На правах рукописи

Телешева Любовь Александровна

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Улан-Удэ – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Бурятский государственный университет»

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, проф. **Кожанов Александр Иванович**

Официальные оппоненты:

Белов Юрий Яковлевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений института математики и фундаментальной информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский федеральный университет»,

Чередниченко Виктор Григорьевич,д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры инженерной математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет»

Защита состоится 201 года в часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан “___” 201 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук — Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Обратные задачи возникают в ситуациях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, нужно ставить задачи определения параметров самой математической модели. К таким задачам относятся задачи определения различных коэффициентов уравнений, либо внешнего воздействия, либо граничных или начальных условий и пр.

Основы теории и практики исследования обратных задач заложены и развиты в фундаментальных работах отечественных математиков, таких как: А.Н.Тихонов(1979), М.М.Лаврентьев(1980), В.Г.Романов(1972), А.И.Прилепко(1984). На данный момент, теория обратных задач, в силу своей теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Вопросы разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа второго порядка, рассматривались в работах А.И.Прилепко, Н.И.Иванчова, А.И.Кожанова, Ю.Я.Белова, Ю.Е.Аниконова, В.Л.Камынина, M.Yamamoto, М.В.Клибанова, В.М.Исакова, В.В.Васина, A.Lorenzi, С.Г.Пяткова, С.И.Кабанихина и многих других. Задачи для нестационарных, так называемых, метапараболических уравнений изучены в работах C.Liu, Y.Guan, Z.Wong в одномерном случае.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений и уравнений составного типа второго порядка по времени изучались в работах Э.Р.Атаманова, Б.С.Аблабекова, С.Г.Пяткова, А.И.Кожанова, Я.Т.Мегралиева, Г.В.Намсараевой.

Уравнения параболического типа высокого порядка представляют собой одну из основных математических моделей, возникающих в теории горения (турбулентность пламени), теории химических реакторов, модели химического осциллятора и в др. прикладных вопросах. Примером таких уравнений является уравнение Курамото-Сивашинского, разрешимость которого довольно хорошо освещена в научных публикациях.

Обратные задачи для уравнений параболического типа высокого порядка, остаются малоизученными. В имеющихся на данный момент работах главным образом изучались обратные задачи с неизвестным параметром, зависящим от пространственной переменной.

В работах А.И.Кожанова, Г.А.Кирилловой, О.Ю.Николаева, Л.А.Борисовой, В.Л.Камынина исследуется существование и единственность регулярных решений для параболического уравнения четного порядка с неизвестным параметром зависящим от пространственной переменной в различных постановках, различными методами.

В ряде работ В.Л.Камынин исследует в прямоугольнике обратные задачи определения внешнего воздействия или младшего коэффициента, зависящего от времени в уравнениях параболического типа высокого порядка с дополнительным интегральным условием переопределения и однородными граничными условиями. Доказана локальная теорема существования и глобальная теорема единственности. В данной диссертационной работе рассматриваются подобные задачи, но с неоднородными граничными условиями,что в случае нелинейной обратной задачи существенно осложняет доказательство.

При исследовании разрешимости обратных задач используется редукция её с помощью условия переопределения к прямой задаче. В результате редукции получаем прямую задачу, чаще всего, с нелокальными граничными условиями (нелокальную задачу).

Полученные в диссертации результаты о разрешимости нелокальных задач для параболических уравнений имеют самостоятельное значение.

Цель работы. Основной целью работы является исследование разрешимости (доказательство существования и единственности) обратных задач для уравнений параболического типа четвертого и более высокого порядков с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

Методы исследования. Для поставленных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения. Техника доказательства основана на переходе от исходной обратной задачи к новой уже прямой начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения (нагруженного). На основе существования решения прямой задачи делается вывод о существовании решения обратной задачи.

При доказательстве существования решения редуцированной краевой задачи применяются методы основанные на теореме о методе продолжения по параметру, на методе срезывающих функций, методе априорных оценок и методе регуляризации.

Так же используется метод Фурье для построения решения некоторых линейных обратных задач.

Научная новизна. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

• Доказана разрешимость начально-краевых задач с нелокальными краевыми условиями для параболического уравнения высокого порядка.

• Доказана разрешимость линейных обратных задач с интегральным и граничным условием переопределения для параболических уравнений высокого порядка с неизвестным коэффициентом зависящим от времени.

• Доказана разрешимость нелинейных обратных задач с интегральным переопределением для параболического уравнения высокого порядка.

