ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ТЕЛЕШЕВА ЛЮБОВЬ АЛЕКСАНДРОВНА

Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Кожанов А.И.

Улан-Удэ – 2017

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В последнее время в теории уравнений с частными производными важное место занимают исследования, посвященные обратным коэффициентным задачам. Обратные задачи возникают в ситуациях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, нужно ставить задачи определения параметров самой математической модели. К таким задачам относятся задачи определения различных коэффициентов уравнений, либо внешнего воздействия, либо граничных или начальных условий и пр. Многие важные прикладные вопросы приводят к обратным задачам. Особый, достаточно широкий класс представляют обратные задачи для уравнений в частных производных, поскольку именно такие уравнения наиболее часто употребляются для построения математических моделей самых разнообразных процессов. Теория обратных задач, в силу своей теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Она привлекает внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и её приложениями.

Основы теории и практики исследования обратных задач заложены и развиты в фундаментальных работах отечественных математиков, таких как: А. Н. Тихонов[98, 99], М. М. Лаврентьев[57], В. Г. Романов[81], А. И. Прилепко[72]. Достаточно полную библиографию работ последнего времени, связанных с исследованием обратных задач для уравнений с частными производными, можно найти в монографиях и статьях [81, 82, 103, 104, 108, 127, 118, 105, 125, 110, 128, 126, 120, 119]. Большинство работ посвящено уравнениям второго порядка, значительно меньше — уравнениям более высоких порядков.

Обратным задачам для уравнений параболического типа посвящено большое количество исследований и научных работ. Интерес к этим задачам, прежде всего связан с тем, что многие математические модели физических явлений можно описать уравнениями параболического типа. Обратные задачи для уравнений второго порядка возникают при исследовании таких физических процессов как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных полей в проводящих средах, движение вязкой жидкости в случае, когда область физических характеристик рассматриваемой среды недоступна для непосредственных измерений, но, в то же время, возможно получение дополнительной информации о характеристике самого процесса.

При систематизации и обобщении полученных результатов на уравнения более высокого порядка, появляется необходимость рассмотрения уравнений и задач более общего вида, чем те, которые появляются при анализе конкретных явлений. Однако и для таких уравнений и задач характерно то, что их свойства допускают более или менее наглядное физическое толкование. Уравнения параболического типа высокого порядка представляют собой одну из основных математических моделей, возникающих в теории горения (турбулентность пламени), теории химических реакторов, модели химического осциллятора и в др. прикладных вопросах [16]. Примером таких уравнений является уравнение Курамото-Сивашинского, разрешимость которого довольно хорошо освещена в научных публикациях [74, 129, 130, 130]. Это уравнение входит в ряд классических нелинейных уравнений математической физики.

Как правило, в обратных задачах предполагается, что неизвестная компонента имеет специальный вид — в настоящей работе предполагается, что неизвестная компонента содержит неизвестный множитель, являющийся функцией от временной переменной. Интерес к обратным задачам с неизвестным параметром, зависящим только от времени, объясняется не только стремлением изучить новые математические задачи, но и тем, что они возникают в приложениях — задачах управления [117, 73], в задачах со свободной границей [25, 26].

Вопросы разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа, рассматривались в работах А. И. Прилепко[70, 67, 69, 71, 127], Н. И. Иванчова[25, 22, 23, 24], А. И. Кожанова[41, 123, 42], Ю. Я. Белова[110, 9, 10, 109], Ю. Е. Аниконова[8, 106, 107, 7], В. Л. Камынина[37, 36, 38], M. Yamamoto[131], М. В. Клибанова[39], В. М. Исакова[120, 121], В. В. Васина[17], A. Lorenzi[125], С. Г. Пяткова[78, 79], С. И. Кабанихина[30] и многих других. Задачи для нестационарных, так называемых, метапараболических уравнений изучены в [114] в одномерном случае. Задачи для уравнения Кана-Хилларда рассматривались в [115, 116].

Отметим также работы [69, 68, 37, 71, 70, 84, 127] в которых исследовались задачи восстановления правой части параболического уравнения специального вида, содержащие неизвестную функцию от пространственной переменной с интегральным либо финальным условиями переопределения.

В статьях [39, 56, 41] рассматривались задачи восстановления различных коэффициентов уравнения теплопроводности в условиях первой и второй краевой задачи .

Среди работ, посвященных вопросам разрешимости нелинейных обратных задач для параболических уравнений с неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной, отметим работы Н. И. Иванчова[22, 24, 25], А. И. Кожанова[42], А. И. Прилепко [72, 73], J. R. Cannon[117]. В работах [72, 73] изучались обратные задачи с неизвестным коэффициентом при решении, для общих параболических уравнений второго порядка. В одномерной ситуации в работах [22, 24, 25] изучались обратные задачи с одним или двумя неизвестными коэффициентами при пространственных производных. Многомерные задачи с неизвестным коэффициентом $p(t)$ при производной u_t и при пространственной части изучались в [42]. В перечисленных работах в качестве условия переопределения берется интегральное условие.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений и уравнений составного типа второго порядка по времени изучались в работах [6, 5, 77, 44, 45].

Обратные задачи для уравнений параболического типа более высокого порядка, напротив изучены сравнительно мало. В имеющихся на данный момент работах главным образом изучались обратные задачи с неизвестным параметром, зависящим от пространственной переменной [33, 32, 31, 65, 66]. Что касается задач определения параметра зависящего от времени, то они остаются малоисследованными [34, 35].

В работах А. И. Кожанова, Г. А. Кирилловой [33, 32, 31] исследуется существование и единственность регулярных решений для параболического уравнения четного порядка с неизвестным параметром зависящим от пространственной переменной в различных постановках двумя методами: методом, основанном на непосредственном переходе к уравнению составного типа, и методом, основанном на переходе к нелокальной краевой задаче.

В работе [33] исследуются задачи определения младшего, старшего коэффициента параболического уравнения четвертого порядка

$$u_t + u_{xxxx} + \lambda u + q(x)u = f(x,t),$$

$$u_t + q(x)u_{xxxx} + \lambda u = f(x,t)$$

с финальным условием переопределения. Получены условия существования и единственности решения поставленной задачи в пространстве H. В работе [65] рассматривается аналогичная задача, но в более общих условиях.

В работе [31] рассматривается обратная задача определения младшего коэффициента уравнения, с интегральным условием переопределения. Случай восстановления правой части составного типа с условиями переопределения на временных слоях, исследуется в работе [66].

В работе [34] исследуется в прямоугольнике обратная задача определения младшего коэффициента, зависящего от времени в уравнении:

$$(-1)^m D_t u + a(x,t) D_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t,x) D_x^j u + \gamma(t) u = g(t,x)$$

с дополнительным интегральным условием переопределения и однородными граничными условиями. Доказывается теорема существования и единственности обобщенного решения поставленной задачи.

В работе [35] рассматривается уравнение

$$(-1)^m D_t u + a(x,t) D_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t,x) D_x^j u = f(t) g(t,x) + h(t,x).$$

с дополнительным интегральным условием переопределения и однородными граничными условиями. Доказана локальная теорема существования и глобальная теорема единственности.

Я. Т. Мегралиев [62] исследовал краевую обратную задачу для дифференциального уравнения четвертого порядка с интегральным граничным условием, с неизвестным коэффициентом $a(t)$ при решении. Доказывается существование и единственность классического решения. В работе применяется схема метода Фурье.

В данной работе при доказательстве разрешимости обратных задач используется редукция её с помощью условия переопределения к прямой задаче. В результате редукции получаем прямую задачу, чаще всего, с нелокальными граничными условиями (нелокальную задачу).

Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. Известно, что при математическом моделировании нелокальные условия могут возникать в ситуации, когда граница области протекания реального процесса недоступна для непосредственных измерений, но можно получить некоторую дополнительную информацию об изучаемом явлении во внутренних точках области. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для уравнений с частными производными, важна она и как раздел теории обратных задач.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для некоторых неклассических дифференциальных уравнений изучались в [46, 29].

Полученные в диссертации результаты о разрешимости нелокальных задач для параболических уравнений имеют самостоятельное значение.

Методы исследования. Для поставленных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения. Техника доказательства основана на переходе от исходной обратной задачи к новой уже прямой начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения (нагруженного [63, 20]). Далее исследуется разрешимость новой задачи. На основе существования решения прямой задачи делается вывод о существовании решения обратной задачи.

При доказательстве существования решения редуцированной краевой задачи применяются методы основанные на теореме о методе продолжения по параметру, на методе срезывающих функций, методе априорных оценок и методе регуляризации.

Данная методика исследования разрешимости обратных задач для параболических уравнений высокого порядка с некоторым условием переопределения (граничным или интегральным) систематически использовалась ранее и не раз доказала свою эффективность [40, 123, 42, 45]. Сущность метода редукции обратной задачи к нелокальной для нагруженного уравнения [63, 20, 21] раскрыта в работах А. И. Кожанова [41, 122].

Единственность решений доказывается с помощью априорных оценок.

Так же используется метод Фурье для построения решения некоторых линейных обратных задач.

Цель работы. Основной целью работы является исследование разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа четвертого и более высокого порядков с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты дополняют многочисленные исследования по линейным и нелинейным обратным задачам, и могут найти применение в дальнейшем изучении обратных задач для параболических уравнений высоких порядков.

Значение работы также определяется прикладной значимостью исследуемых задач для решений различных проблем современного естествознания.

Апробация работы. Все результаты представленные в диссертации неоднократно докладывались и обсуждались:

- на Сибирском субботнем студенческом семинаре по дифференциальным уравнениям под рук. доктора физ.-мат. наук, проф. А. И. Кожанова (Новосибирск, ИМ СОРАН им. С.Л.Соболева, 2010-2017);

- на научной конференции «Математика, её приложения и математическое образование» (Улан-Удэ, 2011, 2014);

- на II и V международной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2010, 2013);

- на международной конференции «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений» (Новосибирск, 2013);

- на международной конференции «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей» (Новосибирск, 2013);

- на VII международной конференции по математическому моделированию (Якутск, 2014);

- на международной конференции «Дифференциальные уравнения и математические моделирование» (Улан-Удэ, 2015);

- на семинаре «Обратные задачи» под рук. доктора физ.-мат. наук, проф. Ю. Я. Белова (Красноярск, ИМФИ СФУ, 2014-2016);

- на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» под рук.

доктора физ.-мат. наук, проф. Г. В. Демиденко (Новосибирск, ИМ СО-РАН им. С.Л.Соболева, 2016);

- на семинаре «Математические модели механики сплошных сред» под рук. чл.-корр. РАН профессора П. И. Плотникова (г. Новосибирск, ИГиЛ им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2017 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ (из них тезисы [92, 93, 94, 95, 96, 97] , статьи [86, 87, 88, 89, 90, 91, 53]), в которых отражено ее основное содержание. В изданиях, рекомендованных ВАК для публикаций результатов диссертаций [86, 87, 89, 90, 91, 53].

Работы [90, 53] написана в соавторстве. Основной вклад в доказательство априорных оценок принадлежит автору, А. И. Кожанову принадлежат идеи постановок задач и решающий вклад при доказательстве теорем существования. В работах [86, 87, 88, 89, 91] решающий вклад в доказательство основных результатов принадлежит автору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 155 страницы, включая список литературы, который состоит из 131 наименований.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, профессору Александру Ивановичу Кожанову за предложенную тему, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Содержание работы

Первая глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена разрешимости линейных обратных задач для параболического уравнения высокого порядка.

Здесь и далее (кроме ситуации, рассмотренной в §1.5) в одномерном случае рассматриваются задачи в прямоугольнике D:

$$D = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T), T < \infty\}.$$

В многомерном случае рассматривается цилиндр $Q = \Omega \times (0, T)$, конечной высоты T, Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q.

В §1.1 рассмотрена обратная задача с граничным переопределением в многомерном случае. А также, получен дополнительный результат о разрешимости новых нелокальных задач. В цилиндре Q исследуются следующие задачи:

Обратная задача 1.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{0.0.1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S$$

(здесь и далее $\nu_x = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_n})$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x);

$$\int\limits_{\Gamma} R(x)u(x,t)\, ds_x = 0, \quad 0 < t < T$$

($R(x)$, $c(x)$, $f(x,t)$, $h(x,t)$ - заданные функции).

Нелокальная краевая задача 1.1: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условие (0.0.1), а также условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_1(x,y,t)u(y,t)\, ds_y, \quad (x,t) \in S;$$

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_2(x,y,t)u(y,t)\, ds_y, \quad (x,t) \in S$$

($K_1(x,y,t)$ и $K_2(x,y,t)$ - заданные функции). Получены условия существования регулярного решения данных задач.

В §1.2 рассмотрены обратные и нелокальные задачи для уравнения

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t).$$

Обратная задача 1.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике D уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1).$$

Нелокальная задача 1.2: найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = f(x,t).$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$v_x(0,t) = \alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_2(t)v(1,t) + \alpha_0(t), \quad t \in (0,T),$$

$$v_x(1,t) = \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v(1,t) + \beta_0(t), \quad t \in (0,T),$$

$$v_{xxx}(0,t) = \gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v(1,t) + \gamma_0(t), \quad t \in (0,T),$$

$$v_{xxx}(1,t) = \delta_1(t)v(0,t) + \delta_2(t)v(1,t) + \delta_0(t), \quad t \in (0,T),$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in (0,1).$$

Получены условия существования регулярных решений этих задач.

В §1.3 рассматривается задача восстановления неизвестного внешнего воздействия составного типа с граничными условиями переопределения.

Обратная задача 1.3: требуется найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, связанные в прямоугольнике D уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t),$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

Получены условия существования регулярного решения данных задач.

В §1.4 исследуется разрешимость обратных задач, восстановления неизвестных параметров уравнения параболического типа высокого порядка в многомерном случае. Применяемый метод исследования в данном параграфе отличается от методов, используемых в предыдущих параграфах. Для построения решений обратных задач используется метод Фурье.

В первом пункте параграфа рассматривается задача восстановления граничных данных.

Пусть $c(x)$, $f(x,t)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $K(x)$ и $N(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Далее, пусть (l_1, l_2) есть одна из пар граничных операторов $l_1 u = u$, $l_2 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, либо $l_1 u = u$, $l_2 u = \Delta u$, либо $l_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $l_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$ (здесь и далее $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x, Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_n$).

Обратная задача 1.4.1: найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t),$$

и выполняются также условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{0.0.2}$$

$$l_1u(x,t)\mid_{(x,t)\in S}=q_1(t)h_1(x)\mid_{(x,t)\in S},\quad l_2u(x,t)\mid_{(x,t)\in S}=q_2(t)h_2(x)\mid_{(x,t)\in S};$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)dx=0,\quad \int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)dx=0,\quad 0<t<T.$$

Во второй части параграфа рассматриваются задачи восстановления правой части уравнения параболического типа, с различными интегральными условиями переопределения.

Пусть функции $f(x,t)$, $h(x,t)$, $K(x)$ — заданы и определены при $x\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,T]$. В данной части работы рассматривается уравнение:

$$u_t+\Delta^2u=f(x,t)+q(t)h(x,t), \tag{0.0.3}$$

Обратная задача 1.4.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (0.0.3) при выполнении для функции $u(x,t)$ однородных граничных условий следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\mid_{(x,t)\in S}=\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\mid_{(x,t)\in S}=0, \tag{0.0.4}$$

начального условия (0.0.2) и интегрально-граничного переопределения

$$\int\limits_{\Gamma} K(x)u(x,t)ds_x=0, t\in(0,T).$$

Обратная задача 1.4.3: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (0.0.3) при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (0.0.2), (0.0.4) и условия внутреннего интегрального переопределения

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)dx=0, t\in(0,T).$$

Получены условия существования регулярных решений поставленных задач.

§1.5 иллюстрирует один интересный результат применения полученных в §1.2 условий разрешимости обратных задач. Рассматриваются задачи с нелокальным условиями Самарского-Ионкина и с граничным переопределением.

Пусть $Q=\{(x,t):x\in(-1,1),t\in(0,T),T<\infty\}$.

Далее, пусть $f(x,t)$, $h(x,t)$, $c(x,t)$ есть функции определенные в $\bar{Q}$, причем $c(x,t) = c(-x,t)$.

Обратная задача 1.5.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{0.0.5}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{0.0.6}$$

$$u_x(-1,t) - u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{0.0.7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (-1,1). \tag{0.0.8}$$

$$u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{0.0.9}$$

Обратная задача 1.5.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением (0.0.5) при выполнении условий (0.0.6), (0.0.8), (0.0.9) и нелокального условия

$$u_x(-1,t) + u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) + u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{0.0.10}$$

Здесь условия (0.0.6) есть граничные условия, (0.0.8) – начальное условие, (0.0.9) – условие переопределения, обусловленное наличием неизвестного параметра, (0.0.7) и (0.0.10) – нелокальные условия Самарского-Ионкина.

Глава 2 посвящена изучению разрешимости нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа и некоторых других нестационарных уравнений.

В §2.1 рассматривается задача определения помимо решения, также неизвестного коэффициента при производной по времени в случае интегрального переопределения.

В прямоугольной области D рассмотрим уравнение

$$p(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{0.0.11}$$

где функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $K(x)$, $c(x,t)$ — известны и заданы при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.1.1: найти функции $u(x,t)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике D, уравнением (0.0.11), при выполнении для функции $u(x,t)$ начального условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{0.0.12}$$

краевых условий

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T). \tag{0.0.13}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T). \tag{0.0.14}$$

а также условия переопределения

$$\int\limits_0^1 K(x)u(x,t)dx = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{0.0.15}$$

Обратная задача 2.1.2: найти функции $u(x,t)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике D, уравнением (0.0.11), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (0.0.12), (0.0.13), (0.0.15), а также условий

$$u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T). \tag{0.0.16}$$

Получены условия существования и единственности регулярных решений поставленных задач.

В §2.2 рассматривается задача определения коэффициента $q(t)$ уравнения при решении.

$$u_t + u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \tag{0.0.17}$$

где $f(x,t)$ известная функция.

Пусть функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $u_0(x)$, $K(x)$, $\mu(t)$ заданы и определены при $x \in [0;1]$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.2.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ в прямоугольнике D, удовлетворяющие уравнению (0.0.17), при выполнении для функции

$u(x,t)$ краевых условий (0.0.13), (0.0.14), начального условия (0.0.12) и условия переопределения (0.0.15).

Обратная задача 2.2.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ в прямоугольнике D, удовлетворяющие уравнению (0.0.17), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий (0.0.13), (0.0.16), а так же начального условия (0.0.12) и условий переопределения (0.0.15).

Получены условия существования и единственности регулярных решений поставленных задач.

В §2.3 рассматриваются задачи определения, помимо решения, двух неизвестных коэффициентов.

В прямоугольнике D рассмотрим уравнение

$$u_t + u_{xxxx} + q_1(t)u = f(x,t) + q_2(t)h(x,t), \tag{0.0.18}$$

где $f(x,t)$, $h(x,t)$ известные функции.

Пусть функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $u_0(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ заданы и определены при $x \in [0;1]$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.3.1: найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ в прямоугольнике D, удовлетворяющие уравнению (0.0.18), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий (0.0.13), (0.0.14), начального условия (0.0.12) и условий переопределения

$$\int_0^1 K_1(x)u(x,t)dx = \mu_1(t), \int_0^1 K_2(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), t \in (0,T). \tag{0.0.19}$$

Обратная задача 2.3.2: найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению (0.0.18), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий (0.0.13), (0.0.16), а так же начального условия (0.0.12) и условий переопределения (0.0.19).

Получены условия существования и единственности регулярных решений поставленных задач.

В §2.4 рассматриваются задачи для нестационарных уравнений высокого порядка с интегральным условием переопределения.

Обратная задача 2.4.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S; \tag{0.0.20}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega; \tag{0.0.21}$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = \mu(t) \quad \textit{при} \quad t \in (0,T). \tag{0.0.22}$$

Обратная задача 2.4.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (0.0.20)-(0.0.22).

Получены условия существования регулярных решений поставленных задач.

Заключение содержит результаты и выводы о проделанной работе.

Глава 1

Линейные обратные задачи для параболического уравнения высокого порядка

В первой главе изучается разрешимость начально-краевых задач для линейных параболических уравнений высокого порядка в ситуации, когда правая часть (внешнее воздействие) содержит неизвестную компоненту или, другими словами, линейных обратных задач. Как правило, предполагается, что неизвестная компонента имеет некоторый специальный вид, а именно, неизвестная компонента содержит неизвестный множитель, являющийся функцией от временной переменной.

При доказательстве разрешимости обратных задач используется редукция её к прямой задаче с помощью условия переопределения. В процессе часто получаем прямую задачу с нелокальными условиями (нелокальную задачу), разрешимость которой, как правило, ранее не изучалась. Так например, нелокальные задачи исследуемые в §1.1 и §1.2 ранее не исследовались и полученные теоремы об их разрешимости имеют самостоятельное значение.

1.1 Линейные обратные задачи с граничным переопределением в многомерном случае

В настоящее время известно немало статей и монографий посвященных исследованию обратных задач с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной и с граничным переопределением [5, 30, 35, 42, 44, 49, 80, 127]. В большинстве работ обратные задачи изучались либо в одномерном случае, либо в специальных областях типа параллелепипеда, и лишь в работе [49] подобные задачи в близкой к настоящей работе постановке, но только для параболических уравнений второго порядка, изучались в многомерных областях произвольной геометрии по пространственным переменным.

Возникающие при редукции изучаемых обратных задач нелокальные задачи можно трактовать как обобщение одного из случаев нелокальной краевой задачи А.А. Самарского, предложенной в [83] для одномерного уравнения теплопроводности, причем обобщение как многомерное, так и обобщение на параболические уравнения высокого порядка. Представляется, что полученные в настоящем параграфе результаты о разрешимости многомерных аналогов задачи А.А. Самарского, а также связанных с ними краевых задач для нагруженных уравнений имеют и самостоятельное значение.

Пусть $f(x,t)$, $c(x)$, $h(x,t)$, $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,t)$, $R(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Постановки обратной и нелокальной задач будут даны безотносительно друг к другу.

Обратная задача 1.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1.1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S \tag{1.1.3}$$

(здесь и далее $\nu_x = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_n})$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x);

$$\int\limits_\Gamma R(x)u(x,t)\,ds_x = 0, \quad 0 < t < T. \tag{1.1.4}$$

Нелокальная краевая задача 1.1: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t) \tag{1.1.5}$$

и такую, что для нее выполняются условие (1.1.2), а также условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_\Gamma K_1(x,y,t)u(y,t)ds_y, \quad (x,t) \in S; \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_\Gamma K_2(x,y,t)u(y,t)ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{1.1.7}$$

Уточним, что в рассматриваемой обратной задаче условия (1.1.2) и (1.1.3) представляют собой условия прямой задачи — именно, обычной второй начально-краевой задачи для параболического уравнения четвертого порядка, условие же (1.1.4) есть условия граничного переопределения интегрального вида. Ранее обратные задачи с подобными условиями переопределения для параболических уравнений высокого порядка не изучались.

В рассматриваемой нелокальной задаче именно условия (1.1.6) и (1.1.7) можно трактовать как условия, дающие многомерное обобщение одного из случаев общей задачи А.А. Самарского [83].

1.1.1 Редукция обратной задачи к нелокальной.

Проведем некоторые формальные построения.

Обозначим

$$f_0(t) = \int\limits_\Gamma R(x)f(x,t)ds_x, \quad h_0(t) = \int\limits_\Gamma R(x)h(x,t)ds_x.$$

Пусть выполняется условие

$$h_0(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T]. \tag{1.1.8}$$

Умножим уравнение (1.1.1) на функцию $R(x)$ и проинтегрируем по Γ; из полученного равенства вычислим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{h_0(t)} \left\{ \int\limits_\Gamma R(x)[\Delta^2 u(x,t) + c(x)u(x,t)]ds_x - f_0(t) \right\}.$$

Введем еще обозначения:

$$h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h_0(t)}, \quad f_1(x,t) = f(x,t) - f_0(t)h_1(x,t).$$

Рассмотрим уравнение, полученное из уравнения (1.1.1) подстановкой в него вычисленной функции $q(t)$:

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f_1(x,t) + h_1(x,t) \int\limits_\Gamma R(y)[\Delta^2 u(y,t) + c(y)u(y,t)]ds_y.$$

Применим к этому уравнению оператор $\Delta^2 + c(x)$. Получим новое уравнение

$$v_t + \Delta^2 v + c(x)v = f_2(x,t) + h_2(x,t) \int\limits_\Gamma R(y)v(y,t)ds_y, \tag{1.1.9}$$

в котором $v(x,t)$, $f_2(x,t)$ и $h_2(x,t)$ суть функции

$$v(x,t) = \Delta^2 u(x,t) + c(x)u(x,t), \quad f_2(x,t) = \Delta^2 f_1(x,t) + c(x)f_1(x,t),$$

$$h_2(x,t) = \Delta^2 h_1(x,t) + c(x)h_1(x,t).$$

Пусть для простоты выполняются условия

$$\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta f_1(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{1.1.10}$$

Обозначим

$$K_1(x,y,t) = \frac{\partial h_1(x,t)}{\partial \nu_x} R(y), \quad K_2(x,y,t) = \frac{\partial \Delta h_1(x,t)}{\partial \nu_x} R(y).$$

Из условий (1.1.3) и (1.1.10), а также из уравнения (1.1.9) следует, что для функции $v(x,t)$ при $(x,t) \in S$ должны выполняться равенства

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_1(x,y,t)v(y,t)ds_y, \qquad (1.1.11)$$

$$\frac{\partial \Delta v(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_2(x,y,t)v(y,t)ds_y. \qquad (1.1.12)$$

Равенства (1.1.11) и (1.1.12) вместе с начальным условием (1.1.2) и уравнением (1.1.9) дают для функции $v(x,t)$ нелокальную задачу, подобную задаче (1.1.5), (1.1.2), (1.1.6), (1.1.7); установив ее разрешимость, нетрудно будет далее установить разрешимость обратной задачи 1.1.

1.1.2 Разрешимость нелокальной задачи 1.1.

Разрешимость нелокальной краевой задачи 1.1 будет установлена:
а) в некотором общем случае, и полученный результат при этом будет иметь самостоятельное значение;
б) в случае, непосредственно связанном с обратной задачей 1.1.

Пусть выполняется условие:
функции $K_1(x,y,t)$ и $K_2(x,y,t)$ таковы, что существует функция $K_0(x,y,t)$ из класса $C^5(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T])$, для которой при $(x,t) \in S$ выполняются равенства

$$\frac{\partial K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = K_1(x,y,t), \quad \frac{\partial \Delta_x K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = K_2(x,y,t). \qquad (1.1.13)$$

Определим оператор B:

$$(Bv)(x,t) = v(x,t) - \int\limits_{\Gamma} K_0(x,y,t)v(y,t)ds_y.$$

Относительно этого оператора будем считать, что выполняется условие:
для всех t из отрезка $[0,T]$ оператор B непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, и для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по

$t \in [0, T]$ *выполняются неравенства*

$$k_1 \|v\|_{L_2(\Gamma)} \le \|Bv\|_{L_2(\Gamma)} \le k_2 \|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k_i = const, \quad 0 < k_1 < k_2. \quad (1.1.14)$$

Для фиксированной функции $w(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(Q)$ определим функцию $\Phi(x,t,w)$:

$$\Phi(x,t,w) = \int\limits_\Gamma K_0(x,y,t)(B^{-1}w)_t(y,t)ds_y + \int\limits_\Gamma K_{0t}(x,y,t)(B^{-1}w)(y,t)ds_y +$$
$$+ \int\limits_\Gamma [\Delta_x^2 K_0(x,y,t) + c(x)K_0(x,y,t)](B^{-1}w)(y,t)ds_y.$$

Утверждение. *При принадлежности функции $K_0(x,y,t)$ классу $C^5(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T])$ и при выполнении условия (1.1.14) для любой функции $w(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(Q)$ такой, что $\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ при $(x,t) \in S$, $w(x,0) = 0$ при $x \in \Omega$, выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \Phi(x,\tau,w)[w_\tau - \Delta w_\tau]dxd\tau \right| \le m_1 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_\tau^2 dxd\tau +$$
$$+ m_2 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{x_i\tau}^2 dxd\tau + m_3 \left[\int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega w_\xi^2 dxd\xi d\tau + \right. \quad (1.1.15)$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega w_{x_i\xi}^2 dxd\xi d\tau \right],$$

в котором постоянные m_1 и m_2 определяются лишь функцией $K_0(x,y,t)$ и областью Ω, постоянная m_3 определяется функцией $K_0(x,y,t)$, областью Ω, а также числом T.

Доказательство. Для функций $w(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(Q)$, удовлетворяющих условию $\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ при $(x,t) \in S$, выполняется равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Gamma K_0(x,y,\tau)(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)ds_y \right) [w_\tau - \Delta w_\tau]dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\int\limits_\Gamma K_0(x,y,\tau)(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)ds_y \cdot w_\tau + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Gamma} K_{0x_i}(x,y,\tau)(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)ds_y\cdot w_{x_i\tau}\Bigg]\,dxd\tau.$$

Из этого равенства, неравенства Юнга и условий гладкости на функцию $K_0(x,y,t)$ вытекает оценка

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\int\limits_\Gamma K_0(x,y,\tau)(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)ds_y\right)[w_\tau-\Delta w_\tau]dxd\tau\right|\leq$$

$$\leq\delta_1\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_\tau^2dxd\tau+\frac{C_1}{\delta_1}\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\left[(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)\right]^2ds_yd\tau+$$

$$+\delta_2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau+\frac{C_2}{\delta_2}\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\left[(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)\right]^2ds_yd\tau,$$

в которой δ_1 и δ_2 есть произвольные положительные числа, числа же C_1 и C_2 определяются функцией $K_0(x,y,t)$ и областью Ω.

Введем обозначение:

$$v(x,t)=(B^{-1}w)(x,t),\quad \varphi(x,t)=\int\limits_\Gamma K_{0t}(x,y,t)v(y,t)ds_y.$$

Имеют место равенства

$$v_t(x,t)=(B^{-1}w)_t(x,t)=(B^{-1}w_t)(x,t)+(B^{-1}\varphi)(x,t).$$

Отсюда, из условия (1.1.14) и из неравенства Гельдера следует

$$\left\|(B^{-1}w)_\tau\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq\left\|B^{-1}w_\tau\right\|_{L_2(\Gamma)}+\left\|B^{-1}\varphi\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq\frac{1}{k_1}\|w_\tau\|_{L_2(\Gamma)}+\frac{1}{k_2}\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)}\leq$$

$$\leq\frac{1}{k_1}\|w_\tau\|_{L_2(\Gamma)}+k_3\|w\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Используя далее представление

$$w(y,\tau)=\int\limits_0^\tau w_\xi(y,\xi)d\xi,\qquad(1.1.16)$$

(справедливое вследствие равенства $w(y,0)=0$), применяя оценку вложения [60, гл. II, §2],

$$\|w_\tau\|_{L_2(\Gamma)} \le c_0\|w_\tau\|_{L_2(\Omega)} + c_1\sum_{i=1}^{n}\|w_{x_i\tau}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.1.17}$$

получим неравенство

$$\begin{gathered}\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Gamma K_0(x,y,\tau)(B^{-1}w)_\tau(y,\tau)ds_y\right)[w_\tau-\Delta w_\tau]dxd\tau\right|\le\\ \le m_1'\int_0^t\int_\Omega w_\tau^2dxd\tau + m_2'\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau+\\ +m_3'\left[\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega w_\xi^2dxd\xi d\tau + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega w_{x_i\xi}^2dxd\xi d\tau\right];\end{gathered} \tag{1.1.18}$$

постоянные m_1' и m_2' здесь определяются функцией $K_0(x,y,t)$ и областью Ω, постоянная m_3' определяется функцией $K_0(x,y,t)$, областью Ω и числом T.

