МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шишмарев Константин Александрович

ПОВЕДЕНИЕ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА КАНАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, доцент
Папин Александр Алексеевич

Барнаул – 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Проблемы, связанные с ледовым покровом широко исследуются на протяжении последнего столетия. Так реология льда и его термодинамические свойства описаны в работах Мальмгрена Ф. «О свойствах морского льда» (1930г.), Цурикова В.Л. «Жидкая фаза в морских льдах» (1976г.), «Морской лед» (1997г.) и др. Однако известно, что в различных ситуациях лед ведет себя совершенно по-разному. Его свойства зависят от его структуры, толщины, температуры, солености образующей его жидкости. Кроме того, геометрия и природа задач, возникающих в каждом конкретном случае совершенно различны. Поэтому при прогнозировании поведения ледового покрова не существует единой модели. Наиболее изученным является поведение ледового покрова под действием изгибно-гравитационных волн. Многочисленные исследования проведены как в нашей стране (Букатов А.Е., Голушкевич С.С., Доценко С.Ф., Козин В.М., Жесткая В.Д., Коробкин А.А., Стурова И.В., Ткачева Л.А., Хабахпашева Т.И.) так и за рубежом (Hermans, A.J. Faltinsen O.M., Kashiwagi M., Meylan M., Squire V.A., Porter, D., Takagi, K. Zilman G., Miloh T., Taylor R.E.). Они посвящены образованию изгибно-гравитационных, или гидроупругих, волн, распространяющихся в ледовом покрове, а также взаимодействию этих волн с морскими и прибрежными сооружениями, такие как вертикальные колонны платформ и стенки. При этом ледовый покров моделируется упругой пластиной. Эти исследования показывают, что даже волны малой амплитуды могут приводить к большим силам и моментам, которые, в случае хрупкого льда, могут приводить к образованию трещин в нем и его разрушению. Проведенные до настоящего времени исследования не включали в себя множество задач, в частности, задачи о поведении ледового покрова в канале при наличии двух параллельных жестких стенок. При этом хорошо изучены задачи о взаимодействии льда и одной стенки или сооружения цилиндрической формы.

Степень разработанности темы исследования

Задача об определении прогибов ледового покрова изучена ранее для бесконечной плавающей ледовой пластины (см. работу [1], посвященную широкому обзору известных результатов и подходов). Внешняя нагрузка движется с постоянной скоростью по прямой и моделируется точечным давлением или гладким и локализованным распределением давления. Задача исследовалась в рамках линейной теории гидроупругости ([1], [2], [3], [4], [5]) и в рамках нелинейной модели ([6], [7], [8], [9], [10]). Прикладные задачи, такие как посадка самолета на ледовую пластину и др., исследованы в [11], [12], [13], [14], [15]. Задача движения внешних нагрузок в реках и каналах изучена в гораздо меньшей степени. Данная задача является важной, т.к. лабораторные эксперименты с движущимися нагрузками проводятся в ледовых бассейнах конечной ширины, которую необходимо учитывать при интерпретации результатов. Ньюман в статье [16] пишет "Вычисления в задачах взаимодействия волн и твердого упругого тела в жидкости обычно выполняются для неограниченной области, когда эксперименты проводятся в ограниченных ледовых бассейнах. Влияние стенок может быть значительным если ширина ледового бассейна одного порядка с длиной тела или длиной волны, особенно если скорость движения тела вдоль ледового бассейна мала или равна нулю". Данное заключение верно и для задач движения внешних нагрузок в канале, как будет показано в данной диссертации.

Рассматриваемая задача имеет практическую значимость для узких водных путей, таких как реки, каналы, замороженные гавани и проливы [17]. Основная цель решения таких задач – это определение прогибов и деформаций в ледовом покрове, зная параметры которых можно совершать безопасную транспортировку грузов по ледовому покрову, или наоборот предсказывать разрушение льда в определенных местах ледового покрова. В работе [18] исследована похожая задача о разрушении ледового покрова между двумя последовательными дамбами для предотвращения больших нагрузок, оказываемых ледовом покровом на дамбы. Данные нагрузки могут возникать в результате распространения поверхностных волн в направлении края ледового покрова между двумя дамбами. Затем данная волна делится на две части: одна часть распространяется под ледовым покровом, вторая, как поверхностная волна, по ледовому покрову.

Для того, чтобы сломать ледовый покров, можно использовать судна на воздушной подушке. Судно движется вдоль ледового покрова с заданной скоростью и создает напряжения, достаточные для разрушения льда (см. [17], [19], [20], [21] и [22]). В этих работах показано, что судно на воздушной подушке может быть очень эффективным средством в задачах о разрушении льда. В статье [19] замечено: "Измерения прогибов льда в экспериментальных бассейнах Мемориального университета Ньюфаундленда и Института морской динамики в Канаде показывают существование критической скорости для движения нагрузки по поверхности ледовой пластины. При этой скорости, значения прогибов пластины ограничены только диссипацией и нелинейностью. Мы считаем что эта критическая скорость является ключом к разрушению льда с помощью движения судна по поверхности льда". Авторы работы [1] делают следующий вывод относительно критической скорости и гидроупругих волн: "Фазовая скорость c имеет минимум, c_{min}, выше которого изгибно-гравитационные волны в ледовом покрове могут свободно распространяться, и ниже которого таких волн не существует. Минимум фазовой скорости ассоциируется с критической скоростью v_{crit}, при которой прогибы плавающей ледовой пластины будут наибольшими". Соответствующий метод разрушения ледового покрова изучен численно и аналитически в работах [21], [22] и экспериментально в работе [17]. В используемом в этих работах так называемом "резонансном методе разрушения льда" судно на воздушной подушке движется со скоростью, близкой к критической скорости гироупругих волн в ледовом покрове.

В зависимости от природных условий и расположения реки, канала или другого узкого водоема, где необходимо разрушить лед, "резонансный метод разрушения льда" применяется в совокупности с другими методами для увеличения напряжений в ледовом покрове. В работе [22] написано: "Традиционные методы и технологии (ледоколы, взрывные заряды), применяемые для решения задач по разрушению льда, часто не приводят к удовлетворительным результатам. Ледоколы не предназначены для разрушения льда на малой воде, не эффективны в разрушении ледовых заторов. Один из путей для преодоления данных недостатков – использование резонансного метода, который снижает энергетические затраты по сравнению с существующими методами". Успешное и эффективное применение резонансного метода зависит от того, как хорошо будет предсказано поведение ледового покрова для реальных условий, включая учет границ льда. В работе [17] замечено, что существует оптимальное расстояние от берега до судна на воздушной подушке, при котором будут наименьшие энергетические затраты для разрушения льда. Несколько экспериментов с искусственным ледовым покровом описано в [17], однако, приведено не так много результатов этих экспериментов. Эксперименты проводились в ледовых бассейнах (см. [17], с. 147-155) с целью исследования эффекта вертикальных стенок на эффективность разрушения льда движущейся вдоль замороженного канала нагрузкой. Результаты экспериментов сравнивались с численными расчетами из работы [22]. Глубина канала была 0.1 м, критическая скорость движения нагрузки была определена как 1 м/с и расстояние между стенками бассейна изменялось от 0.2 до 0.7 м. Важно заметить, что зависимость критической скорости от ширины канала не учитывалась. Получено, что численные результаты с использованием метода конечных элементов качественно похожи на результаты экспериментов, но заметно отличаются от них в значениях амплитуд колебаний, что объяснялось краевыми условиями на стенках. Ледовая пластина была слабо закреплена на стенках канала в данных экспериментах. Также эксперименты в ледовом канале с разной глубиной и шириной были проведены для исследования посадки самолета на лед в ледовых гаванях [17], [22]. Замечено, что толщина льда является очень важным параметром для экспериментов в ледовых каналах. Для толщины льда больше чем 4 мм влияние вертикальных стенок канала становится значительным в экспериментах, описанных в [17], стр. 210.

В работе [21] задача о прогибах ледовой пластины в результате движения нагрузки исследована с помощью метода конечных элементов. Гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность льда описывается вертикальным модами в канале, но эти моды не были уточнены и их применение не объяснено. Линейная задача о прогибах льда решается для каждой вертикальной моды. Вычисления были проведены для ледового бассейна длиной 10 м и шириной 4 м. Численные результаты прогибов льда сравниваются с результатами экспериментов. Влияние вертикальной стенки на прогибы и удлинения является значительным. В работе [23] показано, что деформации и напряжения в ледовом покрове, которые вызваны движением внешней нагрузки вблизи одной вертикальной стенки, сильно зависят от расстояния между нагрузкой и стенкой.

Для исследования поведения ледового покрова в канале при разных скоростях движения внешней нагрузки необходимо найти критические скорости гидроупругих волн в канале. Для одномерной модели ледового покрова в канале [24], [25] и для неограниченной ледовой пластины [1] существует только одно дисперсионное соотношение между частотой и длиной гидроупругой волны и, соответственно, только одна критическая скорость (в некоторых работах вводят вторую критическую скорость – фазовую скорость для длинных волн при стремлении волнового числа к нулю). Для канала покрытого льдом существует бесконечное число дисперсионных соотношений и соответствующих критических скоростей [26]. Задача о периодических гидроупругих волнах, распространяющихся вдоль канала, изучена в работах [26], [27]. Случай ледового покрова, закрепленного на стенках канала, изучен в [26], а случай свободного ледового покрова – в [27]. Для заданной длины волны определены частоты и соответствующие профили периодических гидроупругих волн в канале. Линейная задача гидроупругости сводилась к задаче относительно профиля волны поперек канала. Задача решена методом нормальных мод. Определены дисперсионные соотношения и критические скорости распространяющихся волн. Первая критическая скорость для ледового покрова, примороженного к стенкам канала, имеет значение, значительно превышающее единственное критическое значение для такой же неограниченной пластины. Получено, что деформации в ледовом покрове достигают своих максимумов на стенках для длинных волн и вдоль центральной линии канала для коротких волн. Показано, что гидрупругие волны в канале с закрепленным ледовым покровом распространяются быстрее и с большей частотой, чем аналогичные волны в канале со свободным ледовым покровом. В данной диссертации показано, что анализ критических скоростей гидроупругих волн в замороженном канале помогает предсказать поведение ледового покрова при движении внешней нагрузки в зависимости от выбора скорости нагрузки (аналогичные выводы сделаны для неограниченного ледового покрова [1]).

В работах [28],[29] замечено, что изгибные волны, которые вызваны движением нагрузки поперек тонкой упругой пластины, возникают если скорость движения нагрузки превышает минимум $c_{\min}$ фазовой скорости упруго-гравитационных свободных волн в пластине. Поведение пластины можно приблизительно считать квази-стационарным для малых скоростей движения нагрузки. В работе [29] сделан вывод, что "большие прогибы пластины для критической скорости $V = c_{\min}$ соответствуют накоплению энергии под источником, в данном случае под нагрузкой, так как $c_{\min}$ совпадает с групповой скоростью". Несколько наблюдаемых особенностей гидроупругих волн нельзя объяснить в рамках линейной теории упругости: затухание волн с расстоянием от нагрузки [29] и смещение областей с максимальными деформациями непосредственно за нагрузкой [30]. Данные эффекты приписываются к вязкоупругому демпфированию ледового покрова [29], [30].

Вязкоупругие модели морского льда изучены в работе [31]. Автор работы проводил эксперименты с прямоугольными плавающими ледовыми балками под действием заданных нагрузок. Результатами экспериментов были изгибные напряжения в ледовых балках как функции от времени. Анализируя измеренные напряжения, автор заключает, что вязкоупругие свойства льда хорошо описываются реологической моделью, состоящей из последовательно соединенных материалов с вязкоупругой моделью Максвелла в первом материале и с моделью Фойгта (Кельвина) во втором. Данная реологическая модель включает четыре параметра. Двухпараметрическая вязкоупругая модель льда исследована в [29]. Модели Максвелла и Кельвина-Фойгта вязкоупругого ледового покрова использовались в [22], где вычисленные значения поведения ледового покрова в рамках этих двух моделей и их комбинации сравнивались с результатами экспериментов для движущейся нагрузки. Модель Кельвина-Фойгта также использовалась в работах [20], [33] в задачах о движении нагрузки по ледовому покрову. Показано, что данная однопараметрическая модель с временем запаздывания τ дает правдоподобные результаты (см. [22] и [21]). Данная модель является одной из простейших моделей вязкогоупругого материала [32]. Определяющее уравнение модели: $\sigma = E(\epsilon + \tau \partial\epsilon/\partial t)$, где E – модуль Юнга, σ – напряжения, ϵ – деформации и τ – время запаздывания. Время запаздывания является сложным для определения параметром. В [21] время запаздывания меняется от 3 до 10 секунд с целью сравнения результатов экспериментов и расчетов. Экспериментальные и численные результаты [21] показали, что амплитуда деформаций в ледовом покрове сильно зависит от значения времени запаздывания, но значения критических скоростей гидроупругих волн в ледовой пластине подвержены влиянию этого параметра в меньшей степени. Важно заметить, что вязкость жидкости дает пренебрежимо малый вклад в демпфирование прогибов ледового покрова в каналах размерностью больше нескольких метров и скоростей движения нагрузки порядка несколько метров в секунду.

Существует несколько основных подходов к изучению рассматриваемой задачи о движении нагрузки по ледовому покрову. В первом подходе задача исследуется в рамках модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала (см., например, [1], [33] и обзор литературы в [34]). Рассматриваются установившиеся прогибы не зависящие от времени и задача решается в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Данный подход не требует начальных условий. Задача решается численно. В рамках вязкоупругой модели прогибы и деформации в ледовом покрове быстро затухают с увеличением расстояния от нагрузки. Скорость затухания зависит от значения времени запаздывания τ. Решение будет затухать даже для малых значений τ. Поиск численного решения в данном подходе является сложным для малых значений τ. Для аккуратного оценивания возможных деформаций в ледовом покрове, их необходимо вычислять для нулевого значения τ, что является невозможным в этом подходе.

Другой подход к изучению поведения ледового покрова при движении внешней нагрузки представлен в [35] для задачи с неограниченным ледовом покровом. В этом случае не учитывается вязкость льда, что является менее физичным. Однако, результаты решения в данном подходе дают полезные для прикладных задач оценки максимальных деформаций и, тем самым, позволяют определять прочность ледового покрова. Ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной с постоянной толщиной. В данной модели, стационарный прогиб льда получен как предел нестационарного решения при больших временах. Данный подход требует формулировки начальных условий при $t = 0$. Начальные условия для прогиба льда должны удовлетворять стационарному уравнению тонкой упругой пластины с соответствующими краевыми условиями. Нагрузка, покоящаяся в начальный момент времени, движется с постоянной скоростью вдоль ледового покрова. Прогибы и деформации в ледовом покрове затухают в отдалении от нагрузки при конечных временах. В отличие от задачи с неограниченным ледовым покровом [35], исследование прогибов льда в канале требует поиска профиля колебаний поперек канала с учетом краевых условий. Для этого используется метод нормальных мод [36], [37], [38]. В данной диссертационной работе будет проведен асимптотический анализ с использованием как классических, так и методов, описанных в [35].

Наряду с задачами движения внешней нагрузки по поверхности ледового покрова, еще одним большим классом задач является изучение взаимодействия льда и погруженного в жидкость тела. Это может быть как движение подводного объекта, так и периодические колебания погруженных тел. При этом могут рассматриваться как ледовый покров, так и свободная поверхность и их различные комбинации. При постановке задач можно как учитывать конструкции, ограничивающие область с жидкостью, так и рассматривать неограниченную жидкость. Трехмерная задача об определении прогиба ледового покрова, вызванного горизонтальным движением диполя в жидкости под ледовым покровом, изучена в [39]. Рассматривалась неограниченная жидкость в горизонтальном направлении и бесконечной глубины. Ледовый покров и жидкость в начальный момент времени покоятся. Затем диполь движется с постоянной скоростью. Уравнение для определения прогиба ледового покрова получено с использованием преобразований Фурье. Показано, что прогибы ледового покрова становятся установившимися при больших временах в системе координат, движущейся совместно с диполем. Скорость диполя в [39] была ниже критической скорости [1] для рассматриваемого ледового покрова. Прогиб льда достигал максимального значения над диполем. Прогиб ледового покрова быстро затухал с увеличением расстояния от диполя.

Похожая задача в двухмерной постановке изучена в [40], [41]. Двухмерная задача о пульсирующем точечном источнике, помещенном в жидкость бесконечной глубины, покрытую ледовым покровом, исследована в [42]. Решение получено в виде суперпозиции стоячих и бегущих волн. Получено, что частоты этих волн равны частотам пульсаций интенсивности источника. Показано, что амплитуды и волновые числа полученных гидроупругих волн сильно зависят от толщины и упругих свойств льда.

Двухмерная задача о цилиндре, движущемся и осциллирующем с большой амплитудой относительно своей траектории в жидкости бесконечной глубины, покрытой льдом, изучена в [43]. Задача решена с использованием метода разложения на мультиполи. Исследовано влияния свойств льда и параметров движения цилиндра на гидродинамические силы, действующие на цилиндр и ледовый покров. Рассмотрены случаи линейного и нелинейного краевого условия. Показано, что нелинейность является важной для вертикального движения цилиндра, где расстояние от тела до ледового покрова изменяется со временем.

Движение тонких тел в жидкости под ледовым покровом исследовано в [44]. Ледовый покров моделировался бесконечной тонкой упругой пластиной. Рассматривается жидкость бесконечной глубины. Тонкое тело в жидкости моделировалось системой источник – сток в трехмерной постановке. Получено, что расстояния от тела до ледового покрова, толщина льда и размеры тела влияют на амплитуды создаваемых движением тела гидроупругих волн. Показано, что ледовой покров может быть сломан движущимся тонким телом при некоторых значениях параметров льда и скорости тела. Полученные теоретические результаты сравнивались с экспериментальными результатами, моделирующими движения подводных лодок под конечной ледовой пластиной. Движение одного источника под ледовым покровом изучено в [45].

Малые осцилляции двухмерного тела, погруженного в жидкость, частично покрытую ледовым покровом, исследованы в [46], [47], [48] в рамках линейной теории гидроупругости. В этих работах верхняя граница жидкости состоит из двух полубесконечных интервалов со свободной границей и плавающей ледовой пластиной, или из конечного интервала со свободной поверхностью между двумя полубесконечными пластинами с разной толщиной. Осциллирующее тело размещается подо льдом или под свободной поверхностью. Для решения задачи используются методы интегральных уравнений и граничных элементов. Гидродинамическая нагрузка (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования) и амплитуды вертикальных смещений свободной поверхности и упругих пластин вычислены в зависимости от частоты колебаний цилиндра и его положения относительно кромок пластин. Показано, что создаваемый поток жидкости сильно зависит от положения погруженного тела относительно упругих пластин [47]. Данный анализ может быть обобщен на трехмерную задачу с осциллирующем погруженным телом.

Двухмерная задача взаимодействия гидроупругих волн с телом, погруженным под ледовым покровом с наличием трещины, изучена в [49]. Тело моделируется цилиндром с использованием метода мультиполей. Ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной с условиями нулевого изгибающего момента и нулевыми напряжениями сдвига в трещине. Задача решена с помощью метода граничных элементов в рамках линейной теории потенциальных течений. Похожие задачи с наличием разного числа трещин в ледовом покрове изучены в [50].

Цели и задачи исследования

Целью работы является математическое исследование прогибов и деформаций в ледовом покрове при движении внешней нагрузки вдоль замороженного прямоугольного канала, в частности, исследование влияния параметров задачи на характеристики прогибов и деформаций, определение областей с максимальными деформациями и исследование свойств вынужденных гидроупругих волн, формирующих прогибы ледового покрова.

Научная новизна

Научная новизна исследуемой задачи состоит, в первую очередь, в учете двух жестких стенок и соответствующих краевых условий на этих стенках. Задача усложнена тем, что существует счетное число дисперсионных соотношений периодических гидроупругих волн, распространяющихся вдоль канала. Следовательно, в отличие от задачи с неограниченным ледовым покровом, существует счетное число критических скоростей движения нагрузки. Несмотря на то, что наличие двух стенок не сильно усложняет постановку задачи, данная задача не была рассмотрена ранее, а ее решение значительно отличается от решения для неограниченного ледового покрова. В рамках линейной теории гидроупругости и с учетом невязкой и несжимаемой жидкости в канале получены следующие новые результаты:

1. В задаче о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль вязкоупругой ледовой пластины в канале построено решение для установившихся прогибов и деформаций в ледовом покрове. Проведено исследование полученного решения, в частности, определена зависимость формирования прогибов льда от скорости движения нагрузки и ее соотношения к критическим скоростям гидроупругих волн, оценено влияние жестких стенок на характеристики прогибов и деформаций в ледовом покрове.

2. Доказана единственность классического решения нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова в канале под действием движущейся нагрузки. Рас-

смотрены случаи упругой и вязкоупругой ледовой пластины.

3. В нестационарной задаче о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль упругой ледовой пластины получены формулы асимптотического поведения решения для прогибов ледового покрова при больших временах и проведено исследование данного решения. Решена нестационарная задача о движении внешней нагрузки вдоль упругой ледовой пластины в канале. Решение нестационарной задачи исследовано при конечных временах.

4. Исследован вопрос корректности гипотез линейной теории гидроупругости для постановки задачи о взаимодействии вязкоупругой ледовой пластины и движущегося диполя в канале с учетом нелинейных кинематического условия и интеграла Коши-Лагранжа. Выделены три разных случая в зависимости от параметров задачи, приводящие к трем разным системам уравнений, в которых линейная теория гидроупругости остается корректной. Построено и численно исследовано решение задачи о прямолинейном движении диполя малой интенсивности под вязкоупругой ледовой пластиной в канале. Определено влияние расположения диполя в канале на прогибы и деформации в ледовом покрове.

Все результаты являются новыми, подтверждаются строгими рассуждениями с использованием развитого математического аппарата гидродинамики и теории гидроупругости и согласуются друг с другом. Результаты представляют как научный, так и практический интерес.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты носят теоретический и прикладной характер и представляют интерес для специалистов в области гидродинамики, гидроупругости и уравнений в частных производных. Работа вносит вклад в изучение взаимодействия ледового покрова, конструкций и движущихся внешних нагрузок. Полученные результаты для задачи в канале развивают теорию гидроупругости и значительно дополняют результаты изученной ранее задачи о движении внешней нагрузки по неограниченному ледовому покрову. Результаты данной работы могут использоваться в решении прикладных задач по эффективному разрушению ледового покрова или в задачах о безопасной транспортировке грузов вдоль замороженных рек и каналов. Полученные численные результаты и асимптотические формулы для прогибов ледового покрова могут использоваться для оценки возможных максимальных деформаций в ледовом покрове. Результаты работы могут применяться для анализа проводимых экспериментов в ледовых бассейнах. Как показано в данной диссертации, учет жестких стенок является важным даже для широких каналов и значительно влияет на прогибы ледового покрова. С теоретической точки зрения работа вносит вклад в изучение систем уравнений в частных производных для системы упругое тело – жидкость и развитие методов решения данных систем.

Методология и методы исследования

Для решения задач, поставленных в диссертации, используется математический аппарат механики сплошной среды, гидродинамики и линейной теории гидроупругости. Постановка задач формулируется в рамках линейной теории гидроупругости [1].

В диссертации используется классический метод разбиения задачи на гидродинамическую (связанную с расчетом течения жидкости и определением гидродинамического давления на границе области течения) и упругую (связанную с описанием деформаций тела и напряжений в нем при заданной внешней нагрузке и известной области ее приложения) составляющие и сопряжение этих частей, приводящее к одновременному решению связанной задачи о динамическом поведении системы деформируемое тело – жидкость [3]. В постановке упругой части задачи относительно колебаний ледового покрова используются уравнения колебаний тонких упругих или вязкопругих пластин [51], в постановке гидродинамической части задачи относительно течения жидкости в канале используются уравнения невязкой и несжимаемой жидкости [52]. Для решения связанных задач гидроупругости используются методы разложения прогибов льда в ряды по специально выбранным системам ортогональных функций. Также в ходе исследования задач применялось преобразование Фурье, а разложения проводились для преобразованных функций.

Для решения задачи относительно профиля потенциала скорости течения в сечении канала использовались методы решения краевых задач уравнений математической физики [53], и, в частности, метод разделения переменных. При численном и аналитическом анализе решения в виде квадратур использовались классические методы численного интегрирования и методы асимптотического анализа решения в виде интегралов, зависящих от большого параметра [54], [55]. Доказательство теоремы единственности классического решения нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова проведено с использованием известных функциональных неравенств и методами функционального анализа [56].

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет». На защиту выносятся следующие результаты:

1. Численное исследование задачи о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль вязкоупругой ледовой пластины в канале. Построение решения в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Анализ влияния параметров задачи на полученные результаты.

2. Доказательство единственности классического решения нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова в канале под действием внешней нагрузки.

3. Аналитическое решение нестационарной задачи о движении внешней нагрузки вдоль упругой ледовой пластины в канале при больших временах. Анализ полученных аналитических формул для прогибов ледового покрова. Численное исследование нестационарной задачи о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль упругой ледовой пластины в канале при конечных временах.

4. Анализ корректности гипотез линейной теории гидроупругости в постановке задачи о взаимодействии вязкоупругого ледового покрова и движущегося диполя подо льдом в канале с учетом нелинейных кинематического условия и интеграла Коши-Лагранжа. Сведение оригинальной постановки к трем разным случаям, в которых сохраняется условие малых колебаний ледового покрова. Численное ис-

следование задачи прямолинейного движения диполя с малой интенсивностью под вязкоупругой ледовой пластиной вдоль канала.

Степень достоверности и апробация результатов Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена:

1. Использованием классических подходов механики сплошных сред, гидродинамики и теории гидроупругости при построении и анализе математических моделей.

2. Проверкой корректности результатов численных расчетов различными способами: тестированием сходимости численных решений вариацией числа гидроупругих мод, вариацией интервала интегрирования и шага по параметру преобразования Фурье; проверка точности решения на вспомогательной задаче вычисления функции внешней нагрузки с применением прямого и обратного преобразования Фурье и последующего сравнения численного решения и аналитической функции.

3. Опубликованием результатов исследований в ведущих зарубежных и отечественных журналах и обсуждением результатов на многочисленных международных и всероссийских конференциях.

Основные результаты работы докладывались

– на семинаре ИВТ СО РАН "Информационно-вычислительные технологии" (руководители: академик Ю.И. Шокин, профессор В.М. Ковеня), Новосибирск, 2019;

– на семинаре ИГиЛ СО РАН "Математические модели механики сплошных сред" (руководители: член.-корр. РАН, профессор П.И. Плотников, д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтов), Новосибирск, 2018;

– на семинаре ИГиЛ СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководитель: член.-корр. РАН, профессор В.В. Пухначев), Новосибирск, 2016;

– на городском семинаре "Задачи индустриальной и прикладной математики" (руководитель: д.ф.-м.н. А.А. Папин), Барнаул, 2014-2019;

– на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета, Барнаул, 2014-2019;

– на семинаре ИМ СО РАН "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики"(руководитель: д.ф.-м.н. А.М. Блохин), Новосибирск, 2018;

а также на следующих научных конференциях:

– всероссийская конференция "Полярная механика", (Новосибирск, 2012; Санкт-Петербург, 2014; Владивосток, 2016; Санкт-Петербург, 2017; Новосибирск, 2018);

– региональная конференция "МАК: Математики – Алтайскому краю" (Барнаул, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018);

– международная научная программа "Mathematics of sea ice phenomena" (Великобритания, Кембридж, 2017);

– всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва", посвященной 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017);

– всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами; теория, эксперимент, приложения" (Бийск, 2011, 2014; Барнаул, 2017);

– международная школа-конференция "Соболевские чтения" (Новосибирск, 2016);

– 7th International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology (Сплит, Хорватия, 2015);

– международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" к 115 летию М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015);

– международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2014, 2015, 2018);

– международная научно студенческая конференция (Новосибирск, 2011, 2012);

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [57] – [72].

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, численном исследовании, обсуждении полученных результатов, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 131 страницу. Диссертация содержит 40 рисунков, 1 таблицу. Список литературы содержит 90 наименований.

Краткое изложение содержания работы

Первая глава диссертации посвящена численному и аналитическому исследованию прогибов и деформаций в ледовом покрове в результате движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала. В параграфе 1.1. сформулирована постановка задачи об установившихся прогибах в результате движения внешней нагрузки по вязкоупругой ледовой пластине в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Задача формулируется в рамках линейной теории гидроупругости. Оригинальная постановка задачи сводится к связной системе уравнений в безразмерных переменных. Решение задачи зависит от семи безразмерных параметров. В параграфе 1.2 представлен метод решения задачи. Задача решается с использованием преобразования Фурье вдоль канала и разложением образа Фурье прогибов льда методом нормальных мод поперек канала. В итоге задача сводится к бесконечной алгебраической системе линейных уравнений для коэффициентов разложения, которая решается методом редукции. В параграфе 1.3 приведены основные результаты численного исследования задачи и соответствующие графики. Представлено исследование влияния скорости движения нагрузки, коэффициента запаздывания и ширины канала. Показана зависимость качественного формирования прогибов льда в зависимости от соотношения скорости движения нагрузки и критических скоростей. В параграфе 1.4 на основе рассмотрения двух упрощенных моделей проведено исследование влияния гидродинамического давления на получаемые результаты. В параграфе 1.5 доказана единственность классического решения задачи о колебаниях ледового покрова в канале в результате движения внешней нагрузки. Рассмотрены случаи упругой и вязкоупругой ледовой пластины.

Во второй главе рассматривается нестационарная задача о движении внешней нагрузки по ледовому покрову замороженного канала. Глава состоит из двух частей: вывод асимптотических формул поведения ледового покрова при больших временах и их исследование; численное решение нестационарной задачи при конечных временах. Первой задаче посвящены параграфы 2.1 - 2.3. В параграфе 2.1 сформулирована постановка задачи о нестационарных прогибах ледового покрова в канале. Указана связь данной постановки и задачи из главы 1. В параграфе 2.2 приведен метод решения и вывод асимптотических формул. Задача решается введением гидроупругих мод колебаний ледового покрова в канале. Задача сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для поиска коэффициентов разложения на данные моды. Решение для прогибов льда выписывается в виде суммы интегралов обратного преобразования Фурье, слагаемые в которых могут иметь особенности. Интегралы с особенностями понимаются в смысле главного значения. Путем анализа данных интегралов выводится асимптотическая формула, дающая простую интерпретацию формирования прогибов льда. В параграфе 2.3 приведены результаты численного исследования асимптотического решения. В параграфе 2.4 рассмотрена вторая задача главы и проведено численное исследование нестационарных прогибов льда при конечных временах. Показана согласованность результатов задач, рассмотренных в первой и второй главах.

В третьей главе исследуется задача взаимодействия ледового покрова и движущегося подо льдом диполя. В параграфе 3.1 сформулирована постановка задачи в случае нелинейных кинематического условия и интеграла Коши-Лагранжа. Проведен анализ постановки. Введением трех безразмерных параметров, характеризующих канал и диполь, выделяются три случая, приводящие к трем разным системам уравнений, в которых гипотезы линейной теории гидроупругости остаются корректными. В параграфе 3.2 приведен алгоритм численного решения третьего случая, в котором рассматривается движение диполя с малой интенсивностью. В параграфе 3.3. приведены результаты численного исследования задачи. Основной упор сделан на анализ влияния размещения диполя в сечении канала на прогибы и деформации в ледовом покрове.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук А.А. Папину за постоянное внимание и руководство работой, доктору физ.-мат. наук А.А. Коробкину и доктору физ.-мат. наук Т.И. Хабахпашевой за ценные советы, обсуждение идей и результатов и поддержку в ходе подготовки данной диссертации. Автор также благодарит руководителей и участников научных семинаров, на которых были представлены результаты данной диссертации, за вопросы и замечания.

Глава 1

Поведение ледового покрова канала под действием движущейся внешней нагрузки

1.1 Постановка задачи

Рассматривается задача определения прогибов ледового покрова прямоугольного канала бесконечной длины под действием движущейся внешней нагрузки (Рисунок 1.1). Канал имеет конечные глубину H, $-H < z < 0$ и ширину $2L$, $-L < y < L$, в направлении x канал неограничен, $Oxyz$ – декартова система координат. Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_l и покрыт льдом. Ледовый покров рассматривается как тонкая взякоупругая пластина в рамках модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала с постоянной толщиной h_i и жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1-\nu^2)]$, где E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона. Ледовый покров закреплен на стенках канала, $y = \pm L$. Внешняя нагрузка моделируется движущемся с постоянной скоростью U локализованным гладким распределением давления по верхней поверхности ледового покрова. Задача определения прогибов ледового покрова в канале формулируется в рамках линейной теории гидроупругости [1]. Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ описывается вертикальным перемещением пластины из состояния покоя, которое удовлетворяет уравнению тонкой вязкоупругой пластины [32]

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \qquad (1.1.1)$$

$$(-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = 0),$$

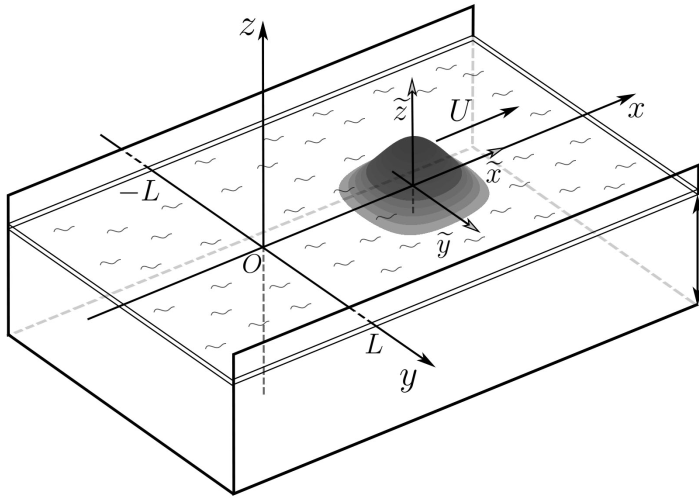


Рис. 1.1: Схема задачи.