• Доказана разрешимость нелинейных обратных задач для параболических уравнений с двумя неизвестными коэффициентами зависящими от времени.

• Доказана разрешимость нелинейных обратных задач с интегральным переопределением для нестационарных уравнений высокого порядка.

Теоретическая и практическая ценность.Диссертационная работа носит теоретический характер. Все полученные результаты являются новыми. Ее результаты дополняют многочисленные исследования по линейным и нелинейным обратным задачам, и могут найти применение в дальнейшем изучении обратных задач для параболических уравнений высоких порядков.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались - на семинаре под рук. проф. Кожанова А.И. (Новосибирск, ИМ

СОРАН им. С.Л.Соболева, 2010-2016); на научной конференции "Математика, её приложения и математическое образование"(Улан-Удэ, 2011, 2014); на II и V международной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 2010, 2013); на международной конференции "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений"(Новосибирск, 2013); на международной конференции "Методы создания, исследования и идентификации математических моделей"(Новосибирск, 2013); на VII международной конференции по математическому моделированию (Якутск, 2014); на международной конференции "Дифференциальные уравнения и математические моделирование"(Улан-Удэ, 2015); на семинаре "Обратные задачи"под рук. доктора физ.-мат. наук, проф. Белова Ю.Я. (Красноярск, ИМФИ СФУ, 2014-2016); на семинаре "Избранные вопросы математического анализа"под рук. доктора физ.-мат. наук, проф. Демиденко Г.В. (Новосибирск, ИМ СОРАН им. С.Л.Соболева, 2016).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ (из них 6 тезисы, 7 статьи), в которых отражено ее основное содержание.

Работы [4], [6] написаны в соавторстве. Автором получены доказательства основных априорных оценок, А. И. Кожанову принадлежат идеи постановок задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 155 страниц, включая список литературы, который состоит из 131 наименований.Формулы, теоремы и замечания в каждой главе нумеруются тремя натуральными числами, первое из которых указывает на номер главы, второе – номер параграфа, третье – номер формулы в параграфе.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, профессору Александру Ивановичу Кожанову за предложенную тему, ценные советы и постоянное внимание к работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для параболического уравнения высокого порядка.

Здесь и далее изучаются задачи в цилиндре Q или в прямоугольнике D:

$$Q = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T), T < \infty\},$$
$$D = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T), T < \infty\}.$$

В §1.1 рассмотрена обратная задача с граничным переопределением в многомерном случае. Возникающую при редукции изучаемой обратной задачи нелокальную задачу можно трактовать как обобщение одного из случаев нелокальной краевой задачи А.А. Самарского, предложенной для одномерного уравнения теплопроводности[1], причем обобщение как многомерное, так и обобщение на параболические уравнения высокого порядка. Представляется, что полученные в настоящем параграфе результаты о разрешимости многомерных аналогов задачи А.А. Самарского, а также связанных с ними краевых задач для нагруженных уравнений имеют и самостоятельное значение.

Обратная задача 1.1:*найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S$$

(здесь и далее $\nu_x = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_n})$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x);

$$\int\limits_{\Gamma} R(x)u(x,t)\, ds_x = 0, \quad 0 < t < T.$$

[1]Самарский, А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференц. уравн., 1980. — Т.16. — №11. — С.1925-1935.

Нелокальная краевая задача 1.1:*найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условие (1) и

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_1(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K_2(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, (x,t) \in S.$$

Пусть выполняется условие: *функции $K_1(x,y,t)$ и $K_2(x,y,t)$ таковы, что существует функция $K_0(x,y,t)$ из класса $C^5(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T])$, для которой при $(x,t) \in S$ выполняются равенства*

$$\frac{\partial K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = K_1(x,y,t), \quad \frac{\partial \Delta_x K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = K_2(x,y,t). \tag{2}$$

Определим оператор B:

$$(Bv)(x,t) = v(x,t) - \int\limits_{\Gamma} K_0(x,y,t)v(y,t)ds_y,$$

такой, что: *для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по $t \in [0,T]$ выполняются неравенства*

$$k_1\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|Bv\|_{L_2(\Gamma)} \leq k_2\|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k_i = const, \quad 0 < k_1 < k_2. \tag{3}$$

Теорема 1.1.1. *Пусть выполняются условия (2) и (3), и пусть функции $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,t)$ таковы, что для них выполняются некоторые условия малости. Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f(x,0) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}$, нелокальная краевая задача 1.1 имеет решение $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$ и такое, что $u_t(x,t) \in L_2(S)$.*