Используя далее равенство

$$\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Gamma\left[K_{0\tau}(x,y,\tau)+\Delta_x^2K_0(x,y,\tau)+c(x)K_0(x,y,\tau)\right](B^{-1}w)(y,\tau)\,ds_y\right)\times$$

$$\times[w_\tau-\Delta w_\tau]dxd\tau = \int_0^t\int_\Omega\left[\int_\Gamma\left[K_{0\tau}(x,y,\tau)+\Delta_x^2K_0(x,y,\tau)+c(x)K_0(x,y,\tau)\right]\times\right.$$

$$\times(B^{-1}w)(y,\tau)ds_y\cdot w_\tau + \sum_{i=1}^{n}\int_\Gamma\left[K_{0x_i\tau}(x,y,\tau)+\right.$$

$$\left.\left.+\Delta_x^2K_{0x_i}(x,y,\tau)+(c(x)K_0(x,y,\tau))_{x_i}\right](B^{-1}w)(y,\tau)ds_yw_{x_i\tau}\right]dxd\tau,$$

применяя неравенство Юнга, используя условие (1.1.14), представление (1.1.16) и оценку (1.1.17), нетрудно аналогичным вышеизложенному образом получить оценку

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\int\limits_\Gamma\left[K_{0\tau}(x,y,\tau)+\Delta_x^2K_0(x,y,\tau)+c(x)K_0(x,y,\tau)\right](B^{-1}w)(y,\tau)ds_y\right)\times\right.$$
$$\left.\times[w_\tau-\Delta w_\tau]dxd\tau\right|\le\delta_0\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left[w_\tau^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i\tau}^2\right]dxd\tau+$$
$$+m_3''\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega w_\xi^2dxd\xi d\tau+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega w_{x_i\xi}^2dxd\xi d\tau\right],\tag{1.1.19}$$

в которой δ_0 есть произвольное положительное число, число же m_3'' определяется функцией $K_0(x,y,t)$, областью Ω, числом T, а также числом δ_0.

Из оценок (1.1.18) и (1.1.19) при фиксированных δ_0, δ_1 и δ_2 и получается требуемая оценка (1.1.15).

Утверждение доказано.

Уточним, что числа m_1, m_2 имеют вид $m_1=m_1'+\widetilde{\delta}_1$, $m_2=m_2'+\widetilde{\delta}_2$, числа m_1' и m_2' определены в неравенстве (1.1.18), числа же $\widetilde{\delta}_1$ и $\widetilde{\delta}_2$ суть некоторые положительные числа. Именно числа m_1' и m_2' и понадобятся ниже.

Вернемся к исследованию разрешимости нелокальной краевой задачи 1.1.

Теорема 1.1.1 *Пусть выполняются условия (1.1.13) и (1.1.14), и пусть функция $K_0(x,y,t)$ такова, что существуют положительные числа δ_1 и δ_2, для которых числа m_1' и m_2' из оценки (1.1.18) удовлетворяют неравенствам*

$$m_1'<1,\quad m_2'<1.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f(x,0)=0$ при $x\in\overline{\Omega}$, нелокальная краевая задача 1.1 имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,1}(Q)$

и такое, что $u_t(x,t)\in L_2(S)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$w_t+\Delta^2 w+c(x)w=f(x,t)+\Phi(x,t,w) \tag{1.1.20}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{1.1.21}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial\nu_x}=\frac{\partial\Delta w(x,t)}{\partial\nu_x}=0,\quad (x,t)\in S. \tag{1.1.22}$$

Покажем, используя метод регуляризации и метод продолжения по параметру, что данная задача имеет решение $w(x,t)$ такое, что $w(x,t)\in W_2^{4,1}(Q)$, $w_t(x,t)\in L_2(S)$.

Определим необходимые ниже пространства. Именно, положим

$$V_0=\{v(x,t):\quad v(x,t)\in W_2^{4,1}(Q),\quad v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))\},$$

$$V_1=\{v(x,t):\quad v(x,t)\in V_0,\quad v_t(x,t)\in V_0\};$$

нормы в V_0 и в V_1 определим естественным образом

$$\|v\|_{V_0}=\left(\|v\|^2_{W_2^{4,1}(Q)}+\|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^4(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V_1}=\left(\|v\|^2_{V_0}+\|v_t\|^2_{V_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что множества V_0 и V_1 с такими нормами являются банаховыми пространствами.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$w_t+\Delta^2 w+c(x)w+\varepsilon\Delta^2 w_t=f(x,t)+\Phi(x,t,w) \tag{1.1.20$_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.1.21) и (1.1.22). Покажем, используя метод продолжения по параметру, что при выполнении условий теоремы эта задача будет разрешима в пространстве V_1 для фиксированного положительного числа ε и для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,t)\in L_2(Q)$.

Пусть λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$w_t + \Delta^2 w + c(x)w + \varepsilon\Delta^2 w_t = f(x, t) + \lambda\Phi(x, t, w) \qquad (1.1.20_{\varepsilon,\lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.1.21) и (1.1.22). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых данная краевая задача разрешима в пространстве V_1 при фиксированном ε для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$. Если окажется, что это множество не пусто, открыто и замкнуто в метрическом пространстве $X = [0, 1]$, то оно будет совпадать со всем X — см. [100, гл. III, § 14], . Совпадение множества Λ со всем отрезком $[0, 1]$, очевидно, дает разрешимость задачи $(1.1.20_\varepsilon)$, (1.1.21), (1.1.22) в пространстве V_1 .

Тот факт, что множество Λ не пусто, следует из принадлежности ему числа 0 (см. [61, гл. 3]); требуемый факт нетрудно установить и непосредственно, используя метод Галеркина с выбором специального базиса — вновь см. (см. [61, гл. 1]). Далее, открытость и замкнутость Λ устанавливается с помощью априорной оценки

$$\|w\|_{V_1} \le M_0 \qquad (1.1.23)$$

всевозможных решений краевой задачи $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda})$, (1.1.21), (1.1.22), равномерной по λ.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w_\tau + \Delta^2 w + \varepsilon\Delta^2 w_\tau + c(x)w)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau = \\ &\qquad = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (f(x, \tau) + \lambda\Phi)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau, \end{aligned} \qquad (1.1.24)$$

являющееся следствием уравнения $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda})$. Интегрируя слева по частям, справа же применяя неравенство Юнга и неравенство (1.1.15), получим оценку

$$\int_0^t\int_\Omega\left[w_\tau^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i\tau}+\varepsilon(\Delta w_\tau)^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n(\Delta w_{x_i\tau})^2\right]dxd\tau+\tfrac{1}{2}\int_\Omega[\Delta w(x,t)]^2dx+$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega[\Delta w_{x_i}(x,t)]^2dx\le\left(m_1'+\delta_0+\tfrac{\delta_3^2}{2}\right)\int_0^t\int_\Omega w_\tau^2dxd\tau+$$
$$+(m_2'+\delta_0)\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau+\tfrac{\delta_4^2}{2}\int_0^t\int_\Omega(\Delta w_\tau)^2dxd\tau+$$
$$+m_3\left\{\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left[w_\xi^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i\xi}^2\right]dxd\xi d\tau\right\}+\left(\tfrac{1}{2\delta_3^2}+\tfrac{1}{2\delta_4^2}\right)\int_Q f^2(x,t)dxdt, \tag{1.1.25}$$

в которой δ_3 и δ_4 суть произвольные положительные числа. Зафиксируем число δ_4: $\delta_4=\sqrt{\varepsilon}$. Далее, выберем числа δ_0 и δ_4 настолько малыми, чтобы выполнялось

$$m_1+\delta_0+\frac{\delta_3^2}{2}<1,\quad m_2'+\delta_0<1.$$

Фиксируя числа δ_0 и δ_3 указанным образом, применяя далее лемму Гронуолла, из (1.1.25) получим оценку

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_\Omega\left[w_\tau^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i\tau}^2+\varepsilon(\Delta w_\tau)^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n(\Delta w_{x_i\tau})^2\right]dxd\tau+\\ +\int_\Omega\left\{[\Delta w(x,t)]^2+\sum_{i=1}^n[\Delta w_{x_i}(x,t)]^2\right\}dx\le M_1\end{gathered} \tag{1.1.26}$$

с постоянной M_1, определяющейся функциями $K_0(x,y,t)$ и $f(x,t)$, областью Ω, числами T и ε.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega(w_\tau+\Delta^2w+\varepsilon\Delta^2w_\tau+c(x)w)\Delta^2w_\tau dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega(f+\lambda\Phi)\Delta^2w_\tau dxd\tau. \tag{1.1.27}$$

Вновь слева интегрируя по частям, справа же применяя неравенство Юнга, неравенства (1.1.17) и (1.1.26), получим оценку

$$\int_0^t\int_\Omega\left[(\Delta w_\tau)^2+\varepsilon(\Delta^2w_\tau)^2\right]dxd\tau+\int_\Omega\left[\Delta^2w(x,t)\right]^2dx\le M_2 \tag{1.1.28}$$

с постоянной M_2, определяющейся функциями $K_0(x,y,t)$ и $f(x,t)$, областью Ω, числами T и ε.

Перейдя теперь к продифференцированному по t уравнению $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda})$, нетрудно с помощью аналогичных вышеприведенным выкладок и с использованием уже доказанного получить оценки типа (1.1.26) и (1.1.28), но для производной $w_t(x,t)$. В сумме же полученные оценки дадут требуемую оценку (1.1.23).

Покажем, что из оценки (1.1.23) следует замкнутость множества Λ.

Пусть $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность чисел из множества Λ такая, что $\lambda_m \to \lambda_0$ при $m \to \infty$, $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность соответствующих решений краевых задач $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda_m})$, (1.1.21), (1.1.22). Положим $W_{mk}(x,t) = w_m(x,t) - w_k(x,t)$. Имеют место равенства

$$W_{mkt}+\Delta^2 W_{mk}+\varepsilon\Delta^2 W_{mkt} = (\lambda_m-\lambda_k)\Phi(x,t,w_m)+\lambda_m\Phi(x,t,W_{mk}), (x,t)\in Q,$$

$$W_{mk}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial W_{mk}(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta W_{mk}(x,t)}{\partial \nu_x}, \quad (x,t) \in S.$$

Повторяя теперь для функции $W_{mk}(x,t)$ доказательство оценки (1.1.23) и учитывая собственно оценку (1.1.23), получим, что выполняется неравенство

$$\|W_{mk}\|_{V_1} \leq M_3|\lambda_m - \lambda_k|$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $K_0(x,y,t)$ и $f(x,t)$, областью Ω, числами T и ε. Из этого неравенства следует, что семейство $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментально в пространстве V_1; поскольку же пространство V_1 банахово, то существует функция $w(x,t)$, принадлежащая V_1 и такая, что при $m \to \infty$ имеет место сходимость $w_m(x,t) \to w(x,t)$ в пространстве V_1. Заметим, что из оценки (1.1.23) и из компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(S)$ вытекает, что из последовательности $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{w_{m_l}(x,t)\}_{l=1}^{\infty}$ такую, что $w_{m_l t}(x,t) \to w_t(x,t)$ сильно в пространстве $L_2(S)$. Следовательно, в уравнении $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda_{m_l}})$ можно перейти к пределу при $l \to \infty$, в пределе же получим, что для функции $w(x,t)$ выполняется уравнение $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda_0})$. Поскольку же функция $w(x,t)$ принадлежит пространству V_1, то получаем, что число λ_0 принадлежит множеству Λ. А это и означает, что множество Λ замкнуто.

Покажем теперь, что из оценки (1.1.23) следует и открытость множества Λ.

Пусть λ_0 есть точка множества Λ, λ есть число $\lambda_0 + \widetilde{\lambda}$. Множество Λ будет открытым, если число λ при малых $|\widetilde{\lambda}|$ также будет принадлежать Λ. Покажем, что это действительно так.

Обозначим через $V_{1,0}$ подпространство пространства V_1, состоящее из функций $v(x,t)$ таких, что

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta v(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S,$$
$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega.$$

Поскольку λ принадлежит множеству Λ, то задача $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda,v})$, (1.1.21), (1.1.22) будет иметь решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству $V_{1,0}$. Учитывая же, что и $v(x,t)$, и $w(x,t)$ принадлежат подпространству $V_{1,0}$, получаем, что задача $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda_0,v})$, (1.1.21), (1.1.22) порождает оператор A, переводящий пространство $V_{1,0}$ в себя: $A(v) = w$. Нетрудно установить (фактически повторяя доказательство оценки (1.1.23)), что в случае $f(x,t) \equiv 0$ выполняется неравенство

$$\|w\|_V \leq M_4|\widetilde{\lambda}|\|v\|_{V_0}$$

с постоянной M_4, определяющейся лишь функцией $K_0(x,y,t)$, областью $K_0(x,y,t)$, числами T и ε. Если теперь число $\widetilde{\lambda}$ таково, что выполняется $M_4|\widetilde{\lambda}| < 1$, то из данного неравенства следует, что оператор A является сжимающим в пространстве V_0. Но тогда этот оператор будет иметь неподвижную точку $w(x,t)$. Эта неподвижная точка является решением краевой задачи $(1.1.20_{\varepsilon,\lambda})$, (1.1.21), (1.1.22), принадлежащим пространству V_0. А это и означает, что число λ принадлежит множеству Λ и далее — что множество Λ открыто.

Итак, множество Λ не пусто, открыто и замкнуто в метрическом пространстве $X = [0,1]$. Как уже говорилось выше, в этом случае множество Λ будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Но тогда краевая задача ($1.1.20_\varepsilon$), (1.1.21), (1.1.22) будет иметь решение $w^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_1. Покажем, что при выполнении включений $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ для семейства $\{w^\varepsilon(x,t)\}$ будут иметь место априорные оценки, равномерные по ε.

Вновь рассмотрим равенство (1.1.24), но теперь при $\lambda = 1$ и с функцией $w^\varepsilon(x,t)$. Интегрируя по частям в слагаемом, соответствующем произведению $f\Delta w^\varepsilon_\tau$ (по пространственным переменным), применяя к полученным интегралам неравенство Юнга и повторяя все остальные выкладки и рассуждения, получим, что для функций $w^\varepsilon(x,t)$ имеет место оценка (1.1.26), но теперь уже с постоянной M_1' в правой части, не зависящей от ε. Далее, переходя к продифференцированному по переменной t уравнению ($1.1.21_\varepsilon$) и повторяя вышеприведенные рассуждения для функции $w^\varepsilon_t(x,t)$, получим, что и для этой функции будет иметь место оценка вида (1.1.26) вновь с постоянной в правой части, не зависящей от ε.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega \left(w^\varepsilon_\tau + \Delta^2 w^\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 w^\varepsilon_\tau + c(x)w^\varepsilon\right)\left(\Delta^2 w^\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 w^\varepsilon_\tau\right) dxd\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega (f + \Phi)\left(\Delta^2 w^\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 w^\varepsilon_\tau\right) dxd\tau.$$

Следствием этого равенства и ранее установленных равномерных по ε оценок является неравенство

$$\int_0^t \int_\Omega \left[(\Delta^2 w^\varepsilon)^2 + \varepsilon^2(\Delta^2 w^\varepsilon_\tau)^2\right] dxd\tau + \int_\Omega \left[\Delta^2 w^\varepsilon(x,t)\right]^2 dx \le M_5$$

с постоянной M_5, определяющейся функциями $K_0(x,y,t)$ и $f(x,t)$, областью Ω и числом T.

Установленных оценок уже вполне достаточно для осуществления необходимой схемы предельного перехода.

Из полученных оценок, свойства рефлексивности гильбертова пространства и из компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(S)$ следует, что существуют последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, функции $w(x,t)$ и $w_0(x,t)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости

$$\varepsilon_m \to 0,$$

$$w^{\varepsilon_m}(x,t) \to w(x,t) \quad \textit{сильно в} \quad W_2^{4,1}(Q),$$

$$w_t^{\varepsilon_m}(x,t) \to w_t(x,t) \quad \textit{сильно в} \quad L_2(S),$$

$$\varepsilon_m \Delta^2 w_t^{\varepsilon_m}(x,t) \to w_0(x,t) \quad \textit{сильно в} \quad L_2(Q).$$

Покажем, что выполняется $w_0(x,t) \equiv 0$ в Q.

Пусть $\eta(x,t)$ есть бесконечно-дифференцируемая финитная в $\overline{Q}$ функция. Имеем

$$\varepsilon_m \int\limits_Q \Delta^2 w_t^{\varepsilon_m}(x,t)\eta(x,t)dxdt = -\varepsilon_m \int\limits_Q \Delta^2 w^{\varepsilon_m}(x,t)\eta_t(x,t)dxdt \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

(последняя сходимость вытекает из равномерной ограниченности семейства $\{\sqrt{\varepsilon_m}\Delta^2 w^{\varepsilon_m}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в $L_2(Q)$). Отсюда из плотности множества $C_0^{\infty}(\overline{Q})$ в пространстве $L_2(Q)$ и вытекает, что $w_0(x,t) \equiv 0$ в Q.

Установленные выше сходимости, условие (1.1.14) и тот факт, что функция $w_0(x,t)$ есть тождественно нулевая функция, означают, что для предельной функции $w(x,t)$ выполняются включения $w(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $w_t(x,t) \in L_2(S)$, и что функция $w(x,t)$ является решением краевой задачи (1.1.20)-(1.1.22) из требуемого класса.

Разрешимость вспомогательной краевой задачи доказана.

Положим

$$u(x,t) = (B^{-1}w)(x,t).$$

Из условия (1.1.14) следует, что для функции $u(x,t)$ будут выполняться включения $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$. Очевидно далее, что для функции $u(x,t)$ будут выполняться уравнение (1.1.5), начальное условие (1.1.2) и граничные условия (1.1.6) и (1.1.7). Все это и означает, что функция $u(x,t)$ будет решением рассматриваемой нелокальной задачи из требуемого класса.

Теорема доказана.

Краевая задача (1.1.20)-(1.1.22) выше названа автором "вспомогательной". Вместе с тем заметим, что полученный в работе результат о разрешимости этой задачи можно трактовать и как результат, имеющий самостоятельное значение для теории нагруженных [20, 64] уравнений.

Следующая теорема о разрешимости нелокальной краевой задачи 1.1 непосредственно будет использоваться для доказательства разрешимости обратной задачи 1.1, но ее также можно трактовать как результат, который имеет самостоятельное значение для теории нагруженных уравнений.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Определим оператор B_λ:

$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda \int\limits_\Gamma K_0(x,y,t)v(y,t)ds_y.$$

Теорема 1.1.2 *Пусть выполняются условие (1.1.13), а также условия: для всех* t *из отрезка* $[0,T]$ *оператор* B_λ *непрерывно обратим как оператор из* $L_2(\Gamma)$ *в* $L_2(\Gamma)$ *и для любой функции* $v(x)$ *из* $L_2(\Gamma)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$ *и* $\lambda \in [0,1]$ *выполняются неравенства*

$$k_1\|v\|_{L_2(\Gamma)} \le \|B_\lambda v\|_{L_2(\Gamma)} \le k_2\|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k_i = const, \quad 0 < k_1 < k_2; \tag{1.1.14$_\lambda$}$$

$$\frac{\partial K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \quad y \in \Gamma; \tag{1.1.29}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \nu_{x_i} \le -m_0 < 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{1.1.30}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача 1.1 имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in$

$W_2^{4,1}(Q)$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методами регуляризации и продолжения по параметру. Ввиду повторяемости процедуры некоторые рассуждения и выкладки приведем в сокращенном виде.

Для положительного числа ε и для числа λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t + \Delta^2 u + \varepsilon \Delta^2 u_t + c(x)u = f \tag{1.1.5$_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условие (1.2.2), а также условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{1.1.6$'$}$$

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = \lambda \int\limits_\Gamma K_2(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{1.1.7$_\lambda$}$$

Покажем, что для всевозможных решений этой задачи, принадлежащих пространству V_0, имеют место необходимые априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u_\tau + \Delta^2 u + \varepsilon\Delta^2 u_\tau + c(x)u)\left(\mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i\tau} + \Delta^2 u_\tau\right) dx d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \left(\mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i\tau} + \Delta^2 u_\tau\right) dx\, d\tau,$$

в котором μ есть положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{\mu}{2}\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n x_i \nu_{x_i}\right) u_\tau^2\, ds_x\, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\Delta^2 u(x,t)]^2\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\, dx\, d\tau +$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta^2u_\tau)^2\,dx\,d\tau=\frac{\mu}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dx\,d\tau-\mu\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\sum_{i=1}^n x_iu_{x_i\tau}\right)\Delta^2u\,dx\,d\tau-$$

$$-\varepsilon\mu\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\sum_{i=1}^n x_iu_{x_i\tau}\right)\Delta^2u_\tau\,dx\,d\tau-\mu\int\limits_0^t\int\limits_\Omega c(x)\left(\sum_{i=1}^n x_iw_{x_i\tau}\right)w\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega c(x)u_\tau\Delta^2u\,dx\,d\tau-\int\limits_\Omega c(x)u(x,t)\Delta^2u(x,t)\,dx+$$

$$+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau(x,\tau)\left[\int\limits_\Gamma K_2(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,ds_y+\right.$$

$$\left.+\int\limits_\Gamma K_{2\tau}(x,y,\tau)u(y,\tau)\,ds_y\right]\,ds_x\,d\tau+$$

$$+\mu\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f\left(\sum_{i=1}^n x_iu_{x_i\tau}\right)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f\Delta^2u_\tau\,dx\,d\tau. \qquad (1.1.31)$$

Заметим, что из уравнения $(1.1.5_\varepsilon)$ следует, что имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dx\,d\tau\le C_1\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left[f^2+(\Delta^2u)^2+\varepsilon^2(\Delta^2u_\tau)^2\right]\,dx\,d\tau$$

с некоторой фиксированной постоянной C_1. Используя это неравенство, используя также неравенство Юнга, условие (1.1.30), выбирая число μ достаточно большим, учитывая далее, что число ε можно считать сколь угодно малым (меньшим некоторого наперед заданного числа ε_0), и, наконец, используя для функции $u(x,t)$ представление (1.1.17) и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи $(1.1.5_\varepsilon)$, (1.1.2), (1.1.6′), $(1.1.7_\lambda)$ выполняется априорная оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[u_\tau^2+(\Delta u_\tau)^2+\varepsilon(\Delta^2u_\tau)^2]\,dx\,d\tau+\int\limits_\Omega[\Delta^2u(x,t)]^2\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau^2\,ds_x\,d\tau\le C_2 \qquad (1.1.32)$$

с постоянной C_2, определяющейся функциями $K_2(x,y,t)$ и $f(x,t)$, областью Ω, числами T и ε.

Вновь определим числовое множество Λ (с сохранением обозначения, но с иным содержанием) как множество чисел из отрезка $[0,1]$, для которых задача $(1.1.5_\varepsilon)$, (1.1.2), (1.1.6′), $(1.1.7_\lambda)$ при фиксированном ε разрешима в пространстве V_0 для любой функции $f(x,t)$ из пространства

$L_2(Q)$. Это множество не пусто ($0 \in \Lambda$), из оценки (1.1.32) следует, что это множество замкнуто. Покажем, что из оценки (1.1.32) и из условия ($1.1.14_\lambda$) вытекает, что это множество открыто. Вновь пусть λ_0 есть точка множества Λ, $\lambda = \lambda_0 + \widetilde{\lambda}$. Далее, пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства V_0 такая, что $v(x,t) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения ($1.1.5_\varepsilon$) и такую, что для нее выполняются условия (1.1.2) и ($1.1.6'$), а также условие

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = \lambda_0 \int\limits_\Gamma K_2(x,y,t)u(y,t)\,ds_y + \widetilde{\lambda}\int\limits_\Gamma K_2(x,y,t)v(y,t)\,ds_y,\ (x,t) \in S. \tag{$1.1.7_{\lambda_0,v}$}$$

Покажем, что эта задача разрешима в пространстве V_0.

Определим функцию $\psi(x,t)$ как решение уравнения

$$\psi(x,t) = \lambda_0 \int\limits_\Gamma K_0(x,y,t)\psi(y,t)\,ds_y + \widetilde{\lambda}\int\limits_\Gamma K_0(x,y,t)v(y,t)\,ds_y.$$

Вследствие условия ($1.1.14_\lambda$) и принадлежности функции $v(x,t)$ пространству V_0, функция $\psi(x,t)$ определена корректно; более того, вследствие условия (1.1.3) для функции $\psi(x,t)$ будет выполняться включение $\psi(x,t) \in V_0$. В краевой задаче ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), ($1.1.7_{\lambda_0,v}$) перейдем от функции $u(x,t)$ к функции $\overline{u}(x,t)$, положив $\overline{u}(x,t) = u(x,t) - \psi(x,t)$. Очевидно, что для функции $\overline{u}(x,t)$ при выполнении для функции $u(x,t)$ условия ($1.1.7_{\lambda_0,v}$) будет выполняться условие ($1.1.4_{\lambda_0}$). Далее, для функции $\overline{u}(x,t)$ должно выполняться уравнение

$$\overline{u}_t + \Delta^2\overline{u} + \varepsilon\Delta^2\overline{u}_t + c(x)\overline{u} = f - \psi_t - \Delta^2\psi - \varepsilon\Delta^2\psi_t - c(x)\psi. \tag{$1.1.5'_\varepsilon$}$$

Если теперь рассмотреть краевую задачу ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), ($1.1.7_{\lambda_0,v}$), то, согласно определению множества Λ, она будет иметь решение $\overline{u}(x,t)$, принадлежащее пространству V_0. Обратно, положив $u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \psi(x,t)$, получим, что краевая задача ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), ($1.1.7_{\lambda_0,v}$) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_0. Вновь получаем, что эта задача порождает оператор A, переводящий пространство V_0 в себя, и что при малых $|\widetilde{\lambda}|$ этот оператор будет сжимающим. Неподвижная точка оператора A определит решение краевой задачи ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), ($1.1.7_\lambda$), что и даст открытость множества Λ.

Как и ранее, непустота, замкнутость и открытость множества Λ даст разрешимость краевой задачи ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), (1.1.7) в пространстве V_0 при фиксированном ε для любой функции $f(x,t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$.

Итак, краевая задача ($1.1.5_\varepsilon$), (1.1.2), ($1.1.6'$), (1.1.7) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_0. Пусть выполняется дополнительное условие $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Интегрируя по переменной τ в последнем слагаемом правой части равенства (1.1.31) (для функции $u^\varepsilon(x,t)$ и при $\lambda = 1$), получим, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеет место равномерная по ε априорная оценка (1.1.32). Этой оценки уже вполне достаточно для реализации схемы предельного перехода (см. окончание доказательства теоремы 1.1.1); предельная функция и будет решением нелокальной задачи 1.1 из требуемого класса.

Теорема доказана.

Если в уравнении (1.1.5) перейти от функции $u(x,t)$ к функции $w(x,t)$ (положив $w(x,t) = (Bu)(x,t)$), то получим, что при выполнении условий теоремы 1.1.2 краевая задача (1.1.20)-(1.1.22) (задача для нагруженного уравнения) будет иметь решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,1}(Q)$ и такое, что $w_t(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(S)$.

1.1.3 Разрешимость обратной задачи 1.1.

Доказанная выше теорема 1.1.2 дает возможность установить разрешимость изучаемой обратной задачи 1.1.

Теорема 1.1.3 *Пусть выполняются условия*

$$h(x,t) \in C^5(\overline{Q}), \quad c(x) \in C^4(\overline{\Omega}), \quad R(x) \in C(\overline{\Omega});$$

$$c(x) \geq c_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\left| \int\limits_\Gamma R(x) h(x,t)\, ds_x \right| \geq r_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T];$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S;$$

$$\sum_{i=1}^m x_i \nu_{x_i} \leq -m_0 < 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^4(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^4(\Omega))$, $\frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta f(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ *при* $(x,t) \in S$, *обратная задача 1.1 имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы имеем $K_0(x,y,t) = h_1(x,t)R(y)$, равенства (1.1.11) и (1.1.12) дают условия

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S; \tag{1.1.33}$$

$$\frac{\partial \Delta v(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta h_1(x,t)}{\partial \nu_x} \int\limits_\Gamma R(y) v(y,t)\, ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{1.1.34}$$

Пусть ε есть число из интервала $(0, \varepsilon_0)$ с некоторым фиксированным достаточно малым положительным числом ε_0. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$v_t + \Delta^2 v + c(x) v + \varepsilon \Delta^2 v_t = f_2(x,t) + h_2(x,t) \int\limits_\Gamma R(y) v(y,t)\, ds_y \tag{1.1.9$_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.1.2), (1.1.33), а также условие

$$\frac{\partial \Delta v(x,t)}{\partial \nu_x} = (1-\varepsilon) \frac{\partial \Delta h_1(x,t)}{\partial \nu_x} \int\limits_\Gamma R(y) v(y,t)\, ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{1.1.34$_\varepsilon$}$$

При выполнении условий теоремы эта задача имеет решение $v^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_0 — это нетрудно установить с помощью априорной оценки (1.1.32) и вновь метода продолжения по параметру (если вместо уравнения ($1.1.9_\varepsilon$) рассмотреть уравнение

$$v_t + \Delta^2 v + c(x)v + \varepsilon\Delta^2 v_t = f_2(x,t) + \lambda h_2(x,t)\int\limits_\Gamma R(y)v(y,t)\,ds_y).$$

Далее, при выполнении указанных в теореме требований на функцию $f(x,t)$ априорная оценка (1.1.32) для решений задачи ($1.1.9_\varepsilon$), (1.1.2), (1.1.33), ($1.1.34_\varepsilon$) будет выполняться и с постоянной в правой части, не зависящей от ε. Эта оценка позволит осуществить всю схему предельного перехода по ε и получить, что предельная функция $v(x,t)$ будет принадлежать пространству $W_2^{4,1}(Q)$ и для нее будет иметь место включение $v_t(x,t) \in L_2(S)$.

По найденной функции $v(x,t)$ найдем функцию $u(x,t)$ как решение задачи

$$\Delta^2 u(x,t) + c(x)u(x,t) = v(x,t),$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0,$$

(уточним, что вследствие условия $c(x) \geq c_0 > 0$ функция $u(x,t)$ определяется однозначно). Покажем, что найденная функция $u(x,t)$ и функция $q(t)$, определенная равенством

$$q(t) = \frac{1}{h_0(t)}\int\limits_\Gamma R(y)v(y,t)\,ds_y$$

дадут решение исходной обратной задачи (1.1.1)–(1.1.4).

Обозначим

$$w(x,t) = u_t(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + c(x)u(x,t) - f_1(x,t) - h_1(x,t)\int\limits_\Gamma R(y)v(y,t)\,ds_y.$$

Очевидно, что выполняются равенства

$$\Delta^2 w(x,t) + c(x)w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta w(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S.$$

Из этих равенств следует, что $w(x,t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. В свою очередь, это означает, что определенные выше функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1.1.1). Заметим, что для функции $u(x,t)$ автоматически выполняются условия (1.1.2) и (1.1.3).

Умножим уравнение (1.1.1) с найденными функциями $u(x,t)$ и $q(t)$ на функцию $R(x)$ и проинтегрируем по Г.

