ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. Р.Р. МАВЛЮТОВА -
ОБОСОБЛЕННОЕ СТРУКТУРНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
НАУЧНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Сир

СИРАЕВА ДИЛАРА ТАХИРОВНА

ПОДМОДЕЛИ
УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА
С ДАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ СУММЫ
ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ И ЭНТРОПИИ

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор С. В. Хабиров

Уфа – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных используются во многих прикладных задачах математической физики, механики сплошных сред и др. Наиболее изучена квазилинейная система уравнений в газовой динамике, к которой широко применяются численные методы [8]. Некоторые решения были получены, например, с помощью теории размерностей [50]. Эффективным способом систематического изучения и получения точных решений системы квазилинейных дифференциальных уравнений является применение к данным уравнениям методов группового анализа.

Симметрийный (групповой) анализ дифференциальных уравнений базируется на теории непрерывных групп, основоположником которой является выдающийся норвежский математик второй половины XIX в. Софус Ли. Свои исследования при содействии немецкого математика Фридриха Энгеля он изложил в трехтомной монографии [19–21].

В XX в. академик Л.В. Овсянников начал активно применять идеи Софуса Ли к исследованию систем квазилинейных дифференциальных уравнений, что привело к развитию нового направления в математике — группового анализа дифференциальных уравнений. Им же была сформулирована научно-исследовательская программа ПОДМОДЕЛИ [34, 36], ставящая целью наиболее полно использовать свойства симметрии дифференциальных уравнений. Можно выделить следующие этапы исследования квазилинейных дифференциальных уравнений методами группового анализа:

— групповая классификация по произвольному элементу;

— вычисление допускаемой алгебры Ли;

— вычисление оптимальной системы неподобных подалгебр [35];

— прослеживание вложений всех подалгебр оптимальной системы (иерархия подмоделей);

— построение инвариантных, частично инвариантных подмоделей (регулярных и нерегулярных) [39];

— анализ подмоделей, в том числе симметрийными методами;

— получение точных групповых решений;

— исследование поведения частиц в целом.

Была поставлена задача получения инвариантных подмоделей в каноническом виде [42].

В ходе реализации научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ были проведены обширные исследования, в которых участвовали А.П. Чупахин , С.В. Хабиров, С.В. Мелешко, А.А. Черевко, С.В. Головин, Е.В. Мамонтов, Ю.А. Чиркунов и другие [44]. Задача пополнения банка точных решений квазилинейных дифференциальных уравнений актуальна и по сей день. Ниже представлены некоторые результаты группового анализа уравнений газовой динамики.

Уравнения газовой динамики с уравнением состояния общего вида (давление равное функции плотности и энтропии) $p = f(\rho, S)$ инвариатны относительно группы Галилея, расширенной равномерным растяжением. Данной группе преобразований соответствует 11-мерная алгебра Ли. Оптимальная система неподобных подалгебр построена в [36]. Каждая подалгебра размерности от 1 до 4 позволяет построить инвариантную подмодель рассматриваемой системы - систему, записанную в инвариантах и зависящую от меньшего числа независимых переменных. Число независимых переменных есть *ранг подмодели* σ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 3)$. Для отслеживания вложения решений подмоделей необходимо представить граф вложенных подалгебр. Вложения необходимо прослеживать для подалгебр всех размерностей, так как можно строить еще частично инвариантные и дифференциально инвариантные подмодели. Частично инвариантные подмодели — подмодели, в представлении решений которых есть неинвариантные, «лишние» функции. Число таких «лишних» функций называют *дефектом подмодели* и обозначают через δ $(0 \leqslant \delta \leqslant 4)$. Частично инвариантные подмодели называются *регулярными*, если инвариантные независимые переменные не содержат искомых функций, в противном случае — *нерегулярными* [22]. Для «лишних» функций получается переопределенная система уравнений. Если в процессе приведения в инволюцию произвольные функции уточнились и дефект уменьшился или вовсе стал равен нулю, то такая подмодель редуцируется к некоторым подмоделям меньшего дефекта или ранга. Тем самым устанавливается нецелесообразность дальнейшего рассмотрения данной частично инвариантной подмодели. Дифференциально инвариантные подмодели в настоящей работе не рассматриваются. В работе [30] вложения подалгебр всех размерностей представлены в виде таблицы графа вложенных подалгебр. Инвариантные подмодели ранга 3 изучены в [36, 73, 81, 88], ранга 1 — в [81, 88]. Инвариантные подмодели ранга 2 в каноническом виде построены в [27], к которым применены методы группового анализа в [28, 29]. Исследованы движения газа с линейным полем скоростей: классификация подмоделей получена в работах [72, 95, 96], а решения — в работах [78, 97, 98]. Исследованы регулярные частично инвариантные подмодели [40, 41], найдены нерегулярные частично инвариантные решения [76]. Описаны следующие движения газа: изобарические движения газа [37], особый вихрь (частично инвариантное решение ранга 2 дефекта 1 на группе вращений) [38], периодические движения газа [45], барохронные движения (функция давления зависит только от времени) [89, 90], вихревые движения [84, 104] и др.

Для специальных уравнений состояния (12 случаев [36, 88]) допускаемая группа преобразований расширяется, соответствующие конечномерные алгебры Ли имеют размерности от 12 до 14. Среди них 9 неизоморфных алгебр Ли [79].

Уравнения газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью $\rho = h(p)K(S)$ ($p = f(h(S)\rho)$ [36]) допускают 12-мерную алгебру Ли. Оптимальная система неподобных подалгебр построена в [23]. Иерархия подмоделей рассмотрена в [24]. Построены инвариантные и частично инвариантные решения [26]. Анализ физического содержания частично инвариантной подмодели приведен в [25].

Для уравнений газовой динамики с уравнением состояния в виде давления, равного сумме степенной функции плотности и функции энтропии $p = B\rho^\gamma + h(S)$, $B = const$, $B \neq 0$, $\gamma \neq 0, 1$, алгебра Ли расширяется до 13-мерной. Оптимальная система подалгебр построена в [74]. Инвариантные подмодели ранга 3 и 2, которые приведены к двум каноническим типам, построены в [5]. Решена задача групповой классификации гидродинамической системы стационарного типа с двумя независимыми переменными [6]. Найдено новое регулярное частично инвариантное решение [7].

Уравнения газовой динамики в случае политропного газа $p = h(S)\rho^\gamma$, $\gamma \neq 0, 5/3$, допускают 13-мерную алгебру Ли. Нормализованная оптимальная система подалгебр построена в [9]. Вычислены инварианты для трехмерных подалгебр, классифицированы подмодели [87]. Изучено инвариантное решение ранга 1 [91]. Найдены «простые» решения (решения из подмоделей ранга 0 дефекта 0) [43]. Класс новых точных решений, описывающих пространственные движения политропного газа, построен на основе инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа в [10]. Построено точное решение, описывающее течение газа в полосе между прямолинейными источником и стоком [11].

Уравнения газовой динамики в случае одноатомного газа $p = h(S)\rho^{5/3}$ допускают 14-мерную алгебру Ли, оптимальная система неподобных подалгебр которой содержит 1827 представителей подалгебр [86]. В работе [92] из данной оптимальной системы подалгебр были выделены подалгебры с проективным оператором и без оператора растяжения по термодинамическим параметрам и представлен граф вложенных подалгебр. Инвариантные подмодели различных рангов построены в работах [31, 93]. Движение газа для полученных точных и приближенных решений рассмотрены в работах [83,94].

В наши дни групповой анализ дифференциальных уравнений зарекомендовал себя как мощный инструмент изучения данных уравнений. Его методы, изложенные в [1, 2, 16–18, 32, 33, 88, 99–103, 106], показывают свою эффективность не только при применении к уравнениям газовой динамики, но и к уравнениям Навье-Стокса [1, 4, 48, 49], уравнениям теории упругости и пластичности [3], уравнениям самогравитирующего газа [47, 105], уравнениям идеальной магнитогидродинамики [12–15] и др.

Настоящая работа является частью реализации научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ. Автором рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, равного сумме функций плотности и энтропии $p = f(\rho) + h(S)$. Группа преобразований системы гидродинамического типа расширяется переносом по давлению. Соответствующая ей алгебра Ли 12-мерна и отличается от других алгебр Ли для других уравнений состояния. Уравнения гидродинамического типа с указанным уравнением состояния не рассматривались с позиции симметрийного анализа.

Цель диссертационной работы – реализация части научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ, поставленной академиком Л. В. Овсянниковым для уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи:**

– построение оптимальной системы неподобных подалгебр, вложение подалгебр из оптимальной системы, вложение подмоделей;

– классификация инвариантных подмоделей;

– получение точных решений подмоделей аналитическими способами;

– описание движений частиц для точных решений.

Научная новизна работы заключается в том, что к уравнениям гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии, впервые применены методы группового анализа:

1. Построена оптимальная система неподобных подалгебр для расширенной оператором переноса давления известной 11-мерной алгебры Ли уравнений газовой динамики.
2. Построены 39 инвариантных подмоделей ранга 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Полученные подмодели отличаются от известных подмоделей уравнений газовой динамики тем, что коэффициенты подмоделей содержат функцию плотности; коэффициент в уравнении для энтропии подмодели не равен нулю.
3. Инвариантная подмодель ранга 2 квазилинейной системы дифференциальных уравнений гидродинамического типа изучена аналитическими методами: найдены интегралы, представлен симметрический характеристический вид, найдены преобразования эквивалентности; поставлены начальные условия в случае системы не типа Коши.
4. Исследованы движения частиц для решений одной переопределенной подмодели ранга 2 (системы дифференциальных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными). В одном случае величина движущегося объема из одних и тех же частиц постоянна, дозвуковая область движения исчезает со временем. В другом случае решение описывает движение частиц без особенностей в полупространстве под действием двигающегося поршня.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты работы носят теоретический характер, вносят вклад в развитие изучения подмоделей уравнений гидродинамического типа и служат источником новых точных решений данных уравнений. Новые решения позволят описывать движение частиц в целом, проводить тестирование численных расчетов гидродинамических задач, создавать новые численные схемы расчетов специальных краевых задач.

Методология и методы исследования. Для реализации поставленных задач были использованы методы теории дифференциальных уравнений, группового анализа. Для визуализации и проверки некоторых полученных результатов использовалась система компьютерной математики Maple.

Положения, выносимые на защиту:
– оптимальная система неподобных подалгебр и примеры вложенных подалгебр и подмоделей;
– инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов;
– редукция двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям;
– всевозможные инвариантные подмодели ранга 1, некоторые точные решения на данных подмоделях;
– результаты группового анализа инвариантной подмодели ранга 2 квазилинейной системы гидродинамического типа;
– исследования движения частиц для некоторых полученных решений в целом.

Степень достоверности результатов, полученных в работе, обусловлена применением апробированных аналитических методов группового анализа дифференциальных уравнений и строгостью математических доказательств.

Апробация результатов. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих конференциях, семинарах и научных школах:

- Международная школа-конференция MOGRAN 16 «Современный групповой анализ», 28 октября – 2 ноября 2013 г., г. Уфа.
- Первая международная научная конференция «Наука будущего», 16 – 21 сентября 2014 г., г. Санкт-Петербург.
- Международная школа-конференция MOGRAN 18 «Lie groups and computation methods in nonlinear problems of mathematical modelling», 27 июля – 5 августа 2015 г., Китай, г. Шэньян.
- VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 7 – 11 сентября 2015, г. Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева.
- Международные (47-я, 50-я Всероссийские) молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений», 31 января – 6 февраля 2016 г., 3 – 9 февраля 2019 г., г. Екатеринбург.
- Первая, Вторая летние школы-конференции «Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения», 26 – 29 июня 2016 г., Респ. Башкортостан, д. Верхнебиккузино; 25 – 30 июня 2018 г., Респ. Башкортостан, озеро Кан-

дрыкуль.

- VIII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, 5 – 10 сентября 2016 г., г. Новороссийск, пос. Дюрсо.
- Уфимская международная математическая конференция, 27 – 30 сентября 2016 г., г. Уфа.
- IX, X Международные школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», 3 – 7 октября 2016 г., 16 – 20 октября 2018 г., г. Уфа.
- V Всероссийская научно-практическая, VIII Международная молодежная научно-практическая конференции «Математическое моделирование процессов и систем», 17 – 19 ноября 2016 г., 4 – 7 октября 2018 г., г. Стерлитамак.
- Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, 24 – 27 мая 2017 г., г. Уфа.
- Международные конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», 12 – 16 марта 2018 г., 18 – 22 марта 2019 г., Респ. Башкортостан, озеро Банное.
- 9-ая Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», 5 – 7 декабря 2018 г., г. Москва.
- Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», 13 – 17 мая 2019 г., г. Новосибирск.
- Научный семинар Института механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, 2019 г., г. Уфа.
- Научный семинар Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, 2019 г., г. Уфа.
- Научный семинар Института гиродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова, 2019 г., г. Новосибирск.
- Научный семинар Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.М. Блохина, 2019 г., г. Новосибирск.

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в 21 работе: в 10 статьях [52, 55–57, 63–66, 70, 71], в тезисах 11 докладов [51, 53, 54, 58–62, 67–69]. Из них 4 работы [52, 63, 70, 71] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ, в том числе переводные версии работ [52, 71] входят в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus. Из совместной публикации [63] в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации составляет 136 страниц машинописного текста, в том числе 13 рисунков, 18 таблиц. Список литературы состоит из 106 наименований.

Краткое содержание диссертации.

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме исследования, отмечаются актуальность темы исследований, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, степень достоверности, апробация результатов; сформулированы основные положения, выносимые на защиту. Перечислены все публикации автора по теме диссертации и приведена структура диссертации.

Первая глава посвящена построению оптимальной системы неподобных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, равного сумме функций плотности и энтропии. По полученным подалгебрам из оптимальной системы построены три подграфа вложенных подалгебр. Для выделенной цепочки вложенных подалгебр подграфа показано вложение решений подмоделей.

Во второй главе по подалгебрам алгебры Ли L_{12} построены инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Для двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 доказана редукция к инвариантным подмоделям. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр алгебры Ли L_{12}, по которым построены все инвариантные подмодели ранга 1 и получены некоторые точные решения.

Третья глава посвящена изучению инвариантной подмодели ранга 2 эволюционного типа алгебры Ли L_{12}: вычислены интегралы, преобразования эквивалентности системы. В случае системы не типа Коши выяснено условие задания начальных данных. Для полученных двух типов точных решений в простейшем случае описано движение частиц в целом. Первый тип решений описывает изобарическое движение вдоль траекторий с неменяющейся величиной движущегося объема из одних и тех же частиц. При этом дозвуковая область движения исчезает со временем. Второй тип решений описывает движение частиц под действием поршня.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю С.В. Хабирову за постановку задачи и ценные замечания, высказанные во время неоднократных обсуждений представленных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 18-29-10071) и средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

ГЛАВА 1
ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА НЕПОДОБНЫХ ПОДАЛГЕБР 12–МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ L_{12}

Настоящая глава посвящена построению оптимальной системы неподобных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, равного сумме функций плотности и энтропии. По полученным подалгебрам из оптимальной системы построены три подграфа вложенных подалгебр. Для выделенной цепочки вложенных подалгебр подграфа показано вложение решений подмоделей. Результаты опубликованы в работах [51, 52].

1.1. Основные формулы и определения

В работе [36] намечена программа ПОДМОДЕЛИ для системы квазилинейных дифференциальных уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} &D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ &Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\vec{u} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где t, $\vec{x}$ — независимые переменные; ∇ — градиент;

$$D = \partial_t + (\vec{u}\cdot\nabla) \tag{1.2}$$

— оператор полного дифференцирования; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; S — энтропия; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния общего вида.

Программа ПОДМОДЕЛИ предполагает вычисление допускаемой алгебры Ли; групповую классификацию по произвольному элементу $f(\rho, S)$; вычисление оптимальной системы неподобных подалгебр; изучение подмоделей с групповой точки зрения. Задача групповой классификации решена в [36]. В настоящей работе рассматриваются уравнения гидродинамического типа (1.1) с уравнением состояния, полученного в классификации [36]:

$$p = f(\rho) + h(S). \tag{1.3}$$

Уравнение состояния (1.3) может быть записано через внутреннюю энергию ε или температуру T из термодинамического тождества $TdS = d\varepsilon +$

$pd\rho^{-1}$ [46]:

$$\varepsilon = \int \frac{f(\rho)}{\rho^2} d\rho - \frac{h(S)}{\rho} + H(S),$$
$$T = H'_S - \frac{h'_S}{\rho},$$

где $H(S)$ — произвольная функция.

Из термодинамического тождества с учетом (1.3) выводятся уравнения для термодинамических величин S, T и ε при $h' \neq 0$

$$DS = 0, \quad DT + \rho^{-1}h'(S)\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad D\varepsilon + \rho^{-1}p\mathrm{div}\vec{u} = 0. \tag{1.4}$$

Энтропия S определена с точностью до замены $h(S) \to S$ (преобразование эквивалентности).

В настоящей работе рассматривается система уравнений (1.1) с учетом (1.3), в которой вместо последнего уравнения может быть выбрано равенство $DS = 0$ из (1.4). Данная система уравнений рассматривается в декартовых (D) или цилиндрических (C) координатах.

В декартовой системе координат [81]

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z, \quad \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — ортонормированный базис.

В цилиндрической системе координат [81]

$$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$
$$u = U, \quad v = V\cos\theta - W\sin\theta, \quad w = V\sin\theta + W\cos\theta,$$
$$\vec{x} = x\vec{i} + r(\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k}) = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r,$$
$$\vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_r = \frac{\partial\vec{x}}{\partial r}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k},$$
$$\nabla = \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta, \quad \partial_\theta\vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \quad \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r, \quad \vec{u} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta,$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ — ортонормированный базис.

Таким образом, уравнения (1.1) с учетом (1.3) в декартовых координатах t, x, y, z, u, v, w записываются следующим образом [46]

$$\begin{gathered} Du + \rho^{-1}p_x = 0, \\ Dv + \rho^{-1}p_y = 0, \\ Dw + \rho^{-1}p_z = 0, \\ D\rho + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ DS = 0 \text{ или } Dp + \rho f'(u_x + v_y + w_z) = 0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $D = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$; в цилиндрических координатах t, x, r, θ, U, V, W система (1.1) с учетом (1.3) имеет вид [77]

$$\begin{gathered} DU + \rho^{-1}p_x = 0, \\ DV + \rho^{-1}p_r = \frac{W^2}{r}, \\ DW + \frac{\rho^{-1}}{r}p_\theta = -\frac{VW}{r}, \\ D\rho + \rho\left(U_x + V_r + \frac{1}{r}W_\theta + \frac{1}{r}V\right) = 0, \\ DS = 0 \text{ или } Dp + \rho f'\left(U_x + V_r + \frac{1}{r}W_\theta + \frac{1}{r}V\right) = 0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $D = \partial_t + U\partial_x + V\partial_r + \dfrac{1}{r}W\partial_\theta$.

Уравнения (1.1) с уравнением состояния общего вида инвариантны при действии группы G_{11} – группы Галилея, расширенной равномерным растяжением [88]:

$$\begin{aligned} &1^o.\ \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \text{ (переносы по пространству)}, \\ &2^o.\ t' = t + a_0 \text{ (перенос по времени)}, \\ &3^o.\ \vec{x}' = O\vec{x}, \vec{u}' = O\vec{u}, OO^T = E, \det O = 1 \text{ (вращения)}, \\ &4^o.\ \vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}' = \vec{u} + \vec{b} \text{ (Галилеевы переносы)}, \\ &5^o.\ t' = tc, \vec{x}' = c\vec{x} \text{ (равномерное растяжение)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Система (1.1) с учетом (1.3) кроме (1.7) инвариантна также относительно переноса по давлению p [88]:

$$6^o.\ p' = p + p_0. \tag{1.8}$$

Группе G_{11} (1.7) соответствует 11-мерная алгебра Ли L_{11}, базисные операторы которой могут быть записаны в декартовой системе координат

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,$$

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$

$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t,$$

$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_1 = \partial_p,$$

или в цилиндрической системе координат [88]:

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),\\
X_3 = \sin\theta\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W), \quad X_4 = t\partial_x + \partial_U,\\
X_5 = \cos\theta(t\partial_r + \partial_V) - \frac{t}{r}\sin\theta\left(\partial_\theta + W\partial_V - \left(V - \frac{r}{t}\right)\partial_W\right),\\
X_6 = \sin\theta(t\partial_r + \partial_V) + \frac{t}{r}\cos\theta\left(\partial_\theta + W\partial_V - \left(V - \frac{r}{t}\right)\partial_W\right), \quad X_7 = \partial_\theta,\\
X_8 = \sin\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) +\\
+ \cos\theta\left(W\partial_U - U\partial_W - \frac{x}{r}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)\right),\\
X_9 = -\cos\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) +\\
+ \sin\theta\left(W\partial_U - U\partial_W - \frac{x}{r}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)\right),\\
X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r, \quad Y_1 = \partial_p.
\end{gathered}
$$

Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли L_{11} представлены в Таблице 1.1, где вместо операторов $X_i, i = \overline{1, 11}$, стоят их индексы i [88]:

Таблица 1.1 –
Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли L_{11}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1								-3	2		1
2							3		-1		2
3							-2	1			3
4								-6	5	-1	
5							6		-4	-2	
6							-5	4		-3	
7		-3	2		-6	5		-9	8		
8	3		-1	6		-4	9		-7		
9	-2	1		-5	4		-8	7			
10				1	2	3					10
11	-1	-2	-3							-10	

1.2. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12}

Если уравнение состояния общего вида, то максимальная алгебра Ли, допускаемая уравнениями (1.1) есть L_{11}, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [36]. Для специальных уравнений состояния возникают дополнительные операторы, расширяющие допускаемую алгебру до L_k, k — размерность алгебры. В работе [79] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [82]. Здесь будет построена оптимальная система подалгебр для двух 12-мерных алгебр Ли, которые изоморфны друг другу. Это алгебры Ли $L_{11} \oplus Y_1$ с уравнением состояния (1.3), где

$$Y_1 = \gamma \partial_p, \quad \gamma = const,$$

и $L_{11} \oplus Y_{\overline{p}}$ с уравнением состояния $\overline{p} = \overline{\rho}\,\overline{f}(\overline{h}(S)\overline{\rho})$, где $Y_{\overline{p}} = \overline{\rho}\,\partial_{\overline{\rho}} + \overline{p}\,\partial_{\overline{p}}$. Эти алгебры эквивалентны. Действительно, при замене $\rho = \dfrac{\overline{\rho}}{\overline{p}}$, $p = \ln \overline{p}$ следует $Y_1 = Y_{\overline{p}}$, а операторы из L_{11} не меняются. Из уравнений состояния в силу замены следует тождество $\ln(\overline{\rho}\,\overline{f}(\overline{h}(S)\overline{\rho})) = f(\overline{f}(\overline{h}(S)\overline{\rho})) + h(S)$. Замена $\tau = \overline{\rho}\,\overline{h}(S)$ дает равенство $-f(\overline{f}(\tau)) + \ln(\tau \overline{f}(\tau)) = \ln(\overline{h}(S)) + h(S)$, в котором переменные τ и S разделились. Можно считать, что обе части равенства равны нулю: $h(S) = -\ln(\overline{h}(S))$; $\ln(\tau \overline{f}(\tau)) = f(\overline{f}(\tau))$. Следовательно, функции $\overline{h}$, $\overline{f}$ определяются через функции h, f, то есть уравнения состояния согласованы. При этом в системе (1.1) с учетом (1.3) изменится только четвертое уравнение $D \ln \overline{\rho} = (1 + \rho f'(\rho)) D \ln \rho$, если $f(\rho)$ не постоянно.

Из Таблицы 1.1 и из равенств $[Y_1, X_i] = 0, i = 1..11$ видно, что 12-мерная алгебра Ли L_{12} есть прямая сумма двух идеалов

$$L_{12} = L_{11} \oplus \{Y_1\}.$$

Далее перечисляются неподобные подалгебры различных размерностей алгебры Ли L_{12} с помощью известных подалгебр из L_{11} [81, приложение]. При этом будут использованы внутренние автоморфизмы, которые получаются при решении задачи с начальными данными для линейного уравнения $X_a^{'} = [X^{'}, Y]$, $X^{'}\,|_{a=0} = X$, $Y = X_i, Y_1$, $i = \overline{1,11}$ в алгебре Ли L_{12}, где $X = x^i X_i + y^0 Y_1$, $X' = x^i{}' X_i + y^0{}' Y_1$. Все внутренние автоморфизмы [88] компактно записаны в Таблицу 1.2, где $p_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$, $p_2(x) = (x^4, x^5, x^6)$, $p_3(x) = (x^7, x^8, x^9)$; $\vec{\alpha}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\alpha}_2 = (a_4, a_5, a_6)$, a_{10}, a_{11}, b_1 — параметры автоморфизмов, O — матрица вращения, заданная углами поворота вокруг одной из ортогональных осей, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — замеченные дискретные автоморфизмы.

Преобразование подобия для системы (1.1) с учетом (1.3)

$$\frac{p}{\gamma} \to p$$

упрощает вид оператора Y_1:

$$\gamma\partial_p \to \partial_p.$$

Поэтому при вычислении подалгебр удобно использовать внешний автоморфизм:

$$y^{0\prime} = b_1 y^0. \tag{1.9}$$

Таблица 1.2 – Внутренние автоморфизмы алгебры Ли
$L_{12} = L_{11} \oplus \{Y_1\}$

T	$p_1(x') = p_1(x) + x^{11}\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_1 \times p_3(x)$
Г	$p_1(x') = p_1(x) - x^{10}\vec{\alpha}_2, p_2(x') = p_2(x) - \vec{\alpha}_2 \times p_3(x)$
O	$p_1(x') = Op_1(x), p_2(x') = Op_2(x), p_3(x') = Op_3(x)$
A_{10}	$p_1(x') = p_1(x) + a_{10}p_2(x), x^{10\prime} = x^{10} + a_{10}x^{11}$
A_{11}	$p_1(x') = a_{11}p_1(x), x^{10\prime} = a_{11}x^{10}$
ε_1	$p_1(x') = -p_1(x), p_2(x') = -p_2(x)$
ε_2	$p_2(x') = -p_2(x), x^{10\prime} = -x^{10}$

Выводится правило построения неподобных подалгебр различных размерностей в $L_{12} = L_{11} \oplus Y_1$ с помощью внутренних и внешнего автоморфизмов.

Подалгебра размерности n, $n \leq 12$ в L_{12} задается базисом $\alpha_1 Y_1 + Z_1$, $\alpha_2 Y_1 + Z_2$, ..., $\alpha_n Y_1 + Z_n$. Можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, то есть подалгебра из L_{12} существенна. Внешний автоморфизм (1.9) делает $\alpha_1 = 1$. Вычитание умноженного на соответствующий коэффициент оператора $Y_1 + Z_1$ из остальных дает $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Оператор Z_1 определен с точностью до линейной комбинации операторов $Z_2, ..., Z_n$. Коммутаторы базисных операторов подалгебры $Z_1 + Y_1, Z_2, ..., Z_n$ таковы:

$$[Z_1 + Y_1, Z_j] = [Z_1, Z_j] = \sum_{k=2}^{n} c_{1j}^k Z_k \tag{1.10}$$

так как $[Y_1, Z_j] = 0$; $[Z_j, Z_k] = \sum_{l=2}^{n} c_{jk}^{l} Z_l, j = 2..n, k = 2..n$.

Значит, $\{Z_2, ..., Z_n\}$ — идеал размерности $n - 1$ в алгебре $\{Y_1 + Z_1, Z_2, ..., Z_n\} \subset L_{12}$ и идеал в подалгебре $\{Z_1, ..., Z_n\} \subset L_{11}$, если $Z_1 \neq 0$. Таким образом, перечислить подалгебры в L_{12} можно так. Выбрать подалгебры $\{Z_2, ..., Z_n\}$ из оптимальной системы L_{11}. Далее, приписать к базисным операторам оператор $Z_1 + Y_1$, где из Z_1 вычтена линейная комбинация операторов $Z_2, ..., Z_n$. Вид оператора Z_1 уточняется вычислением коммутаторов по формуле (1.10). Простейший вид для Z_1 получается внутренними автоморфизмами (Таблица 1.2), сохраняющими операторы $Z_2, ..., Z_n$.

Замечание 1.1. *Если $Z_1 = 0$, то это тривиальная подалгебра алгебры Ли L_{12}, которая не заносится в оптимальную систему подалгебр.*

Теорема 1.1. *Все неподобные нетривиальные подалгебры алгебры Ли L_{12} сводятся в Таблицу A.1 из 309 подалгебр (Приложение A), в которой r — размерность подалгебры, i — порядковый номер подалгебры данной размерности. В предпоследней колонке указан номер подалгебры из L_{11}, по которой построена подалгебра в L_{12}. Если вычеркнуть Y_1 из последнего оператора базиса подалгебры из L_{12}, то получится подалгебра из L_{11}, номер которой указан в последней колонке Таблицы A.1*

Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} насчитывает 221 представителя [81].

Номер подалгебры далее указывается в виде $r.i$.

Приведем примеры вычисления четырехмерных подалгебр из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} (Таблица A.1).

Рассматривается подалгебра 3.2 из L_{11}

$$7, 10, 11,$$

операторы которой вычитаются из дополнительного оператора

$$Y_1 + x^1 X_1 + ... + x^{11} X_{11}.$$

По выведенному правилу вычисления подалгебр вычисляются коммутаторы:

$$\left[7, Y_1 + p_1(x)p_1(X) + p_2(x)p_2(X) + x^8 X_8 + x^9 X_9\right] =$$

$$= -x^2 X_3 + x^3 X_2 - x^5 X_6 + x^6 X_5 - x^8 X_9 + x^9 X_8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = x^3 = x^5 = x^6 = x^8 = x^9 = 0,$$

$$[10, Y_1 + x^1X_1 + x^4X_4] = x^4X_1 = 0 \Rightarrow x^4 = 0,$$

$$[11, Y_1 + x^1X_1] = -x^1X_1 = 0 \Rightarrow x^1 = 0.$$

В результате получается тривиальная подагебра 7, 10, 11, Y_1, которая не заносится в оптимальную систему подалгебр алгебры Ли L_{12} (Таблица А.1).

Подалгебра 3.7 из L_{11}

$$1, 10, a4 + 11,$$

дополняется оператором

$$Y_1 + x^iX_i, i = 2..9.$$

Вычисление коммутаторов для уточнения коэффициентов

$$[1, Y_1 + x^iX_i] = -x^8X_3 + x^9X_2, i = 2..9 \Rightarrow x^8 = x^9 = 0,$$

$$[10, Y_1 + x^iX_i] = x^4X_1 + x^5X_2 + x^6X_3, i = 2..7 \Rightarrow x^5 = x^6 = 0,$$

$$[a4 + 11, Y_1 + x^iX_i] = -x^2X_2 - x^3X_3, i = 2, 3, 4, 7 \Rightarrow x^2 = x^3 = 0,$$

приводит к подалгебре 4.6 из L_{12} (Таблица А.1).

Подалгебра 3.11 из L_{11}

$$5, 6, a4 + 7,$$

рассматривается вместе с оператором

$$Y_1 + x^iX_i, i = 1..4, 8..11.$$

Вычисление коммутаторов

$$[5, Y_1 + x^iX_i] = -x^9X_4 - x^{10}X_2, i = 1..4, 8..11 \Rightarrow x^9 = x^{10} = 0,$$

$$[6, Y_1 + x^iX_i] = x^8X_4, i = 1..4, 8, 11 \Rightarrow x^8 = 0,$$

$$[a4 + 7, Y_1 + x^iX_i] = -x^2X_3 + x^3X_2, i = 1..4, 11 \Rightarrow x^2 = x^3 = 0$$

приводит к подалгебре

$$5, 6, a4 + 7, Y_1 + x^1X_1 + x^4X_4 + x^{11}X_{11}.$$

Автоморфизм T (Таблица 1.2) при $x^{11} \neq 0$ приводит к подалгебре 4.10 из L_{12} (Таблица А.1). При $x^{11} = 0$ получится подалгебра 4.9 при $\varepsilon = 0$ из L_{12} (Таблица А.1).

Подалгебра 3.12 из L_{11}

$$1, 4, 7 + a11, a \neq 0,$$

рассматривается с оператором

$$Y_1 + x^i X_i, i = 2, 3, 5, 6, 8..11.$$

Вычисление коммутаторов уточняет коэффициенты оператора:

$$[1, Y_1 + x^i X_i] = -x^8 X_3 + x^9 X_2 + x^{11} X_1, i = 2, 3, 5, 6, 8..11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^8 = x^9 = 0,$$

$$[4, Y_1 + x^i X_i] = -x^{10} X_1, i = 2, 3, 5, 6, 10, 11,$$

$$[7 + a11, Y_1 + x^i X_i] = -x^2 X_3 + x^3 X_2 - x^5 X_6 + x^6 X_5 -$$

$$-a x^2 X_2 - a x^3 X_3 - a x^{10} X_{10},$$

$$i = 2, 3, 5, 6, 10, 11 \Rightarrow x^j = 0, j = 2, 3, 5, 6, 10.$$

В результате получится подалгебра 4.11 из L_{12} (Таблица А.1) при $a \neq 0$.

Подалгебра 3.13 из L_{11}

$$1, 4, 7$$

рассматривается с оператором

$$Y_1 + x^i X_i, i = 2, 3, 5, 6, 8..11.$$

Вычисление коммутаторов уточняет коэффициенты оператора:

$$[1, Y_1 + x^i X_i] = -x^8 X_3 + x^9 X_2 + x^{11} X_1, i = 2, 3, 5, 6, 8..11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^8 = x^9 = 0,$$

$$[4, Y_1 + x^i X_i] = -x^{10} X_1, i = 2, 3, 5, 6, 10, 11,$$

$$[7, Y_1 + x^i X_i] = -x^2 X_3 + x^3 X_2 - x^5 X_6 + x^6 X_5, i = 2, 3, 5, 6, 10, 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^j = 0, j = 2, 3, 5, 6.$$

В результате получится подалгебра

$$1, 4, 7, Y_1 + x^{10} X_{10} + x^{11} X_{11},$$

которая при $x^{11} \neq 0$ с помощью автоморфизма A_{10} (Таблица 1.2) приводится к виду подалгебры 4.11 из L_{12} при $a = 0$. При $x^{11} = 0$ получится подалгебра 4.12 из L_{12} (Таблица А.1).

К подалгебре 3.35 из L_{11}

$$a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, a^2 + b^2 = 1,$$

в соответствии с правилом вычисления добавляется оператор

$$Y_1 + x^i X_i, i = 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11.$$

Вычисляются коммутаторы:

$$[a1 + 4, Y_1 + x^1 X_1 + ... + x^{11} X_{11}] = -ax^8 X_3 + ax^9 X_2 + ax^{11} X_1 - x^8 X_6 +$$
$$+ x^9 X_5 - x^{10} X_1 = \lambda_1(a1 + 4) + \mu_1(b3 + 5) + \gamma_1(b2 - 6),$$
$$[b3 + 5, Y_1 + x^1 X_1 + ... + x^{11} X_{11}] = -bx^7 X_2 + bx^8 X_1 + bx^{11} X_3 + x^7 X_6 -$$
$$- x^9 X_4 - x^{10} X_2 = \lambda_2(a1 + 4) + \mu_2(b3 + 5) + \gamma_2(b2 - 6),$$
$$[b2 - 6, Y_1 + x^1 X_1 + ... + x^{11} X_{11}] = bx^7 X_3 - bx^9 X_1 + bx^{11} X_2 + x^7 X_5 -$$
$$- x^8 X_4 + x^{10} X_3 = \lambda_3(a1 + 4) + \mu_3(b3 + 5) + \gamma_3(b2 - 6).$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых базисных операторах дает систему уравнений:

$$ax^{11} = 0; ax^9 = bx^8; -ax^8 = bx^9; bx^8 = -ax^9; -bx^7 - x^{10} = -bx^7;$$
$$bx^{11} = 0; -bx^9 = -ax^8; x^{10} = 0; a^2 + b^2 = 1.$$

Ее решение таково:

$$x^8 = x^9 = x^{10} = x^{11} = 0.$$

Значит, подалгебра примет вид

$$a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 + x^7 X_7.$$

Внутренние автоморфизмы упрощают вид подалгебры.

Если $x^7 \neq 0$, то автоморфизмы T, A_{11} (Таблица 1.2) приводят к подалгебре 4.42 из L_{12} (Таблица А.1). Если $x^7 = 0$, то подалгебра такова:

$$a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + c1 + d2 + e3.$$

Автоморфизм O (Таблица 1.2) поворачивает одновременно вокруг осей x^1 и x^4 векторы $\begin{Vmatrix} 0 \\ b \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} b \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} d \\ e \end{Vmatrix}$ на угол φ. Угол φ можно выбрать так, чтобы коэффициент при 3 после преобразования равнялся нулю ($\operatorname{tg}\varphi = -e/d$), а заменой базиса второй и третий операторы подалгебры примут прежний вид. В результате получится подалгебра 4.43 из L_{12} (Таблица А.1).