где $\tau = \eta/E$ – время запаздывания, η – вязкость льда, $\nabla^4 = \partial^4/\partial x^4 + 2\,\partial^4/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4/\partial y^4$, $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_i – плотность льда, $p(x, y, 0, t)$ – гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность ледового покрова, $P(x, y, t)$ – внешняя нагрузка, t – время. Внешняя нагрузка $P(x, y, t)$ "движется" вдоль центральной линии канала в положительном направлении x и имеет заданный вид

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (-\infty < x < \infty,\ -L < y < L), \qquad (1.1.2)$$

$$P_1(\widetilde{x}) = \big(\cos(\pi c_1 \widetilde{x}) + 1\big)/2 \ \ (c_1|\widetilde{x}| < 1), \quad P_1(\widetilde{x}) = 0 \ \ (c_1|\widetilde{x}| \geq 1), \quad \widetilde{x} = (x - Ut)/L,$$

$$P_2(\widetilde{y}) = \big(\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1\big)/2 \ \ (c_2|\widetilde{y}| < 1), \quad P_2(\widetilde{y}) = 0 \ \ (c_2|\widetilde{y}| \geq 1), \qquad \widetilde{y} = y/L,$$

где P_0 – амплитуда внешнего давления, c_1 и c_2 – безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующие размер области приложения давления к ледовой пластине. В данном параграфе рассматривается симметричное движение нагрузки, $P_1(\widetilde{x}) = P_1(-\widetilde{x})$, $P_2(\widetilde{y}) = P_2(-\widetilde{y})$, однако аналогичный анализ может быть проведен и для внешней нагрузки, движущейся вблизи одной из стенок канала.

Гидродинамическое давление на границе раздела лед – жидкость задается линеаризованным интегралом Коши-Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (-\infty < x < \infty,\ -L < y < L), \qquad (1.1.3)$$

где g – модуль ускорения силы тяжести и $\varphi(x,y,z,t)$ – потенциал скорости течения жидкости в канале, вызванного прогибом пластины. Потенциал скорости $\varphi(x,y,z,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения и граничным условиям

$$\varphi_z = w_t \quad (z=0), \qquad \varphi_y = 0 \quad (y=\pm L), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z=-H). \tag{1.1.4}$$

Ледовый покров закреплен на стенках канала и прогиб льда удовлетворяет условиям жесткого защемления

$$w=0, \quad w_y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty,\ y=\pm L). \tag{1.1.5}$$

Коэффициент τ при старшей производной в уравнении вязкоупругой пластины (1.1.1) отвечает за затухание колебаний ледового покрова в отдалении от нагрузки, $|\widetilde{x}| \to \infty$.

Задача (1.1.1) – (1.1.5) решается в безразмерных переменных со следующими масштабами: масштаб длины – L, масштаб времени – L/U и масштаб давления – P_0. Безразмерные переменные обозначены знаком $\sim$, безразмерная глубина канала H/L обозначена h. Движущаяся совместно с нагрузкой система координат $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ задается соотношениями

$$\widetilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \widetilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \widetilde{x} = \frac{x-Ut}{L}, \quad \widetilde{t} = \frac{U}{L}t, \quad \widetilde{P} = P_1(\widetilde{x})P_2(\widetilde{y}).$$

Решение задачи (1.1.1) – (1.1.5) ищется в движущейся системе координат $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ в виде

$$w(x,y,t) = w(\widetilde{x}L+Ut, L\widetilde{y}, t) = w_{sc}\,\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{y}),$$

$$\varphi(x,y,t) = \varphi(\widetilde{x}L+Ut, L\widetilde{y}, t) = \varphi_{sc}\,\widetilde{\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),$$

где $w_{sc} = P_0/(\rho_l g)$ и $\varphi_{sc} = (UP_0)/(\rho_l g)$ масштабы прогибов льда и потенциала скорости течения соответственно.

В безразмерных переменных задача перепишется в виде (ниже знак $\sim$ опускается)

$$\alpha h \mathrm{Fr}^2\, w_{xx} + \beta\Big(1-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\Big)\nabla^4 w + w = h\mathrm{Fr}^2\varphi_x - P_1(x)P_2(y) \tag{1.1.6}$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1, \quad z = 0),$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \ \ -1 < y < 1, \ \ -h < z < 0), \tag{1.1.7}$$

$$\varphi_z = -w_x \quad (z = 0), \qquad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = -h), \tag{1.1.8}$$

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (y = \pm 1), \tag{1.1.9}$$

$$w, \varphi \to 0 \qquad (|x| \to \infty), \tag{1.1.10}$$

где $\beta = D/(\rho_l g L^4)$, $\varepsilon = (\tau U)/L$, $\alpha = (\rho_i h_i)/(\rho_l L)$ и $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gH}$ – число Фруда.

Решение задачи (1.1.6) – (1.1.10) зависит от семи безразмерных параметров – h, α, β, ε, Fr, c_1 и c_2, которые описывают соотношение сторон канала, характеристики льда и внешнюю нагрузку. Целью решения задачи (1.1.6) – (1.1.10) является нахождение прогибов ледового покрова и на их основе определение максимальных деформаций в ледовом покрове для заданных значений перечисленных безрамерных параметров.

В линейной теории гидроупругости деформации изменяются линейно по толщине ледовой пластины и в середине пластины деформации равны нулю [1]. Следовательно, относительно толщины пластины, максимальная деформация достигается на верхней или нижней поверхности. В данной работе рассматриваются только положительные деформации, которые соответствуют удлинению и растяжению ледового покрова. Масштаб деформаций равен $h_i P_0/(2\rho_l g L^2)$. Тензор деформации для пластины имеет вид [1]

$$E(x, y) = -\zeta \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix}, \tag{1.1.11}$$

где ζ – безразмерная координата по толщине льда, $-1 \leq \zeta \leq 1$. Тензор (1.1.11) описывает поле деформаций в ледовом покрове (в рассматриваемом случае поле удлинений). Чтобы найти максимальные удлинения, нужно найти собственные значения тензора (1.1.11) и выбрать максимальное. В линейной теории удлинения пропорциональны амплитуде P_0 внешней нагрузки. Использование линейной теории гидроупругости для определения деформаций в ледовом покрове является корректным, если выполнено условие $w_x^2 + w_y^2 \ll 1$ и деформации не превышают критического значения ϵ_{cr} для рассматриваемых параметров льда [23].

Критическое значение, или предел текучести материала, определяется как значение деформаций $\epsilon = \epsilon_{cr}$, при которой материал начинает деформироваться пластически [73]. Для того, чтобы линейная вязкоупругая модель оставалась корректной необходимо, чтобы напряжения в ледовом покрове не приводили к деформациям льда, превышающим предел текучести ϵ_{cr}. Постулируется, что любые значения деформаций, которые больше предела текучести ϵ_{cr} в рамках данной модели приводят к разрушению льда. Основная цель исследования в рамках линейной модели – определение областей с максимальными деформациями в ледовой пластине и получение оценок на входные параметры задачи, приводящие к критическим значениям деформаций. Если деформации превышают критическое значение, то дальнейшее использование линейной теории гидроупругости для, например, исследования эволюции разрушения ледового покрова, является некорректным. В экспериментах со льдом удлинения, при которых лед начинал ломаться, зафиксированы равными $3 \cdot 10^{-5}$, когда теоретическое значение критического значения для этих же параметров льда равно $4.3 \cdot 10^{-5}$ (см. [74]). В дальнейшем анализе используется значение $\epsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$, используемое в [23].

1.2 Метод решения

Система уравнений (1.1.6) – (1.1.10) решается с использованием преобразования Фурье в направлении x. Уравнение пластины (1.1.6) после применения преобразования Фурье примет вид

$$(1-\alpha h \mathrm{Fr}^2\xi^2)w^F + \beta(1-i\xi\varepsilon)(w^F_{yyyy} - 2\xi^2 w^F_{yy} + \xi^4 w^F) = i\xi h \mathrm{Fr}^2 \varphi^F - P^F(\xi, y), \quad (1.2.1)$$

где

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x,y) e^{-i\xi x} dx, \qquad P^F(\xi, y) = P_2(y) P_1^F(\xi).$$

Решение уравнения (1.2.1) $w^F(\xi, y)$ ищется в виде разложения

$$w^F(\xi, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi)\psi_j(y), \tag{1.2.2}$$

где $a_j(\xi)$ – коэффициенты разложения, $\psi_j(y)$ – нормальные моды колебаний упругой балки. Разложение (1.2.2) использовалось в [26] для определения дисперсионных соотношений гидроупругих волн, распространяющихся вдоль замороженного канала. Функции $\psi_j(y)$ являются решением спектральной задачи

$$\psi_j^{IV} = \lambda_j^4\psi_j \quad (-1 < y < 1), \qquad \psi_j = \psi_j' = 0 \quad (y = \pm 1). \tag{1.2.3}$$

Легко проверить, что решение этой спектральной задачи представимо в виде суммы четных и нечетных функций. Поскольку $P_2(y)$ является четной функцией, то в разложении (1.2.2) используются только четные функции $\psi_j(y)$

$$\psi_j(y) = A_j\Big(\cos\lambda_j y - B_j\cosh\lambda_j y\Big), \quad B_j = \frac{\cos\lambda_j}{\cosh\lambda_j}, \quad A_j^2(1 + B_j^2) = 1, \tag{1.2.4}$$

где λ_j – решение трансцендентного уравнения $\tan\lambda_j = -\tanh\lambda_j$. Можно показать, что $\lambda_j = \pi j - \pi/4 + \Delta_j$, где $\Delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Функции (1.2.4) ортонормированы.

Подставляя разложение (1.2.2) в уравнение (1.2.1) и после последовательного умножения обеих сторон уравнения на $\psi_m(y)$, $m \geq 1$, интегрирования результата по y от -1 до 1, и с учетом (1.2.3), уравнение (1.2.1) сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$(1 - \alpha h \mathrm{Fr}^2\xi^2)\, a_m + \beta(1 - i\xi\varepsilon)\left(\lambda_m^4 a_m - 2\xi^2\sum_{j=1}^{\infty} C_{mj}a_j + \xi^4 a_m\right) =$$

$$= \xi^2 h \mathrm{Fr}^2 \sum_{j=1}^{\infty} M_{mj}a_j - P_m(\xi), \tag{1.2.5}$$

$$C_{mj} = -\int_{-1}^{1} \psi_m'(y)\psi_j'(y)dy, \quad M_{mj}(\xi) = \int_{-1}^{1} \phi_j(y, 0, \xi)\psi_m(y)dy,$$

$$\varphi^F(\xi, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi)\phi_j(y, z, \xi), \quad P_m(\xi) = P_1^F(\xi)P_m^*, \quad P_m^* = \int_{-1}^{1} P_2(y)\psi_m(y)dy.$$

Функции $\phi_j(y,z,\xi)$ являются решениями следующей краевой задачи

$$\phi_{j,yy}+\phi_{j,zz}=\xi^2\phi_j \quad (-1<y<1,\ -h<z<0),$$

$$\phi_{j,y}=0 \quad (y=\pm 1), \qquad \phi_{j,z}=0 \quad (z=-h), \qquad \phi_{j,z}=\psi_j(y) \quad (z=0),$$

где $\phi_{j,yy}=\partial^2\phi_j/\partial y^2$. Здесь переменная преобразования Фурье ξ играет роль параметра. Интегралы, аналогичные C_{mj} и $M_{mj}(\xi)$, получены в [26] и вычисляются аналитически.

Систему (1.2.5) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{A}\vec{a}=-\vec{P}, \tag{1.2.6}$$

$$\mathbf{A}=(1-\alpha h\mathrm{Fr}^2\xi^2)\,\mathbf{I}+\beta(1-i\xi\varepsilon)\,\mathbf{Q}-h\mathrm{Fr}^2\xi^2\,\mathbf{M},$$

где $\vec{a}=(a_1,a_2,...)^T$, $\mathbf{M}=\{M_{mj}\}_{m,j=1}^{\infty}$, $\vec{P}=(P_1,P_2,...)^T$, $\mathbf{Q}=\mathbf{D}-2\xi^2\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}=\mathrm{diag}\{\lambda_1^4+\xi^4,\lambda_2^4+\xi^4,...\}$, $\mathbf{C}=\{C_{mj}\}_{m,j=1}^{\infty}$. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ с $\varepsilon=0$ исследованы в [26]. Эти собственные значения дают дисперсионные соотношения распространяющихся гидроупругих волн постоянной амплитуды вдоль замороженного канала. Для решения уравнения (1.2.6) вектор $\vec{a}$ разделяется на вещественную и мнимую части, $\vec{a}=\vec{a}^R+i\vec{a}^I$. Все остальные векторы и элементы матриц в (1.2.6), за исключением коэффициента $i\xi\varepsilon$ при матрице $\mathbf{Q}$, являются вещественными. Для функции $P_1(x)$, заданной в форме (1.1.2), образ Фурье $P_1^F(\xi)$ является четной функцией по ξ. Можно показать, что $a_j^R(\xi)$ четная и $a_j^I(\xi)$ нечетная функции по ξ.

Прогиб $w(x,y)$ определяется применением обратного преобразования Фурье к $w^F(\xi,y)$

$$w(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(y)\int\limits_0^{\infty}(a_j^R(\xi)\cos(\xi x)-a_j^I(\xi)\sin(\xi x))d\xi, \tag{1.2.7}$$

где функции $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$ – решения уравнения (1.2.6).

Бесконечный ряд в (1.2.7) ограничивается N_{mod} членами

$$w(x,y)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{N_{mod}}\psi_j(y)W_j(x), \quad W_j(x)=\int\limits_0^{\infty}(a_j^R(\xi)\cos(\xi x)-a_j^I(\xi)\sin(\xi x))d\xi, \tag{1.2.8}$$

а интегралы аппроксимируются следующим образом

$$W_j(x) = \sum_{n=1}^{N_\xi} \int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (a_j^R(\xi)\cos(\xi x) - a_j^I(\xi)\sin(\xi x))d\xi. \tag{1.2.9}$$

Функции $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$ вычисляются при $\xi = \xi_n$, $1 \le n \le N_\xi$, $\xi_1 = 0$, с фиксированным шагом $\Delta\xi$. Интегралы в (1.2.9) решаются аналитически с использованием линейной аппроксимации функций $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$ на каждом интервале $[\xi_n, \xi_{n+1}]$.

Вычисленные прогибы и деформации для канала сравниваются с соответствующими результатами для неограниченного ледового покрова (в том числе и для проверки точности вычислений при увеличении ширины канала). Прогибы $w_\infty(x, y)$ для неограниченной ледовой пластины и такой же внешней нагрузки (1.1.2) удовлетворяют системе уравнений (1.1.1) – (1.1.5) без учета краевых условий на стенках канала, которые заменяются условием затухания колебаний на бесконечности $y \to \infty$, и определяются путем применения преобразования Фурье по y к уравнению (1.2.1). Тогда

$$w_\infty(x,y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty Q^R(\xi,\eta)\cos(\eta y)d\eta\right)\cos(\xi x)d\xi -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty Q^I(\xi,\eta)\sin(\eta y)d\eta\right)\sin(\xi x)d\xi, \tag{1.2.10}$$

где η –параметр преобразования Фурье вдоль y и

$$Q^R(\xi,\eta) = \frac{-P^{XY}q^R}{(q^R)^2+(q^I)^2}, \qquad Q^I(\xi,\eta) = \frac{P^{XY}q^I}{(q^R)^2+(q^I)^2}, \qquad P^{XY}(\xi,\eta) = P_1^F(\xi)P_2^F(\eta),$$

$$q^R = 1 - \alpha h \mathrm{Fr}^2\xi^2 - \frac{\xi^2 h \mathrm{Fr}^2\coth(\lambda h)}{\lambda} + \beta\lambda^4, \quad q^I = -\xi\varepsilon\lambda^4, \quad \lambda = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Интегралы в (1.2.10) вычисляются так же, как и интегралы в (1.2.7).

1.3 Численные результаты

Задача определения прогибов ледового покрова, вызванного движущейся нагрузкой, решается численно для пресноводного льда со следующими параметрами: $\rho_i = 917$ кг/м^3, $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.1$ с, $h_i = 0.1$ м и $H = 2$ м. Рассматривается внешняя нагрузка (1.1.2), приложенная к площадке 2 м $\times$ 2 м. Скорость движения нагрузки U и полуширина канала L варьируются в расчетах. Диапазоны скоростей U и ширины L выбираются в соответствии с критическими скоростями гидроупругих волн, распространяющихся в замороженном канале, которые были вычислены в [26], и характеристической длиной ледового покрова $(D/\rho_l g)^{1/4}$, равной 2.48 м в рассматриваемом случае.

Вычисление прогибов льда $w(x, y)$ и вторых производных в тензоре деформации (1.1.11) требуют аналитического решения интегралов (1.2.7) с учетом линейной аппроксимации функций $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$, вычисленных численно. Число этих интегралов зависит от количества учитываемых мод N_{mod} колебаний упругой балки. Выбор значений шага $\Delta\xi$ и количества шагов N_ξ в (1.2.9) зависит от параметров задачи и могут изменяться в вычислениях. Система уравнений (1.2.6) из N_{mod} решается численно N_ξ раз для каждого случая. Получено, что внешняя нагрузка (1.1.2) точно аппроксимируется формулами аналогичными (1.2.8) и (1.2.9) с $N_{mod} = 10$, $N_\xi = 400$ и $\Delta\xi = 0.25$ для $c_1 = c_2 = 10$, т. е. для размеров области нагрузки в десять раз меньше ширины канала. При расчетах прогибов льда количество мод N_{mod} варьировалось от 5 до 15 для проверки сходимости численного решения.

Шаг интегрирования $\Delta\xi$ и количество шагов N_ξ в (1.2.9) зависят от безразмерных параметров задачи, в частности, от размера области давления и от коэффициента запаздывания τ. Для проверки численного алгоритма, для одного и того же набора параметров задачи значения $\Delta\xi$ и N_ξ изменялись в широком диапазоне. Например, при $c_1 = c_2 = 10$ и $\tau = 0.1$ с хорошая точность вычислений достигается при значениях $\Delta\xi = 0.1$ и $N_\xi = 400$. Эти значения c_1, c_2 и τ были использованы в большинстве представленных расчетов. Численный анализ направлен на исследование прогибов льда и деформаций в ледовом покрове в зависимости от ширины канала и скорости движения нагрузки. Расчеты для прогибов и деформаций представлены на графиках в движущейся системе координат с центром нагрузки в точке $(0, 0)$.

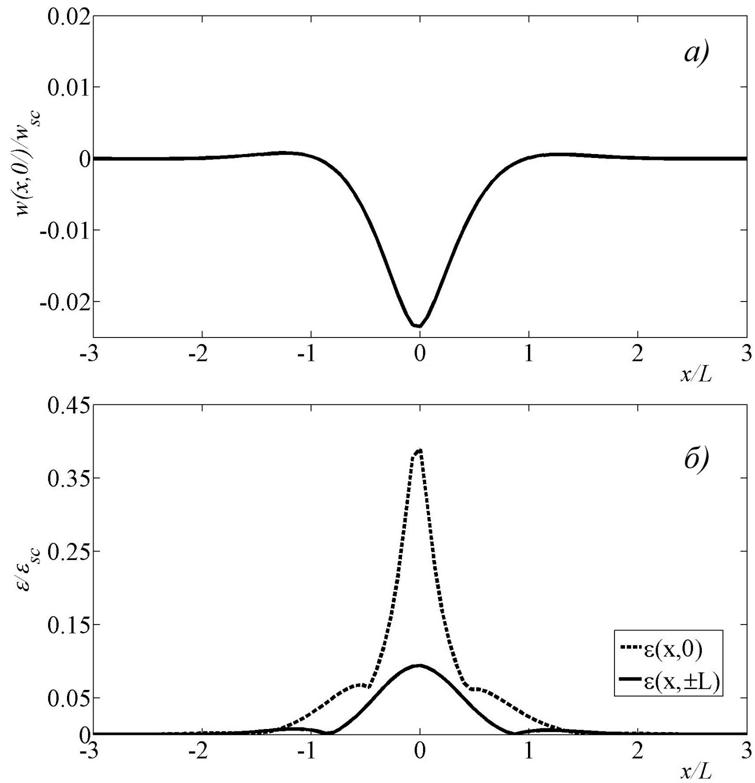


Рис. 1.2: Прогибы ледовой пластины вдоль центральной линия канала (a) и распределение деформаций ($б$) для докритической скорости движения нагрузки $U = 3$ м/с. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м. Деформации вдоль центральной линии показаны пунктирной линией, а деформации на стенках – сплошной линией ($б$).

Безразмерные прогибы ледового покрова и распределение деформаций (удлинений) как функции от x вдоль центральной линии канала $y = 0$ и вдоль стенок $y = \pm L$ показаны на Рисунках 1.2 и 1.3. Здесь и далее на рисунках изображены максимальные положительные деформации, которые достигаются на поверхности ледовой пластины. Критическая скорость первой распространяющейся гидроупругой волны ($n = 1$) для этой ширины канала равна 5.38 м/с [26]. Случай с докритической скоростью движения нагрузки $U = 3$ м/с показан на Рисунке 1.2 и случай со сверхкритической скоростью (относительно критической скорости первой волны) $U = 7$ м/с показан на Рисунке 1.3. Нагрузка движется слева направо.

Для докритической скорости (Рисунок 1.2) прогибы льда локализованы вблизи нагрузки. Движение нагрузки не создает гидроупругие волны, распространяющиеся от нагрузки, в силу того, что гидроупругих волн с фазовой скоростью ниже критической скорости первой волны не существует (это соответствует результатам для докритической скорости [1] для неограниченной ледовой пластины; для более детального анализа критических скоростей в канале см. Рисунок 6 с фазовыми скоростями для канала в [26]). Гидроупругие волны вносят вклад в качественное формирование прогибов льда для сверхкритической скорости (Рисунок 1.3). Для скорости нагрузки $U = 7$ м/с, только первая гидроупругая волна ($n = 1$) с волновым числом $k \approx 0.43$ м$^{-1}$ имеет фазовую скорость, равную скорости движения нагрузки (графики фазовых скоростей см. в [26], в частности, Рисунок 6б). Это волновое число соответствует длине волны 14.6 м, которое равно расстоянию между двумя последующими пиками прогибов льда на Рисунке 1.3. Нагрузка, движущаяся со скоростью $U = 7$ м/с, создает первую гидроупругую волну, которая является стационарной в движущейся системе координат и амплитуда которой затухает с увеличением расстояния от нагрузки из-за вязкоупругости льда. В обоих случаях прогибы и деформации в пластине становятся очень малыми позади нагрузки на расстоянии 20 м. Максимальные деформации достигаются на центральной линии канала в области приложения нагрузки для докритической скорости и на стенках канала для сверхкритической скорости движения нагрузки. Деформации на графиках масштабированы значением $\varepsilon_{sc} = h_i P_0/(2\rho_l g L^2)$. Для критического значения 8×10^{-5} ожидается, что при $U = 3$ м/с лед начнет разрушаться в области приложения нагрузки для амплитуды $P_0 > 4$ кПа. Соответственно для $U = 7$ м/с (Рисунок 1.3) можно ожидать, что лед начнет разрушаться в непосредственной близости от стенок канала также для $P_0 > 4$ кПа.

Безразмерные прогибы льда вдоль центральной линии и деформации вдоль центральной линии и на стенках канала для скорости движения нагрузки, близкой к критической скорости первой гидроупругой волны $U = 5.38$ м/с, показаны на Рисунке 1.4. Прогибы и деформации примерно в десять раз больше, чем для докрити-

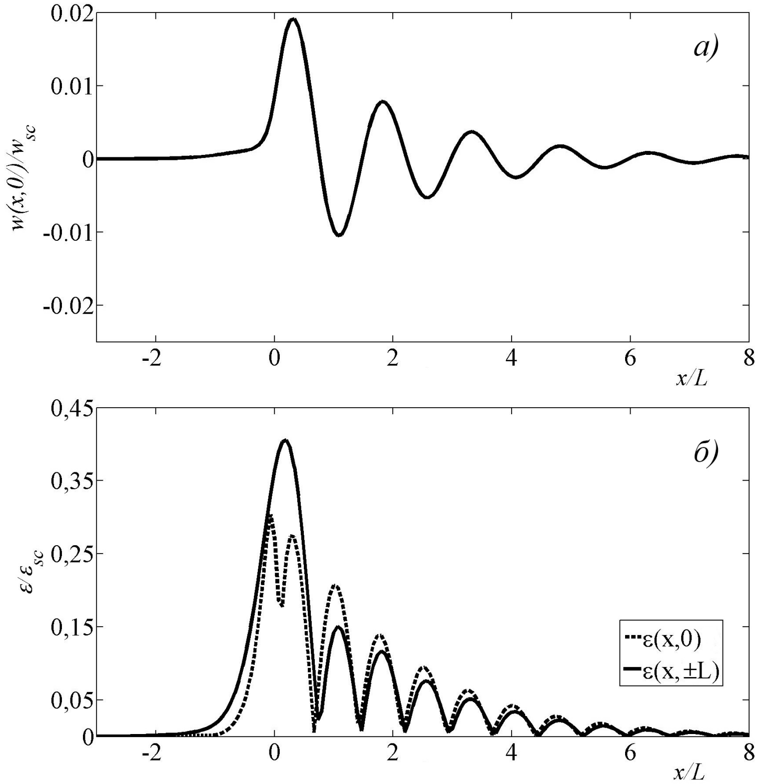


Рис. 1.3: Прогибы ледовой пластины вдоль центральной линия канала (*a*) и деформации (*б*) для сверхкритической скорости движения нагрузки $U = 7$ м/с. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м. Деформации вдоль центральной линии показаны пунктирной линией, а деформации на стенках – сплошной линией (*б*).

ческой скорости нагрузки $U = 3$ м/с и для сверхкритической скорости $U = 7$ м/с (Рисунки 1.2, 1.3 и 1.4). Максимальные деформации на стенках канала примерно в четыре раза больше, чем вдоль центральной линии канала (Рисунок 1.4*б*). Прогиб ледовой пластины формируется как спереди, так и сзади движущейся нагрузки. Максимальные деформации достигаются на стенках канала и превышают критическое значение при $P_0 > 206$ Па.

Прогибы и деформации для скорости $U = 25$ м/с показаны на Рисунке 1.5. Эта скорость выше критической скорости второй гидроупругой волны $U \approx 15.3$ м/с [26]. Прогиб ледового покрова формируется сзади движущейся нагрузки и не наблюдается перед ней. Деформации достигают своего максимума у стенок канала, но этот максимум в 20 раз меньше, чем для скорости нагрузки близкой к критической скорости первой гидроупругой волны (Рисунок 1.4*б*). Существуют три гидроупругие волны с фазовой скоростью 25 м/с, которые будут распространять-

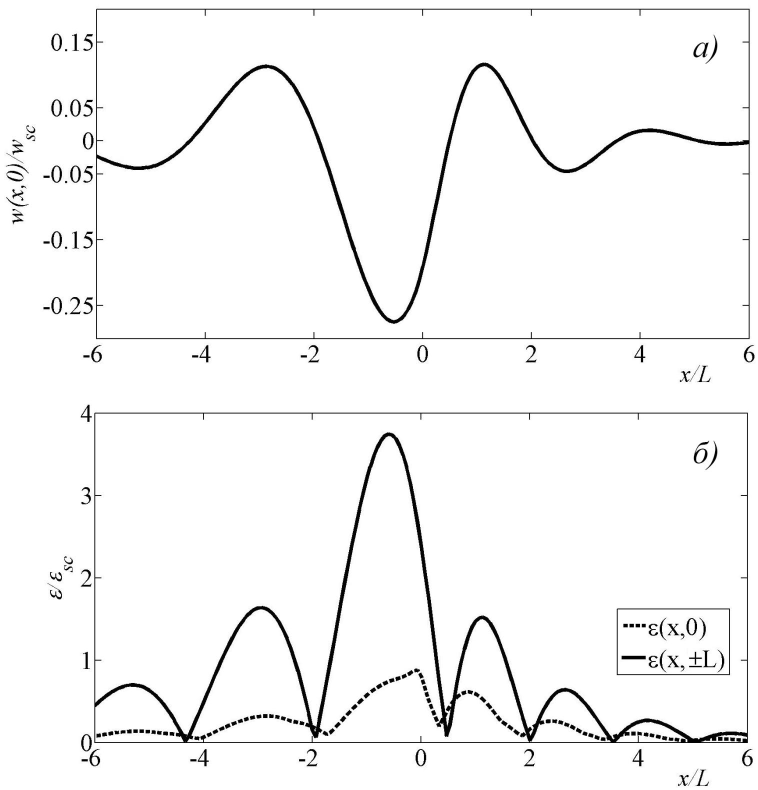


Рис. 1.4: Прогибы ледовой пластины вдоль центральной линия канала (a) и деформации ($б$) для скорости движения нагрузки, близкой к критической скорости первой гидроупругой волны, $U = 5.38$ м/с. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м. Деформации вдоль центральной линии показаны пунктирной линией, а деформации на стенках – сплошной линией ($б$).

ся от нагрузки при движении в канале: две гидроупругих волны с номером $n = 2$, с волновыми числами $k \approx 0.135$ м$^{-1}$ и $k \approx 1.02$ м$^{-1}$, и первая гидроупругая волна $n = 1$ с волновым числом $k \approx 1.2$ м$^{-1}$. Соответствующие длины волн 45 м, 6.3 м и 6 м. Прогиб ледовой пластины за нагрузкой соответствует волне длиной 45 м. Короткие волны формируются перед нагрузкой, но не наблюдаются в силу большого значения коэффициента запаздывания τ.

Безразмерные прогибы вдоль центральной линии канала как функции скорости движения нагрузки U показаны на Рисунке 1.6a. Разными линиями выделены прогиб льда в центре приложения нагрузки ($x = y = 0$) и максимальное и минимальное значение прогибов вдоль центральной линии при $y = 0$. Пик максимальных удлинений наблюдается при $U \approx 5.5$ м/с. Это значение немного больше, чем критическая скорость первой гидроупругой волны, 5.38 м/с [26]. Сдвиг значения

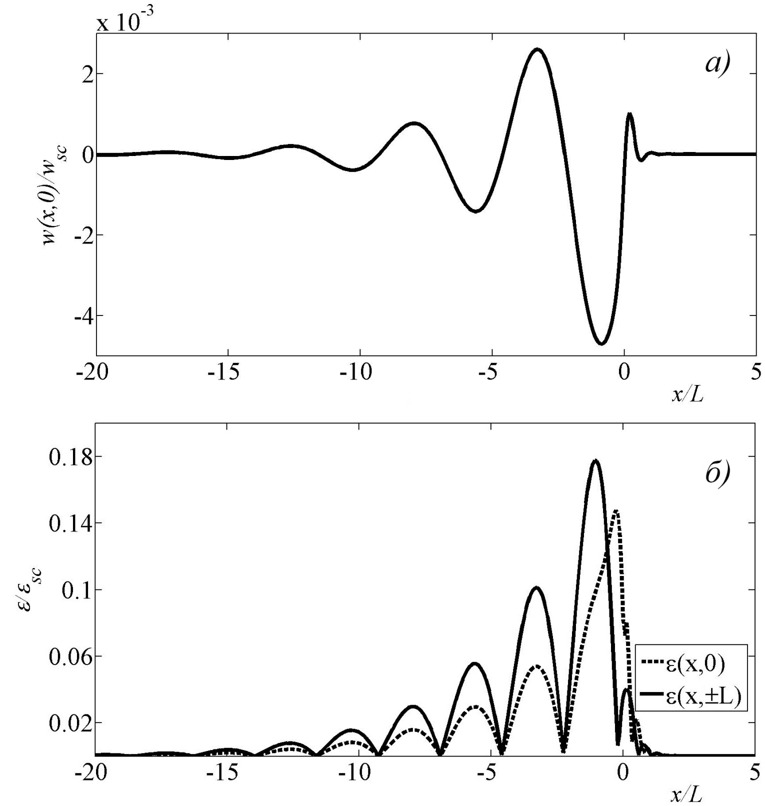


Рис. 1.5: Прогибы ледовой пластины вдоль центральной линия канала (a) и деформации ($б$) для сверхкритической скорости движения нагрузки $U = 25$ м/с. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м. Деформации вдоль центральной линии показаны пунктирной линией, а деформации на стенках – сплошной линией ($б$).