После несложных вычислений получим, что выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Gamma} R(x)u(x,t)\,ds_x\right) = 0.$$

Из этого равенства и из выполнения условия (1.1.2) следует, что для найденной функции $u(x,t)$ выполняется условие переопределения (1.1.4).

Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым в теореме классам очевидна.

Теорема полностью доказана.

Замечание. На самом деле функция $u(x,t)$ обладает большей гладкостью – это следует из того, что функция $v(x,t)$ принадлежит пространству $W_2^{4,1}(Q)$.

1. Для параболических уравнений порядка $2m$ вида

$$u_t + (-1)^m \Delta^{2m} u + cu = f(x,t) \tag{1.1.35}$$

нетрудно, действуя аналогично вышеизложенному, получить соответствующие теоремы о разрешимости нелокальных задач с условиями

$$\frac{\partial \Delta^p u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Gamma} K_p(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, \quad p = 0, \ldots, m-1.$$

2. Как в уравнениях (1.1.1) и (1.1.5), так и в уравнении (1.1.35) оператор Лапласа можно заменить более общим эллиптическим оператором второго порядка, в том числе с коэффициентами, зависящими от переменной t.

3. Условия гладкости на границу Γ области Ω, на функцию $K_0(x, y, t)$ можно ослабить.

4. Условия (1.1.10) для функции $f_1(x, t)$ и соответствующие условия теоремы 1.1.3 для функции $f(x, t)$ являются техническими, от них вполне можно отказаться.

1.2 Задача определения неизвестного внешнего воздействия при задании граничного переопределения в прямоугольной области

Пусть $f(x,t)$, $c(x,t)$, $h(x,t)$ есть функции, определенные в $\bar{D}$, функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\delta_i(t)(i = 0, 1, 2)$ заданы и определены при $t \in [0,T]$, $u_0(x)$ есть известная функция, определенная при $x \in [0, 1]$.

Постановки обратной и нелокальной задачи будут даны безотносительно друг к другу. Для нелокальной задачи будем рассматривать более общий случай.

Обратная задача 1.2: требуется найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связанные в прямоугольнике D уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1.2.1}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.2.2}$$

$$u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.2.3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.2.4}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{1.2.5}$$

Нелокальная задача 1.2: найти функцию $v(x,t)$ удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = f(x,t). \tag{1.2.6}$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$\begin{aligned} v_x(0,t) &= \alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_2(t)v(1,t) + \alpha_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_x(1,t) &= \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v(1,t) + \beta_0(t), \quad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned} v_{xxx}(0,t) &= \gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v(1,t) + \gamma_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_{xxx}(1,t) &= \delta_1(t)v(0,t) + \delta_2(t)v(1,t) + \delta_0(t), \quad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{1.2.9}$$

1.2.1 Редукция обратной задачи к нелокальной.

Проведем некоторые формальные построения.

Пусть выполняется условие

$$h(0,t) \neq 0.$$

Введем обозначения

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{f(0,t)h(x,t)}{h(0,t)}, \quad h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h(0,t)}.$$

В уравнении (1.2.1) положим $x = 0$ и из полученного равенства выразим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{h(0,t)}[u_{xxxx}(0,t) - f(0,t)].$$

Рассмотрим равенство, полученное из уравнения (1.2.1) подстановкой в него вычисленной функции $q(t)$:

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f_1(x,t) + h_1(x,t)u_{xxxx}(0,t).$$

Далее для простоты и удобства изложения выкладок и формулировки теоремы(чтобы избежать громоздких вычислений), будем считать, что $c(x,t) = c(t)$.

Продифференцируем полученное равенство четырежды по переменной x, получим уравнение

$$v_t + v_{xxxx} + c(t)v = f_{1xxxx}(x,t) + h_{1xxxx}(x,t)v(0,t), \tag{1.2.10}$$

где $v(x,t) = u_{xxxx}(x,t)$.

Обозначим

$$\alpha_0(t) = f_{1x}(0,t), \quad \beta_0(t) = f_{1x}(1,t), \quad \gamma_0(t) = f_{1xxxx}(0,t), \quad \delta_0(t) = f_{1xxxx}(1,t),$$

$$\alpha_1(t) = h_{1x}(0,t), \quad \beta_1(t) = h_{1x}(1,t), \quad \gamma_1(t) = h_{1xxx}(0,t), \quad \delta_1(t) = h_{1xxx}(1,t),$$

$$v_0(x) = f_{1xxxx}(x,0).$$

Из условий (1.2.2) и (1.2.3), а так же из полученного уравнения следует, что для функции $v(x,t)$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} v_x(0,t) &= \alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_x(1,t) &= \beta_2(t)v(0,t) + \beta_0(t), \quad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

$$\begin{aligned} v_{xxx}(0,t) &= \gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_{xxx}(1,t) &= \delta_2(t)v(0,t) + \delta_0(t), \quad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{1.2.13}$$

Получили нелокальную задачу для функции $v(x,t)$, разрешив которую, нетрудно будет далее установить разрешимость исходной обратной задачи.

1.2.2 Разрешимость нелокальной задачи 1.2.

Пусть V есть следующее линейное пространство

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(D), v_{xxt}(x,t) \in L_2(D)\}.$$

Норму в этом пространстве зададим естественным образом

$$\|v\|_V = (\|v\|^2_{W_2^{4,1}(D)} + \|v_{xxt}\|^2_{L_2(D)})^{\frac{1}{2}}.$$

Для сокращения формулировок и выкладок введем обозначения. А именно, положим

$$\eta_1(t) = (1+\varepsilon)\beta_1'(t) - \delta_1(t) - \alpha_2(t)c(0,t), \eta_2(t) = (1+\varepsilon)\beta_2'(t) - \delta_2(t) + c(1,t)\beta_2(t),$$

$$\eta_3(t) = \gamma_1(t) - (1+\varepsilon)\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)c(0,t), \eta_4(t) = \gamma_2(t) - (1+\varepsilon)\alpha_2'(t) + \beta_1(t)c(1,t),$$

$$\eta_5(t) = c(1,t)\beta_1'(t) - c(0,t)\alpha_2'(t),$$

где ε есть положительное число.

В дальнейшем будет существенно использоваться следующее интегральное неравенство:

$$w^2(y,t) \le \delta_0 \int_0^1 w_x^2(x,t)dx + \frac{4}{\delta_0}\int_0^1 w^2(x,t)dx, \tag{1.2.14}$$

в котором δ_0 есть произвольное положительное число, $y \in [0,1]$, $t \in (0,T)$.

Теорема 1.2.1 *Пусть выполняются включения:* $c(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\alpha_i(t) \in C^1([0,T])$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$, $\gamma_i(t) \in C^1([0,T])$, $\delta_i(t) \in C^1([0,T])(i=1,2)$. *А также условия согласования*

$$\alpha_0(0) = \beta_0(0) = \gamma_0(0) = \delta_0(0) = 0.$$

Кроме того пусть выполняются условия

$$\alpha_1(t)\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\zeta - \beta_2(t)\zeta^2 \geq 0, \quad (x,t) \in \bar{D}, \tag{1.2.15}$$

$$c_t(x,t) \leq 0 \textit{ при } \quad (x,t) \in \bar{D}, \tag{1.2.16}$$

$$\begin{gathered} c(x,t) - \tfrac{\delta}{\delta_0^2}[\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] \geq 0, \quad (x,t) \in \bar{D}, \\ c(x,t) - \tfrac{4}{\delta\delta_0^2}[\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] \geq 0, \quad (x,t) \in \bar{D}, \end{gathered} \tag{1.2.17}$$

с положительными числами δ, δ_0 *такими, что*

$$\delta^2\delta_0^2 \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{4\delta_0^2}{\delta^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда существует решение $v(x,t)$ *нелокальной задачи 1.2 такое, что* $v(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$.

Доказательство. Для доказательства разрешимости поставленной задачи применим метод регуляризации. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $v(x,t)$ удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v - \varepsilon v_{xxt} = f(x,t), \tag{1.2.6$_\varepsilon$}$$

и такую, что для неё выполняются условия (1.2.7) – (1.2.9).

Доказательство разрешимости этой задачи будет проведено ниже с помощью метода продолжения по параметру, решение же задачи (1.2.6), (1.2.7) – (1.2.9) будет получено с помощью предельного перехода. Поскольку и для применения теоремы о методе продолжения по параметру, и для последующего предельного перехода необходимы хорошие априорные оценки, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1[v_\tau+v_{xxxx}+c(x,\tau)v-\varepsilon v_{xx\tau}](v_\tau-v_{xx\tau})dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(x,\tau)(v_\tau-v_{xx\tau})dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (1.2.7) – (1.2.9), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2dxd\tau+(1+\varepsilon)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 c(x,t)v^2(x,t)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_\tau(x,\tau)v^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 c(x,t)v_x^2(x,t)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_\tau(x,\tau)v_x^2dxd\tau+$$

$$+(1+\varepsilon)\int\limits_0^t[\alpha_1(\tau)v_\tau^2(0,\tau)+[\alpha_2(\tau)-\beta_1(\tau)]v_\tau(1,\tau)v_\tau(0,\tau)-\beta_2(\tau)v_\tau^2(1,\tau)]d\tau=$$

$$=[\delta_1(t)v(0,t)+\delta_2(t)v(1,t)+\delta_0(t)]v_{xx}(1,t)-$$

$$-[\gamma_1(t)v(0,t)+\gamma_2(t)v(1,t)+\gamma_0(t)]v_{xx}(0,t)+\frac{1}{2}\eta_2(t)v^2(1,t)+\frac{1}{2}\eta_3(t)v^2(0,t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t[\eta_2'(\tau)-\beta_2'(\tau)c(1,\tau)]v^2(1,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^t[\eta_3'(\tau)-\alpha_1'(\tau)c(0,\tau)]v^2(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\eta_1(\tau)v(0,\tau)v_\tau(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t\eta_4(\tau)v(1,\tau)v_\tau(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t\eta_5(\tau)v(1,\tau)v(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [(1+\varepsilon)\beta_0'(\tau)-\delta_0(\tau)]v_\tau(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\gamma_0(\tau)-(1+\varepsilon)\alpha_0'(\tau)]v_\tau(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [\beta_1'(\tau)-\delta_1'(\tau)]v(0,\tau)v_{xx}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\beta_1(\tau)-\delta_1(\tau)]v_\tau(0,\tau)v_{xx}(1,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [\beta_2'(\tau)-\delta_2'(\tau)]v(1,\tau)v_{xx}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\beta_2(\tau)-\delta_2(\tau)]v_\tau(1,\tau)v_{xx}(1,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [\gamma_1'(\tau)-\alpha_1'(\tau)]v(0,\tau)v_{xx}(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\gamma_1(\tau)-\alpha_1(\tau)]v_\tau(0,\tau)v_{xx}(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [\gamma_2'(\tau)-\alpha_2'(\tau)]v(1,\tau)v_{xx}(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\gamma_2(\tau)-\alpha_2(\tau)]v_\tau(1,\tau)v_{xx}(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [\beta_0'(\tau)-\delta_0'(\tau)]v_{xx}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t [\gamma_0'(\tau)-\alpha_0'(\tau)]v_{xx}(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t \beta_0'(\tau)c(1,\tau)v(1,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \alpha_0'(\tau)c(0,\tau)v(0,\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_x(x,\tau)vv_{x\tau}dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(x,\tau)v_\tau dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(x,\tau)v_{xx\tau}dxd\tau.$$

Учитывая, что три последних слагаемых левой части данного равенства неотрицательны (из условий (1.2.15) и (1.2.16)), получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2dxd\tau+(1+\varepsilon)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx+$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 c(x,t)v^2(x,t)dx+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 c(x,t)v_x^2(x,t)dx+$$
$$+\tfrac{1}{2}\eta_2(t)v^2(1,t)+\tfrac{1}{2}\eta_3(t)v^2(0,t)\le|\Phi|,$$

где через Φ обозначена правая часть предыдущего равенства.

Применим к первым двум слагаемым в правой части неравенство Юнга, затем используем интегральные неравенства (1.2.14), получим следующую цепочку неравенств

$$
\begin{gathered}
|[\delta_1(t)v(0,t)+\delta_2(t)v(1,t)+\delta_0(t)]v_{xx}(1,t)+ \\
+[\gamma_1(t)v(0,t)+\gamma_2(t)v(1,t)+\gamma_0(t)]v_{xx}(0,t)| \leq \\
\leq \tfrac{\delta_0^2}{2}v_{xx}^2(1,t)+\tfrac{3}{2\delta_0^2}[\delta_1^2(t)v^2(0,t)+\delta_2^2(t)v^2(1,t)+\delta_0^2(t)]+\tfrac{\delta_0^2}{2}v_{xx}^2(0,t)+ \\
+\tfrac{3}{2\delta_0^2}[\gamma_1^2(t)v^2(0,t)+\gamma_2^2(t)v^2(1,t)+\gamma_0^2(t)] \leq \\
\leq \tfrac{\delta}{\delta_0^2}[\delta_1^2(t)+\delta_2^2(t)+\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)]\int\limits_0^1 v_x^2(x,t)dx+ \\
+\tfrac{4}{\delta_0^2\delta}[\delta_1^2(t)+\delta_2^2(t)+\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)]\int\limits_0^1 v^2(x,t)dx+ \\
+\delta_0^2[\delta\int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx+\tfrac{4}{\delta}\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx]+ \\
+\tfrac{3}{2\delta_0^2}[\delta_0^2(t)+\gamma_0^2(t)].
\end{gathered}
$$

Остальные слагаемые входящие в выражение Φ, с помощью неравенств Юнга и (1.2.14) будут подчиняться неотрицательным слагаемым левой части. Покажем это на примере седьмого слагаемого

$$
\begin{gathered}
|\int\limits_0^t \eta_1(\tau)v_\tau(1,\tau)v(0,\tau)d\tau| \leq \tfrac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t v_\tau^2(1,\tau)d\tau+\tfrac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^t \eta_1^2(\tau)v^2(0,\tau)d\tau \leq \\
\leq \tfrac{\delta^2 C}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau}^2+v_\tau^2)dxd\tau+\tfrac{C}{2\delta^2}\max_{t\in[0,T]}\eta_1^2(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_x^2+v^2)dxd\tau.
\end{gathered}
$$

Далее применяя все выше сказанное к правой части неравенства и используя лемму Гронуолла, получим оценку

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau+\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx+\int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx+ \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dxd\tau \leq \bar{N},
\end{gathered}
\tag{1.2.18}
$$

где $\bar{N}$ – постоянная зависящая только от исходных данных и числа ε.

Очевидно, что так же имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dxd\tau \leq \bar{N}.$$

Из полученных неравенств имеет место оценка

$$\|v\|_V \leq \bar{N}, \tag{1.2.19}$$

где $\bar{N}$ постоянная, зависящая только от исходных данных и числа ε.

Разрешимость задачи $(1.2.6_\varepsilon)$, $(1.2.7)-(1.2.9)$ доказывается с помощью теоремы о методе продолжения по параметру. Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $v(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения $(1.2.6_\varepsilon)$, удовлетворяющую условию $(1.2.9)$, а также условиям

$$\begin{aligned} v_x(0,t) &= \lambda[\alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_2(t)v(1,t)] + \alpha_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_x(1,t) &= \lambda[\beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v(1,t)] + \beta_0(t), \quad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{$1.2.7_\lambda$}$$

$$\begin{aligned} v_{xxx}(0,t) &= \lambda[\gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v(1,t)] + \gamma_0(t), \quad t \in (0,T), \\ v_{xxx}(1,t) &= \lambda[\delta_1(t)v(0,t) + \delta_2(t)v(1,t)] + \delta_0(t), \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{$1.2.8_\lambda$}$$

Обозначим через Λ множество всех чисел отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача разрешима в пространстве V при фиксированном ε, произвольных $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\delta_i(t)$ $(i = 0,1,2)$ удовлетворяющих условиям теоремы 1.2.1 и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(D)$. Множество Λ не пусто, поскольку число 0 принадлежит ему [102]. Доказательство открытости и замкнутости множества Λ вполне аналогично доказательству приведенному в §1.1. Тогда по теореме о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи $(1.2.6_\varepsilon)$, $(1.2.7_\lambda)$, $(1.2.8_\lambda)$, $(1.2.13)$ при $\lambda = 1$.

Далее получим оценки равномерные по ε. Повторим действия получения неравенства $(1.2.19)$ за исключением слагаемого в правой части, представляющего собой интеграл от функции $f(x,\tau)v_{xx\tau}$. Для этого слагаемого выполним интегрирование по частям по переменной τ. Применяя к возникшим интегралам неравенство Юнга, повторяя все остальные выкладки, проделанные ранее получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + \int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dx d\tau \le N_0,$$

где N_0 постоянная, зависящая только от исходных данных. Эта оценка позволяет перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в пределе получить требуемое решение.

Теорема доказана.

1.2.3 Разрешимость обратной задачи 1.2.

Рассмотрим упрощенную ситуацию: пусть $c(x,t) \equiv c(t)$ при $t \in [0,T]$.

Уточним, что $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)(i = 0, 2)$ - функции, полученные при редукции обратной задачи 1.2 к нелокальной, вид которых определен в пункте 1.2.1.

Теорема 1.2.2 *Пусть выполняются включения* $c(t) \in C^1([0,T])$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\alpha_i(t) \in C^1([0,T])$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$, $\gamma_i(t) \in C^1([0,T])$, $\delta_i(t) \in C^1([0,T])(i = 0, 2)$, $f_{1xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $f_{1xxxxt}(x,t) \in L_2(D)$, $h(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $h_{xxxx}(x,t) \in C(\bar{D})$, $h_{xxxxt}(x,t) \in C(\bar{D})$.

Далее, пусть выполняются условия

$$[\alpha_1(t) - \frac{1}{2}h_{1xxxx}^2(x,t)]\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\zeta - \beta_2(t)\zeta^2 \ge 0, \qquad (1.2.20)$$

$$h(0,t) \ne 0, \ \textit{при } t \in [0,T],$$

$$c(t) \ge c_0 > 0, \ \textit{при } t \in [0,T]. \qquad (1.2.21)$$

Тогда обратная задача 1.2 имеет решение $\{u(x,t), (t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q(t) \in L_2(D)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную нелокально-краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.2.10) и условиям (1.2.11)-(1.2.13).

Разрешимость нелокальной задачи (1.2.10)-(1.2.13) устанавливается аналогично разрешимости нелокальной задачи 1.2. Априорные оценки получаем точно также как и при доказательстве теоремы 1.2.1, отличие заключается лишь в подчиненном слагаемом $h_{xxxx}(t)v(0,t)$.

Покажем, что с помощью решения $v(x,t)$, можно построить решение исходной обратной задачи 1.2. Имеем

$$u_{xxxx}(x,t) = v(x,t), \tag{1.2.22}$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.2.23}$$

$$u_{xxx}(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.2.24}$$

$$u(0,t) = 0, t \in (0,T). \tag{1.2.25}$$

Из этих равенств находим $u(x,t)$.

Далее, положим

$$w(x,t) = v_t + v_{xxxx} + c(t)v - f(x,t).$$

Очевидно, что выполняются равенства

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x,t) = 0,$$

$$w(0,t) = 0,$$

$$w_x(0,t) = w_x(0,t) = 0,$$

$$w_{xxx}(1,t) = 0.$$

Следовательно $w(x,t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Другими словами, для определенной по решению функции $v(x,t)$ задачи (1.2.6), (1.2.7)-(1.2.9), $u(x,t)$ выполняется уравнение (1.2.1). Теперь, очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$, определенная равенством

$$q(t) = \frac{u_{xxxx}(0,t) - f(0,t)}{h(0,t)},$$

связаны в прямоугольнике D уравнением (1.2.1). Покажем, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие

$$u_{xxx}(0,t) = 0.$$

Продифференцируем уравнение (1.2.1) трижды по переменной x и положим $x = 0$, получим

$$u_{xxxt}(0,t) + c(t)u_{xxx}(0,t) = 0,$$

и так как $c(t) \geq c_0 > 0$, при $t \in [0,T]$ и условие (1.2.5), то $u_{xxx}(0,t) = 0$. Следовательно, для функции $u(x,t)$ выполняются условия (1.2.2)-(1.2.5), то есть построенные функции $u(x,t)$, $q(t)$ принадлежат требуемым классам и дают решение задачи (1.2.1)-(1.2.5). Теорема доказана.

В общем случае $c = c(x,t)$ вместо уравнения (1.2.10) появится уравнение с дополнительными слагаемыми $c_x(x,t)u_{xxx}$, $c_{xx}(x,t)u_{xx}$, $c_{xxx}(x,t)u_x$, $c_{xxxx}(x,t)u$. Тем самым задача нахождения функции $u(x,t)$ окажется не распадающейся на две независимые задачи, нахождения функции $v(x,t)$ по уравнению (1.2.10) и условиям (1.2.11)-(1.2.13) и далее нахождения функции $u(x,t)$ по уравнению (1.2.22) и условиям (1.2.23)-(1.2.25). Каких либо принципиальных затруднений общий случай не порождает, необходимые априорные оценки легко выводятся с помощью некоторых условий малости на величины $|c_x(x,t)|$, $|c_{xx}(x,t)|$, $|c_{xxx}(x,t)|$, $|c_{xxxx}(x,t)|$.

1.3 Задача восстановления неизвестного внешнего воздействия составного типа

Пусть $f(x,t), c(x,t), h_1(x,t), h_2(x,t)$ суть функции определенные в $\bar{D}$, $u_0(x)$ есть известная функция, определенная при $x \in [0,1]$.

Обратная задача 1.3: требуется найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ связанные в прямоугольнике D уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t), \tag{1.3.1}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.3.2}$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.3.3}$$

$$u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{1.3.5}$$

Далее, для простоты записи выкладок и формулировки теоремы введем некоторые обозначения:

$$v_0(x) = u_0''^2(x),$$

$$\tilde{h}(x,t) = \left(\frac{h_2(x,t)}{h_1(x,t)}\right)_x h_1(x,t), \quad \tilde{f}(x,t) = -\frac{h_{1x}(x,t)}{h_1(x,t)} f(x,t) + f_x(x,t),$$

$$c_1(x,t) = -\frac{h_{1x}(x,t)}{h_1(x,t)} - \frac{\tilde{h}_x(x,t)}{\tilde{h}(x,t)}, \quad c_2(x,t) = \left(-\frac{h_{1x}(x,t)}{h_1(x,t)\tilde{h}(x,t)}\right)_x \tilde{h}(x,t),$$

$$c_3(x,t) = c_1(x,t)c(x,t) + 2c_x(x,t),$$

$$c_4(x,t) = c_2(x,t)c(x,t) + c_1(x,t)c_x(x,t) + c_{xx}(x,t),$$

$$f_1(x,t) = \left(\frac{\tilde{f}(x,t)}{\tilde{h}(x,t)}\right)_x \tilde{h}(x,t),$$

$$N_1 = \int_0^1 v_0''^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 c(x,0)v_0^2(x)dx.$$

$$m_0 = \min(\frac{1}{4}, \frac{c_0}{2}),$$

$$N_2 = \max(\frac{1}{2m_0}(15C(\delta)\max_D c_1^2(x,t) + \max_D c^2(x,t)), \frac{15}{2m_0}\max_D c_2^2(x,t)),$$

$$N_3 = N_1 + \frac{15}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Теорема 1.3.1 *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_x(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $h_1(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $h_2(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $u_0(x) \in C^4([0,1])$.

Кроме того , пусть выполняются условия:

$$h_1(x,t) \neq 0, h_{2x}(x,t)h_1(x,t) - h_2(x,t)h_{1x}(x,t) \neq 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \bar{D},$$

$$c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leq 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \bar{D}, \tag{1.3.6}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{15}{2}\max_Q(c_1^2(x,t) + c_2^2(x,t)) \geq 0, \quad \textit{при } (x,t) \in \bar{D}. \tag{1.3.7}$$

Тогда обратная задача 1.3 имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{6,1}(D)$, $q_1(t) \in L_2((0,T))$, $q_2(t) \in L_2((0,T))$ *и при том единственное.*

Доказательство. Идея доказательства повторяет идею предыдущих параграфов, но вспомогательная задача имеет несколько иной вид. Отличается техника перехода от обратной задачи к нелокальной.

Выполним некоторые формальные построения. Разделим уравнение (1.3.1) на $h_1(x,t) \neq 0$ и продифференцируем по пространственной переменной x и снова умножим на $h_1(x,t)$. Получим уравнение:

$$u_{xt} + u_{xxxxx} + c_x(x,t)u + c(x,t)u_x - \tfrac{h_{1x}(x,t)}{h_1(x,t)}(u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u) =$$
$$= \tilde{f}(x,t) + \tilde{h}(x,t)q_2(t).$$

Разделим полученное уравнение почленно на $\tilde{h}(x,t) \neq 0$ и продифференцируем по пространственной переменной x и снова умножим на $\tilde{h}(x,t)$.

Получим уравнение, которое не содержит неизвестные параметры $q_1(t)$, $q_2(t)$:

$$u_{xxt} + u_{xxxxxx} + c(x,t)u_{xx} + c_1(x,t)u_{xxxxx} + c_2(x,t)u_{xxxx} +$$
$$+ c_3(x,t)u_x + c_4(x,t)u + c_1(x,t)u_{xt} + c_2(x,t)u_t = f_1(x,t).$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: найти функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ удовлетворяющие в прямоугольнике D уравнениям

$$v(x,t) = u_{xx}(x,t). \tag{1.3.8}$$

$$\begin{gathered} v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v + c_1(x,t)v_{xxx} + c_2(x,t)v_{xx} + \\ + c_3(x,t)u_x + c_4(x,t)u + c_1(x,t)u_{xt} + c_2(x,t)u_t = f_1(x,t). \end{gathered} \tag{1.3.9}$$

условиям (1.3.2), а также условиям

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.3.10}$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.3.11}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{1.3.12}$$

Разрешимость данной краевой задачи покажем с помощью метода продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$, тогда рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t), v(x,t)$ удовлетворяющие в прямоугольнике D уравнению (1.3.8) и уравнению

$$\begin{gathered} v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v + \lambda[c_1(x,t)v_{xxx} + c_2(x,t)v_{xx} + \\ + c_3(x,t)u_x + c_4(x,t)u + c_1(x,t)u_{xt} + c_2(x,t)u_t] = f_1(x,t). \end{gathered} \tag{1.3.9$_\lambda$}$$

Для доказательства разрешимости данной краевой задачи, нам потребуются "хорошие"априорные оценки. Покажем их наличие. Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (1.3.9$_\lambda$).

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 [v_\tau + v_{xxxx} + c(x,\tau)v + \lambda[c_1(x,\tau)v_{xxx} + c_2(x,\tau)v_{xx} +$$
$$+ c_3(x,\tau)u_x + c_4(x,\tau)u + c_1(x,\tau)u_{x\tau} + c_2(x,\tau)u_\tau]][v_\tau + v_{xxxx}]dxd\tau =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 f_1(x,\tau)[v_\tau + v_{xxxx}]dxd\tau.$$

Используя интегрирование по частям и условия (1.3.2), (1.3.10)-(1.3.12),получим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dxd\tau + \int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_\tau(x,\tau)v^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 c(x,t)v^2(x,t)dx =$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 [f_1(x,\tau) - \lambda[c_1(x,\tau)v_{xxx} + c_2(x,\tau)v_{xx} + c_1(x,\tau)u_{x\tau} + c_2(x,\tau)u_\tau]]\times$$
$$\times(v_\tau + v_{xxxx})dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 c(x,\tau)vv_{xxxx}dxd\tau + N_1.$$

Учитывая условия (1.3.6), следующие интегральные неравенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2 dxd\tau \le \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_x^2 dxd\tau \le \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2 dxd\tau,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxx}^2 dxd\tau \le \delta\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau + C(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2 dxd\tau.$$

и применяя неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dxd\tau + \int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \frac{c_0}{2}\int\limits_0^1 v^2(x,t)dx \le$$
$$\le [\frac{\delta_2^2}{2} + \delta_1^2 + \frac{5\delta}{2\delta_1^2}\max_D c_1^2(x,t)]\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dxd\tau +$$
$$+[\frac{5}{2\delta_1^2}(\max_D c_1^2(x,t) + \max_D c_2^2(x,t)) + \delta_1^2]\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau +$$
$$+[\frac{5C(\delta)}{2\delta_1^2}\max_D c_1^2(x,t) + \frac{1}{2\delta_2^2}\max_D c^2(x,t)]\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v^2 dxd\tau +$$
$$+\frac{5}{2\delta_1^2}\max_D c_2^2(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx}^2 dxd\tau + \frac{5}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau + N_1.$$

Далее δ_1^2, δ_2^2 положим равными $1/3$, и подбирая δ так, что бы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{4} - \frac{15}{2}\max_D(c_1^2(x,\tau))\delta \ge 0,$$

учитывая условие (1.3.7) и введенные обозначения получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xxxx}^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \frac{c_0}{2}\int\limits_0^1 v^2(x,t)dx \leq$$
$$\leq N_2(\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx}^2 dxd\tau) + N_3.$$

Используя, наконец, лемму Гронуолла, получаем, что следствием предыдущего неравенства будет априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{4,1}(D)} + \|v\|_{W_2^{4,1}(D)} \leq N\|f\|_{L_2(D)}, \tag{1.3.13}$$

где N зависит только от исходных данных.

Из полученной априорной оценки (1.3.13) и разрешимости краевой задачи при $\lambda = 0$ согласно теореме о методе продолжения по параметру разрешимой является и задача (1.3.8)-(1.3.12), (1.3.2).

Из построения, так как уравнение (1.3.9) является следствием уравнения (1.3.1), очевидно, что построенная функция $u(x,t)$ удовлетворяет и уравнению (1.3.1) и принадлежит требуемому классу. Функции $q_1(t)$, $q_2(t)$ также определяются однозначно по формулам:

$$q_1(t) = u_{xxxxxx}(0,t) + c_1(0,t)u_{xxxxx}(0,t) + c_2(0,t)u_{xxxx}(0,t) +$$
$$+c_3(0,t)u_x(0,t) + c_1(0,t)u_{xt}(0,t) - f_1(0,t),$$
$$q_2 = u_{xt}(0,t) + u_{xxxxx}(0,t) + c(0,t)u_x(0,t) -$$
$$-\frac{h_{1x}(0,t)}{h_1(0,t)}u_{xxxx}(0,t) - \tilde{f}(0,t) + \tilde{h}(0,t)q_2(t).$$

Выполнение условий (1.3.2)-(1.3.5) вполне очевидно.

Следовательно, построенные функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ и есть решение обратной задачи 1.3. Теорема доказана.

1.4 Исследование задачи восстановления неизвестного параметра в линейных параболических уравнениях высокого порядка методом Фурье

В данном параграфе рассматриваются задачи нахождения решений параболических уравнений четвертого порядка в ситуации, когда либо граничные данные, либо правая часть уравнения являются неизвестными. Помимо естественных краевых условий задаются также условия переопределения.

1.4.1 Задача восстановления граничных данных.

Пусть $c(x)$, $f(x,t)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $K(x)$ и $N(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Далее, пусть (l_1, l_2) есть одна из пар граничных операторов $l_1 u = u$, $l_2 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, либо $l_1 u = u$, $l_2 u = \Delta u$, либо $l_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $l_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$ (здесь и далее $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x, Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_n$).