1.3. О подграфах вложенных подалгебр из оптимальной системы алгебры Ли L_{12}

В данном разделе представлены подграфы вложенных подалгебр, построенные по оптимальной системе неподобных подалгебр для L_{12} (Таблица А.1). Всего построено три подграфа:

– основной подграф $\Gamma_7(L_{12})$

– промежуточный подграф $\Gamma_5(7.11, 7.13)$

– конечный подграф $\Gamma_1(5.10)$

Подграф $\Gamma_7(L_{12})$ включает в себя все подалгебры размерностей от 7 до 11 включительно. Из данного подграфа выбрана подалгебра 7.11 в объединении с подалгеброй 7.13 в качестве вершины для подграфа $\Gamma_5(7.11, 7.13)$. В нее вкладываются все подалгебры размерностей 6 и 5. В данном подграфе подалгебра 5.10 выбрана в качестве вершины подграфа $\Gamma_1(5.10)$, в которую вкладываются подалгебры размерностей меньше 5.

Подграфы построены по следующему правилу. Подалгебра вкладывается в надалгебру, если операторы подалгебры являются линейной комбинацией операторов надалгебры. При вложении подалгебр используются внутренние автоморфизмы (Таблица 1.2) для выделения нужного представителя из класса подобных. Сначала вкладывают подалгебры, размерности которых отличаются на единицу. Далее эти подалгебры вкладывают в подалгебры, размерности которых больше на два. Далее вкладывают в подалгебры размерности больше на три, и так далее. Процесс продолжается, пока не рассмотрены все подалгебры больших размерностей. Решение задачи возможно только перебором и нет общего правила представления всего графа.

1.3.1. Основной подграф $\Gamma_7(L_{12})$ алгебры Ли L_{12} вложенных подалгебр размерности больше 6

В подграфе $\Gamma_7(L_{12})$ (Рисунок 1.1) представлены все подалгебры размерностей от 7 до 11 включительно. В одном из операторов обязательно присутствует слагаемое Y_1. Около стрелок указаны коэффициенты, при которых происходит вложение подалгебр. Также указано какую замену операторов нужно сделать для вложения подалгебр. Вложение произведено с точностью до автоморфизмов.

Для подалгебры 7.15, 7.16 показано вложение в 8–мерную тривиальную подалгебру из L_{11} 7 : 12 с добавленным оператором Y_1. В обозначении подалгебр из L_{11} используется двоеточие.

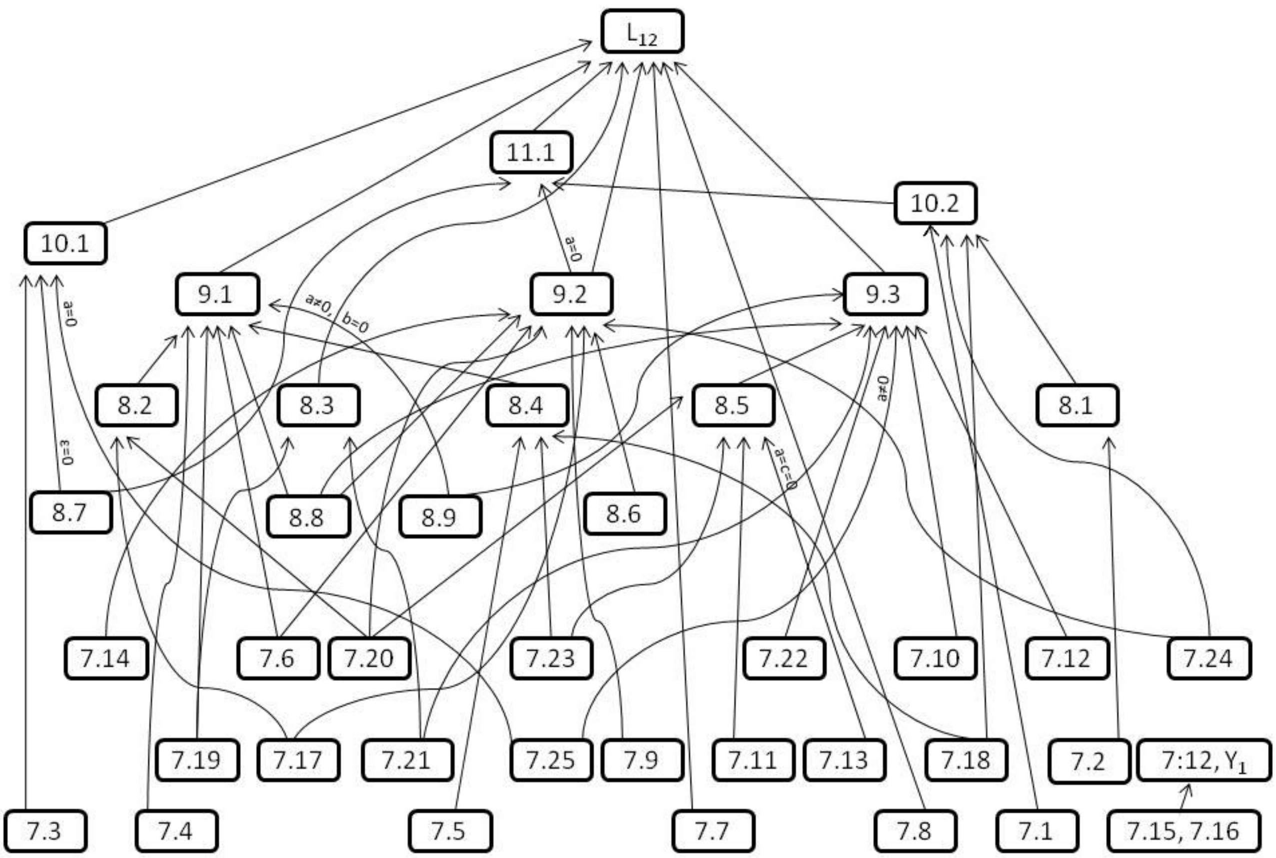


Рисунок 1.1 – Основной подграф $\Gamma_7(L_{12})$

1.3.2. Промежуточный подграф $\Gamma_5(7.11, 7.13)$ с 7-мерными подалгебрами в вершине, в которые вложены все подалгебры размерности 6 и 5

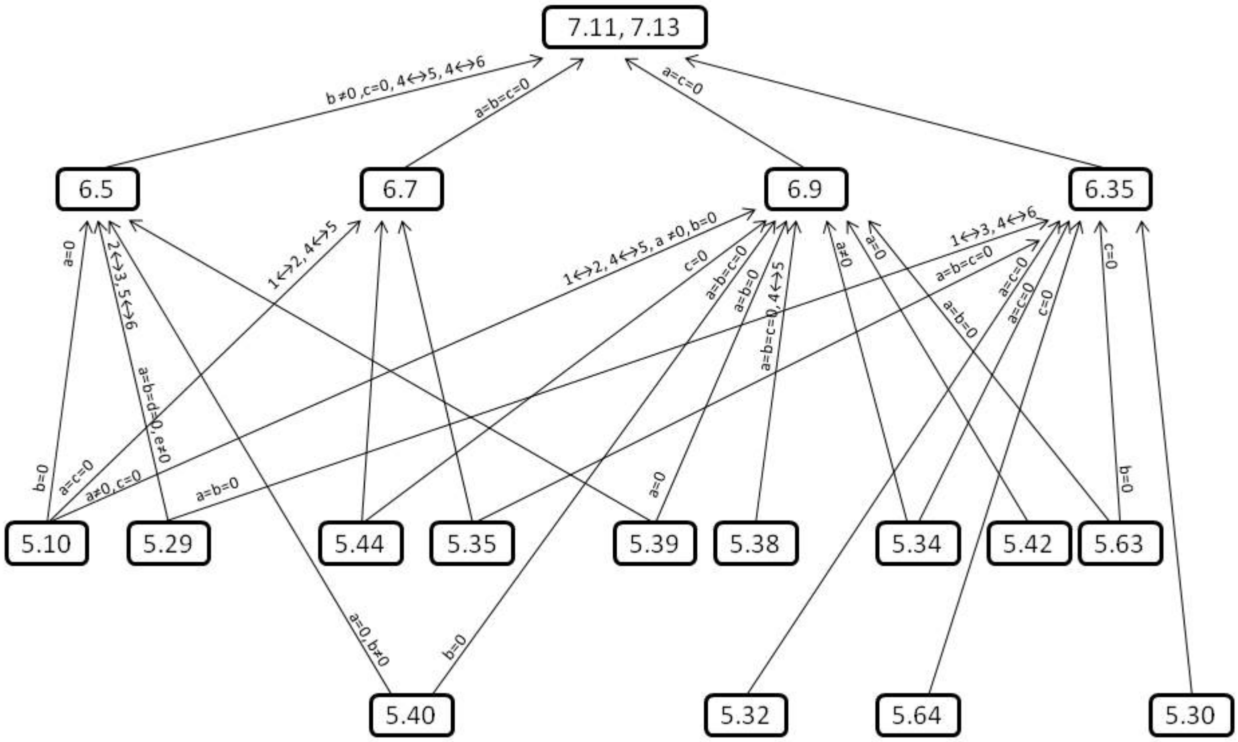


Рисунок 1.2 – Промежуточный подграф $\Gamma_5(7.11, 7.13)$

В подграфе $\Gamma_5(7.11, 7.13)$ (Рисунок 1.2) около стрелок указаны коэффициенты, при которых происходит вложение подалгебр. В конце стрелки соотношение относится к надалгебре, а в начале – к подалгебре. Также указано какую замену операторов нужно сделать для вложения подалгебр. Вложение произведено с точностью до автоморфизмов. В данном подграфе не учтено вложение в подалгебры размерности больше 7.

1.3.3. Конечный подграф $\Gamma_1(5.10)$ с 5-мерной подалгеброй в вершине, в которую вложены подалгебры размерности меньше 5

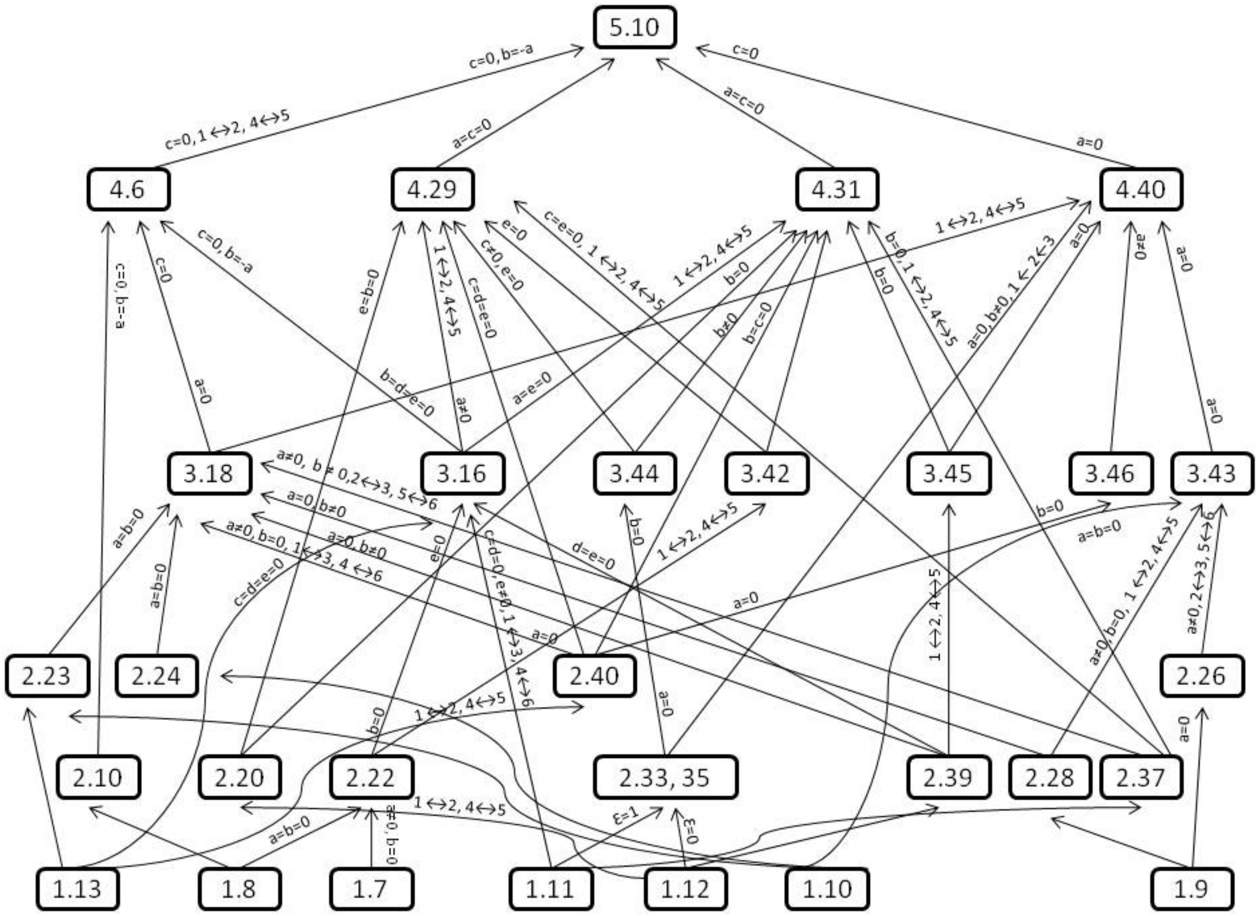


Рисунок 1.3 – Конечный подграф $\Gamma_1(5.10)$

В подграфе $\Gamma_1(5.10)$ (Рисунок 1.3) около стрелок указаны коэффициенты, при которых происходит вложение подалгебр. Также указано какую замену операторов нужно сделать для вложения подалгебр. Вложение произведено с точностью до автоморфизмов. В данном подграфе не учтено вложение подалгебр в подалгебры размерности больше 5.

Одномерные подалгебры из L_{12} вида $1.k$ имеют базис в виде суммы оператора Y_1 и оператора $1 : k$ из оптимальной системы для L_{11}.

Работа по представлению всего графа L_{12} не окончена. Необходимо построить подграфы всех 7-мерных подалгебр и всех 5-мерных подалгебр. Кроме того, нужно учесть вложение подалгебр, перескакивающих вершину подграфа.

1.4. Вложенные подмодели цепочки подграфа $\mathbf{\Gamma}_1(5.10)$

Используя цепочку вложенных подалгебр из подграфа $\Gamma_1(5.10)$ (Рисунок 1.3), построены инвариантные подмодели по подалгебрам 1.8, 2.10 и частично инвариантные подмодели по подалгебрам 4.6, 5.10. Построенные подмодели вкладываются друг в друга. Для доказательства вложения подмоделей нужно инварианты подалгебры выразить через инварианты надалгебры и полученную замену сделать в подмодели подалгебры. Если полученная система не будет зависеть от переменных, которых нет в надалгебре, то система совпадет с подмоделью надалгебры. Такую замену всегда можно осуществить. Это следует из леммы [80].

Лемма 1.1. *(об инвариантах надалгебры). Инварианты надалгебры суть функции инвариантов подалгебры.*

Вложение подмоделей следует из теоремы [80].

Теорема 1.1. *(о вложении подмодели надалгебры в подмодель подалгебры). Пусть подалгебра вложена в надалгебру большей размерности. Любая дифференциально инвариантная подмодель (ДИП) надалгебры задает семейство точных решений некоторой ДИП подалгебры. Для определения точных решений ДИП подалгебры надо получить представление решения ДИП подалгебры из представления решения ДИП надалгебры.*

1.4.1. Инвариантная подмодель ранга 3 цепочки подграфа $\mathbf{\Gamma}_1(5.10)$

Базисный оператор подалгебры 1.8 в декартовой системе координат имеет вид:

$$Y_1 + X_{11} = \partial_p + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Инварианты данной подалгебры - фукции $I(t, x, y, z, u, v, w, p, \rho)$ - удовлетворяют однородному уравнению первого порядка [46]:

$$(Y_1 + X_{11})I = 0$$

и находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dp}{1} = \frac{du}{0} = ... = \frac{d\rho}{0}.$$

Полный функциональный независимый набор инвариантов подалгебры 1.8 можно взять в виде:

$$u, v, w, \rho, x_1 = \frac{x}{t}, y_1 = \frac{y}{t}, z_1 = \frac{z}{t}, p_1 = p - \ln|t|. \tag{1.11}$$

Инвариантные решения ранга 3 имеют представление:

$$\begin{gathered} u, v, w, \rho \parallel x_1, y_1, z_1; p = p_1(x_1, y_1, z_1) + \ln|t|; \\ h(S) = \ln|t| + p_1 - f(\rho) = \ln|t| + S_1(x_1, y_1, z_1). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Подстановка (1.12) в систему (1.5) дает инвариантную подмодель 1.8:

$$\begin{aligned} &(u - x_1)\rho_{x_1} + (v - y_1)\rho_{y_1} + (w - z_1)\rho_{z_1} + \rho(u_{x_1} + v_{y_1} + w_{z_1}) = 0, \\ &\rho(u - x_1)u_{x_1} + \rho(v - y_1)u_{y_1} + \rho(w - z_1)u_{z_1} + p_{1_{x_1}} = 0, \\ &\rho(u - x_1)v_{x_1} + \rho(v - y_1)v_{y_1} + \rho(w - z_1)v_{z_1} + p_{1_{y_1}} = 0, \\ &\rho(u - x_1)w_{x_1} + \rho(v - y_1)w_{y_1} + \rho(w - z_1)w_{z_1} + p_{1_{z_1}} = 0, \\ &1 + (u - x_1)S_{1_{x_1}} + (v - y_1)S_{1_{y_1}} + (w - z_1)S_{1_{z_1}} = 0, \\ &S_1 = p_1(x_1, y_1, z_1) - f(\rho(x_1, y_1, z_1)), \end{aligned} \tag{1.13}$$

которая задает решения (1.5), зависящие от трех независимых переменных.

1.4.2. Инвариантная подмодель ранга 2 цепочки подграфа $\mathbf{\Gamma}_1$(5.10)

Базисные операторы подалгебры 2.10 имеют вид:

$$\begin{gathered} X_{10} = \partial_t, \\ Y_1 + X_{11} = \partial_p + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Инварианты подалгебры (1.14) таковы:

$$u,\ v,\ w,\ \rho,\ x_2 = \frac{x}{z},\ y_2 = \frac{y}{z},\ p_2 = p - \ln|z|. \tag{1.15}$$

Из уравнения состояния (1.3) следует равенство

$$h(S) = \ln|z| + p_2 - f(\rho) = \ln|z| + S_2.$$

Инварианты (1.15) выражаются через инварианты (1.11):

$$\begin{gathered} u, v, w, \rho, x_2 = \frac{x_1}{z_1}, \\ y_2 = \frac{y_1}{z_1}, p_2 = p_1 + \ln|t| - \ln|z| = p_1 - \ln|z_1|, \\ S_2 = \ln|t| + S_1 - \ln|z| = S_1 - \ln|z_1|. \end{gathered}$$

Возможно представление частично инвариантного решения ранга 3 дефекта 1:

$$u, v, w, \rho \parallel \alpha, x_2, y_2; p = \ln|z| + p_2(\alpha, x_2, y_2),$$
$$h(S) = \ln|z| + p_2(\alpha, x_2, y_2) - f(\rho(\alpha, x_2, y_2)),$$

где $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$.

Здесь рассматривается более простое для построения инвариантное решение с представлением вида:

$$\begin{gathered} u, v, w, \rho \parallel x_2, y_2; p = p_2(x_2, y_2) + \ln|z|, \\ h(S) = \ln|z| + S_2(x_2, y_2). \end{gathered} \tag{1.16}$$

Подстановка (1.16) в систему (1.5) дает инвариантную подмодель 2.10:

$$\begin{aligned} &(u - x_2 w)\rho_{x_2} + (v - y_2 w)\rho_{y_2} + \rho((u - x_2 w)_{x_2} + (v - y_2 w)_{y_2}) = -2\rho w, \\ &(u - x_2 w)u_{x_2} + (v - y_2 w)u_{y_2} + \rho^{-1} p_{2_{x_2}} = 0, \\ &(u - x_2 w)v_{x_2} + (v - y_2 w)v_{y_2} + \rho^{-1} p_{2_{y_2}} = 0, \\ &(u - x_2 w)w_{x_2} + (v - y_2 w)w_{y_2} + \rho^{-1}(1 - x_2 p_{2_{x_2}} - y_2 p_{2_{y_2}}) = 0, \\ &(u - x_2 w)S_{2_{x_2}} + (v - y_2 w)S_{2_{y_2}} + w = 0, \\ &S_2 = p_2 - f(\rho), \end{aligned} \tag{1.17}$$

которая задает решения (1.5), зависящие от двух независимых переменных.

1.4.3. Вложение решений инвариантных подмоделей цепочки подграфа $\mathbf{\Gamma}_1(5.10)$

Утверждение 1.1. *Все решения инвариантной подмодели* 2.10 *вкладываются в решения инвариантной подмодели* 1.8 *при выборе согласованных инвариантов.*

Доказательство. Запишем инвариантную подмодель 1.8 (1.13) в переменных инвариантной подмодели 2.10. Для этого сделаем замену:

$$
\begin{gathered}
x_2 = \frac{x_1}{z_1}, y_2 = \frac{y_1}{z_1}, z_1,\\
u(x_1, y_1, z_1) = u_2(x_2, y_2, z_1),\\
v(x_1, y_1, z_1) = v_2(x_2, y_2, z_1),\\
w(x_1, y_1, z_1) = w_2(x_2, y_2, z_1),\\
\rho(x_1, y_1, z_1) = \rho_2(x_2, y_2, z_1),\\
p_2(x_2, y_2, z_1) = p_1(x_1, y_1, z_1) - \ln|z_1|,\\
S_2(x_2, y_2, z_1) = S_1(x_1, y_1, z_1) - \ln|z_1|.
\end{gathered}
$$

Выразим производные:

$$
\begin{gathered}
\rho_{x_1} = \rho_{2_{x_2}}\tfrac{1}{z_1}, \quad \rho_{y_1} = \rho_{2_{y_2}}\tfrac{1}{z_1},\\
\rho_{z_1} = -\rho_{2_{x_2}}\tfrac{x_2}{z_1} - \rho_{2_{y_2}}\tfrac{y_2}{z_1} + \rho_{2_{z_1}},\\
u_{x_1} = u_{2_{x_2}}\tfrac{1}{z_1}, \quad v_{y_1} = v_{2_{y_2}}\tfrac{1}{z_1},\\
w_{z_1} = -w_{2_{x_2}}\tfrac{x_2}{z_1} - w_{2_{y_2}}\tfrac{y_2}{z_1} + w_{2_{z_1}}.
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

Подстановка (1.18) в инвариантную подмодель 1.8 (1.13) дает систему:

$$
\begin{aligned}
&(u_2 - x_2w_2)\rho_{2x_2} + (v_2 - y_2w_2)\rho_{2y_2} + \rho_2(u_{2x_2} + v_{2y_2} -\\
&-x_2w_{2x_2} - y_2w_{2y_2}) + (w_2 - z_1)z_1\rho_{2z_1} + \rho_2 z_1 w_{2z_1} = 0,\\
&(u_2 - x_2w_2)u_{2x_2} + (v_2 - y_2w_2)u_{2y_2} + \rho_2^{-1}p_{2x_2} + z_1(w_2 - z_1)u_{2z_1} = 0,\\
&(u_2 - x_2w_2)v_{2x_2} + (v_2 - y_2w_2)v_{2y_2} + \rho_2^{-1}p_{2y_2} + z_1(w_2 - z_1)v_{2z_1} = 0,\\
&(u_2 - x_2w_2)w_{2x_2} + (v_2 - y_2w_2)w_{2y_2} + \rho_2^{-1}(1 - x_2p_{2x_2} - y_2p_{2y_2} + p_{2z_1})+\\
&+z_1(w_2 - z_1)w_{2z_1} = 0,\\
&(u_2 - x_2w_2)S_{2x_2} + (v_2 - y_2w_2)S_{2y_2} + w_2 + (w_2 - z_1)z_1S_{2z_1} = 0,\\
&S_2 = p_2 - f(\rho_2).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

В системе (1.19) если $\vec{u}_2, p_2, S_2, \rho_2$ не зависят от z_1, то инвариантная подмодель 1.8 (1.13) совпадает с уравнениями (1.17) инвариантной подмодели 2.10. □

1.4.4. Частично инвариантная подмодель для 4-мерной подалгебры и ее частичная редукция в инвариантную подмодель 2-мерной подалгебры

Подалгебра 4.6 задается базисными операторами:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x,\\ X_{10} = \partial_t,\\ aX_4 + X_{11} = a(t\partial_x + \partial_u) + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\\ Y_1 + bX_4 = \partial_p + b(t\partial_x + \partial_u), b = -a.\end{gathered}$$

В последнем операторе коэффициент $b = -a$, так как только тогда подалгебра 2.10 вкладывается в подалгебру 4.6. Из операторов X_1, X_{10}, $Y_1 - aX_4$ следуют инварианты:

$$v, w, \rho, y, z, u_1 = u + ap. \tag{1.20}$$

Представим оператор $aX_4 + X_{11}$ в инвариантах (1.20):

$$a\partial_{u_1} + y\partial_y + z\partial_z. \tag{1.21}$$

Инварианты оператора (1.21) удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{du_1}{a} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dv}{0} = \frac{dw}{0} = \frac{d\rho}{0}.$$

Отсюда следуют инварианты подалгебры 4.6:

$$v, w, \rho, y_2 = \frac{y}{z}, u_3 = u + ap - a\ln|z|. \tag{1.22}$$

Регулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1 представляется формулами:

$$\begin{gathered}u_3, v, w, \rho \parallel y_2; u = u_3(y_2) + a\ln|z| - ap, p = p(t,x,y,z),\\ h(S) = p - f(\rho).\end{gathered} \tag{1.23}$$

Подстановка (1.23) в систему (1.5) дает частично инвариантную подмодель ранга 1 дефекта 1 4.6:

$$\begin{aligned}&azp_x = (v - y_2 w)\frac{\rho_{y_2}}{\rho} + v_{y_2} - y_2 w_{y_2},\\ &az(p_t + (u_3 + a\ln|z| - ap)p_x + vp_y + wp_z) - z\rho^{-1}p_x =\\ &= (v - y_2 w)u_{3_{y_2}} + wa,\\ &zp_y + \rho(v - y_2 w)v_{y_2} = 0,\\ &zp_z + \rho(v - y_2 w)w_{y_2} = 0,\\ &z(p_t + (u_3 + a\ln|z| - ap)p_x + vp_y + wp_z) = f_\rho \rho_{y_2}(v - y_2 w).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Из пятого и второго уравнений системы (1.24) следует равенство:

$$-zp_x = \rho[(v - y_2 w)u_{3_{y_2}} + wa - af_\rho \rho_{y_2}(v - y_2 w)] \equiv Q_1(y_2). \qquad (1.25)$$

Из третьего уравнения системы (1.24) следует равенство:

$$-zp_y = \rho(v - y_2 w)v_{y_2} \equiv -Q_2(y_2). \qquad (1.26)$$

Из четвертого уравнения системы (1.24) следует равенство:

$$-zp_z = \rho(v - y_2 w)w_{y_2} \equiv -Q_3(y_2). \qquad (1.27)$$

Подстановка Q_1 в первое уравнение системы (1.24) дает уравнение:

$$a\rho[(v - y_2 w)(u_{3_{y_2}} - af_\rho \rho_{y_2}) + wa] + \\ + (v - y_2 w)\frac{\rho_{y_2}}{\rho} + (v - y_2 w)_{y_2} + w = 0. \qquad (1.28)$$

Из пятого уравнения системы (1.24) следует равенство:

$$zp_t = -z[(u_3 + a\ln|z| - ap)p_x + vp_y + wp_z] + f_\rho \rho_{y_2}(v - y_2 w). \qquad (1.29)$$

Таким образом, система (1.24) равносильна системе из уравнений (1.25)-(1.29).

Дифференцирование (1.25) по t дает $-zp_{xt} = (Q_1)'_t = 0$. Дифференцирование (1.29) по x приводит к $zp_{tx} = -(apQ_1(y_2))'_x = -aQ_1 p_x = -azp_x^2 = 0$. Следовательно, $p_x = 0$ и $Q_1 = 0$. Равенство (1.29) можно переписать в виде

$$zp_t \equiv P(y_2). \qquad (1.30)$$

Дифференцирование (1.26) по t, (1.29) по y и сравнивание смешанных производных от функции p дает равенство:

$$zp_{yt} = zp_{ty} = P_{y_2}\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow P = P_0 = const.$$

Из (1.30) следует $p_t = z^{-1}P_0$, $p_{tz} = -z^{-2}P_0$, $zp_{tz} = -z^{-1}P_0$. С другой стороны, из (1.27) следует $zp_{zt} = (Q_3)'_t = 0$, тогда $P_0 = 0$ и $p_t = 0$.

Дифференцирование (1.26) по z, (1.27) по y дает равенство:

$$p_{yz} = -z^{-2}Q_2 - Q'_2 y_2 z^{-2} = Q'_3 z^{-2} \Rightarrow Q_3 + y_2 Q_2 = c \qquad (1.31)$$

В силу (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.31) система (1.24) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&-\rho(v-y_2w)(w_{y_2}+y_2v_{y_2})=c,\\
&(v-y_2w)\left[a\rho(u_{3y_2}-af_\rho\rho_{y_2})+\frac{\rho_{y_2}}{\rho}\right]+(v-y_2w)_{y_2}+a^2\rho w+w=0,\\
&\rho(v-y_2w)(u_{3y_2}-af_\rho\rho_{y_2})=-a\rho w,\\
&(v-y_2w)\left[vv_{y_2}+ww_{y_2}+f_\rho\frac{\rho_{y_2}}{\rho}\right]=0.
\end{aligned}\tag{1.32}$$

Если $v=y_2w$, то $c=v=w=0$, $\rho(y_2)$, $u_3(y_2)$ – произвольные функции, $p=p_0$ – постоянная.

Если $v\neq y_2w$, то в системе (1.32) второе уравнение в силу третьего принимает вид:

$$\rho_{y_2}(v-y_2w)+\rho(v_{y_2}-y_2w_{y_2})=0.\tag{1.33}$$

Остаются равенства:

$$\begin{aligned}
&\rho(v-y_2w)(w_{y_2}+y_2v_{y_2})+c=0,\\
&\rho(v-y_2w)(u_{3y_2}-af_{y_2}\rho_{y_2})=-a\rho w,\\
&vv_{y_2}+ww_{y_2}+f_\rho\frac{\rho_{y_2}}{\rho}=0.
\end{aligned}\tag{1.34}$$

Представим p в виде $p(y,z)=\widetilde{p}(y_2,z)$. Из (1.26), (1.27) следует $\widetilde{p}_{y_2}=Q_2$, $z\widetilde{p}_z-y_2\widetilde{p}_{y_2}=Q_3$. Отсюда следует, что $\widetilde{p}_z=z^{-1}(Q_3+y_2Q_2)=cz^{-1}$ в силу (1.31). Вторые производные совпадают, поэтому из полного дифференциала находим:

$$p=\widetilde{p}=\int\widetilde{p}_z dz+\int\widetilde{p}_{y_2}dy_2=c\ln|z|-p_0(y_2),\ p_0'(y_2)=\rho(v-y_2w)v'.\tag{1.35}$$

Уравнения (1.33), (1.34) образуют частично инвариантную подмодель 4.6.

Утверждение 1.2. *При $c=1$, $v\neq y_2w$ все решения регулярной частично инвариантной подмодели ранга 1 дефекта 1 для подалгебры* 4.6 *редуцируются к решениям инвариантной подмодели для подалгебры* 2.10.

Доказательство. Равенства (1.33), (1.34) при $c=1$, $v\neq y_2w$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\rho(v-y_2w)(w_{y_2}+y_2v_{y_2})=-1,\\
&\rho_{y_2}(v-y_2w)+\rho(v_{y_2}-y_2w_{y_2})=0,\\
&(v-y_2w)(u_{3y_2}-af_\rho\rho_{y_2})=-aw,\\
&vv_{y_2}+ww_{y_2}+f_\rho\frac{\rho_{y_2}}{\rho}=0.
\end{aligned}\tag{1.36}$$

При этом из (1.35)

$$p = -p_0 + \ln|z|, \quad p_0' = \rho(v - y_2 w)v'.$$

Из (1.17) уравнения инвариантной подмодели 2.10 при $u = u(y_2)$, $v = v(y_2)$, $w = w(y_2)$, $\rho = \rho(y_2)$, $p = p(y_2)$, $S_2 = S_2(y_2) = p_2 - f(\rho)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(v - y_2 w)\rho_{y_2} + \rho(v - y_2 w)_{y_2} = -\rho w,\\
&(v - y_2 w)u_{y_2} = 0,\\
&\rho(v - y_2 w)v_{y_2} + p_{2_{y_2}} = 0,\\
&\rho(v - y_2 w)w_{y_2} - y_2 p_{2_{y_2}} + 1 = 0,\\
&(v - y_2 w)(p_{2_{y_2}} - f_\rho \rho_{y_2}) + w = 0.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Первое уравнение системы (1.37) совпадает со вторым уравнением системы (1.36).

Из второго уравнения системы (1.37) и неравенства $v - y_2 w \neq 0$ следует $u = const$.

Покажем, что для частично инвариантной подмодели 4.6 выполняется то же соотношение $u = const$.

Из равенств (1.23) и (1.35) следует $u = u_3 + a p_0$. Справа функция зависит только от y_2. Производная $u_{y_2} = u_{3_{y_2}} + a\rho v_{y_2}(v - y_2 w) = 0$ в силу первого, третьего и четвертого уравнений системы (1.36). Значит, из системы (1.36) следует второе уравнение системы (1.37).

Выраженное $p_{2_{y_2}}$ из третьего уравнения системы (1.37) подставим в четвертое уравнение системы (1.37). Получим первое уравнение системы (1.36).

Умножим третье уравнение системы (1.37) на v, а четвертое уравнение на w и сложим полученные выражения:

$$(v - y_2 w)(v v_{y_2} + w w_{y_2}) + \frac{1}{\rho}(p_{2_{y_2}}(v - y_2 w) + w) = 0 \tag{1.38}$$

В силу пятого уравнения системы (1.37) из уравнения (1.38) получим уравнение, совпадающее с четвертым уравнением системы (1.36). □

Утверждение 1.3. *При* $c \neq 1$ *решения частично инвариантной подмодели* 4.6 *не редуцируются к решениям инвариантной подмодели* 1.8, *а значит, и к решениям подмодели* 2.10.

Доказательство. Равенства (1.33), (1.34) при $v \neq y_2 w$, $c \neq 1$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\rho(v - y_2 w)(w_{y_2} + y_2 v_{y_2}) + c = 0,\\
&\rho_{y_2}(v - y_2 w) + \rho(v_{y_2} - y_2 w_{y_2}) = 0,\\
&(v - y_2 w)(u_{3y_2} - a f_\rho \rho_{y_2}) = -aw,\\
&v v_{y_2} + w w_{y_2} + f_\rho \frac{\rho_{y_2}}{\rho} = 0.
\end{aligned}$$

Инварианты (1.22) выражаются через инварианты (1.11):

$$u_3 = u + ap_1 - a\ln|z_1|, v, w, \rho, y_2 = \frac{y_1}{z_1}.$$

Попробуем выразить p_0 через инварианты подалгебры 1.8.

$$p = p_1 + \ln|t| = c\ln|z| - p_0(y_2)$$

для подмоделей 1.8, 4.6. Отсюда следует

$$p_0 = p_1 + \ln|t| - c\ln|z| = p_1 - c\ln|z_1| - (c-1)\ln|t|. \tag{1.39}$$

При $c \neq 1$ нельзя p_0 записать через инварианты (1.11), так как в уравнение (1.39) входит переменная t. □

1.4.5. Частично инвариантная подмодель для 5-мерной подалгебры и ее решение

Подалгебра 5.10 задается операторами X_2, X_3, X_{10}, $aX_5 + X_{11}$, $Y_1 + bX_5 + cX_6$.

В подалгебру 5.10 вкладывается подалгебра 4.6 при автоморфизме: $X_1 \leftrightarrow X_2$, $X_4 \leftrightarrow X_5$, $c = 0$. Операторы подалгебры 5.10 примут вид:

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_{10} = \partial_t,\\
aX_4 + X_{11} = a(t\partial_x + \partial_u) + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\\
Y_1 + bX_4 = \partial_p + b(t\partial_x + \partial_u), \quad X_3 = \partial_z,
\end{gathered}$$

Операторы X_1, X_{10}, $aX_4 + X_{11}$, $Y_1 + bX_4$ составляют подалгебру 4.6, поэтому известны их инварианты:

$$u_3 = u - bp - a\ln|z|, v, w, \rho, y_2 = \frac{y}{z}. \tag{1.40}$$

Запишем оператор X_3 в инвариантах (1.40):

$$\partial_z \to -\frac{1}{z}(a\partial_{u_3} + y_2\partial_{y_2}).$$

Инварианты X_3 в новых переменных находятся из системы уравнений:

$$\frac{du_3}{a} = \frac{dy_2}{y_2} = \frac{dv}{0} = \frac{dw}{0} = \frac{d\rho}{0}.$$

Инварианты подалгебры 5.10 таковы:

$$u_4 = u - bp - a\ln|y| = u_3 - a\ln|y_2|, v, w, \rho.$$

Частично инвариантное решение имеет представление:

$$\begin{gathered} u = bp + a\ln|y| + u_4,\ v = v_0,\ w = w_0,\ \rho = \rho_0, \\ p = p(t,x,y,z), \quad h(S) = p - f(\rho_0). \end{gathered} \tag{1.41}$$

Подстановка (1.41) в систему (1.5) дает частично инвариантную подмодель 5.10 ранга 0 дефекта 1:

$$\begin{aligned} &bp_x = 0, \\ &bp_t + (bp + a\ln|y| + c)bp_x + v_0(bp_y + \frac{a}{y}) + w_0bp_z + \rho_0^{-1}p_x = 0, \\ &\rho_0^{-1}p_y = 0, \\ &\rho_0^{-1}p_z = 0, \\ &p_t + (bp + a\ln|y| + c)p_x + v_0p_y + w_0p_z = 0, \end{aligned}$$

где $c = u_4$.