критической скорости может быть вызван влиянием коэффициента запаздывания $\tau = 0.1$ с, на полученные результаты на Рисунках 1.2–1.6. Критическая скорость второй гидроупругой волны, $U = 15.3$ м/с, визуально наблюдается только в вычислениях с очень малым коэффициентом запаздывания $\tau = 0.001$ с.

Нормированные профили прогибов льда поперек канала при $x = 0$ показаны на Рисунке 1.6$б$ для разных значений скорости внешней нагрузки. Основной вклад в форму прогибов, соответствующих докритической скорости $U = 3$ м/с, вносит профиль первой гидроупругой волны, распространяющейся в канале (см. [26], Рисунок 7). Для скорости $U = 7$ м/с, которая больше критической скорости первой гидроупругой волны, но меньше критической скорости второй гидроупругой волны, основной вклад вносят профили первой и второй гидроупругих волн, распространяющихся в канале. Для скорости $U = 25$ м/с, которая больше критической скорости второй гидроупругой волны, профили первых трех гидроупругих

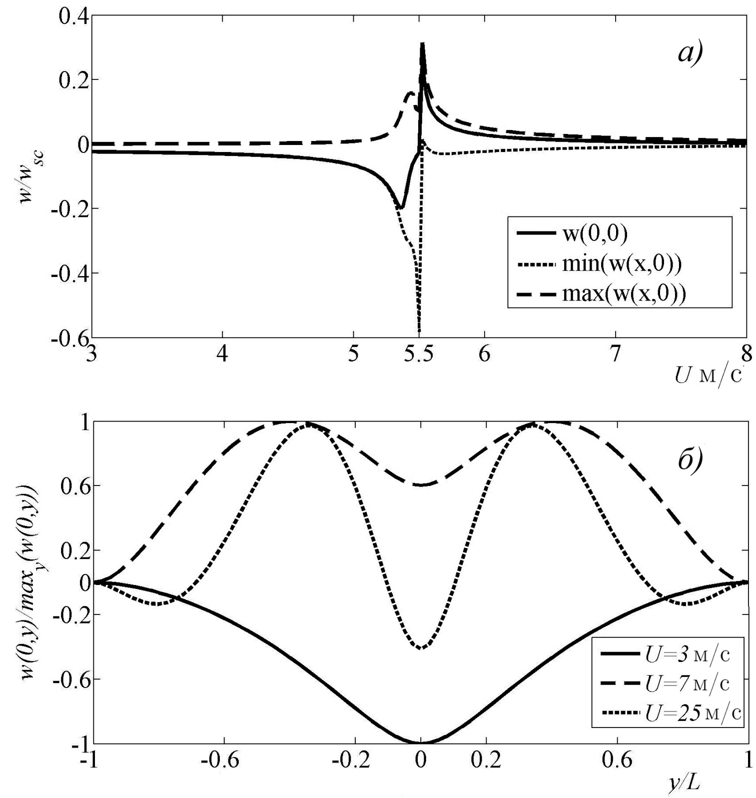


Рис. 1.6: (*а*) Прогибы льда в центре приложения нагрузки (сплошная линия), максимум (пунктирная линия) и минимум (точечная линия) прогибов льда вдоль центральной линии канала как функции скорости движения нагрузки U; (*б*) нормированные профили прогибов льда поперек канала при $x = 0$ для $U = 3$, 7 и 25 м/с.

волн, распространяющихся в канале ($n = 1, 2, 3$), вносят вклад в формирование волнового профиля прогибов ледового покрова.

Влияние времени запаздывания τ на прогибы и деформации в ледовой пластине показан на Рисунках 1.7 и 1.8. Вычисления проведены для докритической, $U = 3$ м/с (Рисунок 1.7), и сверхкритической, $U = 7$ м/с (Рисунок 1.8), скоростей движения нагрузки. Уменьшение времени запаздывания увеличивает максимальные деформации. Однако принципиальное расположение области максимальных деформаций в ледовой пластине, вдоль центральной линии или на стенках канала, не зависит от τ. Для докритической скорости движения нагрузки увеличение времени запаздывания сдвигает точки максимальных прогибов и деформаций от центра нагрузки (Рисунок 1.7*б,в*). Аналогичное смещение позиции максимального возмущения в ледовом покрове измерялось в [30] и было использовано для измерения вязкопругих характеристик льда. Это смещение не замечено для сверхкрити-

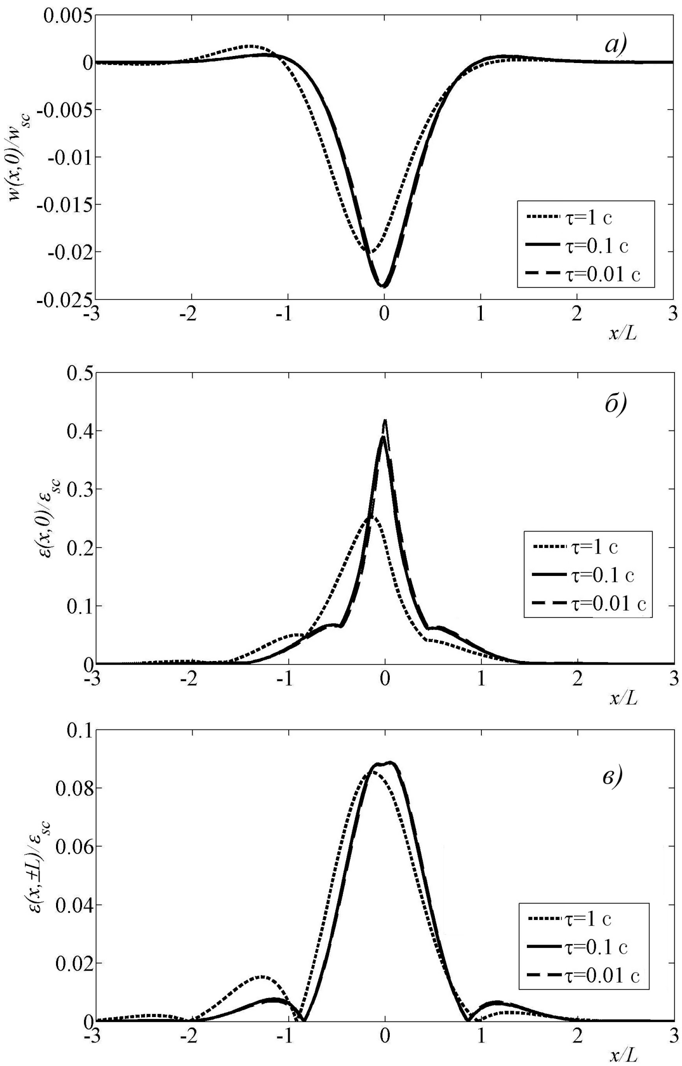


Рис. 1.7: Прогибы (*а*) и деформации (*б, в*) для скорости движения нагрузки $U = 3$ м/с и разных значений коэффициента запаздывания τ. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 0.1$ м и $H = 2$ м.

ческой скорости (Рисунок 1.8), где позиция максимальных деформаций в ледовой пластине не сдвигается при изменении τ. Уменьшение времени запаздывания увеличивает дистанцию наблюдаемых прогибов в ледовом покрове. Длина волны в ледовом покрове спереди нагрузки (Рисунок 1.8) слабо зависит от τ и равна длине первой гидрупругой волны, распространяющейся вдоль канала с фазовой скоростью 7 м/с. Сзади нагрузки также можно заметить гидроупругие волны этой же длины, но со значительно меньшей амплитудой. Они наблюдаются только при малых значениях τ (Рисунок 1.8 *б,в*) и в небольшом отдалении от нагрузки. Для докритической скорости и $\tau < 0.1$ с прогибы и деформации слабо зависят от из-

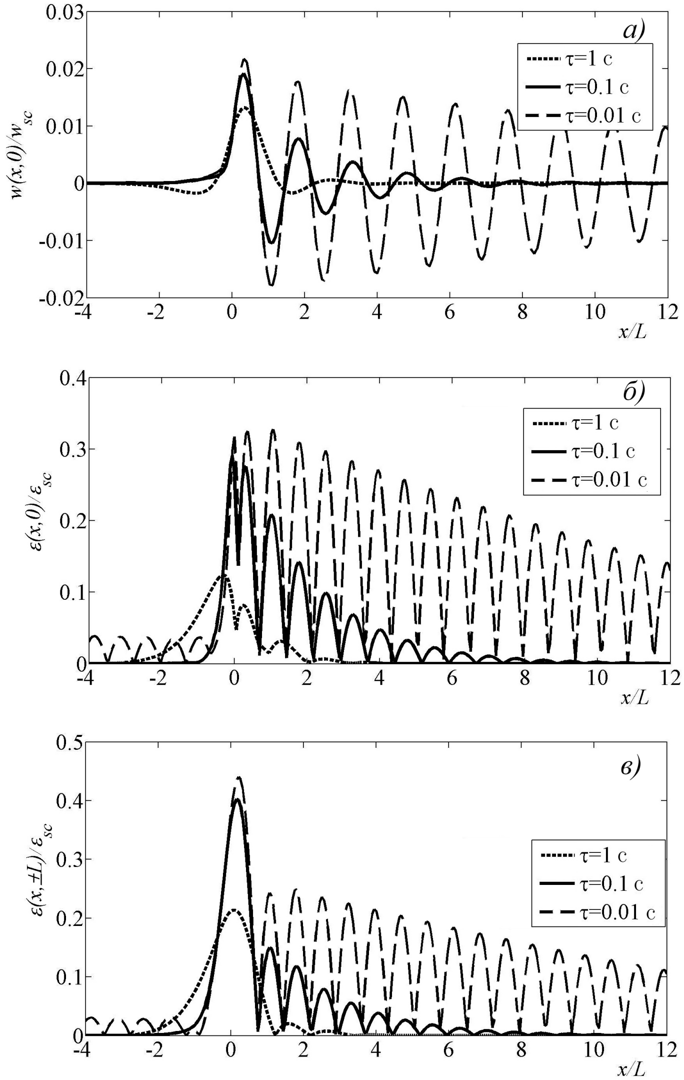


Рис. 1.8: Прогибы (*а*) и деформации (*б, в*) для скорости движения нагрузки $U = 7$ м/с и разных значений коэффициента запаздывания τ. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 0.1$ м и $H = 2$ м.

менения τ.

Влияние ширины канала $2L$ на прогибы и деформации показаны на Рисунках 1.9 и 1.10 для докритической скорости $U = 3$ м/с и сверхкритической скорости $U = 7$ м/с движения внешней нагрузки. Результаты вычислений представлены в размерных переменных для $P_0 = 1$ кПа. Критические скорости гидроупругих волн в канале зависят от ширины канала. Эти скорости увеличиваются при уменьшении ширины канала. Скорость $U = 7$ м/с докритическая для $L = 5$ м, но сверхкритическая для других значений L на Рисунке 1.10. Это объясняет почему кривая для $L = 5$ м качественно отличается от остальных кривых на Рисунке 1.10. Результаты

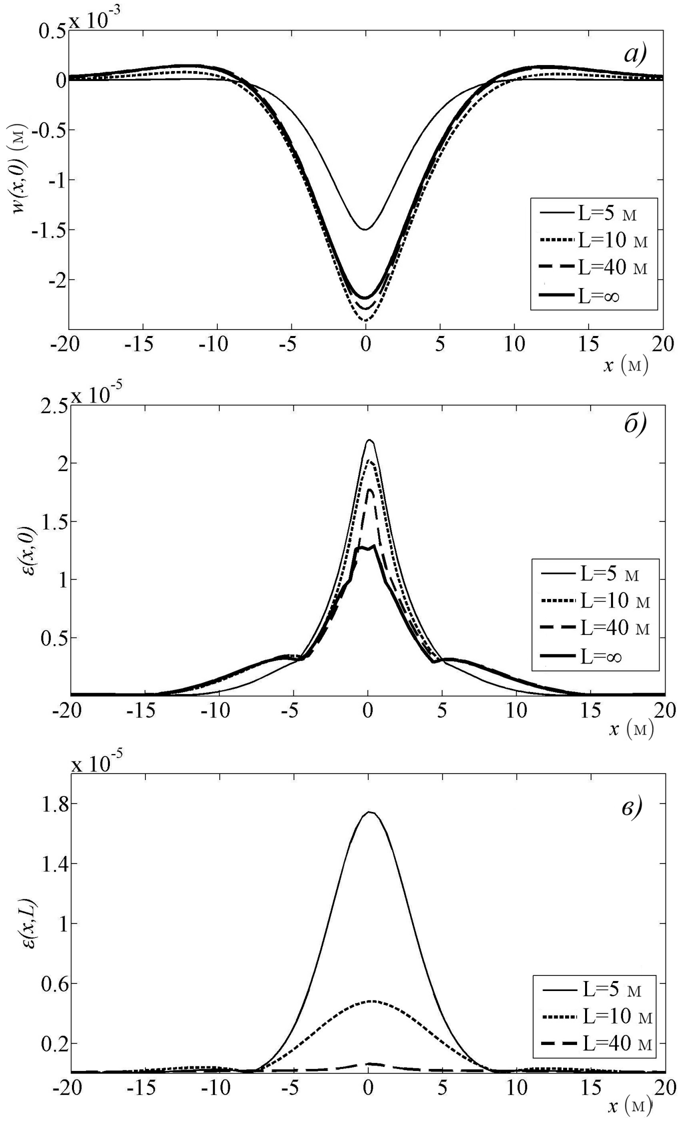


Рис. 1.9: Прогибы вдоль центральной линии канала, (*а*), и деформации вдоль центральной линии (*б*) и на стенках канала (*в*) в ледовом покрове для скорости $U = 3$ м/с и разной ширины канала. Здесь $h_i = 0.1$ м, $H = 2$ м и $L = 5$ м (тонкая сплошная линия), $L = 10$ м (точечная линия), $L = 40$ м (пунктирная линия) и для неограниченного ледового покрова (жирная сплошная линия).

показывают, что при увеличении ширины ледового покрова прогибы льда и деформации в ледовом покрове приближаются к своим значениям для неограниченного ледового покрова, определяемых формулой (1.2.10). Прогибы льда увеличиваются, а деформации уменьшаются при увеличении расстояния между стенками.

Влияние глубины и ширины канала на критические скорости первой гидроупругой волны показаны на Рисунке 1.11. Эти критические скорости вычислены с использованием дисперсионных соотношений, полученных в [26]. С увеличением глу-

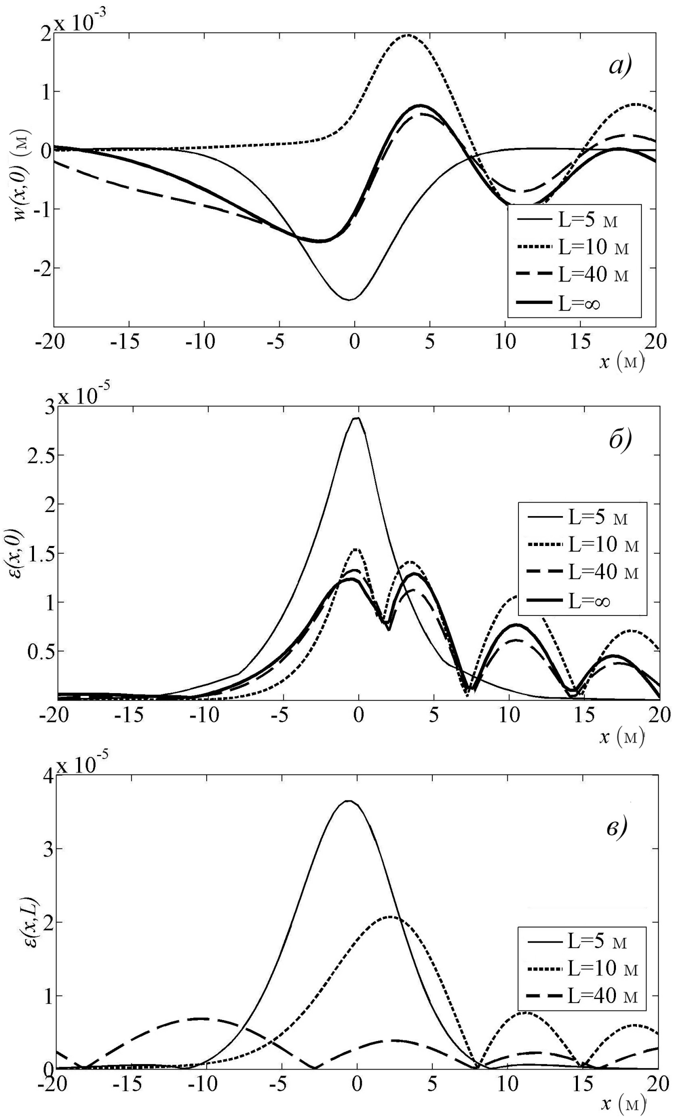


Рис. 1.10: Прогибы вдоль центральной линии канала, (*а*), и деформации вдоль центральной линии (*б*) и на стенках канала (*в*) в ледовом покрове для скорости $U = 7$ м/с и разной ширины канала. Здесь $h_i = 0.1$ м, $H = 2$ м и $L = 5$ м (тонкая сплошная линия), $L = 10$ м (точечная линия), $L = 40$ м (пунктирная линия) и для неограниченного ледового покрова (жирная сплошная линия).

бины канала критические скорости приближаются к значениям критической скорости для канала бесконечной глубины. Критическая скорость уменьшается при увеличении расстояния между стенками. Характеристическая длина $(D/\rho_l g)^{1/4}$ рассматриваемой ледовой пластины равна 2.48 м. Эффект ширины канала на прогибы и деформации в ледовом покрове (Рисунки 1.9, 1.10) и на значение критической скорости первой гидроупругой волны (Рисунок 1.11) является важным и для каналов с шириной, значительно превышающей характеристическую длину

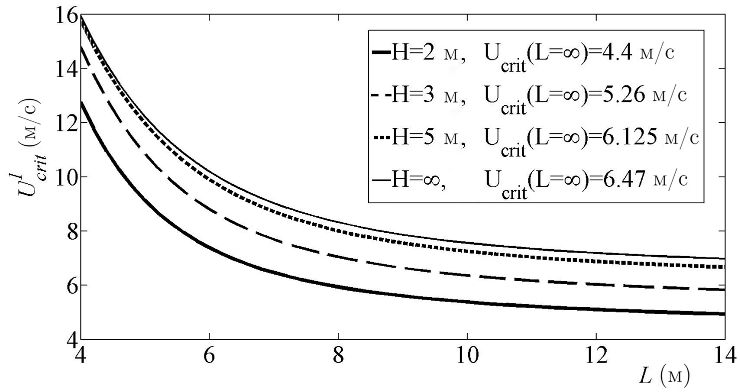


Рис. 1.11: Критические скорости первой гидроупругой волны, U^1_{crit}, как функции ширины канала для разных значений глубины канала, H. Показаны критические скорости для неограниченного ледового покрова, U_{crit}, и соответствующие критические скорости для канала разной глубины. Здесь $h_i = 0.1$ м.

ледового покрова.

1.4 Влияние гидродинамического давления на поведение ледового покрова

Существенным фактором в решении задачи (1.1.1) – (1.1.5) является присутствие гидродинамического давления в правой части уравнения пластины. При решении задачи это приводит к многократному вычислению матрицы присоединенных масс, что является затруднительным. Для оценки влияния этого слагаемого на прогибы и удлинения в ледовом покрове полученные результаты сравниваются с результатами для двух других задач: задачи без учета давления жидкости $p(x, y, 0, t)$ в уравнении для прогибов ледовой пластины (1.1.1) и задачи с учетом только статического слагаемого $\rho_l g w$ в линеаризованном интеграле Коши-Лагранжа (1.1.3).

Первая из двух перечисленных задач соответствует модели сухой пластины (МСП), закрепленной на жестких стенках. Ожидается, что результаты данной модели могут аппроксимировать результаты полной модели (1.1.1) – (1.1.5) для очень толстой ледовой пластины или узкого канала. Вторая задача соответствует модели, в которой динамическая компонента $\rho_l \varphi_t$ давления жидкости не учитывается (гидростатическая модель, ГСМ). Ожидается, что результаты для этой модели могут аппроксимировать результаты полной модели при очень малых скоростях движения внешней нагрузки вдоль канала, когда можно пренебречь соответствующим течением жидкости, вызываемым медленным изменением прогибов льда.

Прогибы ледового покрова для этих двух "упрощенных" моделей описывается уравнениями (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4) и (1.1.5), где давление жидкости $p(x, y, 0, t)$ в (1.1.1) равно нулю в случае модели сухой пластины и $p(x, y, 0, t) = -\rho_l g w(x, y, t)$ в случае гидростатической модели. Полная гидродинамическая модель (1.1.1) – (1.1.5) ниже обозначается ГДМ. Соответствующие "упрощенные" задачи решены аналогичным методом из предыдущего параграфа, где задача (1.2.6) перепишется в виде

$$\text{МСП}: \qquad (-\alpha h \mathrm{Fr}^2 \xi^2)\, \mathbf{I}\, \vec{a} + \beta(1 - i\xi\varepsilon)\, \mathbf{Q}\, \vec{a} = -\vec{P}, \tag{1.4.1}$$

$$\text{ГСМ}: \qquad (1 - \alpha h \mathrm{Fr}^2 \xi^2)\, \mathbf{I}\, \vec{a} + \beta(1 - i\xi\varepsilon)\, \mathbf{Q}\, \vec{a} = -\vec{P}. \tag{1.4.2}$$

Матрица присоединенных масс $\mathbf{M}$ отсутствует уравнениях для обеих "упрощенных" моделей, что значительно упрощает вычисления и увеличивает их скорость. Важность учета гидродинамического давления и, в частности, его динамической компоненты, при формировании прогибов ледового покрова подтверждается сравнением соответствующих решений (прогибы льда и деформации в ледовом покрове). С другой стороны, модели МСП и ГСМ можно сравнить с полной гидродинамической моделью по частотам соответствующих распространяющихся волн в ледовой пластине в канале. Данные частоты как функции от волнового числа, роль которого играет ξ, определяются из матричных уравнений (1.4.1), (1.4.2) и (1.2.6), при $\varepsilon = 0$ и с нулевой правой частью.

После определения частот вычисляются фазовые и групповые скорости, а затем и критические скорости для всех трех моделей. Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, показывает, что критические скорости гидроупругих волн в ледовом покрове играют важную роль в описании поведения ледового покрова в результате движения внешней нагрузки. Сравнение критических скоростей в трех моделях также позволит определить области применения данных моделей и влияние гидродинамического давления на значения критических скоростей.

Для вычисления частот и критических скоростей рассматривается задача о периодических, распространяющихся вдоль замороженного канала, гидроупругих волнах в безразмерных переменных. Пусть амплитуда волны A – масштаб прогибов, $AL\omega$ – масштаб потенциала скорости течения, где ω – частота волны. Масштаб времени – $1/\omega$ и масштаб длины – L. Распространяющиеся волны описываются системой уравнений (1.1.1) – (1.1.5), где $\tau = 0$, $P = 0$ и, согласно [26]

$$w(x,y,t) = Re[F(y)e^{i(\kappa x - t)}], \quad \varphi(x,y,z,t) = Re[i\Phi(y,z)e^{i(\kappa x - t)}]. \tag{1.4.3}$$

Здесь $k = \kappa/L$ соответствующее волновое число и Φ – потенциал скорости течения, который удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \kappa^2\Phi \quad (-1 < y < 1, -h < z < 0)$$

и граничным условия (1.1.4). Подстановка (1.4.3) в (1.1.1) дает

$$-\alpha\gamma F + \beta[\kappa^4 - 2\kappa^2 F'' + F''''] = \gamma\Phi(y,0) - F(y), \tag{1.4.4}$$

где $F(y)$ – профиль волны поперек канала и $\gamma = L\omega^2/g$.

Уравнение (1.4.4) решается методом разделения переменных, изложенным в параграфе 1.2, где $F(y)$ ищется в виде разложения (1.2.2), но без применения преобразования Фурье. Соответствующее матричное уравнение для поиска коэффициентов разложения имеет вид

$$\left(\mathbf{T} - 2\kappa^2\mathbf{C} - \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{P}^l\right)\vec{a} = 0, \tag{1.4.5}$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, ...)^T$, $\mathbf{T}$ – диагональная матрица с элементами $T_{jj} = \left\{\kappa^4 + \lambda_j^4 - \gamma\alpha/\beta\right\}_{j=1}^{\infty}$, матрица $\mathbf{C}$ и собственные значения λ_j определены в параграфе 1.2. Матрица $\mathbf{P}^l$ в (1.4.5) нулевая в случае МСП, диагональная $\mathbf{P}^l = -1/\gamma\mathbf{I}$ в случае ГСМ, и включает матрицу присоединенных масс $\mathbf{M}$ в случае полной модели, $\mathbf{P}^l = \mathbf{M} - 1/\gamma\mathbf{I}$. Дисперсионные соотношения $\omega_n(k)$, где $\omega_1(k) < \omega_2(k) < \omega_3(k) < ...$, определяются как корни определителя матрицы (1.4.5).

Данная матрица, умноженная на β, равна матрице (1.2.6) и матрицам (1.4.1), (1.4.2) для "упрощенных" моделей, если ввести обозначения $\gamma = h\mathrm{Fr}^2\xi^2$ и $\kappa = \xi$ в

(1.4.5). Равенство этих матриц приводит к уравнению $\omega(k) = Uk$ в размерных переменных. Поэтому определитель матрицы $\mathbf{A}$ в уравнении (1.2.6) при $\tau = 0$ равен нулю при значении ξ, при котором скорость нагрузки U равна соответствующей фазовой скорости $c^{(n)}(\xi) = \omega_n(\xi)/\xi$ для каждого n. Соответственно, критические скорости внешней нагрузки $U_{crit}^{(n)}$ равны минимальному значению фазовой скорости $c^{(n)}(\xi)$. Минимальные значения фазовых скоростей равны соответствующим значениям групповых скоростей $c_g^{(n)}(\xi_{crit}^{(n)}) = (d\omega_n/d\xi)(\xi_{crit}^{(n)})$, где $c^{(n)}(\xi_{crit}^{(n)}) = \min\limits_{\xi \geq 0}[c^{(n)}(\xi)]$.

Дисперсионные соотношения для полной гидродинамической модели изучены в [26]. В этом параграфе получены дисперсионные соотношения $\omega_n^{\text{МСП}}(k)$ и $\omega_n^{\text{ГСМ}}(k)$ для модели сухой пластины и гидростатической модели, результаты которых сравниваются с частотами $\omega_n^{\text{ГДМ}}(k)$ из работы [26].

Цель данного численного анализа – изучение влияния параметров давления жидкости на гидроупругие волны. Числовые расчеты выполнены для параметров ледовой пластины, канала и движения нагрузки перечисленных в параграфе 1.3.

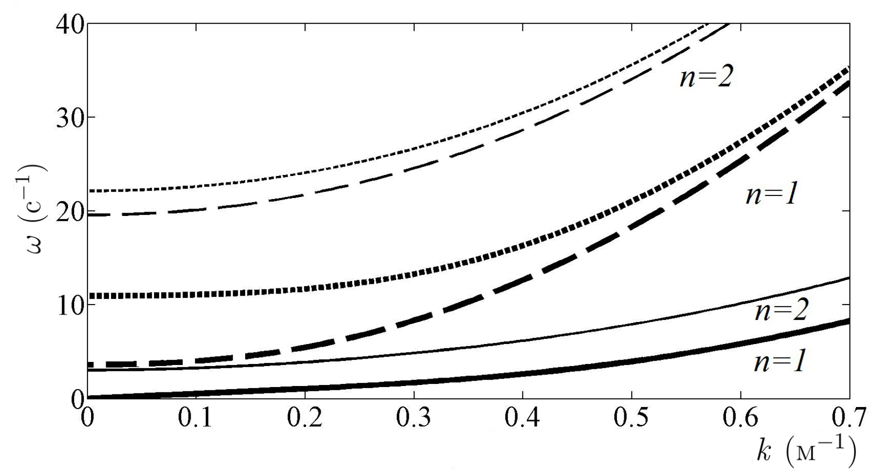


Рис. 1.12: Дисперсионные отношения первой гидроупругой волны (жирные линии) и второй гидроупругой волны (тонкие линии) в моделях ГДМ (сплошная линия), МСП (пунктирная линия) и ГСМ (точечная линия). Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м.

Гидроупругие волны, распространяющиеся вдоль канала, существуют для любой частоты волны ω в модели ГМП, в силу того, что $\omega_1(0) = 0$. Однако для других моделей волны в ледовой пластине существуют только для $\omega > 3.82$ с$^{-1}$ в МСП и для $\omega > 10.95$ с$^{-1}$ в ГСМ.

Для любой постоянной частоты $\omega > 10.95$ с$^{-1}$ длина волны $\lambda = 2\pi/k$ удовлетворяет равенству $\lambda_1^{\text{ГСМ}} < \lambda_1^{\text{МСП}} < \lambda_1^{\text{ГДМ}}$, где индекс 1 обозначает первую гидроупругую волну. В линейной теории ледовый покров может моделироваться упругой пластиной только для волн, длина которых намного больше толщины ледового покрова h_i, например $\lambda > 10h_i$. Это ограничение приводит к неравенству $k < \pi/(5h_i)$, которое дает $k < 6.5$ м$^{-1}$ для $h_i = 10$ см и $k < 0.65$ м$^{-1}$ для $h_i = 1$ м. На Рисунке 1.12 показано, что учет динамического слагаемого давления жидкости увеличивает длину гидроупругих волн в канале и, следовательно, увеличивает диапазон возможных частот, в отличие от моделей СМП и ГСМ.

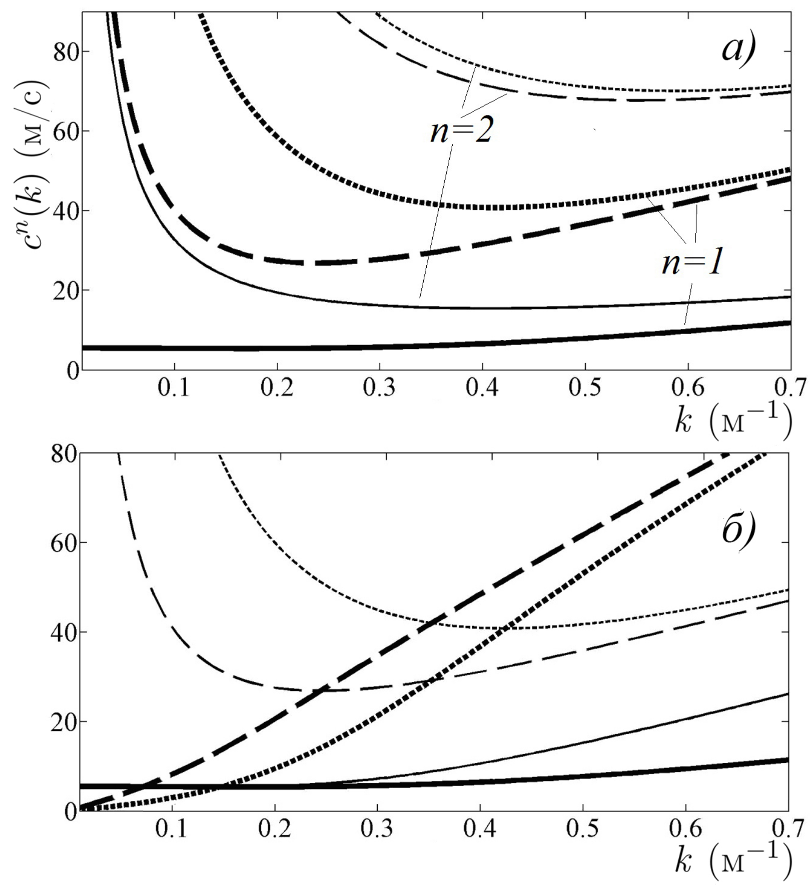


Рис. 1.13: *(а)* Фазовые скорости (в м/с) первой (жирная линия) и второй (тонкая линия) гидроупругой волны для моделей ГДМ (сплошная линия), МСП (пунктирная линия) и ГСМ (точечная линия). *(б)* Фазовые (тонкие линии) и групповые (жирные линии) скорости первой гидроупругой волны для трех моделей. Здесь $h_i = 10$ см, $H = 2$ м и $L = 5$ м.

Фазовые скорости $c^{(n)}(k) = \omega_n(k)/k$ показаны на Рисунке 1.13a для первой $(n = 1)$ и второй $(n = 2)$ гидроупругих волн, распространяющихся вдоль замороженного канала. Фазовые скорости для полной модели меньше, чем фазовые скорости для МСП, которые в свою очередь меньше, чем соответствующие скорости для ГСМ. Динамическое слагаемое давления жидкости значительно влияет на фазовую скорость первой гидроупругой волны для малых волновых чисел. Конечное значение фазовой скорости при $k \to 0$ существует только для полной модели ГДМ. У кривой фазовой скорости есть четко определенные минимумы, где групповые и фазовые скорости равны (Рисунок 1.13*б*). Эти минимумы определяют критические скорости для гидроупругих волн. Критическая скорость первой гидроупругой волны $U_{crit}^{(1)} = 5.38$ м/с в модели ГДМ, $U_{crit}^{(1)} = 26.86$ м/с в модели МСП и $U_{crit}^{(1)} = 40.79$ м/с в модели ГСМ. Критическая скорость в случае гидростатической модели в 7.5 раз больше, чем критическая скорость в полной модели и в 1.5 раза больше, чем критическая скорость в случае модели сухой пластины. Обе "упрощенных" модели значительно завышают критические скорости. Рисунок 1.13*б* показывает, что групповая скорость первой гидроупругой волны в рамках полной модели очень близка к фазовой скорости для длинных волн ($k \leq 0.2$м$^{-1}$) и приблизительно равна критической скорости 5.38 м/с. Этот результат не является корректным для двух других моделей, которые не учитывают динамику жидкости.