Обратная задача 1.4.1: найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_t + \Delta^2 u + c(x) u = f(x,t), \tag{1.4.1}$$

и выполняются также условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1.4.2}$$

$$l_1 u(x,t) \mid_{(x,t)\in S} = q_1(t) h_1(x) \mid_{(x,t)\in S}, \quad l_2 u(x,t) \mid_{(x,t)\in S} = q_2(t) h_2(x) \mid_{(x,t)\in S}; \tag{1.4.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x) u(x,t) dx = 0, \quad \int\limits_{\Omega} N(x) u(x,t) dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{1.4.4}$$

Обратные задачи нахождения вместе с решением также неизвестных граничных данных изучались ранее в различных постановках — различных прежде всего по виду неизвестных данных и по типу условий переопределения. Ряд результатов о разрешимости таких задач можно найти в монографиях [1, 101, 2], статьях [54, 14, 15, 55, 124, 51].

С другой стороны, задачи для различных классов нестационарных дифференциальных уравнений с условиями в виде интегралов от решения (с весом) по пространственной области активно изучаются в последнее время – см. работы [29, 76, 47, 48, 75, 46, 43, 3, 4, 50]. В основном эти работы (а также другие, близкие к ним) относятся к параболическим и гиперболическим уравнениям второго порядка и одномерному случаю. Вместе с тем заметим, что в работах [124, 76, 50, 52] задачи с интегральными условиями трактовались именно как обратные задачи, но при этом рассматривались лишь некоторые специальные случаи обратной задачи 1.4.1.

По постановке изучаемая обратная задача 1.4.1 близка к задаче работы [124], по используемым же методам — к работе [52].

Проведем некоторые формальные построения.

Определим функцию $v_0(x,t)$ как решение уравнения (1.4.1), удовлетворяющее условию (1.4.2), а также условиям

$$l_1 u(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = l_2 u(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = 0. \tag{1.4.3$'$}$$

Далее, определим функции $\tilde{h}_j(x)$, $j=1,2$, как решения задач

$$\Delta^2 \tilde{h}_j + c(x)\tilde{h}_j = 0,$$

$$l_k \tilde{h}_j(x)\mid_{x\in\Gamma} = \delta_k^j h_j(x)\mid_{x\in\Gamma}, \quad j,k=1,2,$$

(δ_k^j — символ Кронекера).

Решение $u(x,t)$ обратной задачи 1.4.1 представим следующим образом

$$u(x,t) = v_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t),$$

с функцией $V(x,t)$, имеющей вид

$$V(x,t) = q_1(t)\tilde{h}_1(x) + q_2(t)\tilde{h}_2(x),$$

и с функцией $w(x,t)$, являющейся решением задачи

$$w_t + \Delta^2 w + c(x)w = -q_1'(t)\tilde{h}_1(x) - q_2'(t)\tilde{h}_2(x),$$

$$l_1 w(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = l_2 w(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = 0.$$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ семейство собственных функций задачи

$$\begin{gathered} \Delta^2 w + c(x)w = \lambda w, x \in \Omega, \\ l_1 w(x)\mid_{x\in\Gamma} = l_2 w(x)\mid_{x\in\Gamma} = 0, \end{gathered} \tag{1.4.5}$$

$\lambda_k, k = 1, \ldots$ — соответственно собственные числа.

Представим функции $\tilde{h}_j(x)$, $j = 1, 2$, рядами Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\tilde{h}_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} w_k(x).$$

Функцию $w(x,t)$ также представим рядом Фурье:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x); \tag{1.4.6}$$

неизвестные функции $c_k(t)$ здесь являются решениями задачи Коши

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = -a_{1k} q_1'(t) - a_{2k} q_2'(t),$$

$$c_k(0) = 0.$$

Положим

$$d_k(t) = c_k(t) + a_{1k} q_1(t) + a_{2k} q_2(t).$$

Потребуем, чтобы для функций $q_j(t)$, $j = 1, 2$, выполнялось условие

$$q_j(0) = 0$$

(заметим, что это условие соответствует естественному условию согласования для решений обратной задачи 1.4.1). Тогда функции $d_k(t)$ должны быть решением задачи Коши

$$d_k'(t) + \lambda_k d_k(t) = \lambda_k (a_{1k} q_1(t) + a_{2k} q_2(t)),$$

$$d_k(0) = 0.$$

Найдя функции $d_k(t)$, найдем далее функции $c_k(t)$:

$$c_k(t) = \lambda_k[a_{1k}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_1(\tau)d\tau + a_{2k}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_2(\tau)d\tau] - a_{1k}q_1(t) - a_{2k}q_2(t).$$

Зная функции $c_k(t)$, получаем представление функции $u(x,t)$ через известные величины и неизвестные коэффициенты $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$u(x,t) = v_0(x,t) + q_1(t)\tilde{h}_1(x) + q_2(t)\tilde{h}_2(x) - \sum_{k=1}^{\infty}[a_{1k}q_1(t) + a_{2k}q_2(t)]w_k(x) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[a_{1k}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_1(\tau)d\tau + a_{2k}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_2(\tau)d\tau]w_k(x). \tag{1.4.7}$$

Введем обозначения

$$\psi_1(t) = \int\limits_{\Omega} K(x)v_0(x,t)dx, \quad \psi_2(t) = \int\limits_{\Omega} N(x)v_0(x,t)dx,$$

$$\alpha_{1k} = \int\limits_{\Omega} K(x)w_k(x)dx, \quad \alpha_{2k} = \int\limits_{\Omega} N(x)w_k(x)dx, k = 1, 2, ...$$

$$R_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_{jk}\alpha_{ik}e^{-\lambda_k t}, \quad i,j = 1, 2.$$

Умножим равенство (1.4.7) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по области Ω. Учитывая (1.4.4), получим

$$\psi_1(t) + \int\limits_0^t R_{1,1}(t-\tau)q_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t R_{1,2}(t-\tau)q_2(\tau)d\tau = 0. \tag{1.4.8}$$

Аналогично, умножая равенство (1.4.7) на функцию $N(x)$ и интегрируя, получим соотношение

$$\psi_2(t) + \int\limits_0^t R_{2,1}(t-\tau)q_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t R_{2,2}(t-\tau)q_2(\tau)d\tau = 0. \tag{1.4.9}$$

Равенства (1.4.8) и (1.4.9) дают систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$, её разрешимость позволит найти функцию $u(x,t)$ — решение уравнения (1.4.1), для которого выполняются условия (1.4.2)-(1.4.4).

Обозначим через $\mathbf{R_0}$ матрицу с элементами $R_{i,j}(0)$, $i,j=1,2$.

Теорема 1.4.1 *Пусть выполняются условия*

$$c(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad c(x) \geq 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega},$$

$$K(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad N(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad h_j(x) \in W_2^4(\Omega), \quad j=1,2;$$

$$det\mathbf{R_0} \neq 0;$$

числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_{jk} \alpha_{ik}$ *абсолютно сходятся для* $i,j=1,2$, $p=1,2,3$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, *обратная задача 1.4.1 имеет решение* $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $q_2(t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений (1.4.8), (1.4.9). Используя стандартный переход от уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода (дифференцированием, что возможно), нетрудно убедиться, что при выполнении условий теоремы система (1.4.8), (1.4.9) имеет решение $\{q_1(t), q_2(t)\}$, и при том выполняются включение $q_i(t) \in W_2^1([0,T])$, $i=1,2$. Очевидно теперь, что функция $u(x,t)$, определенная равенством

$$u(x,t) = v_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t),$$

в котором функции $V(x,t)$ и $w(x,t)$ вычисляется через найденные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, будет искомым решением уравнения (1.4.1), для неё будет выполняться включение $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, и будут выполняться условия (1.4.2)-(1.4.4).

Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний:

1. Сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_{jk}\alpha_{ik}$ предполагает, что числа a_{ij} или α_{ij}(или их произведение) быстро убывают. Искомое убывание имеет место, например, в случае, когда функции $K(x)$ и $N(x)$ гладкие и обращаются в нуль на Γ вместе со своими производными нужного порядка.

2. Функции $K(x)$, $N(x)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ вполне могут зависеть и от переменной t. Соответствующие ряды в этом случае будут уже не числовыми а функциональными, для этих рядов естественным образом возникнут условия равномерной сходимости, прочие же выкладки лишь незначительно усложнятся.

1.4.2 Задачи восстановления правой части.

Пусть функции $f(x,t)$, $h(x,t)$, $K(x)$ — заданы и определены при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$. В данной части работы будем рассматривать уравнение:

$$u_t + \Delta^2 u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1.4.10}$$

Обратная задача 1.4.2:Найти функции $u(x,t), q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1.4.10) при выполнении для функции $u(x,t)$ однородных граничных условий следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\mid_{(x,t)\in S} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\mid_{(x,t)\in S} = 0 \tag{1.4.11}$$

начального условия (1.4.2) и интегрально-граничного переопределения

$$\int\limits_{\Gamma} K(x)u(x,t)ds_x = 0, t \in (0,T). \tag{1.4.12}$$

Обратная задача 1.4.3: Найти функции $u(x,t), q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1.4.10) при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

(1.4.2),(1.4.11) и условия внутреннего интегрального переопределения

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)dx = 0, t \in (0,T). \qquad (1.4.13)$$

Заметим, что обратная задача 1.4.2 для параболических уравнений высокого порядка ранее изучалась лишь в работе [90]. Обратная задача 1.4.3 изучалась ранее многими авторами, выделим здесь лишь монографии [127, 119, 110], статьи [35, 79]. В нашу работу исследование разрешимости обратной задачи 1.4.3 внесено лишь для того, чтобы представить условия её разрешимости в иных, нежели в указанных выше работах, терминах.

Вновь проведем некоторые формальные построения.

Представим функции $h(x,t)$ и $f(x,t)$, рядами Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)w_k(x).$$

Функцию $u(x,t)$ также представим рядом Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x),$$

неизвестные функции $c_k(t)$ здесь являются решениями задачи Коши

$$\begin{gathered} c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t) + q(t)h_k(t), \\ c_k(0) = 0. \end{gathered} \qquad (1.4.14)$$

Решая данную задачу, находим

$$c_k(t) = p_k(t) + \int\limits_0^t q(\tau)h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau.$$

Далее подставляя полученные значения функций $w_k(x)$ и $c_k(t)$ в представление компоненты $u(x,t)$ получим:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}[\int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau + \int\limits_0^t q(\tau)h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau]w_k(x). \quad (1.4.15)$$

Введем обозначения

$$\bar{h}_k = \max_{[0,T]} |h_k(t)|, \quad p_k(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau, \quad \bar{p}_k = \max_{[0,T]} |p_k(t)|,$$

$$b_k = \int\limits_\Gamma N(x) w_k(x) ds_x, \quad \phi(t) = \sum_{k=1}^\infty b_k p_k(t), \quad G(t,\tau) = \sum_{k=1}^\infty b_k h_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

$$\beta_k = \int\limits_\Omega N(x) w_k(x) dx, \quad \eta(t) = \sum_{k=1}^\infty \beta_k p_k(t), \quad H(t,\tau) = \sum_{k=1}^\infty \beta_k h_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

Умножим равенство (1.4.15) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по Γ. Учитывая (1.4.12), получим

$$\phi(t) + \int\limits_0^t q(\tau) G(t,\tau) d\tau = 0. \qquad (1.4.16)$$

Аналогично, умножая равенство(1.4.15) на $N(x)$ и интегрируя по Ω, учитывая (1.4.13), получим

$$\eta(t) + \int\limits_0^t q(\tau) H(t,\tau) d\tau = 0. \qquad (1.4.17)$$

Полученные уравнения (1.4.16), (1.4.17) являются интегральными уравнениями Вольтерра первого рода относительно функции $q(t)$, их разрешимость позволит найти функцию $u(x,t)$ — решение уравнения (1.4.10), для которого выполняются условия (1.4.2) и (1.4.11).

Теорема 1.4.2 *Пусть выполняются условия:*

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), G_t(t,\tau) \in C((0,T),(0,T)), \phi(t) \in C^1([0,T]);$$

$$|\sum_{k=1}^\infty b_k h_k(t)| \geq b_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^\infty |b_k| \bar{h}_k, \quad \sum\limits_{k=1}^\infty |b_k| \bar{p}_k, \quad \sum\limits_{k=1}^\infty |b_k| \bar{h}_k \lambda_k$ *сходятся абсолютно.*

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ существует решение $\{u(x,t), q(t)\}$ обратной задачи 1.4.2 такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,4}(Q)$, $q(t) \in L_2((0,T))$.

Теорема 1.4.3 *Пусть выполняются следующие условия:*

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \eta(t) \in C^1([0,T]), H_t(t,\tau) \in C((0,T),(0,T));$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k(t)| \geq d_0 > 0 \text{ } при \text{ } t \in [0,T];$$

числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{h}_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{p}_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{h}_k \lambda_k$ сходятся абсолютно.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ существует решение $\{u(x,t), q(t)\}$ обратной задачи 1.4.3 такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,4}(Q)$, $q(t) \in L_2((0,T))$.

Доказательство теорем 1.4.2 и 1.4.3 сводится к доказательству разрешимости интегральных уравнений (1.4.15) и (1.4.16) соответственно. При выполнении условий теорем 1.4.1 и 1.4.2, данные уравнения разрешимы (см., например [18]).

Дополнение

1. Аналогичные теоремам 1.4.1 и 1.4.2 результаты нетрудно получить и для параболических уравнений высокого порядка — например, для уравнений

$$u_t + (-1)^m \Delta^m u + c(x)u = f(x,t).$$

Для этих уравнений будем считать, что задана система $\{l_j\}_{j=1}^m$ граничных операторов с коэффициентами , не зависящими от переменной t и такие, что спектральная задача

$$w_t + (-1)^m \Delta^m w + c(x)w = \lambda w,$$

$$l_j w(x)\mid_{x\in\Gamma}=0,\quad j=1,2,...,m,$$

порождает полную в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ с соответствующими неположительными собственными числами λ_k, $k=1,2,....$

Уточним лишь, что для аналога обратной задачи 1.4.2 среди операторов $l_1,l_2,...,l_m$ не должен присутствовать оператор $lu=u$.

2. Во всех построениях оператор Δ можно заменить оператором L, имеющим вид

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

с гладкими в $\bar{\Omega}$ коэффициентами $b^{ij}(x)$.

3. Наряду с обратными задачами 1.4.2 и 1.4.3 нетрудно изучить и задачи с точечным переопределением — именно, с заданием условия $u(x_0,t)=0$ при $x_0\in\Gamma$ или $x_0\in\Omega$.

1.5 Линейные обратные задачи для параболического уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями Самарского-Ионкина.

В параграфе изучается вопрос разрешимости обратной задачи определения правой части параболического уравнения четвертого порядка с нелокальными граничными условиями (называемые в литературе условиями Самарского-Ионкина).

Рассмотрим прямоугольник $Q = \{(x,t) : x \in (-1,1), t \in (0,T), T < \infty\}$.

Далее, пусть $f(x,t)$, $h(x,t)$, $c(x,t)$ суть функции определенные в $\bar{Q}$, причем $c(x,t) = c(-x,t)$.

Обратная задача 1.5.1. Требуется найти функции $u(x,t)$, $q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1.5.1}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.5.2}$$

$$u_x(-1,t) - u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.5.3}$$

$$u(x,0) = 0, x \in (-1,1). \tag{1.5.4}$$

$$u(1,t) = 0, t \in (0,T), \tag{1.5.5}$$

Обратная задача 1.5.2. Требуется найти функции $u(x,t), q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением (1.5.1) при выполнении условий (1.5.2), (1.5.4), (1.5.5) и нелокального условия

$$u_x(-1,t) + u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) + u_{xxx}(1,t) = 0, t \in (0,T). \tag{1.5.6}$$

Здесь условия (1.5.2), есть граничные условия, (1.5.4) - начальное условие, (1.5.5) - условие переопределения, обусловленное наличием неизвестного параметра, (1.5.3), (1.5.6) - нелокальные условия Самарского-Ионкина.

Дифференциальные задачи с условиями типа (1.5.3), (1.5.6) возникли в 70-е годы в работах Ионкина Н.И. и Моисеева Е.И. [27, 28]. Краевые задачи для уравнений параболического типа высокого порядка с условиями Самарского-Ионкина исследовались в работах [111, 112, 113]. Обратные задачи в настоящей постановке пока не были исследованы никем.

Для исследования разрешимости обратной задачи 1.5.1 введем новую функцию $v(x,t)$ следующим образом

$$v(x,t) = u(x,t) + u(-x,t).$$

Имеют место следующие равенства:

$$v_x(-1,t) = v_x(1,t) = 0, v_{xxx}(-1,t) = v_{xxx}(1,t) = 0, t \in (0,T), \qquad (1.5.3')$$

$$v(x,0) = 0, x \in (-1,1), \qquad (1.5.4')$$

$$v(1,t) = v(-1,t) = 0, t \in (0,T), \qquad (1.5.2')$$

$$v_{xx}(1,t) = v_{xx}(-1,t), t \in (0,T). \qquad (1.5.5')$$

Учитывая вид функции $v(x,t)$, и условие четности младшего коэффициента $c(x,t) = c(-x,t)$ имеем уравнение:

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = f(x,t) + f(-x,t) + q(t)[h(x,t) + h(-x,t)].$$

Введем обозначения:

$$\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) + f(-x,t), \widetilde{h}(x,t) = h(x,t) + h(-x,t).$$

Рассмотрим вспомогательную обратную задачу: найти функции $v(x,t)$, $q(t)$ удовлетворяющие в прямоугольнике Q уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = \widetilde{f}(x,t) + q(t)\widetilde{h}(x,t), \qquad (1.5.1')$$

при выполнении для функции $v(x,t)$ условий $(1.5.2') - (1.5.4')$.

Если выполнены следующие условия:

А) функции $\widetilde{f}_{xxxx}(-1,t)$,$\widetilde{f}_{xxxx}(1,t)$ принадлежат пространству $C([0,T])$;

Б) функции $\widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{f}_t(x,t)$, $\widetilde{f}_{xxxx}(x,t)$, $\widetilde{f}_{xxxxt}(x,t)$, $\widetilde{h}(x,t)$, $\widetilde{h}_{xxxx}(x,t)$,

$\widetilde{h}_{xxxxt}(x,t)$ принадлежат пространству $L_2(Q)$;

В) $\widetilde{h}(0,t) \neq 0, t \in [0,T]$;

Г) $c(x,t) \geq c_0 > 0, (x,t) \in \bar{Q}$,

тогда для обратной задачи $(1.5.1') - (1.5.4')$ выполняются все условия теоремы 1.2.2, а следовательно она имеет решение, причем $v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q(t) \in L_2(Q)$.

Таким образом обратная задача 1.5.1 сводится к решению краевой задачи: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике Q уравнению (1.5.1), условиям (1.5.2), (1.5.4), (1.5.5) и условию $(1.5.5')$.

Для исследования разрешимости обратной задачи 1.5.2, введем новую функцию $v(x,t)$ следующим образом

$$v(x,t) = u(x,t) - u(-x,t).$$

По аналогии с предыдущим рассуждением, имеют место равенства $(1.5.2') - (1.5.4')$

$$v_{xx}(1,t) = -u_{xx}(-1,t), t \in [0,T]. \tag{1.5.5''}$$

Учитывая вид функции $v(x,t)$, и условие четности младшего коэффициента $c(x,t) = c(-x,t)$ имеем уравнение:

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = f(x,t) + f(-x,t) + q(t)[h(x,t) + h(-x,t)].$$

Введем обозначения:

$$\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) + f(-x,t), \widetilde{h}(x,t) = h(x,t) + h(-x,t).$$

Опять приходим к вспомогательной обратной задаче $(1.5.1') - (1.5.4')$.

Глава 2

Нелинейные обратные задачи для параболического уравнения высокого порядка

В этой главе исследуется разрешимость нелинейных обратных задач для уравнения параболического типа высокого порядка. Например, в параграфе 2.1, помимо неизвестной функции в задаче, также неизвестным является параметр при производной по времени. Нелинейные обратные задачи для параболических уравнений в различных постановках исследовались в многочисленных работах; как наиболее близкие к тематике данной главы можно отметить монографии [127, 119, 110, 120, 122], статьи [42, 123, 41, 109, 11, 12, 24, 69]. В перечисленных работах рассматривались нелинейные обратные задачи для параболических уравнений второго порядка. Нелинейные же обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка, наоборот, изучены сравнительно мало - см. работы [33, 31, 34]. Отметим, что в цитированных работах изучались нелинейные обратные задачи в иных, нежели в настоящей работе, постановках и на основе иных подходов.

2.1 Обратная задача с неизвестным параметром при производной по времени

Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $K(x)$, $c(x,t)$ - известны и заданы при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.1.1: найти функции $u(x,t)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике D уравнением

$$p(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{2.1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ начального условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{2.1.2}$$

краевых условий

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.1.3}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.1.4}$$

а также условия переопределения

$$\int\limits_0^1 K(x)u(x,t)dx = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.1.5}$$

Обратная задача 2.1.2: найти функции $u(x,t)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике D уравнением (2.1.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.1.2), (2.1.3), (2.1.5), а также условий

$$u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.1.6}$$

Для простоты изложения дальнейших выкладок введем некоторые обозначения. Здесь и далее считаем, что функция $c(x,t)$ представима в виде $c(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x,t)$.

Пусть p_0, p_1, μ_0 — положительные числа, роль которых будет объяснена ниже. Положим

$$\bar{u}(x,t) = [\psi_1(t) + \varphi_1(t) - 2\psi_0(t) + 2\varphi_0(t)]x^3 +$$

$$+[3\psi_0(t)-3\varphi_0(t)-2\varphi_1(t)-\psi_1(t)]x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t),$$

$$w_0(x)=u_0(x)-\bar{u}(x,0),\quad a(x,t)=K^{(4)}(x)+c(x,t)K(x),$$

$$F(t)=\frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 K(x)f(x,t)dx-\frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 c(x,t)\bar{u}(x,t)K(x)dx,$$

$$\varphi(t,v)=\int\limits_0^1 K(x)v_{xxxx}(x,t)dx+\int\limits_0^1 K(x)c(x,t)v(x,t)dx,$$

$v(x,t)$ – заданная функция,

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)-c(x,t)\bar{u}(x,t)-F(t)\bar{u}_t(x,t),$$

$$M_0=p_1\mu_0,\quad M_1=\max_{0\le t\le T}\int\limits_0^1 a^2(x,t)dx,$$

$$m_1=\max_{\bar{D}}|\bar{u}_t(x,t)|,\quad m=\max_{\bar{D}}|c^2(x,t)|,\quad m_2=\max_{\bar{D}}|c_2(x,t)|,$$

$$C=max(\frac{m}{p_0},\frac{M_1}{\mu_0^2p_0}),$$

$$K_1=\frac{3}{p_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau+\int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx+\int\limits_0^1 c_1(x,0)w_0^2(x)dx,$$

$$K_2=\frac{3m_1^2M_1}{p_0\mu_0^2}+\frac{3m_2^2}{p_0},\quad R_1=[K_1M_1exp(K_2T)]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.1.1 *Пусть выполняются включения* $f(x,t)\in L_2(D)$, $c(x,t)\in C^1(\bar{D})$, $c_2(x,t)\in C^2(\bar{D})$, $\mu(t)\in C^1([0,T])$, $K(x)\in C^4([0,1])$, $\varphi_0(t)\in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t)\in C^1([0,T])$, $\psi_0(t)\in C^1([0,T])$, $\psi_1(t)\in C^1([0,T])$, $u_0(x)\in W_2^4((0,1))$.

Кроме того, пусть выполняются условия:

$$|\mu'(t)|\ge\mu_0>0 \text{ при } t\in[0,T],\quad F(t)\ge p_0+p_1 \text{ при } t\in[0,T],$$
$$c_1(x,t)\ge 0,\quad c_{1t}(x,t)\le 0 \text{ при } (x,t)\in\bar{D}, \tag{2.1.7}$$

$$R_1 \le M_0,$$

$$\int\limits_0^1 K(x)u_0(x)dx = \mu(0), \qquad (2.1.8)$$

$$K(0) = K(1) = K'(0) = K'(1) = 0, \qquad (2.1.9)$$

а так же условия согласования

$$u_0(0) = \varphi_0(0), \quad u_0(1) = \psi_0(0), \quad u_0'(0) = \varphi_1(0), \quad u_0'(1) = \psi_1(0).$$

Тогда обратная задача 2.1.1 имеет решение $u(x,t)$, $p(t)$ *,такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $p(t) \in L_\infty((0,T))$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$[\frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 K(x)f(x,t)dx - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,u)]u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) \quad (2.1.10)$$

и условиям (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4).

Решение данной задачи будем искать в виде $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + w(x,t)$. Тогда для определения функции $w(x,t)$ получим новую краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \quad (2.1.1')$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in (0,1), \qquad (2.1.2')$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \qquad (2.1.3')$$

$$w_x(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \qquad (2.1.4')$$

Определим срезывающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, \text{если } |\xi| \le M_0, \\ M_0, \text{если } \xi > M_0, \\ -M_0, \text{если } \xi < -M_0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)} G(\varphi(t,w))]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \tag{2.1.1$_G$}$$

и краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения (2.1.1$_G$) и такую, что для нее выполняются условия (2.1.2$'$), (2.1.3$'$), (2.1.4$'$).

Для доказательства разрешимости этой задачи воспользуемся методом линеаризации и методом продолжения по параметру.

Пусть $\lambda \in [0,1]$, $v(x,t)$ есть заданная функция из пространства $W_2^{4,1}(D)$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)} G(\varphi(t,v))]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{\lambda}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \tag{2.1.1$_{G,v,\lambda}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1.2$'$), (2.1.3$'$), (2.1.4$'$).

Поскольку, и для метода продолжения по параметру, и для метода неподвижной точки необходимы "хорошие" априорные оценки, то покажем их наличие.

В дальнейшем систематически будет использоваться неравенство

$$\int_0^1 w^2(x,t)dx \le \int_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx, \tag{2.1.11}$$

справедливое при выполнении условий (2.1.3$'$) и (2.1.4$'$).

Рассмотрим следующее равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1\{[F(\tau)-\tfrac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,v))]w_\tau+w_{xxxx}+c(x,\tau)w\}w_\tau dxd\tau=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1[\bar f(x,\tau)+\tfrac{\lambda}{\mu'(\tau)}\varphi(\tau,w)\bar u_\tau]w_\tau dxd\tau,$$

являющееся следствием уравнения ($2.1.1_{G,v,\lambda}$) .

Используя интегрирование по частям, условия (2.1.7), неравенство (2.1.11), неравенство Юнга и Гельдера, получим следующее неравенство

$$p_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2dxd\tau+\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx\le K_1+K_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Применяя далее лемму Гронуолла, получаем первые оценки:

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx\le K_1exp(K_2T), \tag{2.1.12}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau\le TK_1exp(K_2T), \tag{2.1.13}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2(x,\tau)dxd\tau\le\frac{K_2K_1T}{p_0}exp(K_2T)+K_1. \tag{2.1.14}$$

Рассмотрим теперь равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1\{[F(\tau)-\tfrac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,v))]w_\tau+w_{xxxx}+c(x,\tau)w\}w_{xxxx}dxd\tau=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1[\bar f(x,\tau)+\tfrac{\lambda}{\mu'(\tau)}\varphi(\tau,w)\bar u_\tau]w_{xxxx}dxd\tau,$$

также являющееся следствием уравнения ($2.1.1_{G,v,\lambda}$).

Интегрирование по частям, неравенство Юнга и оценки (2.1.12) – (2.1.14), позволяют из этого равенства вывести оценку

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,\tau)dxd\tau\le M,$$

с постоянной M, определяющейся функциями $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ и числом T.

Из полученных оценок следует, что норма функции $w(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(D)$ ограничена постоянной, зависящей только от исходных данных.

$$\| w \|_{W_2^{4,1}(D)} \leq K_0. \tag{2.1.15}$$

Из доказанной оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует, что задача $(2.1.1_{G,v,\lambda}), (2.1.2'), (2.1.3'), (2.1.4')$ разрешима при $\lambda = 1$ (см., например, [100]).

Рассмотрим уравнение

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t. \tag{$2.1.1_{G,v}$}$$

Краевая задача $(2.1.1_{G,v}), (2.1.2'), (2.1.3'), (2.1.4')$ порождает оператор $\Phi(v)$, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(D)$ решение $w(x,t)$, принадлежащее этому же пространству. Покажем, что данный оператор имеет неподвижные точки.

Пусть R_0 есть число такое, что $R_0 \geq K_0$, и пусть B есть множество:

$$B = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(D), \quad v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0,$$
$$\|v(x,t)\|_{W_2^{4,1}(D)} \leq R_0\}.$$

Пусть $v(x,t) \in B$, тогда из полученных априорных оценок и выбора числа R_0 следует, что оператор Φ переводит множество B в себя.

Покажем непрерывность оператора Φ на множестве B. Пусть последовательность функций $\{v_n(x,t)\}$ сходится к функции $\bar{v}(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(\bar{D})$, функции $w_n(x,t)$ и $\bar{w}(x,t)$ есть соответственно образы функций $v_n(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$ при действии оператора Φ, $W_n(x,t)$ есть функция $w_n(x,t) - \bar{w}(x,t)$.

Для функций $w_n(x,t)$ и $\bar{w}(x,t)$ выполняется оценка (2.1.15). Функции

$W_n(x,t)$ представляют собой решения краевой задачи:

$$[F(t)-\tfrac{1}{\mu(t)}G(\varphi(t,\bar{v}))]W_{nt}+W_{nxxxx}+c(x,t)W_n=$$
$$=[G(\varphi(t,v_n))-G(\varphi(t,\bar{v}))]\tfrac{w_{nt}}{\mu'(t)}+\tfrac{\bar{u}_t}{\mu'(t)}\varphi(t,W_n),$$
$$W_n(x,0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$W_n(0,t)=W_n(1,t)=W_{nx}(0,t)=W_{nx}(1,t)=0,\quad t\in(0,T).$$

Повторяя доказательство оценки (2.1.15), получаем, что для функции $W_n(x,t)$ выполняется неравенство

$$\|W_n\|^2_{W_2^{4,1}(D)}\le N_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1[G(\varphi(t,v_n))-G(\varphi(t,\bar{v}))]^2\tfrac{w_{nt}^2}{\mu'^2(t)}dxdt\le$$
$$\le\tfrac{N_1}{\mu_0^2}\max_{0\le t\le T}[G(\varphi(t,v_n))-G(\varphi(t,\bar{v}))]^2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w_{nt}^2dxdt.$$

В силу условия (2.1.9), функция $G(\varphi(t,v))$ будет удовлетворять условию Липшица и для функции $w_n(x,t)$ выполняется оценка (2.1.15) равномерно по n, то

$$W_n\|^2_{W_2^{4,1}(D)}\le N_2 vrai\max_{0\le t\le T}|\varphi(t,v_n)-\varphi(t,\bar{v})|^2\le$$
$$\le N_3 vrai\max_{0\le t\le T}\int\limits_0^1[v_n(x,t)-\bar{v}(x,t)]^2dx. \tag{2.1.16}$$

Полученное неравенство и сходимость последовательности $\{v_n(x,t)\}$ в пространстве $W_2^{4,1}(D)$ к функции $\bar{v}(x,t)$ означают, что оператор Φ непрерывен.

Покажем теперь, что оператор Φ компактен на множестве B.