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Определим оператор B_λ:

$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda \int\limits_{\Gamma} K_0(x,y,t)v(y,t)ds_y.$$

Теорема 1.1.2. *Пусть выполняются условие (2) и для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по $t \in [0,T]$ и $\lambda \in [0,1]$ выполняются неравенства*

$$k_1\|v\|_{L_2(\Gamma)} \le \|B_\lambda v\|_{L_2(\Gamma)} \le k_2\|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k_i = const, \quad 0 < k_1 < k_2;$$

$$\frac{\partial K_0(x,y,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad при \quad (x,t) \in S, \quad y \in \Gamma;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \nu_{x_i} \le -m_0 < 0 \quad при \quad x \in \Gamma.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача 1.1 имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$.

Из теоремы 1.1.2 непосредственно следуют условия существования для обратной задачи 1.1.

Теорема 1.1.3. *Пусть выполняются условия $h(x,t) \in C^5(\overline{Q})$, $c(x) \in C^4(\overline{\Omega})$, $R(x) \in C(\overline{\Omega})$;*

$$c(x) \ge c_0 > 0 \quad при \quad x \in \overline{\Omega}; \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad при \quad (x,t) \in S;$$

$$\left| \int_\Gamma R(x) h(x,t)\, ds_x \right| \ge r_0 > 0 \quad при \quad t \in [0,T];$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \nu_{x_i} \le -m_0 < 0 \quad при \quad x \in \Gamma.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))$, $\frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial \Delta f(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ при $(x,t) \in S$, обратная задача 1.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

В §1.2 рассмотрен одномерный аналог обратной задачи 1.1. Полученные условия существования несколько отличаются от условий теорем §1.1 , но не противоречат им.

Обратная задача 1.2: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямо-*

угольнике D уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{4}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$
$$u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1).$$

Нелокальная задача 1.2: *найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике D уравнению*

$$v_t + v_{xxxx} + c(x,t)v = f(x,t).$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$v_x(0,t) = \alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_2(t)v(1,t) + \alpha_0(t), \quad t \in (0,T),$$
$$v_x(1,t) = \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v(1,t) + \beta_0(t), \quad t \in (0,T),$$
$$v_{xxx}(0,t) = \gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v(1,t) + \gamma_0(t), \quad t \in (0,T),$$
$$v_{xxx}(1,t) = \delta_1(t)v(0,t) + \delta_2(t)v(1,t) + \delta_0(t), \quad t \in (0,T),$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in (0,1).$$

Теорема 1.2.1. *Пусть выполняются включения: $c(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\alpha_i(t) \in C^1([0,T])$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$, $\gamma_i(t) \in C^1([0,T])$, $\delta_i(t) \in C^1([0,T])(i = 1,2)$. А также условия*

$$\alpha_0(0) = \beta_0(0) = \gamma_0(0) = \delta_0(0) = 0,$$
$$\alpha_1(t)\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\zeta - \beta_2(t)\zeta^2 \geq 0, \quad c_t(x,t) \leq 0 \text{ при } \quad (x,t) \in \bar{D},$$
$$c(x,t) - \tfrac{\delta}{\delta_0^2}[\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] \geq 0, \quad (x,t) \in \bar{D},$$
$$c(x,t) - \tfrac{4}{\delta\delta_0^2}[\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] \geq 0, \quad (x,t) \in \bar{D},$$

с положительными числами δ, δ_0 такими, что $\delta^2\delta_0^2 \leq \frac{1}{4}$, $\frac{4\delta_0^2}{\delta^2} \leq \frac{1}{4}$. Тогда существует решение $v(x,t)$ нелокальной задачи 1.2 такое, что $v(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$.

Теорема 1.2.2. *Пусть выполняются включения* $c(t) \in C^1([0,T])$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\alpha_i(t) \in C^1([0,T])$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$, $\gamma_i(t) \in C^1([0,T])$, $\delta_i(t) \in C^1([0,T])(i=0,2)$, $f_{1xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $f_{1xxxxt}(x,t) \in L_2(D)$, $h(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $h_{xxxx}(x,t) \in C(\bar{D})$, $h_{xxxxt}(x,t) \in C(\bar{D})$.
Далее, пусть выполняются условия

$$[\alpha_1(t) - \tfrac{1}{2}h^2_{1xxxx}(x,t)]\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\zeta - \beta_2(t)\zeta^2 \geq 0,$$
$$h(0,t) \neq 0, \quad c(t) \geq c_0 > 0, \ \text{при } t \in [0,T].$$

Тогда обратная задача 1.2 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q(t) \in L_2(D)$.