Вычисления, проведенные с малым числом $Nmod$ мод в разложении (1.2.2), показывают, что учет только одной (первой) моды колебаний упругой балки в расчетах для первой гидроупругой волны и учет только двух мод в расчетах для второй гидроупругой волны в полной гидродинамической модели дают дисперсионные соотношения, групповые и фазовые скорости, которые с хорошей точностью аппроксимируют аналогичные результаты для большого числа мод $Nmod = 15$. Одномодовое приближение (учет первой моды) и двухмодовое приближение (учет первых двух мод) дисперсионных соотношений вычислены по следующим уравнениям

$$\kappa^4 + \lambda_1^4 - \gamma\alpha/\beta - 2\kappa^2 C_{11} - \frac{\gamma}{\beta} P_1^l = 0, \tag{1.4.6}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right] = 0, \tag{1.4.7}$$

где

$$A = \kappa^4 + \lambda_1^4 - \gamma\alpha/\beta - 2\kappa^2 C_{11} - \frac{\gamma}{\beta} P_{11}^l$$

$$B = -2\kappa^2 C_{12} - \frac{\gamma}{\beta} P_{12}^l, \qquad C = -2\kappa^2 C_{21} - \frac{\gamma}{\beta} P_{21}^l,$$

$$D = \kappa^4 + \lambda_2^4 - \gamma\alpha/\beta - 2\kappa^2 C_{22} - \frac{\gamma}{\beta} P_{22}^l.$$

Эти уравнения получены из (1.4.5) только с одной (первой) модой в разложении (1.2.2) для одномодового приближения и с первыми двумя модами в разложении (1.2.2) для двухмодового приближения. Значение γ, вычисленное по (1.4.6) или (1.4.7) будет называться приближенным. Это значение вычисляется явно по формуле (1.4.6) в случае одномодового приближения и через определитель в случае двухмодового приближения. Уравнение (1.4.6) дает неравенство $\omega_1^{\text{ГСМ}}(k) > \omega_1^{\text{МСП}}(k)$ (см. Рисунок 1.12) и, в силу этого неравенства, $U^{(1)}_{crit,\text{ГСМ}}$ больше чем $U^{(1)}_{crit,\text{МСП}}$.

Можно ожидать, что упрощенные модели с хорошей точностью приближают дисперсионные соотношения и фазовые скорости гидроупругих волн в канале для ледовых пластин большой толщины. Результаты, представленные на Рисунке 1.14 опровергают это предположение. Дисперсионные соотношения и фазовые скорости первой гидроупругой волны в моделях ГДМ, ГСМ и МСП для разной толщины ледового покрова h_i показаны на Рисунке 1.14. Толщина льда варьируется от 10 см до 100 см. Частота $\omega_1(k)$ увеличивается с увеличением толщины льда для всех моделей. Рисунок 1.14 показывает, что динамическое слагаемое давления жидкости является важным фактором при формировании гидроупругих волн в ледовом покрове. Частоты и фазовые скорости, вычисленные для ГСМ и МСП, действительно приближаются друг к другу с увеличением толщины ледяной пластины. Однако различие между значениями этих параметров в полной модели и в "упрощенных" моделях увеличивается с увеличением толщины льда для длинных волн.

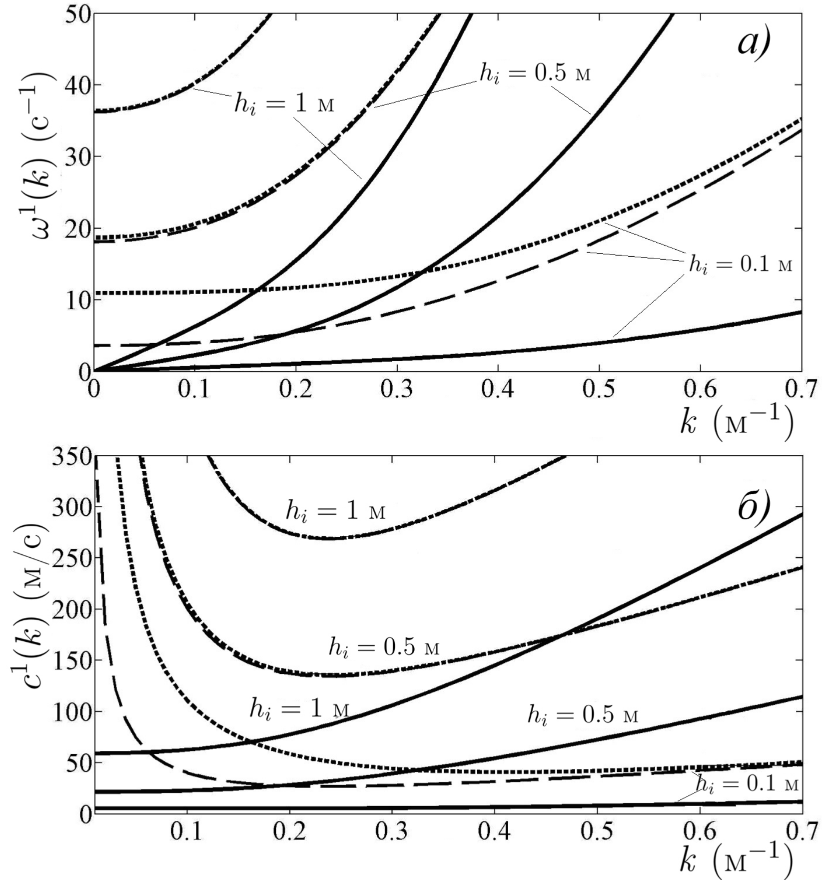


Рис. 1.14: Дисперсионные соотношения *(а)* и фазовые скорости *(б)* для первой гидроупругой волны в моделях ГДМ (сплошная линия), МСП (пунктирная линия) и ГСМ (точечная линия). Здесь $H = 2$ м, $L = 5$ м и $h_i = 10$ см, 50 см и 100 см.

Поведение частоты первой волны $\omega^1(k)$ при уменьшении длины волны $k \to \infty$ показано на Рисунке 1.15 для канала шириной 10 м (пунктирные линии) и для неограниченной ледовой пластины (сплошные линии) для разной толщины ледового покрова. Дисперсионные соотношения для неограниченной ледовой пластины дают ([1])

$$\omega^{\text{МСП}}(k) = \sqrt{\frac{Dk^4}{\rho_i h_i}}, \qquad \omega^{\text{ГСМ}}(k) = \sqrt{\frac{Dk^4 + \rho_l g}{\rho_i h_i}},$$

$$\omega^{\text{ГДМ}}(k) = \sqrt{\frac{Dk^4 + \rho_l g}{\rho_i h_i + \rho_l / k \tanh(kH)}}.$$

Дисперсионные соотношения $\omega^{\text{ГДМ}}(k)$ могут быть приближены дисперсионными соотношениями $\omega^{\text{ГСМ}}(k)$, если $kh_i \gg 1$, $h_i/\lambda \gg 1/2\pi$, где λ – длина волны. Одна-

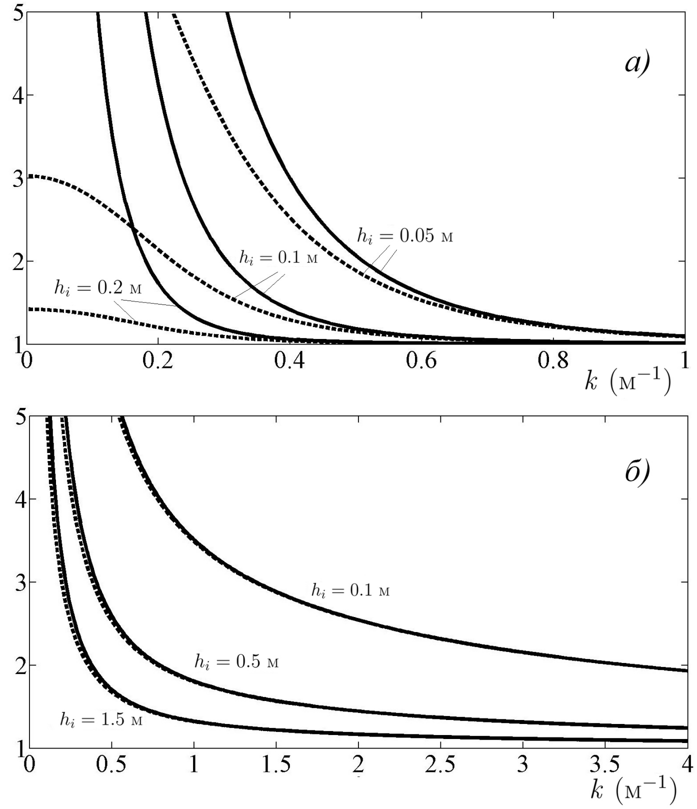


Рис. 1.15: Отношение $\omega_1^{\text{ГСМ}}/\omega_1^{\text{МСП}}$ частоты волны в случае ГСМ к частоте волны в случае МСП *(а)*, и отношение $\omega_1^{\text{ГСМ}}/\omega_1^{\text{ГДМ}}$ частоты волны в случае ГСМ к частоте волны в случае полной модели *(б)* как функции волнового числа для канала (пунктирная линия) и для неограниченной ледовой пластины (сплошные линии). Здесь $H = 2$ м, $L = 5$ м и $h_i = 10$ см, 50 см и 100 см.

ко данные модели в рамках линейной теории гидроупругости могут использоваться только для длины волны λ намного большей, чем толщина льда, h_i, например для $\lambda > 10h_i$. Неравенство $h_i/\lambda \gg 1/2\pi$ не выполняется для волн такой длины. Поэтому $\omega^{\text{ГСМ}}(k)$ не может аппроксимировать $\omega^{\text{ГДМ}}(k)$ в рамках линейной теории. Это следствие того, что плотности льда и воды отличаются незначительно. Следует отметить, что частота $\omega^{\text{ГСМ}}(k)$ может быть аппроксимирована частотой $\omega^{\text{МСП}}(k)$, которая вычислена для модели не учитывающей жидкость, если $\rho_l g/Dk^4 \ll 1$. Здесь $\lambda/l_c = (D/\rho_l g)^{1/4}$ характеристическая длина ледовой пластины. Тогда последние неравенства дают $\lambda/l_c \ll 2\pi$. Это означает, что присутствием жидкости можно пренебречь для очень коротких волн. Гидродинамическое давление имеет сильный эффект на гидроупругие волны в более тонких ледовых покровах.

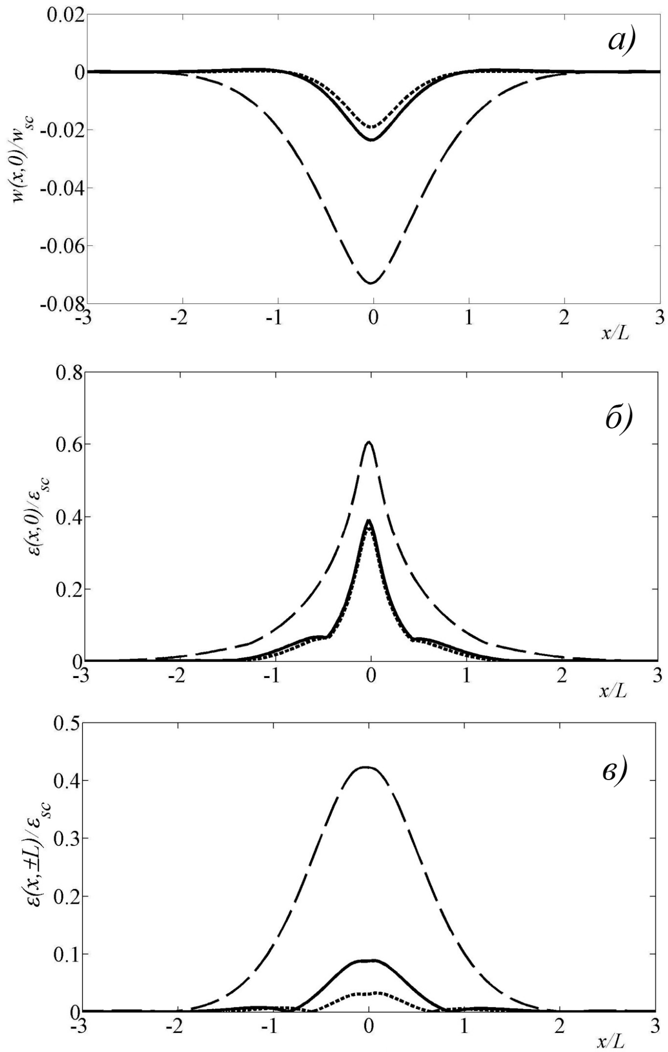


Рис. 1.16: Прогибы льда *(а)*, деформации вдоль центральной линии канала *(б)* и деформации вдоль стенок *(в)*, вычисленные для полной модели (сплошные линии), МСП (пунктирная линия) и ГСМ (точечная линия) для докритической скорости $U = 3$ м/с. Здесь $H = 2$ м, $L = 5$ м и $h_i = 10$ см.

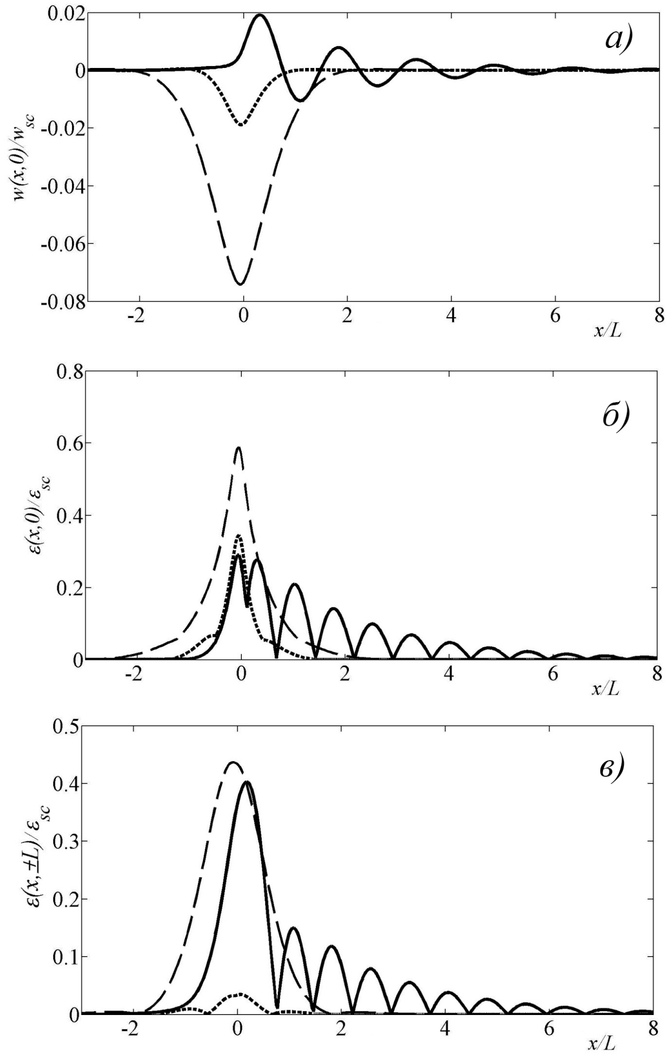


Рис. 1.17: Прогибы ледового покрова *(а)*, деформации вдоль центральной линии канала *(б)* и деформации вдоль стенок *(в)*, вычисленные для полной модели (сплошные линии), МСП (пунктирная линия) и ГСМ (точечная линия) для сверхкритической скорости $U = 7$ м/с. Здесь $H = 2$ м, $L = 5$ м и $h_i = 10$ см.

С другой стороны ”упрощенные” модели могут использоваться для анализа ледового прогиба, вызванного движением внешней нагрузки. Прогибы льда и деформации вычисленные для полной и ”упрощенных” моделей показаны на Рисунках 1.16 и 1.17 для нагрузки, движущейся вдоль канала со скоростью 3 м/с и 7 м/с соответственно. Рисунок 1.16 показывает, что прогибы ледовой пластины и деформации вдоль центральной линии канала для полной модели с хорошей точностью аппроксимируются ГСМ для докритической скорости нагрузки. Однако модель ГСМ занижает реальные значения деформаций на стенках. Модель МСП завышает и прогибы льда, и деформации для докритической и сверхкритической скоростей нагрузки. Можно утверждать, что самая простая модель МСП, которая не учитывает наличие жидкости под ледовой пластиной, может использоваться, чтобы получить грубые оценки напряжений в ледовом покрове и прогибов льда, вызванных движущейся нагрузкой. Точный прогноз поведения ледового покрова требует анализа полной модели ГДМ.

1.5 Единственность решения задачи о колебаниях ледового покрова в канале

1.5.1 Постановка задачи

Рассматриваются колебания ледового покрова в канале, вызванные приложением внешней нагрузки к поверхности ледового покрова. Канал имеет прямоугольное сечение высотой H, $(-H < z < 0)$, шириной $2L$, $(-L < y < L)$ и является неограниченным в направлении x, (x, y, z) – декартова система координат. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая с плотностью ρ_l. Жидкость покрыта ледовым покровом с постоянной толщиной h_i и жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1-\nu^2)]$, где E – модуль Юнга для льда и ν – коэффициент Пуассона. Ледовый покров закреплен на стенках канала в области $y = \pm L$. Введем неограниченные области $\Pi \subset R^2$ и $\Omega \subset R^3$, занимаемые ледовым покровом и жидкостью в канале

$$\Pi = \{-\infty < x < \infty,\ -L < y < L\},$$

$$\Omega = \{-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ -H < z < 0\}.$$

Пусть $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и $\mathrm{G} = \partial\Pi = \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2$, где

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2 =$$

$$\{-\infty < x < \infty,\ \ y = \pm L,\ -H < z < 0\} \cup \{-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = -H\},$$

$$\Gamma_2 = \{-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = 0\},$$

$$\Gamma_3 = \{x = \pm\infty,\ -L < y < L,\ -H < z < 0\},$$

$$\mathrm{G}_1 = \{-\infty < x < \infty,\ y = \pm L\}, \quad \mathrm{G}_2 = \{x = \pm\infty,\ -L < y < L\}.$$

Обозначим $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $\Pi_T = \Pi \times [0,T]$, где $t \in [0,T]$ – время. Задача определения прогиба ледового покрова $w(x,y,t)$ и потенциала скорости течения жидкости $\varphi(x,y,z,t)$ формулируется в рамках линейной теории гидроупругости [1].

Рассмотрим безвихревое течение идеальной жидкости в области Ω_T с потенциалом скорости $\varphi(x,y,z,t)$. Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi(x,y,z,t) = 0 \qquad (x,y,z,t) \in \Omega_T, \tag{1.5.1}$$

краевым условиям непротекания на Γ_1

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \tag{1.5.2}$$

линеаризованным кинематическому условию и интегралу Коши-Лагранжа на Γ_2

$$\varphi_z(x,y,0,t) = w_t(x,y,t), \quad p(x,y,0,t) = -\rho_l\varphi_t(x,y,0,t) - \rho_l g w(x,y,t), \tag{1.5.3}$$

где $p(x,y,0,t)$ – давление жидкости на границе ледовый покров-жидкость, g – ускорение силы тяжести. Кроме того, рассматривается условие затухания колебаний жидкости в отдалении от нагрузки. Соответствующее краевое условие на Γ_3 имеет вид

$$\varphi(x,y,z,t),\ \varphi_x(x,y,z,t) \to 0 \qquad (|x| \to \infty). \tag{1.5.4}$$

Прогиб $w(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению вязкоупругих колебаний тонкой пластины в области ледового покрова

$$D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + M w_{tt} = P(x,y,t) + p(x,y,0,t) \qquad (x,y,t) \in \Pi_T, \tag{1.5.5}$$

начальным условиям

$$w(x, y, 0) = w^1(x, y), \quad w_t(x, y, 0) = w^2(x, y) \qquad (x, y) \in \Pi,$$

условиям жесткого закрепления на G_1

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (y = \pm L), \tag{1.5.6}$$

и краевым условиям затухания колебаний ледового покрова в отдалении от нагрузки на G_2

$$w = 0, \quad w_x = 0 \qquad (|x| \to \infty). \tag{1.5.7}$$

Начально-краевая задача (1.5.1) – (1.5.7) описывает колебания ледового покрова, примороженного к стенкам бесконечного канала, под действием заданной внешней нагрузки $P(x, y, t)$. Здесь $\tau = \eta/E$ – время запаздывания; η – вязкость; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади; ρ_i – плотность льда; $\varphi(x, y, 0, t)$ – потенциал скорости течения жидкости на поверхности; внешнее давление задается гладкой локализованной функцией $P(x, y, t)$.

Под решением системы уравнений (1.5.1) – (1.5.7) понимается пара функций $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$, определенных на Ω_T и Π_T и обладающих свойствами: *(а)* функции $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяют рассматриваемой системе уравнений и краевым и начальным условиям как непрерывные в Ω_T и Π_T функции; *(б)* функции $w(x, y, t)$, $w_x(x, y, t)$, $\varphi(x, y, z, t)$ и $\varphi_x(x, y, z, t)$ стремятся к 0 при $|x| \to \infty$; *(в)* существуют непрерывные в области Π_T производные функции $w(x, y, t)$ до третьего порядка, и данные производные ограничены при $|x| \to \infty$. Основной результат данного параграфа состоит в следующей теореме.

Теорема 1. Классическое решение задачи (1.5.1) – (1.5.7) единственно.

Система уравнений (1.5.1) – (1.5.7) описывает вынужденные колебания ледового покрова, примороженного к двум стенкам канала. Совместная система уравнений динамики тонкой вязко-упругой или упругой пластины и жидкости исследовалась численно и аналитически для разных начально-краевых условий (см., например, [1], [46], [75], [76] и др.). Нестационарные задачи о прогибе ледового покрова под действием внешней нагрузки в постановке (1.5.1) – (1.5.5) в неограниченной области исследованы аналитически и численно в [75], [76]. Задачи о колебаниях ледового покрова, примороженного к вертикальному цилиндру, в близкой постановке изучались в [77], [78]. Задачи с одной стенкой, в частности, в нелинейной постановке, рассмотрены в [33]. Численное решение задачи с двумя стенками для заданного вида внешней нагрузки методом нормальных мод предложено в [68]. Вопрос разрешимости классического решения в большинстве работ не рассматривается, однако вычисляются прогибы и растягивающие удлинения в ледовом покрове, вызванные движением внешней нагрузки. На основе полученных численных результатов определяется область, в которой лед сломается [33], [22].

Разрешимость начально-краевых задач для уравнений Эйлера и динамики тонкой пластины подробно исследованы в отдельности [79], [80], [56], [81], [82], [83]. Начально-краевые задачи для нестационарных уравнений Эйлера потенциального течения однородной жидкости со свободной границей подробно рассмотрены в работе [79]. Разрешимость начально-краевых задач для уравнений Эйлера при наличии свободной поверхности рассмотрена в [80]. Единственность решения в задаче протекания с заданным вихрем для нестационарных уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости доказана в работе [56]. Разрешимость начально-краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости исследована в [84], [85]. Уравнение (1.5.5) определяет колебания тонкой пластины в рамках гипотез Кирхгофа-Лява линейной теории упругости [86]. Существование классического решения краевых задач для уравнения упругой балки с нелинейной правой частью и фиксированными краями доказано в [87]. Разрешимость начально-краевой задачи колебаний вязко-упругой балки с неоднородными краевыми условиями исследована вариационными методами в [88]. Подробно изучена разрешимость задач с жесткими включениями и трещинами в тонких упругих пластинах на основе гипотез Кирхгофа-Лява и гипотез Тимошенко (см., например, [81]). Существование решения задачи изгиба упругой пластинки с жестким включением доказана в [82]. Однозначная разрешимость задачи сопряжения двух упругих однородных балок, одна из которой моделируется балкой Эйлера-Бернулли, а другая балкой Тимошенко, доказана в [83]. В данном параграфе исследуется единственность решения совместной задачи изгиба пластины и движения идеальной жидкости. При доказательстве Теоремы 1 используются подходы, развитые в работе [56].

1.5.2 Случай вязкоупругих колебаний

Пусть существует два отличных от нуля решения w_1, φ_1 и w_2, φ_2 системы (1.5.1) – (1.5.7). Пара функций $w = w_1 - w_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче

$$D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + M w_{tt} = -\rho_l \varphi_t(x,y,0,t) - \rho_l g w, \qquad (x,y,t) \in \Pi_T, \tag{1.5.8}$$

$$\Delta\varphi(x,y,z,t) = 0, \qquad (x,y,z,t) \in \Omega_T, \tag{1.5.9}$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z=0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \qquad (z = -H), \tag{1.5.10}$$

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (y = \pm L), \tag{1.5.11}$$

$$\varphi(x,y,z,t),\ \varphi_x(x,y,z,t),\ w(x,y,t),\ w_x(x,y,t) \to 0 \qquad (|x| \to \infty). \tag{1.5.12}$$

$$w(x,y,0) = 0, \quad w_t(x,y,0) = 0. \tag{1.5.13}$$

Докажем, что решением задачи (1.5.8) – (1.5.13) является $w = 0$ и $\varphi = 0$.

Заметим, что решение (φ, w) задачи (1.5.8) – (1.5.13) обладает следующими свойствами

$$\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{1.5.14}$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,t)|^2\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,t) w_t(x,y,t)\, d\Pi, \qquad t \in [0,T], \tag{1.5.15}$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,0)|^2\, d\Omega = 0, \quad \varphi(x,y,z,0) = 0. \tag{1.5.16}$$

Интегрируя уравнение (1.5.9) по области $\Omega_R = \{-R < x < R, -L < y < L, -H < z < 0\}$ и используя последовательно формулу Гаусса-Остроградского, выводим

$$\int\limits_{\Omega_R} \Delta\varphi\, d\Omega_R = \int\limits_{\Gamma^1_{1R}} \varphi_y\Big|_{y=-L}^{y=L} d\gamma + \int\limits_{\Gamma^2_{1R}\cup\Gamma_{2R}} \varphi_z\Big|_{z=-H}^{z=0} d\gamma + \int\limits_{\Gamma_{3R}} \varphi_x\Big|_{x=-R}^{x=R} d\gamma = 0.$$

Здесь индекс R у Γ означает соответствующие границы области Ω_R. Учитывая условия (1.5.10) – (1.5.12) и совершая в последнем равенстве предельный переход при $R \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Pi} \varphi_z(x,y,0,t)\, d\Pi = \int\limits_{\Pi} w_t(x,y,t)\, d\Pi = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = 0.$$

Из последнего равенства, привлекая условия (1.5.13), выводим свойство (1.5.14). Умножим теперь уравнение (1.5.9) на φ и проинтегрируем полученное равенство по Ω_R. С учетом формулы Гаусса-Остроградского выводим

$$\int\limits_{\Omega_R} \varphi\, \Delta\varphi\, d\Omega_R = -\int\limits_{\Omega_R} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega_R + \int\limits_{\Gamma_R} \varphi\, (\nabla\varphi\cdot\vec{n})\, d\Gamma_R =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_R} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega_R + \int\limits_{\Gamma^1_{1R}} (\varphi\,\varphi_y)\Big|_{y=-L}^{y=L}\, d\gamma + \int\limits_{\Gamma^2_{1R}\cup\Gamma_{2R}} (\varphi\,\varphi_z)\Big|_{z=-H}^{z=0}\, d\gamma + \int\limits_{\Gamma_{3R}} (\varphi\,\varphi_x)\Big|_{x=-R}^{x=R}\, d\gamma = 0.$$

После предельного перехода при $R \to \infty$ и с учетом условий (1.5.10) – (1.5.12), приходим к равенству

$$-\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{G} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,0,t)\, dG = -\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{G} \varphi(x,y,0,t)w_t\, dG = 0,$$

из которого следует (1.5.15). С учетом (1.5.13) из (1.5.15) при $t = 0$ выводим равенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,0)|^2\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,0)w_t(x,y,0)\, d\Pi = 0,$$

из которого, с учетом (1.5.13), следует справедливость свойства (1.5.16).

Уравнение (1.5.9) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(D\tau\nabla^4 w + D\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau + Mw_t + \rho_l\varphi(x,y,0,t) + \rho_l g\int\limits_0^t w d\tau\right) = 0. \qquad (1.5.17)$$

Заметим, что выражение под знаком производной в (1.5.17) при $t = 0$ равно нулю в силу условий (1.5.13) и (1.5.16). Учитывая это замечание, приходим к уравнению

$$D\tau\nabla^4 w + D\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau + Mw_t + \rho_l\varphi + \rho_l g\int\limits_0^t w d\tau = 0. \qquad (1.5.18)$$

Умножим уравнение (1.5.18) на $w_t(x,y,t)$ и проинтегрируем по области $\Pi_R = \{-R < x < R, -L < y < L\}$. Получим

$$D\tau \int\limits_{\Pi_R} w_t \nabla^4 w \, d\Pi_R + D \int\limits_{\Pi_R} \left(\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau \right) w_t \, d\Pi_R + M \int\limits_{\Pi_R} w_t^2 \, d\Pi_R +$$
$$+ \rho_l \int\limits_{\Pi_R} \varphi w_t \, d\Pi_R + \rho_l g \int\limits_{\Pi_R} \left(\int\limits_0^t w d\tau \right) w_t \, d\Pi_R = 0. \qquad (1.5.19)$$

Для четвертого слагаемого левой части (1.5.19) в силу (1.5.15) имеем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Pi_R} \varphi(x,y,0,t) w_t(x,y,t) \, d\Pi_R = \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi(x,y,0,t)|^2 \, d\Omega.$$

Преобразуем остальные слагаемые.

1) Для первого слагаемого левой части (1.5.19) имеем

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{xxxx} w_t \, d\Pi_R = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Pi_R} w_{xx}^2 \, d\Pi_R + \int\limits_{-L}^{L} w_{xxx} w_t |_{x=-R}^{x=R} \, dy - \int\limits_{-L}^{L} w_{xx} w_{xt} |_{x=-R}^{x=R} \, dy,$$

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{yyyy} w_t \, d\Pi_R = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Pi_R} w_{yy}^2 \, d\Pi_R + \int\limits_{-R}^{R} w_{yyy} w_t |_{y=-L}^{y=L} \, dx - \int\limits_{-R}^{R} w_{yy} w_{yt} |_{y=-L}^{y=L} \, dx,$$

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{xxyy} w_t \, d\Pi_R = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Pi_R} w_{xy}^2 \, d\Pi_R + \int\limits_{-L}^{L} w_{xyy} w_t |_{x=-R}^{x=R} \, dy - \int\limits_{-R}^{R} w_{xy} w_{xt} |_{y=-L}^{y=L} \, dx.$$

2) Для преобразования второго слагаемого введем вспомогательную функцию $u = \int\limits_0^t w d\tau$, $u_t = w$, $u_{tt} = w_t$. Имеем

$$\int\limits_{\Pi_R} u_{xxxx} u_{tt} \, d\Pi_R = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\Pi_R} u_{xx}^2 \, d\Pi_R - \int\limits_{\Pi_R} u_{xxt}^2 \, d\Pi_R +$$
$$+ \int\limits_{-L}^{L} u_{xxx} u_{tt} |_{x=-R}^{x=R} \, dy - \int\limits_{-L}^{L} u_{xx} u_{xtt} |_{x=-R}^{x=R} \, dy,$$

$$\int\limits_{\Pi_R} u_{yyyy}u_{tt}\,d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi_R} u_{yy}^2\,d\Pi_R - \int\limits_{\Pi_R} u_{yyt}^2\,d\Pi_R +$$

$$+\int\limits_{-R}^{R} u_{yyy}u_{tt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx - \int\limits_{-R}^{R} u_{yy}u_{ytt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx,$$

$$\int\limits_{\Pi_R} u_{xxyy}u_{tt}\,d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi_R} u_{xy}^2\,d\Pi_R - \int\limits_{\Pi_R} u_{xyt}^2\,d\Pi_R +$$

$$+\int\limits_{-L}^{L} u_{xyy}u_{tt}\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy - \int\limits_{-R}^{R} u_{xy}u_{xtt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx.$$

3) Для последнего слагаемого с учетом представления $u = \int\limits_0^t w d\tau$ имеем

$$\int\limits_{\Pi_R}\left(\int\limits_0^t w d\tau\right) w_t\,d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi_R} u^2\,d\Pi_R - \int\limits_{\Pi_R} u_t^2\,d\Pi_R.$$

В итоге, с учетом полученных представлений интегралов, имеем

$$M\int\limits_{\Pi_R} w_t^2\,d\Pi_R + \rho_l\int\limits_{\Omega}\varphi w_t\,d\Omega + D\tau\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Pi_R} w_{xx}^2\,d\Pi_R + \int\limits_{\Pi_R} w_{yy}^2\,d\Pi_R + 2\int\limits_{\Pi_R} w_{xy}^2\,d\Pi_R\right) +$$

$$+D\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int\limits_{\Pi_R} u_{xx}^2\,d\Pi_R + \int\limits_{\Pi_R} u_{yy}^2\,d\Pi_R + 2\int\limits_{\Pi_R} u_{xy}^2\,d\Pi_R\right) + \rho_l\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi_R} u^2\,d\Pi_R =$$

$$= \mathrm{I}_\Gamma^x + \mathrm{I}_\Gamma^y + D\left(\int\limits_{\Pi_R} u_{xxt}^2\,d\Pi_R + \int\limits_{\Pi_R} u_{yyt}^2\,d\Pi_R + 2\int\limits_{\Pi_R} u_{xyt}^2\,d\Pi_R\right) + \rho_l\int\limits_{\Pi_R} u_t^2\,d\Pi_R, \quad (1.5.20)$$

где

$$\mathrm{I}_\Gamma^x = D\tau\left(\int\limits_{-L}^{L} w_{xx}w_{xt}\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy - \int\limits_{-L}^{L} w_{xxx}w_t\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy - 2\int\limits_{-L}^{L} w_{xyy}w_t\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_{-L}^{L} u_{xx}u_{xtt}\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy - \int\limits_{-L}^{L} u_{xxx}u_{tt}\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy - 2\int\limits_{-L}^{L} u_{xyy}u_{tt}\big|_{x=-R}^{x=R}\,dy\right),$$

$$\mathrm{I}_\Gamma^y = D\tau\left(\int\limits_{-R}^{R} w_{yy}w_{yt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx - \int\limits_{-R}^{R} w_{yyy}w_t\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx + 2\int\limits_{-R}^{R} w_{xy}w_{xt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_{-R}^{R} u_{yy}u_{ytt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx - \int\limits_{-R}^{R} u_{yyy}u_{tt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx + 2\int\limits_{-R}^{R} u_{xy}u_{xtt}\big|_{y=-L}^{y=L}\,dx\right).$$

В (1.5.20) осуществим предельный переход при $R \to \infty$, учитывая, что при $y = \pm L$

$$w = w_y = w_t = w_{yt} = 0,$$

и при $|x| \to \infty$

$$(w, w_x, w_t, w_{xt}) \to 0.$$

Кроме того, при $t = 0$ имеем

$$w = w_t = u = w_x = w_y = w_{xy} = u_x = u_y = u_{xy} = 0.$$

Поэтому граничные интегралы $\mathrm{I}_\Gamma^x = 0$ и $\mathrm{I}_\Gamma^y = 0$.