Утверждение 1.4. *Регулярная частично инвариантная подмодель ранга 0 дефекта 1 для подалгебры* 5.10 *имеет решение*

$$u = bp_0 + a\ln|y|, \quad v = w = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad S = S_0, \tag{1.42}$$

с точностью до галилеева переноса по x *и* z*. Решение* (1.42) *также является решением подмодели 4.6.*

Из (1.42) движение частиц в плоскости (x,y) задается системой:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = bp_0 + a\ln|y|, \quad \tfrac{dy}{dt} = 0, \\ &x|_{t=0} = \xi, \quad y|_{t=0} = \eta. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Решение (1.43) имеет вид:

$$x = u_0 t + \xi,$$
$$y = \eta, \tag{1.44}$$

где $u_0 = bp_0 + a \ln|\eta|$. Частицы движутся параллельно оси x с постоянной скоростью u_0. Скорость частиц равна нулю при $|\eta| = exp(-ba^{-1}p_0)$.

На Рисунке 1.4 показаны эпюры скоростей течения, заданного формулами (1.44).

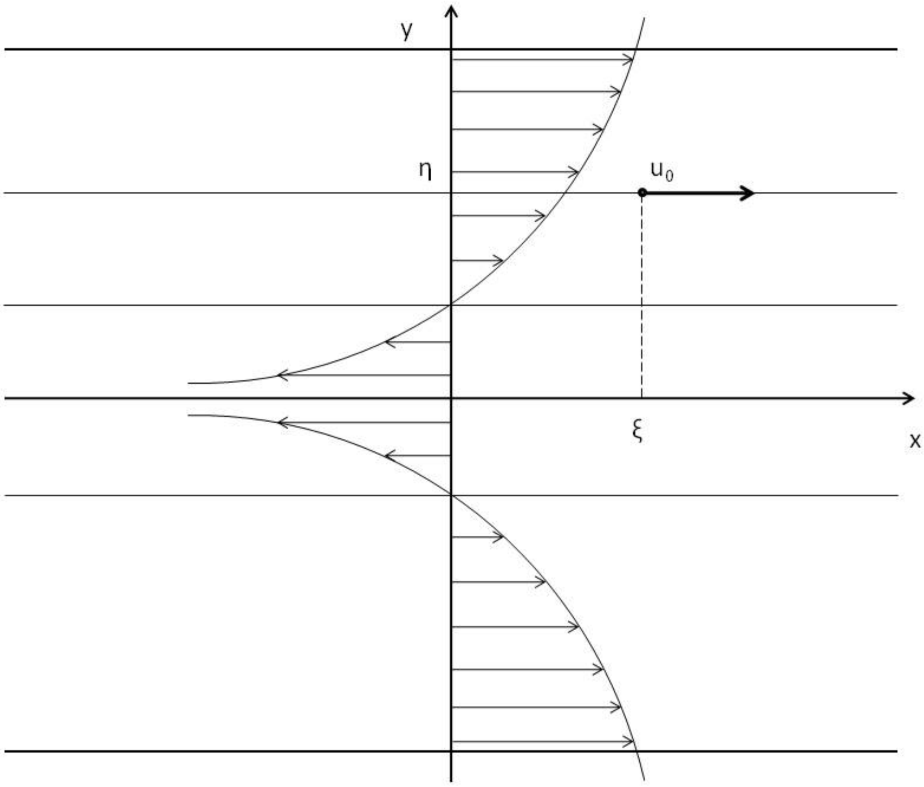


Рисунок 1.4 – Движение частиц, заданное формулами (1.44).

ГЛАВА 2
ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей главе по подалгебрам алгебры Ли L_{12} построены инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Для двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 доказана редукция к инвариантным подмоделям. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр алгебры Ли L_{12}, по которым построены все инвариантные подмодели ранга 1 и получены некоторые точные решения. Результаты опубликованы в [53, 54, 61, 64–71].

2.1. О построении инвариантных подмоделей

Инвариантные подмодели ненулевого ранга алгебры Ли L_{12} возможно построить на подалгебрах размерностей от 1 до 3 включительно. Для построения подмодели необходимо вычислить инварианты подалгебры — функции от всех переменных системы (1.1) с учетом (1.3) (зависимых u, v, w, ρ, p и независимых t, x, y, z), зануляющиеся при действии операторов подалгебры. Удобно составить базис инвариантов следующим образом: взять инварианты, содержащие только независимые переменные и инварианты, содержащие одну зависимую переменную. Тогда представление инвариантного решения задается зависимостью инвариантов второго типа от инвариантов первого типа. Подстановка выбранного представления решения в систему (1.1) с учетом (1.3) определяет инвариантные подмодели — системы уравнений, связывающих только инварианты [36].

Для всех подалгебр алгебры Ли L_{12}, как и для подалгебр алгебры Ли L_{11}, функция плотности ρ является инвариантом. Инварианты подалгебр алгебр Ли L_{11} и L_{12} можно выбрать так, что они будут отличаться только инвариантом, содержащим функцию давления p. Для подалгебр алгебры Ли L_{11} этот инвариант имеет вид p, а для подалгебр алгебры Ли L_{12} — вид $p + q$, где q — слагаемое из независимых переменных. Очевидно, что, построив инвариантные подмодели для алгебры Ли L_{12}, можно получить инвариантные подмодели для алгебры Ли L_{11}. Для этого в представлениях решений алгебры Ли L_{12} при q добавляется коэффициент γ для наглядного отличия подмоделей 11-мерной и 12-мерной алгебр Ли ($\gamma = 0$ в случае алгебры Ли L_{11}; $\gamma = 1$

в случае алгебры Ли L_{12}).

Каждая инвариантная подмодель может быть изучена методами группового анализа и является основой для получения семейства точных решений исходных уравнений (1.1) с учетом (1.3), поэтому подмодели необходимо записывать в виде, максимально упрощающем их исследование. Таким может быть вид, называемый каноническим, определение которого будет дано ниже.

2.2. Канонический вид инвариантных подмоделей ранга 3

Инвариантные подмодели ранга 3 строятся по одномерным подалгебрам алгебры Ли L_{12}, которые получаются прибавлением оператора Y_1 к одномерным подалгебрам алгебры Ли L_{11} [81]. Функции-инварианты одномерных подалгебр обозначаются через u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 (через S_1 обозначается выражение $p_1 - f(\rho)$), а инварианты из независимых переменных — через x_1, y_1, z_1 (или t).

Теорема 2.1. *Инвариантные подмодели ранга 3 алгебры Ли L_{12} в каноническом виде могут быть представлены с помощью двух типов систем: эволюционного типа (t — инвариант)*

$$\begin{gathered}
Du_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1,\\
Dv_1 + a_2\rho^{-1}p_{1y_1} = b_2,\\
Dw_1 = b_3,\\
D\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho b_4,\\
DS_1 = b_5 \text{ или } Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5,
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где

$$D = \partial_t + u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1},\tag{2.2}$$

или стационарного типа [81, с. 59]

$$\begin{gathered}
Du_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1,\\
Dv_1 + a_2\rho^{-1}p_{1y_1} = b_2,\\
Dw_1 + a_3\rho^{-1}p_{1z_1} = b_3,\\
D\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho b_4,\\
DS_1 = b_5 \text{ или } Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5,
\end{gathered}\tag{2.3}$$

где

$$D = u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1} + w_1\partial_{z_1},$$

a_i, $i = 1, 2, 3$; b_j, $j = 1..5$ – *коэффициенты подмоделей.*

Доказательство. Теорема 2.1 доказывается непосредственным вычислением инвариантных подмоделей ранга 3 канонического вида эволюционного и стационарного типов. Выбранные представления решений записаны в Таблицы 2.1, 2.2, а коэффициенты полученных подмоделей ранга 3 канонического вида перечислены в Таблицах 2.3, 2.4, 2.5, где в первой колонке указан номер подалгебры (№) и выбранная система координат (C, D). Описание построения подмоделей приводится в п. 2.3. Коэффициенты подмоделей были проверены с помощью системы компьютерной математики Maple. □

2.3. Представления решений и коэффициенты инвариантных подмоделей ранга 3 алгебры Ли L_{12}

Представления инвариантных решений выбираются из работы [81] с добавленным слагаемым к давлению. Для инвариантной подмодели ранга 3 1.2 из L_{11} [81] уточнен коэффициент b_3. Для подалгебры 1.4 из L_{11} уточнено представление инвариантного решения и выяснен вид инвариантной подмодели ранга 3 в каноническом виде. Для удобства записи подалгебры 1.7, 1.8 из L_{12} объединены в подалгебру $aX_4+X_{11}+Y_1$ (при $a=0$ получится подалгебра 1.8, при $a \neq 0$ — подалгебра 1.7).

Таблица 2.1 – Представления инвариантных решений для подмоделей ранга 3 эволюционного типа

№ (C,D)	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{y_1}$	**u**	**v**	**w**	**p**
			U	**V**	**W**	
1.2 (C)	$x-at\theta$	r	$a\theta+\dfrac{y_1^2}{y_1^2+a^2t^2}u_1+a\dfrac{t}{y_1}w_1$	v_1	$w_1-\dfrac{aty_1}{y_1^2+a^2t^2}u_1$	$p_1+\gamma\theta$
1.3 (C)	x	r	u_1	v_1	w_1	$p_1+\gamma\theta$
1.4 (C)	r	$x-\theta$	$\dfrac{x_1^2}{x_1^2+1}v_1+\dfrac{w_1}{x_1}$	u_1	$w_1-\dfrac{x_1}{x_1^2+1}v_1$	$p_1+\gamma\theta$
1.11 (D)	$x-tz$	y	$\dfrac{u_1+tw_1}{t^2+1}+z$	v_1	$\dfrac{w_1-tu_1}{t^2+1}$	$p_1+\gamma z$
1.12 (D)	y	z	$w_1+\dfrac{x}{t}$	u_1	v_1	$p_1+\gamma\dfrac{x}{t}$
1.13 (D)	y	z	w_1	u_1	v_1	$p_1+\gamma x$

Таблица 2.2 – Представления инвариантных решений для подмоделей ранга 3 стационарного типа

№ (C,D)	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{z_1}$	**u**	**v**	**w**	**p**
				U	**V**	**W**	
1.1 (C)	$\frac{x}{t}-\frac{b}{a}\ln\lvert t\rvert$	$\frac{r}{t}$	$\theta-\frac{1}{a}\ln\lvert t\rvert$	$u_1+\frac{x}{t}+\frac{b}{a}$	v_1+y_1	$y_1\left(w_1+\frac{1}{a}\right)$	$p_1+\frac{\gamma}{a}\ln\lvert t\rvert$
1.5 (C)	$x-\frac{t^2}{2}$	r	$a\theta-t$	u_1+t	v_1	$\frac{y_1}{a}(w_1+1)$	$p_1+\gamma\frac{t}{a}$
1.6 (C)	x	r	$\theta-t$	u_1	v_1	$y_1(w_1+1)$	$p_1+\gamma t$
1.7, 1.8 (D)	$\frac{x}{t}-a\ln t$	$\frac{y}{t}$	$\frac{z}{t}$	$u_1+\frac{x}{t}+a$	$v_1+\frac{y}{t}$	$w_1+\frac{z}{t}$	$p_1+\gamma\ln\lvert t\rvert$
1.9 (D)	$x-\frac{t^2}{2}$	y	z	u_1+t	v_1	w_1	$p_1+\gamma t$
1.10 (D)	x	y	z	u_1	v_1	w_1	$p_1+\gamma t$

Таблица 2.3 – Коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 инвариантных подмоделей ранга 3 эволюционного типа (2.1)

№	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{b_2}$
1.2	$1+\frac{a^2t^2}{y_1^2}$	$\gamma\frac{at}{y_1^2}\rho^{-1}+\frac{2a}{t}\left(\frac{t}{y_1}v_1-1\right)\left(w_1-\frac{aty_1}{y_1^2+a^2t^2}u_1\right)$	1	$\frac{1}{y_1}\left(w_1-\frac{aty_1}{y_1^2+a^2t^2}u_1\right)^2$
1.3	1	0	1	$\frac{w_1^2}{y_1}$
1.4	1	$\frac{1}{x_1}\left(w_1-\frac{x_1}{x_1^2+1}v_1\right)^2$	$1+\frac{1}{x_1^2}$	$\frac{2}{x_1}\left(\frac{w_1}{x_1}-\frac{v_1}{x_1^2+1}\right)u_1+\gamma\frac{\rho^{-1}}{x_1^2}$
1.11	t^2+1	$2\frac{tu_1-w_1}{t^2+1}+\gamma t\rho^{-1}$	1	0
1.12	1	0	1	0
1.13	1	0	1	0

Таблица 2.4 – Коэффициенты b_3, b_4, b_5 инвариантных подмоделей ранга 3 эволюционного типа (2.1)

№	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$
1.2	$-\gamma\frac{y_1}{y_1^2+a^2t^2}\rho^{-1}+\frac{ay_1}{y_1^2+a^2t^2}u_1-\frac{2a^2t}{y_1^2+a^2t^2}w_1+\frac{a^2t^2-y_1^2}{y_1(y_1^2+a^2t^2)}v_1w_1$	$-\frac{v_1}{y_1}$	$-\gamma\left(\frac{w_1}{y_1}-\frac{at}{y_1^2+a^2t^2}u_1\right)$
1.3	$-\gamma\frac{\rho^{-1}}{y_1}-\frac{v_1w_1}{y_1}$	$-\frac{v_1}{y_1}$	$-\gamma\frac{w_1}{y_1}$
1.4	$-\frac{x_1^2-1}{x_1(x_1^2+1)}u_1w_1-\gamma\frac{x_1}{x_1^2+1}\rho^{-1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$-\gamma\left(\frac{w_1}{x_1}-\frac{v_1}{x_1^2+1}\right)$
1.11	$u_1-\gamma\rho^{-1}$	0	$\gamma\frac{tu_1-w_1}{t^2+1}$
1.12	$-\frac{1}{t}(w_1+\gamma\rho^{-1})$	$-\frac{1}{t}$	$-\gamma\frac{w_1}{t}$
1.13	$-\gamma\rho^{-1}$	0	$-\gamma w_1$

Таблица 2.5 – Коэффициенты инвариантных подмоделей
ранга 3 стационарного типа (2.3)

№	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$
1.1	1	$-u_1-\frac{b}{a}$	1	$-v_1+y_1\left(w_1+\frac{1}{a}\right)^2$	$\frac{1}{y_1^2}$	$-\frac{1}{y_1}(y_1+2v_1)\left(w_1+\frac{1}{a}\right)$	$-\left(3+\frac{v_1}{y_1}\right)$	$-\frac{\gamma}{a}$
1.5	1	-1	1	$\frac{y_1}{a^2}(w_1+1)^2$	$\frac{a^2}{y_1^2}$	$-2(w_1+1)\frac{v_1}{y_1}$	$-\frac{v_1}{y_1}$	$-\frac{\gamma}{a}$
1.6	1	0	1	$y_1(w_1+1)^2$	$\frac{1}{y_1^2}$	$-2\frac{v_1}{y_1}(w_1+1)$	$-\frac{v_1}{y_1}$	$-\gamma$
1.7, 1.8	1	$-u_1-a$	1	$-v_1$	1	$-w_1$	-3	$-\gamma$
1.9	1	-1	1	0	1	0	0	$-\gamma$
1.10	1	0	1	0	1	0	0	$-\gamma$

2.4. Пример вычисления инвариантной подмодели ранга 3

Рассматривается подалгебра 1.4 из алгебры Ли L_{12} в цилиндрической системем координат

$$X_1+X_7+Y_1=\partial_x+\partial_\theta+\partial_p$$

с инвариантами

$$t, r, x-\theta, U, V, W, \rho, p-\theta.$$

Выбирается представление инвариантного решения, позволяющее записать оператор полного дифференцирования (1.2) в каноническом виде (2.2):

$$\begin{gathered}U=\frac{x_1^2}{x_1^2+1}v_1+\frac{w_1}{x_1}, \quad V=u_1, \quad W=w_1-\frac{x_1}{x_1^2+1}v_1, \\ \rho, \quad p=p_1+\gamma\theta, \quad S=S_1+\gamma\theta,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где функции-инварианты u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 зависят от инвариантов из независимых переменных t, $x_1=r$, $y_1=x-\theta$. Подстановка (2.4) в уравнения (1.6) приводит к инвариантной подмодели ранга 3 канонического вида эволюционного типа, коэффициенты которой записаны в Таблицах 2.3, 2.4.

2.5. Канонический вид инвариантных подмоделей ранга 2

В оптимальной системе неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} [52] 40 представителей двумерных подалгебр. Две двумерные подалгебры 2.38, 2.39 задают частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1, редукция которых к инвариантным подмоделям доказана в п. 2.8. С помощью остальных двумерных подалгебр можно построить инвариантные подмодели ранга 2 эволюционного (t — инвариант) или стационарного типов [81].

Любая двумерная подалгебра имеет 7 инвариантов [33]. Инварианты из независимых переменных обозначаются как t, x_1 (эволюционный тип подмодели) или x_1, y_1 (стационарный тип подмодели). Инварианты от функций обозначаются как u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 (через S_1 обозначается выражение $p_1 - f(\rho)$).

Теорема 2.2. *Инварианты можно выбрать так, что инвариантная подмодель ранга 2 алгебры Ли L_{12} будет иметь канонический вид эволюционного типа*

$$\begin{gathered} D_1 u_1 + a_1 \rho^{-1} p_{1x_1} = b_1, \quad D_1 v_1 = b_2, \quad D_1 w_1 = b_3, \\ D_1 \rho + \rho u_{1x_1} = \rho b_4, \\ D_1 S_1 = b_5, \quad \textit{или} \quad D_1 p_1 + \rho f_\rho u_{1x_1} = \rho f_\rho b_4 + b_5, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$D_1 = \partial_t + u_1 \partial_{x_1}; \tag{2.6}$$

a_1 — коэффициенты от независимой переменной t или $a_1 = const$; b_j, $j = 1..5$ — коэффициенты от линейных (квадратичных) функций инвариантных скоростей, обратной степени плотности, переменных t, x_1 или $b_j = const$.

Доказательство. Теорема 2.2 доказывается непосредственным вычислением инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа. Представления решений полученных подмоделей записаны в Таблицу 2.6, а коэффициенты — в Таблицы 2.7, 2.8. Для компактной записи Таблиц 2.6–2.8 представление решения и коэффициенты подмодели 2.29 приводятся в п. 2.7. Описание построения подмоделей приводится в п. 2.6. Коэффициенты подмоделей были проверены с помощью системы компьютерной математики Maple. □

Теорема 2.3. *Инварианты можно выбрать так, что канонический вид инвариантной подмодели ранга 2 стационарного типа алгебры Ли L_{12} будет следующим*

$$\begin{gathered} D_1 u_1 + a_1 \rho^{-1} p_{1x_1} = b_1, \quad D_1 v_1 + a_2 \rho^{-1} p_{1y_1} = b_2, \quad D_1 w_1 = b_3, \\ D_1 \rho + \rho (u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho b_4, \\ D_1 S_1 = b_5, \quad \textit{или} \quad D_1 p_1 + \rho f_\rho (u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$D_1 = u_1 \partial_{x_1} + v_1 \partial_{y_1}; \tag{2.8}$$

коэффициенты a_i, $i = 1, 2$ *— функции независимых переменных* x_1, y_1*; коэффициенты* b_j, $j = 1..5$ *— линейные (квадратичные) функции инвариантных скоростей, обратной степени плотности или постоянные.*

Доказательство. Доказательство Теоремы 2.3 заключается в непосредственном вычислении инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида стационарного типа, представления решения которых даны в Таблицах 2.9, 2.10, а коэффициенты инвариантных подмоделей (2.7) — в Таблицах 2.11, 2.12. Для компактной записи Таблиц 2.9, 2.11, 2.12 все вычисления для подмодели 2.3 приводятся в п. 2.7. Коэффициенты подмоделей были проверены с помощью системы компьютерной математики Maple. □

2.6. Представления инвариантных решений и коэффициенты инвариантных подмоделей ранга 2 алгебры Ли L_{12}

Для подалгебр 2.14–2.17, 2.19, 2.30–2.32, 2.34–2.37, 2.40 алгебры Ли L_{12} представления решений выбираются с помощью представлений решений из работы [27] с добавленным слагаемым к функции давления p. Построение подмодели 2.33 описано в п. 2.7.

Полученные представления решений подмоделей эволюционного типа для подалгебр алгебры Ли L_{12}, за исключением подалгебры 2.29, записаны в Таблицу 2.6, при этом сами подалгебры восстанавливаются по инвариантам. Инвариантная подмодель 2.29 рассматривается в качестве примера в п. 2.7. Следует отметить, что после подстановки представлений решений в уравнения (1.1) с учетом (1.3) для получения канонического вида подмодели для подалгебр 2.29, 2.33 нужно выразить производные функций u_{1t}, v_{1t}, w_{1t} из первых трех уравнений подмодели; для подалгебры 2.30 следует взять линейные комбинации второго и третьего уравнений подмодели; для подалгебры 2.32 следует взять линейные комбинации первого и третьего уравнений подмодели. Подалгебра 2.19 рассматривается при $\varepsilon = 0$ (при $\varepsilon = 1$ получается подмодель стационарного типа).

Инвариантные подмодели ранга 2 канонического вида эволюционного типа (2.5) алгебры Ли L_{12} отличаются друг от друга только коэффициентами a_1, b_j, $j = 1..5$, которые перечислены в Таблицах 2.7, 2.8 за исключением подмодели 2.29.

Для подалгебр 2.8, 2.9, 2.11–2.13, 2.18–2.24, 2.26–2.28 алгебры Ли L_{12} представления решений выбираются с помощью представлений решений из работы [27] с добавленным слагаемым к функции давления p; для подалгебр 2.1, 2.2, 2.4–2.7 аналогично выбираются представления решений из работы [27], но в результате получается инвариантная подмодель, в которой три уравнения имеют неканонический вид

$$Du_1 + \rho^{-1} p_{1x_1} = A,$$
$$Dv_1 + a_1 Dw_1 + \rho^{-1} p_{1y_1} = B,$$
$$Dw_1 + b_1 \rho^{-1} p_{1y_1} = C,$$

где a_1, b_1 — коэффициенты подмоделей; A, B, C — правые части подмоделей.

В последней системе третье уравнение, умноженное на $-a_1$, прибавляется ко второму. Полученное равенство, умноженное на $-b_1$, прибавляется к третьему уравнению, умноженному на $1 - a_1 b_1$ для уничтожения слагаемого, содержащего производную давления p_{1y_1} в третьем уравнении системы. Замена

$$\widetilde{w}_1 = -b_1 v_1 + (1 - a_1 b_1) w_1$$

приводит к системе канонического вида, в которой $\widetilde{w}_1$ переобозначается через w_1. Для подалгебр 2.10, 2.25 инвариантная подмодель получена благодаря аналогичным рассуждениям.

Полученные представления решений подмоделей стационарного типа для подалгебр алгебры Ли L_{12} записаны в Таблицы 2.9, 2.10, кроме подалгебры 2.3 (см. п. 2.7). Следует отметить, что для подалгебр 2.1–2.7, 2.10, 2.25 после подстановки представлений решений в уравнения (1.1) с учетом (1.3) для получения канонического вида подмодели нужно выразить производные функций u_{1x_1}, v_{1x_1}, w_{1x_1} из первых трех равенств подмодели.

Инвариантные подмодели канонического вида стационарного типа (2.7) отличаются друг от друга только коэффициентами a_i, b_j, которые, за исключением подалгебры 2.3, записаны в Таблицах 2.11, 2.12. Подалгебра 2.3 рассматривается в качестве примера в п. 2.7. Для краткости записи подалгебры 2.23 ($\varepsilon = 0$), 2.27 ($\varepsilon = 1$) были объединены в подалгебру $\varepsilon X_4 + X_{10}$, $Y_1 + X_1$; 2.24 ($\varepsilon = 0$), 2.28 ($\varepsilon = 1$) — в подалгебру X_1, $Y_1 + \varepsilon X_4 + X_{10}$. Для подалгебры 2.12 из [52] считать $a \neq 0$ (при $a = 0$ получается подалгебра 2.15 при $\varepsilon = 0$). Подалгебра 2.19 рассматривается при $\varepsilon = 1$, в этом случае получается подмодель стационарного типа.

Представления решений для энтропии S можно получить из представлений решений для давления p, подставив вместо p переменную S, вместо p_1

переменную S_1 в последней колонке Таблиц 2.6, 2.9, 2.10.

Замечание 2.1. *В Таблицах 2.6–2.12 в первой колонке указан номер подалгебры из алгебры Ли* L_{12} *[52]. В Таблице 2.6 рядом с номером подалгебры указана выбранная система координат (C,D).*

Таблица 2.6 – Представления инвариантных решений для подмоделей эволюционного типа (2.5)

№ (C\D)	$\mathbf{x_1}$	**u\U**	**v\V**	**w\W**	**p**
2.14 (C)	r	$v_1 + \dfrac{x-\varepsilon\theta}{t}$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma\dfrac{x-\varepsilon\theta}{t}$
2.15 (C)	r	$v_1 + \dfrac{x-\varepsilon\theta}{t}$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma\theta$
2.16 (C)	r	v_1	u_1	w_1	$p_1 + \gamma(x-\varepsilon\theta)$
2.17 (C)	r	$v_1 + a\theta$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma(x-at\theta)$
2.19 (C) $\varepsilon = 0$	r	$v_1 + a\theta$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma\theta$
2.30 (D)	x	u_1	$\dfrac{v_1+tw_1}{t^2+1} + \dfrac{z+ty}{t^2+1}$	$\dfrac{tv_1-w_1}{t^2+1} + \dfrac{tz-y}{t^2+1}$	$p_1 - \gamma\dfrac{tz-y}{t^2+1}$
2.31 (D)	x	u_1	$v_1 + \dfrac{y}{t}$	$w_1 + \dfrac{z}{t}$	$p_1 + \gamma\dfrac{z}{t}$
2.32 (D)	$x - tz$	$\dfrac{u_1+tw_1}{1+t^2} + z$	v_1	$\dfrac{w_1-tu_1}{1+t^2}$	$p_1 + \gamma y$
2.33 (D)	$x - ay - tz$	$\dfrac{u_1}{t^2+a^2+1}+$ $+ av_1 + tw_1 + z$	$-\dfrac{a}{t^2+a^2+1}u_1 + v_1$	$-\dfrac{t}{t^2+a^2+1}u_1 + w_1$	$p_1 + \gamma z$
2.34 (D)	z	$v_1 + \dfrac{x-ay}{t-ab}$	w_1	u_1	$p_1 + \gamma\dfrac{yt-bx}{t-ab}$
2.35 (D)	z	$v_1 + \dfrac{x}{t} - a\dfrac{y}{t}$	w_1	u_1	$p_1 + \gamma\dfrac{x-ay}{t}$
2.36 (D)	y	$v_1 + z$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma(x-tz)$
2.37 (D)	y	$v_1 + z$	u_1	w_1	$p_1 + \gamma z$
2.40 (D)	x	u_1	v_1	w_1	$p_1 + \gamma(y-az)$

Таблица 2.7 – Коэффициенты a_1, b_1, b_2 подмоделей ранга 2 эволюционого типа (2.5)

№	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$
2.14	1	$\dfrac{w_1^2}{x_1}$	$\dfrac{1}{t}\left[\varepsilon\dfrac{w_1}{x_1} - v_1 - \gamma\rho^{-1}\right]$
2.15	1	$\dfrac{w_1^2}{x_1}$	$-\dfrac{v_1}{t} + \varepsilon\dfrac{w_1}{tx_1}$
2.16	1	$\dfrac{w_1^2}{x_1}$	$-\gamma\rho^{-1}$
2.17	1	$\dfrac{w_1^2}{x_1}$	$-a\dfrac{w_1}{x_1} - \gamma\rho^{-1}$
2.19 $\varepsilon = 0$	1	$\dfrac{w_1^2}{x_1}$	$-a\dfrac{w_1}{x_1}$
2.30	1	0	$\gamma\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\rho^{-1}$
2.31	1	0	$-\dfrac{v_1}{t}$
2.32	t^2+1	$2\dfrac{tu_1 - w_1}{1+t^2}$	$-\gamma\rho^{-1}$
2.33	t^2+a^2+1	$\dfrac{2t}{t^2+a^2+1}u_1-$ $-2w_1+\gamma t\rho^{-1}$	$\dfrac{-2aw_1+\gamma at\rho^{-1}}{t^2+a^2+1}$
2.34	1	0	$\dfrac{aw_1 - v_1}{t-ab} + \gamma\dfrac{b}{t-ab}\rho^{-1}$
2.35	1	0	$\dfrac{1}{t}(aw_1 - v_1 - \gamma\rho^{-1})$
2.36	1	0	$-w_1 - \gamma\rho^{-1}$
2.37	1	0	$-w_1$
2.40	1	0	$-\gamma\rho^{-1}$

Таблица 2.8 – Коэффициенты b_3, b_4, b_5 подмоделей ранга 2 эволюционого типа (2.5)

№	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$
2.14	$-\dfrac{u_1w_1}{x_1}+\gamma\dfrac{\varepsilon\rho^{-1}}{tx_1}$	$-\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{u_1}{x_1}\right)$	$-\gamma\left(\dfrac{v_1}{t}-\dfrac{w_1}{x_1}\dfrac{\varepsilon}{t}\right)$
2.15	$-\dfrac{u_1w_1}{x_1}-\gamma\dfrac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{u_1}{x_1}\right)$	$-\gamma\dfrac{w_1}{x_1}$
2.16	$-\dfrac{u_1w_1}{x_1}+\gamma\dfrac{\varepsilon\rho^{-1}}{x_1}$	$-\dfrac{u_1}{x_1}$	$\gamma\left(\varepsilon\dfrac{w_1}{x_1}-v_1\right)$
2.17	$-\dfrac{u_1w_1}{x_1}+\gamma\dfrac{at}{x_1}\rho^{-1}$	$-\dfrac{u_1}{x_1}$	$-\gamma\left(v_1-\dfrac{at}{x_1}w_1\right)$
2.19 $\varepsilon=0$	$-\dfrac{u_1w_1}{x_1}-\gamma\dfrac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\dfrac{u_1}{x_1}$	$-\gamma\dfrac{w_1}{x_1}$
2.30	$-\gamma\dfrac{2t}{t^2+1}\rho^{-1}$	$-\dfrac{2t}{t^2+1}$	$\gamma\dfrac{(t^2-1)v_1-2tw_1}{(t^2+1)^2}$
2.31	$-\dfrac{w_1}{t}-\gamma\dfrac{\rho^{-1}}{t}$	$-\dfrac{2}{t}$	$-\gamma\dfrac{w_1}{t}$
2.32	u_1	0	$-\gamma v_1$
2.33	$\dfrac{u_1-2tw_1}{t^2+a^2+1}-$ $-\dfrac{\gamma(a^2+1)\rho^{-1}}{t^2+a^2+1}$	0	$-\gamma\left(-\dfrac{tu_1}{t^2+a^2+1}+w_1\right)$
2.34	$-\gamma\dfrac{t}{t-ab}\rho^{-1}$	$-\dfrac{1}{t-ab}$	$\gamma\dfrac{bv_1-tw_1}{t-ab}$
2.35	$\gamma\dfrac{a}{t}\rho^{-1}$	$-\dfrac{1}{t}$	$\gamma\dfrac{aw_1-v_1}{t}$
2.36	$\gamma t\rho^{-1}$	0	$\gamma(tw_1-v_1)$
2.37	$-\gamma\rho^{-1}$	0	$-\gamma w_1$
2.40	$\gamma a\rho^{-1}$	0	$\gamma(aw_1-v_1)$

Таблица 2.9 – Представления инвариантных решений для подмоделей стационарного типа в цилиндрической системе координат

№	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{y_1}$	**U**	**V**	**W**	**p**
2.1	$\dfrac{r}{t}$	$\dfrac{x}{t} - a\theta + (ac-b)\ln\|t\|$	$v_1 + a\dfrac{x_1w_1 - av_1}{x_1^2+a^2} + \dfrac{x}{t} - ac + b$	$u_1 + x_1$	$x_1\dfrac{x_1w_1 - av_1}{x_1^2+a^2}$	$p_1+\gamma(\theta - c\ln\|t\|)$
2.2	$\dfrac{r}{t}$	$\dfrac{x}{t} - a\theta - b\ln\|t\|$	$v_1 + a\dfrac{x_1w_1 - av_1}{x_1^2+a^2} + \dfrac{x}{t} + b$	$u_1 + x_1$	$x_1\dfrac{x_1w_1 - av_1}{x_1^2+a^2}$	$p_1 + \gamma\ln\|t\|$
2.4	r	$x - \dfrac{t^2}{2} - a\theta$	$\dfrac{x_1v_1 + aw_1}{x_1^2+a^2}x_1 + t$	u_1	$x_1\dfrac{x_1w_1 - av_1}{x_1^2+a^2}$	$p_1 + \gamma\theta$
2.5	r	$x - \dfrac{t^2}{2} + a(c\theta - t)$	$\dfrac{x_1v_1 + acw_1}{x_1^2+a^2c^2}x_1 + t + a$	u_1	$\dfrac{acv_1 - x_1w_1}{x_1^2+a^2c^2}x_1$	$p_1 + \gamma(t - c\theta)$
2.6	r	$x - \theta$	$\dfrac{x_1v_1 + w_1}{x_1^2+1}x_1$	u_1	$\dfrac{x_1w_1 - v_1}{x_1^2+1}x_1$	$p_1 + \gamma t$
2.7	r	$x - \theta$	$\dfrac{x_1v_1 + w_1}{x_1^2+1}x_1$	u_1	$x_1\dfrac{x_1w_1 - v_1}{x_1^2+1}$	$p_1 + \gamma\theta$
2.8	x	r	u_1	v_1	w_1	$p_1 + \gamma(t - \varepsilon\theta)$
2.9	x	r	u_1	v_1	w_1	$p_1 + \gamma\theta$
2.10	$\dfrac{x}{r}$	θ	$\dfrac{u_1 + x_1w_1}{1+x_1^2}$	$\dfrac{w_1 - x_1u_1}{1+x_1^2}$	v_1	$p_1 + \gamma\ln r$
2.11	$\dfrac{r}{t}$	$\theta - \ln\|t\|$	$w_1 + \dfrac{x}{t}$	$u_1 + x_1$	$x_1(v_1+1)$	p_1+ $+\gamma\left(\dfrac{x}{t} - \ln\|t\|\right)$
2.12, $a \neq 0$	$te^{-a\theta}$	$\dfrac{r}{t}$	$w_1 + \dfrac{x}{t}$	$x_1v_1 + y_1$	$\dfrac{y_1}{a}(1-u_1)$	$p_1 + \gamma\theta$
2.13	$\dfrac{r}{t}$	$\theta - \dfrac{1}{a}\ln\|t\|$	$w_1 + b\theta$	$u_1 + x_1$	$x_1\left(v_1 + \dfrac{1}{a}\right)$	$p_1 + \gamma\theta$

№	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{y_1}$	**U**	**V**	**W**	**p**
2.18	$\theta - t$	r	$w_1 + at$	v_1	$(u_1 + 1)y_1$	$p_1 + \gamma\left(x - \dfrac{at^2}{2}\right)$
2.19, $\varepsilon = 1$	$\theta - t$	r	$w_1 + at$	v_1	$(u_1 + 1)y_1$	$p_1 + \gamma t$

Таблица 2.10 – Представления инвариантных решений для подмоделей стационарного типа в декартовой системе координат

№	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{y_1}$	**u**	**v**	**w**	**p**
2.20	$\dfrac{x}{t} - a\ln\lvert t\rvert$	$\dfrac{z}{t}$	$u_1 + \dfrac{x}{t} + a$	$w_1 + \dfrac{y}{t}$	$v_1 + y_1$	$p_1 + \gamma\dfrac{y}{t}$
2.21	$\dfrac{y}{t} - a\ln\lvert t\rvert$	$\dfrac{z}{t}$	$w_1 + \dfrac{x}{t}$	$u_1 + \dfrac{y}{t} + a$	$v_1 + y_1$	$p_1 + \gamma\ln\lvert t\rvert$
2.22	$\dfrac{y}{t} - b\ln\lvert t\rvert$	$\dfrac{z}{t}$	$w_1 + a\ln\lvert t\rvert$	$u_1 + \dfrac{y}{t} + b$	$v_1 + y_1$	$p_1 + \gamma\ln\lvert t\rvert$
2.23, 2.27	y	z	$w_1 + \varepsilon t$	u_1	v_1	$p_1 + \gamma\left(x - \varepsilon\dfrac{t^2}{2}\right)$
2.24, 2.28	y	z	$w_1 + \varepsilon t$	u_1	v_1	$p_1 + \gamma t$
2.25	$x - \dfrac{t^2}{2} - az$	y	$\dfrac{u_1 + aw_1}{1 + a^2} + t$	v_1	$\dfrac{w_1 - au_1}{1 + a^2}$	$p_1 + \gamma z$
2.26	$x - \dfrac{t^2}{2}$	y	$u_1 + t$	v_1	$w_1 + at$	$p_1 + \gamma t$