Пусть $\{v_n(x,t)\}$ – ограниченное семейство функций из множества B, функции $w_n(x,t)$ – образы функций $v_n(x,t)$ при действии оператора Φ. Семейство функций $\{v_n(x,t)\}$ равномерно ограничено в $W_2^{4,1}(D)$. Тогда из этого семейства можно извлечь подпоследовательность $v_{n_k}(x,t)$ такую, что $v_{n_k}(x,t)$ сходится почти всюду и причем почти всюду равномерно к некоторой функции $v(x,t)$ [58, 59]. Из свойств рефлексивности гильбертова пространства следует, что можно еще раз перейти к подпоследовательности такой, что последовательности $v_{n_{k_l}x}(x,t)$, $v_{n_{k_l}xx}(x,t)$,

$v_{n_{k_l}xxx}(x,t)$, $v_{n_{k_l}xxxx}(x,t)$, $v_{n_{k_l}t}(x,t)$ сходятся слабо в пространстве $L_2(D)$ соответственно к функциям $v_x(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$, $v_{xxx}(x,t)$, $v_{xxxx}(x,t)$, $v_t(x,t)$. При этом функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям $v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,1) = v_x(1,t) = 0$ и включению $v(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$.

Обозначим через $w(x,t)$ образ функции $v(x,t)$ при действии оператора Φ. Повторяя доказательство непрерывности оператора Φ, получим, что последовательность образов $\{w_{n_{k_l}}(x,t)\}$ сходится к функции $w(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(D)$. А это и означает компактность оператора Φ.

Непрерывность и компактность оператора Φ на множестве B, а также тот факт, что оператор Φ переводит выпуклое замкнутое множество B в себя, означают, что выполняются все условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме оператор Φ имеет неподвижную точку $w(x,t)$, очевидно, являющуюся решением краевой задачи $(2.1.1_G), (2.1.2'), (2.1.3'), (2.1.4')$.

Далее заметим, что имеет место неравенство

$$|\varphi(t,w)| \leq \max_{0\leq t\leq T}(\int_0^1 a^2(x,t)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 w^2(x,t)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая неравенство (2.1.11) и оценку (2.1.15), получим

$$|\varphi(t,w)| \leq R_1.$$

Вследствие условия $R_1 \leq M_0$ получаем $G(\varphi(t,w)) = \varphi(t,w)$. Другими словами функция $w(x,t)$ является решением краевой задачи $(2.1.1')$, $(2.1.2')$, $(2.1.3')$, $(2.1.4')$.

Вернемся к функции $u(x,t)$: $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + w(x,t)$. Очевидно, что для функции $u(x,t)$ выполняются начальные и краевые условия (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4). Далее очевидно, что функция $u(x,t)$ будет решением уравнения (2.1.10).

Положим

$$p(t) = \frac{1}{\mu'(t)}\int_0^1 K(x)f(x,t)dx - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $p(t)$ в прямоугольнике D связаны уравнением (2.1.1). Умножим уравнение (2.1.1) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. После несложных выкладок придем к равенству

$$p(t)\Psi'(t) = 0, \tag{2.1.17}$$

$$\Psi(t) = \mu(t) - \int_0^1 K(x)u(x,t)dx.$$

Так как функция $p(t)$ строго положительна, то вследствие условия (2.1.8) $\Psi(t)$ обращается в нуль при $t = 0$. Тогда из равенства (2.1.17) следует, что для функции $u(x,t)$ будет выполняться условие (2.1.5). А это и означает, что построенные функции $u(x,t)$ и $p(t)$ дают решение обратной задачи 2.1.1.

Теорема доказана.

Теорема 2.1.2 *Пусть* $\{u_1(x,t), p_1(t)\}$, $\{u_2(x,t), p_2(t)\}$ – *два решения обратной задачи 2.1.1 такие, что функции* $u_1(x,t), u_2(x,t)$ *из пространства* $W_2^{4,1}(D)$, *функции* $p_1(t)$ *и* $p_2(t)$ *из пространства* $L_\infty((0,T))$. *Пусть так же выполнены следующие условия*

$$p_1(t) \geq p_0 > 0, \quad p_2(t) \geq p_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T],$$

и (2.1.9). Тогда эти решения совпадают.

Доказательство. Пусть $\{u_1(x,t), p_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), p_2(t)\}$ – решения обратной задачи 2.1.1 такие, что $p_1(t) \in L_\infty((0,T))$, $p_2(t) \in L_\infty((0,T))$, $u_1(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $u_2(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$. Тогда для них выполняются равенства

$$p_1(t)u_{1t} + u_{1xxxx} + c(x,t)u_1 = f(x,t),$$

$$p_2(t)u_{2t} + u_{2xxxx} + c(x,t)u_2 = f(x,t).$$

Обозначим $u(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$. Получим, что при $(x,t) \in D$ выполняется уравнение

$$p_1(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = (p_1(t) - p_2(t))u_{2t}, \qquad (2.1.18)$$

начальное условие

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1),$$

и граничные условия при $t \in (0,T)$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0.$$

Учитывая, что функции $p_i(t)$ имеют вид

$$p_i(t) = \frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 K(x)f(x,t)dx - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,u_i),$$

уравнение (2.1.18) можно записать следующим образом

$$p_1(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = \frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 a(x,t)u(x,t)dx \cdot u_{2t}(x,t).$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 (p_1(\tau)u_\tau + u_{xxxx} + c(x,\tau)u)u_\tau dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{1}{\mu'(t)}(\int\limits_0^1 a(y,\tau)u(y,\tau)dy) \cdot u_{2\tau}(x,\tau)u_\tau dxd\tau.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и неравенство Юнга, получим неравенство

$$p_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx \le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2 dxd\tau +$$
$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c^2(y,\tau)u^2 dxd\tau + \frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{u_{2\tau}^2}{\mu'^2(\tau)}(\int\limits_0^1 a(y,\tau)u(y,\tau)dy)^2 dxd\tau.$$

Положим $\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{p_0}{2}}$. Учитывая (2.1.11), получим неравенство

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx \le C\int\limits_0^t\int\limits_0^1((1+u_{2\tau}^2)dx\int\limits_0^1 u_{xx}^2 dx)d\tau.$$

Поскольку функция $\int\limits_0^1[1+u_{2t}^2(x,t)]dx$ суммируема на $[0,T]$, то из леммы Гроноулла следует $u(x,t)\equiv 0$, то есть $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ и $p_1(t)\equiv p_2(t)$.

Теорема доказана.

Далее, для формулировки и доказательства следующей теоремы, введем пространства и обозначения.

Пусть V_1 и V_2 есть пространства

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t)\in W_2^{4,1}(D), v_{xxxxt}(x,t)\in L_2(D),$$
$$v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \text{ при } t\in[0,T]\},$$
$$V_2 = \{v(x,t) : v(x,t)\in V_1, v_{xxxx}(x,t)\in V_1\};$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$\|v\|_{V_1} = (\|v\|^2_{W_2^{4,1}(D)} + \|v_{xxxxt}\|^2_{L_2(D)})^{\frac{1}{2}},$$
$$\|v\|_{V_2} = (\|v\|^2_{V_1} + \|v_{xxxx}\|^2_{V_1})^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$K_3 = (\int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \int\limits_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)dx + \frac{2}{p_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau)exp(\frac{2m_2^2}{p_0}),$$

$$K_4 = p_0\int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \frac{1}{p_0}\int\limits_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)dx + \frac{2}{p_0^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau + \frac{2m_2^2}{p_0^2}TK_3,$$

$$N_0 = \left[\frac{1}{2} + (\frac{2}{7\sqrt{5}}+1)(\frac{2}{7\sqrt{5}}+1+\frac{1}{\sqrt{3}})\right],$$

$$N_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1[u_0^{(6)}(x)]^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 c_1(x,0)[u_0^{(4)}(x)]^2dx + \frac{5}{p_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_{xxxx}^2(x,\tau)dxd\tau,$$

$$N_2 = N_1 + \tfrac{15}{2p_0} K_3 T \max_{\bar{D}}(c_x^2(x,t)) + \tfrac{20}{p_0} \max_{\bar{D}}(c_{xx}^2(x,t)) K_3 T +$$

$$+ \tfrac{15}{p_0} \max_{\bar{D}}(c_{xxx}^2(x,t)) T K_3 + \tfrac{5}{p_0} \max_{\bar{D}}(c_{xxxx}^2(x,t)) T K_3,$$

$$N_3 = \frac{15}{p_0} \max_{\bar{D}}(c_x^2(x,t)) N_0 + \frac{1}{p_0} \max_{\bar{D}}(c_2^2(x,t)), K_5 = 2N_2 exp(2N_3),$$

$$K_6 = \frac{2}{p_0}(N_2 + N_2 N_3 T exp(2N_3)), R_2 = (\int\limits_0^1 K^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}[\sqrt{K_5} + \sqrt{mK_3}].$$

Теорема 2.1.3 *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxxt}(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C^4(\bar{D})$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $K(x) \in C^1([0,T])$, $u_0(x) \in W_2^6((0,1))$, *а также условия*

$$|\mu'(t)| \geq \mu_0 > 0 \text{ } при \text{ } t \in [0,T],$$

$$F(t) \geq p_0 + p_1 \text{ } при \text{ } t \in [0,T],$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \psi_0(t) = \psi(t) = 0 \text{ } при \text{ } t \in [0,T],$$

$$R_2 \leq M_0,$$

$$\int\limits_0^1 K(x) u_0(x) dx = \mu(0);$$

$$f(0,t) = f(1,t) = f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0 \text{ } при \text{ } t \in [0,T].$$

$$u_0(0) = u_0(1) = u_0'(0) = u_0'(1) = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(4)}(1) = u_0^{(5)}(0) = u_0^{(5)}(1) = 0.$$

$$c_1(x,t) \geq 0, \quad c_{1t}(x,t) \leq 0 \text{ } при \text{ } (x,t) \in \bar{D}.$$

Тогда для обратной задачи 2.1.1 существует решение $\{u(x,t), p(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $p(t) \in L_\infty((0,T))$.

Доказательство. Вновь рассмотрим вспомогательную краевую задачу (2.1.10), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4). Её разрешимость установим с помощью метода срезки, метода регуляризации и метода неподвижной точки. Рассмотрим краевую задачу $(2.1.1_G), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4)$. Пусть $v(x,t)$ есть заданная функция из пространства V_2, ε есть фиксированное число. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))]u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u + \varepsilon u_{xxxxt} = f(x,t) \quad (2.1.1_{G,v,\varepsilon})$$

и условиям (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) (уточним, что здесь $\bar{u}(x,t) = 0$). Разрешимость задачи $(2.1.1_{G,v,\varepsilon})$, (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) в пространстве V_2 при $\varepsilon > 0$, $f(x,t) \in L_2(D)$ известна [102]. Докажем наличие «хороших» априорных оценок для решений этой задачи.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 ([F(\tau) - \tfrac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(\tau,v))]u_\tau + u_{xxxx} + c(x,\tau)u + \varepsilon u_{xxxx\tau})u_{xxxx\tau}dxd\tau =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 f(x,\tau)u_{xxxx\tau}dxd\tau.$$

Применим к левой части интегрирование по частям и условия теоремы, а к правой неравенство Юнга. Получим следующее неравенство

$$p_0 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2_{xx\tau}dxd\tau + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2_{xxxx}(x,t)dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2_{xxxx\tau}(x,\tau)dxd\tau \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)dx + \tfrac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2_{xxxx\tau}(x,\tau)dxd\tau + +\tfrac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T \int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+\tfrac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2_{xxxx\tau}(x,\tau)dxd\tau + \tfrac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 c^2(x,\tau)u^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Положим $\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Учитывая ограниченность функции $c(x,t)$, введенные выше обозначения и неравенство (2.1.8), получим неравенство:

$$\int\limits_0^1 u^2_{xxxx}(x,t)dx \leq \int\limits_0^1 [u_0^{(4)}(x)]^2dx + \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_0^T \int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau +$$

$$+\frac{2m}{\varepsilon}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2_{xxxx}(x,\tau)dxd\tau.$$

Используя лемму Гронуолла, получим оценки

$$\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx \leq C_1, \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,\tau)dxd\tau \leq TC_1,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)dxd\tau \leq C_2,$$

где C_1, C_2 постоянные зависящие от исходных данных и числа ε_0. Из полученных оценок следует, что функция $u(x,t)$ ограничена по норме пространства V_1, то есть выполняется неравенство

$$\|u(x,t)\|_{V_1} \leq C_0, \tag{2.1.19}$$

с постоянной C_0, определяющейся лишь исходными данными и числом ε_0.

Продифференцируем $(2.1.1_{G,v,\varepsilon})$ четырежды по x. Получим равенство

$$[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))]U_t + U_{xxxx} + c(x,t)U + \varepsilon U_{xxxxt} = H(x,t,u), \tag{2.1.20}$$

в котором

$$U(x,t) = u_{xxxx}(x,t),$$

$$H(x,t,u) = f_{xxxx}(x,t) - 3c_x(x,t)u_{xxx} - 4c_{xx}(x,t)u_{xx} - 3c_{xxx}(x,t)u_x - c_{xxxx}(x,t)u.$$

Заметим, что при $t \in [0,T]$ имеют место равенства

$$u_{xxxx}(0,t) = u_{xxxx}(1,t) = u_{xxxxx}(0,t) = u_{xxxxx}(1,t) = 0. \tag{2.1.21}$$

Повторяя выкладки, которые привели к оценке (2.1.19), нетрудно показать, что вследствие условий теоремы, равенств (2.1.21), а так же вследствие самой оценки (2.1.19) для решения уравнения (2.1.20) имеет место неравенство

$$\|U\|_{V_1} \leq C_0',$$

с постоянной C_0', определяющейся лишь исходными данными и числом ε. Из этого неравенства следует, что для решений краевой задачи $(2.1.1_{G,v,\varepsilon})$, (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) выполняется оценка

$$\|u\|_{V_2} \leq C_0'',$$

с постоянной C_0'', определяющейся лишь данными задачи и числом ε_0.

Пусть R_0 есть число такое, что $R_0 \geq C_0''$, множество B есть шар в пространстве V_2 радиуса R_0. Краевая задача ($2.1.1_{G,v,\varepsilon}$), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) порождает оператор Φ, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства V_2 решение $u(x,t)$, принадлежащее этому же пространству. Компактность и непрерывность оператора Φ показывается аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2.1.1. Согласно теореме Шаудера, существует функция $u(x,t)$ из пространства V_1 , являющаяся решением краевой задачи ($2.1.1_{G,v,\varepsilon}$), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4).

Покажем, что имеют место равномерные по ε оценки, позволяющие перейти к пределу. Рассмотрим следующее равенство:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1([F(\tau)-\tfrac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,u))]u_\tau+u_{xxxx}+c(x,\tau)u+\varepsilon u_{xxxx\tau})u_\tau dxd\tau=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(x,\tau)u_\tau dxd\tau.$$

Используя интегрирование по частям, неравенство Юнга и введенные выше обозначения, получим неравенство

$$\frac{p_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xx}^2dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2dxd\tau\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)dx+\frac{1}{p_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau+\frac{m_2^2}{p_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxd\tau.$$

Из этого равенства в следствие леммы Гронуолла получаем:

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx\leq K_3,\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2(x,t)dxd\tau\leq K_4,$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x,t)dx\leq K_3,\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u^2(x,t)dxd\tau\leq TK_3,\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_x^2(x,t)dxd\tau\leq TK_3.$$

Для получения следующей оценки рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения $(2.1.1_{G,u,\varepsilon})$:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1([F(\tau)-\tfrac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,u))]U_\tau+U_{xxxx}+cU+\varepsilon U_{xxxx\tau})U_\tau dxd\tau=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 H(x,\tau,u)U_\tau dxd\tau.$$

Применяя интегрирование по частям, неравенство Юнга, учитывая вид функции $H(x,t,u)$ и условия теоремы, получаем неравенство

$$\begin{gathered}\tfrac{p_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_\tau^2dxd\tau+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_{xx\tau}^2dxd\tau\le N_1+\\ +\tfrac{1}{p_0}\Bigg[\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_2^2U^2dxd\tau+15\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_x^2u_{xxx}^2dxd\tau+20\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xx}^2u_{xx}^2dxd\tau+\\ +15\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xxx}^2u_x^2dxd\tau+5\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xxxx}^2u^2dxd\tau\Bigg]\end{gathered}\tag{2.1.22}$$

Для оценки функции $u_{xxx}(x,t)$ воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^1 u_{xxx}^2(x,t)dx=u_{xx}(1,t)u_{xxx}(1,t)-u_{xx}(0,t)u_{xxx}(0,t)-\int\limits_0^1 u_{xx}u_{xxxx}dx.$$

Имеем соотношения

$$u_{xx}(1,t)=\int\limits_0^1(\int\limits_0^x y^2U(y,t)dy)dx,\, u_{xx}(0,t)=\int\limits_0^1(\int\limits_0^x(1-y)^2U(y,t)dy)dx,$$
$$u_{xxx}(1,t)=\int\limits_0^1(\int\limits_0^x y^2U(y,t)dy)dx-\int\limits_0^1(\int\limits_0^x(1-y)^2U(y,t)dy)dx+\int\limits_0^1 yU(y,t)dy,$$
$$u_{xxx}(0,t)=\int\limits_0^1(\int\limits_0^x y^2U(y,t)dy)dx-\int\limits_0^1(\int\limits_0^x(1-y)^2U(y,t)dy)dx-\int\limits_0^1(1-y)U(y,t)dy.$$

Из этих соотношений легко выводятся оценки для функций $u_{xx}(0,t)$, $u_{xxx}(0,t)$, $u_{xx}(1,t)$ и $u_{xxx}(1,t)$. Имея эти оценки, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_0^1 u_{xxx}^2(x,t)\le N_0\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx.\tag{2.1.23}$$

Возвращаясь к неравенству (2.1.22) и используя полученные выше оценки для функций $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и неравенство (2.1.23), имеем

$$\frac{p_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_\tau^2 dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_{x\tau}^2 dxd\tau\le N_2+N_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_{xx}^2 dxd\tau.$$

Лемма Гроноулла дает нам оценки

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2 dxd\tau\le K_5 T,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2 dxd\tau\le K_6.$$

Из выведенных оценок следует, что норма функции $u(x,t)$ в пространстве V_1 ограничена постоянной, независящей от ε:

$$\|u(x,t)\|_{V_1}\le K_0.$$

Теорема о рефлексивности гильбертова пространства означает существование последовательности $\{u_k(x,t)\}$ такой, что $u_k(x,t)\to u(x,t)$, $u_{kt}(x,t)\to u_t(x,t)$, $u_{kxxxx}(x,t)\to u_{xxxx}(x,t)$, $\sqrt{\varepsilon}u_{kxxxxt}\to 0$ слабо в L_2.

Переходя, если нужно, еще раз к подпоследовательности, можно считать, что для $\{u_k(x,t)\}$ выполняются сходимости $u_{kxx}(x,t)\to u_{xx}(x,t), u_{kx}(x,t)\to u_x(x,t), u_k(x,t)\to u(x,t)$ почти всюду в V_1 [59].

Вследствие непрерывности $G(\varphi(t,u))$ и указанных сходимостей почти всюду имеет место сходимость $G(\varphi(t,u_k))\to G(\varphi(t,u))$. Из всех данных сходимостей, следует, что функция $v(x,t)$, является решением уравнения

$$[F(t)-\frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))]u_t+u_{xxxx}+c(x,t)u=f(x,t)$$

и что для неё выполняются условия (2.1.2), (2.1.3),(2.1.4).

Из оценок для функций $u(x,t)$ и $u_{xxxx}(x,t)$ (при фиксированном t) следует, что имеет место неравенство

$$|\varphi(t,u)|\le R_2.$$

Учитывая условие $R_2 \leq M_0$, получаем $G(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u)$. Другими словами функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (2.1.10), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4).

Положим

$$p(t) = \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 K(x) f(x,t) dx - \frac{1}{\mu'(t)} \varphi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $p(t)$ в прямоугольнике D связаны уравнением (2.1.1). Умножим уравнение (2.1.1) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. После несложных выкладок придем к равенству

$$p(t)\Psi'(t) = 0.$$

Так как функция $p(t)$ строго положительная, функция $\Psi(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, то из предыдущего равенства следует, что для функции $u(x,t)$ будет выполняется условие (2.1.5). А это и означает, что построенные функции $u(x,t)$ и $p(t)$ дают решение обратной задачи 2.1.1.

Теорема доказана.

Для следующей теоремы положим

$$\bar{u}(x,t) = \varphi_0(t) + [\psi_0(t) - \frac{1}{6}\psi_1(t) - \frac{1}{3}\varphi_1(t) - \varphi_0(t)]x + \frac{1}{2}\varphi_1(t)x^2 + \frac{1}{6}[\psi_1(t) - \varphi_1(t)]x^3,$$

$$w_0(x) = u_0(x) - \bar{u}(x,0), M_3 = \int\limits_0^1 K_{xx}^2(x) dx, M_2 = \int\limits_0^1 K^2(x) dx,$$

$$K_7 = \int\limits_0^1 c_1(x,0) w_0^2(x) dx + \int\limits_0^1 w_0''^2(x) dx + \frac{4}{p_0} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau) dx d\tau,$$

$$K_8 = \frac{2m_2^2}{p_0} + \frac{4m_1^2}{p_0 \mu_0^2}[M_3 + mM_2], R_3 = 2[M_3 + mM_2] K_7 exp(K_8 T).$$

Теорема 2.1.4 *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C(\bar{D})$, $c_1(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $K(x) \in C^2([0,1])$,

$\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_1(t) \in C^1([0,T])$, $u_0(x) \in W_2^4(D)$. *Кроме того, пусть выполняются условия:*

$$|\mu'(t)| \geq \mu_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T], F(t) \geq p_0 + p_1 \text{ при } t \in [0,T],$$

$$c_1(x,t) \geq 0, \quad c_{1t}(x,t) \leq 0 \text{ при } (x,t) \in \bar{D},$$

$$\int\limits_0^1 K(x)u_0(x)dx = \mu(0);$$

$$K(0) = K(1) = 0,$$

$$u_0(0) = \varphi_0(0), \quad u_0(1) = \psi_0(0), \quad u_0''(0) = \varphi_1(0), \quad u_0''(1) = \psi_1(0),$$

$$R_3 \leq M_0.$$

Тогда для обратной задачи 2.1.2 существует решение $u(x,t)$, $p(t)$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $p(t) \in L_\infty((0,T))$.

Теорема 2.1.5 *Пусть* $\{u_1(x,t), p_1(t)\}$, $\{u_2(x,t), p_2(t)\}$ *– два решения обратной задачи 2.1.2 такие, что функции* $u_1(x,t), u_2(x,t)$ *из пространства* $W_2^{4,1}(D)$, *функции* $p_1(t)$ *и* $p_2(t)$ *из пространства* $L_\infty((0,T))$. *Пусть так же выполнены следующие условия*

$$p_1(t) \geq p_0 > 0, \quad p_2(t) \geq p_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T],$$

и $K(0) = K(1) = 0$. *Тогда эти решения совпадают.*

Доказательство теорем 2.1.4 и 2.1.5 проводятся вполне аналогично доказательству теорем 2.1.1. и 2.1.2.

Дополнение

1. Аналогичные результаты можно получить и для уравнений следующего вида
$$p(t)u_t + (-1)^{2m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} + c(x,t)u = f(x,t),$$
где m целое положительное число, $m > 2$.

2. Пусть $f(x,t) \equiv f_0 = const$, $K(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, $c(x,t) \equiv 0$, $\mu(t) = e^t + \bar{\mu}$, $u_0(x) = x + 1$, $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = 1$, $\psi_0(t) = 2$, $\psi_1(t) = 1$. Нетрудно проверить, что можно указать положительные числа f_0 и $\bar{\mu}$ такие, для которых выполняются все условия теоремы 2.1.1.

Аналогично можно построить примеры доказывающие непустоту множества исходных данных для выполнения теорем 2.1.3 и 2.1.4.

2.2 Обратная задача с неизвестным коэффициентом при решении

В прямоугольнике D рассмотрим уравнение

$$u_t + u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \tag{2.2.1}$$

где $f(x,t)$ известная функция, условия на которую будут уточнятся далее, функция же $q(t)$ наряду с решением $u(x,t)$ подлежат определению.

Пусть функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $u_0(x)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$ заданы и определены при $x \in [0;1]$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.2.1: найти функции $\{u(x,t), q(t)\}$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению (2.2.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.2.2}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.2.3}$$

начального условия

$$u(x,0) = u_0(x), x \in (0,1) \tag{2.2.4}$$

и условия переопределения

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.2.5}$$

Обратная задача 2.2.2: найти функции $\{u(x,t), q(t)\}$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению (2.2.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий (2.2.2) и

$$u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.2.6}$$

а также начального условия (2.2.4) и условий переопределения (2.2.5).

Пусть V_1 есть следующее пространство

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(D), v_{xxxxt}(x,t) \in L_2(D)\}.$$

Норма в этом пространстве определяется естественным образом

$$\|v\|_{V_1} = (\|v\|^2_{W_2^{4,1}(D)} + \|v_{xxxxt}\|^2_{L_2(D)})^{\frac{1}{2}}.$$

Для простоты изложения формулировок и выкладок введем некоторые обозначения.

Определим функции $\bar{u}(x,t)$, $F(t)$, $h(t)$, $\varphi(t,v)$, $f_1(x,t)$, $w_0(x)$:

$$\bar{u}(x,t) = [\varphi_1(t) + \psi_1(t) - 2\psi_0(t) + 2\varphi_0(t)]x^3 +$$

$$+[3\psi_0(t) - 3\varphi_0(t) - 2\varphi_1(t) - \psi_1(t)]x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

$$w_0(x) = u_0(x) - \bar{u}(x,0),$$

$$F(t) = \int\limits_0^1 K(x,t)f(x,t)dx,$$

$$\varphi(t,v) = \frac{1}{\mu(t)}[\int\limits_0^1 K_t(x,t)v(x,t)dx - \int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)v_{xx}(x,t)dx],$$

($v(x,t)$ - произвольная функция из пространства V_1),

$$h(t) = \frac{1}{\mu(t)}[F(t) - \mu'(t)] + \frac{1}{\mu(t)}\int\limits_0^1 K_t(x,t)\bar{u}(x,t)dx,$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \bar{u}_t(x,t) - \bar{u}(x,t)h(t).$$

Числа M, M_1, M_2, K_1, K_2, C_1, M_0 определяются следующим образом:

$$M_1 = \max_{0\le t\le T}(\int\limits_0^1 K_t(x,t)dx), M_2 = \max_{0\le t\le T}(\int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)dx), M = \max_D |\bar{u}(x,t)|,$$

$$K_1 = \int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx + 2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau + \varepsilon_0\int\limits_0^1 w_0^{(4)2}(x)dx,$$

$$C_1 = \frac{4M^2[M_1+M_2]}{\mu_0^2}, M_0 = \frac{M_1+M_2}{\mu_0}K_1 exp(C_1T),$$

$$K_2 = \int\limits_0^1 w_0^{(4)2}(x)dx + \max_{[0,T]} h'(t)TK_1 exp(C_1T) + h_0\int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx + M_0,$$

здесь μ_0, ε, ε_0 - некоторые положительные числа, роль которых будет определена ниже.

Теорема 2.2.1 *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $K(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $\mu(t) \in C([0,T])$, $\varphi_0(t) \in C([0,T])$, $\psi_0(t) \in C([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C([0,T])$, $\psi_1(t) \in C([0,T])$ $(i = 0, 1)$, $u_0(x) \in W_2^4(D)$, *условия согласования*

$$\varphi_0(0) = u_0(0), \psi_0(0) = u_0(1), \varphi_1(0) = u_0'(0), \psi_1(0) = u_0'(1),$$

$$\int\limits_0^1 K(x,0)u_0(x)dx = \mu(0),$$

а также условия

$$0 < h_0 \leq h(t), |\mu(t)| \geq \mu_0 > 0, h_0 \geq M_0, t \in (0,T),$$

$$K(0,t) = K(1,t) = K_x(0,t) = K_x(1,t) = 0, t \in (0,T).$$

Тогда обратная задача 2.2.1 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q(t) \in L_\infty((0,T))$.

Доказательство. Для начала, сведем поставленную задачу к задаче с однородными краевыми условиями с помощью сдвига $w(x,t) = u(x,t) - \bar{u}(x,t)$. Получим обратную задачу с однородными краевыми условиями: найти функции $\{q(t), w(x,t)\}$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению

$$w_t + w_{xxxx} + q(t)w = f(x,t) - \bar{u}_t(x,t) - q(t)\bar{u}(x,t), \tag{2.2.7}$$

при выполнении для функции $w(x,t)$ краевых условий

$$w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.2.8}$$

$$w_x(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.2.9}$$

начального условия

$$w(x,0) = w_0(x), x \in (0,1), \tag{2.2.10}$$

и условия переопределения

$$\int_0^1 K(x,t)w(x,t)dx = \mu(t) - \int_0^1 K(x,t)\bar{u}(x,t)dx, \quad t \in (0,T). \tag{2.2.11}$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$ удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению:

$$w_t + w_{xxxx} + [h(t) + \varphi(t,w)]w = f_1(x,t) - \varphi(t,w)\bar{u}(x,t), \tag{2.2.12}$$

при выполнении краевых условий (2.2.8), (2.2.9) и начального условия (2.2.10).

Для доказательства разрешимости поставленной краевой задачи воспользуемся комбинацией методов срезок, неподвижной точки, продолжения по параметру, регуляризации.

Пусть N есть фиксированное число такое, что $N \leq h_0$. С помощью числа N определим функцию $G_N(\theta)$:

$$G_N(\theta) = \begin{cases} \theta, \text{если } |\theta| \leq N, \\ N, \text{если } \theta > N, \\ -N, \text{если } \theta < -N. \end{cases}$$

Пусть ε есть фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Функция $v(x,t)$ есть заданная функция из пространства V_1. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению:

$$w_t + w_{xxxx} + \varepsilon w_{xxxxt} + [h(t) + G_N(\varphi(t,v))]w = f_1(x,t) - \lambda\varphi(t,w)\bar{u}(x,t), \tag{$2.2.12_{G,\varepsilon,v,\lambda}$}$$

при выполнении краевых условий (2.2.8), (2.2.9) и начального условия (2.2.10).

Разрешимость задачи ($2.2.12_{G,\varepsilon,v,\lambda}$), (2.2.8)-(2.2.10) в пространстве V_1 при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $f(x,t) \in L_2(D)$, $\lambda = 0$ известна [102].