В §1.3 рассматривается задача восстановления неизвестного внешнего воздействия составного типа с граничными условиями переопределения.

Обратная задача 1.3: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$ *и* $q_2(t)$, *связанные в прямоугольнике* D *уравнением*

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t),$$

причем для функции $u(x,t)$ *должны выполняться условия*

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$
$$u(1,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

Теорема 1.3.1. *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_x(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $h_1(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $h_2(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $u_0(x) \in C^4([0,1])$.

Кроме того , пусть выполняются условия:

$$h_1(x,t) \neq 0, h_{2x}(x,t)h_1(x,t) - h_2(x,t)h_{1x}(x,t) \neq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{D},$$

$$c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leq 0, \quad \frac{1}{6} - 3\max_Q c^2(x,t) \geq 0, \quad \text{при } (x,t) \in \bar{D}.$$

Тогда обратная задача 1.3 имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$, *такое что*

$u(x,t) \in W_2^{6,1}(D)$, $q_1(t) \in L_2((0,T))$, $q_2(t) \in L_2((0,T))$ *и притом единственное.*

В §1.4 исследуется разрешимость обратных задач восстановления неизвестных параметров уравнения параболического типа высокого порядка в многомерном случае. Применяемый метод исследования отличается от методов, используемых в предыдущих параграфах. Для построения решений обратных задач используется метод Фурье.

В первом пункте параграфа рассматривается задача восстановления граничных данных.

Пусть (l_1, l_2) есть одна из пар граничных операторов $l_1 u = u$, $l_2 u = \frac{\partial u}{\partial \nu_x}$, либо $l_1 u = u$, $l_2 u = \Delta u$, либо $l_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu_x}$, $l_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu_x}$.

Обратная задача 1.4.1: *найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ в цилиндре Q выполняется уравнение*

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t),$$

и выполняются также условия (1) и

$$l_1 u(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = q_1(t)h_1(x)\mid_{(x,t)\in S}, \quad l_2 u(x,t)\mid_{(x,t)\in S} = q_2(t)h_2(x)\mid_{(x,t)\in S};$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)dx = 0, \quad \int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ семейство собственных функций задачи: $\Delta^2 w + c(x)w = \lambda w, l_1 w(x)\mid_{x\in\Gamma} = l_2 w(x)\mid_{x\in\Gamma} = 0$, где $\lambda_k, k = 1, \ldots$ — соответственно собственные числа.

Далее, определим функции $\tilde{h}_j(x)$, как решения задач: $\Delta^2 \tilde{h}_j + c(x)\tilde{h}_j = 0$, $l_k \tilde{h}_j(x)\mid_{x\in\Gamma} = \delta_k^j h_j(x)\mid_{x\in\Gamma}$, $(j,k = 1,2)$.

Обозначим $a_{jk}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ коэффициенты разложения в ряд Фурье по $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно функций $\tilde{h}_j(x), K(x), N(x)$. Положим $R_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{jk} \alpha_{ik}, \quad i,j = 1,2$.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполняются условия: $K(x) \in C(\bar{\Omega})$, $N(x) \in C(\bar{\Omega})$,*

$h_j(x) \in W_2^4(\Omega)$, $j=1,2$, $det(R_{ij}) \neq 0$;

$$c(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad c(x) \geq 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega},$$

числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_{jk}\alpha_{ik}$ абсолютно сходятся для $i,j=1,2$, $p=1,2,3$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача 1.4.1 имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $q_2(t) \in W_2^1([0,T])$.

Во второй части параграфа рассматриваются задачи восстановления правой части уравнения параболического типа, с различными интегральными условиями переопределения, например, с условиями

$$\int\limits_{\Gamma} K(x)u(x,t)ds_x = 0 \text{ или } \int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)dx = 0, t \in (0,T).$$

Получены условия существования регулярных решений поставленных задач.

В §1.5, как пример использования полученных ранее результатов, рассматриваются обратные задачи с нелокальным условиями типа условий Самарского-Ионкина и с граничным переопределением.

Пусть $Q = \{(x,t) : x \in (-1,1), t \in (0,T), T < \infty\}$.