Таблица 2.11 – Коэффициенты подмоделей 2.1..2.9 ранга 2 стационарного типа (2.7)

№	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$
2.1	1	$x_1\left(\frac{x_1w_1-av_1}{x_1^2+a^2}\right)^2-$ $-u_1$	$1+\frac{a^2}{x_1^2}$	$2a\frac{x_1w_1-av_1}{x_1(x_1^2+a^2)}u_1-$ $-v_1+ac-b+\gamma\frac{a}{x_1^2}\rho^{-1}$	$-\left(\frac{u_1}{x_1}+1\right)w_1+$ $+\frac{a}{x_1}(ac-b)-\gamma\frac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\left(\frac{u_1}{x_1}+3\right)$	$\gamma\left(-\frac{x_1w_1-av_1}{x_1^2+a^2}+c\right)$
2.2	1	$x_1\left(\frac{x_1w_1-av_1}{x_1^2+a^2}\right)^2-$ $-u_1$	$1+\frac{a^2}{x_1^2}$	$2au_1\frac{x_1w_1-av_1}{x_1(x_1^2+a^2)}-$ $-v_1-b$	$-\left(\frac{u_1}{x_1}+1\right)w_1-$ $-ab/x_1$	$-\left(\frac{u_1}{x_1}+3\right)$	$-\gamma$
2.4	1	$x_1\left(\frac{x_1w_1-av_1}{x_1^2+a^2}\right)^2$	$1+\frac{a^2}{x_1^2}$	$2\frac{a}{x_1}\frac{x_1w_1-av_1}{x_1^2+a^2}u_1+$ $+\gamma a\frac{\rho^{-1}}{x_1^2}-1$	$-\frac{u_1w_1+a+\gamma\rho^{-1}}{x_1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$\gamma\frac{av_1-x_1w_1}{x_1^2+a^2}$
2.5	1	$x_1\left(\frac{acv_1-x_1w_1}{x_1^2+a^2c^2}\right)^2$	$1+\frac{a^2c^2}{x_1^2}$	$-2\frac{ac}{x_1}\frac{acv_1-x_1w_1}{x_1^2+a^2c^2}u_1+$ $+\gamma\frac{ac^2}{x_1^2}\rho^{-1}-1$	$-\frac{u_1w_1}{x_1}-$ $-\frac{c}{x_1}(a+\gamma\rho^{-1})$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$\gamma\Big(-1+$ $+c\frac{acv_1-x_1w_1}{x_1^2+a^2c^2}\Big)$
2.6	1	$x_1\left(\frac{x_1w_1-v_1}{x_1^2+1}\right)^2$	$1+\frac{1}{x_1^2}$	$2\frac{u_1}{x_1}\frac{x_1w_1-v_1}{x_1^2+1}$	$-\frac{u_1w_1}{x_1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$-\gamma$
2.7	1	$x_1\left(\frac{x_1w_1-v_1}{x_1^2+1}\right)^2$	$1+\frac{1}{x_1^2}$	$2\frac{u_1}{x_1}\frac{x_1w_1-v_1}{x_1^2+1}+\gamma\frac{\rho^{-1}}{x_1^2}$	$-\frac{u_1w_1}{x_1}-\gamma\frac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$\gamma\frac{v_1-x_1w_1}{x_1^2+1}$
2.8	1	0	1	$\frac{w_1^2}{y_1}$	$-\frac{v_1w_1}{y_1}+\gamma\rho^{-1}\frac{\varepsilon}{y_1}$	$-\frac{v_1}{y_1}$	$\gamma\left(-1+\varepsilon\frac{w_1}{y_1}\right)$
2.9	1	0	1	w_1^2/y_1	$-(v_1w_1+\gamma\rho^{-1})/y_1$	$-v_1/y_1$	$-\gamma w_1/y_1$

Таблица 2.12 – Коэффициенты подмоделей 2.10..2.26 ранга 2 стационарного типа (2.7)

№	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$
2.10	$1+x_1^2$	$\dfrac{x_1u_1-w_1}{1+x_1^2}u_1-x_1v_1^2+$ $+\gamma x_1\rho^{-1}$	1	$\dfrac{x_1u_1-w_1}{1+x_1^2}v_1$	$\dfrac{u_1+x_1w_1}{1+x_1^2}u_1+$ $+v_1^2-\gamma\rho^{-1}$	$-2\dfrac{w_1-x_1u_1}{1+x_1^2}$	$\gamma\dfrac{x_1u_1-w_1}{1+x_1^2}$
2.11	1	$x_1(v_1+1)^2-u_1$	$1/x_1^2$	$-(v_1+1)(1+2u_1/x_1)$	$-w_1-\gamma\rho^{-1}$	$-(3+u_1/x_1)$	$\gamma(1-w_1)$
2.12, $a\neq 0$	$\dfrac{a^2}{y_1^2}$	$(2x_1v_1+y_1)\dfrac{1-u_1}{x_1y_1}+$ $+\gamma\dfrac{a\rho^{-1}}{x_1y_1^2}$	$\dfrac{1}{x_1^2}$	$-(u_1+1)\dfrac{v_1}{x_1}+(1-u_1)^2\times$ $\times\dfrac{y_1}{a^2x_1^2}$	$-\dfrac{w_1}{x_1}$	$-\left(\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{v_1}{y_1}\right)$	$\gamma\dfrac{u_1-1}{ax_1}$
2.13	1	$-u_1+x_1\left(v_1+\dfrac{1}{a}\right)^2$	$\dfrac{1}{x_1^2}$	$-\left(1+2\dfrac{u_1}{x_1}\right)\left(v_1+\dfrac{1}{a}\right)-$ $-\gamma\rho^{-1}/x_1^2$	$-b\left(v_1+\dfrac{1}{a}\right)$	$-\left(2+\dfrac{u_1}{x_1}\right)$	$-\gamma\times$ $\times(v_1+1/a)$
2.18	$1/y_1^2$	$-2(u_1+1)v_1/y_1$	1	$y_1(u_1+1)^2$	$-a-\gamma\rho^{-1}$	$-v_1/y_1$	$-\gamma w_1$
2.19, $\varepsilon=1$	$1/y_1^2$	$-2(u_1+1)v_1/y_1$	1	$y_1(u_1+1)^2$	$-a$	$-v_1/y_1$	$-\gamma$
2.20	1	$-(u_1+a)$	1	$-v_1$	$-w_1-\gamma\rho^{-1}$	-3	$-\gamma w_1$
2.21	1	$-(u_1+a)$	1	$-v_1$	$-w_1$	-3	$-\gamma$
2.22	1	$-(u_1+b)$	1	$-v_1$	$-a$	-2	$-\gamma$
2.23, 2.27	1	0	1	0	$-\varepsilon-\gamma\rho^{-1}$	0	$-\gamma w_1$
2.24, 2.28	1	0	1	0	$-\varepsilon$	0	$-\gamma$
2.25	$1+a^2$	$-1+\gamma a\rho^{-1}$	1	0	$-a-\gamma\rho^{-1}$	0	$\gamma\dfrac{w_1-au_1}{1+a^2}$
2.26	1	-1	1	0	$-a$	0	$-\gamma$

2.7. Примеры построения инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного и стационарного типов

Рассмотрим пример построения инвариантной помодели ранга 2 на примере подалгебры 2.29.

Базисные операторы подалгебры 2.29 в декартовой системе координат имеют вид:

$$aX_1 + cX_3 + X_5 = a\partial_x + c\partial_z + t\partial_y + \partial_v,$$
$$bX_1 + dX_2 + X_6 + Y_1 = b\partial_x + d\partial_y + t\partial_z + \partial_w + \partial_p,$$
$$a^2 + b^2 + (c+d)^2 = 1.$$

Вычисляются инварианты подалгебры

$$t, \quad u, \quad x + \frac{bc - at}{t^2 - cd}y + \frac{ad - bt}{t^2 - cd}z,$$
$$v + \frac{dz - ty}{t^2 - cd}, \quad w + \frac{cy - tz}{t^2 - cd}, \quad \rho, \quad p + \frac{cy - tz}{t^2 - cd}.$$

Изначально представление решения выбирается таким образом, чтобы оператор полного дифференцирования (1.2) имел канонический вид (2.6):

$$\begin{gathered} u = u_1 + \frac{(at - bc)v_1 + (bt - ad)w_1}{t^2 - cd}, \quad v = v_1 + \frac{ty - dz}{t^2 - cd}, \\ w = w_1 + \frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma\frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \quad S = S_1 + \gamma\frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \end{gathered} \tag{2.9}$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 зависят от инвариантов

$$t, \quad x_1 = x + \frac{bc - at}{t^2 - cd}y + \frac{ad - bt}{t^2 - cd}z.$$

Подстановка представления решения (2.9) в уравнения (1.5) приводит к подмодели, в которой после прибавления к первому уравнению второго, умноженного на $\dfrac{bc - at}{t^2 - cd}$ и третьего, умноженного на $-\dfrac{bt - ad}{t^2 - cd}$, получится следующая система уравнений

$$\begin{gathered} D_1 u_1 + A_1 \rho^{-1} p_{1x_1} = B_1, \\ D_1 v_1 + A_2 \rho^{-1} p_{1x_1} = B_2, \\ D_1 w_1 + A_3 \rho^{-1} p_{1x_1} = B_3, \\ D_1 \rho + \rho u_{1x_1} = -\frac{2t}{t^2 - cd}\rho, \\ DS_1 = \gamma\frac{cv_1 - tw_1}{t^2 - cd}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$A_1 = \frac{\mu}{t^2 - cd}, \quad A_2 = \frac{bc - at}{t^2 - cd}, \quad A_3 = \frac{ad - bt}{t^2 - cd},$$

$$B_1 = \frac{(2at^2 - 4bct + 2acd)v_1 + (-4adt + 2bcd + 2bt^2)w_1}{(t^2 - cd)^2} +$$

$$+\gamma \frac{b(c^2 + t^2) - at(c + d)}{(t^2 - cd)^2} \rho^{-1},$$

$$B_2 = \frac{-tv_1 + dw_1}{t^2 - cd} + \gamma \frac{c\rho^{-1}}{t^2 - cd},$$

$$B_3 = \frac{cv_1 - tw_1}{t^2 - cd} - \gamma \frac{t\rho^{-1}}{t^2 - cd},$$

$$\mu = (t^2 - cd)^2 + (bc - at)^2 + (bt - ad)^2,$$

— коэффициенты подмодели. Далее вводится замена переменных для уничтожения слагаемых во втором и третьем уравнениях системы (2.10), содержащих производную давления p_{1x_1}

$$\widetilde{v}_1 = v_1 - \frac{A_2}{A_1} u_1, \quad \widetilde{w}_1 = w_1 - \frac{A_3}{A_1} u_1.$$

Вычисления с помощью системы компьютерной математики Maple и переобозначение переменных $\widetilde{v}_1 \leftrightarrow v_1$, $\widetilde{w}_1 \leftrightarrow w_1$ приводят к инвариантной подмодели 2.29 ранга 2 канонического вида эволюционного типа (2.5) с коэффициентами:

$$\mathbf{a_1} = \left[1 + \frac{(bc - at)^2}{(t^2 - cd)^2} + \frac{(bt - ad)^2}{(t^2 - cd)^2}\right],$$

$$\mathbf{b_1} = -2 \left(\frac{(bc - at)[t(bc - at) + c(bt - ad)]}{(t^2 - cd)\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{(bt - ad)[d(bc - at) + t(bt - ad)]}{(t^2 - cd)\mu} \right) u_1 -$$

$$-2 \frac{t(bc - at) + c(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} v_1 + 2 \frac{d(bc - at) + t(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} w_1 +$$

$$+\gamma \frac{c(bc - at) + t(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} \rho^{-1}, \quad \mathbf{b_2} = \frac{1}{\mu} \left[(c - d)(bt - ad)u_1 - \right.$$

$$-\Big(\frac{t(t^2 - cd)^2 - t(bc - at)^2 + t(bt - ad)^2 - 2c(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \Big) v_1 +$$

$$+\Big(\frac{d(t^2 - cd)^2 + d(bt - ad)^2 - d(bc - at)^2 - 2t(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \Big) w_1 +$$

$$\left. +\gamma(c(t^2 - cd) + a(bt - ad))\rho^{-1} \right], \quad \mathbf{b_3} = \frac{1}{\mu} \left[(c - d)(bc - at)u_1 + \right.$$

$$+\Big(\frac{c(t^2-cd)^2+c(bc-at)^2-c(bt-ad)^2-2t(bc-at)(bt-ad)}{t^2-cd}\Big)v_1-$$
$$-\Big(\frac{t(t^2-cd)^2+t(bc-at)^2-t(bt-ad)^2-2d(bc-at)(bt-ad)}{t^2-cd}\Big)w_1+$$
$$+\gamma(a(bc-at)-t(t^2-cd))\rho^{-1}\big], \quad \mathbf{b_4}=-\frac{2t}{t^2-cd},$$
$$\mathbf{b_5}=\gamma\left(-\frac{c(bc-at)+t(bt-ad)}{\mu}u_1-\frac{c}{t^2-cd}v_1+\frac{t}{t^2-cd}w_1\right).$$

Окончательный вид представления решения таков:

$$t, \quad x_1=x+\frac{bc-at}{t^2-cd}y+\frac{ad-bt}{t^2-cd}z,$$
$$u=\frac{(t^2-cd)^2}{\mu}u_1+\frac{at-bc}{t^2-cd}v_1+\frac{bt-ad}{t^2-cd}w_1,$$
$$v=\frac{(bc-at)(t^2-cd)}{\mu}u_1+v_1+\frac{ty-dz}{t^2-cd},$$
$$w=\frac{(ad-bt)(t^2-cd)}{\mu}u_1+w_1+\frac{tz-cy}{t^2-cd},$$
$$\rho, \quad p=p_1+\gamma\frac{tz-cy}{t^2-cd}.$$

Покажем на примере подалгебры 2.33 [52], что канонический вид подмодели может быть не единственным. Базисные операторы подалгебры 2.33 в декартовой системе координат таковы:

$$aX_1+X_2=a\partial_x+\partial_y, \quad X_3+X_4+Y_1=\partial_z+t\partial_x+\partial_u+\partial_p,$$

а инварианты следующие

$$t, \quad x-ay-tz, \quad u-z, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad p-z.$$

Представление инвариантного решения выбирается таким образом, чтобы оператор полного дифференцирования (1.2) имел вид (2.6):

$$\begin{gathered} u=u_1+av_1+tw_1+z, \quad v=v_1, \quad w=w_1, \quad \rho, \quad p=p_1+\gamma z, \\ S=S_1+\gamma z, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 зависят от инвариантов

$$t, \quad x_1=x-ay-tz.$$

После подстановки (2.11) в (1.5) получается инвариантная подмодель ранга 2 неканонического вида:

$$\begin{gathered}
D_1u_1 + aD_1v_1 + tD_1w_1 + \rho^{-1}p_{1x_1} = -2w_1,\\
D_1v_1 - a\rho^{-1}p_{1x_1} = 0,\\
D_1w_1 - t\rho^{-1}p_{1x_1} = -\gamma\rho^{-1}, \quad D_1\rho + \rho u_{1x_1} = 0, \quad D_1S_1 = -\gamma w_1.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Вычитание из первого уравнения системы (2.12) второго и третьего уравнений той же системы, умноженных на a и t соответственно, приводит к равенству

$$D_1u_1 + (t^2 + a^2 + 1)\rho^{-1}p_{1x_1} = -2w_1 + \gamma t\rho^{-1}, \tag{2.13}$$

умножение которого на $\dfrac{a}{t^2 + a^2 + 1}$ и прибавление полученного выражения ко второму уравнению системы (2.12) приводит к уравнению

$$D_1v_1 + \frac{a}{t^2 + a^2 + 1}D_1u_1 = \frac{-2aw_1 + \gamma at\rho^{-1}}{t^2 + a^2 + 1}. \tag{2.14}$$

Умножение (2.13) на $\dfrac{t}{t^2 + a^2 + 1}$ и прибавление полученного выражения к третьему уравнению системы (2.12) приводит к уравнению

$$D_1w_1 + \frac{t}{t^2 + a^2 + 1}D_1u_1 = -\frac{2tw_1}{t^2 + a^2 + 1} - \gamma\frac{a^2 + 1}{t^2 + a^2 + 1}\rho^{-1}. \tag{2.15}$$

После введения новых функций

$$\widetilde{v}_1 = v_1 + \frac{a}{t^2 + a^2 + 1}u_1, \quad \widetilde{w}_1 = w_1 + \frac{t}{t^2 + a^2 + 1}u_1,$$

в уравнениях (2.13)–(2.15), четвертом и пятом уравнениях системы (2.12), получится инвариантная подмодель ранга 2 канонического вида эволюционного типа, коэффициенты которой записаны в Таблицах 2.7, 2.8 в переобозначенных переменных $\widetilde{v}_1 \leftrightarrow v_1$, $\widetilde{w}_1 \leftrightarrow w_1$.

Выбор представления решения как в работе [27] (подалгебра 2.23 из L_{11}), но с добавленным слагаемым к давлению

$$u = \frac{u_1 + av_1 + tw_1}{t^2 + a^2 + 1} + z, \quad v = -\frac{au_1 - (t^2 + 1)v_1 + atw_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

$$w = -\frac{tu_1 + atv_1 - (a^2 + 1)w_1}{t^2 + a^2 + 1}, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma z, \quad S = S_1 + \gamma z,$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 зависят от инвариантов t, $x_1 = x - ay - tz$, приводит к инвариантной подмодели ранга 2 канонического вида эволюционного типа

$$D_1u_1 + (t^2 + a^2 + 1)\rho^{-1}p_{1x_1} = \frac{2tu_1 + 2atv_1 - 2(a^2+1)w_1}{t^2 + a^2 + 1} + \gamma t\rho^{-1},$$

$$D_1v_1 = \frac{atu_1 + a^2tv_1 - a(a^2+1)w_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

$$D_1w_1 = \frac{(t^2+1)u_1 + a(t^2+1)v_1 - a^2tw_1}{t^2 + a^2 + 1} - \gamma\rho^{-1},$$

$$D_1\rho + \rho u_{1x_1} = 0, \quad D_1S_1 = \gamma\frac{tu_1 + atv_1 - (a^2+1)w_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

в правых частях уравнений которой содержится больше неизвестных функций, чем в подмодели, полученной с помощью представления решения (2.11).

Рассмотрим пример построения инвариантной подмодели по подалгебре 2.12, $a \neq 0$ [52]. Базисные операторы подалгебры 2.12 можно записать в цилиндрической системе координат

$$X_4 = t\partial_x + \partial_U, \quad Y_1 + X_7 + aX_{11} = \partial_p + \partial_\theta + at\partial_t + ax\partial_x + ar\partial_r, \quad a \neq 0.$$

Они имеют следующие инварианты:

$$\frac{r}{t}, \quad te^{-a\theta}, \quad U - \frac{x}{t}, \quad V, \quad W, \quad \rho, \quad p - \theta.$$

Представление решения выбирается из работы [27], в которой указано представление решения для двумерной подалгебры 2.3 11-мерной алгебры Ли. Необходимо лишь добавить представление для давления p:

$$U = w_1 + \frac{x}{t}, \quad V = x_1v_1 + y_1, \quad W = (1 - u_1)\frac{y_1}{a}, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma\theta, \quad (2.16)$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 зависят от инвариантов $x_1 = te^{-a\theta}$, $y_1 = \dfrac{r}{t}$. Энтропия такова:

$$S = S_1(x_1, y_1) + \gamma\theta. \quad (2.17)$$

Оператор дифференцирования (1.2) примет вид:

$$D = e^{-a\theta}[u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}] = e^{-a\theta}D_1.$$

Подстановка (2.16), (2.17) в (1.6) и умножение первого равенства на $e^{a\theta}$, второго — на $\dfrac{e^{a\theta}}{x_1}$, третьего — на $-\dfrac{a}{y_1}e^{a\theta}$, четвертого и пятого — на $e^{a\theta}$, приводят к инвариантной подмодели ранга 2 канонического вида стационарного типа, коэффициенты которой записаны в Таблице 2.12.

Рассмотрим пример построения инвариантной подмодели по подалгебре 2.3 [52], базисные операторы которой записываются в цилиндрической системе координат

$$X_{10} = \partial_t, \quad Y_1 + X_7 + aX_{11} = \partial_p + \partial_\theta + at\partial_t + ax\partial_x + ar\partial_r.$$

Инварианты подалгебры 2.3 имеют вид

$$re^{-a\theta}, \quad xe^{-a\theta}, \quad U, \quad V, \quad W, \quad \rho, \quad p-\theta.$$

Представление инвариантного решения выбирается в следующем виде:

$$\begin{gathered} U = u_1 + a\frac{x_1}{y_1}w_1, \quad V = v_1 + aw_1, \quad W = w_1, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma\theta, \\ S = S_1 + \gamma\theta, \end{gathered} \tag{2.18}$$

где функции-инварианты u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, S_1 зависят от инвариантов $x_1 = xe^{-a\theta}$, $y_1 = re^{-a\theta}$.

Представление решения (2.18) выбирается так, чтобы оператор дифференцирования (1.2) в новых переменных был канонического вида (2.8), умноженный на некоторый коэффициент:

$$D = e^{-a\theta}[u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}] = e^{-a\theta}D_1.$$

Подстановка (2.18) в уравнения (1.6), умножение полученных равенств на $e^{a\theta}$ и вычитание третьего уравнения из второго и первого уравнений для уничтожения слагаемых, содержащих D_1w_1, приводит к инвариантной подмодели ранга 2

$$\begin{gathered} D_1u_1 + \rho^{-1}\left(\left(1 + a^2\frac{x_1^2}{y_1^2}\right)p_{1x_1} + a^2\frac{x_1}{y_1}p_{1y_1}\right) = \\ = a^2\frac{x_1}{y_1^2}w_1^2 + a\frac{w_1}{y_1}\left(2\frac{x_1}{y_1}v_1 - u_1\right) + \gamma a\frac{x_1}{y_1^2}\rho^{-1}, \\ D_1v_1 + \rho^{-1}\left(a^2\frac{x_1}{y_1}p_{1x_1} + (1+a^2)p_{1y_1}\right) = \\ = (1+a^2)\frac{w_1^2}{y_1} + \gamma a\rho^{-1}y_1^{-1} + \frac{a}{y_1}v_1w_1, \\ D_1w_1 - a\rho^{-1}\left(\frac{x_1}{y_1}p_{1x_1} + p_{1y_1}\right) = -(v_1 + aw_1)\frac{w_1}{y_1} - \gamma\rho^{-1}y_1^{-1}, \\ D_1\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = -\rho\left(2a\frac{w_1}{y_1} + \frac{v_1}{y_1}\right), \\ D_1S_1 = -\gamma\frac{w_1}{y_1}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Из коэффициентов первых двух уравнений системы (2.19) при производных p_{1x_1} и p_{1y_1} можно составить симметрическую матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} 1 + a^2\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)^2 & a^2\dfrac{x_1}{y_1} \\ a^2\dfrac{x_1}{y_1} & 1 + a^2 \end{Vmatrix}$$

имеющую вещественнные собственные числа и собственные векторы. Значит, по алгоритму, описанному в работе [75], можно найти замену переменных

$$\overline{x} = \varphi_1(x_1, y_1), \quad \overline{y} = \varphi_2(x_1, y_1)$$

с якобианом

$$M = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} \end{Vmatrix}$$

и замену компонент скорости

$$\begin{Vmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \end{Vmatrix} = M \begin{Vmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Vmatrix},$$

которые приводят систему (2.19) к каноническому виду быть может с дополнительной простейшей заменой.

Собственные числа матрицы C таковы:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + a^2\left(1 + \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2\right).$$

Матрица из собственных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матрицы C такова:

$$E = \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mu_1 & \mu_2\dfrac{x_1}{y_1} \\ -\mu_1\dfrac{x_1}{y_1} & \mu_2 \end{Vmatrix},$$

где $\mu_1 = \mu_1(x_1, y_1)$, $\mu_2 = \mu_2(x_1, y_1)$ — произвольные функции. Уравнения

$$M = E^T \tag{2.20}$$

задают φ_1, φ_2. Сначала находятся μ_1, μ_2 приравниванием смешанных производных $\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1 y_1}$ и $\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial y_1 x_1}$:

$$\mu_1 = \frac{1}{x_1}\alpha\left(\frac{x_1}{y_1}\right), \quad \mu_2 = y_1\beta\left(x_1^2 + y_1^2\right),$$

где α, β — произвольные функции. Найденные функции μ_1, μ_2 подставляются в систему (2.20) и получается искомый вид функций φ_1, φ_2:

$$\varphi_1 = \varphi_1\left(\frac{x_1}{y_1}\right), \quad \varphi_2 = \varphi_2\left(x_1^2 + y_1^2\right).$$

Выберем функции φ_1, φ_2 из следующих соображений. Пусть $x_1 = r_1 \sin\theta$, $y_1 = r_1 \cos\theta$, тогда равенства $\varphi_1 = \theta$, $\varphi_2 = r_1$ выполнены при следующей искомой замене:

$$\overline{x} = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{y_1}, \quad \overline{y} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};$$

обратная замена имеет вид

$$x_1 = \overline{y}\sin\overline{x}, \quad y_1 = \overline{y}\cos\overline{x}. \tag{2.21}$$

Якобиан замены есть $J = \overline{y} \neq 0$. Получаем замену компонент скорости

$$\begin{aligned} u_1 &= \overline{y}\cos\overline{x}\,\overline{u}_1 + \sin\overline{x}\,\overline{v}_1, \\ v_1 &= -\overline{y}\sin\overline{x}\,\overline{u}_1 + \cos\overline{x}\,\overline{v}_1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Подстановка замен (2.21), (2.22) в систему (2.19) приводит к инвариантной подмодели ранга 2, в которой нужно сделать еще одну замену:

$$\overline{w}_1 = \left(1 + \frac{a^2}{\cos^2\overline{x}}\right) w_1 + \frac{a}{\cos\overline{x}}\overline{v}_1.$$

В результате получается инвариантная подмодель ранга 2 канонического вида стационарного типа (2.7) 2.3, коэффициенты которой в переобозначенных переменных $\overline{x} \leftrightarrow x_1$, $\overline{y} \leftrightarrow y_1$, $\overline{u}_1 \leftrightarrow u_1$, $\overline{v}_1 \leftrightarrow v_1$, $\overline{w}_1 \leftrightarrow w_1$ следующие:

$$a_1 = \frac{1}{y_1^2},$$

$$b_1 = -\frac{2}{y_1}u_1v_1 - \frac{\cos x_1 w_1 - av_1}{y_1(\cos^2 x_1 + a^2)}\left(\sin x_1\cos x_1 \times \frac{\cos x_1 w_1 - av_1}{y_1(\cos^2 x_1 + a^2)} + au_1\right),$$

$$a_2 = 1 + \frac{a^2}{\cos^2 x_1},$$

$$b_2 = -\frac{\cos x_1 w_1 - av_1}{y_1\cos x_1(\cos^2 x_1 + a^2)}(2ay_1\sin x_1 u_1 - \cos^2 x_1 w_1) + \gamma\frac{a}{y_1\cos^2 x_1}\rho^{-1} + y_1u_1^2,$$

$$b_3 = [ay_1u_1 + \sin x_1 w_1]\frac{u_1}{\cos x_1} + [av_1 - \cos x_1 w_1]\frac{\cos x_1 v_1}{y_1(\cos^2 x_1 + a^2)} - \frac{\gamma\rho^{-1}}{y_1\cos x_1},$$

$$b_4 = -\left(2\frac{\cos x_1 v_1 + a w_1}{y_1(\cos^2 x_1 + a^2)}\cos x_1 - \operatorname{tg} x_1 u_1\right),$$
$$b_5 = -\gamma\frac{\cos x_1 w_1 - a v_1}{y_1(\cos^2 x_1 + a^2)},$$

а окончательный вид представления решения таков:

$$x_1 = \operatorname{arctg}\frac{x}{r}, \quad y_1 = e^{-a\theta}\sqrt{x^2 + r^2},$$

$$U = y_1 \cos x_1 u_1 + \frac{\sin x_1 \cos^2 x_1}{\cos^2 x_1 + a^2} v_1 + a\frac{\sin x_1 \cos x_1}{\cos^2 x_1 + a^2} w_1,$$
$$V = -y_1 \sin x_1 u_1 + \frac{\cos^3 x_1}{\cos^2 x_1 + a^2} v_1 + \frac{a\cos^2 x_1}{\cos^2 x_1 + a^2} w_1,$$
$$W = \frac{\cos x_1 w_1 - a v_1}{\cos^2 x_1 + a^2}\cos x_1,$$
$$\rho, \quad p = p_1 + \gamma\theta, \quad S = S_1 + \gamma\theta.$$

2.8. Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям

Кроме инвариантных помоделей, можно построить частично инвариантные подмодели [88] для подалгебр, в представлении решения которых нельзя выразить все гидродинамические функции через инварианты. Такие «лишние» функции назначаются функциями от всех независимых переменных, входящих в систему (1.1) с учетом (1.3). Подстановка представления решения в исходные уравнения гидродинамического типа (1.1) с учетом (1.3) приводит к частично инвариантной подмодели. Решения частично инвариантных подмоделей могут полностью вкладываться в решения инвариантных подмоделей.

Теорема 2.4. *Регулярные частично инвариантные подмодели, построенные по подалгебрам* 2.38, 2.39 *алгебры Ли* L_{12} *[52], редуцируются к инвариантным подмоделям ранга 3 11-мерной (подалгебра* 1.12*) и 12-мерной (подалгебра* 1.12*) алгебр Ли соответственно.*

Доказательство. Оператор подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} [81] имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,$$

а инварианты таковы:

$$t, y, z, u - \frac{x}{t}, v, w, \rho, p.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t}, v = u_1, w = v_1, \rho, p,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p зависят от инвариантов t, y, z. Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 (L_{11}), такова:

$$\begin{gathered}
Du_1 + \rho^{-1}p_y = 0,\\
Dv_1 + \rho^{-1}p_z = 0,\\
Dw_1 = -\frac{w_1}{t},\\
D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t},\\
Dp + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t}f_\rho, \quad p = f(\rho, S),
\end{gathered} \tag{2.23}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$.

Оператор одномерной подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} [52] имеет вид:

$$X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p, \tag{2.24}$$

а инварианты подалгебры (2.24) таковы:

$$t, y, z, u - \frac{x}{t}, v, w, \rho, p - \frac{x}{t}.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t}, v = u_1, w = v_1, \rho, p = p_1 + \frac{x}{t},$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 зависят от инвариантов t, y, z. Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 (L_{12}), такова:

$$\begin{gathered}
Du_1 + \rho^{-1}p_{1y} = 0,\\
Dv_1 + \rho^{-1}p_{1z} = 0,\\
Dw_1 = -\frac{1}{t}(w_1 + \rho^{-1}),\\
D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t},\\
Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{1}{t}(w_1 + \rho f_\rho),
\end{gathered} \tag{2.25}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$.

Подалгебра 2.38 из L_{12} [52] имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p.$$

Инварианты подалгебры таковы: t, y, z, v, w, ρ, $p + tu - x$.

В представлении частично инвариантного решения

$$u = u(t, x, y, z), v, w, \rho, p = p_1 + x - tu$$

функции v, w, ρ, p_1 зависят от инвариантов t, y, z, функция $u = u(t, x, y, z)$ — общего вида.

Энтропия выражается следующим образом: $S = S_1 + x - tu$, $S_1 = S_1(t, y, z)$.

Частично инвариантная подмодель 2.38 ранга 3 дефекта 1 такова:

$$\begin{gathered}
u_t = (t\rho^{-1} - u)u_x - vu_y - wu_z - \rho^{-1}, \\
u_y = \tfrac{1}{t}(\rho Dv + p_{1y}), \\
u_z = \tfrac{1}{t}(\rho Dw + p_{1z}), \\
u_x = -(D\ln\rho + v_y + w_z), \\
Dp_1 + \rho f_\rho(v_y + w_z) + t\rho^{-1} = \\
= u_x(t^2\rho^{-1} - \rho f_\rho),
\end{gathered} \tag{2.26}$$

где $D = \partial_t + v\partial_y + w\partial_z$. Пятое уравнение системы (2.26) представлено с учетом вида выражения $u_t + vu_y + wu_z$ из первого уравнения той же системы. Из четвертого уравнения системы (2.26) следует

$$u = ax + \widetilde{u}, a = a(t, y, z), \widetilde{u} = \widetilde{u}(t, y, z). \tag{2.27}$$

Подстановка (2.27) во второе и третье уравнения системы (2.26) уточняет вид функции $a = a(t)$. Подстановка (2.27) в первое уравнение системы (2.26) приводит к уравнению $a_t + a^2 = 0$, из которого следует $a = \frac{1}{t}$ (константа убирается переносом $t' = t + a_0$ из (1.7)). Таким образом, $u = \frac{x}{t} + \widetilde{u}(t, y, z)$.

Полученные инварианты

$$t, y, z, u - \tfrac{x}{t}, v, w, \rho, p + tu - x$$

совпадают с инвариантами подалгебры $X_4 = t\partial_x + \partial_u$ (подалгебра под номером 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} [81]).

Значит, частично инвариантная подмодель (2.26), построенная по подалгебре 2.38, редуцируется к инвариантной подмодели (2.23), соответствующей подалгебре 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11}.

Операторы подалгебры 2.39 таковы:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p,$$

а инварианты следующие:

$$t, y, z, u - p, v, w, \rho.$$

Представление решения имеет вид:

$$u = \widetilde{u}_1 + p, v = \widetilde{v}_1, w = \widetilde{w}_1, \rho, \tag{2.28}$$

где $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{w}_1$, ρ зависят от инвариантов t, y, z, а функция $p = p(t, x, y, z)$ — от всех независимых переменных системы (1.1) с учетом (1.3).

Подстановка (2.28) в систему (1.5) приводит к частично инвариантной подмодели ранга 3 дефекта 1:

$$\begin{gathered} -D\widetilde{u}_1 = p_t + (\rho^{-1} + \widetilde{u}_1 + p)p_x + \\ +\widetilde{v}_1 p_y + \widetilde{w}_1 p_z, \\ -D\widetilde{v}_1 = \rho^{-1} p_y, \\ -D\widetilde{w}_1 = \rho^{-1} p_z, \\ -D\rho - \rho(\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z}) = \rho p_x, \\ -(\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z})\rho f_\rho = \\ = p_t + (\widetilde{u}_1 + p)p_x + \widetilde{v}_1 p_y + \widetilde{w}_1 p_z + \rho f_\rho p_x, \end{gathered} \tag{2.29}$$

где $D = \partial_t + \widetilde{v}_1\partial_y + \widetilde{w}_1\partial_z$.

Введем обозначение $\alpha = D\ln\rho + \widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z}$, тогда четвертое уравнение системы (2.29) примет вид:

$$p_x = -\alpha. \tag{2.30}$$

Подстановка второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.29) в первое уравнение системы (2.29) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} p_t = -D\widetilde{u}_1 + \alpha(\rho^{-1} &+ \widetilde{u}_1 + p) + \\ &+ \rho(\widetilde{v}_1 D\widetilde{v}_1 + \widetilde{w}_1 D\widetilde{w}_1). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Следующее равенство получается подстановкой (2.31), второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.29) в пятое уравнение системы (2.29)

$$D\widetilde{u}_1 - \alpha(\rho^{-1} - \rho f_\rho) - (\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z})\rho f_\rho = 0. \tag{2.32}$$

Приравнивание смешанных производных p_{tx} из (2.31) и p_{xt} из (2.30) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению $-\alpha^2 + \alpha_t = 0$, решение которого $\alpha = -\frac{1}{t}$ не содержит постоянной, так как допускается перенос по времени $t' = t + a_0$, см. (1.7). Тогда p из (2.30) имеет вид:

$$p = \frac{x}{t} + \widetilde{p}_1(t, y, z). \tag{2.33}$$

Найденный вид p (2.33) подставляется в уравнения (2.32), второе, третье и четвертое уравнения системы (2.29)

$$D\widetilde{u}_1 - (\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\frac{1}{t}(\rho^{-1} - \rho f_\rho), \tag{2.34}$$

$$D\widetilde{v}_1 + \rho^{-1}\widetilde{p}_{1y} = 0, \tag{2.35}$$

$$D\widetilde{w}_1 + \rho^{-1}\widetilde{p}_{1z} = 0, \tag{2.36}$$

$$D\rho + \rho(\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z}) = -\frac{\rho}{t}. \tag{2.37}$$

В (2.31) сначала подставляется вид p (2.33), затем (2.34), (2.35), (2.36)

$$D\widetilde{p}_1 + (\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\tfrac{1}{t}(\rho f_\rho + \widetilde{u}_1 + \widetilde{p}_1). \tag{2.38}$$

Система уравнений (2.34)–(2.38) содержит функции $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{w}_1$, ρ, $\widetilde{p}_1$, зависящие только от инвариантов t, y, z. Переобозначение $\widetilde{v}_1 \to u_1$, $\widetilde{w}_1 \to v_1$, $\widetilde{u}_1 \to w_1 - p_1$, $\widetilde{p}_1 \to p_1$ приводит систему (2.34)–(2.38) к системе (2.25). □

2.9. Подмодели на 3-мерных подалгебрах

Теорема 2.5. *3-мерные подалгебры алгебры Ли L_{12} [52] порождают следующие подмодели:*

— 15 инвариантных подмоделей ранга 1 в случае, когда переменная t – инвариант;

— 31 инвариантную подмодель ранга 1, для которых t не является инвариантом;

— 24 частично инвариантных подмодели ранга 2 дефекта 1.