Поскольку и для метода продолжения по параметру, и для метода неподвижной точки, и (в дальнейшем) для предельного перехода при ε стремящимся к нулю необходимы "хорошие"априорные оценки, то покажем их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 [w_\tau + w_{xxxx} + \varepsilon w_{xxxx\tau} + [h(\tau) + G_N(\varphi(\tau, v))]w] w_{xxxx} dx d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^1 [f_1(x,\tau) - \lambda \varphi(\tau, w)\bar{u}(x,\tau)] w_{xxxx} dx d\tau.$$

В левой части тождества первое слагаемое проинтегрируем по частям два раза по x и один раз по t, третье слагаемое проинтегрируем по переменной t и четвертое слагаемое проинтегрируем дважды по x, учитывая граничные и начальные условия получим следующее тождество:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 w_0''^2(x)dx + \int_0^t \int_0^1 w_{xxxx}^2 dx d\tau +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_0''''^2(x)dx + \int_0^t \int_0^1 [h(\tau) + G_N(\varphi(\tau, v))] w_{xx}^2 dx d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^1 [f_1(x,\tau) - \lambda \varphi(\tau, w)\bar{u}(x,\tau)] w_{xxxx} dx d\tau.$$

Учитывая неотрицательность функции $h(t)+G_N(\varphi(t,v))$, применяя к правой части полученного тождества неравенство Юнга имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx + \int_0^t \int_0^1 w_{xxxx}^2 dx d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 w_0''^2(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_0''''^2(x)dx + \frac{1}{\delta_1^2}\int_0^t \int_0^1 f_1^2(x,\tau)dx d\tau +$$
$$+ \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^t \int_0^1 w_{xxxx}^2 dx d\tau + \frac{1}{\delta_1^2}\int_0^t \int_0^1 \varphi^2(\tau, w)\bar{u}^2(x,\tau) dx d\tau.$$

Далее оценим функцию $\varphi^2(t,w)$, применяя последовательно известное неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, а затем неравенство Гельдера и введенные ранее обозначения:

$$|\varphi^2(t,w)| = |\tfrac{1}{\mu^2(t)}[\int\limits_0^1 K_t(x,t)w(x,t)dx - \int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)w_{xx}(x,t)dx]^2| \leq$$
$$\leq \tfrac{2}{\mu_0^2}[(\int\limits_0^1 K_t(x,t)w(x,t)dx)^2 + (\int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)w_{xx}(x,t)dx)^2] \leq$$
$$\leq \tfrac{2}{\mu_0^2}[\int\limits_0^1 K_t^2(x,t)dx \int\limits_0^1 w^2(x,t)dx + \int\limits_0^1 K_{xx}^2(x,t)dx \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx] \leq$$
$$\leq \tfrac{2}{\mu_0^2}[M_1 \int\limits_0^1 w^2(x,t)dx + M_2 \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx] \leq \tfrac{2[M_1+M_2]}{\mu_0^2} \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx.$$

Пусть $\delta_1^2 = 1$, учитывая полученное неравенство, и введенные выше обозначения получим:

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx + 2\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx \leq$$
$$\leq K_1 + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau + C_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Далее применяем лемму Гронуолла, получим первую оценку

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx \leq K_1 exp(C_1 T).$$

Следующие оценки являются очевидным следствием неравенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx}^2 dxd\tau \leq TK_1 exp(C_1T), \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau \leq K_1 + K_1C_1T exp(C_1T).$$

Для получения следующих оценок рассмотрим равенство:

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 [w_\tau + w_{xxxx} + \varepsilon w_{xxxx\tau} + [h(\tau) + G_N(\varphi(\tau,v))]w]w_{xxxx\tau} dxd\tau =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 [f_1(x,\tau) - \lambda\varphi(\tau,w)\bar{u}(x,\tau)]w_{xxxx\tau} dxd\tau.$$

По аналогии с предыдущим равенством, применим в левой части интегрирование по частям получим:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''''^2(x)dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_N(\varphi(\tau,v))w_{xx}w_{xx\tau}dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 h'(\tau)w_{xx}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(t)w_{xx}^2(x,t)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(0)w_0''^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1[f_1(x,\tau)-\lambda\varphi(\tau,w)\bar{u}(x,\tau)]w_{xxxx\tau}dxd\tau,$$

Далее в правой части применим неравенство Юнга, а так же уже полученные неравенства и оценки получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(t)w_{xx}^2(x,t)dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''''^2(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(0)w_0''^2(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 h'(\tau)w_{xx}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_N^2(\varphi(\tau,v))w_{xx}^2dxd\tau+\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{\delta_2^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau+\frac{1}{\delta_2^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\varphi^2(\tau,w)\bar{u}^2(x,\tau)dxd\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''''^2(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(0)w_0''^2(x)dx+\frac{1}{2}\max_{[0,T]}h'(t)TK_1exp(C_1T)+$$

$$+\frac{N^2}{2\delta_1^2}TK_1exp(C_1T)+\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{\delta_2^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau+\frac{C_1}{2\delta_2^2}TK_1exp(C_1T).$$

Положим $\delta_1^2=\frac{1}{2},\delta_2^2=\varepsilon$, учитывая неотрицательность функции $h(t)$ получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dx+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx\tau}^2dxd\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''''^2(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(0)w_0''^2(x)dx+\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau+$$

$$+TK_1exp(C_1T)[\frac{1}{2}\max_{[0,T]}h'(t)+N^2+C_1]\le\bar{K},$$

где $\bar{K}$ зависит только от исходных данных и числа ε_0.

Из полученных оценок следует, что функция $w(x,t)$ в пространстве V_1 ограничена постоянной, зависящей только от исходных данных и от числа

ε_0.

$$\|w\|_{V_1} \leq K_0. \tag{2.2.13}$$

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [100] краевая задача ($2.2.12_{G,\varepsilon,\lambda,v}$), (2.2.8) – (2.2.10) разрешима для $\lambda = 1$.

Рассмотрим теперь задачу: найти функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$w_t + w_{xxxx} + \varepsilon w_{xxxxt} + [h(t) + G_N(\varphi(t,v))]w = f_1(x,t) - \varphi(t,w)\bar{u}(x,t), \tag{$2.2.12_{G,\varepsilon,v}$}$$

и условиям (2.2.8) – (2.2.10).

Пусть R_0 есть число такое что $R_0 \geq \bar{K}$, множество Ω есть шар в пространстве V_1 радиуса R_0. Краевая задача ($2.2.12_{G,\varepsilon,v}$), (2.2.8) – (2.2.10) порождает оператор $\Phi(v)$, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства V_1 решение $v(x,t)$ принадлежащее этому же пространству. Пусть $v(x,t) \in \Omega$, тогда из априорной оценки (2.2.13) и выбора числа R_0 следует, что оператор Φ переводит множество Ω в себя.

Покажем что оператор Φ непрерывен.

Пусть $\{v_n(x,t)\}$ - последовательность, сходящаяся в V_1 к некоторой функции $\bar{v}(x,t) \in V_1$. Положим $U_n(x,t) = v_n(x,t) - \bar{v}(x,t)$, $w_n(x,t) = \Phi(v_n(x,t))$, $\bar{w}(x,t) = \Phi(\bar{v}(x,t))$, $W_n(x,t) = w_n(x,t) - \bar{w}(x,t)$.

Последовательности $\{v_n(x,t)\}$ и $\{w_n(x,t)\}$ - ограничены в V_1, вследствие сходимости в пространстве V_1 и оценки (2.2.13). Для семейства функций $\{v_n(x,t)\}$ выполняются все выведенные выше оценки. Последовательность функции $W_n(x,t)$ представляет собой решение краевой задачи

$$W_{nt} + W_{nxxxx} + \varepsilon W_{nxxxxt} + [h(\tau) + G_N(\varphi(\tau,\bar{v}))]W_n =$$

$$= [G_N(\varphi(\tau,\bar{v})) - G_N(\varphi(\tau,v_n))]w_n - \varphi(t,W_n)\bar{u},$$

$$W_n(x,0) = W_n(0,t) = W_n(1,t) = W_{nx}(0,t) = W_{nx}(1,t) = 0, t \in (0,T).$$

Повторяя доказательство оценки (2.2.13) получаем, что для W_n выполняется оценка

$$\|W_n\|^2_{V_1} \leq M\|G_N(\varphi(\tau,\bar{v})) - G_N(\varphi(\tau,v_n))\|^2_{L_2}.$$

Так как функция $\varphi(t,v)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$\|W_n\|^2_{V_1} \leq M\|\varphi(\tau,V_n))\|^2_{L_2} \leq M\|V_n\|^2_{L_2}.$$

Полученное неравенство означает, что оператор Φ непрерывен.

Покажем компактность оператора Φ. Пусть $\{v_n(x,t)\}$ - ограниченная в V_1 последовательность. Покажем, что из последовательности $\Phi(\{v_n(x,t)\})$ можно выделить сходящуюся в V_1 подпоследовательность. Согласно теореме вложения [59] существует функция $\bar{v}(x,t) \in V_1$ такая, что из последовательности $\{v_n(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_k}(x,t)\}$ такую, что последовательности $v_{n_k}(x,t)$, $v_{n_kx}(x,t)$, $v_{n_kxx}(x,t)$, $v_{n_kxxx}(x,t)$ сходятся почти всюду в D к функциям $\bar{v}(x,t)$, $\bar{v}_x(x,t)$, $\bar{v}_{xx}(x,t)$, $\bar{v}_{xxx}(x,t)$ соответственно. Положим $w_{n_k}(x,t) = \Phi(v_{n_k}(x,t))$, $\bar{w}(x,t) = \Phi(\bar{v}(x,t))$, $W_n = w_{n_k} - \bar{w}$, $V_k = v_{n_k} - \bar{v}$. Следует, что последовательность $v_{nxxx}(x,t)$ равномерно ограничена в пространстве $W^1_2(D)$. Рассмотрим задачу: найти функцию $W_k(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению

$$W_{kt} + W_{kxxxx} + \varepsilon W_{kxxxxt} + [h(t) + G_N(\varphi(t,v_{n_k})]W_k =$$

$$[G_N(\varphi(t,v_{n_k})) - G_N(\varphi(t,\bar{v}))]\bar{w} - \varphi(t,W_k)\bar{u},$$

и условиям

$$W_n(x,0) = w_0(x), W_k(0,t) = W_k(1,t) = W_{kx}(0,t) = W_{kx}(1,t) = 0, (x,t) \in D.$$

Для функции W_k имеет место оценка $\|W_k\|^2_{V_1} \leq M\|\varphi(t,V_k)\|^2_{L_2}$. Для функции $\varphi(t,V_k)$ имеет место представление:$\varphi(t,V_k) = \varphi(t,v_{n_k}) - \varphi(t,\bar{v})$.

Вследствие указанной выше сходимости почти всюду, $\varphi(t,V_k)$ стремится к нулю при k стремящимся к бесконечности. Это означает, что последовательность $w_{n_k}(x,t)$ сходится в пространстве V_1 к $\bar{w}$. Отсюда вытекает, что $W_k \to 0$ при $k \to \infty$. А это и означает компактность оператора Φ.

Итак, оператор Φ вполне непрерывный и переводит замкнутый шар пространства V_1 в себя. Значит, для оператора Φ выполняются все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке. Вследствие этой теоремы существует функция $w(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся решением краевой задачи ($2.2.12_{G,\varepsilon,v}$), (2.2.8) – (2.2.10).

Покажем, что можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Установим равномерную по ε оценку. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 [w_\tau + w_{xxxx} + \varepsilon w_{xxxx\tau} + [h(\tau) + G_N(\varphi(\tau,w))]w]w_{xxxx\tau}dxd\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^1 [f_1(x,\tau) - \varphi(\tau,w)\bar{u}(x,\tau)]w_{xxxx\tau}dxd\tau.$$

Повторяя все действия, аналогично получению оценки (2.2.13), за исключением слагаемого правой части. Его также интегрируем по частям. Учитывая условия теоремы, получим оценку равномерно зависящую от числа ε, которая также как и в предыдущем параграфе позволяет перейти к пределу.

Учитывая условие $h_0 > M_0$, получаем что $G_N(\varphi(x,t)) = \varphi(x,t)$.

Согласно всему выше изложенному, следует, как и при доказательстве теоремы 2.1.1, что существует решение краевой задачи (2.2.12), (2.2.8)-(2.2.10). Построенное решение $u(x,t)$ и $q(t)$, заданное в виде

$$q(t) = \frac{1}{\mu(t)}[F(t) - \mu'(t)] + \varphi(t,u),$$

очевидно связаны уравнением (2.2.1) в области D. Выполнимость гранично-начальных условия и условий переопределения, показывается также как и в теореме 2.1.1.

Теорема доказана.

Для формулировки следующей теоремы введем дополнительные обозначения.

Переопределим функции $\bar{u}(x,t)$, $\varphi(t,v)$:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{6}[\psi_1(t) - \varphi_1(t)]x^3 + \frac{1}{2}\varphi_1(t)x^2 +$$

$$+[\psi_0(t) - \frac{1}{6}\psi_1(t) - \frac{1}{3}\varphi_1(t) - \varphi_0(t)]x + \varphi_0(t),$$

$$\varphi(t,v) = \frac{1}{\mu(t)}[\int\limits_0^1 K_t(x,t)v(x,t)dx - \int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)v_{xx}(x,t)dx],$$

($v(x,t)$ - произвольная функция из пространства V_1).

Числа M, M_1, M_2, K_1, K_2, C_1, M_0 определяются следующим образом:

$$M_1 = \max_{0\le t\le T}(\int\limits_0^1 K_t(x,t)dx), M_2 = \max_{0\le t\le T}(\int\limits_0^1 K_{xx}(x,t)dx), M = \max_D |\bar{u}(x,t)|,$$

$$K_1 = \int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx + 2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau + \varepsilon_0\int\limits_0^1 w_0^{(4)2}(x)dx,$$

$$C_1 = \frac{4M^2[M_1 + M_2]}{\mu_0^2}, M_0 = \frac{M_1 + M_2}{\mu_0}K_1 exp(C_1 T),$$

здесь μ_0, ε, ε_0 - некоторые положительные числа.

Теорема 2.2.2 *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $K(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $\mu(t) \in C([0,T])$, $\varphi_0(t) \in C([0,T])$, $\psi_0(t) \in C([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C([0,T])$, $\psi_1(t) \in C([0,T])$, $(i = 0,1)$, $u_0(x) \in W_2^4(D)$, *условия согласования*

$$\varphi_0(0) = u_0(0), \psi_0(0) = u_0(1), \varphi_1(0) = u_0''(0), \psi_1(0) = u_0''(1),$$

$$\int\limits_0^1 K(x,0)u_0(x)dx = \mu(0),$$

а также условия

$$0 < h_0 \le h(t), \quad |\mu(t)| \ge \mu_0 > 0, \quad h_0 \ge M_0, \quad t \in (0,T),$$

$$K(0,t) = K(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Тогда обратная задача 2.2.2 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q(t) \in L_\infty((0,T))$.

2.3 Обратная задача восстановления двух неизвестных коэффициентов

В прямоугольнике D рассмотрим уравнение

$$u_t + u_{xxxx} + q_1(t)u = f(x,t) + q_2(t)h(x,t), \tag{2.3.1}$$

где $f(x,t)$, $h(x,t)$ известные функции, условия на которые будут уточнятся далее, функции же $q_1(t)$, $q_2(t)$ наряду с решением $u(x,t)$ подлежат определению.

Пусть функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $u_0(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ заданы и определены при $x \in [0;1]$, $t \in [0,T]$.

<u>Обратная задача 2.3.1</u>: найти функции $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению (2.3.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.3.2}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.3.3}$$

начального условия

$$u(x,0) = u_0(x), x \in (0,1), \tag{2.3.4}$$

и условий переопределения

$$\int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)dx = \mu_1(t), \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), t \in (0,T). \tag{2.3.5}$$

<u>Обратная задача 2.3.2</u>: найти функции $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ в прямоугольнике D удовлетворяющие уравнению (2.3.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ краевых условий (2.3.2) и

$$u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.3.6}$$

а так же начального условия (2.3.4) и условий переопределения (2.3.5).

Для простоты изложения формулировок теорем и выкладок введем обозначения. Положим

$$\Delta(t)=\mu_2(t)\int\limits_0^1 K_1(x)h(x,t)dx-\mu_1(t)\int\limits_0^1 K_2(x)h(x,t)dx,$$

$$\alpha_1(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\left(\int\limits_0^1 K_1(x)h(x,t)dx[\int\limits_0^1 K_2(x)f(x,t)dx-\mu_2'(t)]\right)-$$

$$-\frac{1}{\Delta(t)}\left(\int\limits_0^1 K_2(x)h(x,t)dx[\int\limits_0^1 K_1(x)f(x,t)dx-\mu_1'(t)],\right.$$

$$\alpha_2(t,u)=\frac{1}{\Delta(t)}\left(\int\limits_0^1 K_2(x)h(x,t)dx\int\limits_0^1 K_1(x)u_{xxxx}(x,t)dx-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^1 K_1(x)h(x,t)dx\int\limits_0^1 K_2(x)u_{xxxx}(x,t)dx\right),$$

$$\beta_1(t)=\frac{\mu_1(t)}{\Delta(t)}[\int\limits_0^1 K_2(x)f(x,t)dx-\mu_2'(t)]-\frac{\mu_2(t)}{\Delta(t)}[\int\limits_0^1 K_1(x)f(x,t)dx-\mu_1'(t)],$$

$$\beta_2(t,u)=\frac{1}{\Delta(t)}\left(\mu_2(t)\int\limits_0^1 K_1(x)u_{xxxx}(x,t)dx-\mu_1(t)\int\limits_0^1 K_2(x)u_{xxxx}(x,t)dx\right),$$

$$\bar{u}(x,t)=[\psi_1(t)-2\psi_0(t)+2\varphi_1(t)+\varphi_0(t)]x^3+[3\psi_0(t)-3\varphi_1(t)-2\varphi_0(t)-\psi_1(t)]x^2+$$

$$+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t),$$

$$w_0(x)=u_0(x)-\bar{u}(x,0),\bar{f}(x,t)=f(x,t)-\bar{u}_t(x,t)-\alpha_1(t)\bar{u}(x,t)+\beta_1(t)h(x,t).$$

$$m_1=\int\limits_0^1 K_1^2(x)dx, m_2=\int\limits_0^1 K_2^2(x)dx, m_3=\int\limits_0^1 K_1''^2(x)dx, m_4=\int\limits_0^1 K_2''^2(x)dx,$$

$$h_0=\max_D h^2(x,t),\Delta=\min_{t\in[0,T]}\Delta(t),$$

$$N_1=\int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx+2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau,$$

$$N_2 = \frac{8h_0}{\Delta^2}\left(\max_{t\in[0,T]}\mu_2^2(t)m_3 + \max_{t\in[0,T]}\mu_1^2(t)m_4 + \max_D \bar{u}^2(x,t)[m_2m_3 + m_1m_4]\right),$$

$$N_3 = p_0\int_0^1 w_0^2(x)dx + N_1 + N_1N_2Texp(N_2T),$$

$$M_0 = \frac{\sqrt{h_0}}{\Delta}(\sqrt{m_1m_4} + \sqrt{m_2m_3})\sqrt{N_1exp(TN_2)}.$$

Теорема 2.3.1 *Пусть выполняются включения:* $\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\mu_i(t) \in C^1([0,T])$, $K_i(x) \in C^2([0,1])$ $(i = 1,2)$, $u_0(x) \in C^2((0,1))$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $h(x,t) \in L_2(D)$, *а также имеют место условия*

$$K_i(0) = K_i(1) = K_i'(0) = K_i'(1) = 0, i = 1,2,$$

$\alpha_1(t) \geq p_0 + p_1$, *где* p_0, p_1 *положительные числа,* $M_0 \leq p_1$.

$$\Delta(t) \neq 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\varphi_0(0) = u_0(0), \quad \psi_0(0) = u_0(1), \quad \varphi_1(0) = u_0'(0), \quad \psi_1(0) = u_0'(1);$$

$$\int_0^1 K_1(x)u_0(x)dx = \mu_1(0), \int_0^1 K_2(x)u_0(x)dx = \mu_2(0).$$

Тогда существует решение обратной задачи 2.3.1 $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q_1(t) \in L_\infty(D)$, $q_2(t) \in L_\infty(D)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти функцию $u(x,t)$ в D удовлетворяющую уравнению

$$u_t + u_{xxxx} + [\alpha_1(t) + \alpha_2(t,u)]u = f(x,t) + [\beta_1(t) + \beta_2(t,u)]h(x,t) \quad (2.3.7)$$

и условиям (2.3.2)-(2.3.4).

Решение полученной прямой задачи будем искать в виде $u(x,t) = w(x,t)+\bar{u}(x,t)$. Придем к задаче с нулевыми краевыми условиями: найти функцию $w(x,t)$ удовлетворяющую уравнению

$$w_t + w_{xxxx} + [\alpha_1(t) + \alpha_2(t,w)]w = \bar{f}(x,t) - \alpha_2(t,w)\bar{u}(x,t) + \beta_2(t,w)h(x,t), \tag{2.3.1$'$}$$

краевым условиям

$$w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.3.2$'$}$$

$$w_x(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.3.3$'$}$$

и начальному условию

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{2.3.4$'$}$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи (2.3.1$'$), (2.3.2$'$), (2.3.3$'$), (2.3.4$'$) воспользуемся комбинацией метода срезок, метода неподвижной точки и метода продолжения по параметру.

Пусть задана срезывающая функция $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, \text{если } |\xi| \le M_0, \\ M_0, \text{если } \xi > M_0, \\ -M_0, \text{если } \xi < -M_0. \end{cases}$$

Пусть λ есть число из промежутка $[0,1]$. Функция $v(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(D)$.

Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$ удовлетворяющую уравнению:

$$w_t+w_{xxxx}+[\alpha_1(t)+G(\alpha_2(t,v))]w = \bar{f}(x,t)+\lambda[\beta_2(t,w)h(x,t)-\alpha_2(t,w)\bar{u}(x,t)], \tag{2.3.1$_{\lambda,G,v}$}$$

и условиям (2.3.2$'$), (2.3.3$'$), (2.3.4$'$).

Прежде всего покажем, что для решения краевой задачи (2.3.1$_{\lambda,G,v}$), (2.3.2$'$), (2.3.3$'$), (2.3.4$'$) имеют место априорные оценки.

Для получения первой оценки умножим уравнение $(2.3.1_{\lambda,G,v})$ на функцию w_{xxxx} и результат проинтегрируем по прямоугольнику D. Используя условие теоремы, интегрирование по частям и применяя неравенство Юнга нетрудно получить неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dxd\tau + p_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2 dxd\tau \leq$$
$$\frac{\delta_1^2+\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+\frac{1}{\delta_2^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 [\beta_2^2(\tau,w)h^2(x,\tau) + \alpha_2^2(\tau,w)\bar{u}^2(x,\tau)]dxd\tau,$$

в котором δ_1, δ_2 есть произвольные положительные числа. Подбирая эти числа следующим образом $\delta_1^2 = \delta_2^2 = \frac{1}{2}$, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dxd\tau + p_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dxd\tau \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_0''^2(x)dx +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 [\beta_2^2(\tau,w)h^2(x,\tau) + \alpha_2^2(\tau,w)\bar{u}^2(x,\tau)]dxd\tau.$$

Далее оценим функции $\alpha_2(t,w)$, $\beta_2(t,w)$. Рассмотрим равенство:

$$\alpha_2^2(t,u) = \left[\frac{1}{\Delta(t)}\left(\int\limits_0^1 K_1(x)h(x,t)dx\int\limits_0^1 K_2(x)u_{xxxx}(x,t)dx - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\int\limits_0^1 K_2(x)h(x,t)dx\int\limits_0^1 K_1(x)u_{xxxx}(x,t)dx\right)\right]^2.$$

Используем известное неравенство и неравенство Гельдера, формулу интегрирования по частям (с учетом условий теоремы) получим

$$\alpha_2^2(t,u) \leq \frac{2}{\Delta^2(t)}\left[\int\limits_0^1 K_2^2(x)dx\int\limits_0^1 h^2(x,t)dx\int\limits_0^1 K_1''^2(x)dx\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx + \right.$$
$$\left. +\int\limits_0^1 K_1^2(x)dx\int\limits_0^1 h^2(x,t)dx\int\limits_0^1 K_2''^2(x)dx\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx\right] =$$
$$= \frac{2}{\Delta^2(t)}\int\limits_0^1 h^2(x,t)dx\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx\left[\int\limits_0^1 K_2^2(x)dx\int\limits_0^1 K_1''^2(x)dx + \right.$$
$$\left. +\int\limits_0^1 K_1^2(x)dx\int\limits_0^1 K_2''^2(x)dx\right] \leq \frac{2}{\Delta^2}h_0[m_2m_3 + m_1m_4]\int\limits_0^1 u_{xx}^2 dx.$$

Рассмотрим равенство:

$$\beta_2^2(t,u) = \left(\frac{\mu_2(t)}{\Delta(t)}\int\limits_0^1 K_1(x)u_{xxxx}(x,t)dx - \frac{\mu_1(t)}{\Delta(t)}\int\limits_0^1 K_2(x)u_{xxxx}(x,t)dx\right)^2.$$

Аналогично предыдущему получаем оценку:

$$\beta_2^2(t,u) \leq \tfrac{2}{\Delta^2(t)}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx\left(\mu_2^2(t)\int\limits_0^1 K_1''^2(x)dx + \mu_1^2(t)\int\limits_0^1 K_2''^2(x)dx\right) \leq$$
$$\leq \tfrac{2}{\Delta^2}\left(\max_{t\in[0,T]}\mu_2^2(t)m_3 + \max_{t\in[0,T]}\mu_1^2(t)m_4\right)\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx.$$

Вернемся к исходному неравенству и продолжим оценку с учетом полученных неравенств:

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,t)dxd\tau + 2p_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dxd\tau \leq$$
$$\leq N_1 + N_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Учитывая неотрицательность элементов левой части и введенные выше обозначения, получим неравенство

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx \leq N_1 + N_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Откуда по лемме Гронуолла получаем оценки:

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx \leq N_1 exp(TN_2), \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau \leq TN_1 exp(TN_2),$$
$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxxx}^2 dxd\tau \leq N_1 + N_2TN_1exp(TN_2). \tag{2.3.8}$$

Далее очевидно, что для функции $w(x,t)$ выполняются оценки

$$\int\limits_0^1 w^2(x,t)dx \leq N_1exp(TN_2), \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2dx\tau \leq TN_1exp(TN_2). \tag{2.3.9}$$

Для получения последней оценки рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 [w_\tau + w_{xxxx} + [\alpha_1(\tau) + G(\alpha_2(\tau,v))]w]w_\tau dxd\tau =$$
$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 [\bar{f}(x,\tau) + \lambda[\beta_2(\tau,w)h(x,\tau) - \alpha_2(\tau,w)\bar{u}(x,\tau)]]w_\tau dxd\tau,$$

аналогично действиям при выводе оценок (2.3.8) получим оценку

$$\int_0^t \int_0^1 w_\tau^2 dx d\tau \le N_3. \qquad (2.3.10)$$

Из выведенных оценок (2.3.8)-(2.3.10) следует, что функция $w(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(D)$ ограничена постоянной зависящей только от исходных данных и числа T

$$\parallel w \parallel_{W_2^{4,1}(D)} \le \bar{N}. \qquad (2.3.11)$$

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [100] краевая задача ($2.3.1_{\lambda,G,v}$), ($2.3.2'$), ($2.3.3'$), ($2.3.4'$) разрешима при $\lambda = 1$.

Теперь рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$ удовлетворяющую уравнению:

$$w_t + w_{xxxx} + [\alpha_1(t) + G(\alpha_2(t,v))]w = \bar{f}(x,t) + \beta_2(t,w)h(x,t) - \alpha_2(t,w)\bar{u}(x,t), \qquad (2.3.1_{G,v})$$

и условиям ($2.3.2'$), ($2.3.3'$), ($2.3.4'$). Краевая задача ($2.3.1_{G,v}$), ($2.3.2'$), ($2.3.3'$), ($2.3.4'$) порождает оператор $\Phi(v)$, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(D)$ решение $w(x,t)$, принадлежащее этому же пространству. Покажем, что данный оператор имеет неподвижные точки.

Пусть R_0 есть число такое что $R_0 \ge \bar{N}$, и пусть B есть множество:

$$B = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(D), v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0,$$
$$\|v(x,t)\|_{W_2^{4,1}(D)} \le R_0\}.$$

Пусть $v(x,t) \in B$, тогда из полученных априорных оценок и выбора числа R_0 следует, что оператор Φ переводит множество B в себя.

Доказательство непрерывности и компактности оператора Φ проводится аналогично доказательству теоремы 2.2.1. Тогда имеют место все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке и задача ($2.3.1_{G,v}$), ($2.3.2'$), ($2.3.3'$), ($2.3.4'$) разрешима.

Рассмотрим уравнение

$$w_t+w_{xxxx}+[\alpha_1(t)+G(\alpha_2(t,w))]w=\bar{f}(x,t)+\beta_2(t,w)h(x,t)-\alpha_2(t,w)\bar{u}(x,t).$$

В силу условия $M_0 \leq p_0$ выполняется $G(\alpha_2(t,w))=\alpha_2(t,w)$. Тем самым найденная функция $w(x,t)$ является решением уравнения $(2.3.1')$.

Следовательно разрешимость задачи $(2.3.1')$, $(2.3.2')$, $(2.3.3')$, $(2.3.4')$ доказана.

Положим $u(x,t)=w(x,t)+\bar{u}(x,t)$,

$$q_1(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t,u), q_2(t)=\beta_1(t)+\beta_2(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ связаны в прямоугольнике D требуемым уравнением (2.3.1) и для них выполняются граничные и краевые условия (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4).

Умножим уравнение (2.3.1) на функцию $K_1(x)$ и проинтегрируем по промежутку $(0,1)$ и проделаем те же действия с функцией $K_2(x)$. После несложных выкладок получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1'(t)+q_1(t)\Phi_1(t)=0, \\ \Phi_2'(t)+q_1(t)\Phi_2(t)=0. \end{cases}$$

$$\Phi_i(t)=\int\limits_0^1 K_i(x)udx-\mu_i(t) \tag{2.3.12}$$

Так как функции $q_1(t)$, $q_2(t)$ строго положительны, функции $\Phi_i(t)$ обращаются в нуль при $t=0$, то из равенств (2.3.12) следует что для функций $u(x,t)$ будет выполняться условие (2.3.5). А это означает что построенные функции $\{u(x,t),q_1(t),q_2(t)\}$ дают искомое решение исходной обратной задачи 2.3.1.

Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы введем дополнительные обозначения. Пусть пространства V_1, V_2 определены следующим образом

$$V_1=\{v(x,t):v(x,t)\in W_2^{4,1}(D), v_{xxxxt}(x,t)\in L_2(D)\},$$

$$V_2 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V_1, v_{xxxx}(x,t) \in V_1\}.$$

Определим необходимые ниже функции и постоянные:

$$f_1(x,t) = f(x,t) + \beta_1(t)h(x,t),$$

$$R_1 = \left(\int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)dx + p_0 \int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \right.$$
$$\left. + \tfrac{2}{\varepsilon} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau \right) exp\left(\tfrac{4Th_0}{\varepsilon\Delta^2}\left(\max_{[0,T]} \mu_2^2(t)m_1 + \max_{[0,T]} \mu_1^2(t)m_2\right)\right),$$

$$R_2 = \tfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)dx + \tfrac{p_0}{\varepsilon} \int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \tfrac{2}{\varepsilon^2} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+ \tfrac{4h_0}{\varepsilon^2\Delta^2}\left(\max_{[0,T]} \mu_2^2(t)m_1 + \max_{[0,T]} \mu_1^2(t)m_2\right)TR_1.$$

$$R_3 = \left(\tfrac{1}{p_0} \int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,0)dx + \int\limits_0^1 U^2(x,0)dx + \tfrac{2}{p_0} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau \right) \times$$
$$\times exp\left(\frac{4Th_1\left[\max\limits_{t\in[0,T]} \mu_1^2(t)m_2 + \max\limits_{t\in[0,T]} \mu_2^2(t)m_1\right]}{p_0\Delta^2} \right),$$

$$R_4 = \int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,0)dx + p_0 \int\limits_0^1 U^2(x,0)dx + 2 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+ \frac{4Th_1R_3\left[\max\limits_{t\in[0,T]} \mu_1^2(t)m_2 + \max\limits_{t\in[0,T]} \mu_2^2(t)m_1\right]}{\Delta^2},$$

$$R_5 = \int\limits_0^1 u^2(x,0)dx + \varepsilon \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,0)dx + \tfrac{2}{p_0} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+ \tfrac{2h_0}{\Delta^2}\left[\max_{t\in[0,T]} \mu_1^2(t)m_2 + \max_{t\in[0,T]} \mu_2^2(t)m_1\right] R_3T,$$

$$R_6 = \tfrac{1}{2} \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,0)dx + 2\left[\max_{t\in[0,T]} \alpha_1^2(t) + \tfrac{4m_1m_2h_0R_3}{\Delta^2}\right] R_5 + 2 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+ \tfrac{2h_0}{\Delta^2}\left[\max_{t\in[0,T]} \mu_1^2(t)m_2 + \max_{t\in[0,T]} \mu_2^2(t)m_1\right] R_3T,$$

$$M_1 = \frac{4m_1m_2h_0R_3}{\Delta^2}.$$

$$\bar{f}_1(x,t) = f_{1xxxx}(x,t), h_1(x,t) = h_{xxxx}(x,t), V_0(x) = u_0^{(4)2}(x).$$

Теорема 2.3.2 *Пусть выполняются включения:* $\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\mu_i(t) \in C^1([0,T])$, $K_i(x) \in C([0,1])$ $(i = 1,2)$, $u_0(x) \in C^2([0,1])$, $\bar{f}(x,t) \in L_2(D)$, $\bar{f}_{xxxx}(x,t) \in L_2(D)$. *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$|h^2(x,t)| \leq h_0, \quad |h^2_{xxxx}(x,t)| < h_1, \quad (x,t) \in \bar{D},$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \psi_0(t) = \psi_1(t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$\Delta(t) \neq 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\alpha_1(t) \geq p_0 + p_1, \quad p_1 < M_0,$$

$$f(0,t) = f(1,t) = f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$h(0,t) = h(1,t) = h_x(0,t) = h_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Тогда существует решение обратной задачи 2.3.1 $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q_1(t) \in L_\infty((0,T))$, $q_2(t) \in L_\infty((0,T))$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу (2.3.7), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4). Разрешимость данной задачи покажем методом продолжения по параметру, методом неподвижной точки, методами регуляризации и срезывающей функции.