Положим

$$Y(t) = \int\limits_\Pi (w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2)d\Pi, \qquad Z(t) = \int\limits_\Pi (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2)d\Pi.$$

Тождество (1.5.20) с учетом (1.5.15) принимает вид

$$M\int\limits_\Pi w_t^2\,d\Pi + \rho_l\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}D\tau\frac{d}{dt}Y(t) + \frac{1}{2}D\frac{d^2}{dt^2}Z(t) +$$

$$\frac{1}{2}\rho_l\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_\Pi u^2\,d\Pi = DY(t) + \rho_l\int\limits_\Pi u_t^2\,d\Pi. \qquad (1.5.21)$$

Используя представление

$$w^2(x,y,t) = 2\int\limits_0^t w(x,y,\tau)w_\tau(x,y,\tau)d\tau$$

и неравенство Гельдера, получим

$$\int\limits_\Pi w^2(x,y,t)d\Pi \le 2\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Pi w^2(x,y,\tau)d\Pi\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Pi w_\tau^2(x,y,\tau)d\Pi\right)^{1/2} d\tau.$$

Из последнего неравенства следует

$$\int\limits_{\Pi} w^2(x,y,t)d\Pi \le T\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Pi} w_\tau^2(x,y,\tau)d\Pi\right)d\tau. \qquad (1.5.22)$$

Усиливая правую часть (1.5.21) с помощью (1.5.22) и полагая

$$\widetilde{Y}(t) = M\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Pi} w_\tau^2 d\Pi\right)d\tau + \frac{1}{2}D\tau Y(t), \qquad C_1 = \max\left(\frac{2}{\tau}, \frac{T\rho_l}{2M}\right),$$

приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\widetilde{Y}(t) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right) \le C_1\widetilde{Y}(t),$$

которое приводится к виду

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{Y}e^{-C_1 t}) + e^{-C_1 t}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{Y}e^{-C_1 t} + e^{-C_1 t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right)\right) +$$

$$+C_1 e^{-C_1 t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right) \le 0. \qquad (1.5.23)$$

Неравенство (1.5.23) проинтегрируем по t от 0 до t_1. Учитывая, что

$$\widetilde{Y}(0) = 0, \quad \left.\frac{dZ(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\,\right|_{t=0} = 0,$$

выводим

$$\widetilde{Y}e^{-C_1 t_1} + e^{-C_1 t_1}\frac{d}{dt_1}\left(\frac{1}{2}DZ(t_1) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right) +$$

$$+C_1 e^{-C_1 t_1}\left(\frac{1}{2}DZ(t_1) + \frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right) +$$

$$+C_1^2\int\limits_0^{t_1} e^{-C_1 t}\left(\frac{1}{2}DZ(t)+\frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right)\leq 0.$$

Первое, третье и четвертое слагаемое левой части полученного неравенства неотрицательны. Поэтому

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{1}{2}DZ(t_1)+\frac{1}{2}\rho_l\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi\right)\leq 0.$$

Откуда выводим $Z(t)=0$, $u(x,y,t)=0$. Возвращаясь в (1.5.23), (1.5.22) и (1.5.21) получим $w=0$, $\nabla\varphi=0$, $\varphi=0$.

Теорема 1 доказана.

1.5.3 Случай упругих колебаний

Во многих задачах коэффициент запаздывания считается пренебрежимо малым. Получим аналог теоремы 1 для случая $\tau=0$. В данном случае система уравнений (1.5.8) – (1.5.13) примет вид

$$D\nabla^4 w+Mw_{tt}=-\rho_l\varphi_t(x,y,0,t)-\rho_l g w,\qquad (x,y,t)\in\Pi_T, \tag{1.5.24}$$

$$\Delta\varphi(x,y,z,t)=0,\qquad (x,y,z,t)\in\Omega_T, \tag{1.5.25}$$

$$\varphi_z=w_t\quad (z=0),\quad \varphi_y=0\quad (y=\pm L),\quad \varphi_z=0\qquad (z=-H), \tag{1.5.26}$$

$$w=0,\quad w_y=0\qquad (y=\pm L), \tag{1.5.27}$$

$$\varphi(x,y,z,t),\ \varphi_x(x,y,z,t),\ w(x,y,t),\ w_x(x,y,t)\to 0\qquad (|x|\to\infty). \tag{1.5.28}$$

$$w(x,y,0)=0,\quad w_t(x,y,0)=0. \tag{1.5.29}$$

Заметим, что решение (φ,w) задачи (1.5.24) – (1.5.29) удовлетворяет свойствам (1.5.14) – (1.5.16).

Уравнение (1.5.24) представим в виде

$$D\nabla^4 w+Mw_{tt}+\rho_l\varphi_t+\rho_l g w_t=0. \tag{1.5.30}$$

Умножим уравнение (1.5.30) на $w_t(x,y,t)$ и проинтегрируем по области $\Pi_R = \{-R < x < R, -L < y < L\}$. Получим

$$D\int\limits_{\Pi_R} (\nabla^4 w)\, w_t\, d\Pi_R + M\int\limits_{\Pi_R} w_{tt} w_t\, d\Pi_R + \rho_l \int\limits_{\Pi_R} \varphi_t w_t\, d\Pi_R + \rho_l g \int\limits_{\Pi_R} w\, w_t\, d\Pi_R = 0. \tag{1.5.31}$$

Проводя интегрирование по частям для слагаемых равенства (1.5.31), аналогично пункту 2, приходим к тождеству

$$\frac{M}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_t^2\, d\Pi_R + \rho_l \int\limits_{\Pi_R} \varphi_t w_t\, d\Pi_R + \frac{D}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2\, d\Pi_R + \\ + \frac{\rho_l g}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w^2\, d\Pi_R = \mathrm{I}_\Gamma, \tag{1.5.32}$$

где сумма граничных интегралов I_Γ определяется аналогично граничным интегралам I_Γ^x и I_Γ^y в уравнении (1.5.20). Учитывая свойства (1.5.26) – (1.5.28), в (1.5.32) осуществим предельный переход при $R \to \infty$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2\, d\Pi + \frac{\rho_l}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \frac{D}{2}\int\limits_{\Pi} Y(x,y,t)\, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2}\int\limits_{\Pi} w^2\, d\Pi\right) = 0. \tag{1.5.33}$$

При $t = 0$ имеем

$$w = w_t = w_{xx} = w_{xy} = w_{yy} = 0. \tag{1.5.34}$$

Заметим, что выражение под знаком производной в (1.5.33) при $t = 0$ равно нулю в силу условий (1.5.16) и (1.5.34). Учитывая это замечание, приходим к равенству

$$\frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2\, d\Pi + \frac{\rho_l}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \frac{D}{2}\int\limits_{\Pi} Y(x,y,t)\, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2}\int\limits_{\Pi} w^2\, d\Pi = 0.$$

Все слагаемые левой части полученного равенства неотрицательны. Отсюда выводим $w_t = 0$, $\nabla\varphi(x,y,z,t) = 0$, $Y(x,y,t) = 0$, $w(x,y,t) = 0$ и, следовательно, $\varphi(x,y,z,t) = 0$.

Глава 2

Нестационарная задача движения нагрузки по ледовому покрову замороженного канала

2.1 Постановка задачи

Рассматривается нестационарная задача об определении прогибов ледового покрова прямоугольного канала бесконечный длины под действием движущейся внешней нагрузки. Схема задачи изображена на Рисунке 1.1 первой главы. Постановка задачи аналогична постановке параграфа 1.1 первой главы с некоторыми изменениями. Во первых, ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной в рамках теории Кирхгофа-Лява тонких пластин [51], при этом коэффициент запаздывания τ в уравнениях модели отсутствует. Во вторых, система уравнений (1.1.1) – (1.1.5) дополняется начальными условиями при $t = 0$: в начальный момент времени ледовый покров и жидкость в канале покоятся. Нагрузка движется с постоянной скоростью U, вызывает прогиб льда и может создавать нестационарные гидроупругие волны, распространяющиеся от нагрузки. В итоге постановка задачи, аналогичная задаче (1.1.1) – (1.1.5), примет вид

$$Mw_{tt} + D\nabla_2^4 w = p(x, y, 0, t) - P(x - Ut, y) \qquad (-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = 0), \tag{2.1.1}$$

$$p(x,y,0,t)=-\rho_l\,\varphi_t(x,y,0,t)-\rho_l g\,w(x,y,t)\qquad(-\infty<x<\infty,\ -L<y<L,\ z=0),\tag{2.1.2}$$

$$\nabla^2\varphi(x,y,z,t)=0\quad(-\infty<x<\infty,\ -L<y<L,\ -H<z<0),\tag{2.1.3}$$

$$\varphi_z=w_t\quad(z=0),\qquad\varphi_y=0\quad(y=\pm L),\qquad\varphi_z=0\quad(z=-H).\tag{2.1.4}$$

Потенциал скорости течения жидкости затухает в отдалении от нагрузки при конечных временах

$$\varphi\to 0\qquad(|x|\to\infty,\ t<\infty),\tag{2.1.5}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\varphi=0,\qquad\varphi_t=0\qquad(t=0).\tag{2.1.6}$$

Внешняя нагрузка моделируется аналогичной (1.1.2) функцией

$$P(x-Ut,y)=P_0P_1\left(\frac{X}{L}\right)P_2\left(\frac{y}{L}\right)\quad(-\infty<x<\infty,\ -L<y<L),\tag{2.1.7}$$

$$P_1\left(\frac{X}{L}\right)=\begin{cases}\big(\cos(\pi c_1X/L)+1\big)/2 & (c_1|X|/L<1),\\ 0 & (c_1|X|/L\geq 1),\end{cases}$$

$$P_2\left(\frac{y}{L}\right)=\begin{cases}\big(\cos(\pi c_2y/L)+1\big)/2 & (c_2|y|/L<1),\\ 0 & (c_2|y|/L\geq 1),\end{cases}$$

Функция внешней нагрузки является симметричной $P(x-Ut,-y)=P(x-Ut,y)$. В движущейся совместно с нагрузкой системе координат (X,y,z), где $X=x-Ut$, внешняя нагрузка $P(X,y)$ не зависит от времени. Уравнение (2.1.7) используется только в численном решении. Асимптотический анализ, проведенный далее, является корректным для любой интегрируемой функции $P(X,y)$.

Прогиб льда $w(x,y,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$w=0,\quad w_y=0\qquad(-\infty<x<\infty,y=\pm L),\tag{2.1.8}$$

условию затухания в отдалении от нагрузки при конечных временах

$$w\to 0\qquad(|x|\to\infty,\ t<\infty),\tag{2.1.9}$$

и начальным условиям при $t = 0$

$$w = w_0(x, y), \qquad w_t = 0, \tag{2.1.10}$$

где $w_0(x, y)$ удовлетворяет статическому уравнению для тонкой упругой пластины

$$D\nabla_2^4 w_0(x, y) = -\rho_l g\, w_0(x, y) - P(x, y), \tag{2.1.11}$$

и условиям (2.1.8) и (2.1.10).

Решение нестационарной задачи (2.1.1) – (2.1.11) зависит от плотности жидкости ρ_l, параметров льда ρ_i, h_i, D, параметров канала H, L и параметров нагрузки P_0, U, c_1, c_2. Далее будут рассмотрены две задачи. В первой требуется определить поведение при больших временах прогибов льда $w(x, y, t)$ и распределение максимальных деформаций $\varepsilon(x, y, t)$ в ледовом покрове для заданных параметров задачи. Определение максимальных деформаций изложено в первой главе (см. формулу (1.1.11) и соответствующее обсуждение критических значений). Асимптотический анализ представлен для прямоугольного канала и заданной внешней нагрузки в форме (2.1.7), но может быть проведен аналогичным образом для канала с сечением другой формы и разных форм внешней нагрузки. В данном анализе для определения асимптотического поведения прогибов льда $w(x, y, t)$ используются результаты работы [26], а именно определения и формулы для периодических гидроупругих волн, распространяющихся вдоль канала. Результаты работы [26] обсуждались в главе 1, где использовались критические скорости этих волн и их счетное количество для интерпретации установившихся прогибов льда.

2.2 Поведение прогибов льда при больших временах

Задача (2.1.1) – (2.1.11) на первом этапе решается применением преобразования Фурье в направлении оси x

$$w^F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t) e^{-i\xi x} dx, \qquad w(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y, t) e^{i\xi x} d\xi.$$

Применение этого преобразования к уравнениям и условиям (2.1.1) – (2.1.11) дает уравнение пластины для образа Фурье w^F прогибов льда

$$Mw^F_{tt} + D\left(w^F_{yyyy} - 2\xi^2 w^F_{yy} + \xi^4 w^F\right) = -\rho_l \varphi^F_t(\xi, y, 0, t) - \rho_l g w^F - P^F(\xi, y)e^{-i\xi U t}, \tag{2.2.1}$$

и соответствующие начальные и краевые условия

$$w^F = w^F_0(\xi, y), \quad w^F_t = 0 \quad (t = 0), \qquad w^F = 0, \quad w^F_y = 0 \quad (y = \pm L), \tag{2.2.2}$$

где $w^F_0(\xi, y)$ – образ Фурье начального условия для прогибов льда $w_0(x, y)$. Образ Фурье потенциала скорости течения жидкости $\varphi^F(\xi, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^F_{yy} + \varphi^F_{zz} = \xi^2 \varphi^F \quad (-L < y < L, \, -H < z < 0), \tag{2.2.3}$$

начальным и краевым условиям

$$\varphi^F_z = w^F_t(\xi, y, t) \quad (z = 0), \quad \varphi^F_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi^F_z = 0 \quad (z = -H),$$
$$\varphi^F = 0, \quad \varphi^F_t = 0 \quad (t = 0). \tag{2.2.4}$$

Преобразование Фурье уменьшает число независимых переменных на одну переменную, но добавляет один новый параметр – параметр преобразования Фурье ξ.

Прогиб льда $w^F(\xi, y, t)$ определяется методом разделения переменных y и t:

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y). \tag{2.2.5}$$

На данном этапе решения обе функции $\psi_n(\xi, y)$ и $a_n(\xi, t)$, которые также зависят от номера n и параметра ξ, являются неизвестными и должны быть определены в процессе решения. Функции, обозначенные $\psi_n(\xi, y)$, отличаются от функций с таким же обозначением главы 1 и имеют другой смысл. Условия жесткого закрепления (2.2.2) на стенах канала и учет симметричности внешней нагрузки по y дают

$$\psi_n(\xi, \pm L) = \psi'_n(\xi, \pm L) = 0, \quad \psi_n(\xi, -y) = \psi_n(\xi, y) \tag{2.2.6}$$

для любых значений ξ и $|y| < L$.

С учетом кинематического условия на границе раздела лед-жидкость (первое уравнение в (2.2.4) при $z = 0$) потенциал скорости φ^F ищется в виде

$$\varphi^F(\xi, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,t}(\xi, t)\Phi_n(\xi, y, z). \tag{2.2.7}$$

Функции $\Phi_n(\xi, y, z)$ удовлетворяют уравнению (2.2.3) и краевым условиям (2.2.4), где кинематическое условие заменено на условие $\Phi_{n,z}(\xi, y, 0) = \psi_n(\xi, y)$.

Подстановка представлений (2.2.5) и (2.2.7) в уравнение (2.2.1) приводит последнее к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,tt} \left[M\psi_n + \rho_l \Phi_n(\xi, y, 0)\right] +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[D\left(\psi_{n,yyyy} - 2\xi^2\psi_{n,yy} + \xi^4\psi_n\right) + \rho_l g\psi_n\right] = -P^F(\xi, y)e^{-i\xi Ut}. \tag{2.2.8}$$

Здесь выражения в квадратных скобках – функции только от переменной y. Для того, чтобы разделить переменные y и t в уравнении (2.2.8), требуется чтобы выражения в квадратных скобках были пропорциональны

$$\omega_n^2(\xi) \left[M\psi_n + \rho_l \Phi_n(\xi, y, 0)\right] = D\left(\psi_{n,yyyy} - 2\xi^2\psi_{n,yy} + \xi^4\psi_n\right) + \rho_l g\psi_n, \tag{2.2.9}$$

где $\omega_n^2(\xi)$ – коэффициент пропорциональности. Последнее уравнение с условиями (2.2.6) и соответствующими уравнениями и условиями для функций $\Phi_n(\xi, y, z)$ образуют спектральную задачу для поиска функций $\psi_n(\xi, y)$. В данной задаче $\omega_n^2(\xi)$ является спектральным параметром, который должен быть определен совместно с функциями $\psi_n(\xi, y)$. Решения спектральной задачи являются собственными функциями, а спектральный параметр – собственным значением. Легко проверить, что собственные значения сформулированной спектральной задачи, соответствующие нетривиальным собственным функциям, имеют положительный знак. Введенное обозначение ω_n^2 означает, что корень из собственного значения имеет физический смысл частоты. Это подтверждается проверкой размерностей, уравнение (2.2.9) дает размерность $\omega_n(\xi)$, равную с$^{-1}$. Физический смысл данных частот будет объяснен ниже, где будут получены уравнения для функций $a_n(\xi, t)$ в (2.2.5). Собственные функции $\psi_n(\xi, y)$ нумеруются таким способом, чтобы соответствующие собственные числа удовлетворяли неравенству $\omega_n < \omega_{n+1}$, где $n \geq 1$. Можно проверить, что собственные функции $\psi_n(\xi, y)$, где $n \geq 1$, ортогональны в следующем смысле

$$\int\limits_{-L}^{L} \left[M\psi_n + \rho_l \Phi_n(\xi, y, 0)\right] \psi_m \mathrm{d}y = \delta_{nm}\sigma_n(\xi),$$

$$\sigma_n(\xi) = \int\limits_{-L}^{L} \left[M\psi_n + \rho_l \Phi_n(\xi, y, 0)\right] \psi_n \mathrm{d}y. \tag{2.2.10}$$

Функции $\psi_n(\xi, y)$ нормируются условием

$$\max_{-L<y<L} \psi_n(\xi, y) = 1. \tag{2.2.11}$$

Данная нормировка предполагает что функции $\psi_n(\xi, y)$ являются безразмерными величинами. Прогибы $w(x, y, t)$ и координаты x, y, z имеют размерность метров. Тогда параметр преобразования Фурье ξ измеряется в м$^{-1}$ и $w^F(\xi, y, t)$ в м^2. Функции $a_n(\xi, t)$ в (2.2.5) измеряются в м^2.

Функции $\psi_n(\xi, y)$ описывают поведение системы вода-лед для заданного канала. Они не зависят от внешней нагрузки и ее скорости. Эти функции в безразмерных переменных вычислены в [26]. Линейные гидроупругие волны, исследованные в [26], описываются уравнениями $w(x, y, t) = A\psi_n(\xi, y)\cos[\xi x - \omega_n(\xi)t]$, где $\psi_n(\xi, y)$ – решение спектральной задачи (2.2.9) с спектральным параметром $\omega_n^2(\xi)$, $n \geq 1$, параметр ξ рассматривается как волновое число и A – амплитуда волны (здесь используются обозначения, принятые в данной главе, которые отличаются от обозначений в [26]). Фазовая скорость волны с индексом n равна $c^{(n)}(\xi) = \omega_n(\xi)/\xi$. Скорости $c^{(n)}(\xi)$, где $\xi \geq 0$, достигают своих минимальных значений $c_{\min}^{(n)} = \min_{\xi \geq 0}[c^{(n)}(\xi)]$ в точках $\xi_{\min}^{(n)}$, где $c_{\min}^{(n+1)} > c_{\min}^{(n)}$ для $n \geq 1$. Следовательно, гидроупругие волны не могут распространяться при скоростях, меньших $c_{\min}^{(1)}$. Результаты работы [26] показывают, что $\omega_1(0) = 0$ и $\omega_n(0) > 0$ для $n \geq 2$. Соответственно, $c^{(1)}(\xi)$ имеет конечный предел, а $c^{(n)}(\xi)$ стремятся в бесконечность при $\xi \to 0$. Только волны с номером $n = 1$ могут распространяться в канале при скоростях в диапазоне от $c_{\min}^{(1)}$ до $c_{\min}^{(2)}$. Типичный случай значений фазовых скоростей показан на Рисунке 2.1 для заданных параметров системы вода-лед-канал. Для заданной скорости U, где $c^{(1)}_{\min} < U < c^{(2)}_{\min}$, существует два волновых числа – $\xi^{(1)}_1$ и $\xi^{(1)}_2$, $\xi^{(1)}_1 < \xi^{(1)}_{\min} < \xi^{(1)}_2$, таких что $c^{(1)}(\xi^{(1)}_1) = U$ и $c^{(1)}(\xi^{(1)}_2) = U$ при $c^{(n)}(\xi) > U$ для $n \geq 2$ и любого ξ. В целом, для $c^{(N)}_{\min} < U < c^{(N+1)}_{\min}$ с $n \geq 3$ существует $2N-1$ волн с волновыми числами $\xi^{(1)}_2$, $\xi^{(n)}_1$ и $\xi^{(n)}_2$, где $2 \leq n \leq N$, которые могут распространяться со скоростью U в канале. В случае $c^{(2)}_{\min} < U < c^{(1)}(0)$ существует 4 гидроупругих волны, см. Рисунок 2.1.

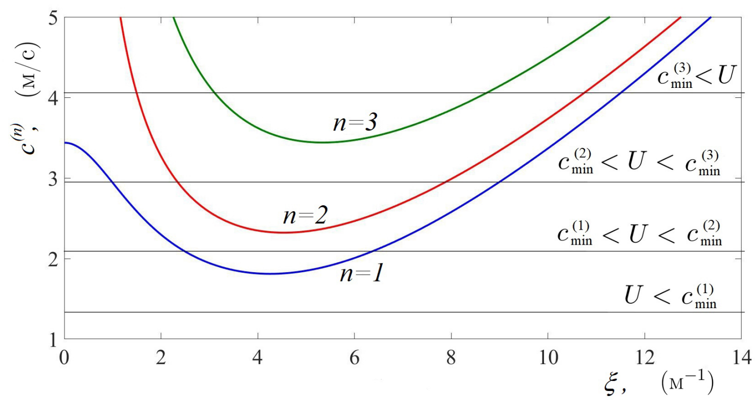


Рис. 2.1: Фазовые скорости четных гидроупругих волн в замороженном канале. Показано разное число возможных гидпроупругих волн для разных скоростей внешней нагрузки U.

Профили функций $\psi_n(\xi, y)$ поперек канала изображены на Рисунке 7 в статье [26] для некоторых заданных значений параметров системы вода-лед-канал. После определения функций $\psi_n(\xi, y)$ и частот $\omega_n(\xi)$, которые теперь считаются известными (см. [26]), необходимо найти коэффициенты $a_n(\xi, t)$. Дополнительно в дальнейшем будет использоваться определение n-ой гидпроупругой моды (по аналогии с модами колебаний упругой балки), соответствующей профилям гидроупругих волн в сечении канала в форме $\psi_n(\xi, y)$ с соответствующей частотой распространения волны вдоль канала при всех значениях волнового числа ξ. Подстановка (2.2.9) в уравнение (2.2.8) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^2 a_n}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2(\xi) a_n \right) [M\psi_n + \rho_l \Phi_n(\xi, y, 0)] = -P^F(\xi, y) e^{-i\xi U t}. \tag{2.2.12}$$

Последовательное умножение уравнения (2.2.12) на ψ_m, интегрирование результата по y от $-L$ до L, и использование (2.2.10) приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций $a_n(\xi,t)$ $(n=1,2,...)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_n}{\mathrm{d}t^2}+\omega_n^2(\xi)a_n=H_n(\xi)e^{-i\xi Ut}, \qquad H_n(\xi)=-\frac{1}{\sigma_n(\xi)}\int\limits_{-L}^{L}P^F(\xi,y)\psi_n(\xi,y)\mathrm{d}y. \quad (2.2.13)$$

Очевидно, что $\omega_n(\xi)$, которые были введены как корни собственных значений спектральной задачи (2.2.9), являются частотой гидроупругих мод $\psi_n(\xi,y)$, $n\geq 1$. Начальные условия для уравнений (2.2.13) следуют из (2.2.2),

$$a_n(\xi,0)=\frac{H_n(\xi)}{\omega_n^2(\xi)}, \qquad \frac{da_n}{dt}(\xi,0)=0. \quad (2.2.14)$$

Решение задачи (2.2.13) – (2.2.14) имеет вид

$$a_n(\xi,t)=\frac{\xi U H_n(\xi)}{2\omega_n^2(\xi)}\left[\frac{e^{i\omega_n t}}{\omega_n+\xi U}-\frac{e^{-i\omega_n t}}{\omega_n-\xi U}\right]+\frac{H_n e^{-i\xi U t}}{\omega_n^2-(\xi U)^2}. \quad (2.2.15)$$

Слагаемые в (2.2.15) имеют особенность в точках $\pm\xi_1^{(n)}$ и $\pm\xi_2^{(n)}$ если скорость движения нагрузки U достаточно большая, т.е. выполняется условие $U>c_{\min}^{(n)}$. Дополнительно $a_1(\xi,t)$ может быть сингулярна в $\xi=0$, потому что $\omega_1(\xi)=O(\xi)$ при $\xi\to 0$. Однако, можно показать, что $\sigma_1(\xi)=O(\xi^{-2})$ в (2.2.10) и тогда $H_1(\xi)=O(\xi^2)$ при $\xi\to 0$. Следовательно, $a_n(\xi,t)$ имеют конечный предел $\xi\to 0$ для всех n. Также, при любых условиях выбора параметров, сингулярные слагаемые в (2.2.15) компенсируют друг друга, уничтожая особенность, и тогда функции $a_n(\xi,t)$ являются регулярными (особенности отсутствуют) при всех n, ξ и t.

В движущейся системе координат $x=X+Ut$ прогиб льда $w(X,y,t)$ определяется обратным преобразованием Фурье, примененным к (2.2.5),

$$w(X,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}w_n(X,y,t), \quad (2.2.16)$$

$$w_n(X,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi Ut}a_n(\xi,t)\psi_n(\xi,y)e^{i\xi X}\mathrm{d}\xi.$$

Уравнения (2.2.3) и (2.2.9) показывают, что $\psi_n(\xi, y)$, $\omega_n(\xi)$ и $\sigma_n(\xi)$ в действительности зависят от ξ^2 и, следовательно, являются четным функциями параметра преобразования Фурье ξ. В рассматриваемом случае с нагрузкой (2.1.7) четной по x, функции $H_n(\xi)$, определенные в (2.2.13), тоже являются четными. Интегралы в сумме (2.2.16) могут быть сведены к интегралам от 0 до $+\infty$, используя свойства подынтегральных функций от параметра ξ и решения (2.2.15),

$$w_n(X,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{0} a_n(\xi,t)\psi_n(\xi,y)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi + \int\limits_{0}^{\infty} a_n(\xi,t)\psi_n(\xi,y)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} H_n(\xi)\psi_n(\xi,y)\left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2} + \frac{\xi U}{2\omega_n^2(\xi)}\left[e^{i\xi X}\frac{e^{i(\omega_n(\xi)+\xi U)t}}{\omega_n(\xi)+\xi U}\right.\right.$$

$$\left.\left. -e^{i\xi X}\frac{e^{-i(\omega_n(\xi)-\xi U)t}}{\omega_n(\xi)-\xi U} + e^{-i\xi X}\frac{e^{-i(\omega_n(\xi)+\xi U)t}}{\omega_n(\xi)+\xi U} - e^{-i\xi X}\frac{e^{i(\omega_n(\xi)-\xi U)t}}{\omega_n(\xi)-\xi U}\right]\right)\mathrm{d}\xi. \quad (2.2.17)$$

Первое, третьей и пятое слагаемые в (2.2.17) могут быть сингулярными для некоторых значений скорости U и номера гидроупругой моды n, но в сумме эти сингулярности компенсируют друг друга. Интегралы $w_n(X, y, t)$ могут быть вычислены при конечных t и, тем самым, могут быть определены нестационарные прогибы ледового покрова при разных значениях t. В данном параграфе проводится асимптотический анализ интегралов (2.2.17) и, в конечном итоге, прогибов льда (2.2.16) при больших временах, когда $t \to \infty$ и $X = O(1)$.

Интеграл в правой части (2.2.17) может быть разложен на пять интегралов, каждый из которых понимается в смысле главного значения. Для больших n, таких что $c_{\min}^{(n)} > U$, эти пять интегралов являются регулярными с $\omega_n(\xi) \pm \xi U > 0$, где $\xi > 0$. Первый интеграл не зависит от t. Фаза $\omega_n(\xi) + \xi U$ во втором и четвертом интегралах является монотонной с положительным значением производной. Методом интегрирования по частям определяется, что эти два интеграла имеют порядок $O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Фаза $\omega_n(\xi) - \xi U$ в третьем и пятом интегралах потенциально может изменять знак производной на интервале $0 < \xi < \xi_{\min}$. Эти интегралы также затухают со временем, однако медленнее чем $O(t^{-1})$ [54]. В этом случае уравнение (2.2.17) примет вид

$$w_n(X,y,t) = 2\int\limits_0^\infty H_n(\xi)\psi_n(\xi,y)\frac{\cos(\xi X)\mathrm{d}\xi}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2} + o(1), \tag{2.2.18}$$

где $t \to \infty$, $c_{\min}^{(n)} > U$, и $o(1)$ означает слагаемые, которые стремятся к 0 при увеличении времени t. Интегралы (2.2.18) вычисляются численно.