Доказательство. Доказательство Теоремы 2.5 заключается в вычислении инвариантов 3-мерных подалгебр алгебры Ли L_{12}, по которым классифицируются подмодели. Инварианты приведены в Таблицах 2.13, 2.14 и 2.15, где № — номер подалгебры; СК — система координат. □

Таблица 2.13 – Инварианты 3-мерных подалгебр, для которых t является единственным инвариантом из независимых переменных

№	СК	**Инварианты** (t, ρ – **общие**)
3.23, $b \neq 0$ или $ad \neq 0$	D	$u - \dfrac{\varepsilon}{\mu}\left[(t^2-cd)x+(bc-at)y+(ad-bt)z\right]$, $v - \dfrac{1}{\mu}[dnx+(t(\varepsilon t+e)-bn)y-d(\varepsilon t+e)z]$, $w + \dfrac{1}{\mu}[tnx+(c(\varepsilon t+e)-an)y-t(\varepsilon t+e)z]$, $p - \dfrac{1}{\mu}\left[(t^2-cd)x+(bc-at)y+(ad-bt)z\right]$, где $\mu = (t^2-cd)(\varepsilon t+e)+n(ad-bt)$
3.23, $b=0$, $ad=0$, $e^2+\varepsilon^2\neq 0$	D	$u - \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon t+e}\left(x-a\dfrac{y}{t}\right)$, $v - \dfrac{dn}{(t^2-cd)(\varepsilon t+e)}x - \dfrac{ty-dz}{t^2-cd}$, $w + \dfrac{ntx+(c(\varepsilon t+e)-an)y}{(t^2-cd)(\varepsilon t+e)} - \dfrac{t}{t^2-cd}z$, $p + \dfrac{ay-tx}{t(\varepsilon t+e)}$, где $\mu = (t^2-cd)(\varepsilon t+e)+n(ad-bt)$
3.24	D	$u - \dfrac{x}{t}$, $\vartheta_D - \dfrac{x}{at}$, q, $p - \dfrac{x}{at}$, см. (2.39)
3.25, $\varepsilon = 1$	D	$x - \vartheta_D$, u, q, $p - x$, см. (2.39)
3.26, $a \neq 0$	D	u, $v + \dfrac{btx-aty-az}{a(t^2+1)}$, $w - \dfrac{bx-ay+atz}{a(t^2+1)}$, $p - \dfrac{x}{a}$
3.27	D	$u - \dfrac{x}{t}$, $v + \dfrac{ax-ty-z}{t^2+1}$, $w - \dfrac{ax-ty+t^2z}{t(t^2+1)}$, $p - \dfrac{x}{t}$
3.29	D	$u - \dfrac{x}{t}$, $v + a\dfrac{x}{t^2} - \dfrac{y}{t}$, $w - \dfrac{z}{t}$, $p - \dfrac{x}{t}$
3.30, $ad+c\neq 0$, $b\neq 0$, $e \neq 0$	D	$u + \dfrac{(et+c)(x-ay)+(adt-b)z}{b-t(et+ad+c)}$, $v + \dfrac{d(x-ay-tz)}{t(et+ad+c)-b}$, $w + \dfrac{e(x-ay-tz)}{t(et+ad+c)-b}$, $p + \dfrac{x-ay-tz}{t(et+ad+c)-b}$

3.32, $e^2+h^2\neq 0$	D	$u-\frac{x}{t}+a\frac{y}{t}+\frac{d-atn}{t(th+e)}z$, $v-\frac{n}{th+e}z$, $w-\frac{h}{th+e}z$, $p-\frac{z}{th+e}$
3.34, $a^2+b^2\neq 0$	D	$u+\frac{t}{bt+a}y-z$, $v-\frac{b}{bt+a}y$, $w-\frac{y}{bt+a}$, $p-\frac{y}{bt+a}$
3.35	D	$u+a\frac{y}{t}-z$, $v-\frac{y}{t}$, w, $p-\frac{y}{t}$
3.36, $a\neq 0$	D	$u+\frac{b}{a}y-z$, v, w, $p-\frac{y}{a}$
3.42, $a\neq 0$, $b=0$	C	$U-\frac{x}{t}$, Q, $\vartheta_C+\theta-\frac{x}{at}$, $p-\frac{x}{at}$, см. (2.40)
3.45	D	$u-\frac{x}{t}$, $v-b\frac{x}{t}$, w, $p-\frac{x}{t}$
3.47	D	u, $v-bx$, w, $p-x$

Таблица 2.14 – Инварианты оставшихся 3-мерных подалгебр с одним инвариантом из независимых переменных

№	**СК**	**Инварианты (ρ – общий)**
3.1	C	$\frac{r}{t}$, $U-\frac{x}{t}$, V, W, $p+b\ln\lvert t\rvert-\frac{x}{t}+a\theta$
3.2	C	$\frac{x}{r}$, U, V, W, $p-\ln r+a\theta$
3.3	C	r, $U-t$, V, W, $p+\frac{t^2}{2}-x+a\theta$
3.4	C	r, U, V, W, $p-x+\theta$
3.5	C	r, U, V, W, $p-x$
3.6	C	$\frac{x}{r}$, U, V, W, $p-\theta$
3.7	C	$\frac{r}{t}$, $U-\frac{x}{t}$, V, W, $p+a\theta-\ln r$
3.8, $d\neq 0$	C	$\frac{r}{t}$, $U+\theta\left(\frac{ac}{d}-b\right)-\frac{c}{d}\ln\lvert t\rvert$, V, W, $p+\frac{a\theta-\ln\lvert t\rvert}{d}$
3.10	C	$\frac{r}{t}$, $U-a\theta-b\ln\lvert t\rvert$, V, W, $p-\ln\lvert t\rvert$

3.11, $c \neq 0$	C	$r,\ U-\dfrac{b}{c}t-a\theta,\ V,\ W,\ p-\dfrac{t}{c}$
3.12, $c \neq 0$	C	$r,\ U-\dfrac{b}{c}t+\left(\dfrac{b}{c}-a\right)\theta,\ V,\ W,\ p+\dfrac{\theta-t}{c}$
3.13	D	$\dfrac{z}{t},\ u-\dfrac{x}{t},\ v-\dfrac{y}{t},\ w,\ p-\dfrac{y}{t}$
3.14	C	$\dfrac{r}{t},\ U-\dfrac{x}{t},\ V,\ W,\ p-\theta$
3.15, $c \neq 0$	D	$a\ln\|t\|-\dfrac{y}{t}+\dfrac{bz}{ct},\ u-\dfrac{x}{t},\ v-\dfrac{y}{t},\ w-\dfrac{z}{t},\ p-\dfrac{z}{ct}$
3.15, $c = 0$	D	$\dfrac{z}{t},\ u-\dfrac{x}{t},\ v-\dfrac{y}{t},\ w,\ p+a\ln\|t\|-\dfrac{y}{t}$
3.16, $e \neq 0$	D	$\dfrac{y}{t}-b\ln\|t\|-\dfrac{dz}{et},\ u-a\ln\|t\|-\dfrac{cz}{et},\ v-b\ln\|t\|-\dfrac{dz}{et},$ $w-\dfrac{z}{t},\ p-\dfrac{z}{et}$
3.16, $e = 0$, $d \neq 0$	D	$\dfrac{z}{t},\ u+\left(\dfrac{bc}{d}-a\right)\ln\|t\|-\dfrac{cy}{dt},\ v-\dfrac{y}{t},\ w,$ $p+\dfrac{b}{d}\ln\|t\|-\dfrac{y}{dt}$
3.17	C	$\dfrac{r}{t},\ U-c\theta-\ln\|t\|,\ V,\ W,\ p-\theta$
3.18, $a \neq 0$	D	$z,\ u-\dfrac{b}{a}y,\ v,\ w,\ p-\dfrac{y}{a}$
3.19	C	$r,\ U-a\theta,\ V,\ W,\ p-\theta$
3.20, $c \neq 0$	D	$x-\dfrac{b}{c}y-\dfrac{t^2}{2},\ u-t,\ v,\ w-at-\dfrac{d}{c}y,\ p-\dfrac{y}{c}$
3.20, $c = 0$, $b \neq 0$	D	$y,\ u-t,\ v,\ w-at-\dfrac{d}{b}\left(x-\dfrac{t^2}{2}\right),\ p-\dfrac{1}{b}\left(x-\dfrac{t^2}{2}\right)$
3.21, $a \neq 0$	D	$z,\ u-\dfrac{b}{a}y-t,\ v,\ w,\ p-\dfrac{y}{a}$
3.22	C	$r,\ U-t-b\theta,\ V,\ W,\ p-\theta$
3.28	D	$\dfrac{x}{t}-a\ln\|t\|,\ u-\dfrac{x}{t},\ v-\dfrac{y}{t},\ w-\dfrac{z}{t},\ p-\ln\|t\|$
3.31	D	$\dfrac{z}{t}-c\ln\|t\|,\ u-\dfrac{x}{t}+a\dfrac{y}{t}-ab\ln\|t\|,\ v-b\ln\|t\|,$ $w-\dfrac{z}{t},\ p-\ln\|t\|$

3.33	D	$y - a\dfrac{t^2}{2}$, $u + b\dfrac{t^2}{2} - z$, $v - at$, $w - bt$, $p - t$
3.42, $b \neq 0$	C	$\dfrac{x}{t} - \dfrac{a}{b}\ln\|t\|$, $U - \dfrac{x}{t}$, Q, $\theta - \dfrac{1}{b}\ln\|t\| + \vartheta_C$, $p - \dfrac{\ln\|t\|}{b}$, см. (2.40)
3.43	D	$\dfrac{x}{t} - a\ln\|t\|$, $u - \dfrac{x}{t}$, $v - b\ln\|t\|$, w, $p - \ln\|t\|$
3.44	D	$x - a\dfrac{t^2}{2}$, $u - at$, $v - bt$, w, $p - t$
3.48	C	$x - \dfrac{at^2}{2b}$, $U - \dfrac{a}{b}t$, $\vartheta_C + \theta - \dfrac{t}{b}$, Q, $p - \dfrac{t}{b}$, см. (2.40)

Следующие формулы применяются для записи инвариантов [85]:

$$\begin{gathered} \vartheta_D = \arctan\frac{(t^2+1)w + y - tz}{(t^2+1)v - ty - z}, \\ q^2 = \left(v - \frac{ty+z}{t^2+1}\right)^2 + \left(w + \frac{y - tz}{t^2+1}\right)^2. \end{gathered} \tag{2.39}$$

$$\vartheta_C = \arctan\frac{W}{V}, \quad Q^2 = V^2 + W^2. \tag{2.40}$$

Таблица 2.15 – Инварианты 3-мерных подалгебр с двумя инвариантами из независимых переменных

№	**СК**	**Инварианты (ρ – общий)**
3.8, $d = 0$	C	$\frac{r}{t}$, $a\theta - \ln\|t\|$, V, W, $p - U + b\theta$
3.9	C	t, r, V, W, $p + tU - x + \varepsilon\theta$
3.11, $c = 0$	C	t, r, V, W, $p - U + a\theta$
3.12, $c = 0$	C	r, $\theta - t$, V, W, $p - U + at$
3.16, $e = d = 0$	D	$\frac{z}{t}$, $\frac{y}{t} - b\ln\|t\|$, $v - b\ln\|t\|$, w, $p - u + a\ln\|t\|$
3.18, $a = 0$	D	y, z, v, w, $p - u$
3.20, $b = c = 0$	D	$x - \frac{t^2}{2}$, y, $u - t$, v, $p - w + at$
3.21, $a = 0$	D	y, z, v, w, $p - u + t$
3.23, $n = 1$, $e = \varepsilon = 0$, $a = b = 0$, $d \neq 0$	D	t, x, u, $(t^2 - cd)v - ty + d(z - p)$, $(t^2 - cd)w + cy - t(z - p)$
3.23, $n = 1$, $e = \varepsilon = 0$, $b = d = 0$	D	t, $x - a\frac{y}{t}$, u, $v - \frac{y}{t}$, $w + \frac{p}{t} + \frac{c}{t^2}y - \frac{z}{t}$
3.25, $\varepsilon = 0$	D	t, x, u, q, $p - v_D$, см. (2.39)
3.26, $a = 0$	D	t, x, u, $tp + (t^2 + 1)v - ty - z$, $p - (t^2 + 1)w + tz - y$
3.30, $c = -ad$, $b = e = 0$	D	t, $x - ay - tz$, $u - adp - z$, $v - dp$, w
3.32, $e = h = 0$	D	t, z, $u - \frac{x}{t} + a\frac{y}{t} + \left(\frac{d}{t} - an\right)p$, $v - pn$, w
3.34, $a = b = 0$	D	t, y, $u + tw - z$, v, $p - w$
3.36, $a = 0$	D	t, y, v, w, $p + u - z$

3.37, $a=0$, $b\neq 0$	C	$\frac{r}{t}$, $\theta-\frac{1}{b}\ln\lvert t\rvert$, V, W, $p-\theta$
3.37, $b=0$	C	r, $t-a\theta$, V, W, $p-\theta$
3.38	D	$\frac{y}{t}-a\ln\lvert t\rvert$, $\frac{z}{t}$, $v-a\ln\lvert t\rvert$, w, $p-\ln\lvert t\rvert$
3.39	D	$y-a\frac{t^2}{2}$, z, $v-at$, w, $p-t$
3.40	D	t, $z-a\frac{y}{t}$, $v-\frac{y}{t}$, w, $p-\frac{y}{t}$
3.41	D	t, z, v, w, $p-y$
3.42, $a=b=0$	C	t, x, U, Q, $p-\vartheta_C-\theta$, см. (2.40)
3.46	D	t, x, u, w, $p-v$

По каждой подалгебре из Таблиц 2.13, 2.14 можно построить инвариантные подмодели ранга 1 по следующему алгоритму. Каждый инвариант, содержащий одну из функций u, v, w, (или U, V, W), ρ, p, нужно назначить соответствующими новыми функциями u_1, v_1, w_1, (или U_1, V_1, W_1), ρ, p_1 ($S_1=p_1-f(\rho)$), зависящими от инварианта из независимой переменной, обозначаемой через s. Выражение из полученных равенств гидродинамических функций и подстановка их в систему (1.1) с учетом (1.3) приводит к инвариантным подмоделям ранга 1, которые перечислены в Приложении В.

Для **подмодели 3.35** решение имеет вид:

$$\begin{gathered} u=-a\frac{y}{t}+\rho_0 z-\frac{a\gamma}{2}t,\\ v=\frac{y}{t}-\frac{\gamma t}{2},\quad w=0,\quad \rho=\frac{1}{t},\\ p=\gamma\frac{y}{t}+\frac{\gamma^2}{2}t+f\left(\frac{1}{t}\right). \end{gathered}\tag{2.41}$$

Мировые линии частиц для решения (2.41) задаются равенствами

$$\begin{gathered} x=(z_0\rho_0-av_0)t+x_0,\\ y=-\frac{\gamma t^2}{2}+v_0t,\\ z=z_0. \end{gathered}\tag{2.42}$$

Якобиан J замены переменных (2.42) имеет вид

$$J=t\neq 0.\tag{2.43}$$

В момент времени $t=0$ происходит коллапс — все частицы будут находиться на плоскости (x_0, z_0) (так как при $t=0$ якобиан (2.43) $J=0$ и ранг матрицы Якоби равен 2).

Формулы (2.42) инвариантны относительно преобразований

$$t \to -t, \quad z \to -z, \quad v_0 \to -v_0, \quad z_0 \to -z_0,$$

следовательно, движение частиц можно рассмотреть при $t>0$ (разлет с плоскости $y=0$).

Плотность $\rho \to \infty$ при $t \to 0$, при $t \to \infty$ плотность $\rho \to 0$, вихрь $\vec{\omega} = \left(0, \rho_0, \dfrac{a}{t}\right)$. В каждой плоскости $z=z_0$ частицы двигаются по параболам или по прямой при $z_0 = \frac{av_0}{\rho_0}$. Кривая, на которой частицы из точки (x_0, z_0) плоскости $y=0$ окажутся в момент времени t, бегущие каждая по своим траекториям, задается исключением v_0 из формул (2.42). Такая кривая будет прямой линией:

$$y = -\frac{\gamma t^2}{2} + \frac{z_0\rho_0 t - x + x_0}{a}.$$

Подмодель 3.36 дает решение

$$\begin{gathered} u = -by + az - \frac{b\gamma}{2\rho_0}t^2, \\ v = -\frac{\gamma}{\rho_0}t, \quad w = 0, \quad \rho = \rho_0, \\ p = \gamma y + \frac{\gamma^2}{2\rho_0}t^2. \end{gathered} \tag{2.44}$$

Подмодель 3.45 дает решение

$$\begin{gathered} u = \frac{x}{t} - \gamma\frac{t}{2}, \quad v = \frac{b}{t}x + \frac{\gamma b}{2}t, \\ w = 0, \quad \rho = \frac{1}{t}, \quad p = \frac{\gamma}{t}x + \frac{\gamma^2}{2}t + f\left(\frac{1}{t}\right). \end{gathered} \tag{2.45}$$

Подмодель 3.47 дает решение

$$\begin{gathered} u = -\frac{\gamma}{\rho_0}t, \quad v = b\left(x + \frac{\gamma}{2\rho_0}t^2\right), \\ w = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = \gamma\left(x + \frac{\gamma}{2\rho_0}t^2\right). \end{gathered} \tag{2.46}$$

Решения (2.41), (2.44), (2.45), (2.46) получены с точностью до преобразований (1.7), (1.8).

Все инвариантные подмодели ранга 1 рассмотрены в [81] для алгебры Ли L_{11}. Среди них есть неавтономные динамические системы 2-го порядка, которые не изучены. Для алгебры Ли L_{12} получаются динамические системы большего порядка.

ГЛАВА 3
ИНВАРИАНТНАЯ ПОДМОДЕЛЬ РАНГА 2 НА ПОДАЛГЕБРЕ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ПЕРЕНОСОВ ДЛЯ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Настоящая глава посвящена изучению инвариантной подмодели ранга 2 эволюционного типа алгебры Ли L_{12}: вычислены интегралы, преобразования эквивалентности системы. В случае системы не типа Коши выяснено условие задания начальных данных. Для полученных двух типов точных решений подмодели описано движение частиц в целом. Первый тип решений описывает изобарическое движение вдоль траекторий с неменяющейся величиной движущегося объема из одних и тех же частиц. При этом дозвуковая область движения исчезает со временем. Второй тип решений описывает движение частиц под действием поршня. Результаты опубликованы в работах [55–60, 62, 63].

3.1. Линеаризация инвариантной подмодели

Рассматривается подалгебра из оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_{12} [52] под номером 2.36:

$$X_3 + X_4 = \partial_z + t\partial_x + \partial_u, \quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p.$$

Инварианты подалгебры

$$t, y, u - z, v, w, \rho, p - x + tz$$

задают представление инвариантного решения:

$$u = v_1 + z, v = u_1, w = w_1, \rho, p = p_1 + x - tz, \tag{3.1}$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 функции переменных t, y.

Подстановка (3.1) в (1.5) приводит к инвариантной подмодели ранга 2:

$$\begin{gathered} Du_1 + \rho^{-1} p_{1y} = 0, \\ Dv_1 = -\rho^{-1} - w_1, \\ Dw_1 = t\rho^{-1}, \\ D\rho + \rho u_{1y} = 0, \\ Dp_1 + \rho f_\rho u_{1y} = tw_1 - v_1, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y$.

Вводится замена переменных: $t = t(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ так, чтобы $D = \partial_\xi$. Отсюда следует

$$t_\xi = 1, u_1 = y_\xi \Rightarrow t = \xi + \eta.$$

Якобиан обратной замены $\xi = \xi(t, y)$, $\eta = \eta(t, y)$ имеет вид

$$I = t_\xi y_\eta - t_\eta y_\xi = y_\eta - y_\xi \neq 0.$$

Справедливы соотношения на производные:

$$\xi_t = y_\eta I^{-1}, \xi_y = -I^{-1}, \eta_t = -y_\xi I^{-1}, \eta_y = I^{-1}. \tag{3.3}$$

Инвариантная подмодель (3.2) записывается в новых переменных в силу (3.3):

$$\begin{gathered} \rho y_{\xi\xi}(y_\eta - y_\xi) + p_{1\eta} - p_{1\xi} = 0, \\ v_{1\xi} = -\rho^{-1} - w_1, \\ w_{1\xi} = (\xi + \eta)\rho^{-1}, \\ (y_\eta - y_\xi)\rho_\xi + \rho(y_\eta - y_\xi)_\xi = 0, \\ p_{1\xi} + \rho f'(\ln(y_\eta - y_\xi))_\xi = (\xi + \eta)w_1 - v_1. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Четвертое уравнение (3.4) интегрируется:

$$\rho(y_\eta - y_\xi) = R(\eta) > 0. \tag{3.5}$$

Из второго и третьего уравнений (3.4) следует

$$w_{1\xi} = -(\xi + \eta)(w_1 + v_{1\xi}).$$

Пятое уравнение (3.4) в силу (3.5) дает

$$(p_1 - f(\rho))_\xi = (\xi + \eta)w_1 - v_1.$$

Последние два равенства дают интеграл

$$p_1 = f(\rho) - w_1 - (\xi + \eta)v_1 + Q(\eta). \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует $y_\eta = VR + u_1$ в силу $y_\xi = u_1$. Условие совместности принимает вид:

$$u_{1\eta} = RV_\xi + u_{1\xi}.$$

Первое уравнение (3.4) в силу (3.5), (3.6) дает уравнение для V.

Таким образом, система (3.4) приводится к системе из четырех уравнений для четырех функций:

$$\begin{gathered}
u_{1\xi} + RV_\xi = u_{1\eta}, \\
v_{1\xi} = -w_1 - V, \\
w_{1\xi} = V(\xi + \eta), \\
-Ru_{1\xi} + g'V_\xi = g'V_\eta - w_{1\eta} - (\xi + \eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q',
\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $V = \rho^{-1}$, $f(\rho) = g(V)$, $f' = -V^2 g'$.

Производные по переменной ξ от всех функций определяются из уравнений (3.7) при условии

$$\begin{vmatrix} 1 & R \\ -R & g' \end{vmatrix} = g' + R^2 \neq 0. \tag{3.8}$$

В этом случае (3.7) есть система типа Коши, для которой можно поставить задачу с начальными данными.

Если условие (3.8) не выполнено, то функция $V = V(\eta)$ зависит от одной переменной η при условии $R \neq \text{const}$.

Если $g' = -R^2 = \text{const}$, то $g = -R^2V + G$ должна быть линейной функцией (специальное уравнение состояния). В этом случае (3.7) линейная система.

К исходным переменным t, y по решению системы (3.7) можно вернуться, вычислив криволинейный интеграл

$$y = \int u_1 d\xi + (u_1 + RV)d\eta$$

по любому пути в области определения гладкого решения, тогда получится зависимость $y = y(\xi, \eta)$ и вместе с равенством $t = \xi + \eta$ получится замена переменных, которая по заданному решению (3.7) дает решение (3.2).

Задача с начальными данными на нехарактеристической кривой поставлена корректно, т. е. существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных в некоторой окрестности кривой.

3.2. Приведение к симметрическому виду

Система (3.7) в матричном виде

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ R & 0 & 0 & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\xi =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+\eta & 1 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\eta + \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 - V \\ V(\xi+\eta) \\ (\xi+\eta)w_1 - Q' \end{pmatrix} \tag{3.9}
$$

содержит несимметрическую матрицу коэффициентов производных при η.

С помощью линейных комбинаций уравнений системы (3.7)

$$
\begin{gathered}
(3.7)_1 + aR(3.7)_2 + bR(3.7)_3, \\
(3.7)_2 + a(3.7)_4, \\
(3.7)_3 + b(3.7)_4, \\
(3.7)_4 - ag'(3.7)_2 - bg'(3.7)_3,
\end{gathered}
$$

где $a = -(\xi+\eta)g'^{-1}$, $b = -g'^{-1}$, $(3.7)_i$ — i-ое уравнение системы (3.7), система (3.9) переходит в систему с симметрическими матрицами:

$$
\begin{pmatrix} 1 & aR & bR & R \\ aR & 1 & 0 & -ag' \\ bR & 0 & 1 & -bg' \\ R & -ag' & -bg' & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\xi+\eta) & a & -ag' \\ 0 & b(\xi+\eta) & b & -bg' \\ 0 & \xi+\eta & 1 & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\eta +
$$

$$
+ \begin{pmatrix} -aR(w_1+V) + bRV(\xi+\eta) \\ a(\xi+\eta)w_1 - aQ' - w_1 - V \\ V(\xi+\eta) + b(\xi+\eta)w_1 - bQ' \\ ag'(w_1+V) - bg'V(\xi+\eta) + (\xi+\eta)w_1 - Q' \end{pmatrix}
$$

Таким образом, если система (3.7) гиперболическая, то для нее справедлива теорема единственности задачи Коши в характеристической области [81].

3.3. Гиперболичность подмодели

Система (3.7) записывается в матричном виде:

$$
A^\xi \vec{U}_\xi + A^\eta \vec{U}_\eta = B, \tag{3.10}
$$

где

$$\vec{U} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{Vmatrix}, A^{\xi} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R & 0 & 0 & g' \end{Vmatrix}, A^{\eta} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+\eta & 1 & -g' \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -w_1 - V \\ V(\xi+\eta) \\ -(\xi+\eta)w_1 + Q' \end{Vmatrix}.$$

Для вектора $\vec{k} = (k, l)$ характеристическая матрица системы (3.10) имеет вид

$$A = kA^{\xi} + lA^{\eta} = \begin{Vmatrix} k-l & 0 & 0 & Rk \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -Rk & l(\xi+\eta) & l & g'(k-l) \end{Vmatrix}.$$

Вектор $\vec{k}$ характеристический, если он удовлетворяет равенству $\det A = 0$. Отсюда следует уравнение

$$k^2(g'(k-l)^2 + R^2k^2) = 0. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) в зависимости от знака g' имеет следующие вещественные корни:

a) при $g' > 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 2,

b) при $g' < 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 2 и два корня $k_\pm$

$$k_\pm = \frac{l|g'|^{\frac{1}{2}}}{|g'|^{\frac{1}{2}} \pm R} \tag{3.12}$$

c) при $g' = 0$, $R \neq 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 4.

Характеристикой называется кривая $h(\xi, \eta) = 0$, нормаль к которой совпадает с характеристическим вектором $\nabla h = (h_\xi, h_\eta) = (k, l)$. Эту кривую можно искать в виде

$$h(\xi, \eta) = \eta - \eta(\xi) = 0, \quad \nabla h = (-\eta_\xi, 1) = (k, l).$$

Для корня $k_0 = 0$ характеристика C_0 задается равенством

$$C_0 : \eta = \mathrm{const} \tag{3.13}$$

Для корня k_+ из формул (3.12) характеристика определяется уравнением

$$C_+ : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 - |g'|^{-\frac{1}{2}} R. \tag{3.14}$$

Для корня k_- имеем

$$C_- : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 + |g'|^{-\frac{1}{2}} R. \tag{3.15}$$

Вычислим левые собственные векторы характеристической матрицы A для каждого корня. Для $k_0 = 0$ есть два собственных вектора $e_1^0 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2^0 = (0, 0, 1, 0)$ в случаях a),b),c); для k_+ — собственные векторы

$$e_+ = (-\gamma, -(\xi + \eta)(1 + R\gamma^{-1}), -(1 + R\gamma^{-1}), 1);$$

для k_- — собственные векторы

$$e_- = (\gamma, (\xi + \eta)(R\gamma^{-1} - 1), R\gamma^{-1} - 1, 1),$$

где $\gamma = |g'|^{\frac{1}{2}}$ в случае b).

Система (3.10) гиперболическая, если число корней характеристического уравнения (3.11) учитывая кратность и число левых собственных векторов совпадает с порядком системы [81]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *В случае $g' < 0$ система* (3.7) *гиперболическая, а в случае $g' \geqslant 0$ не гиперболическая.*

Для каждого левого собственного вектора можно написать условие на соответствующей характеристике. Для этого матричное уравнение (3.10) скалярно умножаем на левый собственный вектор, получим равенство, в котором любая искомая функция дифференцируется вдоль характеристики. Вычисления дают

$$C_0 : v_{1\xi} = -w_1 - V, \quad w_{1\xi} = (\xi + \eta)V; \tag{3.16}$$

$$C_+ : \gamma D_+ u_1 + (\xi + \eta) D_+ v_1 + D_+ w_1 + \gamma^2 D_+ V = w_1 \gamma^{-1} R(\xi + \eta) + Q', \tag{3.17}$$

где $D_+ = -(1 + R\gamma^{-1})\partial_\xi + \partial_\eta$;

$$C_- : -\gamma D_- u_1 + (\xi + \eta) D_- v_1 + D_- w_1 + \gamma^2 D_- V = -w_1 \gamma^{-1} R(\xi + \eta) + Q', \tag{3.18}$$

где $D_- = (R\gamma^{-1} - 1)\partial_\xi + \partial_\eta$.

Обыкновенные уравнения (3.13)–(3.18) для 7 неизвестных функций образуют замкнутую характеристическую форму гиперболической системы. Она является основой для численных расчетов краевых задач по методу характеристик.

3.4. Постановка задачи с начальными данными

Рассматривается система (3.7) при

$$g' = -R^2 = const. \tag{3.19}$$

Обозначим $R = R_0$. В этом случае неизвестно, как ставить задачу с начальными данными. В силу (3.19) система (3.7) примет вид:

$$\begin{gathered}
u_{1\xi} + R_0 V_\xi = u_{1\eta}, \\
v_{1\xi} = -w_1 - V, \\
w_{1\xi} = (\xi+\eta)V, \\
-R_0 u_{1\xi} - R_0^2 V_\xi = -R_0^2 V_\eta - w_{1\eta} - (\xi+\eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q'.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Вводится замена переменных:

$$\overline{u} = u_1 + R_0 V. \tag{3.21}$$

После введения замены (3.21) в системе (3.20) $\overline{u}_\xi$ выражается из первого уравнения и подставляется в четвертое. Система (3.20) примет вид:

$$\begin{gathered}
\overline{u}_\xi = \overline{u}_\eta - R_0 V_\eta, \\
v_{1\xi} = -w_1 - V, \\
w_{1\xi} = (\xi+\eta)V, \\
-(\xi+\eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q' = R_0(2R_0 V_\eta - \overline{u}_\eta) + w_{1\eta},
\end{gathered} \tag{3.22}$$

где $\overline{u}$, v_1, w_1, V зависят от переменных ξ, η.

В системе (3.22) неизвестные функции представляются в виде степенных рядов по переменной ξ:

$$\begin{gathered}
\overline{u} = \sum_{k\geq 0} \overline{u}_k(\eta)\xi^k, \quad v_1 = \sum_{k\geq 0} v_{1k}(\eta)\xi^k, \\
w_1 = \sum_{k\geq 0} w_{1k}(\eta)\xi^k, \quad V = \sum_{k\geq 0} V_k(\eta)\xi^k.
\end{gathered}$$

В системе (3.22) выписываются коэффициенты при степенях ξ:

$$\begin{aligned}
\xi^0: \quad & v_{11} = -w_{10} - V_0, \quad w_{11} = \eta V_0, \quad u_1 = u_0' - R_0 V_0', \\
& - w_{10}' - \eta(v_{10}' + w_{10}) + Q' = 2R_0^2 V_0' - R_0 u_0'; \\
\xi^k: \quad & v_{1k+1} = -\frac{1}{k+1}\left(w_{1k} + V_k\right), \quad w_{1k+1} = \frac{1}{k+1}\left(V_{k-1} + \eta V_k\right), \\
& u_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(u_k' - R_0 V_k'\right), \\
& - w_{1k}' - (v_{1k-1}' + w_{1k-1} + \eta(v_{1k}' + w_{1k})) = 2R_0^2 V_k' - R_0 u_k'.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

В формулах (3.23) соотношения при ξ^0 определяют u_1, v_{11}, w_{11} через u_0, w_{10}, V_0. Последнее соотношение определяет функцию Q из (3.6) через те же величины и v_{10}. Таким образом, из соотношений при ξ^0 функции u_0, v_{10}, w_{10}, V_0 определиться не могут. Их нужно задать произвольно как начальные данные.

Из рекуррентных соотношений при ξ^k (3.23) определяются функции V_k', u_{1k+1}, v_{1k+1}, w_{1k+1}, $k \geq 1$. При интегрировании в функциях V_k появляются произвольные постоянные c_i, $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& V_k = c_k - \frac{1}{2R_0^2}\int\limits_0^\eta A_k(\eta)d\eta, \quad k \geq 1, \\
& A_1(\eta) = (1+\eta^2)V_0 + V_0'' R_0^2 + w_{10} + v_{10}' - R_0 u_0'' - \eta w_{10}', \\
& A_l(\eta) = w_{1l}' + v_{1l-1}' + w_{1l-1} + \eta(v_{1l}' + w_{1l}) - R_0 u_l', \quad l \geq 2.
\end{aligned}$$

Теорема 3.2. *Для нахождения функций $\overline{u}$, v_1, w_1, V необходимо задать начальные данные:*

$$\begin{aligned}
& \overline{u}\Big|_{\xi=0} = u_0(\eta), \quad v_1\Big|_{\xi=0} = v_{10}(\eta), \quad w_1\Big|_{\xi=0} = w_{10}(\eta), \quad V\Big|_{\xi=0} = V_0(\eta), \\
& V\Big|_{\eta=0} = c(\xi) = V_0(0) + \sum_{i\geq 1} c_i \xi^i, \quad c(0) = V_0(0).
\end{aligned}$$

Разложение в ряд функции $c(\xi)$ определит константы c_i, $i \geq 1$. Для непрерывности функции V необходимо, чтобы выполнялось равенство $c(0) = V_0(0)$.

3.5. Точные решения

Рассматривается система (3.7) не типа Коши из п. 3.1. В этом случае

$$g'(V) = -R^2(\eta) < 0. \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует, что функция V зависит от одной переменной η для любого уравнения состояния. Тогда система (3.7) переопределена:

$$\begin{aligned} u_{1\xi} &= u_{1\eta}, \\ v_{1\xi} &= -w_1 - V, \\ w_{1\xi} &= V(\xi+\eta), \\ -Ru_{1\xi} &= -R^2V' - w_{1\eta} - (\xi+\eta)(v_{1\eta}+w_1) + Q'. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Интегрированием по ξ последних трех уравнений в (3.25) определяются функции

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}\xi^2V + \xi\eta V + W(\eta), \\ v_1 &= -\tfrac{1}{6}\xi^3V - \tfrac{1}{2}\xi^2\eta V - \xi(V+W) + V_1(\eta), \\ u_1 &= \tfrac{1}{5}A_4\xi^5 + \tfrac{1}{4}A_3\xi^4 + \tfrac{1}{3}A_2\xi^3 + \tfrac{1}{2}A_1\xi^2 + A_0\xi + U_1(\eta), \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$\begin{aligned} A_4 &= -\tfrac{1}{6}R^{-1}V', A_3 = -\tfrac{2}{3}\eta V'R^{-1}, \\ A_2 &= (-\tfrac{1}{2}V' - W' + \eta V - \tfrac{1}{2}\eta^2V')R^{-1}, \\ A_1 &= ((1+\eta)^2V + V_1' + W - \eta W')R^{-1}, \\ A_0 &= (-Q' + W' + \eta V_1' + \eta W)R^{-1} + RV'. \end{aligned} \tag{3.27}$$

В (3.26) функции

$$V, R, Q, W, V_1, U_1 \tag{3.28}$$

от одной переменной η подлежат дальнейшему определению. В силу первого уравнения из (3.25) и выражения для u_1 из (3.26) следуют равенства:

$$\begin{aligned} A_4 &= A_{40}, A_3 = 4A_{40}\eta + A_{30}, A_2 = 6A_{40}\eta^2 + 3A_{30}\eta + A_{20}, \\ A_1 &= 4A_{40}\eta^3 + 3A_{30}\eta^2 + 2A_{20}\eta + A_{10}, \\ A_0 &= A_{40}\eta^4 + A_{30}\eta^3 + A_{20}\eta^2 + A_{10}\eta + A_{00}, \\ U_1 &= \tfrac{1}{5}A_{40}\eta^5 + \tfrac{1}{4}A_{30}\eta^4 + \tfrac{1}{3}A_{20}\eta^3 + \tfrac{1}{2}A_{10}\eta^2 + A_{00}\eta + U_{10}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где A_{i0}, U_{10} — постоянные, $i = 0..4$. Выражения (3.29) сравниваем с выражениями из (3.27), получим обыкновенные уравнения для функций (3.28) кроме U_1 с добавлением уравнения (3.24)

$$\begin{aligned} V' &= -6RA_{40}, A_{30} = 0, RA_{20} = \tfrac{1}{2}V'(\eta^2-1) - W' + V\eta, \\ (1+\eta^2)V + V_1' + W - \eta W' &= (4A_{40}\eta^3 + 2A_{20}\eta + A_{10})R, \\ -Q' + W' + \eta V_1' + \eta W + R^2V' &= (A_{40}\eta^4 + A_{20}\eta^2 + A_{10}\eta + A_{00})R. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Система (3.30), (3.24) определяет функции (3.28) в двух взаимоисключающих случаях $A_{40} = 0$ и $A_{40} \neq 0$.