С помощью указанного выше числа M_1 определим функцию $G(\xi)$(срезка):

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, \text{если } |\xi| \leq M_1, \\ M_0, \text{если } \xi > M_1, \\ -M_0, \text{если } \xi < -M_1. \end{cases}$$

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства $W_2^{4,1}(D)$, λ число из промежутка $[0,1]$, ε есть положительное число.

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$u_t + u_{xxxx} + [\alpha_1(t) + G(\alpha_2(t,v))]u + \varepsilon u_{xxxxt} = f_1(x,t) + \lambda\beta_2(t,u)h(x,t) \tag{$2.3.7_{G,v,\varepsilon,\lambda}$}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4).

Прежде всего покажем, что для решений краевой задачи ($2.3.7_{G,v,\varepsilon,\lambda}$), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), имеют место "хорошие"априорные оценки.

Умножим уравнение ($2.3.7_{G,v,\varepsilon,\lambda}$) на функцию $u_{xxxx\tau}$ и проинтегрируем по прямоугольнику D. Далее используя интегрирование по частям и условия теоремы, неравенство Юнга, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2 dxd\tau + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx + \tfrac{p_0}{2}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx +$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2 dxd\tau \le \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)dx + \tfrac{p_0}{2}\int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \tfrac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2 dxd\tau +$$
$$+\tfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau + \tfrac{h_0}{\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \beta_2^2(\tau,u)dxd\tau.$$

Учитывая что

$$\beta_2^2(t,u) \le \frac{2}{\Delta^2}(\max_{[0,T]}\mu_2^2(t)m_1 + \max_{[0,T]}\mu_1^2(t)m_2)\int\limits_0^1 u_{xxxx}(x,t)dx$$

и выбирая $\delta^2 = \varepsilon$, получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2 dxd\tau + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx + \tfrac{p_0}{2}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx + \tfrac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2 dxd\tau \le$$
$$\le \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)dx + \tfrac{p_0}{2}\int\limits_0^1 u_0''^2(x)dx + \tfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+\tfrac{2h_0}{\Delta^2\varepsilon}(\max_{[0,T]}\mu_2^2(t)m_1 + \max_{[0,T]}\mu_1^2(t)m_2)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dxd\tau.$$

Применяя далее лемму Гронуолла, мы получим априорные оценки

$$\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx \le R_1, \int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,\tau)dxd\tau \le TR_1,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)dxd\tau \le R_2,$$

Из полученных оценок следует, что функция $u(x,t)$ ограничена по норме пространства V_1, то есть выполняется неравенство

$$||u(x,t)||_{V_1(D)} \leq C_0, \tag{2.3.13}$$

где C_0 зависит только от исходных данных и числа ε. Продифференцируем уравнение ($2.3.7_{G,v,\varepsilon,\lambda}$) четырежды по переменной x, получим следующее равенство

$$U_t + U_{xxxx} + [\alpha_1(t) + G(\alpha_2(t,v))]U + \varepsilon U_{xxxxt} = \bar{f}_1(x,t) + \lambda\beta_2(t,u)h_1(x,t), \tag{2.3.14}$$

в котором $u_{xxxx}(x,t) = U(x,t)$, $\bar{f}_1(x,t) = \bar{f}_{xxxx}(x,t)$, $h_1(x,t) = h_{xxxx}(x,t)$, а так же имеют место равенства(с учетом условий теоремы)

$$V(0,t) = V(1,t) = V_x(0,t) = V_x(1,t) = 0, t \in [0,T], \tag{2.3.15}$$

$$V(x,0) = V_0(x), x \in [0,1]. \tag{2.3.16}$$

Повторяя выкладки, которые привели к оценке (2.3.13), нетрудно показать, что вследствие условий теоремы, равенств (2.3.15), (2.3.16), а так же в силу самой оценки (2.3.13) для решений уравнения (2.3.14) имеет место неравенство

$$||U(x,t)||_{V_1(D)} \leq C_0',$$

с постоянной C_0' зависящей лишь от исходных данных и числа ε. Из полученных оценок следует, что для решение краевой задачи ($2.3.7_{G,v,\varepsilon,\lambda}$), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) выполняется оценка

$$||u(x,t)||_{V_2(D)} \leq C_0'', \tag{2.3.17}$$

с постоянной C_0'' зависящей только от исходных данных и числа ε.

Покажем, что имеют место равномерные по ε оценки позволяющие перейти к пределу. Рассмотрим следующее равенство:

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (U_\tau + U_{xxxx} + [\alpha_1(\tau) + G(\alpha_2(\tau,v))]U + \varepsilon U_{xxxx\tau})U_\tau dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 (f_1(x,\tau) + \lambda\beta_2(\tau,u)h_1(x,\tau))U_\tau dxd\tau.$$

Повторяя действия при получении оценки (2.3.13) получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_\tau^2(x,\tau)dxd\tau+\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)dx+p_0\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx+2\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_{xx\tau}^2dxd\tau\le$$
$$\le\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,0)dx+p_0\int\limits_0^1 U^2(x,0)dx+2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau+2h_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \beta_2^2(\tau,u)dxd\tau.$$

Далее используем неравенство

$$\beta_2^2(t,u)=\left(\tfrac{\mu_2(t)}{\Delta(t)}\int\limits_0^1 K_1(x)u_{xxxx}(x,t)dx-\tfrac{\mu_1(t)}{\Delta(t)}\int\limits_0^1 K_2(x)u_{xxxx}(x,t)dx\right)^2\le$$
$$\le\tfrac{2}{\Delta^2(t)}\left(\max_{t\in[0,T]}\mu_1^2(t)m_2+\max_{t\in[0,T]}\mu_2^2(t)m_1\right)\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx,$$

получим

$$\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx\le\tfrac{1}{p_0}\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,0)dx+\int\limits_0^1 U^2(x,0)dx+\tfrac{2}{p_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1^2(x,\tau)dxd\tau+$$
$$+\tfrac{4h_1}{p_0\Delta^2}\left(\max_{t\in[0,T]}\mu_1^2(t)m_2+\max_{t\in[0,T]}\mu_2^2(t)m_1\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U^2(x,\tau)dxd\tau.$$

Откуда по лемме Гронуолла получим равномерные по ε оценки

$$\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx\le R_3,\int\limits_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)dx\le R_3,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx\le R_3T,\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xxxx\tau}\le R_4.$$

Далее доказательство теоремы проводиться, вполне аналогично доказательству теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.3 *Пусть функции* $\{u_1(x,t),q_{11}(t),q_{21}(t)\}$ *и* $\{u_2(x,t),q_{12}(t),q_{21}(t)\}$ *являются решениями обратной задачи 2.3.1, где* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *из пространства* $W_2^{4,1}(D)$, *а функции* $q_{11}(t)$, $q_{12}(t)$ *неотрицательны и* $q_1(t)\in L_\infty((0,T))$, $q_2(t)\in L_\infty((0,T))$. *И выполняется условие* $\Delta(t)\ne 0, t\in[0,T]$. *Тогда* $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$, $q_{11}(t)\equiv q_{12}(t)$, $q_{21}(t)\equiv q_{21}(t)$.

Доказательство. Пусть функции $\{u_1(x,t), q_{11}(t), q_{21}(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_{12}(t), q_{21}(t)\}$ являются решениями обратной задачи 2.3.1. Положим $U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $Q_1(t) = q_{11}(t) - q_{12}(t)$, $Q_2(t) = q_{21}(t) - q_{21}(t)$.

Рассмотрим задачу

$$U_t + U_{xxxx} + q_{11}(t)U = Q_1(t)U_2 + Q_2(t)h(x,t), \tag{2.3.1''}$$

$$U(0,t) = U(1,t) = U_x(0,t) = U_x(1,t) = 0, \tag{2.3.2''}$$

$$U(x,0) = 0, \tag{2.3.3''}$$

$$\int\limits_0^1 K_1(x)U(x,t)dx = 0, \int\limits_0^1 K_2(x)U(x,t)dx = 0. \tag{2.3.4''}$$

Умножим уравнение (2.3.1″) на функцию $u_{xxxx}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику D. Повторяя действия проделанные при получении оценки (2.3.11) и учитывая неотрицательность функции $q_{11}(t)$, получим неравенство

$$\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)dx \leq \bar{M} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 U_{xx} dx d\tau$$

Далее по лемме Гронуолла получим

$$\int\limits_0^1 U^2(x,t)dx \leq 0.$$

А это означает что $U(x,t) \equiv 0$, следовательно решения $\{u_1(x,t), q_{11}(t), q_{21}(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_{12}(t), q_{21}(t)\}$ совпадают. Теорема доказана.

Полностью аналогично доказывается теоремы существования и единственности для решений обратной задачи 2.3.2.

Теорема 2.3.4 *Пусть выполняются условия:* $\varphi_i(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_i(t) \in C^1([0,T])$, $\mu_i(t) \in C^2([0,T])$, $K_i(x) \in C^2([0,1])$, $u_0(x) \in C^2([0,1])$,

$f(x,t) \in L_2(D)$, $h(x,t) \in L_2(D)$.

$$K_i(0) = K_i(1) = 0,$$

$\alpha_1(t) \geq p_0 + p_1$, *где* p_0, p_1 *положительные числа,* $M_0 \leq p_1$,

$$\Delta(t) \neq 0, t \in [0,T],$$

$$\varphi_0(0) = u_0(0), \psi_0(0) = u_0(1), \varphi_1(0) = u_0''(0), \psi_1(0) = u_0''(1),$$
$$\int\limits_0^1 K_1(x)u_0(x)dx = \mu_1(0), \int\limits_0^1 K_2(x)u_0(x)dx = \mu_2(0).$$

Тогда существует решение обратной задачи 2.3.2 $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q_1(t) \in L_\infty((0,T))$, $q_2(t) \in L_\infty((0,T))$.

Теорема 2.3.5 *Пусть функции* $\{u_1(x,t), q_{11}(t), q_{21}(t)\}$ *и* $\{u_2(x,t), q_{12}(t), q_{21}(t)\}$ *являются решениями обратной задачи 2.3.2, где* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *из пространства* $W_2^{4,1}(D)$, *а функции* $q_{11}(t)$, $q_{12}(t)$ *неотрицательны и* $q_1(t) \in L_\infty((0,T))$, $q_2(t) \in L_\infty((0,T))$. *И выполняется условие* $\Delta(t) \neq 0, t \in [0,T]$. *Тогда* $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $q_{11}(t) \equiv q_{12}(t)$, $q_{21}(t) \equiv q_{21}(t)$.

2.4 Нелинейные обратные задачи для некоторых нестационарных уравнений высокого порядка с интегральным условием переопределения

Пусть $f(x,t)$, $N(x)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, a есть заданное положительное число.

Обратная задача 2.4.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x,t), \tag{2.4.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t) \in S; \tag{2.4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{\textit{при}} \quad x \in \Omega; \tag{2.4.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = \mu(t) \quad \text{\textit{при}} \quad t \in (0,T). \tag{2.4.4}$$

Обратная задача 2.4.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x,t), \tag{2.4.5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.4.2)-(2.4.4).

В изучаемых обратных задачах 2.4.1 и 2.4.2 условие (2.4.4) представляет собой условие интегрального переопределения. И еще одно замечание. В случае $a = 2$ уравнения (2.4.1) и (2.4.5) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 u + q(t)u = f(x,t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 u + q(t)u_t = f(x,t)$$

— то есть в виде уравнений, старшая часть которых есть итерированный оператор теплопроводности.

Известно, что для любой функции $v(x)$ такой, что $v(x) \in W_2^4(\Omega)$, $v(x) = \Delta v(x) = 0$ при $x \in \Gamma$, выполняются неравенства

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x)\,dx \le C_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x)\,dx \le C_1 \int\limits_{\Omega} [\Delta v(x)]^2\,dx, \tag{2.4.6}$$

$$\int\limits_{\Omega} [\Delta v(x)]^2\,dx \le C_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} [\Delta v_{x_i}(x)]^2\,dx \le C_1 \int\limits_{\Omega} [\Delta^2 v(x)]^2\,dx, \tag{2.4.7}$$

постоянные C_0 и C_1 в которых определяются лишь областью Ω — см.[58].

Далее, пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства $L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$ такая, что $w(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$, $w_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$. Определим функцию $\varphi(t,w)$:

$$\varphi(t,w) = \frac{1}{\mu(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} N_{x_i}(x) \Delta w_{x_i}(x,t)\,dx - a \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} N_{x_i}(x) w_{x_i t}(x,t)\,dx \right\}.$$

Введем еще некоторые обозначения. Именно, положим

$$F(t) = \int\limits_{\Omega} N(x) f(x,t)\,dx, \quad p(t) = \frac{1}{\mu(t)}[F(t) - \mu''(t)],$$

$$\alpha_1 = C_1 + 1, \quad \beta_1 = \frac{(a+1)(C_1+1)N_1}{\mu_0},$$

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} [\Delta u_{0x_i}(x)]^2\,dx + \frac{1}{a} \int\limits_{Q} f^2\,dx\,dt,$$

$$\mu_0 = \min_{0 \le t \le T} \mu(t), \quad N_1 = \max_{i=1,\dots,n} \left(\int\limits_{\Omega} N_{x_i}^2(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.4.1 *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \mu(t) \in C^2([0,T]), \quad u_0(x) \in W_2^3(\Omega),$$

$$u_1(x) \in W_2^2(\Omega), \quad f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$a > 0, \quad \mu_0 > 0;$$

$$N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$u_0(x) \in W_2^3(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^1(\Omega);$$

$$u_0(x) = \Delta u_0(x) = u_1(x) = \Delta u_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x) u_0(x)\, dx = \mu(0), \quad \int\limits_{\Omega} N(x) u_1(x)\, dx = \mu'(0);$$

$$\int\limits_0^T e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\, d\tau}\, dt < \frac{2}{\beta_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Тогда обратная задача 2.4.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,2}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^3(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство. Воспользуемся методом срезок и методом неподвижной точки.

Пусть M есть положительное число. Определим функцию $G_M(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$:

$$G_M(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{при} \quad |\xi| \le M, \\ M, & \text{при} \quad \xi > M, \\ -M, & \text{при} \quad \xi < M. \end{cases}$$

Обозначим для краткости через V следующее пространство

$$V = \Big\{ v(x,t): \quad v(x,t) \in W_2^{4,2}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^3(\Omega)),$$
$$v_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q) \Big\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \Big(\|v\|^2_{W_2^{4,2}(Q)} + \|v\|^2_{L_\infty(0,T; W_2^3(\Omega))} +$$
$$+ \|v_t\|^2_{L_2(0,T; W_2^3(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V есть банахово пространство.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\varphi(t,u))]\, u = f(x,t) \tag{2.4.8}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.4.2) и (2.4.3). Разрешимость этой задачи нетрудно установить с помощью метода неподвижной точки.

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства V. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\varphi(t,v))]\, u = f(x,t) \tag{2.4.8$_v$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.4.2) и (2.4.3). Эта задача является естественной начально-краевой задачей для линейного уравнения (2.4.8$_v$), разрешимость ее в пространстве V известна — см., например, [102]. Следовательно, краевая задача (2.4.8$_v$), (2.4.2), (2.4.3) порождает оператор A, переводящий пространство V в себя: $A(v) = u$.

Для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2.4.8$_v$), (2.4.2), (2.4.3) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_V \le R_0 \tag{2.4.9}$$

с постоянной R_0, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, $N(x)$, числами a, T, M и областью Ω (доказательство этой оценки нетрудно провести, анализируя равенства

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left\{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,v))]u\right\}\Delta u_\tau\,dx\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(x,\tau)\Delta u_\tau\,dx\,d\tau,$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left\{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,v))]u\right\}\Delta^2 u\,dx\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u\,dx\,d\tau,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau, v))]u \right\} u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau =$$

$$\left. = \int_0^T \int_\Omega f(x,\tau) u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau \right) .$$

Обозначим через B_{R_1} замкнутый шар радиуса R_1 пространства V. Из оценки (2.4.9) следует, что оператор A в случае $R_1 \geq R_0$ переводит шар B_{R_1} в себя. Далее, из той же оценки (2.4.9) следует, что оператор A будет вполне непрерывным.

Докажем, что оператор A вполне непрерывен на шаре B_{R_1}.

Пусть $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность функций из шара B_{R_1}, сходящаяся в пространстве V к функции $v(x,t)$. Далее, пусть $u_m(x,t)$, $m = 1, 2, \ldots$, $u(x,t)$ есть образы функций $v_m(x,t)$, $m = 1, 2, \ldots$, $v(x,t)$ соответственно при действии оператора A. Обозначим $\overline{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - v(x,t)$, $\overline{u}_m(x,t) = u_m(x,t) - u(x,t)$. Имеем следующие соотношения

$$\overline{u}_{mtt} - a\Delta\overline{u}_{mt} + \Delta^2\overline{u}_m + [p(t) + G_M(\varphi(t, v_m))]\, \overline{u}_m =$$

$$= [G_M(\varphi(t,v)) - G_M(\varphi(t, v_m))]\, u_m \ \textit{при} \ (x,t) \in Q,$$

$$\overline{u}_m(x,t) = \Delta\overline{u}_m(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S,$$

$$\overline{u}_m(x,0) = \overline{u}_{mt}(x,0) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega.$$

Анализируя последовательно равенства

$$-\int_0^t \int_\Omega \left\{ \overline{u}_{mtt} - a\Delta\overline{u}_{mt} + \Delta^2\overline{u}_m + [p(t) + G_M(\varphi(t, v_m))]\, \overline{u}_m \right\} \Delta\overline{u}_{m\tau}\, dx\, d\tau =$$

$$= -\int_0^t \int_\Omega [G_M(\varphi(t,v)) - G_M(\varphi(t, v_m))]\, u_m \Delta\overline{u}_{m\tau}\, dx\, d\tau,$$

$$\int_0^t \int_\Omega \left\{ \overline{u}_{mtt} - a\Delta\overline{u}_{mt} + \Delta^2\overline{u}_m + [p(t) + G_M(\varphi(t, v_m))]\, \overline{u}_m \right\} \Delta^2\overline{u}_m\, dx\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \left[G_M(\varphi(t,v)) - G_M(\varphi(t,v_m))\right] u_m \Delta^2 \overline{u}_m \, dx \, d\tau,$$

$$\int_0^t \int_\Omega \left\{\overline{u}_{mtt} - a\Delta\overline{u}_{mt} + \Delta^2\overline{u}_m + \left[p(t) + G_M(\varphi(t,v_m))\right]\overline{u}_m\right\} \overline{u}_{m\tau\tau} \, dx \, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \left[G_M(\varphi(t,v)) - G_M(\varphi(t,v_m))\right] u_m \overline{u}_{m\tau\tau} \, dx \, d\tau,$$

используя липшицевость функции $G_M(\xi)$, используя также оценку (2.4.9) для семейства $\{u_m(x,t)\}$, нетрудно получить неравенство

$$\|\overline{u}_m\|_V^2 \le C \int_0^t |\varphi(\tau, \overline{v}_m)|^2 \, d\tau.$$

Из этого неравенства и из сходимости функций $\overline{v}_m(x,t)$ в пространстве V к нулевой функции следует сходимость

$$\|\overline{u}_m\|_V \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Эта сходимость означает, что оператор A непрерывен в пространстве V.

Покажем, что оператор A компактен на шаре B_{R_1}.

Пусть $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть произвольная последовательность функций из шара B_{R_1}, $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора A. Из ограниченности в пространстве V последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$, из свойства рефлексивности гильбертова пространства и из теорем вложения [59] следует, что существуют подпоследовательность $\{v_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^\infty$ исходной последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ и функция $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad W_2^{4,2}(Q),$$

$$\Delta v_{m_k}(x,t) \to \Delta v(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S),$$

$$v_{m_k}(x,t) \to v_t(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S).$$

Заметим, что функцию $\varphi(t,v)$ можно записать в виде

$$\varphi(t,v)=\frac{1}{\mu(t)}\left\{a\int\limits_{\Omega}\Delta N(x)v_t(x,t)\,dx+a\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial N(x)}{\partial\nu}v_t(x,t)\,ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\Omega}\Delta N(x)\Delta v(x,t)\,dx-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial N(x)}{\partial\nu}\Delta v(x,t)\,ds\right\}.$$

Определим функцию $u(x,t)$ как решение краевой задачи (2.4.8$_v$), (2.4.2), (2.4.3) с функцией $\varphi(t,v)$, определенной указанным выше образом — уточним, что функция $u(x,t)$ корректно определена. Положим $\overline{v}_k(x,t)=v_{m_k}(x,t)-v(x,t)$, $\overline{u}_k(x,t)=u_{m_k}(x,t)-u(x,t)$. Повторяя теперь для последовательностей $\{\overline{v}_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\overline{u}_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ доказательство непрерывности оператора A, получим, что имеет место сходимость

$$\|\overline{u}_k\|_V\to 0\quad \textit{при}\quad k\to\infty.$$

Эта сходимость означает, что для любой ограниченной в пространстве V последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ найдется такая ее подпоследовательность $\{v_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, что семейство $\{Av_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ будет сходящимся в пространстве V. А это и дает компактность оператора A.

Согласно теореме Шаудера [100], оператор A имеет в шаре B_{R_0} хотя бы одну неподвижную точку $u(x,t)$. Эта неподвижная точка будет представлять собой решение краевой задачи (2.4.8), (2.4.2), (2.4.3). Покажем, что при выполнении условий теоремы можно выбрать (и зафиксировать) число M так, что будет выполняться равенство

$$G_M(\varphi(t,u))=\varphi(t,u).\tag{2.4.10}$$

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left\{u_{\tau\tau}-a\Delta u_\tau+\Delta^2u+[p(\tau)+G_M(\varphi(\tau,u))]u\right\}\Delta u_\tau\,dx\,d\tau=$$

$$=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}f(x,\tau)\Delta u_\tau\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (2.4.2) и (2.4.3), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,t)]^2\,dx + a\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} p(\tau)u_{x_i}u_{x_i\tau}\,dx\,d\tau - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G_M(\varphi(\tau,u))u_{x_i}u_{x_i\tau}\,dx\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f\Delta u_\tau\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{0x_i}(x)]^2\,dx. \quad (2.4.11)$$

Оценим правую часть (2.4.11). Положим

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,t)]^2\,dx.$$

Условия теоремы, неравенства (2.4.6) и (2.4.7), а также неравенство Юнга дают оценки

$$|\varphi(\tau,u)| \le \frac{N_1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,\tau)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{aN_1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx \le$$

$$\le \frac{(a+1)N_1 y^{\frac{1}{2}}(\tau)}{\mu_0},$$

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[p(\tau)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,\tau)u_{x_i\tau}(x,\tau)\right]\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^t |p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}|u_{x_i}(x,\tau)||u_{x_i\tau}(x,\tau)|\,dx\right)\,d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\right)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx\right)\,d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}C_1\int\limits_0^t |p(\tau)|y(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|y(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(C_1+1)\int\limits_0^t |p(\tau)|y(\tau)\,d\tau,$$

$$\left|\int_0^t \int_\Omega G_M(\varphi(\tau,u)) \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}(x,\tau)u_{x_i\tau}(x,\tau)\right) dx\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq \int_0^t |\varphi(\tau,u)| \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega |u_{x_i}(x,\tau)||u_{x_i\tau}(x,\tau)|\right) dx\,d\tau \leq$$

$$\leq \frac{(a+1)N_1}{2\mu_0} \int_0^t y^{1/2}(\tau) \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\right) d\tau+$$

$$+\frac{(a+1)N_1}{2\mu_0} \int_0^t y^{1/2}(\tau) \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx\right) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{(a+1)(C_1+1)N_1}{2\mu_0} \int_0^t y^{3/2}(\tau)\,d\tau,$$

$$\left|\int_0^t \int_\Omega f\Delta u_\tau\,dx\,d\tau\right| \leq \frac{a}{2}\int_0^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_Q f^2\,dx\,dt.$$

Используя эти оценки, нетрудно от (2.4.11) перейти к неравенству

$$y(t) \leq \alpha_1 \int_0^t p(\tau)y(\tau)\,d\tau + \beta_1 \int_0^t y^{3/2}(\tau)\,d\tau + \gamma_1.$$

Определим функцию $z(t)$ как решение задачи Коши

$$z'(t) = \alpha_1 p(t)z(t) + \beta_1 z^{\frac{3}{2}}(t), \quad z(0) = \gamma_1.$$

Согласно обобщенной лемме Гронуолла (лемме Гронуолла-Бихари, см. [19]), на промежутке существования функции $z(t)$ выполняется неравенство

$$y(t) \leq z(t).$$

Справедливы равенства

$$z(t) = \frac{1}{\psi^2(t)}, \quad \psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{\beta_1}{2}\int_0^t e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int_0^\tau |p(s)|\,ds}\,d\tau\right) e^{\frac{\alpha_1}{2}\int_0^t |p(\tau)|\,d\tau}.$$

Из последнего условия теоремы вытекает, что существует положительное число m_0 такое, что при $t \in [0, T]$ выполняется

$$\psi(t) \geq m_0.$$

Следовательно, функции $z(t)$ и $y(t)$ будут ограничены на отрезке $[0, T]$:

$$y(t) \leq z(t) \leq \frac{1}{m_0^2}.$$

Далее, имеем

$$|\varphi(t, u)| \leq \frac{(a+1)N_1}{\mu_0 m_0}.$$

Выберем теперь число M так, чтобы выполнялось неравенство

$$M \geq \frac{(a+1)N_1}{\mu_0 m_0}. \tag{2.4.12}$$

Для такого числа M и будет выполняться равенство (2.4.10).

Итак, при указанном выше выборе числа M для решения $u(x, t)$ краевой задачи (2.4.8), (2.4.2), (2.4.3) будет выполняться уравнение

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + \varphi(t, u)]u = f(x, t). \tag{2.4.13}$$

Определим функцию $q(t)$:

$$q(t) = p(t) + \varphi(t, u).$$

Очевидно, что функции $u(x, t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (2.4.1), и что для функций $u(x, t)$ и $q(t)$ выполняются требуемые включения.

Наконец, выполнение для решения $u(x, t)$ краевой задачи (2.4.8), (2.4.2), (2.4.3) с числом M, удовлетворяющим неравенству (2.4.12), интегрального условия переопределения (2.4.4) показывается также, как показывается выполнение аналогичного условия всюду во второй главе .

Изложенное выше и означает, что построенные выше функции $u(x, t)$ и $q(t)$ дают требуемое решение обратной задачи 2.4.1.

Теорема доказана.

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи 2.4.1.

Определим пространство V_1:

$$V_1 = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^4(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^3(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^4(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Зададим в пространстве V_1 норму:

$$\|v\|_{V_1} = \Big\{ \|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} +$$

$$+ \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^4(\Omega))} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)} \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V_1 с такой нормой будет банаховым пространством.

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V_1. Определим функцию $\widetilde{\varphi}(t,w)$:

$$\widetilde{\varphi}(t,w) = \frac{1}{\mu(t)} \left[a \int\limits_\Omega N(x) \Delta w_t(x,t)\, dx - \int\limits_\Omega N(x) \Delta^2 w(x,t)\, dx \right].$$

Далее, положим

$$N_0 = \left(\int\limits_\Omega N^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_2 = \frac{(a+1)N_0}{\mu_0},$$

$$\gamma_2 = \int\limits_\Omega [\Delta u_1(x)]^2\, dx + \int\limits_\Omega [\Delta^2 u_0(x)]^2\, dx + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \int\limits_Q f_{x_i}^2\, dx\, dt.$$

Теорема 2.4.2 *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \mu(t) \in C^2([0,T]), \quad f(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega));$$

$$a > 0, \quad \mu_0 > 0;$$

$$N(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$u_0(x) \in W_2^4(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^2(\Omega);$$

$$u_0(x) = \Delta u_0(x) = u_1(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$\int\limits_\Omega N(x) u_0(x)\, dx = \mu(0), \quad \int\limits_\Omega N(x) u_1(x)\, dx = \mu'(0);$$

$$\int\limits_0^T e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\, d\tau}\, dt < \frac{2}{\beta_2\sqrt{\gamma_2}}.$$

Тогда обратная задача 2.4.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^4(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^3(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\widetilde{\varphi}(t,u))]\, u + \varepsilon \Delta^2 u_t = f(x,t) \tag{2.4.14}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.4.2) и (2.4.3). Разрешимость данной задачи нетрудно доказать, вновь используя метод неподвижной точки и теорему Шаудера. Покажем, что для решений $u(x,t)$ задачи (2.4.14), (2.4.2), (2.4.3) имеет место ограниченность функции $\widetilde{\varphi}(t,u)$.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left\{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\widetilde{\varphi}(\tau,u))]u + \varepsilon\Delta^2 u_\tau\right\} \Delta^2 u_\tau\, dx\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u_\tau\, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\Delta^2 u(x,t)]^2\, dx + a\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_{x_i\tau})^2\, dx\, d\tau +$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta^2u_\tau)^2\,dx\,d\tau=-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega p(\tau)\Delta u\Delta u_\tau\,dx\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega G_M(\widetilde{\varphi}(\tau,u))\Delta u\Delta u_\tau\,dx\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[\Delta u_1(x)]^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[\Delta^2u_0(x)]^2\,dx-\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f_{x_i}\Delta u_{x_i\tau}\,dx\,d\tau. \qquad (2.4.15)$$

Положим

$$\widetilde{y}(t)=\int\limits_\Omega[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx+\int\limits_\Omega[\Delta^2u(x,t)]^2\,dx.$$

Оценивая первые два и последнее слагаемые правой части (2.4.15) с помощью неравенства Юнга, получим оценку

$$\widetilde{y}(t)\le\alpha_1\int\limits_0^t|p(\tau)|y(\tau)\,d\tau+\beta_2\int\limits_0^t y^{3/2}(\tau)\,d\tau+\gamma_2.$$

Вновь используя обобщенную лемму Гронуолла, получим

$$\widetilde{y}(t)\le\widetilde{z}(t),\quad \widetilde{z}(t)=\frac{1}{\widetilde{\psi}^2(t)},$$

$$\widetilde{\psi}(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}-\frac{\beta_2}{2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^\tau|p(\xi)|\,d\xi}\,d\tau\right)e^{\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t|p(\tau)|\,d\tau}.$$

Отсюда и из последнего условия теоремы следует, что функция $\widetilde{y}(t)$ будет ограничена при $t\in[0,T]$.