Асимптотическое поведение интеграла (2.2.17) при $t \to \infty$ и $X = O(1)$ является более сложным при $U > c_{\min}^{(n)}$. В данном случае, уравнение $\omega_n(\xi) - \xi U = 0$ имеет два положительных корня $\xi_1^{(n)}$ и $\xi_2^{(n)}$, где $\xi_1^{(n)} < \xi_{\min}^{(n)} < \xi_2^{(n)}$ (Рисунок 2.1). Интегралы от второго и четвертого слагаемых в (2.2.17) являются регулярными и их вклады в формирование прогибов льда оцениваются как $O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Тогда (2.2.17) дает

$$w_n(X,y,t) = 2\,V.p.\!\int\limits_0^\infty H_n(\xi)\psi_n(\xi,y)\frac{\cos(\xi X)\mathrm{d}\xi}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2} -$$

$$V.p.\!\int\limits_0^\infty H_n(\xi)\psi_n(\xi,y)\frac{\cos[\xi X - t(\omega_n(\xi)-\xi U)]}{\omega_n(\xi)-\xi U}\frac{\xi U\mathrm{d}\xi}{\omega_n^2(\xi)} + O(t^{-1}), \tag{2.2.19}$$

где $V.p.$ означает интеграл в смысле главного значения. Для определения асимптотического поведения несобственного интеграла в смысле главного значения второго рода, интервал интегрирования в (2.2.19) делится на пять подинтервалов:

$$V.p.\!\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\xi = \int\limits_0^{\xi_1^{(n)}-b_1^{(n)}(t)} \mathrm{d}\xi + V.p.\int\limits_{\xi_1^{(n)}-b_1^{(n)}(t)}^{\xi_1^{(n)}+b_1^{(n)}(t)} \mathrm{d}\xi + \int\limits_{\xi_1^{(n)}+b_1^{(n)}(t)}^{\xi_2^{(n)}-b_2^{(n)}(t)} \mathrm{d}\xi +$$

$$V.p.\int\limits_{\xi_2^{(n)}-b_2^{(n)}(t)}^{\xi_2^{(n)}+b_2^{(n)}(t)} \mathrm{d}\xi + \int\limits_{\xi_2^{(n)}+b_2^{(n)}(t)}^{\infty} \mathrm{d}\xi, \tag{2.2.20}$$

где функции $b_1^{(n)}(t)$ и $b_2^{(n)}(t)$ стремятся к 0 совместно с произведением этих функций на $t^{\frac{1}{2}}$, и произведения этих функций на t стремится к ∞ при $t \to \infty$. Первый, третий и пятый интегралы в (2.2.20) являются регулярными и стремятся к 0 при

$t \to \infty$. Асимптотическое поведение этих трех интегралов при $t \to \infty$ определяется интегрированием по частям. Ниже представлен анализ для первого интеграла $I^{(1)}(X,y,t)$ в (2.2.20) с интервалом интегрирования $(0, \xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}(t))$. Вводится следующая регулярная функция

$$T_n(\xi, y) = H_n(\xi)\psi_n(\xi, y)\frac{\xi - \xi_1^{(n)}}{\omega_n(\xi) - \xi U}\frac{\xi U}{\omega_n^2(\xi)},$$

которая является конечной на отрезке $[0, \xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}(t)]$ включая концы. Интегрирование $I^{(1)}(X,y,t)$ по частям дает

$$I^{(1)}(X,y,t) = \int\limits_0^{\xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}(t)} \frac{T_n(\xi,y)}{\xi - \xi_1^{(n)}}\cos[\xi X - t(\omega_n(\xi) - \xi U)]\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_0^{\xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}(t)} \frac{T_n(\xi,y)}{(\xi - \xi_1^{(n)})(X - t[\omega_n'(\xi) - U])}\mathrm{d}\left\{\sin[\xi X - t(\omega_n(\xi) - \xi U)]\right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{t b_1^{(n)}(t)}\right) = o(1)$$

при $t \to \infty$. Только второй и четвертый интегралы в (2.2.20) могут дать ненулевой вклад в формирование прогибов льда при больших временах. Дальнейший анализ показан на примере второго интеграла. Четвертый интеграл оценивается аналогично. Во втором интеграле $I^{(2)}(X,y,t)$ производится замена переменной интегрирования на μ, где $\xi = \xi_1^{(n)} + b_1^{(n)}(t)\mu$,

$$I^{(2)}(X,y,t) = V.p.\int_{-1}^{1} T_n(\xi_1^{(n)} + b_1^{(n)}(t)\mu, y)\cos[\xi X - t(\omega_n(\xi) - \xi U)]\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu},$$

затем элементы интеграла оцениваются при больших t

$$T_n(\xi_1^{(n)} + b_1^{(n)}(t)\mu, y) = T_n(\xi_1^{(n)}, y) + o(1),$$

$$T_n(\xi_1^{(n)}, y) = \frac{H_n(\xi_1^{(n)})\psi_n(\xi_1^{(n)}, y)}{(\omega_n'(\xi_1^{(n)}) - U)\xi_1^{(n)} U},$$

$$\xi X - t(\omega_n(\xi) - \xi U) = \xi_1^{(n)} X - \mu(\omega_n'(\xi_1^{(n)}) - U) t b_1^{(n)}(t) + o(1).$$

Эти оценки дают

$$I^{(2)}(X,y,t) = T_n(\xi_1^{(n)},y)\ V.p.\int\limits_{-1}^{1} \cos[\xi_1^{(n)}X - \mu(\omega_n'(\xi_1^{(n)}) - U)tb_1^{(n)}(t)]\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} + o(1) =$$

$$= 2T_n(\xi_1^{(n)},y)\sin[\xi_1^{(n)}X]\int\limits_0^1 \sin[\mu E_n(t)]\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} + o(1),$$

где функция $E_n(t) = (\omega_n'(\xi_1^{(n)}) - U)tb^{(n)}(t)$ растет по модулю при $t \to \infty$. Здесь

$$\int\limits_0^1 \sin[\mu E_n(t)]\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \mathrm{sgn}(E_n)\int\limits_0^{|E_n(t)|}\frac{\sin(\mu)\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega_n'(\xi_1^{(n)}) - U) + o(1),$$

где $\mathrm{sgn}(E_n) = 1$ для $E_n > 0$ и $\mathrm{sgn}(E_n) = -1$ для $E_n < 0$ при $t \to \infty$ ($\mathrm{sgn}(E_n) = 0$ для $E_n = 0$). Производная $\omega_n'(\xi)$ является группой скоростью n-ой гидроупругой моды для волнового числа ξ. Далее используется обозначение $c_{gm}^{(n)} = \omega_n'(\xi_m^{(n)})$, где $m = 1,2$. Можно показать, что $c_{g1}^{(n)} < U$ и $c_{g2}^{(n)} > U$. Тогда

$$I^{(2)}(X,y,t) = -\pi T_n(\xi_1^{(n)},y)\sin[\xi_1^{(n)}X] + o(1),$$

$$I^{(4)}(X,y,t) = \pi T_n(\xi_2^{(n)},y)\sin[\xi_2^{(n)}X] + o(1). \qquad (2.2.21)$$

Следовательно, равенство (2.2.19) при больших временах дает

$$w_n(X,y,t) = 2\,V.p.\int\limits_0^{\infty} H_n(\xi)\psi_n(\xi,y)\frac{\cos(\xi X)\mathrm{d}\xi}{\omega_n^2(\xi) - \xi^2U^2} +$$

$$+\pi T_n(\xi_1^{(n)},y)\sin[\xi_1^{(n)}X] - \pi T_n(\xi_2^{(n)},y)\sin[\xi_2^{(n)}X] + o(1). \qquad (2.2.22)$$

Следовательно, второй, зависящий от времени, интеграл в (2.2.19) сходится к двум волнам, которые распространяются вдоль канала со скоростью нагрузки. Уравнение (2.2.22) дает детальное представление стационарного прогиба w_n путем последующего разложения соответствующего интеграла на локальный прогиб в области нагрузки и прогиб в отдалении от нее.

Интеграл в (2.2.22) разлагается на пять интегралов как в (2.2.20), но теперь коэффициенты $b_j^{(n)}$, $j = 1,2$, не зависят от времени. Значение интеграла в (2.2.22) не зависит от значений $b_1^{(n)}$ и $b_2^{(n)}$. Первый, третий и пятый интегралы являются регулярными. Они вычисляются численно и их сумма обозначается $J_n^{(R)}(X, y)$. Они затухают как $O(X^{-1})$, при $|X| \to \infty$, и вносят вклад в локальный прогиб в области нагрузки. Второй и четвертый интегралы вычисляются с учетом того, что они берутся в смысле главного значения и с помощью метода, изложенного в [90]. Вводятся две регулярные функции

$$R_n^{(j)}(\xi, y) = \frac{2H_n(\xi)\psi_n(\xi, y)}{\omega_n(\xi) + \xi U}\frac{\xi - \xi_j^{(n)}}{\omega_n(\xi) - \xi U},$$

где $R_n(\xi_1^{(n)}, y) = T_n(\xi_1^{(n)}, y)$. Затем используется определение интегралов в смысле главного значения

$$2\, V.p.\int\limits_0^\infty H_n(\xi)\psi_n(\xi, y)\frac{\cos(\xi X)\mathrm{d}\xi}{\omega_n^2(\xi) - \xi^2U^2} = \int\limits_{\xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}}^{\xi_1^{(n)} + b_1^{(n)}} \frac{R_n^{(1)}(\xi, y) - R_n^{(1)}(\xi_1^{(n)}, y)}{\xi - \xi_1^{(n)}}\cos[\xi X]\mathrm{d}\xi +$$

$$+R_n^{(1)}(\xi_1^{(n)}, y)\ V.p.\int\limits_{\xi_1^{(n)} - b_1^{(n)}}^{\xi_1^{(n)} + b_1^{(n)}} \frac{\cos[\xi X]\mathrm{d}\xi}{\xi - \xi_1^{(n)}} + \int\limits_{\xi_2^{(n)} - b_2^{(n)}}^{\xi_2^{(n)} + b_2^{(n)}} \frac{R_n^{(2)}(\xi, y) - R_n^{(2)}(\xi_2^{(n)}, y)}{\xi - \xi_2^{(n)}}\cos[\xi X]\mathrm{d}\xi +$$

$$+R_n^{(2)}(\xi_2^{(n)}, y)\ V.p.\int\limits_{\xi_2^{(n)} - b_2^{(n)}}^{\xi_2^{(n)} + b_2^{(n)}} \frac{\cos[\xi X]\mathrm{d}\xi}{\xi - \xi_2^{(n)}} + J_n^{(R)}(X, y). \tag{2.2.23}$$

Первый и третий интегралы в (2.2.23) являются регулярными. Они затухают как $O(X^{-1})$, где $|X| \to \infty$, и аналогично слагаемому $J_n^{(R)}(X, y)$ вносят вклад в локальный прогиб в области нагрузки. Эти два интеграла вычисляются численно и их сумма с $J_n^{(R)}(X, y)$ обозначается $w_n^{(loc)}(X, y)$, (см. (2.2.19)). Функция $w_n^{(loc)}(X, y)$ является четной по X и y и затухает как $O(X^{-1})$ с увеличением дистанции от нагрузки, где $|X| \to \infty$. Интегралы в смысле главного значения в (2.2.23) вычисляются с помощью подстановки $\xi = \xi_j^{(n)} + b_j^{(n)}\sigma$, где $j = 1, 2$,

$$V.p.\int\limits_{\xi_j^{(n)} - b_j^{(n)}}^{\xi_j^{(n)} + b_j^{(n)}} \frac{\cos[\xi X]\mathrm{d}\xi}{\xi - \xi_j^{(n)}} = V.p.\int\limits_{-1}^{1} \cos[\xi_j^{(n)}X + b_j^{(n)}X\sigma]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} =$$

$$= -\sin[\xi_j^{(n)} X] \int\limits_{-1}^{1} \sin[b_j^{(n)} X\sigma] \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -2\sin[\xi_j^{(n)} X] \mathrm{sgn}(X) \int\limits_{0}^{b_j^{(n)}|X|} \sin(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}. \qquad (2.2.24)$$

Последовательное подставление (2.2.23), (2.2.24) и функций $R_n^{(j)}(\xi_j^{(n)}, y)$, $T_n(\xi_j^{(n)}, y)$ в (2.2.22) дает уравнение для прогибов ледового покрова $w_n(X, y, t)$ при больших временах t в виде суммы локальных прогибов $w_n^{(loc)}(X, y)$ в области нагрузки и двух волн, распространяющихся от нагрузки

$$w_n(X, y, t) = w_n^{(loc)}(X, y) - A_1^{(n)} \psi_n(\xi_1^{(n)}, y) \sin[\xi_1^{(n)} X] G_1^{(n)}(X) -$$

$$-A_2^{(n)} \psi_n(\xi_2^{(n)}, y) \sin[\xi_2^{(n)} X] G_2^{(n)}(X), \qquad (2.2.25)$$

$$A_j^{(n)} = \frac{2\pi H_n(\xi_j^{(n)})}{(\omega_n'(\xi_j^{(n)}) - U)\xi_j^{(n)} U} \quad (j = 1, 2), \qquad (2.2.26)$$

$$G_1^{(n)}(X) = \frac{1}{\pi} \mathrm{sgn}(X) \int\limits_{0}^{b_1^{(n)}|X|} \frac{\sin(u)\mathrm{d}u}{u} - \frac{1}{2},$$

$$G_2^{(n)}(X) = \frac{1}{\pi} \mathrm{sgn}(X) \int\limits_{0}^{b_2^{(n)}|X|} \frac{\sin(u)\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}. \qquad (2.2.27)$$

Произведения $\psi_n(\xi_1^{(n)}, y) \sin[\xi_1^{(n)} X]$ и $\psi_n(\xi_2^{(n)}, y) \sin[\xi_2^{(n)} X]$ в (2.2.25) соответствуют n-ой моде гидроупругой волны, распространяющейся в канале. Волновые числа этих волн такие, что соответствующие фазовые скорости равны скорости движения нагрузки U. Абсолютные значения $A_1^{(n)}$ и $A_2^{(n)}$ в (2.2.26) являются амплитудами этих волн. Амплитуда $A_j^{(n)}$ стремится к бесконечности когда групповая скорость $\omega_n'(\xi_j^{(n)})$ стремится к скорости движения нагрузки U. Фазовые и групповые скорости равны для таких значений волнового числа, при которых фазовая скорость является минимальной. Этот случай возникнет при скорости движения нагрузки, равной критической скорости n-ой волны. Линейная теории гидроупругости без учета демпфирования (в виде коэффициента запаздывания τ) не может использоваться для критических скоростей движения нагрузки.

Так называемая функция-срезка $G_1^{(n)}(X)$ (регулирующая затухание волн с одной стороны от нагрузки) стремится к -1 при $X \to -\infty$ и к 0 при $X \to +\infty$. Функция $G_2^{(n)}(X)$ стремится к 1 при $X \to +\infty$ и к 0 при $X \to -\infty$. Эти функции зависят от $b_1^{(n)}$ и $b_2^{(n)}$ соответственно. Следовательно, длинные волны $A_1^{(n)}\psi_n(\xi_1^{(n)}, y)\sin[\xi_1^{(n)}X]G_1^{(n)}(X)$ существуют сзади нагрузки, а короткие волны $A_2^{(n)}\psi_n(\xi_2^{(n)}, y)\sin[\xi_2^{(n)}X]G_2^{(n)}(X)$ будут спереди нагрузки. Оба типа волн стационарны в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой со скоростью U.

Итоговый прогиб льда состоит из суммы вкладов от каждой моды (см. (2.2.16)). Вклады от старших мод $c_{\min}^{(n)} > U$ являются локализованными в области нагрузки и четными по x прогибами (2.2.18) без генерации волн. Каждая мода с $c_{\min}^{(n)} < U$ дает две волны (см. (2.2.25)), за исключением моды с номером $n = 1$, для которой длинная волна позади нагрузки может отсутствовать (см. Рисунок 2.1 и соответствующее обсуждение). Локальные вклады в прогиб льда $w_n^{(loc)}(X, y)$ вычисляются численно для $n \geq 1$.

Асимптотическое решение при больших временах (2.2.16), (2.2.25) получено для нагрузки с постоянной амплитудой, движущейся вдоль канала с постоянной скоростью. Если функция нагрузки зависит от времени, то $H_n(\xi, t)$ в (2.2.13) также будет зависеть от времени. Если скорость движения нагрузки изменяется со временем, то степень экспоненты в (2.2.13) $-i\xi Ut$ изменится на $-i\xi s(t)$, где $s(t)$ – расстояние, пройденное нагрузкой. В общем случае, задача о движении нестационарной нагрузки является комплексной и сложной для анализа. Данную задачу можно упростить, если рассмотреть осциллирующую амплитуду нагрузки

$$P_0(t) = P_{00}(1 + A\cos(\omega' t)), \tag{2.2.28}$$

где ω' – частота и A – амплитуда осцилляций (см. [58]). Решение задачи (2.2.15) зависит от скорости нагрузки U и амплитуды нагрузки $P_0(t)$, а ξ является параметром решения, т.е. $a_n(\xi, t, U, P_0)$. Решение задачи с осциллирующей по времени нагрузкой (2.2.28) может быть получено как следующая комбинация решений (2.2.15)

$$a_n(\xi, t, U, P_0(t)) = a_n(\xi, t, U, P_{00}) +$$

$$+\frac{1}{2}A\big\{a_n(\xi,t,U-\omega'/\xi,P_{00})+a_n(\xi,t,U+\omega'/\xi,P_{00})\big\}. \qquad (2.2.29)$$

Первое слагаемое в (2.2.29) дает прогибы льда (2.2.25) при больших временах. Второе и третье слагаемые пропорциональны амплитуде осцилляций A и описывают новую систему волн, которая не будет стационарной в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Эти волны распространяются от нагрузки с относительными скоростями $\pm\omega'/\xi$. Каждое слагаемое в (2.2.29) вносит вклад в локализованный прогиб в области нагрузки при $t\to\infty$.

В задаче о движении нагрузки с постоянной амплитудой P_0, но с переменной скоростью $U(1+\varepsilon\sin(\omega' t))$, которая осциллирует с относительно малой амплитудой εU и частотой ω', расстояние пройденное нагрузкой имеет вид

$$s(t)=Ut-\varepsilon\frac{U}{\omega'}\cos(\omega' t).$$

Тогда правая часть уравнения (2.2.13) примет вид

$$H_n(\xi)\exp\big\{-i\xi(Ut-\varepsilon\frac{U}{\omega'}\cos(\omega' t)\big\}\approx$$

$$\approx H_n(\xi)e^{-i\xi Ut}\big\{1+\varepsilon\, i\xi\frac{U}{\omega'}\cos(\omega' t)+O(\varepsilon^2)\big\}$$

и данный случай может рассматриваться аналогично случаю с нагрузкой с переменной амплитудой (2.2.28), где $A=i\xi U\varepsilon/\omega'$. Тогда разложение (2.2.29) может использоваться для нагрузки, движущейся с осциллирующей скоростью.

2.3 Результаты численного анализа асимптотического решения

Вычисления проведены для экспериментального ледового бассейна в Приамурском государственном университете имени Шолом Алейхема. Длина бассейна – 14 м, глубина – 1 м, $H=1$ м, и ширина – 3 м, $L=1.5$ м, с типичным значением толщины льда $h_i=3$ мм (см. [89]). Плотность воды $\rho_l=1024$ кг/м^3, плотность льда $\rho_i=920$ кг/м^3. Модуль Юнга $E=4.2\cdot10^9$ Н/м^2 и коэффициент Пуассона $\nu=0.33$. Жесткость ледовой пластины $D=10.6$ Нм и характеристическая длина ледового покрова $L_c=(D/\rho g)^{\frac{1}{4}}\approx 18$ см. Внешняя нагрузка (2.1.7) приложена к области 20×20 см^2, что соответствует $c_1 = c_2 = 15$, и движется вдоль центральной линии ледового бассейна.

В представленных расчетах длина ледового бассейна считается бесконечной. Рассматриваются только четные по y гидроупругие моды (нечетные не рассматриваются в силу четности функции внешней нагрузки). Фазовые скорости $c^{(n)}(\xi)$ для волн с номерами $n = 1, 2, 3$ показаны на Рисунке 2.1. Соответствующие минимумы этих скоростей $c^{(1)}_{\min} = 1.81$ м/с, $c^{(2)}_{\min} = 2.321$ м/с и $c^{(3)}_{\min} = 3.446$ м/с.

Фазовая скорость для первой моды и длинных волн $c^{(1)}(0) = 3.44$ м/с. Критическая скорость для гравитационных волн в данном бассейне $\sqrt{gH} = 3.13$ м/с. Заметно, что длинные гидроупругие волны распространяются с большей скоростью, чем гравитационные волны без ледового покрова. Этот эффект вызван жесткостью ледового покрова и присутствием боковых стенок канала. Следует отметить, что для свободной поверхности существует только одна фазовая скорость изгибно-гравитационных волн при отсутствии стенок канала, которая достигает критической скорости для длинных волн при стремлении волнового числа к 0.

Элементы прогибов льда при больших временах анализируются в движущейся совместно с нагрузкой системой координат для амплитуды нагрузки $P_0 = 100$ Н/м^2 и скорости движения $U = 2$ м/с. Для этой скорости нагрузки образуются волны, соответствующие только первой гидроупругой моде (см. Рисунок 2.1 и уравнения (2.2.18) и (2.2.25)).

Волновые числа соответствующих волн первой моды, при которых фазовая скорость совпадает со скоростью движения нагрузки, равны $\xi^{(1)}_1 = 2.77$ м$^{-1}$ и $\xi^{(1)}_2 = 5.96$ м$^{-1}$. Эти волновые числа соответствуют волнам с длиной 2.29 и 1.06 м. Критическая скорость первой моды достигается при волновом числе $\xi^{(1)}_{\min} = 4.25$ м$^{-1}$. Групповые скорости, создаваемых нагрузкой волн, равны $c^{(1)}_{g1} = 1.23$ м/с и $c^{(1)}_{g2} = 3.22$ м/с. Амплитуды этих волн заданы уравнением (2.2.26) и равны $|A^{(1)}_1| = 9.66 \cdot 10^{-4}$ м и $|A^{(1)}_2| = 5.83 \cdot 10^{-4}$ м (функция $H_n(\xi)$ имеет размерность м^2/с^2). Здесь $A^{(1)}_1$ имеет положительный знак и $A^{(1)}_2$ отрицательный. Локальный вклад четных мод $w^{(loc)}_n(X, y)$ в итоговый прогиб льда показан на Рисунке 2.2 для центральной линии канала $y = 0$. Эти локальные прогибы являются четными по X и быстро затухают с номером моды.

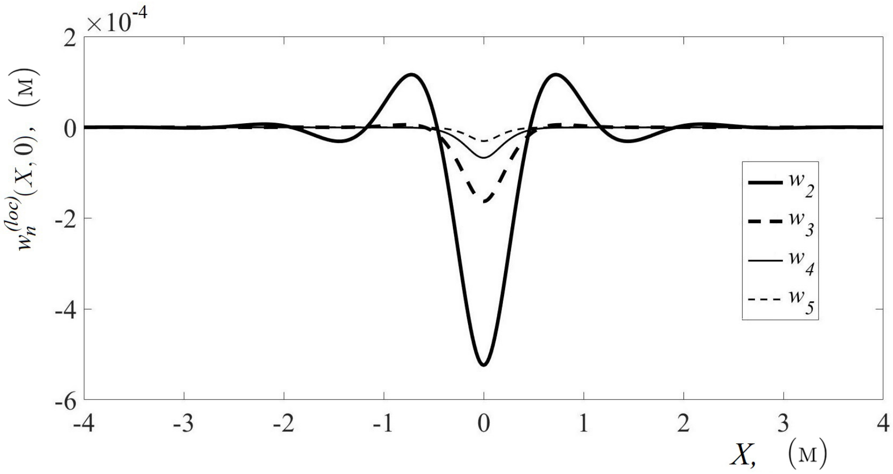


Рис. 2.2: Вклад второй, третьей, четвертой и пятой мод в итоговый прогиб ледового покрова.

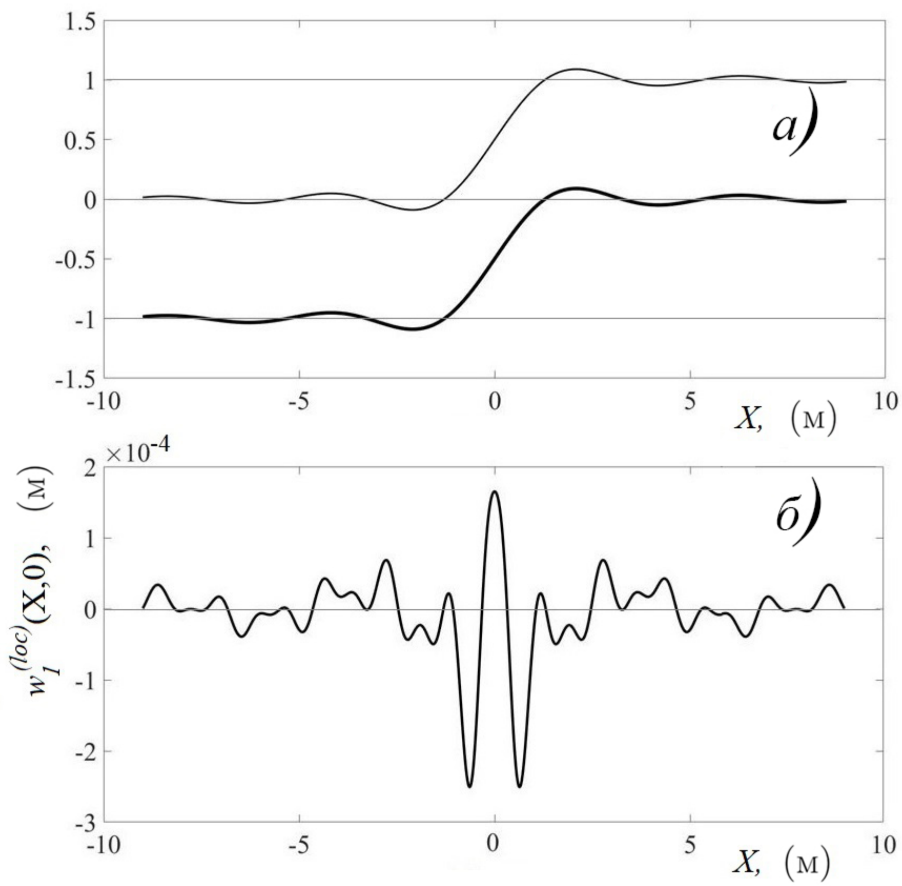


Рис. 2.3: (а) Функции срезки $G_{1,2}^{(1)}(x)$ заданные формулами (2.2.27) для $b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 0.5$. Жирные линии показывают длинную волну сзади нагрузки, $G_1^{(1)}(x)$, а тонкие линии показывают короткую волну спереди нагрузки, $G_2^{(1)}(x)$. (б) Соответствующие локальные вклады в прогибы льда $w_1^{(loc)}(X,0)$.

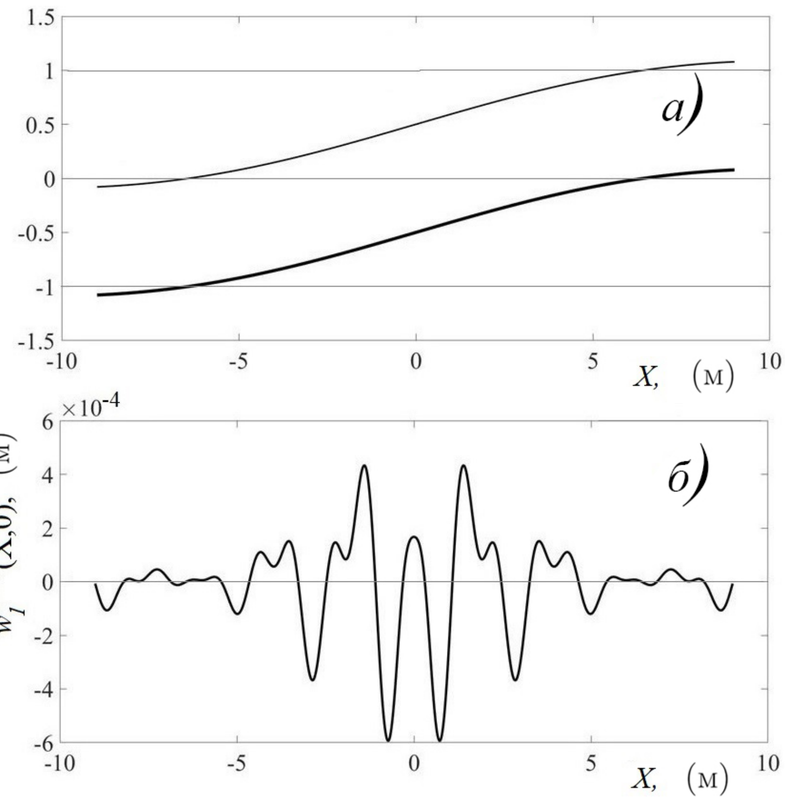


Рис. 2.4: Аналогично Рисунку 2.3, но для $b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 1.5$.

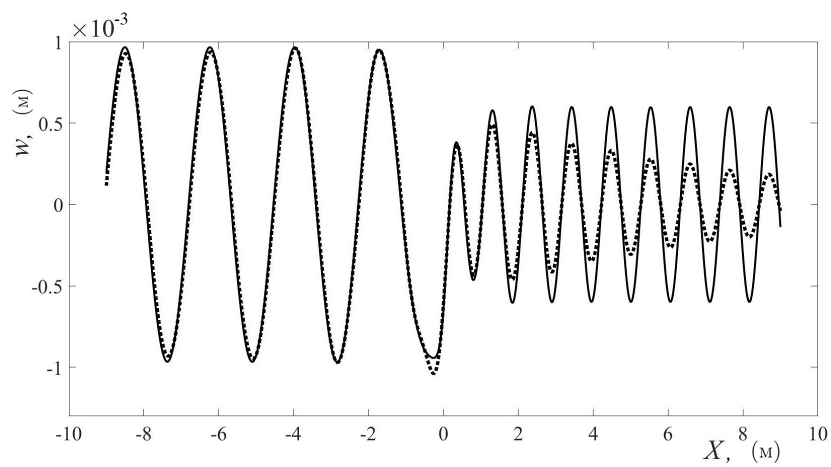


Рис. 2.5: Итоговый прогиб льда, вычисленный по асимптотическому разложению, вдоль центральной линии канала $y = 0$ в области движения нагрузки при $P_0 = 100$ Н/м^2 (сплошная линия). Соответствующий прогиб льда, вычисленный для вязкоупругой модели главы 1 с временем запаздывания $\tau = 0.004$ с показан пунктирной линией.

Функции срезки $G_{1,2}^{(1)}(x)$ (см. (2.2.27)), для двух случаев $b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 0.5$ и $b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 1.5$, и вклад первой моды в локальные прогибы льда $w_1^{(loc)}(X, 0)$ для этих двух случаев показаны на Рисунках 2.3 и 2.4. Постоянные $b_1^{(1)}$ и $b_2^{(1)}$ в (2.2.27) сильно отличаются в этих двух случаях, что приводит к разному вкладу в локальные прогибы от первой моды. Однако итоговый прогиб льда (2.2.16) вдоль центральной линии канала остается неизменным (см. сплошные линии на Рисунке 2.5). Пунктирная линия на Рисунке 2.5 показывает прогиб льда вдоль центральной линии канала, полученный для такой же нагрузки по вязкоупругой модели первой главы с временем запаздывания $\tau = 0.004$ с. Прогиб льда, полученный в результате асимптотического анализа в данной главе без учета диссипации согласуется с вязкоупругим решением из главы 1. В вязкоупругой модели короткие волны спереди нагрузки затухают быстрее чем длинные волны сзади нее.

Распределение максимальных деформаций в ледовом покрове, масштабированное критическим значением ϵ_{cr}, показано на Рисунке 2.6 в виде линий уровня (а) и трехмерного графика (б). Максимальные деформации достигаются спереди нагрузки вдоль центральной линии канала.

Направления максимальных деформаций в разных точках ледового покрова показаны на Рисунке 2.7. Если локальный максимум деформаций в точке превышает критическое число ϵ_{cr} и, следовательно, если предполагать образование трещины в ледовом покрове в данной локальной области, то она будет перпендикулярна показанным направлениям. Возможные трещины в ледовом покрове будут параллельны стенкам в непосредственной близости от них и будут перпендикулярны движению нагрузки в отдалении от стенок.

Результаты на Рисунке 2.6 показывают, что максимальные деформации достигаются вдоль центральной линии канала спереди движущейся нагрузки. Деформации в отдалении от нагрузки описываются волновыми компонентами во втором и третьем слагаемых в (2.2.25). Используя эти компоненты, максимальные деформации в разных областях поперек канала в отдалении от нагрузки могут быть легко вычислены для разных форм внешней нагрузки и разных скоростей

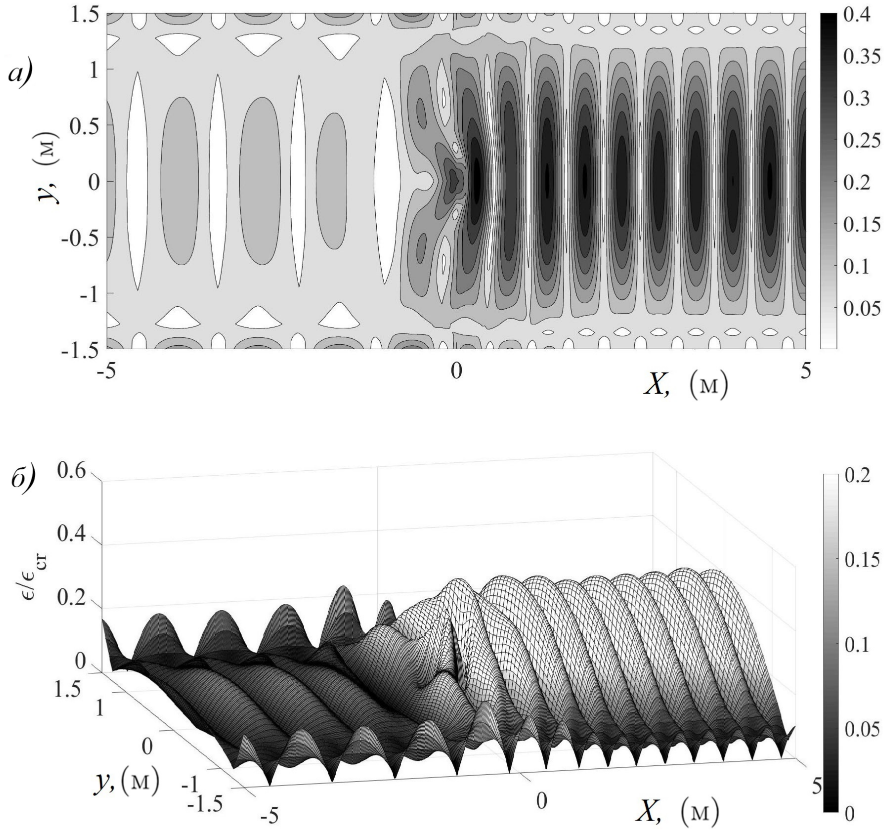


Рис. 2.6: Распределение максимальных деформаций в ледовом покрове.