В случае $A_{40} = 0$ функции $V = V_0$ и $R = R_0$ — постоянные. Условие $R = R(\eta)$ нарушено. Из уравнений (3.25) все равно следует представление решения (3.26), где

$$V = V_0, R = R_0, W = \tfrac{1}{2}\eta^2 V_0 - \eta R_0 A_{20} + W_0,$$
$$V_1 = -\tfrac{1}{6}V_0\eta^3 + R_0 A_{20}\eta^2 + (R_0 A_{10} - W_0 - V_0)\eta + V_{10},$$
$$Q = Q_0 + W_0 - R_0(A_{00} + A_{20})\eta.$$

Таким образом, из представления инвариантного решения (3.1) определяется частное решение гидродинамических уравнений (1.1) с учетом (1.3):

$$\begin{aligned}
&u = z - t\left(\frac{1}{6}t^2 + 1\right)V_0 - tW_0 + V_{10} + \\
&+\left(y - \frac{1}{12}A_{20}t^4 - \frac{1}{6}A_{10}t^3 - \frac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10}\right)(tA_{20} + A_{10})V_0^{-1}, \\
&v = \tfrac{1}{3}A_{20}t^3 + \frac{1}{2}A_{10}t^2 + A_{00}t + U_{10}, \\
&w = -V_0^{-1}A_{20}\left(y - \frac{1}{12}A_{20}t^4 - \frac{1}{6}A_{10}t^3 - \frac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10}\right) + \\
&+\frac{1}{2}V_0 t^2 + W_0, \\
&\rho = \frac{1}{V_0}, \quad g'(V) = -R_0^2, \\
&p = x - tz + g(V_0) + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{1}{3}t^2 + 1\right)V_0 + W_0 t^2 - V_{10}t + Q_0 - \\
&-(A_{20}t^2 + A_{10}t + A_{00})\left(y - \frac{1}{12}A_{20}t^4 - \tfrac{1}{6}A_{10}t^3 - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10}\right)V_0^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В случае $A_{40} \neq 0$, т. к. $g' < 0$, обозначим $g'(V) = -\alpha^2(V) = -R^2$. Интегрирование (3.30) дает представление искомых функций

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{V_0}^{V} \frac{dV}{\alpha(V)} = -6A_{40}\eta, V_0 = V(0), W = \left(\frac{\eta^2}{2} + \frac{A_{20}}{6A_{40}} - \frac{1}{2}\right)V + W_{00}, \\
&V_1 = \left[-\frac{1}{6}\eta^3 - \left(\frac{A_{20}}{6A_{40}} + \frac{1}{2}\right)\eta - \frac{A_{10}}{6A_{40}}\right]V - \eta W_{00} + V_{10}, \\
&Q = \left(\frac{A_{00} + A_{20}}{6A_{40}} - \frac{1}{2}\right)V - g(V) + W_{00} + Q_0, \\
&R = -\frac{V'}{6A_{40}}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Из (3.26), (3.32) и представления инвариантного решения (3.1) определяется частное решение гидродинамических уравнений (1.1) с учетом (1.3):

$$
\begin{aligned}
&u = z - \frac{1}{6}\left(t^3 + \left(3 + \frac{A_{20}}{A_{40}}\right)t + \frac{A_{10}}{A_{40}}\right)\rho^{-1} - tW_{00} + V_{10},\\
&v = \frac{1}{5}A_{40}t^5 + \frac{1}{3}A_{20}t^3 + \frac{1}{2}A_{10}t^2 + A_{00}t + U_{10},\\
&w = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1 + \frac{A_{20}}{3A_{40}}\right)\rho^{-1} + W_{00},\\
&\rho = \left[\frac{2}{5}A_{40}^2t^6 + A_{20}A_{40}t^4 + 2A_{10}A_{40}t^3 + 6A_{00}A_{40}t^2 + \right.\\
&\quad \left. + 12U_{10}A_{40}t + 12A_{40}(x_0 - y)\right]^{-\frac{1}{2}},\\
&p = x - tz + \frac{1}{6}\left(t^4 + \frac{A_{20}}{A_{40}}t^2 + \frac{A_{10}}{A_{40}}t + \frac{A_{00}}{A_{40}}\right)\rho^{-1} + t^2W_{00} - tV_{10} + Q_0.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Если рассматривать решения (3.31), (3.33) с точностью до преобразований (1.7), (1.8), то можно считать $W_{00} = V_{10} = U_{10} = x_0 = Q_0 = x_{10} = W_0 = g(V_0) = 0$, и остаются четыре существенные постоянные V_0, A_{00}, A_{10}, A_{20} в (3.31) и A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{40} в (3.33).

3.6. Движение частиц для точных решений

Рассматривается простейший случай решения (3.31) при $A_{20} = A_{10} = 0$:

$$
\begin{aligned}
&u = z - t(\tfrac{1}{6}t^2 + 1)V_0,\\
&v = A_{00}t,\\
&w = \tfrac{1}{2}V_0t^2,\\
&\rho = \tfrac{1}{V_0},\\
&p = x - tz + \tfrac{1}{2}t^2(\tfrac{1}{3}t^2 + 1)V_0 -\\
&-A_{00}V_0^{-1}(y - \tfrac{1}{2}A_{00}t^2).
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Движение частиц определяется из равенств $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$, $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$ [46]. Для решения (3.34) уравнений (1.1) с учетом (1.3) движение частиц имеет вид:

$$
\begin{aligned}
x &= -\tfrac{1}{2}V_0t^2 + z_0t + x_0,\\
y &= \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 + y_0,\\
z &= \tfrac{1}{6}V_0t^3 + z_0, V_0 > 0.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Плотность и давление в частице постоянны: $\rho = V_0^{-1}$, $p = x_0 - A_{00}V_0^{-1}y_0$.

При $A_{00} \neq 0$ с помощью замены $\dfrac{z}{V_0} = \overline{z}$, $\dfrac{z_0}{V_0} = \overline{z}_0$, $\dfrac{x}{V_0} = \overline{x}$, $\dfrac{x_0}{V_0} = \overline{x}_0$, $\dfrac{y}{A_{00}} = \overline{y}$, $\dfrac{y_0}{A_{00}} = \overline{y}_0$ равенства (3.35) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= -\tfrac{1}{2}t^2 + \overline{z}_0 t + \overline{x}_0, \\ \overline{y} &= \tfrac{1}{2}t^2 + \overline{y}_0, \\ \overline{z} &= \tfrac{1}{6}t^3 + \overline{z}_0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Мировые линии частиц не пересекаются, так как Якобиан перехода от переменных $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$ к переменным $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ равен 1.

Отражение $t \to -t$, $z_0 \to -z_0$, $z \to -z$ не изменяет выражения (3.35), поэтому достаточно описать движение частиц при $t > 0$. С помощью отражения $\overline{z}_0 \to -\overline{z}_0$, $\overline{z} \to -\overline{z}$ получится решение (3.36) при $t < 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке с начальными координатами $(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$. Достаточно построить кривую, исходящую из точки $\overline{x}_0 = 0$, $\overline{y}_0 = 0$. Если $\overline{x}_0^2 + \overline{y}_0^2 \neq 0$, то траектория, выпущенная из этой точки, получается с помощью переноса на вектор $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$. Далее черточки опускаются.

На Рисунке 3.1 построены траектории частиц (3.36) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ в пространстве (x, y, z) при $z_0 = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ и поверхность, заданная теми же уравнениями с параметрами $t = 0..2$, $z_0 = -1..1$, которая состоит из траекторий частиц. Эта поверхность, сдвинутая на вектор (x_0, y_0), заполняет все пространство.

Так как Якобиан равен 1, то величина движущегося объема из одних и тех же частиц не изменяется со временем.

Пусть в начальный момент времени частицы заполняют куб. Частицы на поверхности куба снова окажутся на поверхности измененного куба. Поскольку любая плоскость из частиц перейдет в плоскость из тех же частиц, то куб перейдет в параллелепипед.

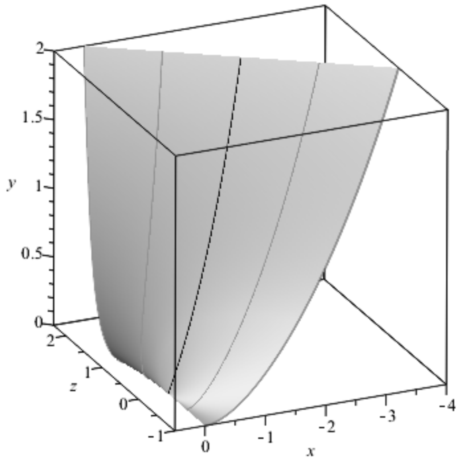


Рисунок 3.1 – Поверхность, заданная параметрически с помощью формул (3.36), $t = 0..2$, $z_0 = -1..1$ – параметры

Точки, заполняющие куб, удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} x_0 = \pm gr, -gr \le y_0 \le gr, \\ -gr + z_1 \le z_0 \le gr + z_1, \\ y_0 = \pm gr, -gr \le x_0 \le gr, \\ -gr + z_1 \le z_0 \le gr + z_1, \\ z_0 = z_1 \pm gr, -gr \le x_0 \le gr, \\ -gr \le y_0 \le gr, \end{gathered} \tag{3.37}$$

где $2gr$ – длина ребра куба, z_1 – координата по оси Oz центра куба. При $t \neq 0$ частицы перейдут в параллелепипед:

$$\begin{gathered} x = -\tfrac{1}{2}t^2 + z_0 t \pm gr, y = \tfrac{1}{2}t^2 + y_0, \\ z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_0, -gr \le y_0 \le gr, \\ -gr + z_1 \le z_0 \le gr + z_1; \\ x = -\tfrac{1}{2}t^2 + z_0 t + x_0, y = \tfrac{1}{2}t^2 \pm gr, \\ z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_0, -gr \le x_0 \le gr, \\ -gr + z_1 \le z_0 \le gr + z_1; \\ x = -\tfrac{1}{2}t^2 + (z_1 \pm gr)t + x_0, y = \tfrac{1}{2}t^2 + y_0, \\ z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_1 \pm gr, \\ -gr \le x_0 \le gr, -gr \le y_0 \le gr. \end{gathered} \tag{3.38}$$

С помощью (3.37) и (3.38) на Рисунке 3.2 представлены паралеллепипеды и кривые, по которым движутся центры параллелепипедов. С увеличением времени объем параллелепипеда остается постоянным, но изменяется форма: в направлении движения центра параллелепипед сужается, но вытягивается в перпендикулярном направлении.

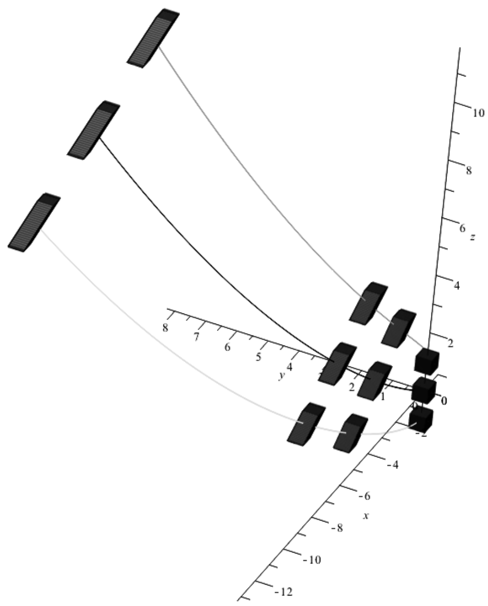


Рисунок 3.2 – Движение параллелепипедов, кривые - местоположение центров параллелепипедов; $gr = \dfrac{1}{4}$, $z_1 = \{-1, 0, 1\}$, $t = \{0, 1.5, 2, 4\}$

Звуковая поверхность задается уравнением [46]:

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2, \tag{3.39}$$

где $a = \sqrt{f_\rho}$ – скорость звука. Для решения (3.34) $a^2 = f' = -g_V' V^2 = R_0^2 V_0^2 = I^2 = 1$. Тогда звуковая поверхность из (3.39) задается равенством:

$$\left(z - \left(\frac{1}{6}t^3 + t\right) V_0\right)^2 + A_{00}^2 t^2 + \frac{1}{4} V_0^2 t^4 = 1.$$

Замена $\overline{z} = \dfrac{z}{V_0}$ в последнем равенстве приводит к формуле:

$$\left(\overline{z} - \left(\frac{1}{6}t^3 + t\right)\right)^2 = -\frac{1}{4}t^4 - \frac{A_{00}^2}{V_0^2}t^2 + V_0^{-1}. \tag{3.40}$$

Формула (3.40) задает две параллельные плоскости (Рисунок 3.3), между которыми находится дозвуковая область, на самих плоскостях частицы двигаются со скоростью звука, в остальных точках пространства движение сверхзвуковое. При $t^2 = \sqrt{\frac{4}{V_0^2} + 4(\frac{A_{00}}{V_0})^4} - 2(\frac{A_{00}}{V_0})^2 = t_*^2$ две плоскости схлопываются в одну (Рисунок 3.4), то есть дозвуковая область исчезает. При $t > t_*$ все частицы двигаются со сверхзвуковыми скоростями.

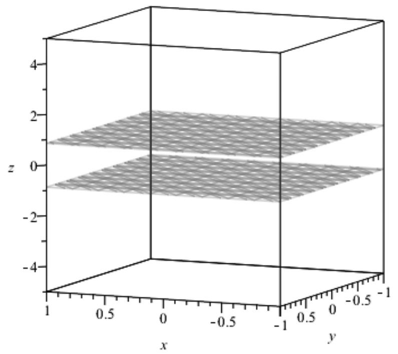


Рисунок 3.3 – Две параллельные звуковые плоскости, заданные уравнением (3.40) при $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$, $t = 0.01$

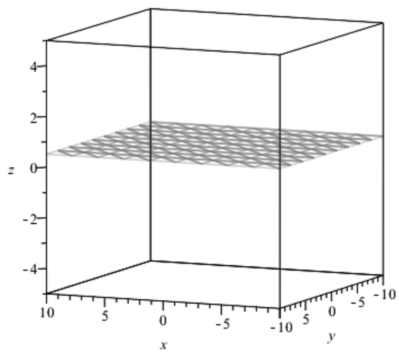


Рисунок 3.4 – Одна звуковая плоскость, заданная уравнением (3.40) при $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$, $t = t_* \approx 0.4962$

Для отыскания звуковых характеристик уравнений (1.1) с учетом (1.3) вида $h(t, \vec{x}) = const$ следует решить задачу Коши [46]:

$$\begin{gathered} h_t + uh_x + vh_y + wh_z = \pm\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \\ h(0, \vec{x}) = h_0(\vec{x}). \end{gathered} \tag{3.41}$$

Характеристики уравнений (3.41) называются бихарактеристиками исходных уравнений (1.1) с учетом (1.3). Уравнения бихарактеристик имеют вид:

$$\begin{gathered} d\vec{x}/dt = \vec{u} + c\nabla h/|\nabla h|, \\ dh_j/dt = -\vec{u_j}\cdot\nabla h \pm c_j|\nabla h| \quad (j = x, y, z), \end{gathered} \tag{3.42}$$

где символами с нижним индексом j обозначены частные производные по указанным аргументам.

Особый вид характеристической поверхности получается, если образовать геометрическое место всех бихарактеристик, выходящих из данной точки $P(\vec{x}_0, 0)$. Чтобы представить совокупность всех таких бихарактеристик, необходимо учесть начальные данные к системе (3.42):

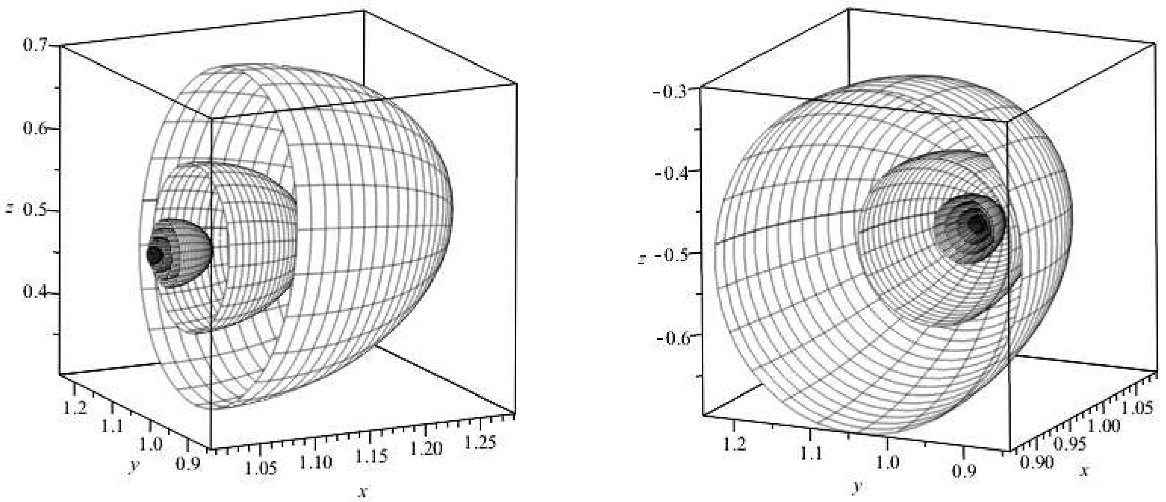
$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, h_j(0) = h_{j0} \quad (j = x, y, z), \tag{3.43}$$

где $(h_{x_0}, h_{y_0}, h_{z_0})$ – единичный вектор. Звуковой коноид на решении (3.34) определяется решением задачи (3.42), (3.43)

$$\begin{gathered} x = x_0 - \tfrac{1}{2}V_0t^2 + z_0t + (\pm t \mp \tfrac{1}{2}s)\sqrt{1+r^2+s^2}\pm \\ \pm\tfrac{1}{2}(s-t)\sqrt{1+r^2+(s-t)^2}\pm \\ \pm\tfrac{1}{2}(1-r^2)\ln\left|\tfrac{t-s+\sqrt{1+r^2+(s-t)^2}}{\sqrt{1+r^2+s^2}-s}\right|, \\ y = \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 \pm r\ln\left|\tfrac{t-s+\sqrt{1+r^2+(s-t)^2}}{\sqrt{1+r^2+s^2}-s}\right| + y_0, \\ z = \tfrac{1}{6}V_0t^3 \mp \sqrt{1+r^2+(s-t)^2} \pm \sqrt{1+r^2+s^2} + z_0, \end{gathered} \tag{3.44}$$

где $r = \frac{h_{y_0}}{h_{x_0}}$, $s = \frac{h_{z_0}}{h_{x_0}}$ – параметры двумерной поверхности. Для построения поверхности (3.44) вводятся сферические координаты: $h_{x_0} = \cos\theta$, $h_{y_0} = \sin\theta\cos\varphi$, $h_{z_0} = \sin\theta\sin\varphi$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Результаты построений приведены на Рисунках 3.5–3.7, где $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, \pm 0.5)$.

При $t = 0$ звуковые плоскости находятся в точке $(x_0, y_0, \pm\frac{1}{V_0})$, коноид является точкой с координатами (x_0, y_0, z_0). При возрастании времени звуковые плоскости движутся навстречу друг к другу. Звуковые коноиды для разных моментов времени представляют собой вложенные друг в друга эллипсоиды в области дозвукового движения (Рисунок 3.5). С течением времени эллипсоиды пересекаются в области сверхзвукового движения (Рисунок 3.6, 3.7). Для параметров $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$ при $t = t_* = 0.4961967876$ дозвуковая область исчезает. При $t < t_*$ движение частиц дозвуковое между звуковыми плоскостями. При $t > t_*$ движение только сверхзвуковое, звуковой коноид как трехмерная гиперповерхность в R^4 есть огибающая непересекающихся эллипсоидов в $R^3(t)$. Проекции эллипсоидов в $R^3(0)$ пересекаются (Рисунок 3.7).



(a) (b)

Рисунок 3.5 – Звуковые коноиды в разрезе при $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$, $t = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.1, 0.2$; (a) $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.5)$; (b) $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -0.5)$

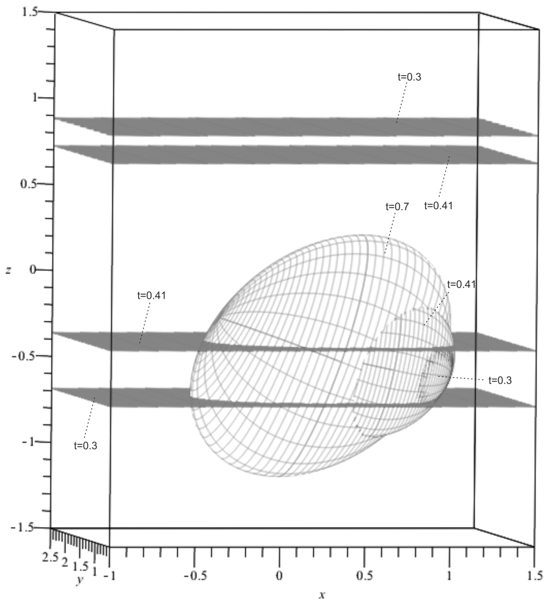


Рисунок 3.6 – Звуковые коноиды и звуковые поверхности при $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$, $t = 0.3, 0.41, 0.7$; $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -0.5)$

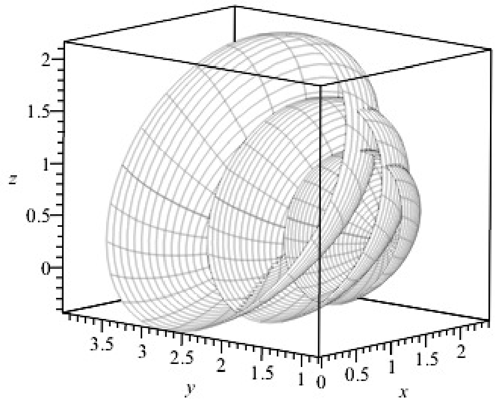


Рисунок 3.7 – Звуковые коноиды в разрезе при $A_{00} = 2$, $V_0 = 1$,
$t = 0.7, 1, 1.3$; $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.5)$

Исследуем решение (3.33) при $A_{00} = A_{10} = A_{20} = 0$, $A_{40} = k$

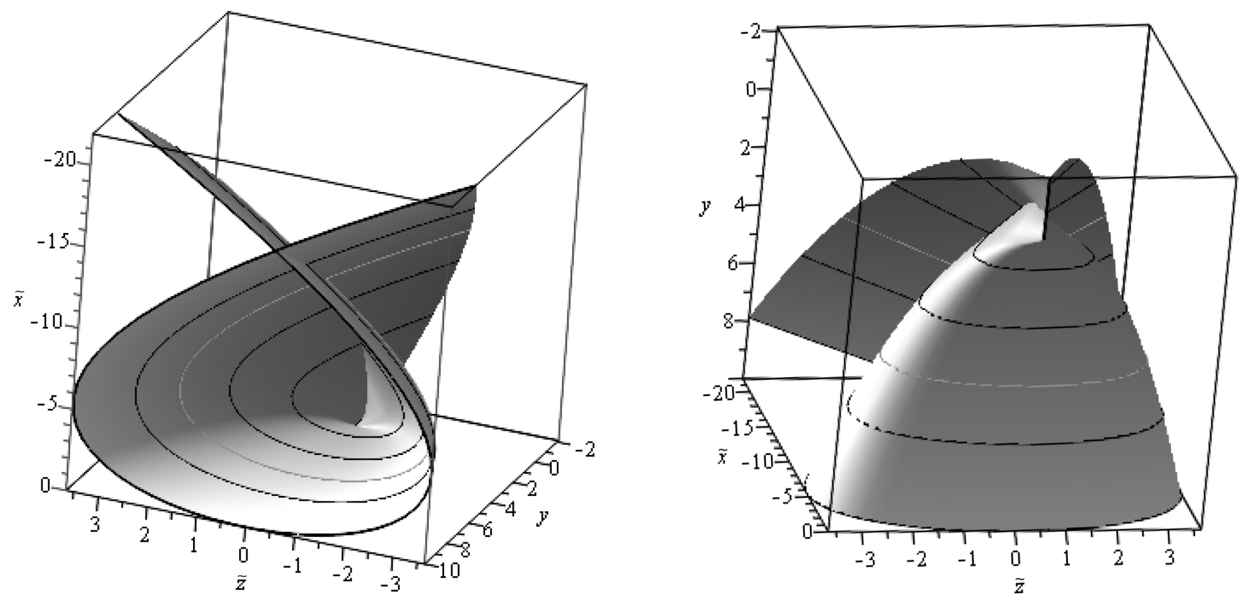
$$\begin{aligned} &u = z - \tfrac{1}{6}(t^3 + 3t)[\tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky]^{\frac{1}{2}},\\ &v = \tfrac{1}{5}kt^5,\\ &w = \tfrac{1}{2}(t^2 - 1)[\tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky]^{\frac{1}{2}},\\ &\rho^{-2} = \tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky,\\ &p = x - tz + \tfrac{1}{6}t^4\rho^{-1}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Решение определено в области $\frac{2}{5}k^2t^6 > 12ky$. Отражение $k \to -k$, $y \to -y$, $t \to -t$ оставляет инвариантными формулы (3.45), поэтому достаточно рассмотреть случай $k < 0$. Областью определения решения является полупространство

$$y > -\tfrac{1}{30}|k|t^6,$$

ограниченное движущейся плоскостью $y = -\dfrac{1}{30}|k|t^2$, на которой плотность бесконечна. Эту плоскость можно трактовать как поршень. Пусть при $t = 0$ частица находится в точке x_0, $y_0 > 0$, z_0. Тогда мировые линии частиц определены равенствами

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}\beta t^2 + z_0t + x_0,\\ y &= -\tfrac{1}{30}|k|t^6 + y_0,\\ z &= \tfrac{1}{2}\beta t(\tfrac{1}{3}t^2 - 1) + z_0, \end{aligned} \tag{3.46}$$



a) b)

Рисунок 3.8 – Поверхность из траекторий движения частиц в координатах $\widetilde{x}$, y, $\widetilde{z}$ при $0 < y_0 < 10$, $-2 < t < 2$. Выделены траектории при $|k| = 1$, $y_0 = 0$, 1, 3, 5, 7, 10.
а)Вид спереди б)Вид сзади

где $\beta = \sqrt{12|k|y_0}$, и вдоль мировой линии $\rho = \beta^{-1}$, $p = x_0 + tz_0 + \frac{1}{2}\beta t^2(\frac{1}{3}t^2 - 1)$. Равенства (3.46) задают переход от лагранжевых переменных x_0, $y_0 \geq 0$, z_0 к переменным x, y, z. Якобиан преобразования равен 1, значит, мировые линии частиц не пересекаются и величина конечного объема не меняется со временем. Вдоль мировой линии плотность не меняется.

При $y_0 \to 0$ плотность бесконечна, при $y_0 \to \infty$ плотность стремится к нулю (вакуум).

Для представления всех траекторий мировых линий (3.46), проходящих через точки (x_0, y_0, z_0), выберем инерционную систему координат

$$\widetilde{x} = x - x_0 - z_0 t = -\frac{1}{2}\beta t^2, \quad \widetilde{z} = z - z_0 = \frac{1}{2}\beta t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right).$$

При фиксированных y_0, $|k| = 1$ численно построим траектории в координатах $\widetilde{x}$, y, $\widetilde{z}$. На Рисунке 3.8 изображена поверхность из траекторий движения частиц при $0 < y_0 < 10$, $-2 < t < 2$. Выделены траектории в случаях $y_0 = 0$, 1, 3, 5, 7, 10. Происходит движение частиц под действием поршня сначала с ростом y, а затем за поршнем в сторону убывания y (Рисунок 3.9).

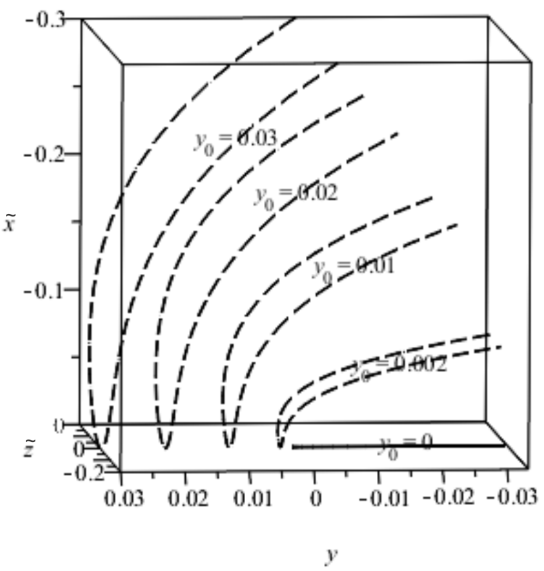


Рисунок 3.9 – Траектории движения частиц в координатах $\widetilde{x}$, y, $\widetilde{z}$ при $|k| = 1$, $-1 < t < 1$, $y_0 = 0$, 0.002, 0.01, 0.02, 0.03

3.7. Преобразования эквивалентности линейной системы

Система (3.7) для уравнения состояния $p = -R^2V + h(S)$, $R = \text{const}$ является линейной. С обозначениями $u^1 = u_1$, $u^2 = v_1$, $u^3 = w_1$, $u^4 = V$, $Q' = q(\eta)$ систему запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&u^1_\xi + Ru^4_\xi = u^1_\eta,\\
&u^2_\xi = -u^3 - u^4,\\
&u^3_\xi = (\xi+\eta)u^4,\\
&R^2u^4_\eta - Ru^1_\eta + (\xi+\eta)(u^2_\eta + u^3) + u^3_\eta = q, \quad q_\xi = 0, \quad q_{u_i} = 0,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

где $q = q(\eta)$ — произвольный элемент.

Преобразования эквивалентности системы (3.47) не изменяют ее вид, а лишь меняют произвольный элемент. Оператор преобразований эквивалентности, продолженный на производные, входящие в систему (3.47), разыскивается в виде [88]

$$X = \zeta^\xi \partial_\xi + \zeta^\eta \partial_\eta + \zeta^{u^i} \partial_{u^i} + \zeta^q \partial_q + (\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^i} - u^i_\xi \widetilde{D}_\xi \zeta^\xi - u^i_\eta \widetilde{D}_\xi \zeta^\eta) \partial_{u^i_\xi} +$$
$$+ (\widetilde{D}_\eta \zeta^{u^i} - u^i_\xi \widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^i_\eta \widetilde{D}_\eta \zeta^\eta) \partial_{u^i_\eta} + (D_\xi \zeta^q - q_\xi D_\xi \zeta^\xi - q_\eta D_\xi \zeta^\eta - q_{u^i} D_\xi \zeta^{u^i}) \partial_{q_\xi} +$$
$$+ (D_{u^i} \zeta^q - q_\xi D_{u^i} \zeta^\xi - q_\eta D_{u^i} \zeta^\eta - q_{u^i} D_{u^j} \zeta^{u^j}) \partial_{q_{u^i}} + \ldots,$$

где координаты оператора ζ^ξ, ζ^η, ζ^{u^i}, ζ^q зависят от переменных ξ, η, u^i, q, а операторы полного дифференцирования, действующие в своих пространствах, таковы:

$$\widetilde{D}_\xi = \partial_\xi + u^i_\xi \partial_{u^i} + (q_\xi + q_{u^i} u^i_\xi) \partial_q, \quad \widetilde{D}_\eta = \partial_\eta + u^i_\eta \partial_{u^i} + (q_\eta + q_{u^i} u^i_\eta) \partial_q,$$
$$D_\xi = \partial_\xi + q_\xi \partial_q, \quad D_{u^i} = \partial_{u^i} + q_{u^i} \partial_q.$$

Запишем условия инвариантности системы (3.47) относительно оператора X. Для двух последних уравнений они имеют вид

$$X q_\xi|_{(3.47)} = 0, \quad X q_{u^i}|_{(3.47)} = 0, \tag{3.48}$$

где переход на многообразие осуществляется с помощью динамических переменных u^1_η, u^2_η, u^3_η, u^4_ξ, q_η. Остальные производные выражаются из системы (3.47).

Условие (3.48) запишем в виде

$$\zeta^q_\xi = q_\eta \zeta^\eta_\xi, \quad \zeta^q_{u^i} = q_\eta \zeta^\eta_{u^i}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при динамических переменных (расщепление по q_η), получим

$$\zeta^q_\xi = \zeta^\eta_\xi = 0, \quad \zeta^q_{u^i} = \zeta^\eta_{u^i} = 0,$$

т. е. координаты ζ^q и ζ^η зависят только от η, q.

Условия инвариантности для остальных уравнений системы (3.47) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\xi \zeta^\xi = \widetilde{D}_\eta \zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - \\
&-u^1_\eta(\zeta^\eta_\eta + \zeta^\eta_q q_\eta) - R(\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^4} - u^4_\xi \widetilde{D}_\xi \zeta^\xi), \\
&\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^2} + (u^3 + u^4)\widetilde{D}_\xi \zeta^\xi + \zeta^{u^3} + \zeta^{u^4} = 0, \\
&\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^3} - (\xi+\eta)u^4 \widetilde{D}_\xi \zeta^\xi = u^4(\zeta^\xi + \zeta^\eta) + (\xi+\eta)\zeta^{u^4}, \\
&R^2\big[\widetilde{D}_\eta \zeta^{u^4} - u^4_\xi \widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^4_\eta\big(\zeta^\eta_\eta + q_\eta \zeta^\eta_q\big)\big] - \\
&-R\big[\widetilde{D}_\eta \zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^1_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta \zeta^\eta_q)\big] + (\zeta^\xi + \zeta^\eta)(u^2_\eta + u^3) + \\
&+(\xi+\eta)\big[\zeta^{u^3} + \widetilde{D}_\eta \zeta^{u^2} + (u^3+u^4)\widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^2_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta \zeta^\eta_q)\big] + \widetilde{D}_\eta \zeta^{u^3} - \\
&-(\xi+\eta)u^4 \widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^3_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta \zeta^\eta_q) = \zeta^q,
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

где u^4_η нужно выразить из четвертого уравнения системы (3.47).

Расщепляя условия инвариантности (3.49) по переменной q_η, получим

$$
\begin{gathered}
\zeta^{u^1}_q = (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\zeta^\xi_q + u^1_\eta \zeta^\eta_q \Rightarrow \zeta^\eta_q = \zeta^\xi_q = \zeta^{u^1}_q = 0, \\
R^2\zeta^{u^4}_q + (\xi+\eta)\zeta^{u^2}_q + \zeta^{u^3}_q = 0.
\end{gathered}
\tag{3.50}
$$

Расщепляя (3.49) по u^4_ξ, получим

$$
\begin{gathered}
\zeta^\xi = \zeta^\xi(\xi), \quad \zeta^{u^3}_{u^4} = R\zeta^{u^3}_{u_1}, \\
\zeta^{u^2}_{u^4} = R\zeta^{u^2}_{u_1}, \quad \zeta^{u^1}_{u^4} - R\zeta^{u^1}_{u^1} + R(\zeta^{u^4}_{u^4} - R\zeta^{u^4}_{u^1}) = 0.
\end{gathered}
\tag{3.51}
$$

Второе уравнение из условий (3.49) после расщепления по u^1_η в силу (3.51) определяет функцию

$$
\begin{gathered}
\zeta^{u^4} = u^4(\zeta^{u^2}_{u^2} - (\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3} - \zeta^\xi_\xi) - \zeta^{u^3} - \zeta^{u^2}_\xi - u^3(\zeta^\xi_\xi - \zeta^{u^2}_{u^2}), \\
\zeta^{u^2}_{u^1} = \zeta^{u^2}_{u^4} = 0.
\end{gathered}
\tag{3.52}
$$

Из третьего уравнения условий (3.49) после расщепления по u^1_η, u^4 следуют равенства в силу (3.51), (3.52)

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{u^3}_{u^1} = \zeta^{u^3}_{u^4} = 0 \Rightarrow \zeta^{u^4}_{u^1} = 0, \\
&\zeta^{u^3}_{u^2} - (\xi+\eta)\zeta^{u^3}_{u^3} + (\xi+\eta)(\zeta^{u^2}_{u^2} - (\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3}) + \zeta^\xi + \zeta^\eta = 0, \\
&\zeta^{u^3}_\xi - u^3\zeta^{u^3}_{u^2} + (\xi+\eta)\big[\zeta^{u^3} + u^3(\zeta^\xi_\xi - \zeta^{u^2}_{u^2}) + \zeta^{u^2}_\xi\big] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Из четвертого уравнения условий (3.49) после расщепления по u^1_η следуют в силу (3.51), (3.53) равенства

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{u^1}_{u^4} = \zeta^{u^4}_{u^1} = 0, \\
&\zeta^{u^1}_{u^1} = \zeta^{u^4}_{u^4} = \zeta^{u^2}_{u^2} - (\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3} - \zeta^\xi_\xi = c(\xi,\eta,u^2,u^3).
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Из первого уравнения условий (3.49) после расщепления по динамическим переменным следует в силу (3.54)

$$\zeta^{\xi} = D\xi + C_1, \quad \zeta^{\eta} = D\eta + C_2,$$
$$\zeta^{u^1}_{u^2} = \zeta^{u^1}_{u^3} = 0 \Rightarrow \zeta^{u^1} = c(\xi,\eta)u^1 + \zeta^1(\xi,\eta),$$

где D, C_1, C_2 — постоянные, и еще одно равенство, которое можно расщепить по переменным u^1 и u^4:

$$c_{\xi} = c_{\eta} \Rightarrow c = c(\xi+\eta),$$

$$\begin{gathered} c' + (\xi+\eta)(-\zeta^{u^3}_{u^3} - \zeta^{u^2}_{\xi u^3} + \zeta^{u^2}_{u^2} + u^3\zeta^{u^2}_{u^2u^3} - D) + \\ +\zeta^{u^3}_{u^2} + \zeta^{u^2}_{\xi u^2} - u^3\zeta^{u^2}_{u^2u^2} = 0, \end{gathered} \tag{3.55}$$

$$\zeta^1_{\xi} - \zeta^1_{\eta} = R\big[\zeta^{u^3}_{\xi} + \zeta^{u^2}_{\xi\xi} - u^3\zeta^{u^3}_{u^2} + (u^3)^2\zeta^{u^2}_{u^2u^2} - 2u^3\zeta^{u^2}_{\xi u^2}\big]. \tag{3.56}$$

Из (3.52)–(3.54) определяются зависимости

$$\begin{aligned} &\zeta^{u^2} = (c+D)u^2 + \widetilde{\zeta}^{u^2}(\xi,\eta,I,q), \quad I = u^3 + (\xi+\eta)u^2, \\ &\zeta^{u^3} = -u^2(C_1 + C_2 + (\xi+\eta)(2D+c)) + \widetilde{\zeta}^{u^3}(\xi,\eta,I,q), \\ &\zeta^{u^4} = cu^4 + u^2[C_1 + C_2 + 2D(\xi+\eta) - (1+(\xi+\eta)^2)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I] + \\ &+Ic - \widetilde{\zeta}^{u^3} - \zeta^{u^2}_{\xi} + (\xi+\eta)I\widetilde{\zeta}^{u^2}_I, \end{aligned} \tag{3.57}$$

где новые искомые функции не зависят от u^2. Следовательно, после подстановки представления (3.57) в условия инвариантности их можно расщеплять по переменной u^2.

