа по пространственным переменным. При выводе этих оценок используются разложение в ряд Фурье и равенство Парсеваля.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. Тихонова И.М. Применение стационарного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Математические заметки СВФУ, 2016. - №4. - С. 73–81.

2. Егоров И.Е., Федоров В.Е., Тихонова И.М. Модифицированный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка и оценка его погрешности // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование, 2016. - Т. 9. - №4. - С. 30–39.

3. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Модифицированный метод Галеркина для задачи Врагова // Сибирские математические электронные известия, 2015. - Т. 12. - С. 732–742.

4. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки СВФУ, 2014. - №4. - С. 14–19.

5. Егоров И.Е., Тихонова И.М. О скорости сходимости стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование, 2012. - Вып. 14.- С. 53–58.

6. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ, 2012. - Т. 19, Вып. 2. - С. 20–28.

7. Тихонова И.М., Федоров В.Е Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка // Математические заметки ЯГУ, 2010. - Т. 17, Вып. 2. - С.109-117.