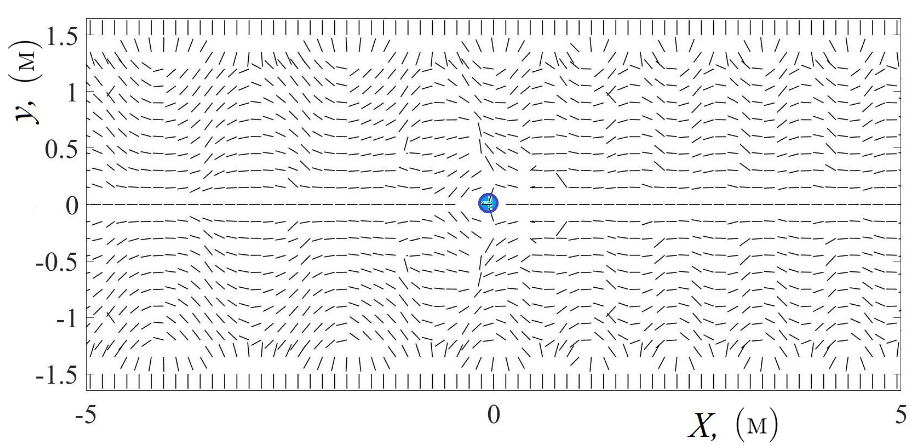


Рис. 2.7: Направления максимальных деформаций в ледовом покрове.

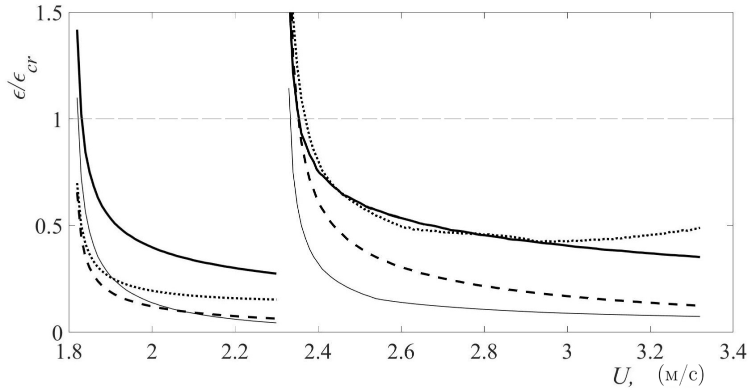


Рис. 2.8: Масштабированные максимальные деформации в отдалении от нагрузки как функции скорости нагрузки, начиная с наименьшей критической скорости. Максимальные деформации далеко спереди нагрузки вдоль центральной линии канала показаны жирной сплошной линией, на стенках – пунктирной. Максимальные деформации далеко сзади нагрузки вдоль центральной линии канала показаны тонкой сплошной линией, и на стенках канала – точечной линией.

(см. Рисунок 2.8). Результаты на этом Рисунке показывают масштабированные максимальные удлинения для нагрузки (2.1.7) и скорости ее движения от критической скорости первой моды до критической скорости третьей моды. Линейная теория гидроупругости предсказывает неограниченные деформации для критических скоростей. Интересно заметить, что деформации вдоль центральной линии канала спереди нагрузки всегда выше, чем деформации на стенках. Однако сзади нагрузки деформации на стенках больше деформаций вдоль центральной линии.

Деформации спереди нагрузки больше чем деформации сзади нагрузки даже с учетом того, что амплитуды длинных волн сзади нагрузки больше чем амплитуды коротких волн спереди (см. Рисунок 2.6). Следовательно, модель без учета диссипации предсказывает, что лед всегда будет ломаться спереди нагрузки. Даже учет слабой диссипации (см. Рисунок 2.6) значительно уменьшает значения деформаций спереди нагрузки.

Прогибы ледового покрова и деформации вдоль центральной линии канала и вдоль стенок для скоростей движения нагрузки, меньших критической скорости первой моды, показаны на Рисунке 2.9. Результаты подтверждают, что прогибы льда быстро затухают с увеличением дистанции от нагрузки. Прогибы и деформации увеличиваются при увеличении и приближении докритической скорости

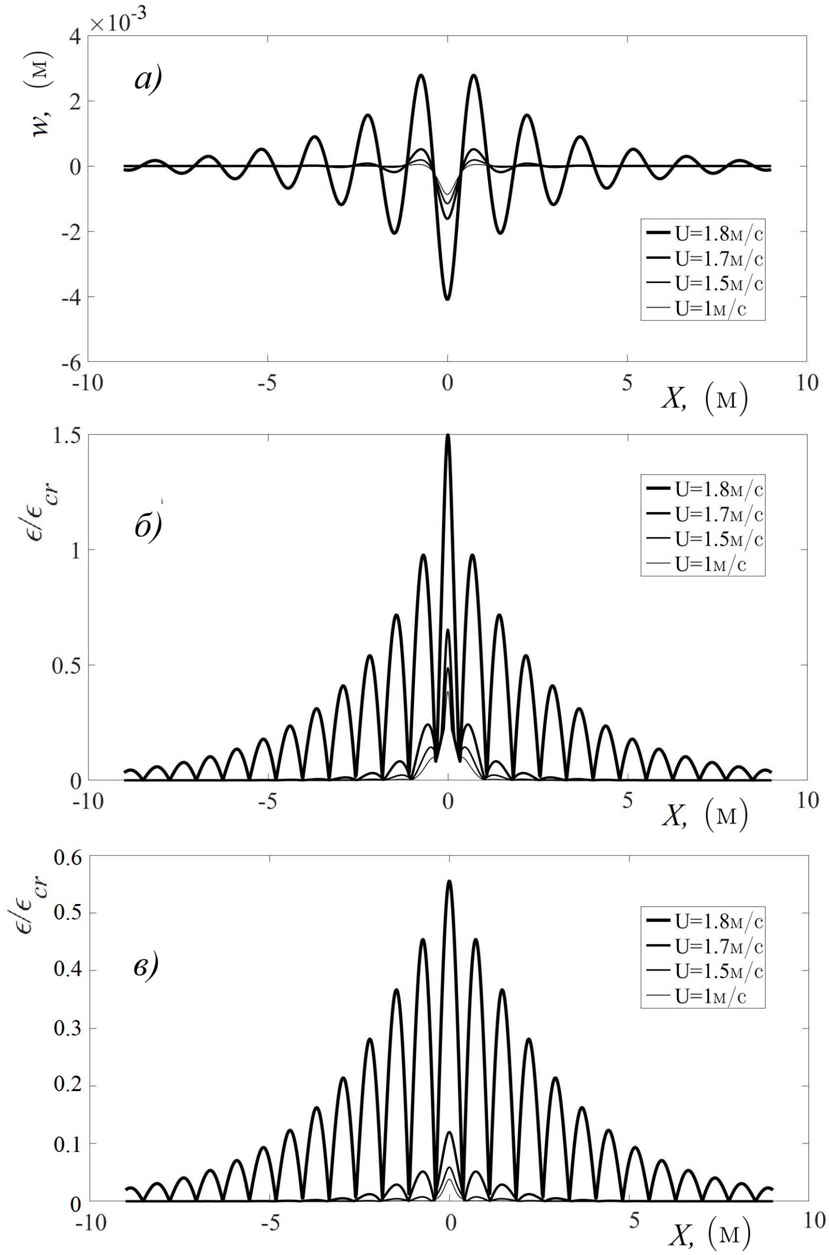


Рис. 2.9: Прогибы ледового покрова и распределение деформаций в ледовой пластине для докритической скорости нагрузки: (а) прогиб ледового покрова вдоль центральной линии канала, (б) масштабированные деформации вдоль центральной линии канала, (с) масштабированные удлинения вдоль стенок.

движения нагрузки к первой критической скорости. Несмотря на то, что в этом случае в решении нет волновых компонент, прогибы льда достигают форму волны с волновым числом $\xi_{\min}^{(1)} = 4.25$ 1/м и фазовой скоростью, равной критической скорости первой моды.

2.4 Нестационарные прогибы ледового покрова при конечных временах

Вторая часть данной главы посвящена решению нестационарной задачи о колебания ледового покрова под действием внешней нагрузки при конечных временах. В данном параграфе рассматривается нестационарная задача в постановке (2.1.1) – (2.1.11). Требуется определить функцию $w(x, y, t)$ при некоторых типичных параметрах задачи и при конечных временах $t < \infty$.

Асимптотическое решение при больших временах системы (2.1.1) – (2.1.11) приведено в первой части главы. Это решение позволяет получить простую интерпретацию результатов и разложить прогибы льда $w(x, y, t)$, $t \to \infty$, на составные части: затухающий в отдалении от внешней нагрузки прогиб льда, симметричный в системе координат (X, y); и серия из конечного числа гидроупругих волн, распространяющихся от нагрузки вдоль канала, фазовая скорость которых равна скорости нагрузки, $c_n(k) = U$. В зависимости от скорости нагрузки число таких волн может быть разным, но всегда конечным. Полученные аналитические формулы показывают, что короткие волны имеют групповую скорость $c_n^g(k) = d\omega_n/dk$, больше скорости нагрузки U и, следовательно, распространяются перед нагрузкой. Соответственно, длинные волны имеют групповую скорость, меньше скорости нагрузки и распространяются позади нагрузки. Ниже будет показано, что решение задачи (2.1.1) – (2.1.11) при конечных временах будет обладать аналогичными свойствами формирования профилей колебаний.

Установившееся решение задачи (2.1.1) – (2.1.11) в виде $w = w(X, y)$, $\varphi(X, y, z)$ при ненулевом коэффициенте затухания $\tau > 0$ получено в первой главе данной диссертации. Использованный метод решения не требовал задания начальных условий (2.1.6), (2.1.10). Получено, что прогибы льда и удлинения в ледовом покрове быстро затухают с расстоянием от нагрузки в рамках модели вязкоупругой пластины. Ниже будет показано, что решение для установившихся прогибов, рассмотренных в первой главе, при уменьшении коэффициента запаздывания τ, будет стремиться к асимптотическому решению при больших временах. Это же верно и для нестационарных прогибов $w(x, y, t)$ в системе координат (X, y), вычисленных численно в данном параграфе.

2.4.1 Метод решения

Метод решения повторяет метод для задачи (2.1.1) – (2.1.11), изложенный в параграфе 2.2. Различие методов заключается в поиске решения для прогибов через обратное преобразование Фурье

$$w(X, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(X, y, t), \tag{2.4.1}$$

$$w_n(X, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi U t} a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi X} \mathrm{d}\xi,$$

интегралы $w_n(X, y, t)$ в котором имеют вид

$$\begin{aligned} w_n(X, y, t) = \int_{-\infty}^{0} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi = \\ = \int_{0}^{\infty} H_n(\xi)\psi_n(\xi, y) \left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega_n^2(\xi) - \xi^2 U^2} + \frac{\xi U e^{i\xi X}}{2\omega_n^2(\xi)} \left[\frac{e^{i(\omega_n(\xi)+\xi U)t}}{\omega_n(\xi) + \xi U} \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{e^{-i(\omega_n(\xi)-\xi U)t}}{\omega_n(\xi) - \xi U} + e^{-2i\xi X} \frac{e^{-i(\omega_n(\xi)+\xi U)t}}{\omega_n(\xi) + \xi U} - e^{-2i\xi X} \frac{e^{i(\omega_n(\xi)-\xi U)t}}{\omega_n(\xi) - \xi U} \right] \right) \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

и вычисляются численно для заданных значений $t < \infty$. Ранее было показано, что первое, третье и пятое слагаемые в (2.4.2) могут быть сингулярными в зависимости от выбора скорости U и номера моды n, однако эти особенности компенсируют друг друга. Это позволяет вычислить интегралы $w_n(X, y, t)$ численно для конечных t и определить прогибы льда $w(X, y, t)$ в заданный момент времени. Если скорость U меньше c^1_{min}, то особенности в (2.4.2) отсутствуют и интегралы вычисляются численно стандартными методами. В ином случае, для определения точек, в которых будут особенности, и для определения количества слагаемых с особенностями в разложении (2.4.1) необходимо вычислить фазовые скорости $c^n(\xi)$. Пример вычисления данных скоростей для первых трех четных по y мод при $\rho_l = 1024$ кг/м^3, $\rho_i = 917$ кг/м^3, модуле Юнга $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м^2, коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$, толщине ледового покрова 10 см, глубине канала 2 м и ширине 20 м представлены на Рисунке 2.10. Выбор скорости движения U показан горизонтальными линиями. Замечание: для данных значений параметров вычисленное значение c^1_{min} совпадает с $c^1(0)$. В общем случае $c^1(0) \geq c^1_{min}$ и тогда при $c^1_{min} < U < c^1(0)$ будет порождаться две системы волн: одна за нагрузкой, а другая – перед ней.

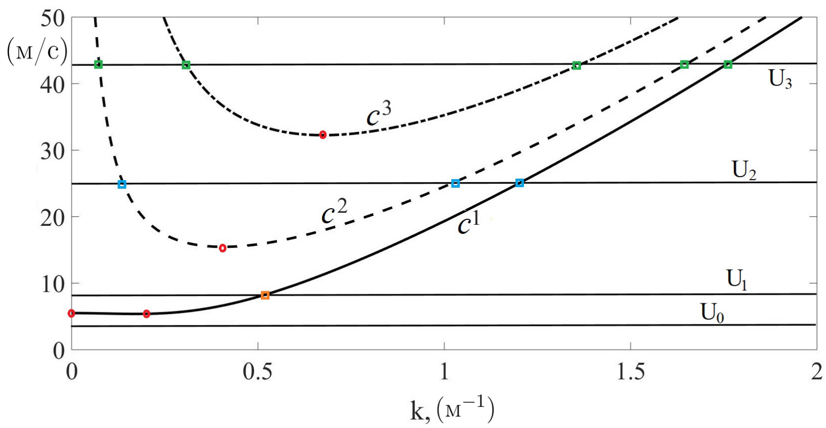


Рис. 2.10: Фазовые скорости первых трех четных мод.

Для численного решения число мод $\psi_n(\xi, y)$ в разложении (2.2.5) ограничивалось конечным числом N_{mod}

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{N_{mod}} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y), \quad w(X, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} w_n(X, y, t). \tag{2.4.3}$$

Заметим, что $\psi_n(\xi, y)$ нормированы условием (2.2.11), а из уравнения (2.2.15) следует, что коэффициенты $a_n(\xi, t)$ для рассматриваемой нагрузки в форме (2.1.7) стремятся к нулю при $n \to \infty$ и фиксированных U, ξ и t. Для всех конечных X и t подынтегральные функции в (2.4.2) затухают с ростом ξ и ведут себя как

$O(1/(\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2))$ при $\xi\to\infty$, где $\omega_n(\xi)/\xi\to\infty$ при $\xi\to\infty$ для всех n. Это гарантирует быстрое затухание и существование обратного преобразования Фурье. Интегралы (2.4.2) приближаются соответствующими интегралами с конечной областью интегрирования от 0 до N_ξ. Отрезок интегрирования $[0,N_\xi]$ разбивается на малые отрезки с шагом $\Delta\xi$ с большим количеством шагов N. На каждом шаге, $\xi\in[\xi_j,\xi_{j+1}]$, необходимо вычислять следующий интеграл

$$\int\limits_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} Q_n(\xi,y)\left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2}+\frac{\xi U}{\omega_n^2(\xi)}\left[\frac{\cos[\xi X+\omega_n^{(1)}t]}{\omega_n^{(1)}(\xi)}-\frac{\cos[\xi X-\omega_n^{(2)}t]}{\omega_n^{(2)}(\xi)}\right]\right)d\xi, \tag{2.4.4}$$

где $Q_n(\xi,y)=H_n(\xi,y)\psi_n(\xi,y)$, $\omega_n^{(1)}=(\omega_n(\xi)+\xi U)$ и $\omega_n^{(2)}=(\omega_n(\xi)-\xi U)$.

В случае $U<c_{min}^n$ интеграл (2.4.2) не имеет слагаемых с особенностями. Для вычисления (2.4.2) рассматриваемый интеграл разбивается на сумму пяти интегралов. Функции, зависящие от ξ и входящие в последние интегралы приближаются линейными функциями на отрезке $[\xi_j,\xi_{j+1}]$ и полученные интегралы вычисляются аналитически с использованием интегрирования по частям. Например, второе слагаемое в интеграле (2.4.4) дает два интеграла, один из которых имеет вид

$$\cos(B_j't)\int\limits_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}(A_j(y)+\xi A_j'(y))\cos(B_j(X,t)\xi)d\xi, \tag{2.4.5}$$

где

$$B_j'=\omega_n(\xi_j)-\frac{\omega_n(\xi_{j+1})-\omega_n(\xi_j)}{\Delta\xi}\xi_j,\quad B_j(X,t)=X+Ut+\frac{\omega_n(\xi_{j+1})-\omega_n(\xi_j)}{\Delta\xi},$$

$$A_j(y)=Q_j'-\frac{Q_{j+1}'-Q_j'}{\Delta\xi}\xi_j,\quad A_j'(y)=\frac{Q_{j+1}'-Q_j'}{\Delta\xi},\quad Q_j'(y)=\frac{Q_n(\xi_j,y)\xi_jU}{\omega_n^2(\xi_j)(\omega_n(\xi_j)+\xi_jU)}.$$

Интегралы от остальных слагаемых вычисляются аналогично. Таким образом, решение уравнение (2.4.2) приводит к аналитическим формулам для вычисления $w_n(X,y,t)$. Полученные формулы состоят из стационарной части, независящей от времени и симметричной по X, полученной из первого слагаемого в (2.4.4), и нестационарной части. Стационарная часть ведет себя как $O(1/X)$ при $X\to\infty$, а нестационарная часть как $O(1/t)$ при $t\to\infty$ и $U<c_{min}^1$ соответственно.

В случае $U > c^n_{min}$ интеграл (2.4.2) имеет слагаемые с особенностями. Интеграл с регулярным слагаемым, имеющим $\cos[\xi X + \omega^{(1)}_n t]$ в числителе, вычисляется по методу, описанному выше для $U < c^n_{min}$. Для дальнейшего решения нужно преобразовать оставшийся интеграл I^i с особенностями. Равенство (2.4.2) дает

$$\mathrm{I}^i = \int\limits_0^\infty Q_n(\xi, y) \left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega^2_n(\xi) - \xi^2 U^2} - \frac{\xi U}{\omega^2_n(\xi)} \frac{\cos[\xi X - (\omega_n(\xi) - \xi U)t]}{\omega_n(\xi) - \xi U} \right) d\xi, \qquad (2.4.6)$$

причем все слагаемые в этом интеграле имеют особенности в двух точках $\xi^{(n)}_1$ и $\xi^{(n)}_2$ для всех мод кроме первой, $n > 1$. Для первой моды особенность будет в одной точке. Интеграл (2.4.2) представляется в виде суммы пяти интегралов с выделенными симметричными областями с особенностями

$$\mathrm{I}^i = \int\limits_0^{\xi^{(n)}_1 - \delta_1} ...d\xi + \int\limits_{\xi^{(n)}_1 - \delta_1}^{\xi^{(n)}_1 + \delta_1} ...d\xi + \int\limits_{\xi^{(n)}_1 + \delta_1}^{\xi^{(n)}_2 - \delta_2} ...d\xi + \int\limits_{\xi^{(n)}_2 - \delta_2}^{\xi^{(n)}_2 + \delta_2} ...d\xi + \int\limits_{\xi_2 + \delta_2}^{N_\xi} ...d\xi. \qquad (2.4.7)$$

Параметры, характеризующие интервалы разбиения, зависят от времени, $\delta_1 = \delta_1(t)$ и $\delta_2 = \delta_2(t)$, и выбираются таким образом чтобы выполнялись неравенства

$$|(\omega_n(\xi) - \xi U)|t \ll 1 \qquad (2.4.8)$$

на интервалах $(\xi^{(n)}_1 - \delta_1, \xi^{(n)}_1 + \delta_1)$ и $(\xi^{(n)}_2 - \delta_2, \xi^{(n)}_2 + \delta_2)$. Первый, третий и пятый интегралы в (2.4.7) не имеют особенностей и вычисляются численно по описанному выше алгоритму. Для вычисления второго и четвертого интегралов подынтегральное выражение с учетом (2.4.8) преобразовывается следующим образом

$$Q_n(\xi, y) \left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega^2_n(\xi) - \xi^2 U^2} - \frac{\xi U}{\omega^2_n(\xi)} \frac{\cos[\xi X - (\omega_n(\xi) - \xi U)t]}{\omega_n(\xi) - \xi U} \right) =$$
$$= Q_n(\xi, y) \left(\frac{2\omega_n(\xi) + \xi U}{\omega^2_n(\xi)(\omega_n(\xi) + \xi U)} \cos(\xi X) - \frac{\xi U}{\omega^2_n(\xi)} t \sin\left(\xi X - \frac{\omega_n(\xi) - \xi U}{2} t \right) \right). \qquad (2.4.9)$$

Вычисление интегралов с использованием интегрирования по частям от функции (2.4.9) по интервалу $(\xi_i - \delta_i, \xi_i + \delta_i)$, $i = 1, 2$, приводит к аналитическим формулам, которые в сумме с аналитическими формулами для стационарной части и затухающей нестационарной части решения дают формулу для вычисления прогибов льда $w(X, y, t)$ в заданный момент времени. Интегралы от функции (2.4.9) не затухают с ростом t, а при $t \to \infty$ приближаются к установившемся волнам, параметры которых не зависят от времени в движущейся системе координат (X, y). Целью численного анализа является вычисление прогибов льда (2.4.3) по предложенному численному алгоритму и полученным аналитическим формулам для $w(X, y, t)$ при разных временах. Для исследования эволюции прогибов ледового покрова при увеличении времени, дополнительно проводится сравнение решения (2.4.2) рассматриваемой нестационарной задачи с асимптотическим решением при больших временах, полученным в первой части данной главы.

2.4.2 Численные результаты

Задача о нестационарных гидроупругих волнах в канале решается численно для канала с параметрами $H = 2$ м, $2L = 20$ м, $h_i = 0.1$ м, $\rho_i = 917$ кг/м^3, $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0.3$. Нагрузка (2.1.7) действует на область 2 м$\times$2 м и движется вдоль центральной линии канала с постоянной скоростью U.

Основными параметрами вычислений являются параметры интегрирования по ξ, длина интервала N_ξ и количество шагов, а также количество мод N_{mod} в разложении функции $w^F(\xi, y, t)$. На выбор параметров N_ξ и количества шагов влияют несколько факторов. Первый – образ Фурье функции внешней нагрузки $P^F(\xi, y)$. Преобразование Фурье внешней нагрузки в форме (2.1.7) затухает при $\xi \to \infty$. Скорость затухания зависит от формы и параметров нагрузки c_1 и c_2. Для определения числа отрезков по ξ и интервала N_ξ была проведена серия тестовых расчетов для функции нагрузки $P(x, y, t)$. Сначала определялось преобразование Фурье заданной внешней нагрузки, затем функция внешней нагрузки восстанавливалась по предложенному в предыдущем параграфе численному алгоритму с использованием аппроксимации подынтегральных функций линейными функциями. Полученные численно значения сравнивались со значениями функции P определенной аналитически. Для $c_1 = 10$ и $c_2 = 10$, соответствующих области 2 м$\times$2 м, результаты численного метода с хорошей точностью аппроксимируют аналитическую функцию при $N_\xi = 400$ и количестве шагов больше 2000. Вторым фактором при вычислении интегралов (2.4.2) по формулам (2.4.6), затрудняющим вычисление, являются быстрые осцилляции функций $\cos[\xi X + \omega_n^{(1)} t]$ и $\cos[\xi X - \omega_n^{(2)} t]$ с ростом t. При небольших значениях t ($t < 10$) для хорошей точности с пренебрежимо малой погрешностью вычислений достаточно использовать значения параметров интегрирования, полученных при тестовых расчетах для функции внешней нагрузки (здесь и далее такой погрешностью считается случай, когда дальнейшие изменение параметров не приводит к какому либо заметному изменению результатов, представленных на графиках, например для амплитуд прогибов порядка 10^{-6} погрешность вычислений может составлять значение порядка 10^{-10}). При увеличении t необходимо уменьшать шаг интегрирования по ξ с сохранением длины всего интервала N_ξ. Например, для $t = 200$ с хорошая точность результатов с пренебрежимо малой погрешностью будет при количестве шагов больше 40000. Третьей проблемой численного решения является выбор интервалов интегрирования в разбиении (2.4.7). При увеличении t уменьшаются интервалы интегрирования второго и четвертого интегралов в (2.4.7). При вычислении этих интегралов используются разные длины шага интегрирования: первый, третий и пятый интегралы вычисляются с количеством шагов интегрирования, определяемому по изложенному в начале параграфа алгоритму, второй и четвертый интеграл вычисляются с уменьшенным шагом для сохранения постоянного числа шагов на интервалах $(\xi_i^{(n)} - \delta_i, \xi_i^{(n)} + \delta_i)$, $i = 1, 2$, при увеличении t. При достаточно больших t вычисление интегралов может занять большое время на ограниченных вычислительных системах, неприспособленных для емких вычислений (например, вычисление прогибов с высокой точностью при $t = 500$ с и учетом большого числа мод может занять несколько часов, когда вычисление при $t < 10$ с занимает несколько минут), поэтому в этом случае удобнее пользоваться асимптотическим решением (2.2.25), полученным в первой части данной главы [66], [67].

Сходимость получаемых результатов по числу мод N_{mod} в формуле (2.4.3) проверялась численно. Принципиальным значением является количество мод N_w, для которых существуют системы распространяющихся от нагрузки гидроупругих волн (т.е. $c_{min}^{N_w} < U < c_{min}^{N_w+1}$). Данные моды вносят качественное отличие в формирование прогибов льда. Количество этих мод зависит от выбора скорости движения нагрузки. Например, для $U = 3$ м/с таких мод не существует, а для $U = 7$ м/с такой модой является только первая, см. Рисунок 2.10. Остальные моды вносят корректирующий характер в формирование прогибов льда в области движения нагрузки и затухают с ростом n, t и X. Для проверки сходимости численного решения количество N_{mod} изменялось от 3 до 15. В первой главе установлено, что для решения в виде бегущей волны, не зависящего от времени, число мод N_{mod} в диапазоне от 5 до 15, в зависимости от параметров задачи, дает результаты с высокой степенью точности. В данной работе количество мод, берущихся свыше значения N_w, в целом, влияет на точность вычисления прогибов только в области движения нагрузки. Количество таких мод варьировалось от 5 до 10 для получения результатов высокой степени точности. Влияние количества мод на точность получаемых результатов показано на Рисунке 2.11. На рисунке показаны прогибы ледового покрова вдоль канала для скорости движения нагрузки $U = 7$ м/с и при $t = 2$ с. Прогибы масштабированы амплитудой нагрузки P_0. Количество мод N_{mod} на рисунке изменяется от 1 до 3. Для данного случая модой, для которой существует система распространяющихся волн, является только первая, $n = 1$. При малых временах прогибы формируются в области движения нагрузки, учет только первой моды (сплошная тонкая линия) не является достаточным для получения точных результатов. При количестве мод равном 3 (сплошная жирная линия) и больше, линии на графиках совпадают. В отдалении от нагрузки в направлении X, при малых временах, влияние количества мод на получаемые результаты уменьшается.

Эволюция прогибов ледового покрова по времени показана на Рисунках 2.12 – 2.13. На Рисунке 2.12 изображены прогибы ледового покрова вдоль центральной линии канала для докритической скорости $U = 3$ м/с, $U < c_{min}^1$. В данном случае

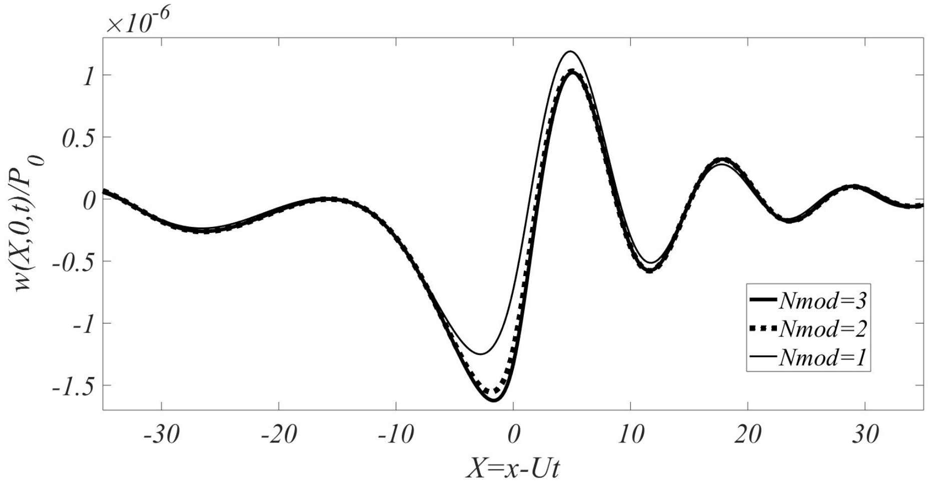


Рис. 2.11: Профили прогибов льда вдоль центральной линии канала при $t = 2$ с и $U = 7$ м/с.

прогиб льда состоит из стационарной части, затухающей в отдалении от нагрузки, и нестационарной части, затухающей со временем. Стационарный прогиб льда под нагрузкой быстро формируется после начала движения и не изменяется со временем (результаты при $t \geq 10$с, пунктирная и точечная линии, жирной сплошной линией указана асимптотика при больших временах). Хотя гидроупругие волны, вызываемые нагрузкой движущейся с докритической скоростью, не формируются, в отдалении от нагрузки возникает система возмущений небольшой амплитуды, распространяющаяся от нагрузки и затухающая по времени. Амплитуда возмущений перед нагрузкой больше амплитуды возмущений позади нагрузки. Эти возмущения не влияют на стационарный прогиб в области движения нагрузки. В рассматриваемой модели не учитывающей вязкость льда, для докритической скорости прогиб для покоящейся нагрузки (момент времени $t = 0$, тонкая сплошная линия) немного меньше прогиба при движении при конечных временах и асимптотики при больших временах.

На Рисунке 2.13 показаны прогибы ледового покрова вдоль центральной линии канала для скорости $U = 7$ м/с, большей минимальной фазовой скорости первой моды и меньшей минимальной фазовой скорости второй моды, $c^1_{min} < U < c^2_{min}$. В данном случае прогиб льда состоит из стационарной части, затухающей в отдалении от нагрузки, нестационарной части, затухающей со временем, и нестаци-

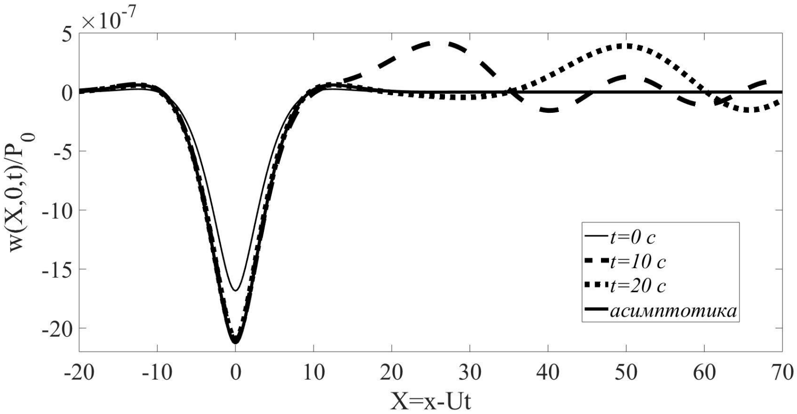


Рис. 2.12: Эволюция прогибов льда вдоль центральной линии канала по времени при $U = 3$ м/с.