Из остатков четвертого условия инвариантности после расщепления по u^2_{η}, u^3_{η} и затем по u^2 и по u^4 следует

$$\widetilde{\zeta}^{u^2}_{II} = 0, c' = 0 \Rightarrow c = C = \text{const},$$

$$R^2\big[(\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + C - \widetilde{\zeta}^{u^3}_I - \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\xi I}\big] - C + \widetilde{\zeta}^{u^3}_I + (\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I = 0, \tag{3.58}$$

$$C_1 + C_2 + 2D(\xi+\eta) = 0 \Rightarrow D = 0, C_1 + C_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} &- R^2\big[(1+(\xi+\eta)^2)\widetilde{\zeta}^{u^2}_{\eta I} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\xi I}\big] + \\ &+ (1-R^2)(\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + (1-R^2)\widetilde{\zeta}^{u^3}_I = C(1-R^2), \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} &R^2\big[-(\widetilde{\zeta}^{u^3} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\xi})_{\eta} + I\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + I\widetilde{\zeta}^{u^2}_{\eta I}(\xi+\eta)\big] + (q - (\xi+\eta)I)C - R\widetilde{\zeta}^{u^1}_{\eta} = \\ &= \zeta^q - (\xi+\eta)(\widetilde{\zeta}^{u^3} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\eta}) - \widetilde{\zeta}^{u^3}_{\eta}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Из равенств (3.55), (3.59) после подстановки функций (3.57) следуют равенства

$$\widetilde{\zeta}_I^{u^2} = 0, \quad \widetilde{\zeta}_I^{u^3} = C.$$

Уравнения (3.58) выполняются тождественно. Уравнения (3.53), (3.56) и (3.60) принимают вид

$$\begin{aligned} &\zeta^1_\xi - \zeta^1_\eta = -R\zeta^4_\xi, \quad \zeta^4 = -\zeta^3 - \zeta^2_\xi, \\ &R^2\zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^3 + \zeta^2_\eta) + \zeta^3_\eta = \zeta^q - Cq, \\ &\zeta^3_\xi = (\xi+\eta)\zeta^4. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Дифференцируем (3.61) по q в силу (3.50)

$$\zeta^4_{\xi q} = 0, \quad \zeta^3_{\xi q} = (\xi+\eta)\zeta^4_q, \quad \zeta^2_{\xi q} = -\zeta^3_q - \zeta^4_q,$$
$$R^2\zeta^4_{\eta q} + (\xi+\eta)(\zeta^3_q + \zeta^2_{\eta q}) + \zeta^3_{\eta q} = \zeta^q_q - C.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\zeta^4 = a(\eta, q) + \sigma^4(\xi,\eta), \quad \zeta^1 = \zeta^1(\xi,\eta), \quad \zeta^3 = (\tfrac{1}{2}\xi^2 + \eta\xi)a + \sigma^3(\xi,\eta),$$
$$\zeta^2 = -a(\xi + \tfrac{1}{2}\eta\xi^2 + \tfrac{1}{6}\xi^3) + \sigma^2(\xi,\eta),$$
$$R^2 a_{q\eta} + (\xi+\eta)a_q\eta\xi + a_q\xi = \zeta^q_q - C.$$

Последнее уравнение расщепляем по ξ, получим $a_q = 0$, $\zeta^q = Cq + h(\eta)$.

Таким образом, можно считать

$$\begin{aligned} &\zeta^{u^i} = Cu^i + \zeta^i(\xi,\eta), \quad \zeta^\xi = C_1, \quad \zeta^\eta = -C_1, \\ &\zeta^1_\xi = \zeta^1_\eta - R\zeta^4_\xi, \\ &\zeta^2_\xi = -\zeta^3 - \zeta^4, \\ &\zeta^3_\xi = (\xi+\eta)\zeta^4, \\ &R^2\zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^3 + \zeta^2_\eta) + \zeta^3_\eta = h(\eta). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Алгебра Ли преобразований эквивалентности системы* (3.47) *бесконечномерна и задается базисом*

$$X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta, \quad X_2 = u^i\partial_{u^i} + q\partial_q,$$
$$X_{h(\eta)} = h(\eta)\partial_q + \zeta^i\langle h(\eta)\rangle\partial_{u^i},$$
$$X_\infty = \zeta^i_0(\xi,\eta)\partial_{u^i},$$

где $\zeta^i\langle h(\eta)\rangle$ *— частное решение неоднородной системы* (3.62), $\zeta^i_0(\xi,\eta)$ *— общее решение однородной системы* (3.62) *при* $h = 0$.

Замечание 3.1. *Ядро допускаемых алгебр системы* (3.47) *для произвольной функции* $q(\eta) \neq 0$ *порождается операторами* X_1, X_∞, $X_q = \zeta^i \langle q(\eta) \rangle \partial_{u^i}$. *При* $q = 0$ *добавляется растяжение* $X_2 = u^i \partial_{u^i}$. *Любое точное решение неоднородной системы порождает преобразование эквивалентности, приводящее систему к однородной.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований квазилинейных дифференциальных уравнений гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии, впервые реализовано следующее:

1. Построена оптимальная система неподобных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, допускаемой квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных. По оптимальной системе построены три подграфа вложенных подалгебр. Для цепочки вложенных подалгебр одного из подграфов показано вложение подмоделей, состоящих из дифференциальных уравнений с различным числом независимых переменных.
2. Доказано, что существует канонический вид для 13 инвариантных подмоделей с тремя независимыми переменными (ранга 3) и для 39 инвариантных подмоделей с двумя независимыми переменными (ранга 2) эволюционного и стационарного типов. Доказана редукция двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям 11-мерной и 12-мерной алгебр Ли. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр 12-мерной алгебры Ли и построены все инвариантные подмодели ранга 1 — системы из обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены некоторые точные решения динамических систем дифференциальных уравнений.
3. Для инвариантной подмодели ранга 2 квазилинейной системы гидродинамического типа в результате применения качественной теории дифференциальных уравнений найдены интегралы, симметрический гиперболический вид и преобразования эквивалентности системы. В случае системы не типа Коши для специального уравнения состояния выяснено условие задания начальных данных. Для плотности, зависящей от одной лагранжевой переменной, получено два типа решений переопределенной инвариантной подмодели ранга 2. Одни решения описывают изобарическое движение вдоль траекторий с постоянной плотностью и исчезающей дозвуковой областью. Другие решения описывают движение частиц под действием поршня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, В. К. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. — Новосибирск: Наука, 1994. — 319 с.
2. Андреев, В. К. Симметрии неклассических моделей гидродинамики / В. К. Андреев, В. В. Бублик, В. О. Бытев. — Новосибирск: Наука, 2003. — 352 с.
3. Аннин, Б. Д. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. — Новрсибирск: Наука, 1985. — 143 с.
4. Бытев, В. О. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса / В.О. Бытев // Численнные методы механики сплошной среды. — 1972. — Т. 3, № 3. — С. 13–17.
5. Гарифуллин, А. Р. Подмодели сжимаемой жидкости на двумерных подалгебрах / А. Р. Гарифуллин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2003. — Т. 6, № 1(13). — С. 16–26.
6. Гарифуллин, А. Р. Групповая классификация гидродинамической системы ранга два стационарного типа / А. Р. Гарифуллин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2004. Т. 7, № 3(19). — С. 66–75.
7. Гарифуллин, А. Р. Пример сферически симметричного движения сжимаемой жидкости / А. Р. Гарифуллин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2007. — Т. 10, № 2(30). — С. 45–52.
8. Годунов, С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
9. Головин, С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа / С. В. Головин // Препринт ИГиЛ № 5–96. — Новосибирск, 1996. — 31 с.
10. Головин, С. В. Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2002. — Т.43, №4. — С. 3–14.
11. Головин, С. В. Нестационарное движение газа в полосе / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2004. — Т. 45, № 2. — С. 90–98.

12. Головин, С. В. Плоский вихрь Овсянникова: уравнения подмодели / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 5. — С. 27–40.
13. Головин, С. В. Плоский вихрь Овсянникова: свойства описываемого движения и точные решения / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 55–68.
14. Головин, С. В. Регулярные частично инвариантные решения дефекта 1 уравнений идеальной магнитогидродинамики / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 2. — С. 5–15.
15. Головин, С. В. Нестационарные течения с постоянным полным давлением, описываемые уравнениями идеальной магнитогидродинамики / С. В. Головин // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — Т. 55, № 2. — С. 53–67.
16. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
17. Ибрагимов, Н. Х. Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
18. Ибрагимов, Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Знание, 1991. — 48 с.
19. Ли, С. Теория групп преобразований: В 3-х частях: Часть 1 / Софус Ли. — М. — Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 712 с.
20. Ли, С. Теория групп преобразований: В 3-х частях: Часть 2 / Софус Ли. — М. — Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. — 640 с.
21. Ли, С. Теория групп преобразований: В 3-х частях: Часть 3 / Софус Ли. — М. — Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. — 960 с.
22. Луговцов, Б. А. Развитие механики жидкостей и газов в ИГиЛ СО РАН в 1986–1996 годы / Б. А. Луговцов, Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. — 1997. — Т. 38, вып. 4. — С. 3–27.
23. Макаревич, Е. В. Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной

плотностью / Е. В. Макаревич // Сибирские электронные математические известия. — 2011. — Т. 8. — С. 19–38.

24. Макаревич, Е. В. Иерархия подмоделей уравнений газовой динамики с уравнением состояния с разделенной плотностью / Е. В. Макаревич // Сибирские электронные математические известия. — 2012. — Т. 9. — С. 306–328.
25. Макаревич, Е. В. Коллапс или мгновенный источник газа на прямой / Е. В. Макаревич // Уфимский математический журнал. — 2012. — Т. 4, вып. 4. — С. 119–129.
26. Макаревич, Е. В. Инвариантные и частично инвариантные решения относительно двух галилеевых переносов и растяжения / Е. В. Макаревич // Уфимский математический журнал. — 2013. — Т. 5, вып. 3. — С. 121–129.
27. Мамонтов, Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики / Е. В. Мамонтов // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, вып. 2. — С. 50–55.
28. Мамонтов, Е. В. Групповые свойства 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики / Е. В. Мамонтов // Прикладная механика и техническая физика. — 2001. — Т.42, №1. — С.33–39.
29. Мамонтов, Е. В. Групповые свойства 2-подмоделей класса S уравнений газовой динамики / Е. В. Мамонтов // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2007. — Т. 7, вып. 1. — С. 72–84.
30. Мукминов, Т. Ф. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды / Т. Ф. Мукминов, С. В. Хабиров // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 121–143.
31. Никонорова, Р. Ф. Подмодели одноатомного газа наименьшего ранга, построенные на основе трехмерных подалгебр симметрии / Р. Ф. Никонорова // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1216–1226.
32. Овсянников, Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — Новосибирск: НГУ, 1966. — 131 с.
33. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

34. Овсянников, Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ / Л. В. Овсянников. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН. — 1992. — 11 с.
35. Овсянников, Л. В. Об оптимальных системах подалгебр / Л. В. Овсянников // Доклады Академии Наук. — 1993. — Т. 333, № 6. — С. 702–704.
36. Овсянников, Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика / Л. В. Овсянников // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 30–55.
37. Овсянников, Л. В. Изобарические движения газа / Л. В. Овсянников // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 10. — С. 1792–1799.
38. Овсянников, Л. В. Особый вихрь / Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. — 1995. — Т. 36, № 3. — С. 45–52.
39. Овсянников, Л. В. Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения / Л. В. Овсянников // Доклады Академии Наук. — 1995. — Т. 343, № 2. — С. 156–159.
40. Овсянников, Л. В. Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики / Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. — 1996. — Т.37, №2. — С. 3–13.
41. Овсянников, Л. В. Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики / Л. В. Овсянников, А. П. Чупахин // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 6. — С. 990–999.
42. Овсянников, Л. В. Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики / Л. В. Овсянников // Препринт ИГиЛ № 3–97. — Новосибирск, 1997. — 41 с.
43. Овсянников, Л. В. О «простых» решениях уравнений динамики политропного газа / Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, вып. 2. — С. 5–12.
44. Овсянников, Л. В. Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики / Л. В. Овсянников // Прикладная математика и механика. — 1999. Т. 63, вып. 3. — С. 362–372.
45. Овсянников, Л. В. О периодических движениях газа / Л. В. Овсянников // Прикладная математика и механика. — 2001. — Т. 65, № 4. — С. 567–577.
46. Овсянников, Л. В. Лекции по основам газовой динамики / Л. В. Овсянников. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

47. Паршин, Д. В. Завихренные установившиеся течения самогравитирующего газа / Д. В. Паршин, А. А. Черевко, А. П. Чупахин // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — Т. 55, №2. — С. 159–167.
48. Пухначев, В. В. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае / В. В. Пухначев // Прикладная механика и техническая физика. — 1960. — № 1. — С. 83–90.
49. Пухначев В. В. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей // Доклады Академии Наук СССР. — 1972. — Т. 202, № 2. — С. 302–305.
50. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. — М.: Наука, 1977. — 440 с.
51. Сираева, Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов / Д. Т. Сираева // Тезисы докладов международной конференции MOGRAN 16 Современный групповой анализ (г. Уфа, 28 октября – 2 ноября, 2013 г.). — Уфа: РИК «УГАТУ», 2013. — С. 21.
52. Сираева, Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов / Д. Т. Сираева // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, вып 1. — С. 94–107.
53. Сираева, Д. Т. Some submodels of gas dynamics equations with pressure, separated into the sum / Д. Т. Сираева // Тезисы Международной научной школы-конференции MOGRAN18 (г. Шэньян, 27 июля – 5 августа, 2015 г.), Shenyang, Liaoning, China, 2015. — С. 18.
54. Сираева, Д. Т. Подмодели ранга три в каноническом виде для уравнений газовой динамики / Д. Т. Сираева // Тезисы докладов VIII Международной научной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», г. Новосибирск, ИГиЛ СО РАН, 7-11 сентября 2015 г. — НГУ, 2015. — С. 58–59.
55. Сираева, Д. Т. Движение объема частиц, соответствующее инвариантному решению подмодели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. — 2016. — Т. 11, вып 2. — С. 205–209.
56. Сираева, Д. Т. Распространение возмущений звуковой волны на инвариантном решении модели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: IX Международная школа-конференция для студентов, аспи-

рантов и молодых ученых (г. Уфа, 3–7 октября 2016 г.): сборник трудов. Математика. Физика. Химия. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. — С. 35—42.

57. Сираева, Д. Т. Постановка задачи с начальными данными для инвариантной подмодели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, 17–19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак. Ч. III. — Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. — С. 118–122.
58. Сираева, Д. Т. Галилеево-инвариантные движения частиц для двумерной подалгебры из переносов / Д. Т. Сираева // Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова и Всероссийской молодежной школы-конференции (Абрау-Дюрсо, 5-10 сентября 2016 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2016. — С. 94–95.
59. Сираева, Д. Т. Решение галилеево-инвариантной подмодели ранга два / Д. Т. Сираева // Уфимская международная математическая конференция: сборник тезисов (г. Уфа, 27 – 30 сентября 2016 г.). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. — С. 151-152.
60. Сираева, Д. Т. Преобразования эквивалентности для подмодели ранга два в случае системы не типа Коши / Д. Т. Сираева // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов IX Международной школы - конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. — С. 365.
61. Сираева, Д. Т. О стационарных инвариантных подмоделях ранга два / Д. Т. Сираева // Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева: сборник тезисов (г. Уфа, 24 – 27 мая 2017 г.). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. — С. 148–149.
62. Сираева, Д. Т. Об инвариантной подмодели ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»: сборник тезисов (г. Уфа, 12 – 16 марта 2018 г.). — Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. — С. 76–77.
63. Сираева, Д. Т. Инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа /

Д. Т. Сираева, С. В. Хабиров // Челябинский физико-математический журнал. — 2018. — Т. 3, вып. 1. — С. 38–57.

64. Сираева, Д. Т. Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям / Д. Т. Сираева // Многофазные системы. — 2018. — Т. 13, № 3. — С. 59–63.
65. Сираева, Д. Т. Подмодели гидродинамического типа с двумя независимыми переменными / Д. Т. Сираева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы VIII Межд. молодежн. науч.-практ. конф., 4 - 7 октября 2018 г., г. Уфа. Часть III. — Уфа: БашГУ, 2018. — С. 149–153.
66. Сираева, Д. Т. Построение инвариантных подмоделей ранга 2 уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния специального вида / Д. Т. Сираева // Волны и вихри в сложных средах: 9-ая международная конференция-школа молодых ученых; 5 - 7 декабря 2018 г. Москва: Сборник материалов школы. — М.: ООО «Премиум-принт», 2018. — С. 141–143.
67. Сираева, Д. Т. О классификации инвариантных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 70–71.
68. Сираева, Д. Т. Классификация инвариантных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ, 2019. — С. 140–141.
69. Сираева, Д. Т. О каноническом виде инвариантных подмоделей ранга 2 уравнений гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л. В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», 13–17 мая 2019 г. Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2019. — С. 183–184.
70. Сираева, Д. Т. Классификация стационарных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Челябинский физико-математический журнал. — 2019. — Т. 4, вып. 1. — С. 18–32.

71. Сираева, Д. Т. Канонический вид инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, вып. 2. — С. 70–80.
72. Тарасова, Ю. В. Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике / Ю. В. Тарасова // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т. 12, № 4 (40). — С. 128–136.
73. Хабиров, С.В. К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики / С. В. Хабиров // Доклады Академии Наук. — 1995. — Т. 341, № 6. — С. 764–766.
74. Хабиров, С. В. Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики / С. В. Хабиров // Препринт Института механики УНЦ РАН. — Уфа, 1998. — 33 с.
75. Хабиров, С. В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду / С. В. Хабиров // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, вып. 3. — С. 439–444.
76. Хабиров С. В. Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики / С. В. Хабиров // Сибирский математический журнал. — Т.43, № 5. — 2002. — С. 1168–1181.
77. Хабиров, С. В. Галилеево-инвариантная осесимметричная автомодельная подмодель газовой динамики без закрутки / С. В. Хабиров // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 2. — С. 46–52.
78. Хабиров, С. В. Плоские движения газа без расхождения с линейным полем скоростей / С. В. Хабиров // Уфимский математический журнал. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 111–117.
79. Хабиров, С. В. Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газодинамического типа / С. В. Хабиров // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 87–90.
80. Хабиров, С. В. Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений / С. В. Хабиров // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54, вып. 6. — С. 1396–1406.
81. Хабиров, С. В. Лекции аналитические методы в газовой динамике / С. В. Хабиров. — Уфа: БГУ, 2013. — 224 с.

82. Хабиров, С. В. Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа / С. В. Хабиров // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, вып. 2. — С. 99–103.
83. Хабиров, С. В. Простые решения инвариантной подмодели ранга 2 одноатомного газа / С. В. Хабиров, Р.Ф. Шаяхметова // Челябинский физико-математический журнал. — 2018. — Т. 3, вып. 3. — С. 353–373.
84. Хабиров, С. В. Инвариантные плоские установившиеся изоэнтропические вихревые течения газа / С. В. Хабиров // Прикладная математика и механика. — 2018. — Т. 82, вып. 3. — С. 317–331.
85. Хабиров, С. В. Простые частично инвариантные решения / С. В. Хабиров // Уфимский математический журнал. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 87–98.
86. Черевко, А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$ / А. А. Черевко // Препринт ИГиЛ №4–96. — Новосибирск, 1996. — 39 с.
87. Черевко, А. А. Теоретико-групповые решения уравнений газовой динамики, порожденные трехмерными подалгебрами / А. А. Черевко // Сибирские электронные математические известия. — 2007. — Т. 4. — С. 553–595.
88. Чиркунов, Ю. А. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. — 659 с.
89. Чупахин, А. П. О барохронных движениях газа / А. П. Чупахин // Докл. РАН. — 1997. — Т. 352, № 5. — С. 624–626.
90. Чупахин, А. П. Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1) / А. П. Чупахин // Препринт СО РАН, Ин-т гидродинамики; № 4–98. — Новосибирск, 1998.
91. Чупахин, А. П. О плоских газовых вихрях и закрученных струях газа / А. П. Чупахин // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 3. — С. 71–81.
92. Шаяхметова, Р. Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа / Р. Ф. Шаяхметова // Сибирские электронные математические известия. — 2014. — Т. 11. — С. 605–625.

93. Шаяхметова, Р. Ф. Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором / Р. Ф. Шаяхметова // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова. — 2016. — Т. 11, №1. — С. 127–135.
94. Шаяхметова, Р. Ф. Вихревой разлет одноатомного газа вдоль плоских кривых / Р. Ф. Шаяхметова // Прикладная механика и техническая физика. — 2018. — Т. 59, №2. — С. 63–73.
95. Юлмухаметова, Ю. В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае / Ю. В. Юлмухаметова // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2011. — Т. 14, № 2 (46). — С. 139–150.
96. Юлмухаметова, Ю. В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей / Ю. В. Юлмухаметова // Сибирские электронные математические известия. — 2012. — Т. 9. — С. 208–226.
97. Юлмухаметова, Ю. В. Выпрямляющиеся разлеты газа из вихря с линейным полем скоростей / Ю. В. Юлмухаметова // Уфимский математический журнал. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 162–178.
98. Юлмухаметова, Ю. В. Решение с линейным полем скоростей для подмодели одномерных движений газа / Ю. В. Юлмухаметова // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 3–10.
99. Ibragimov, N. Kh. Ed. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume I: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws / Nail H. Ibragimov Ed. — CRC Press, Boca Raton, 1994. — 429 p.
100. Ibragimov, N. Kh. Ed. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume II: Applications in Engineering and Physical Sciences / Nail H. Ibragimov Ed. — CRC Press, Boca Raton, 1995. — 576 p.
101. Ibragimov, N. Kh. Ed. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume III: New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods / Nail H. Ibragimov Ed. — CRC Press, Boca Raton, 1995. — 560 p.
102. Bluman, George W. Symmetries and differential equations / George W. Bluman, Sukeyuki Kumei. — Springer, 1989. — 412 p.
103. Bluman, George W. Symmetry and integration methods for differential equations / George W. Bluman, Stephen C. Anco. — Springer-Verlag New York, 2002. — 420 p.

104. Khabirov, S. V. Vortex steady planar entropic flows of ideal gases / S. V. Khabirov // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 236, №6. — pp. 679–686.

105. Klebanov, I. Group analysis of dynamics equations of self-gravitating polytropic gas / I. Klebanov, A. Panov, S. Ivanov, O. Maslova // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — V. 59. — pp. 437–443.

106. Olver, Peter J. Applications of Lie groups to differential equations / Peter J. Olver. — Springer-Verlag New York, 1993. — 513 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА НЕПОДОБНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ L_{12}

Таблица А.1 – Оптимальная система неподобных подалгебр для алгебры Ли L_{12}

r	i	Базис подалгебры	i (L_{11})	
			r–1, i	r, i
2	1	$b4+c7+11, Y_1+a4+7$	1.1	2.1
	2	$a4+7, Y_1+b4+11$	$1.2, 1.3$	2.1
	3	$10, Y_1+7+a11$	1.10	2.2, 2.5
	4	$4+10, Y_1+a1+7$	1.9	2.3
	5	$7+c(4+10), Y_1+a1+4+10$	1.5	2.3
	6	$1+7, Y_1+10$	1.4	2.4
	7	$10, Y_1+1+7$	1.10	2.4
	8	$7+\varepsilon 10, Y_1+10; \varepsilon=0\vee 1$	$1.3, 1.6$	2.5
	9	$10, Y_1+7$	1.10	2.5
	10	$10, Y_1+11$	1.10	2.6
	11	$b4+7+a11, Y_1+4; a\neq 0$	1.1	2.7
	12	$4, Y_1+7+a11$	1.12	2.7, 2.10
	13	$1, Y_1+b4+7+a11; a\neq 0$	1.13	2.8
	14	$\varepsilon 1+7, Y_1+4$	1.3, 1.4	2.9, 2.10
	15	$4, Y_1+\varepsilon 1+7$	1.12	2.9, 2.10
	16	$\varepsilon 1+7, Y_1+1$	$1.3, 1.4$	2.11
	17	$a4+7, Y_1+1, a\neq 0$	1.2	2.11
	18	$a4+7+10, Y_1+1$	1.5	2.12
	19	$1, Y_1+a4+7+\varepsilon 10$	1.13	2.11, 2.12
	20	$a4+11, Y_1+5$	1.7	2.13, 2.14
	21	$4, Y_1+a5+11$	1.12	2.14

	22	$1, Y_1 + a4 + b5 + 11$	1.13	2.15
	23	$10, Y_1 + 1$	1.10	2.17
	24	$1, Y_1 + 10$	1.13	2.17
	25	$4 + 10, Y_1 + a1 + 3$	1.9	2.18
	26	$3, Y_1 + 4 + a6 + 10$	1.13	2.18
	27	$4 + 10, Y_1 + 1$	1.9	2.19
	28	$1, Y_1 + 4 + 10$	1.13	2.19
	29	$a1+c3+5, Y_1+b1+d2+6; a^2+b^2+(c+d)^2 = 1$	1.11	2.20
	30	$3 + 5, Y_1 + 2 - 6$	1.11	2.21
	31	$5, Y_1 + 6$	1.12	2.22
	32	$3 + 4, Y_1 + 2$	1.11	2.23
	33	$a1 + 2, Y_1 + 3 + 4$	1.13	2.23
	34	$b2 + 4, Y_1 + a1 + 2$	1.11, 1.12	2.24
	35	$a1 + 2, Y_1 + 4$	1.13	2.24
	36	$3 + 4, Y_1 + 1$	1.11	2.25
	37	$1, Y_1 + 3 + 4$	1.13	2.25
	38	$4, Y_1 + 1$	1.12	2.26
	39	$1, Y_1 + 4$	1.13	2.26
	40	$a2 + 3, Y_1 + 2$	1.13	2.27
3	1	$a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	2.1	3.3
	2	$10, 7 + a11, Y_1 + 11$	2.2, 2.5	3.2
	3	$a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	2.3	3.6
	4	$1 + 7, 10, Y_1 + 1$	2.4	3.5
	5	$7, 10, Y_1 + 1$	2.5	3.5
	6	$10, 11, Y_1 + 7$	2.6	3.2
	7	$4, 7 + a11, Y_1 + 11$	2.7, 2.10	3.3
	8	$1, b4+7+a11, Y_1+c4+d11, a \neq 0, c^2+d^2 = 1$	2.8	3.4, 3.12
	9	$4, \varepsilon 1 + 7, Y_1 + 1$	2.9, 2.10	3.13
	10	$1, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	2.11	3.4

	11	$1, a4+7, Y_1+b4+c10, b^2+c^2=1$	2.11	3.5, 3.6, 3.13
	12	$1, a4+7+10, Y_1+b4+c10, b^2+c^2=1$	2.12	3.5, 3.6, 3.18
	13	$4, 11, Y_1+5$	2.13	3.21
	14	$4, 11, Y_1+7$	2.13	3.3
	15	$4, a5+11, Y_1+b5+c6, a\neq 0, b^2+c^2=1$	2.14	3.21
	16	$1, a4+b5+11, Y_1+c4+d5+e6, c^2+d^2+e^2=1$	2.15, 2.16	3.22, 3.23, 3.24
	17	$1, a4+11, Y_1+c4+7$	2.15, 2.16	3.4
	18	$1, 10, Y_1+a2+b4, a^2+b^2=1$	2.17	3.28, 3.29, 3.33
	19	$1, 10, Y_1+a4+7$	2.17	3.5
	20	$3, 4+a6+10, Y_1+b1+c2+d6, b^2+c^2+d^2=1$	2.18	3.27, 3.30, 3.31, 3.32
	21	$1, 4+10, Y_1+a2+b4, a^2+b^2=1$	2.19	3.28, 3.29, 3.31
	22	$1, 4+10, Y_1+b4+7$	2.19	3.6
	23	$a1+c3+5, b1+d2+6, Y_1+e1+f3+\varepsilon 4, a^2+b^2+(c+d)^2=1, (e^2+f^2=1, \varepsilon=0)$	2.20	3.34
	24	$3+5, 2-6, Y_1+a4+7, a\neq 0$	2.21	3.9
	25	$3+5, 2-6, Y_1+\varepsilon 1+7$	2.21	3.9
	26	$3+5, 2-6, Y_1+a1+b2, a^2+b^2=1$	2.21	3.37, 3.40
	27	$3+5, 2-6, Y_1+a2+4$	2.21	3.34, 3.35
	28	$5, 6, Y_1+a4+11$	2.22	3.21

29	$5, 6, Y_1 + a2 + 4$	2.22	3.35, 3.36
30	$a1 + 2, 3 + 4, Y_1 + b1 + c3 + d5 + e6, b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$	2.23	3.37, 3.44
31	$a1 + 2, 4, Y_1 + b5 + c6 + 11$	2.24	3.22
32	$a1 + 2, 4, Y_1 + d1 + e3 + f5 + h6, d^2 + e^2 + f^2 + h^2 = 1$	2.24	3.37, 3.38, 3.39, 3.41, 3.42, 3.45
33	$1, 3 + 4, Y_1 + a5 + b6 + 10$	2.25	3.27, 3.28
34	$1, 3 + 4, Y_1 + a2 + b5 + 6$	2.25	3.37
35	$1, 3 + 4, Y_1 + a3 + 5$	2.25	3.37
36	$1, 3 + 4, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	2.25	3.44
37	$1, 4, Y_1 + 7 + a10 + b11, a \cdot b = 0$	2.26	3.12, 3.13, 3.18
38	$1, 4, Y_1 + a5 + 11$	2.26	3.23, 3.24
39	$1, 4, Y_1 + a5 + 10$	2.26	3.27, 3.29
40	$1, 4, Y_1 + a3 + 5$	2.26	3.37
41	$1, 4, Y_1 + 2$	2.26	3.45
42	$2, 3, Y_1 + a4 + 7 + b11$	2.27	3.14, 3.15, 3.17
43	$2, 3, Y_1 + a4 + b5 + 11$	2.27	3.25, 3.26
44	$2, 3, Y_1 + a4 + b5 + 10$	2.27	3.30, 3.31, 3.32, 3.33
45	$2, 3, Y_1 + 4 + b5$	2.27	3.42, 3.43

	46	$2, 3, Y_1 + 5$	2.27	3.45
	47	$2, 3, Y_1 + 1 + b5$	2.27	3.44, 3.46
	48	$2, 3, Y_1 + a4 + 7 + b10, b \neq 0$	2.27	3.19, 3.20
4	1	$7, 8, 9, Y_1 + 11$	3.1	4.1
	2	$7, 8, 9, Y_1 + 10$	3.1	4.2
	3	$1, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	3.4	4.5
	4	$1, 10, b4+7+a11, Y_1+c4+d11, c^2+d^2 = 1$	3.5	4.3, 4.7
	5	$1, 4 + 10, a4 + 7, Y_1 + 4$	3.6	4.7
	6	$1, 10, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	3.7	4.3, 4.12
	7	$5, 6, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, a \neq 0, c^2 + d^2 = 1$	3.8	4.4, 4.15
	8	$3+5, 2-6, a1+b4+7, Y_1+c1+d4, c^2+d^2 = 1$	3.9	4.17, 4.20
	9	$5, 6, \varepsilon 1 + a4 + 7, Y_1 + b1 + c4, b^2 + c^2 = 1$	3.10, 3.11	4.16, 4.18, 4.19
	10	$5, 6, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	3.11	4.4
	11	$1, 4, 7 + a11, Y_1 + 11$	3.12, 3.13	4.5
	12	$1, 4, 7, Y_1 + 10$	3.13	4.7
	13	$2, 3, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	3.14	4.6, 4.21
	14	$2, 3, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11, a \neq 0$	3.15	4.6
	15	$2, 3, a4 + 7, Y_1 + b1 + c4, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	3.15	4.21, 4.22, 4.24
	16	$2, 3, 1 + 7, Y_1 + a4 + 10$	3.16	4.10, 4.11
	17	$2, 3, 1 + 7, Y_1 + a1 + b4, a^2 + b^2 = 1$	3.16	4.22, 4.24
	18	$2, 3, 7, Y_1 + a4 + 11$	3.17	4.6
	19	$2, 3, 7, Y_1 + a4 + 10$	3.17	4.9, 4.11

20	$2, 3, 7, Y_1 + a1 + b4, a^2 + b^2 = 1$	3.17	4.21, 4.24
21	$1, 4, 7 + 10, Y_1 + 10$	3.18	4.7
22	$2, 3, a4+7+a10, Y_1+b1+c(4+10), b^2+c^2 = 1, a \neq 0$	3.19	4.11, 4.25
23	$2, 3, 7 + 10, Y_1 + a1 + b10, a^2 + b^2 = 1$	3.20	4.9, 4.10, 4.25
24	$5, 6, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	3.21	4.4, 4.26
25	$1, a4+5, b4+c6+11, Y_1+d4+e6, d^2+e^2 = 1$	3.22	4.27, 4.28, 4.29
26	$1, 4, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	3.23	4.29
27	$1, 4, 11, Y_1 + 7$	3.24	4.5
28	$1, 4, 11, Y_1 + 5$	3.24	4.29
29	$2, 3, a4 + b5 + 11, Y_1 + c4 + d5 + e6, c^2 + d^2 + e^2 = 1, b \neq 0$	3.25	4.30, 4.31
30	$2, 3, a4 + 11, Y_1 + b4 + 7$	3.26	4.6
31	$2, 3, a4 + 11, Y_1 + b4 + c5, b^2 + c^2 = 1$	3.26	4.30, 4.32
32	$3, a1+b2+6, 4+10, Y_1+c1+d2, c^2+d^2 = 1$	3.27	4.35, 4.36
33	$1, 2 + 4, 10, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	3.28	4.37, 4.38
34	$1, 4, 10, Y_1 + a7 + 11$	3.29	4.7, 4.12
35	$1, 4, 10, Y_1 + 7$	3.29	4.7
36	$2, 3, 4 + a5 + 10, Y_1 + b1 + c5 + d6, b^2 + c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	3.30	4.35, 4.39
37	$2, 3, 5+10, Y_1+a1+b5+c6, a^2+b^2+c^2 = 1$	3.31	4.36, 4.37, 4.38, 4.39

38	$2, 3, \varepsilon 4 + 10, Y_1 + a1 + 7$	3.32, 3.33	4.9, 4.10, 4.11
39	$2, 3, 4 + 10, Y_1 + a1 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.32	4.35, 4.39
40	$2, 3, 10, Y_1 + a1 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.33	4.37, 4.38, 4.40
41	$-a2 + b3 + 4, a1 + d2 - c3 + 5, -b1 + c2 + e3 + 6, Y_1 + f1 + g2 + h3, f^2 + g^2 + h^2 = 1, a^2(e - d)^2 + b^2e^2 + c^2d^2 = 1$	3.34	4.41
42	$a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + \varepsilon 1 + 7, a^2 + b^2 = 1$	3.34, 3.35	4.17, 4.18
43	$a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + c1 + d2, a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$	3.35	4.41, 4.42
44	$4, 5, 6, Y_1 + a7 + 11$	3.36	4.15, 4.26
45	$4, 5, 6, Y_1 + \varepsilon 1 + 7$	3.36	4.16, 4.18
46	$4, 5, 6, Y_1 + 1$	3.36	4.43
47	$a1 + 3, b1 + 5, c1 + d2 + 6, Y_1 + e1 + f2 + 4, e^2 + f^2 = \varepsilon, b^2 + c^2 + d^2 = 1$	3.37	4.41
48	$a1 + 3, b1 + 5, c1 + d2 + 6, Y_1 + e1 + f2, e^2 + f^2 = 1, b^2 + c^2 + d^2 = 1$	3.37	4.44, 4.47
49	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b4 + 11$	3.38	4.27, 4.28, 4.29
50	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b1 + c2 + 4, b^2 + c^2 = \varepsilon$	3.38	4.41, 4.43
51	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b1 + c2, b^2 + c^2 = 1$	3.38	4.46, 4.47
52	$1, 3 + 5, a2 + 6, Y_1 + b2 + c3 + 4, a \neq -1$	3.39	4.41
53	$1, 3 + 5, a2 + 6, Y_1 + b2 + c3, b^2 + c^2 = 1$	3.39, 3.40	4.44, 4.47
54	$1, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a4 + 7$	3.40	4.20