Обратная задача 1.5.1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением (4), причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия*

$$u(-1,t) = u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (-1,1),$$

$$u_x(-1,t) - u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{5}$$

При выполнении условия $c(x,t) = c(-x,t)$, с помощью введения новой функции вида $v(x,t) = u(x,t) + u(-x,t)$, данная задача сводится к обратной задаче 1.2. Условие (5) можно заменить условием:

$$u_x(-1,t) + u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(-1,t) + u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Глава 2 посвящена изучению разрешимости нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа и некоторых других нестационарных уравнений. Далее фраза "некоторые условия малости" подразумевает, что требуется выполнение некоторых алгебраических условий типа неравенств на входные данные той или иной задачи.

В §2.1 рассматривается задача определения помимо решения, также неизвестного коэффициента при производной по времени в случае интегрального переопределения.

Обратная задача 2.1.1: *найти функции $u(x,t)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике D, уравнением*

$$p(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{6}$$

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T). \tag{7}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T). \tag{8}$$

$$\int\limits_0^1 K(x)u(x,t)dx = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{9}$$

Теорема 2.1.1.*Пусть выполняются включения $f(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $c_2(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $K(x) \in C^4([0,1])$, $\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_1(t) \in C^1([0,T])$, $u_0(x) \in W_2^4((0,1))$.*

Кроме того, пусть выполняются условия:

$$\begin{gathered} |\mu'(t)| \geq \mu_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T], \quad F(t) \geq p_0 + p_1 \text{ при } t \in [0,T], \\ c_1(x,t) \geq 0, \quad c_{1t}(x,t) \leq 0 \text{ при } (x,t) \in \bar{D}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$K(0) = K(1) = K'(0) = K'(1) = 0,$$

а так же условия согласования

$$u_0(0) = \varphi_0(0), \quad u_0(1) = \psi_0(0), \quad u_0'(0) = \varphi_1(0), \quad u_0'(1) = \psi_1(0),$$
$$\int\limits_0^1 K(x)u_0(x)dx = \mu(0), \tag{11}$$

и некоторые условия малости.

Тогда обратная задача 2.1.1 имеет единственное решение $u(x,t)$, $p(t)$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $p(t) \in L_\infty((0,T))$.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D)$, $f_{xxxxt}(x,t) \in L_2(D)$, $c(x,t) \in C^4(\bar{D})$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $K(x) \in C^1([0,T])$, $u_0(x) \in W_2^6((0,1))$, *а также условия (10), (11) и*

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \psi_0(t) = \psi(t) = 0 \text{ при } t \in [0,T],$$
$$f(0,t) = f(1,t) = f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0 \text{ при } t \in [0,T].$$
$$u_0^{(4)}(1) = u_0^{(5)}(0) = u_0^{(5)}(1) = 0,$$

и некоторые условия малости.

Тогда для обратной задачи 2.1.1 существует единственное решение $\{u(x,t), p(t)\}$, *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $p(t) \in L_\infty((0,T))$.

В обратной задаче 2.1.1 условие (8) можно заменить на условие

$$u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T). \tag{12}$$

В §2.2 рассматривается задача с неизвестным коэффициентом $q(t)$ при решении.

Обратная задача 2.2.1:*найти функции* $u(x,t)$ *и* $q(t)$ *в прямоугольнике* D, *удовлетворяющие уравнению*

$$u_t + u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (6)-(8),

$$\int_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = \mu(t), \quad t \in (0,T).$$

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются включения $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $K(x,t) \in C^2(\bar{D})$, $\mu(t) \in C([0,T])$, $\varphi_0(t) \in C([0,T])$, $\psi_0(t) \in C([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C([0,T])$, $\psi_1(t) \in C([0,T])$ $(i = 0,1)$, $u_0(x) \in W_2^4(D)$, условия согласования (12), некоторые условия малости, а также условия*

$$|\mu(t)| \geq \mu_0 > 0, K(0,t) = K(1,t) = K_x(0,t) = K_x(1,t) = 0, t \in (0,T).$$

Тогда обратная задача 2.2.1 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q(t) \in L_\infty((0,T))$.

В обратной задаче 2.2.1 условие (8) можно заменить на условие (12).

В §2.3 рассматриваются задачи определения, помимо решения, двух неизвестных коэффициентов.