В свою очередь, из ограниченности функции $\widetilde{y}(t)$ следует ограниченность функции $\widetilde{\varphi}(t,u)$. Выбирая теперь параметр M достаточно большим, получим, что решение $u(x,t)$ задачи (2.4.14), (2.4.2), (2.4.3) будет решением уравнения

$$u_{tt}-a\Delta u_t+\Delta^2u+[p(t)+\varphi(t,u)]u+\varepsilon\Delta^2u_t=f(x,t). \qquad (2.4.16)$$

Из сказанного выше следует, что семейство задач (2.4.16), (2.4.2), (2.4.3) порождает семейство функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, принадлежащих пространству

V_1, причем для этого семейства будет выполняться априорная оценка

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t^{\varepsilon}(x,t)]^2\,dx+\int\limits_{\Omega}[\Delta^2 u^{\varepsilon}(x,t)]^2\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u^{\varepsilon}_{x_i\tau})^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(u^{\varepsilon}_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau++\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta^2 u^{\varepsilon}_{\tau})^2\,dx\,d\tau\le R,$$

постоянная R в которой определяется лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, $N(x)$, числом T и областью Ω. Из этой оценки, из свойства рефлексивности пространства L_2 и из теорем вложения (см. [59]) вытекает, что существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел и функций $u(x,t)$ таких, что

$$\varepsilon_m\to 0\quad \textit{при}\quad m\to\infty,$$

$$\Delta u_t^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}\Delta u_t(x,t)\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q),$$

$$\Delta^2 u^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}\Delta^2 u(x,t)\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q),$$

$$u_{tt}^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}u_{tt}(x,t)\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q),$$

$$\varepsilon_m\Delta^2 u_t^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}0\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q),$$

$$u_t^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}u_t(x,t)\quad \textit{сильно в пространствах}\quad L_2(Q)\quad \textit{и}\quad L_2(S),$$

$$\Delta u^{\varepsilon_m}(x,t)\underset{m\to\infty}{\to}\Delta u(x,t)\quad \textit{сильно в пространствах}\quad L_2(Q)\quad \textit{и}\quad L_2(S).$$

Покажем, что выполняется также сходимость

$$\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})u^{\varepsilon_m}\underset{m\to\infty}{\to}\widetilde{\varphi}(t,u)u\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q).$$

Имеем

$$\int\limits_Q[\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})u^{\varepsilon_m}-\widetilde{\varphi}(t,u)u]\eta\,dx\,dt=\int\limits_Q[\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})(u^{\varepsilon_m}-u)\eta\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_Q[\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})-\widetilde{\varphi}(t,u)]u\eta\,dx\,dt=I_{1m}+I_{2m}.$$

Поскольку функция $|\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})|$ ограничена, и поскольку $u^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} u(x,t)$ сильно в пространстве $L_2(Q)$, то выполняется

$$I_{1m} \to 0 \quad при \quad m \to \infty.$$

Далее, справедливы равенства

$$\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m}) - \widetilde{\varphi}(t,u) = \frac{1}{\mu(t)}\left[a\int\limits_{\Omega} N(x)\Delta(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} N(x)\Delta^2(u^{\varepsilon_m} - u)\,dx\right] = \frac{1}{\mu(t)}\left[a\int\limits_{\Omega} \Delta N(x)(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,dx + \right.$$

$$+ a\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial N(x)}{\partial \nu}(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,ds - \int\limits_{\Omega} \Delta N(x)\Delta(u^{\varepsilon_m} - u)\,dx -$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial N(x)}{\partial \nu}\Delta(u^{\varepsilon_m} - u)\,ds\right].$$

Отсюда

$$I_{2m} = \int\limits_{Q}\left(\frac{a}{\mu(t)}\int\limits_{\Omega} \Delta N(y)[u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]\,dy\right) u\eta\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q}\frac{a}{\mu(t)}\left(\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial N(y)}{\partial \nu}[u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]\,ds_y\right) u\eta\,dx\,dt -$$

$$- \frac{1}{\mu(t)}\int\limits_{Q}\left(\int\limits_{\Omega} \Delta N(y)\Delta(u^{\varepsilon_m}(y,t) - u(y,t))\,dy\right) u\eta\,dx\,dt -$$

$$- \frac{1}{\mu(t)}\int\limits_{Q}\left(\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial N(y)}{\partial \nu}\Delta(u^{\varepsilon_m}(y,t) - u(y,t))\,ds_y\right) u\eta\,dx\,dt =$$

$$= I_{2m}^1 + I_{2m}^2 + I_{2m}^3 + I_{2m}^4.$$

Оценим слагаемое I_{2m}^1:

$$|I_{2m}^1| \le \frac{a}{\mu_0}\int\limits_0^T\left(\left|\int\limits_{\Omega} \Delta N(y)[u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]\,dy\right|\left(\int\limits_{\Omega} |u||\eta|\,dx\right)\right)\,dt \le$$

$$\leq \frac{a}{\mu_0} \int\limits_0^T \left\{ \left(\int\limits_\Omega [\Delta N(y)]^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega [u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\int\limits_\Omega u^2(x,t) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \eta^2(x,t) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt.$$

Заметим, что предпоследний множитель подынтегрального выражения здесь ограничен. Отсюда

$$|I_{2m}^1| \leq A \int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega [u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \eta^2(x,t) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq A \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega [u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \eta^2(x,t) \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(число A здесь определяется числами a, μ_0, C_1, R, а также функцией $N(x)$).

Поскольку имеет место сильная в пространстве $L_2(Q)$ сходимость последовательности $\{u_t^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ к функции $u_t(x,t)$, то из последнего неравенства вытекает сходимость

$$I_{2m}^1 \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Аналогично показывается, что выполняется

$$I_{2m}^2 \to 0, \quad I_{2m}^3 \to 0, \quad I_{2m}^4 \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Из доказанных сходимостей и следует сходимость требуемая:

$$\widetilde{\varphi}(t, u^{\varepsilon_m}) u^{\varepsilon_m} \to \widetilde{\varphi}(t,u)u \quad \textit{при} \quad m \to \infty \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q).$$

Очевидно, что для предельной функции $u(x,t)$ будет выполняться уравнение

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + \widetilde{\varphi}(t,u)]u = f(x,t).$$

Положим

$$q(t) = p(t) + \widetilde{\varphi}(t,u).$$

Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и определяют искомое решение обратной задачи 2.4.1 — функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (2.4.1), условия (2.4.2) и (2.4.3) выполняются по построению. выполнение условия (2.4.4) показывается стандартным образом, принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна.

Теорема доказана.

Выполнение последних неравенств из условий теорем 1 и 2 имеет место, например, если число T мало, или же малы числа N_1 или N_0.

Далее покажем разрешимость обратной задачи 2.4.2.

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V_1. Определим функцию $\varphi_1(t,w)$:

$$\varphi_1(t,w) = \frac{1}{\mu'(t)} \left[a \int\limits_\Omega N(x)\Delta w_t(x,t)\,dx - \int\limits_\Omega N(x)\Delta^2 w(x,t)\,dx \right].$$

Далее, положим

$$p_1(t) = \frac{F(t)-\mu''(t)}{\mu'(t)}, \quad \mu_1 = \min_{0\le t\le T} \mu'(t), \quad \overline{p}_1 = \operatorname*{vraimin}_{0\le t\le T} p_1(t),$$

$$N_2 = \left\{ \int\limits_\Omega [\Delta^2 u_0(x)]^2\,dx + \int\limits_\Omega [\Delta u_1(x)]^2\,dx + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^n \int\limits_Q f_{x_i}^2\,dx\,dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.4.3 *Пусть выполняются условия*

$$N(x)\in C^2(\overline{\Omega}), \quad \mu(t)\in C^2([0,T]), \quad f(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega));$$

$$a>0, \quad \mu_1>0, \quad \overline{p}_1>0;$$

$$N(x)=0 \quad \textit{при} \quad x\in\Gamma;$$

$$u_0(x)\in W_2^4(\Omega), \quad u_1(x)\in W_2^2(\Omega);$$

$$u_0(x)=\Delta u_0(x)=u_1(x)=0 \quad \textit{при} \quad x\in\Gamma;$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u_0(x)\,dx = \mu(0), \quad \int\limits_{\Omega} N(x)u_1(x)\,dx = \mu'(0);$$

$$\frac{(a+1)N_0N_2}{\mu_1} \leq \overline{p}_1.$$

Тогда обратная задача 2.4.2 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^3(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Вновь воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p_1(t) + G_M(\varphi_1(t,u))]\,u_t + \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t) \qquad (2.4.17)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.4.2) и (2.4.3). Используя метод неподвижной точки, нетрудно показать, что данная задача имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_1. Покажем, что для решений этой задачи при выполнении неравенства $M \leq \overline{p}_1$ выполняются нужные априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \left\{u^\varepsilon_{\tau\tau} - a\Delta u^\varepsilon_\tau + \Delta^2 u^\varepsilon + [p_1(\tau) + G_M(\varphi_1(\tau,u^\varepsilon))]u^\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 u^\varepsilon_\tau\right\}\Delta^2 u^\varepsilon_\tau\,dx\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f(x,\tau)\Delta^2 u^\varepsilon_\tau\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя неравенство

$$p_1(\tau) + G_M(\varphi_1(\tau,u^\varepsilon)) \geq 0$$

(справедливое вследствие указанного выше выбора числа M) и применяя неравенство Юнга, получим оценку

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u^\varepsilon_t(x,t)]^2\,dx + \int\limits_{\Omega}[\Delta^2 u^\varepsilon(x,t)]^2\,dx + a\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u^\varepsilon_{x_i\tau})^2\,dx\,d\tau +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta^2 u_\tau^\varepsilon)^2 \, dx \, d\tau \leq N_2^2. \tag{2.4.18}$$

Из (2.4.18) следует оценка функций $\varphi_1(t,u)$ и $u_{\tau\tau}$:

$$|\varphi_1(t,u)| \leq \frac{(a+1)N_0 N_2}{\mu_1}, \tag{2.4.19}$$

$$\int_0^t \int_\Omega (u_{\tau\tau}^\varepsilon)^2 \, dx \, d\tau \leq N_3, \tag{2.4.20}$$

число N_3 здесь определяется лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$ и $N(x)$, числами a и T.

Из неравенств (2.4.18)-(2.4.20) вытекает существование функции $u(x,t)$, являющейся решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p_1(t) + G_M(\varphi_1(t,u))] \, u_t = f(x,t) \tag{2.4.21}$$

и такой, что для нее выполняются условия (2.4.2) и (2.4.3) (см. доказательство теоремы 2.4.2). Далее, зафиксируем число M: $M = \overline{p}_1$. Из последнего условия теоремы и из оценки (2.4.19) следует, что при данном выборе числа M решение $u(x,t)$ уравнения (2.4.21) будет решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p_1(t) + \varphi_1(t,u)] \, u_t = f(x,t). \tag{2.4.22}$$

Положим

$$q(t) = p_1(t) + \varphi_1(t,u).$$

Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и дадут искомое решение обратной задачи 2.4.2.

Теорема доказана.

Заключение

В диссертации получены следующие результаты:

- исследована разрешимость начально-краевых задач с нелокальными краевыми условиями для параболического уравнения высокого порядка. доказаны теоремы существования;
- исследована разрешимость линейных обратных задач с интегральным и граничным условием переопределения для параболических уравнений высокого порядка с неизвестным коэффициентом зависящим от времени. Доказаны теоремы существования и единственности;
- исследована разрешимость нелинейных обратных задач с интегральным переопределением для параболического уравнения высокого порядка. Доказаны теоремы существования и единственности;
- исследована разрешимость нелинейных обратных задач для параболических уравнений с двумя неизвестными коэффициентами зависящими от времени. Доказаны теоремы существования и единственности;
- исследована разрешимость нелинейных обратных задач с интегральным переопределением для нестационарных уравнений высокого порядка. Доказана теорема существования.

Область применения полученных результатов – обратные задачи для уравнений параболического типа высокого порядка и теория нелокальных краевых задач. Полученные результаты позволят перейти к изучению новых обратных задач, обобщить и систематизировать исследования в данной области.

Литература

[1] Алифанов, О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.

[2] Алексеев, Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г. В. Алексеев — М.: Научный мир, 2010. — 411с.

[3] Абдрахманов, А. М. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка / А. М. Абдархманов, А. И. Кожанов // Изв. вузов, Математика. — 2007. — №5. — С.3-12.

[4] Абдрахманов, А. М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка/ А. М. Абдарахманов // Матем. заметки. — 2010. — №88. — С.163-172.

[5] Аблабеков, Б. С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений / Б. С. Аблабеков, Бишкек. — Илим, 2001. — 181 с.

[6] Атаманов, Э. Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений / Э. Р. Атаманов, М. Ш. Мамаюсупов. — Фрунзе:Илим, 1990. — 100с.

[7] Аниконов, Ю. Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю. Е. Аниконов, Ю. Я. Белов // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 306. — № 6. — С.1289-1293.

[8] Аниконов, Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. электрон. матем. изв. — 2012. — т.9. — С.45-64.

[9] Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче идентификации коэффициентов многомерного параболического уравнения / Ю. Я. Белов, А. С. Ермолаев // В сб. Комплексный анализ и дифференциальные уравнения. Красноярск: КрасГУ. — 1996. — С.16-27.

[10] Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Ю. Я. Белов, Е. Г. Саватеев // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 334. — № 5. — С.800-804.

[11] Бубнов Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений / Б. А. Бубнов. — Новосибирск: ВЦСО АНСССР — 1989. — 44 с.

[12] Безнощенко, Н. Я. Об определении коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении / Н. Я. Безнощенко // Сиб. мат. журн. — 1975. — Т. 16. — № 3. — С. 473-482.

[13] Безнощенко, Н. Я. Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении / Н. Я. Безнощенко // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т.11. — № 1. — С.19-26.

[14] Борухов, В. Т. Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса / В. Т. Борухов, В. И. Корзюк // Вестн. БГУ сер.1. — 2000. — №3. — С.54-57.

[15] Борухов, В. Т. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам / В. Т. Борухов, П. Н. Вабищевич, В. И. Корзюк // ИФЖ. — 2000. — т.73. — №4. — С.744-747.

[16] Зельдович, Я. Б. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 478с.

[17] Васин, И. А. О некоторых обратных задачах динамики вязкой жидкости в случае интегрального переопределения / И. А. Васин // ЖВМ и МФ. — 1992. — Т.31. — №7. — С.1071-1079.

[18] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — изд.4-е. М.: Наука. — 1981. — 512с.

[19] Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович.— М.: ФИЗМАЛИТ, 2002. — 480с.

[20] Дженалиев, М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев. — Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.

[21] Дженалиев, М. Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов. — Алматы: ГЫЛЫМ, 2010.

[22] Иванчов, Н. И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / Н. И. Иванчов // Укр. мат. журн., 1993. — Т. 45. — № 8. — С.1066-1071.

[23] Иванчов, Н. И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости / Н. И. Иванчов // Сиб. мат. журн., 1994. — Т. 35. — № 3. — С.612-621.

[24] Иванчов, Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / Н. И. Иванчов // Сиб. мат. журн., 1998. — Т. 39. — № 3. — С.539-550.

[25] Іванчов, М. І. Редукція задачі з вильнаю межею для параболічного рівняння до оберненой задачі / М. І. Іванчов // Нелинейные граничные

задчи. Донецк: Ин-т прикладной математики и механики, 2002. — Т.12. — С.73-83.

[26] Іванчов, М. І. Обернена задача з вильнаю межею для рівняння теплопроводності / М. І. Іванчов // Украинский мат.журн., 2003. — Т.55. — № 7. — С.901-910.

[27] Ионкин, Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференциальные уравнения, 1977. — Т.33. — №2. — С.294-304.

[28] Ионкин, Н. И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевымим условиями / Н. И. Ионкин, Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения, 1979. — Т.15. — №7. — С.1284-1296.

[29] Ионкин, Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференц.уравнения, 1997 — Т. 13 — №2. — С.294-304.

[30] Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. — Новосибирск: Сибирское инженерное изд-во, 2009. — 458с.

[31] Кириллова, Г. А. Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения / Г. А. Кириллова // Матем.заметки ЯГУ, 2003. — Т.10. — №1. — С.34-35.

[32] Кириллова, Г. А. Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка. дисс. к.ф.-м.н. Кириллова Г.А.Стерлитамак, 2004.

[33] Кириллова, Г. А. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка / Г. А. Кириллова, А. И. Кожанов // Мат.заметки ЯГУ, 2000. — Т.7. — №1 — С.35-48.

[34] Камынин, В. Л. Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка / В. Л. Камынин, М. Сарольди // Журнал

вычислительной математики и матем.физики, 1998 — Т. 38. — №10. — С.1683-1691.

[35] Камынин, В. Л. Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка / В. Л. Камынин, Э. Франчини // Матем. заметки, 1998. — Т.64 — вып.5. — С.680-691.

[36] Камынин, В. Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уранвнений с условием финального переопределения / В. Л. Камынин // Матем.заметки, 2003. — Т.73. — вып.2. — С.217-277.

[37] Камынин, В. Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения / В. Л. Камынин // Матем. заметки, 2005. — Т.77. — вып.4. — С.522-534.

[38] Камынин, В. Л. Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении / В. Л. Камынин // Матем. заметки, 2008. — Т.84. — вып.1. — С.48-58.

[39] Клибанов, М. В. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / М. В. Клибанов // Матем. заметки, 1991. — Т.30. — вып.2. — С.203-210.

[40] Кожанов, А. И. Уравнения составного типа и нелинейные обратные задачи для эллиптических и параболических уравнений / А. И. Кожанов. — Новосибирск: Препринт. РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики, 1998.

[41] Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и матем. физики, 2004. — Т.44. — №4. — С.694-716.

[42] Кожанов, А. И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени / А. И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и матем. физики, 2005. — Т.45. — №12. — С.2168-2184.

[43] Кожанов, А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина // Дифференц. уравнения, 2006. — №42. — С.1166-1179.

[44] Кожанов, А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнениях составного типа / А. И. Кожанов // Вестник Южно-Уральского государственного университета, 2008. — Вып. 1. — № 15. — С.27-36.

[45] Кожанов, А. И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа / А. И. Кожанов // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 2008. — Т.8. — вып. 3. — С.81-99.

[46] Кожанов, А. И. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений / А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина // Докл.АН, 2009. — №404. — С.589-592.

[47] Кожанов, А. И. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений / А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина // Математический журнал, 2009. — №9. — С.78-92.

[48] Кожанов, А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи / А. И. Кожанов // ИПММ НАН Украины, 2010. — №20. — С.54-76.

[49] Кожанов, А. И. О разрешимости некоторых нелокальных ии связанных с ними обратных задач для параболических уравнений / А. И. Кожанов // Матем.заметки ЯГУ, 2011. — Т.18. — №2. — С.64-78.

[50] Кожанов, А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений / А. И. Кожанов // Докл. АН, 2014. — Т.457. — №2. — С.152-156.

[51] Кожанов, А. И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нестационарных уравнений / А. И. Кожанов // Сиб.электронные матем. известия, 2015. — Т.12. — С.264-275.

[52] Кожанов, А. И. Разрешимость пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений /А. И. Кожанов // Дифференц. уравнения, 2015. — №51. — С.1048-1055.

[53] Кожанов, А. И. Нелинейные обратные задачи с интегральным переопределением для некоторых нестационарных дифференциальных уравнений высокого порядка / А.И.Кожанов, Л.А.Телешева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 2017. — Т.10. — № 2. — С.24 — 36.

[54] Костин, А. Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения / А. Б. Костин, А. И. Прилепко // Дифференци. уравнения, 1996. — №32 — С.1319-1328.

[55] Короткий, А. И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости / А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов // Тр.ИММ ДВО АН, 2006. — №12. —- С.88-97.

[56] Колтуновский, О. А. Обратные задачи для параболических уравнений в ограниченной области. дисс. к.ф.-м.н. Колтуновский О.А. Южно-Сахалинск, 2006.

[57] Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. — М.: Наука, 1980. — 286с.

[58] Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973. — 576с.

[59] Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408с.

[60] Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников , Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736с.

[61] Лионс, Ж. - Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 588с.

[62] Мегралиев, Я. Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвёртого порядка / Я. Т. Мегралиев // Вестник ТОГУ. Математика и иформатика, 2012. — №4(27) — С.25-34.

[63] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М.: Высшая школа, 1995. — 301с.

[64] Нахушев, А. М. Нагруженные уравнения и их применения / А. М. Нахушев. — М.: Наука, 2012. — 232с.

[65] Николаев, О. Ю. Разрешимость обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом поглощения // Вестник БГУ, 2012. — №9. — С.103-110.

[66] Николаев, О. Ю. Разрешимость линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка / О. Ю. Николаев // Мат. заметки СВФУ, 2014. — Т.21. — № 2. — С.60-68.

[67] Прилепко, А. И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики / А. И. Прилепко // Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1992. — С.151-162.

[68] Прилепко, А. И. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Мат. сб., 1992. — Т.183. — № 4. — С.49-68.

[69] Прилепко, А. И. Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении II / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Сиб.мат.журнал., 1993. — Т.33. — №3. — С.146-155.

[70] Прилепко, А. Н. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении / А. И. Прилепко, И. В. Тихонов // Изв. РАН. Сер. Математика, 1994. — Т.58.— № 2. — С.167-188.

[71] Прилепко, А. И. Свойства решений параболических уравнений и единственность решений обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2003. — Т. 43. — № 4. — С.562-570.

[72] Прилепко А. И. Обратные задачи для эволюцонных полулинейных уравнений / А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский // Докл. АН СССР, 1984. — Т.277 — №4. — С.799-803.

[73] Прилепко, А. И. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики / А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский // Дифференц.уравнения, 1985. — Т.21. — №4. — С.694-700.

[74] Похожаев, С. И. О глобальной разрешимости уравнения Курамото-Сивашинского при ограниченных начальных данных / С. И. Похожаев // Матем. сб., 2009. — Т.200. — №7. — С.131-144.

[75] Пулькина, Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л. С. Пулькина. — Самара: Изд-во Самарский университет, 2012. — 193с.

[76] Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости / Л. С. Пулькина // Неклассические уравнения матем. физики, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2007. — С.232-236.

[77] Пятков, С. Г. О разрешимости некоторых классов обратных задач / С. Г. Пятков // Информационный технологии и обратные задачи раци-

онального природопользования Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. — С.61-66.

[78] Пятков, С. Г. Некоторые обратные задачи для параболических уравнений / С. Г. Пятков // Фундаментальная и прикладная математика, 2006. — Т.12. — Вып.4. — С.187-202.

[79] Пятков, С. Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Сиб. электр. матем. известия, 2014. — Т.11. — С.777-799.

[80] Павлов, С. С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением / С. С. Павлов // Мат. заметки ЯГУ, 2011. — Т.18. — Вып.2. — С.128-153.

[81] Романов, В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа / В. Г. Романов. — М.: Наука, 1972.

[82] Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах / В. Г. Романов. — М.: Научный мир, 2005.

[83] Самарский, А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференц. уравн., 1980. — Т.16. — №11. — С.1925-1935.

[84] Соловьев, В. В. О разрешимости обратных коэффициентных задач для параболического уравнения / В. В. Соловьев // Вестник МГОУ, Сер. Физика-математика, 2012. — №1. — С. 23-26.

[85] Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988.

[86] Телешева, Л. А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени / Л. А. Телешева // Вестник БГУ. Математика и информатика, 2010. — №9. — С. 175-182.

[87] Телешева, Л. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Л. А. Телешева // Матем. заметки ЯГУ, 2011. — Т.18. — Вып.2. — С.180-201.

[88] Телешева, Л. А. О разрешимости обратных задач восстановления двух неизвестных коэффициентов параболического уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Неклассич. уравнения мат. физики. Сб.науч.работ, 2012. — С.213-226.

[89] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Мат. заметки ЯГУ, 2013. — Т.20. — С.186-196.

[90] Телешева, Л.А. Параболические уравнения высокого порядка: обратные задачи с граничным переопределением и гранично-нелокальные краевые задачи / А. И. Кожанов, Л. А. Телешева // Докл. АМАН, 2015. — Т.17. — № 4. — С.42 - 60.

[91] Телешева, Л.А. Восстановление параметров в краевых задачах для линейных параболических уравнений четвертого порядка // Л. А. Телешева // Мат. заметки СВФУ, 2015. — Т.22. — №3. — С. 48-56.

[92] Телешева, Л. А. Разрешимость некоторых обратных задач для параболических уравнений с интегральным условием переопределения / Л. А. Телешева // V международная молодежная научная школа-конференция, теория и численные методы решения обратных и некорретных задач. — Новосибирск, Академгородок, 2013. — С.88.

[93] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения четвертого порядка / Л. А. Телешева // Тез.докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений". — Новосибирск, 2013. — С.266.

[94] Телешева, Л. А. Разрешимость линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными коэффициентами / Л. А. Телешева // Тез.докл. Международной конференции по математическому моделированию.- Якутск,2014. — С. .

[95] Телешева, Л. А. О разрешимости некоторых обратных задач параболических уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Материалы V Международной конференции. Математика, ее приложения и математическое образование. — Улан-Удэ, 2014. — С. 312-314.

[96] Телешева, Л. А. О разрешимости одной обратной задачи для некоторых классов параболических уравнений четвертого порядка / Л. А. Телешева // Тезисы докладов международной конференции Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. — Улан-Удэ, 2015. — С.282.

[97] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными коэффициентами в правой части / Л. А. Телешева // Материалы семинара молодых ученых с международным участием Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа. — Улан-Удэ, 2015. — С. 166.

[98] Тихонов, А. Н. Методы решений некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288с.

[99] Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // ДАН СССР, 1943. — Т.5. — №39. — С.195-198.

[100] Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: ФИЗМАЛИТ,2002. — 488с.

[101] Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.

[102] Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С. Я. Якубов. — Баку: Элм, 1985. — 220с.

[103] Anikonov, Yu. E. Multidimensional inverse and ill-posed problems for differential equations / Yu. E. Anikonov. — Utrecht: VSP, 1995. — 138p.

[104] Anikonov, Yu. E. Formulas in inverse and ill-posed problems / Yu. E. Anikonov. — Utrecht: VSP, 1997. — 239p.

[105] Anikonov, Yu. E. Inverse problems for kinetic and other evolution equations / Yu. E. Anikonov. — Utrecht: VSP, 2001. — 275p.

[106] Anikonov, Yu. E. On unique solvability of an inverse problem for a parabolic equation / Yu. E. Anikonov, Yu. Ya. Belov // Sov. Math. Dokl. — 1989. — V. 39. — №.3. — P. 601-605.

[107] Anikonov, Yu. E. Determining two unknown coefficients of the parabolic type equation / Yu. E. Anikonov, Yu. Ya. Belov // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2001. — V. 9. — № 5. — P. 469-488.

[108] Anikonov, Yu. E. Inverse and Ill-Posed Source Problems / Yu. E. Anikonov, B. A. Bubnov , G. N. Erokhin. — Utrecht: VSP, 1997. —237 p.

[109] Belov, Yu. Ya. Inverse problems for parabolic equations / Yu. Ya. Belov // J. Inverse Ill-Posed Probl, 1993. — V. 1. — №. 4. — P. 283-305.

[110] Belov, Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations / Yu. Ya. Belov. — Utrecht: VSP, 2002. — 212p.

[111] Berdyshev, A. S. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator / A. S. Berdyshev, A. Cabada , B. J. Kabirkulov // Computers and Mathematics with Applications, 2011. — V.62 — P.3884-3893.

[112] Berdyshev, A. S. On Volterness of boundary-value problem for the fourth order equation / A. S. Berdyshev, D. Amanov // in: Proceedings

of International Scientific Conference "Differential Equations and their Applications". — Samara, Russia. — 2002. — p.17-19.

[113] Dzhuraev, T. D. To the theory of differential equations of the forth order / T. D. Dzhuraev, A. Sopuev. — Tashkent: Fan, 2000. — 144 p.

[114] Liu, C. Some properties of solutions for a class of metaparabolic equations / C. Liu, Y. Guan, Z. Wang // Electronic Jurnal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2010. — №40. — P. 1-14.

[115] Liu, C. Some properties of solutions for viscous Cahn-Hilliard equation / C. Liu, J. Yin // Northeast. Math. J. — 1998. — V.14(4). — P. 455-466.

[116] Novick-Cohen, A. On viscous Cahn-Hilliard equation / A. Novick-Cohen // In: Material Instablities in cotinuum mechanics and related mathematical problems (J.Ball,ed.) Oxford Science publications, Clarendon press. — Oxford. — 1998. — P. 329-342.

[117] Cannnon, J. R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations / J. R. Cannnon, Y. Lin // Inverse Problems. — 1988. — V.4. — №1. — P.35-45.

[118] Denisov, A. M. Elements of the Theory of Inverse Problems / A. M. Denisov. — Utrecht: VSP, 1999. — 273p.

[119] Ivanchov, M. Inverse problems for equation of parabolic type / Ivanchov, M. — Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.

[120] Isakov, V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. — Springer Science. — 2006. — 343p.

[121] Isakov, V. Inverse parabolic problems with final overdetermination / V. Isakov // Comm.Pure Appl. Math. — 1991. — V.54. — P. 185-209.

[122] Kozhanov, A. I. Composite type equations and inverse problems / A. I. Kozhanov. — Utrecht; VSP, 1999.

[123] Kozhanov, A. I. On solvability of an inverse problems for parabolic equation with coefficient and right-hand side / A. I. Kozhanov // II .J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2003. — V. 11. — № 5. — P. 505-522.

[124] Kozhanov, A.I. The problem of recovery of the boundary condition for a heat equation / A. I. Kozhanov // Аналитические методы анализа и дифференц. уравнений. AMADE-2011: материалы 6-ой Междунар.конф., посвящ. памяти проф. А.А.Килбаса/под общ.ред. С.В.Рогозина. — Минск.: Изд.центр БГУ. — 2012. — с.87-96.

[125] Lorenzi, A. An Introduction to Mathematikal Problems via Functional Analysis / A. Lorenzi — Utrecht: VSP, 2001.

[126] Lavrentiev, M. M. Inverse Problems of Mathematical Physics / M. M. Lavrentiev. — Utrecht: VSP, 2003.

[127] Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. C. Orlovsky, I. A. Vasin. — New York:Dekker. — 1999.

[128] Romanov, V. G. Invtstigation Methods for Inverse Problems / V. G. Romanov. — Utrecht:VSP, 2002.

[129] Sivashinsky, G. On irregular wavy flow of a liquid down a vertical plane / G. Sivashinsky, D. M. Michelson // Prog. Theor. Phys. — 1980. — V. 63 — p. 2112-2114.

[130] Kuramoto, Yo. On the formation of dissipative structures in reactiondiffusion systems / Yo. Kuramoto, T. Tsuzuki // Progr. Theoret. Phys. — 1975. — V.54. — p. 687–699.

[131] Wang, W. Two-dimensional parabolic inverse source problem with final overdetermination in reproducing kernel spase / W. Wang, M. Yamamoto, B. Han // Chinese Annals of Mathimatics. Series B. — 2014. — V. 35. — P. 469-482.