	55	$1, 3+5, 2-6, Y_1 + b2 + c3 + 4$	3.40	4.41, 4.42
	56	$1, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 11$	3.41	4.19, 4.28
	57	$1, 5, 6, Y_1 + b4 + 7$	3.41	4.19
	58	$1, 5, 6, Y_1 + a2 + b3 + 4, a^2 + b^2 = \varepsilon$	3.41	4.41, 4.43
	59	$1, 5, 6, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	3.41	4.47
	60	$2, 3, 4, Y_1 + 7 + b11, b \neq 0$	3.42	4.21
	61	$2, 3, 4, Y_1 + b1 + 7$	3.42	4.21, 4.22
	62	$2, a1 + 3, 4, Y_1 + \varepsilon 1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	3.42	4.44, 4.47
	63	$2, a1 + 3, 4, Y_1 + 1$	3.42, 3.43	4.48
	64	$2, 3, 4, Y_1 + a7 + 11$	3.43	4.21
	65	$2, 3, 4, Y_1 + \varepsilon 1 + 7$	3.43	4.21, 4.22
	66	$2, 3, 4, Y_1 + \varepsilon 1 + a5 + b6, a^2 + b^2 = 1$	3.43	4.44, 4.47
	67	$1, 2, 3+4, Y_1 + a5 + b6 + 10$	3.44	4.35, 4.36, 4.37
	68	$1, 2, 3+4, Y_1 + a5 + 6$	3.44	4.44, 4.45
	69	$1, 2, 3+4, Y_1 + a3 + 5$	3.44	4.45
	70	$1, 2, 3+4, Y_1 + 3$	3.44	4.48
	71	$1, 2, 4, Y_1 + a5 + b6 + c10 + d11, c^2 + d^2 = 1$	3.45	4.30, 4.35, 4.36, 4.38
	72	$1, 2, 4, Y_1 + b5 + 6$	3.45	4.47
	73	$1, 2, 4, Y_1 + a3 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.45	4.45, 4.46, 4.48

	74	$1, 2, 3, Y_1{+}a4{+}7{+}\varepsilon 10{+}c11, c \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$	3.46	4.23, 4.24, 4.25
	75	$1, 2, 3, Y_1 + a4 + 11$	3.46	4.33, 4.34
	76	$1, 2, 3, Y_1 + \varepsilon 4 + 10$	3.46	4.39, 4.40
	77	$1, 2, 3, Y_1 + 4$	3.46	4.48
5	1	$7, 8, 9, 10, Y_1 + 11$	4.2	5.1
	2	$1, a4 + 7, 10, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.3	5.2
	3	$5, 6, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.4	5.4
	4	$2, 3, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.6	5.6
	5	$1, 4, 10, 7 + a11, Y_1 + 11$	4.7	5.2
	6	$2, 3, 10, 7 + a11, Y_1 + 11$	4.8, 4.9	5.3
	7	$2, 3, \varepsilon 1 + 7, 10, Y_1 + 1$	4.9, 4.10	5.8
	8	$2, 3, a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	4.11	5.9
	9	$1, 4, 10, 11, Y_1 + 7$	4.12	5.2
	10	$2, 3, 10, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	4.13, 4.14	5.10
	11	$2, 3, 10, 11, Y_1 + 7$	4.14	5.3
	12	$4, 5, 6, 7 + a11, Y_1 + 11, a \neq 0$	4.15	5.4
	13	$4, 5, 6, 7, Y_1 + a1 + b11, a^2 + b^2 = 1$	4.16	5.4, 5.18
	14	$a1 + 4, 3 + 5, 2 - 6, b1 + 7, Y_1 + 1$	4.17	5.25
	15	$a1 + 4, 5, 6, b1 + 7, Y_1 + 1, a^2 + b^2 = 1$	4.18	5.18
	16	$1, 5, 6, b4{+}7{+}a11, Y_1{+}c4{+}d11, c^2{+}d^2 = 1$	4.19	5.5, 5.18
	17	$1, 3 + 5, 2 - 6, a4 + 7, Y_1 + 4$	4.20	5.25
	18	$2, 3, 4, 7 + a11, Y_1 + 11, a \neq 0$	4.21	5.6
	19	$2, 3, 4, 7, Y_1 + b1 + c11, b^2 + c^2 = 1$	4.21	5.6, 5.24
	20	$2, 3, 4, 1 + 7, Y_1 + 1$	4.22	5.24
	21	$1, 2, 3, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	4.23	5.7, 5.23

22	$1, 2, 3, a4 + 7, Y_1 + b4 + c11, b^2 + c^2 = 1$	4.24	5.7, 5.24
23	$1, 2, 3, a4 + 7, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	4.24	5.8, 5.9, 5.24
24	$1, 2, 3, a4 + 7 + 10, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	4.25	5.8, 5.9, 5.28
25	$4, 5, 6, 11, Y_1 + 7$	4.26	5.4
26	$1, a4 + 5, 6, b4 + 11, Y_1 + 4, a \neq 0$	4.27	5.29
27	$1, 5, 6, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	4.28	5.5, 5.29
28	$1, 4, 6, a5 + 11, Y_1 + 5$	4.29	5.29
29	$2, 3, a4+6, b4+c5+11, Y_1+d4+e5, d^2+e^2 = 1$	4.30	5.30, 5.31 5.32
30	$2, 3, 4, a5+11, Y_1+b5+c6, b^2+c^2 = 1, a \neq 0$	4.31	5.32
31	$2, 3, 4, 11, Y_1 + 7$	4.32	5.6
32	$2, 3, 4, 11, Y_1 + 5$	4.32	5.32
33	$1, 2, 3, a4 + 11, Y_1 + b4 + 7$	4.33, 4.34	5.7
34	$1, 2, 3, a4+11, Y_1+b4+c5, b^2+c^2 = 1, a \neq 0$	4.33	5.33
35	$1, 2, 3, 11, Y_1 + 4$	4.34	5.34
36	$2, 3, a1+5, 4+b6+10, Y_1+c1+d6, c^2+d^2 = 1$	4.35	5.13, 5.15, 5.17
37	$2, 3, a1 + 5, 6 + 10, Y_1 + b1 + c6, b^2 + c^2 = 1$	4.36	5.14, 5.16, 5.17
38	$2, 3, 1 + 5, 10, Y_1 + a1 + b6, a^2 + b^2 = 1$	4.37	5.12, 5.14, 5.16
39	$2, 3, 5, 10, Y_1 + a6 + 11$	4.38	5.10

40	$2, 3, 5, 10, Y_1 + a1 + b6, a^2 + b^2 = 1$	4.38	5.12, 5.14, 5.16
41	$1, 2, 3, 4 + 10, Y_1 + a4 + 7$	4.39	5.9
42	$1, 2, 3, 4 + 10, Y_1 + a4 + b5, a^2 + b^2 = 1$	4.39	5.17
43	$1, 2, 3, 10, Y_1 + a4 + 7 + b11$	4.40	5.8
44	$1, 2, 3, 10, Y_1 + a4 + b11, a^2 + b^2 = 1$	4.40	5.11, 5.12
45	$1, a2 + b3 + 4, c3 + 5, d2 + 6, Y_1 + 3, a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1$	4.41	5.36
46	$1, 4, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + 7$	4.42	5.25
47	$1, 4, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	4.42	5.36
48	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 7 + a11$	4.43	5.18
49	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 11$	4.43	5.29
50	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 2$	4.43	5.35
51	$2, 1 + a3, 3 + 5, 6, Y_1 + b3 + c4, b^2 + c^2 = 1$	4.44	5.36, 5.37
52	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + a4 + 10$	4.45	5.13, 5.14
53	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + 4$	4.45	5.36
54	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + 1$	4.45	5.37
55	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 11$	4.46	5.19[1], 5.31
56	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 10$	4.46	5.15, 5.16, 5.26, 5.27
57	$2, 3, 5, 6, Y_1 + 4 + a7$	4.46	5.20, 5.35
58	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a1 + b7, a^2 + b^2 = 1$	4.46	5.21, 5.22, 5.37
59	$1 + a3, 2, 5, 6, Y_1 + b4 + 11$	4.47	5.30, 5.32

[1] в работе [81], Приложение. Оптимальная система подалгебр основной алгебры, в подалгебре 5.19 опечатка, см. книгу [46], Приложение, Табл. 2, подалгебру 5.10.

	60	$1+a3, 2, 5, 6, Y_1+b3+c4, b^2+c^2=1$	4.47	5.35, 5.36, 5.37
	61	$1, 2, 3, 4, Y_1+7+a11, a\neq 0$	4.48	5.23
	62	$1, 2, 3, 4, Y_1+7+a10$	4.48	5.24, 5.28
	63	$1, 2, 3, 4, Y_1+a5+b10, a^2+b^2=1$	4.48	5.12, 5.17, 5.37
	64	$1, 2, 3, 4, Y_1+a5+11$	4.48	5.33, 5.34
6	1	$1, 5, 6, a4+7, b4+11, Y_1+4$	5.5	6.4
	2	$1, 2, 3, a4+7, b4+11, Y_1+4$	5.7	6.5
	3	$1, 2, 3, 10, b4+7+a11, Y_1+c4+d11, c^2+d^2=1$	5.8	6.3, 6.11
	4	$1, 2, 3, a4+7, 4+10, Y_1+4$	5.9	6.11
	5	$2, 3, 5, 10, a6+11, Y_1+6$	5.10	6.12
	6	$1, 2, 3, 10, 11, Y_1+a4+7$	5.11	6.3
	7	$1, 2, 3, 10, 11, Y_1+4$	5.11	6.14
	8	$1, 2, 3, 10, 4+a11, Y_1+b4+7$	5.12	6.3, 6.11
	9	$1, 2, 3, 10, 4+a11, Y_1+b4+c5, b^2+c^2=1$	5.12	6.13, 6.14, 6.21
	10	$2, 3, a1+5, 6, 4+10, Y_1+1, a\neq 0$	5.13	6.22
	11	$2, 3, 1+5, 6, 10, Y_1+1$	5.14	6.21
	12	$2, 3, 5, 6, \varepsilon 4+10, Y_1+a1+b7, a^2+b^2=1$	5.15, 5.16	6.8, 6.9, 6.10, 6.21, 6.22
	13	$1, 2, 3, 6, 4+10, Y_1+a4+b5, a^2+b^2=1$	5.17	6.21, 6.22
	14	$1, 4, 5, 6, 7+a11, Y_1+11$	5.18	6.4

	15	$2, 3, 5, 6, 7 + a11, Y_1 + b4 + c11, b^2 + c^2 = 1$	5.19, 5.22	6.6, 6.15, 6.17
	16	$2, 3, 5, 6, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11, a \neq 0$	5.20	6.6
	17	$2, 3, 5, 6, a4+7, Y_1+b1+c4, b^2+c^2 = 1, a \neq 0$	5.20	6.16, 6.17, 6.19
	18	$2, 3, 5, 6, 1 + 7, Y_1 + a4 + 10$	5.21	6.9, 6.10
	19	$2, 3, 5, 6, 1 + 7, Y_1 + 4$	5.21	6.16
	20	$2, 3, 5, 6, 1 + 7, Y_1 + 1$	5.21	6.19
	21	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1 + 4 + b10$	5.22	6.10, 6.17
	22	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1 + 10$	5.22	6.8
	23	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1 + 1$	5.22	6.19
	24	$1, 2, 3, 4, 7 + a11, Y_1 + 11$	5.23, 5.24	6.5
	25	$1, 2, 3, 4, 7, Y_1 + 10$	5.24	6.11
	26	$2, 3, 5, 6, a4+7+a10, Y_1+b1+c4+c10, b^2+c^2 = 1, a \neq 0$	5.26	6.10, 6.20
	27	$2, 3, 5, 6, 7 + 10, Y_1 + a1 + b10, a^2 + b^2 = 1$	5.27	6.8, 6.9, 6.20
	28	$1, 2, 3, 4, 7 + 10, Y_1 + 10$	5.28	6.11
	29	$1, 4, 5, 6, 11, Y_1 + 7$	5.29	6.4
	30	$2, 3, 5, 6, b4 + 11, Y_1 + 7$	5.30	6.6
	31	$2, 3, a4 + 5, 6, b4 + 11, Y_1 + 4$	5.30, 5.31	6.23
	32	$2, 3, 5, 6, b4 + 11, Y_1 + c4 + 7$	5.30, 5.31	6.6
	33	$2, 3, 4, 6, a5 + 11, Y_1 + 5$	5.32	6.23
	34	$1, 2, 3, 4, 11, Y_1 + 7$	5.33, 5.34	6.5
	35	$1, 2, 3, 4, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	5.33, 5.34	6.24

	36	$2, 3, 4, 5, 6, Y_1 + a7 + 11$	5.35	6.15, 6.23
	37	$2, 3, 4, 5, 6, Y_1 + a1 + b7, a^2 + b^2 = 1$	5.35	6.16, 6.17, 6.25
	38	$2, 3, 4, 5, 1 + 6, Y_1 + 1$	5.36	6.25
	39	$1, 2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 11$	5.37	6.18, 6.24
	40	$1, 2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + c10, a^2 + b^2 + c^2 = 1$	5.37	6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.25
7	1	$4, 5, 6, 7, 8, 9, Y_1 + 11$	6.1	7.2
	2	$1, 2, 3, 7, 8, 9, Y_1 + 11$	6.2	7.1
	3	$1, 2, 3, 7, 8, 9, Y_1 + 10$	6.2	7.3
	4	$1, 2, 3, a4 + 7, 10, b4 + 11, Y_1 + 4$	6.3	7.5
	5	$2, 3, 5, 6, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	6.6	7.8
	6	$2, 3, 5, 6, 7 + a11, 10, Y_1 + 11$	6.7, 6.8	7.4
	7	$2, 3, 5, 6, \varepsilon 1 + 7, 10, Y_1 + 1$	6.8, 6.9	7.6
	8	$2, 3, 5, 6, a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	6.10	7.7
	9	$1, 2, 3, 4, 7 + a11, 10, Y_1 + 11$	6.11	7.5
	10	$2, 3, 5, 6, 10, 11, Y_1 + 7$	6.12	7.4
	11	$1, 2, 3, 4, 10, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	6.13	7.10
	12	$1, 2, 3, 4, 10, 11, Y_1 + 7$	6.14	7.5
	13	$1, 2, 3, 4, 10, 11, Y_1 + 5$	6.14	7.10
	14	$2, 3, 4, 5, 6, 7 + a11, Y_1 + 11$	6.15, 6.17	7.8
	15	$2, 3, 4, 5, 6, 1 + 7, Y_1 + 1$	6.16	7.12
	16	$2, 3, 4, 5, 6, 7, Y_1 + 1$	6.17	7.12
	17	$1, 2, 3, 5, 6, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	6.18	7.9, 7.11

	18	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	6.19	7.9
	19	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 7 + \varepsilon 10, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	6.19, 6.20	7.6, 7.7, 7.12, 7.13
	20	$1, 2, 3, 5, 6, 10, Y_1 + a4 + b7 + c11, a^2 + b^2 + c^2 = 1$	6.21	7.6, 7.10, 7.14
	21	$1, 2, 3, 5, 6, 4 + 10, Y_1 + a4 + b7, a^2 + b^2 = 1$	6.22	7.7, 7.14
	22	$2, 3, 4, 5, 6, 11, Y_1 + 7$	6.23	7.8
	23	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	6.24	7.9, 7.15
	24	$1, 2, 3, 4, 5, 6, Y_1 + a7 + 11$	6.25	7.11, 7.15
	25	$1, 2, 3, 4, 5, 6, Y_1 + a7 + b10, a^2 + b^2 = 1$	6.25	7.12, 7.13, 7.14
8	1	$1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, Y_1 + 11$	7.3	8.1
	2	$1, 2, 3, 5, 6, 10, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1$	7.6	8.2, 8.3
	3	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 7, 4 + 10, Y_1 + 10$	7.7	8.3
	4	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	7.9	8.4
	5	$1, 2, 3, 5, 6, 10, a4+11, Y_1+b4+c7, b^2+c^2 = 1$	7.10	8.2, 8.5
	6	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + a11, Y_1 + 11$	7.11, 7.12	8.4
	7	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + \varepsilon 10, Y_1 + 10$	7.12, 7.13	8.3
	8	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, Y_1 + a7 + b11, a^2 + b^2 = 1$	7.14	8.3, 8.5
	9	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, Y_1 + 7$	7.15	8.4
9	1	$1, 2, 3, 5, 6, a4 + 7, 10, b4 + 11, Y_1 + 4$	8.2	9.1
	2	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + a11, 10, Y_1 + 11$	8.3	9.1
	3	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, Y_1 + 7$	8.5	9.1
10	1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Y_1 + 10$	9.2	10.2

	2	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Y_1 + 11$	9.2	10.1
11	1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Y_1 + 11$	10.2	11.1

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА 1 АЛГЕБРЫ ЛИ L_{12}

К каждой из нижеперечисленных подмоделей необходимо добавить уравнение $p_1 = S_1 + f(\rho)$; $\gamma = 0$ в случае L_{11}, $\gamma = 1$ в случае L_{12}.

Подмодель 3.1

$$(V-s)U_{1s} = -U_1 - \gamma\rho^{-1},$$
$$(V-s)V_s + \rho^{-1}p_{1s} = \frac{W^2}{s},$$
$$(V-s)W_s = -\frac{VW}{s} + \gamma\frac{a}{s}\rho^{-1},$$
$$(V-s)\rho_s + \rho V_s = -\rho\left(\frac{V}{s}+1\right),$$
$$(V-s)S_{1s} = -\gamma\left(U_1 - \frac{a}{s}W - b\right).$$

Подмодель 3.2

$$(U-sV)U_s + \rho^{-1}p_{1s} = 0,$$
$$(U-sV)V_s - s\rho^{-1}p_{1s} = W^2 - \gamma\rho^{-1},$$
$$(U-sV)W_s = -VW + a\gamma\rho^{-1},$$
$$(U-sV)\rho_s + \rho(U_s - sV_s) = -\rho V,$$
$$(U-sV)S_{1s} = \gamma(aW - V).$$

Подмодель 3.3

$$VU_{1r} = -1 - \gamma\rho^{-1},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = \frac{a\gamma}{r}\rho^{-1} - \frac{VW}{r},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = \gamma\left(\frac{a}{r}W - U_1\right).$$

Подмодель 3.4

$$VU_r = -\gamma\rho^{-1},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = -\frac{VW}{r} + \frac{\gamma}{r}\rho^{-1},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = \gamma\left(\frac{W}{r} - U\right).$$

Подмодель 3.5

$$VU_r = -\gamma\rho^{-1},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = \frac{VW}{r},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = -\gamma U.$$

Подмодель 3.6

$$(U-sV)U_s + \rho^{-1}p_{1s} = 0,$$
$$(U-sV)V_s - s\rho^{-1}p_{1s} = W^2,$$
$$(U-sV)W_s = -VW - \gamma\rho,$$
$$(U-sV)\rho_s + (U_s - sV_s)\rho = -\rho V,$$
$$(U-sV)S_{1s} = -\gamma W.$$

Подмодель 3.7

$$(V-s)U_{1s} = -U_1,$$
$$(V-s)V_s + \rho^{-1}p_{1s} = \frac{W^2}{s} - \frac{\gamma}{s}\rho^{-1},$$
$$(V-s)W_s = -\frac{VW}{s} + \frac{a\gamma}{s}\rho^{-1},$$
$$(V-s)\rho_s + \rho V_s = -\left(\frac{V}{s}+1\right)\rho,$$
$$(V-s)S_{1s} = \frac{\gamma}{s}(aW-V).$$

Подмодель 3.8, $\mathbf{d \neq 0}$

$$(V-s)U_{1s} = -\frac{c}{d} + \left(\frac{ac}{d} - b\right)\frac{W}{s},$$
$$(V-s)V_s + \rho^{-1}p_{1s} = \frac{W^2}{s},$$
$$(V-s)W_s = -\frac{VW}{s} + \frac{a\gamma\rho^{-1}}{ds},$$
$$(V-s)\rho_s + \rho V_s = -\rho\frac{V}{s},$$
$$(V-s)S_{1s} = \frac{\gamma}{d}\left(\frac{aW}{s} - 1\right).$$

Подмодель 3.10

$$(V-s)U_{1s} = -\frac{aW}{s} - b,$$
$$(V-s)V_s + \rho^{-1}p_{1s} = \frac{W^2}{s},$$
$$(V-s)W_s = -\frac{VW}{s},$$
$$(V-s)\rho_s + \rho V_s = -\frac{V}{s}\rho,$$
$$(V-s)S_{1s} = -\gamma.$$

Подмодель 3.11, $\mathbf{c \neq 0}$

$$VU_{1r} = -a\frac{W}{r} - \frac{b}{c},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = -\frac{VW}{r},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = -\frac{\gamma}{c}.$$

Подмодель 3.12, $\mathbf{c \neq 0}$

$$VU_{1r} = \left(\frac{b}{c} - a\right)\frac{W}{r} - \frac{b}{c},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = -\frac{VW}{r} + \gamma\frac{\rho^{-1}}{cr},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = \frac{\gamma}{c}\left(\frac{W}{r} - 1\right).$$

Подмодель 3.13

$$(w_1-s)u_{1s} = -u_1,$$
$$(w_1-s)v_{1s} = -v_1 - \gamma\rho^{-1},$$
$$(w_1-s)w_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = 0,$$
$$(w_1-s)\rho_s + \rho w_{1s} = -2\rho,$$
$$(w_1-s)S_{1s} = -\gamma v_1.$$

Подмодель 3.14

$$(V-s)U_{1s}=-U_1,$$
$$(V-s)V_s+\rho^{-1}p_{1s}=\frac{W^2}{s},$$
$$(V-s)W_s=-\frac{VW}{s}-\frac{\gamma}{s}\rho^{-1},$$
$$(V-s)\rho_s+\rho V_s=-\left(\frac{V}{s}+1\right)\rho,$$
$$(V-s)S_{1s}=-\gamma\frac{W}{s}.$$

Подмодель 3.15, c = 0

$$(w-s)u_{1s}=-u_1,$$
$$(w-s)v_{1s}=-v_1-\gamma\rho^{-1},$$
$$(w-s)w_s+\rho^{-1}p_{1s}=0,$$
$$(w-s)\rho_s+\rho w_s=-2\rho,$$
$$(w-s)S_{1s}=\gamma(a-v_1).$$

Подмодель 3.15, c ≠ 0

$$\left(a-v_1+\frac{b}{c}w_1\right)u_{1s}=-u_1,$$
$$\left(a-v_1+\frac{b}{c}w_1\right)v_{1s}-\rho^{-1}p_{1s}=-v_1,$$
$$\left(a-v_1+\frac{b}{c}w_1\right)w_{1s}+\frac{b}{c}\rho^{-1}p_{1s}=-w_1-\frac{\gamma}{c}\rho^{-1},$$
$$\left(a-v_1+\frac{b}{c}w_1\right)\rho_s+\rho\left(\frac{b}{c}w_{1s}-v_{1s}\right)=-3\rho,$$
$$\left(a-v_1+\frac{b}{c}w_1\right)S_{1s}=-\frac{\gamma}{c}w_1.$$

Подмодель 3.16, e ≠ 0

$$\left(v_1-\frac{d}{e}w_1-s-b\right)u_{1s}=-\frac{c}{e}w_1-a,$$
$$\left(v_1-\frac{d}{e}w_1-s-b\right)v_{1s}+\rho^{-1}p_{1s}=-\frac{d}{e}w_1-b,$$
$$\left(v_1-\frac{d}{e}w_1-s-b\right)w_{1s}-\frac{d}{e}\rho^{-1}p_{1s}=-w_1-\frac{\gamma}{e}\rho^{-1},$$
$$\left(v_1-\frac{d}{e}w_1-s-b\right)\rho_s+\rho\left(v_{1s}-\frac{d}{e}w_{1s}\right)=-\rho,$$
$$\left(v_1-\frac{d}{e}w_1-s-b\right)S_{1s}=-\frac{\gamma}{e}w_1.$$

Подмодель 3.16, $\mathbf{e = 0, d \neq 0}$

$$(w-s)u_{1s} = -\frac{c}{d}v_1 + \frac{bc}{d} - a,$$
$$(w-s)v_{1s} = -v_1 - \frac{\gamma}{d}\rho^{-1},$$
$$(w-s)w_s + \rho^{-1}p_{1s} = 0,$$
$$(w-s)\rho_s + \rho w_s = -\rho,$$
$$(w-s)S_{1s} = -\frac{\gamma}{d}(v_1 - b).$$

Подмодель 3.17

$$(V-s)U_{1s} = -\frac{c}{s}W - 1,$$
$$(V-s)V_s + \rho^{-1}p_{1s} = \frac{W^2}{s},$$
$$(V-s)W_s = -\frac{\gamma}{s}\rho^{-1} - \frac{VW}{s},$$
$$(V-s)\rho_s + \rho V_s = -\frac{V}{s}\rho,$$
$$(V-s)S_{1s} = -\gamma\frac{W}{s}.$$

Подмодель 3.18, $\mathbf{a \neq 0}$

$$wu_{1z} = -\frac{b}{a}v,$$
$$wv_z = -\rho^{-1}\frac{\gamma}{a},$$
$$ww_z + \rho^{-1}p_{1z} = 0,$$
$$w\rho_z + \rho w_z = 0,$$
$$wS_{1z} = -\frac{\gamma}{a}v.$$

Подмодель 3.19

$$VU_{1r} = -a\frac{W}{r},$$
$$VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},$$
$$VW_r = -\frac{\gamma}{r}\rho^{-1} - \frac{VW}{r},$$
$$V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,$$
$$VS_{1r} = -\gamma\frac{W}{r}.$$

Подмодель 3.20, $\mathbf{c \neq 0}$

$$\left(u_1 - \frac{b}{c}v\right)u_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -1,$$
$$\left(u_1 - \frac{b}{c}v\right)v_s - \frac{b}{c}\rho^{-1}p_{1s} = -\frac{\gamma}{c}\rho^{-1},$$
$$\left(u_1 - \frac{b}{c}v\right)w_{1s} = \frac{d}{c}v - a,$$
$$\left(u_1 - \frac{b}{c}v\right)\rho_s + \rho\left(u_{1s} - \frac{b}{c}v_s\right) = 0,$$
$$\left(u_1 - \frac{b}{c}v\right)S_{1s} = -\frac{\gamma}{c}v.$$

Подмодель 3.20, $\mathbf{c = 0, b \neq 0}$

$$vu_{1y} = -\frac{\gamma}{b}\rho^{-1} - 1,$$
$$vv_y + \rho^{-1}p_{1y} = 0,$$
$$vw_{1y} = -\frac{d}{b}u_1 - a,$$
$$v\rho_y + \rho v_y = 0,$$
$$vS_{1y} = -\frac{\gamma}{b}u_1.$$

Подмодель 3.21, a ≠ 0

$$
\begin{aligned}
& wu_{1z} = -\frac{b}{a}v - 1,\\
& wv_z = -\frac{\gamma}{a}\rho^{-1},\\
& ww_z + \rho^{-1}p_{1z} = 0,\\
& w\rho_z + \rho w_z = 0,\\
& wS_{1z} = -\frac{\gamma}{a}v.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.22

$$
\begin{aligned}
& VU_{1r} = -\frac{b}{r}W - 1,\\
& VV_r + \rho^{-1}p_{1r} = \frac{W^2}{r},\\
& VW_r = -\frac{\gamma}{r}\rho^{-1} - \frac{VW}{r},\\
& V\rho_r + \rho V_r = -\frac{V}{r}\rho,\\
& VS_{1r} = -\frac{\gamma}{r}W.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.28

$$
\begin{aligned}
& (u_1 - a)u_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -u_1,\\
& (u_1 - a)v_{1s} = -v_1,\\
& (u_1 - a)w_{1s} = -w_1,\\
& (u_1 - a)\rho_s + \rho u_{1s} = -3\rho,\\
& (u_1 - a)S_{1s} = -\gamma.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.31

$$
\begin{aligned}
& (w_1 - c)u_{1s} = -(u_1 - av_1 + ab),\\
& (w_1 - c)v_{1s} = -b,\\
& (w_1 - c)w_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -w_1,\\
& (w_1 - c)\rho_s + \rho w_{1s} = -2\rho,\\
& (w_1 - c)S_{1s} = -\gamma.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.33

$$
\begin{aligned}
& v_1u_{1s} = -w_1,\\
& v_1v_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -a,\\
& v_1w_{1s} = -b,\\
& v_1\rho_s + \rho v_{1s} = 0,\\
& v_1S_{1s} = -\gamma.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.42, b ≠ 0

$$
\begin{aligned}
& \left(U_1 - \frac{a}{b}\right)U_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -U_1,\\
& \left(U_1 - \frac{a}{b}\right)Q'_s = 0,\\
& Q\left[\left(U_1 - \frac{a}{b}\right)\vartheta'_s + \frac{1}{b}\right] = 0,\\
& \left(U_1 - \frac{a}{b}\right)\rho_s + \rho U_{1s} = -\rho,\\
& \left(U_1 - \frac{a}{b}\right)S_{1s} = -\frac{\gamma}{b}.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.43

$$
\begin{aligned}
& (u_1 - a)u_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -u_1,\\
& (u_1 - a)v_{1s} = -b,\\
& (u_1 - a)w_s = 0,\\
& (u_1 - a)\rho_s + \rho u_{1s} = -\rho,\\
& (u_1 - a)S_{1s} = -\gamma.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.44

$$
\begin{aligned}
& u_1u_{1s} + \rho^{-1}p_{1s} = -a,\\
& u_1v_{1s} = -b,\\
& u_1w_s = 0,\\
& u_1\rho_s + \rho u_{1s} = 0,\\
& u_1S_{1s} = -\gamma.
\end{aligned}
$$

Подмодель 3.48

$$U_1U_{1s}+\rho^{-1}p_{1s}=-\frac{a}{b},\quad U_1Q'_s=0,\quad Q\left(U_1\vartheta'_s-\frac{1}{b}\right)=0,$$
$$U_1\rho_s+\rho U_{1s}=0,\quad U_1S_{1s}=-\frac{\gamma}{b}.$$

Подмодель 3.23, $\mathbf{b\neq 0}$ или $\mathbf{ad\neq 0}$

$$\begin{aligned}
&u_{1t}=-\frac{\varepsilon}{\mu}\left[(t^2-cd)u_1+(bc-at)v_1-(bt-ad)w_1\right]-\frac{\gamma}{\mu}(t^2-cd)\rho^{-1},\\
&v_{1t}=-\frac{1}{\mu}\left[dnu_1+(t(e+\varepsilon t)-bn)v_1-d(\varepsilon t+e)w_1\right]-\frac{\gamma}{\mu}(bc-at)\rho^{-1},\\
&w_{1t}=\frac{1}{\mu}\left[tnu_1+(c(e+\varepsilon t)-an)v_1-t(\varepsilon t+e)w_1\right]+\frac{\gamma}{\mu}(bt-ad)\rho^{-1},\\
&\rho_t=\frac{\rho}{\mu}\left(\varepsilon(cd-3t^2)+bn-2et\right),\\
&S_{1t}=-\frac{\gamma}{\mu}\left[(t^2-cd)u_1+(bc-at)v_1+(ad-bt)w_1\right],\\
&\mu=(t^2-cd)(\varepsilon t+e)+n(ad-bt).
\end{aligned}$$

Подмодель 3.23, $\mathbf{b=ad=0,e^2+\varepsilon^2\neq 0}$

$$\begin{aligned}
&u_{1t}=\varepsilon\frac{av_1-tu_1}{t(e+\varepsilon t)}-\frac{\gamma}{e+\varepsilon t}\rho^{-1},\\
&v_{1t}=-\frac{dn}{(e+\varepsilon t)(t^2-cd)}u_1-\frac{tv_1-dw_1}{t^2-cd}+\frac{a\gamma}{t(e+\varepsilon t)}\rho^{-1},\\
&w_{1t}=\frac{ntu_1+(\varepsilon ct-an+ce)v_1}{(e+\varepsilon t)(t^2-cd)}-\frac{t}{t^2-cd}w_1,\\
&\rho_t=-\frac{3\varepsilon t^2+2et-\varepsilon cd}{(e+\varepsilon t)(t^2-cd)}\rho,\\
&S_{1t}=-\gamma\frac{tu_1-av_1}{t(e+\varepsilon t)}.
\end{aligned}$$

Подмодель 3.24

$$u_{1t}=-\frac{1}{t}\left(u_1+\frac{\gamma}{a}\rho^{-1}\right),$$
$$q'=-\frac{t}{t^2+1}q,$$
$$q\left(\vartheta_t'+\frac{u_1}{at}-\frac{1}{t^2+1}\right)=0,$$
$$\rho_t=-\frac{3t^2+1}{t(t^2+1)}\rho,$$
$$S_{1t}=-\frac{\gamma}{at}u_1.$$

Подмодель 3.25, $\varepsilon=1$

$$u_t=-\gamma\rho^{-1},$$
$$q'=-q\frac{t}{t^2+1},$$
$$q\left(\vartheta_t'-u+\frac{1}{t^2+1}\right)=0,$$
$$\rho_t=-\frac{2t}{t^2+1}\rho,$$
$$S_{1t}=-\gamma u.$$

Подмодель 3.26, a $\neq$ 0

$$u_t=-\frac{\gamma}{a}\rho^{-1},$$
$$v_{1t}=\frac{1}{t^2+1}\left[\frac{bt}{a}u-tv_1-w_1\right],$$
$$w_{1t}=\frac{1}{t^2+1}\left[-\frac{b}{a}u+v_1-tw_1\right],$$
$$\rho_t=-\frac{2t}{t^2+1}\rho,$$
$$S_{1t}=-\frac{\gamma}{a}u.$$

Подмодель 3.27

$$u_{1t}=-\frac{u_1}{t}-\frac{\gamma}{t}\rho^{-1},$$
$$v_{1t}=\frac{1}{t^2+1}\left[au_1-tv_1-w_1\right],$$
$$w_{1t}=-\frac{1}{t(t^2+1)}\left[au_1-tv_1+t^2w_1\right],$$
$$\rho_t=-\frac{3t^2+1}{t(t^2+1)}\rho,$$
$$S_{1t}=-\frac{\gamma}{t}u_1.$$

Подмодель 3.29

$$u_{1t}=-\frac{u_1}{t}-\gamma\frac{\rho^{-1}}{t},\quad v_{1t}=\frac{a}{t^2}u_1-\frac{v_1}{t},$$
$$w_{1t}=-\frac{w_1}{t},\quad \rho_t=-\frac{3}{t}\rho,\quad S_{1t}=-\frac{\gamma}{t}u_1.$$

Подмодель 3.30, ad + c $\neq$ 0 или b $\neq$ 0 или e $\neq$ 0

$$u_{1t}=\frac{1}{m}\left[(c+et)(u_1-av_1)+(adt-b)w_1-\gamma\rho^{-1}\right],$$
$$v_{1t}=\frac{1}{m}\left[-du_1+adv_1+dtw_1+\gamma a\rho^{-1}\right],$$
$$w_{1t}=\frac{1}{m}\left[-eu_1+aev_1+etw_1+\gamma t\rho^{-1}\right],$$
$$\rho_t=\frac{\rho}{m}\left[2et+ad+c\right],$$
$$S_{1t}=-\frac{\gamma}{m}\left[u_1-av_1-tw_1\right],$$
$$m=b-t(et+ad+c).$$

Подмодель 3.32, $\mathbf{e^2 + h^2 \neq 0}$

$$u_{1t} = -\frac{u_1}{t} + \frac{a}{t} v_1 + \frac{d - atn}{t(e + th)} w_1,$$
$$v_{1t} = -\frac{n}{e + th} w_1,$$
$$w_{1t} = -\frac{h}{e + th} w_1 - \frac{\gamma}{e + th} \rho^{-1},$$
$$\rho_t = -\frac{e + 2th}{t(e + th)} \rho,$$
$$S_{1t} = -\frac{\gamma}{e + th} w_1.$$

Подмодель 3.34, $\mathbf{a^2 + b^2 \neq 0}$

$$u_{1t} = \frac{t}{a + bt} v_1 - w_1,$$
$$v_{1t} = -\frac{\gamma}{a + bt} \rho^{-1} - \frac{b v_1}{a + bt},$$
$$w_{1t} = -\frac{v_1}{a + bt},$$
$$\rho_t = -\frac{b}{a + bt} \rho,$$
$$S_{1t} = -\frac{\gamma v_1}{a + bt}.$$

Подмодель 3.42, $\mathbf{a \neq 0, b = 0}$

$$U_{1t} = -\frac{\gamma}{at} \rho^{-1} - \frac{U_1}{t}, \quad Q \left[\vartheta'_t + \frac{U_1}{at} \right] = 0, \quad Q'_t = 0,$$
$$\rho_t = -\frac{\rho}{t}, \quad S_{1t} = -\frac{\gamma}{at} U_1.$$