Обратная задача 2.3.1: *найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ в прямоугольнике D, удовлетворяющие уравнению*

$$u_t + u_{xxxx} + q_1(t)u = f(x,t) + q_2(t)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (6)-(8) и условий переопределения

$$\int_0^1 K_1(x)u(x,t)dx = \mu_1(t), \int_0^1 K_2(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), t \in (0,T).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются включения: $\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\psi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\mu_i(t) \in C^1([0,T])$, $K_i(x) \in C^2([0,1])$ $(i = 1,2)$, $u_0(x) \in C^2((0,1))$, $f(x,t) \in L_2(D)$, $h(x,t) \in L_2(D)$, а* *также имеют место условия (11) и*

$$K_i(0) = K_i(1) = K_i'(0) = K_i'(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 K_i(x)u_0(x)dx = \mu_i(0), i = 1,2$$

$$\mu_2(t)\int\limits_0^1 K_1(x)h(x,t)dx - \mu_1(t)\int\limits_0^1 K_2(x)h(x,t)dx \neq 0, \quad t \in [0,T],$$

и некоторые условия малости.

Тогда существует единственное решение обратной задачи 2.3.1 $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(D)$, $q_1(t) \in L_\infty(D)$, $q_2(t) \in L_\infty(D)$.

В обратной задаче 2.3.1 условие (8) можно заменить на условие (12).

В §2.4 рассматриваются обратные задачи для некоторых нестационарных уравнений типа:

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x,t), \tag{13}$$

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x,t). \tag{14}$$

В параграфе 2.1 главы 2 диссертационной работы приведены примеры входных данных, для которых все условия теоремы 2.1.1. полностью выполняются. Аналогичные примеры выполнимости условий теорем можно привести для всех теорем 2 главы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

[1] Телешева, Л. А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени / Л. А. Телешева // Вестник БГУ. Математика и информатика, 2010. — №9. — С. 175-182.

[2] Телешева, Л. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Л. А. Телешева // Матем. заметки ЯГУ, 2011. — Т.18. — Вып.2. — С.180-201.

[3] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Мат. заметки ЯГУ, 2013. — Т.20. — С.186-196.

[4] Телешева, Л.А. Параболические уравнения высокого порядка: обратные задачи с граничным переопределением и гранично-нелокальные краевые задачи / А. И. Кожанов, Л. А. Телешева // Докл. АМАН, 2015. — Т.17. — № 4. — С.42 - 60.

[5] Телешева, Л.А. Восстановление параметров в краевых задачах для линейных параболических уравнений четвертого порядка // Л. А. Телешева // Мат. заметки СВФУ, 2015. — Т.22. — №3. — С. 48-56.

[6] Телешева, Л.А. Нелинейные обратные задачи с интегральным переопределением для некоторых нестационарных дифференциальных уравнений высокого порядка // Л. А. Телешева, Кожанов А.И.// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 2017. — Т. 10. — № 2. — С.24-36.

Публикации в других изданиях

[7] Телешева, Л. А. О разрешимости обратных задач восстановления двух неизвестных коэффициентов параболического уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Неклассич. уравнения мат. физики. Сб.науч.работ, 2012. — С.213-226.

[8] Телешева, Л. А. Разрешимость некоторых обратных задач для параболических уравнений с интегральным условием переопределения / Л. А. Телешева // V межд.мол.науч.шк.-конференция, теория и численные методы решения обратных и некорретных задач. — Новосибирск, Академгородок, 2013. — С.88.

[9] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения четвертого порядка / Л. А. Телешева // Тез.докл.Межд.конф. "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений". — Новосибирск, 2013. — С.266.

[10] Телешева, Л. А. Разрешимость линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными коэффициентами /

Л. А. Телешева // Тез.докл. Межд.конф. по математическому моделированию.- Якутск,2014. — С. 73.

[11] Телешева, Л. А. О разрешимости некоторых обратных задач параболических уравнения высокого порядка / Л. А. Телешева // Материалы V Межд.конф. Математика, ее приложения и математическое образование. — Улан-Удэ, 2014. — С. 312-314.

[12] Телешева, Л. А. О разрешимости одной обратной задачи для некоторых классов параболических уравнений четвертого порядка / Л. А. Телешева // Тез.докл.межд.конф. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. — Улан-Удэ, 2015. — С.282.

[13] Телешева, Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными коэффициентами в правой части / Л. А. Телешева // Мат.сем.молодых ученых с международным участием Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа. — Улан-Удэ, 2015. — С. 166.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

автореферат

Телешева Любовь Александровна

Подписано в печать 22.12.17 г. Формат 60x84/16.
Печ.л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,25. Тираж 120 экз. Заказ 17.

Отпечатано в филиале издательства ИП Путилин Э.А. "Полипринт"
Адрес:г. Улан-Удэ, ул. Ербанова, 11 оф. 223
Тел.: 8(3012) 400-376