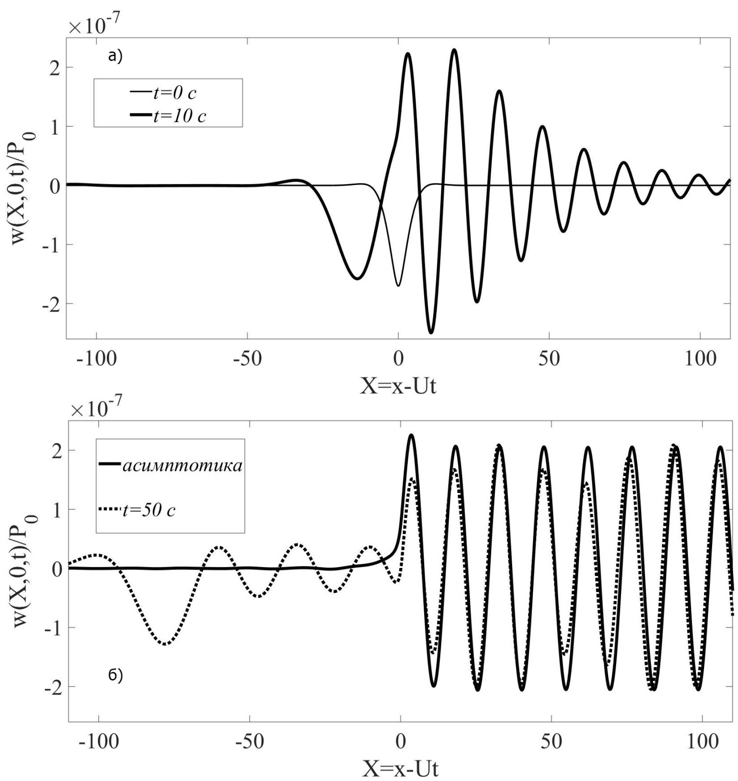


Рис. 2.13: Эволюция прогибов льда вдоль центральной линии канала по времени при $U = 7$ м/с.

онарной части, устанавливающейся при больших временах. Сзади нагрузки формируются возмущения малой амплитуды, отходящие от нагрузки и затухающие со временем. Впереди нагрузки формируются короткие гидроупругие волны. При увеличении времени t эти волны приближаются к асимптотическому решению при больших временах (2.2.25). При конечных t данные волны являются затухающими, а профиль этих волн вдоль канала имеет одинаковую структуру с профилями установившегося решения для ненулевого коэффициента затухания τ (см. графики для $U = 7$ м/с в первой главе). При увеличении времени увеличивается область возмущения ледового покрова и изменение профилей волн соответствует изменению профилей установившегося решения при уменьшении коэффициента затухания. Аналогично случаю докритической скорости, максимальные амплитуды прогибов льда достигаются после начала движения.

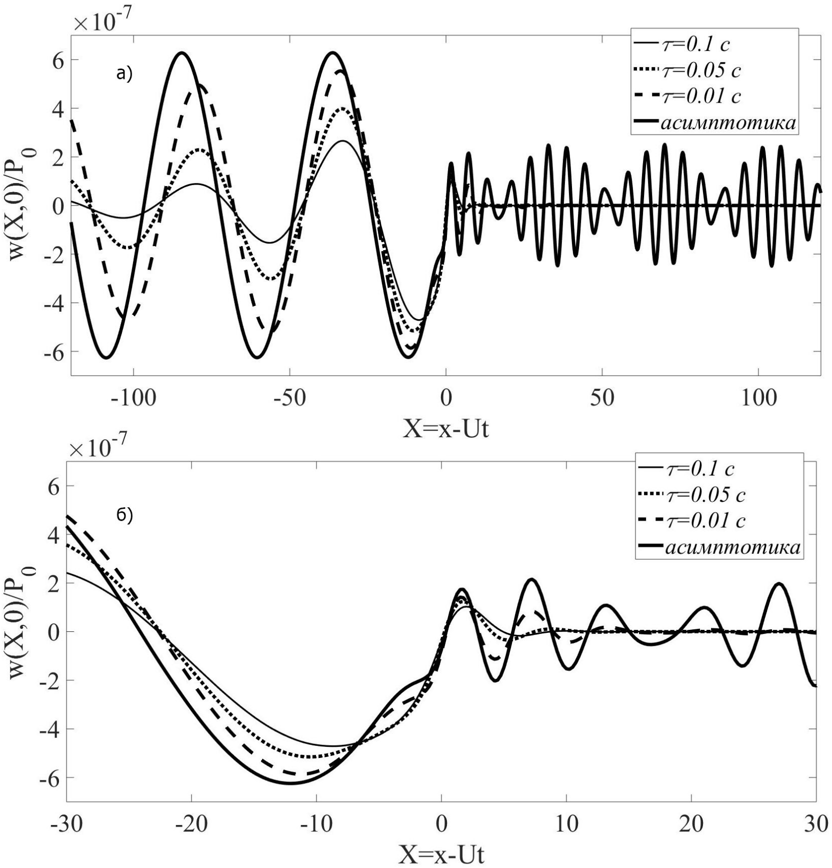


Рис. 2.14: Прогибы льда вдоль центральной линии канала при $U = 25$ м/с при разной скорости затухания.

Коэффициент затухания $\tau > 0$ в уравнении (1.1.1) является фактором, регулирующим скорость затухания волн. В первой главе показано, что при уменьшении значения τ увеличивается длина интервала наблюдаемых колебаний. При этом уменьшение коэффициента затухания приводит к увеличению времени вычисления прогибов льда и распределения напряжений в ледовом покрове для сохранения точности вычислений. Малые значения τ могут приводить к неточным результатам и в этом случае удобнее пользоваться аналитическими формулами для асимптотик (2.2.25). На Рисунке 2.14 показаны установившиеся стационарные части прогибов льда при отсутствии нестационарных слагаемых, затухающих по времени при разных значениях τ. Рассмотрен случай $U = 25$ м/с. Для исследуемого канала данный случай соответствует трем распространяющимся волнам, одной длиной позади нагрузки, и двум коротким перед нагрузкой. Эффект затухания сильнее влияет на короткие волны, что согласуется с результатами первой главы. При уменьшении коэффициента затухания прогибы льда стремятся к асимптотикам по времени. Длинные волны, распространяющиеся за нагрузкой, выходят на установившийся режим быстрее коротких волн перед нагрузкой (Рисунок 2.14б). Результаты для больших значений τ хорошо описывают стационарную часть в системе (X, y, z) нестационарных прогибов с нулевым коэффициентом затухания при небольшом времени движения. При уменьшении τ увеличивается длина колебаний, и, соответственно, увеличивается время, необходимое для выхода нестационарных колебаний на стационарный режим.

Глава 3

Взаимодействие ледового покрова и движущегося подводного тела в канале

3.1 Постановка задачи о движении подводного тела в замороженном канале

В данной главе рассматривается задача определения прогибов льда и деформаций в ледовом покрове, вызванных движением подводного тела вдоль замороженного канала. Данная задача близка по постановке задаче о размещении стационарного тела в однородный поток идеальной жидкости под ледовым покровом в канале. Подводное тело моделируется трехмерным диполем с постоянной интенсивностью, движущимся с постоянной скоростью. Диполь, движущейся с постоянной скоростью в неограниченной идеальной жидкости, моделирует движение сферы [52]. Радиус этой сферы связан со скоростью и интенсивностью диполя. Диполь, движущийся в канале с жесткими стенками, моделирует сферическое твердое тело, если интенсивность диполя достаточно мала и радиус сферы значительно меньше расстояния между диполем и стенками. Для диполя с большой интенсивностью форма соответствующего трехмерного подводного твердого тела тоже может быть определена. Форма тела зависит от расположения диполя в канале.

Постановка задачи о движении подводного тела в замороженном канале предполагает рассмотрение полной линейной гидроупругой модели колебаний вязкоупругой ледовой пластины с нелинейными кинематическим условием и интегралом

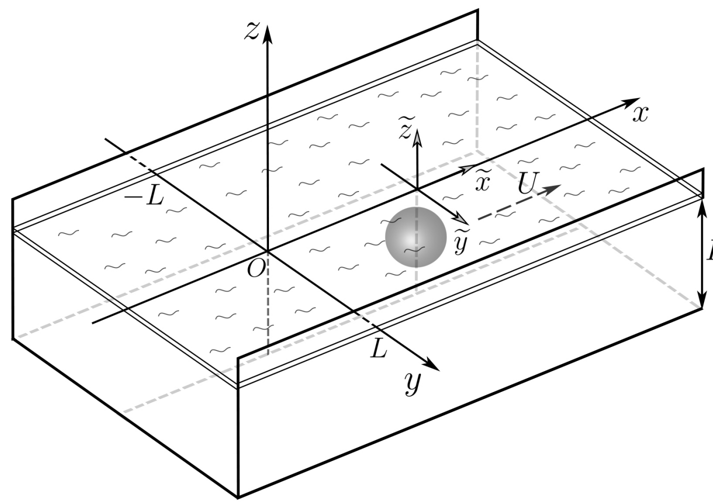


Рис. 3.1: Схема замороженного канала с подводным телом.

Коши-Лагранжа. Рассматриваются параметры канала и жидкости, используемые в главе 1. Схема задачи изображена на Рисунке 3.1. Ледовый покров моделируется вязкоупругой пластиной [1]

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla_2^4 w = p(x, y, w(x, y, t), t) \tag{3.1.1}$$
$$(-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = w(x, y, t)),$$

где $w(x, y, t)$ – прогиб ледового покрова, $p(x, y, z, t)$– гидродинамическое давление, вызванное прогибом ледового покрова и движением подводного тела. Все остальные параметры введены в главе 1. Здесь используется модель Кельвина-Фойгта вязкоупругой пластины с временем запаздывания τ [51]. Прогиб ледового покрова удовлетворяет условию жесткого защемления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad y = \pm L). \tag{3.1.2}$$

Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Суммарный поток жидкости, вызванный движением диполя и прогибом пластины, является потенциальным с потенциалом скорости течения $\varphi_{tot}(x, y, z, t)$. Гидродинамическое давление задано нелинейным интегралом Коши-Лагранжа

$$p(x, y, z, t) = -\rho_l\left(\frac{\partial\varphi_{tot}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_{tot}|^2 + gz\right). \tag{3.1.3}$$

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость и ледовый покров покоятся

$$\varphi_{tot} = 0, \qquad \varphi_{tot,t} = 0, \qquad w = 0, \qquad w_t = 0 \qquad (t = 0), \tag{3.1.4}$$

и давление (3.1.3) в канале является гидростатическим и равно нулю на границе лед-жидкость. Суммарный потенциал скорости течения φ_{tot} удовлетворяет условиям непротекания на стенках и дне канала

$$\varphi_{tot,y} = 0 \quad (y = \pm L), \qquad \varphi_{tot,z} = 0 \quad (z = -H), \tag{3.1.5}$$

нелинейному кинематическому условию на границе лед-жидкость

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} \qquad (-\infty < x < \infty,\ -L < y < L,\ z = w(x, y, t)), \tag{3.1.6}$$

и уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_{tot} = 0 \tag{3.1.7}$$

в области течения жидкости, исключая небольшую окрестность диполя, где

$$\varphi_{tot} \sim -I\frac{x - x_0(t)}{r^3}, \qquad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{3.1.8}$$

при $r \to 0$ и $t > 0$. Здесь (x_0, y_0, z_0) – координаты центра движущегося диполя, r – расстояние от диполя и I – интенсивность диполя. Потенциал $\varphi_{tot}(x, y, z, t)$ и прогиб льда $w(x, y, t)$ затухают с увеличением расстояния от диполя при всех конечных временах t

$$\varphi_{tot} \to 0, \qquad w \to 0 \qquad (|x - x_0(t)| \to \infty), \tag{3.1.9}$$

в рамках вязкоупругой модели и уравнения (3.1.1).

Диполь движется с постоянной скоростью U вдоль канала. Движение в направлениях z и y отсутствует

$$z_{0,t} = 0, \qquad y_{0,t} = 0, \qquad x_0 = Ut. \tag{3.1.10}$$

Рассматривается диполь с положительной постоянной интенсивностью I.

В системе координат O_{Xyz}, движущейся совместно с диполем, $X = x - Ut$, диполь является стационарным, но в этом случае жидкость движется в отрицательном направлении x со скоростью U. Поток жидкости в малой окрестности диполя описывается локальным потенциалом $-IX/r^3 - UX$, где $X = r\cos\theta$, θ – полярный угол. Локальный потенциал описывает поток жидкости вокруг сферы радиуса $R = (2I/U)^{1/3}$. Радиус этой сферы следует из решения уравнения $d(-IX/r^3 - UX)/dr = 0$. Другими словами, диполь, помещенный в центр сферы с интенсивностью $UR^3/2$, создает поток жидкости, эквивалентный потоку, вызванному движением сферы радиуса R в неограниченной жидкости с постоянной скоростью U [52]. В данной диссертации радиус R используется как характеристика интенсивности диполя. Когда радиус R значительно меньше размеров сторон канала, диполь представляет маленькую жесткую сферу, движущуюся под ледовым покровом. Если R сравнимо с размерами сторон канала L и H и прогибом льда пренебрегается, тогда диполь будет представлять жесткое тело, движущееся под ледовым покровом в канале. Однако, форма этого тела может быть достаточно сложной. Для определения формы соответствующего тела и давления на стенки канала, создаваемого диполем, необходимо определить потенциал диполя $\varphi^D(X, y, z)$, движущегося в канале с жесткими стенками с постоянной скоростью U. Этот потенциал не зависит от времени в движущейся системе координат, если y_0, z_0 и I константы. Потенциал $\varphi^D(X, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\varphi^D_{XX} + \varphi^D_{yy} + \varphi^D_{zz} = 0$ в канале $(|X| < \infty, |y| < L, -H < z < 0)$, затухает на бесконечности $\varphi^D \to 0$ при $|X| \to \infty$ и в близости от центра диполя

$$\varphi^D \sim -\frac{UR^3}{2}\frac{X}{r^3}, \tag{3.1.11}$$

где $r = \sqrt{X^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ стремится к нулю. Нормальная производная потенциала равна 0 на стенках канала $y = \pm L$, $z = 0$ и $z = -H$. Потенциал $\varphi^D(X, y, z)$ определяется методом зеркальных отображений. На первом шаге строятся отображения диполя (3.1.11) от вертикальных стенок канала. Это построение удовлетворяет краевому условию на $y = \pm L$. В итоге получается потенциал φ^{D1}, заданный в виде суммы

$$\varphi^{D1}(X,y,y_0,z,z_0) = -\frac{UR^3}{2}X\left\{\frac{1}{\widetilde{r}^3(y_0,z_0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\widetilde{r}^3(y_0+4nL,z_0)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{\widetilde{r}^3((4n-2)L-y_0,z_0)} + \frac{1}{\widetilde{r}^3(y_0-4nL,z_0)} + \frac{1}{\widetilde{r}^3(-(4n-2)L-y_0,z_0)}\right]\right\}, \quad (3.1.12)$$

где $\widetilde{r}(y_0,z_0) = \sqrt{X^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ (Замечание: в обозначении функции $\widetilde{r}(y_0,z_0)$ показаны только координаты отображений). Потенциал (3.1.12) не удовлетворяет краевым условиям на $z=0$ и $z=-H$. На втором шаге используется метод отображений для удовлетворения этих условий. Суммарный потенциал с учетом отображений от плоскостей $z=-H$ и $z=0$ имеет вид

$$\varphi^{D}(X,y,z) = \varphi^{D1}(X,y,y_0,z,z_0)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi^{D1}(X,y,y_0,z,z_0+2mH) + \varphi^{D1}(X,y,y_0,z,-z_0-2mH)+\right.$$
$$\left.+\varphi^{D1}(X,y,y_0,z,z_0-2mH) + \varphi^{D1}(X,y,y_0,z,-z_0+(2m-2)H)\right). \quad (3.1.13)$$

Трехмерная форма подводного тела в канале, которая соответствует потенциалу (3.1.13), все еще является сложной для анализа. Ожидается, что форма соответствующего подводного тела будет близка к форме сферы для диполя с малой интенсивностью, если диполь помещен в центр сечения канала. Форма подводного тела будет похожа на деформированную сферу, если диполь расположен вблизи от одной из стенок. Добавлением диполей с разной интенсивностью в разные точки канала можно моделировать подводный объект любой сложной геометрии.

Потенциал (3.1.13) делает возможным разложения итогового потенциала скорости течения в канале

$$\varphi_{tot}(x,y,z,t) = \varphi^{D}(X,y,z) + \varphi^{E}(X,y,z,t), \quad (3.1.14)$$

где φ^E – потенциал скорости течения в канале, вызванный прогибом ледового покрова. Потенциал φ^E записан в движущейся системе координат. Данный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi^E = 0 \qquad (-\infty < X < \infty,\ -L < y < L,\ -H < z < w(X,y,t)), \quad (3.1.15)$$

условиям непротекания на стенках канала

$$\varphi_y^E = 0 \qquad (y = \pm L), \qquad \varphi_z^E = 0 \qquad (z = -H), \tag{3.1.16}$$

кинематическому условию на границе лед-жидкость

$$\frac{\partial \varphi^E}{\partial z} + U\frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial X}\left(\frac{\partial \varphi^D}{\partial X} + \frac{\partial \varphi^E}{\partial X}\right) + \\ + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi^D}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^E}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^D}{\partial z} \qquad (z = w(X, y, t)), \tag{3.1.17}$$

и затухает на бесконечности при $|X| \to \infty$.

Гидродинамическое давление в уравнении пластины (3.1.1) задано уравнением (3.1.3), где потенциал φ_{tot} имеет форму (3.1.14)

$$p = -\rho_l\left(-U\frac{\partial \varphi^D}{\partial X} - U\frac{\partial \varphi^E}{\partial X} + \frac{\partial \varphi^E}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi^D|^2 + \right. \\ \left. + \nabla\varphi^D \cdot \nabla\varphi^E + \frac{1}{2}|\nabla\varphi^E|^2 + gw\right) \quad (z = w(X, y, t)), \tag{3.1.18}$$

где $\nabla\varphi^D = (\partial\varphi^D/\partial X, \partial\varphi^D/\partial y, \partial\varphi^D/\partial z)$. Слагаемое $\partial\varphi^D/\partial z$ равно 0 на покоящейся границе лед-жидкость $z = 0$, но не равно 0 на действительной границе $z = w(X, y, t)$.

Целью исследования является решение задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.14)–(3.1.18) при больших временах, когда поток жидкости и прогиб ледового покрова не зависят от времени в движущейся системе координат. Соответственно, прогибы $w(X, y)$ и "упругий" потенциал $\varphi^E(X, y, z)$ предполагаются не зависящими от времени t. Они затухают при $|X| \to \infty$ в рамках модели вязкоупругой пластины (3.1.1). Тогда

$$w_{tt} = U^2\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla_2^4 w = -U\frac{\partial}{\partial X}\nabla_2^4 w$$

в (3.1.1), $\partial\varphi^E/\partial t = 0$ в (3.1.18), и $\partial w/\partial t = 0$ в (3.1.17).

Рассматриваются только малые амплитуды прогибов льда, когда линейное уравнение (3.1.1) динамики пластины является корректным для использования и масштаб прогибов w_{sc} значительно меньше длины канала L. Для дальнейшего решения задачи в безразмерных переменных вводятся следующие параметры: характеристическая длина ледового покрова [1, 34], $L_c = (D/\rho_l g)^{1/4}$, число Фруда

$\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gL}$, и безразмерный параметр $\varepsilon = R/L$, который описывает интенсивность диполя. Масштаб потенциала диполя $\varphi^D_{sc} = UR^3/L^2 = UL\varepsilon^3$ (см. уравнения (3.1.13) и (3.1.14)). В интеграле Коши-Лагранжа (3.1.18) отношение четвертого и первого слагаемого имеет порядок

$$\frac{\frac{1}{2}|\nabla\varphi^D|^2}{U\partial\varphi^D/\partial X} \sim \frac{(\varphi^D_{sc}/L)^2}{U\varphi^D_{sc}/L} = \frac{\varphi^D_{sc}}{LU} = \varepsilon^3. \tag{3.1.19}$$

Следовательно, квадратичное слагаемое в (3.1.18) с потенциалом диполя необходимо учитывать только в том случае, если значение ε большое. Тогда масштаб гидродинамического давления $p_{sc} = \rho_l U^2\varepsilon^3$. Ниже безразмерные переменные обозначаются знаком $\sim$, где $X = L\widetilde{x}$, $y = L\widetilde{y}$, и $z = L\widetilde{z}$. Уравнение пластины (3.1.1) в безразмерных переменных и движущейся системе координат дает

$$\frac{U^2\rho_i h_i w_{sc}}{L^2}\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}^2} + \frac{\rho_l g L_c^4 w_{sc}}{L^4}\left(1 - \frac{\tau U}{L}\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\right)\widetilde{\nabla}^4\widetilde{w} = p_{sc}\widetilde{p}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{w}) - \rho_l g w_{sc}\widetilde{w}, \tag{3.1.20}$$

где $\widetilde{p}$ – безразмерная динамическая компонента давления жидкости. Для удобного анализа результатов вводятся еще два безразмерных параметра: безразмерное время запаздывания $\delta = \tau U/L$, и безразмерная жесткость ледового покрова $\mu = L/L_c$. Здесь L_c не зависит от размеров канала и зависит от толщины льда h_i. Если $\mu = O(1)$, то поддержка ледового покрова условиями жесткого защемления на стенках канала играет важную роль. Однако, если рассматривается широкий канал, $\mu \gg 1$, то ледовый покров в целом поддерживается жидкостью и гидростатическими силами, а не условием защемления на стенках. Следовательно, слагаемое в уравнении (3.1.20), отвечающее за изгибные напряжения в пластине, должно быть сравнимо с давлением $\widetilde{p}p_{sc}$ для узких каналов, и тогда $\rho_l g w_{sc}/\mu^4 = p_{sc}$ для $\mu = O(1)$, включая $\mu \ll 1$. Соответственно, гидростатические силы играют главную роль и $\rho_l g w_{sc} = p_{sc}$ для $\mu \gg 1$. Оба случая можно совместить в одной формуле для масштабов прогибов ледового покрова

$$w_{sc} = L\,\mathrm{Fr}^2\varepsilon^3\mathrm{min}(\mu^4, 1). \tag{3.1.21}$$

Условие малых колебаний $w_{sc}/L \ll 1$ выполнено когда, как минимум, один из параметров $\mathrm{Fr}, \mu, \varepsilon$ мал (см. Таблицу 3.1). Каждый случай рассматривается по

	Fr	μ	ε
(a)	$\ll 1$	$O(1)$	$O(1)$
(b)	$O(1)$	$\ll 1$	$O(1)$
(c)	$O(1)$	$O(1)$	$\ll 1$

Таблица 3.1: Таблица значений параметров, при которых сохраняется условие малых колебаний ледового покрова.

отдельности.

(a) Медленное движения диполя

В этом случае $w_{sc}/L = O(\mathrm{Fr}^2)$, $\mathrm{Fr} = o(1)$ и $\varepsilon = O(1)$. Кинематическое условие (3.1.17), с использованием сравнения порядков слагаемых в левой части уравнения (3.1.17) и с учетом (3.1.21) дает масштаб "упругого" потенциала φ_{sc}^E

$$\varphi_{sc}^E = U w_{sc}. \tag{3.1.22}$$

Отношение порядков потенциалов φ^D и φ^E имеет вид

$$\frac{\varphi_{sc}^E}{\varphi_{sc}^D} = \frac{U w_{sc}}{U L \varepsilon^3} = \mathrm{Fr}^2 \mu^4.$$

Отсюда следует, что потенциалом φ^E можно пренебречь по сравнению с φ^D в интеграле Коши-Лагранжа (3.1.18). Тогда динамическая компонента давления жидкости не будет зависеть от прогиба ледового покрова в главном приближении.

Следовательно, рассматриваемая задача о взаимодействии льда и жидкости перестает быть связанной для малых чисел Фруда. Инерциальное (первое) слагаемое в (3.1.20) в главном приближении может быть опущено в сравнении со слагаемым гидродинамического давления

$$\frac{U^2 \rho_i h_i w_{sc}}{L^2 p_{sc}} = \alpha \mathrm{Fr}^2 \mu^4, \quad \alpha = \frac{\rho_i h_i}{\rho_l L},$$

где $\alpha = O(1)$ и $\mathrm{Fr} \ll 1$. Тогда уравнение (3.1.20) для безразмерного прогиба льда $\widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ в главном приближении имеет вид

$$\left(1 - \delta \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\right) \widetilde{\nabla}^4 \widetilde{w} + \mu^4 \widetilde{w} = \frac{\partial \widetilde{\varphi}^D}{\partial \widetilde{x}} - \frac{1}{2} \varepsilon^3 |\widetilde{\nabla} \widetilde{\varphi}^D|^2. \tag{3.1.23}$$

Это статическое уравнения для прогибов ледового покрова в движущейся системе координат нужно решить с учетом краевых условий (3.1.2) на стенках канала, $\widetilde{y} =$

± 1, и условий (3.1.9) при $\widetilde{x} \to \pm\infty$. Уравнение (3.1.23) может быть дополнительно упрощено для узких каналов, $\mu \ll 1$, и/или для "слабого" диполя, $\varepsilon \ll 1$. Как только прогиб ледового покрова $\widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ найден, "упругий" потенциал $\widetilde{\varphi}^E(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ в главном приближении при $\mathrm{Fr} \to 0$ можно определить, решив задачу (3.1.14) – (3.1.17) в линеаризованной области течения $\widetilde{y} < 1$, $-h < \widetilde{z} < 0$, $|\widetilde{x}| < \infty$, где $h = H/L$. Самая сложная часть этой задачи – кинематическое условие (3.1.17) в главном приближении при $\mathrm{Fr} \to 0$. Производная $\partial\varphi^D/\partial z$ на границе $\widetilde{z} = \widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ в данном случае аппроксимируется как

$$\frac{\partial\varphi^D}{\partial z}(X, y, w) \approx \frac{\partial^2\varphi^D}{\partial z^2}(X, y, 0)w = -\nabla_2^2\varphi^D(X, y, 0)w =$$

$$-\frac{U\varepsilon^3}{L}w_{sc}\widetilde{\nabla}_2^2\widetilde{\varphi}^D(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0)\widetilde{w}.$$

В результате условие (3.1.17) в главном приближении имеет вид

$$\frac{\partial\varphi^E}{\partial\widetilde{z}} = \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}} + \varepsilon^3\left[\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}^D}{\partial\widetilde{x}} + \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{y}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}^D}{\partial\widetilde{y}} + \widetilde{\nabla}_2^2\widetilde{\varphi}^D\widetilde{w}\right], \tag{3.1.24}$$

где $\widetilde{\varphi}^D$ задано уравнением (3.1.13) и $\widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ – решение задачи (3.1.23), (3.1.2). Краевая задача Неймана (3.1.14) – (3.1.16), (3.1.24) имеет решение, если интеграл от правой части (3.1.24) по области ледового покрова равен 0. Можно легко показать, что суммарный поток через границу лед-жидкость действительно равен 0, используя краевые условия (3.1.2) и условия затухания (3.1.9) прогиба $\widetilde{w}$ потенциала скорости течения $\widetilde{\varphi}^D$ на бесконечности $\widetilde{x} \to \pm\infty$.

Уравнения (3.1.23) и (3.1.24) показывают, что ε – параметр линеаризации. Гидростатическое слагаемое в (3.1.23) можно опустить в главном приближении для узких каналов с $\mu \ll 1$. Для нулевой скорости диполя его интенсивность I не может ассоциироваться с радиусом сферы в неограниченном потоке жидкости. В этом случае $\varphi^D_{sc} = I/L^2$ и вводится характеристическая скорость $U_{sc} = I/L^3$. Тогда результаты данного параграфа остаются корректными, но с учетом замены скорости U на U_{sc} и при $\varepsilon = 1$. В дополнение, необходимо положить $\delta = 0$ и $\partial\widetilde{\varphi}^D/\partial\widetilde{x} = 0$ в (3.1.23), и $\partial\widetilde{w}/\partial\widetilde{x} = 0$ в (3.1.24). Данная аппроксимация медленного диполя верна для $I/(L^3\sqrt{gL}) \ll 1$.

(б) Узкий канал

В этом случае $w_{sc}/L = O(\mu^4)$ при $\mu \to 0$. Соотношение (3.1.22) выполнено и для этого случая. "Упругий" потенциал может быть опущен по сравнению с потенциалом диполя когда $\mathrm{Fr}^2\mu^4 \ll 1$. Прогиб ледового покрова описывается уравнением (3.1.23) в главном приближении, где гидростатическое слагаемое $\mu^4\widetilde{w}$ отсутствует. Кинематическое условие (3.1.24) остается неизменным в главном приближении. Следовательно, задача снова не будет связанной. Относительная поправка в гидродинамическом давлении, и соответственно в прогибах льда, имеет порядок $\varphi^E_{sc}/\varphi^D_{sc} = O(\mathrm{Fr}^2\mu^4)$ в обоих (a) и (b) случаях.

(в) Слабый диполь

Случай движения маленького жесткого тела $R/L \ll 1$ вдоль канала дает $w_{sc}/L = O(\varepsilon^3)$. Для $\mathrm{Fr} = O(1)$ и $\mu = O(1)$ "упругий" потенциал φ^E и потенциал диполя φ^D имеют одинаковый порядок. Следовательно, в этом случае задача остается связанной (см. уравнение (3.1.18)). Однако, квадратичное слагаемое в (3.1.18) может быть опущено в главном приближении (см. (3.1.19)). Соотношение (3.1.22) выполнено в этом случае. Слагаемыми в правой части уравнения (3.1.17) можно пренебречь, т.к. они имеют порядок $O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$. Для слабого диполя задача остается связанной, но линейной. Инерциальное слагаемое в уравнении пластины (3.1.20), в целом, не может быть опущено. В этом случае уравнение пластины имеет вид

$$\alpha\mathrm{Fr}^2\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}^2} + \frac{1}{\mu^4}\left(1 - \delta\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\right)\widetilde{\nabla}^4_2\widetilde{w} + \widetilde{w} - \mathrm{Fr}^2\frac{\partial\widetilde{\varphi}^E}{\partial\widetilde{x}} = \frac{\partial\widetilde{\varphi}^D}{\partial\widetilde{x}}(\widetilde{x},\widetilde{y},0) \qquad (3.1.25)$$
$$(\widetilde{z} = 0, |\widetilde{y}| < 1, |\widetilde{x}| < \infty).$$

Данное уравнение решается в совокупности с краевыми условиями (3.1.2) и условиями (3.1.9) в отдалении от диполя, $\widetilde{x} \to \pm\infty$. Потенциал диполя $\widetilde{\varphi}^D$ в (3.1.25) задан уравнениями (3.1.13) и (3.1.14). Упругий потенциал $\widetilde{\varphi}^E$ – решение задачи Неймана (3.1.16) – (3.1.18) с условием

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}^E}{\partial\widetilde{z}} = -\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}} \quad (\widetilde{z} = 0, |\widetilde{y}| < 1, |\widetilde{x}| < \infty), \qquad (3.1.26)$$

на границе лед-жидкость. Случай слабого диполя является самым сложным из всех перечисленных потому что прогиб ледового покрова и потенциала скорости течения связаны между собой в данном случае.

3.2 Прогибы ледового покрова в случае слабого диполя

Связная линейная задача (3.1.1), (3.1.15) – (3.1.17), (3.1.25), (3.1.26) решается методом преобразования Фурье в направлении $\widetilde{x}$ и методом нормальных мод разложения образа Фурье прогибов льда на балочные функции поперек канала. Данная задача близка по постановке к задаче движения внешней нагрузки вдоль канала с постоянной скоростью, рассмотренной в первой главе. Внешняя нагрузка представлена слагаемым $(\partial\widetilde{\varphi}^D/\partial\widetilde{x})(\widetilde{x},\widetilde{y},0)$ в правой части уравнения пластины (3.1.25). Следуя решению первой главы, после применения преобразования Фурье вдоль канала, слагаемое $-\mathrm{Fr}^2\partial\widetilde{\varphi}^E/\partial\widetilde{x}$ в (3.1.25) переписывается в виде матрицы присоединенных масс для закрепленных балочных функций, и уравнение пластины (3.1.25) сводится к системе алгебраических уравнений для коэффициентов разложения прогибов льда $\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ по балочным функциям.

Система безразмерных уравнений, описывающих прогиб ледовой пластины в системе координат, движущейся совместно со слабым диполем, имеет вид

$$\alpha\mathrm{Fr}^2\widetilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{1}{\mu^4}\left(1-\delta\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\right)\nabla_2^4\widetilde{w} + \widetilde{w} - \mathrm{Fr}^2\widetilde{\varphi}^E_{\tilde{x}} =$$

$$= \widetilde{\varphi}^D_{\tilde{x}}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_0,0,\widetilde{z}_0) \qquad (|\widetilde{x}|<\infty,\ \ |\widetilde{y}|<1), \tag{3.2.1}$$

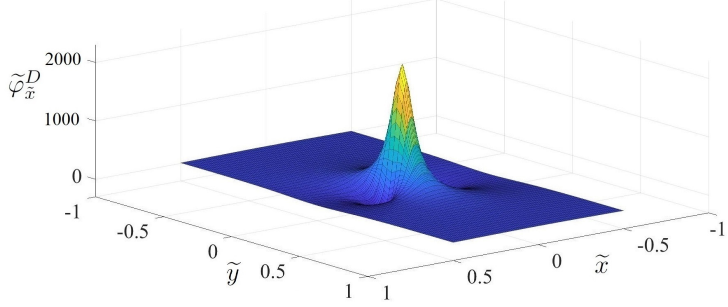
$$\widetilde{w}=0, \quad \widetilde{w}_{\tilde{y}}=0 \qquad (\widetilde{y}=\pm 1), \tag{3.2.2}$$

$$\nabla^2\widetilde{\varphi}^E = 0 \qquad (-\infty<\widetilde{x}<\infty,\ -1<\widetilde{y}<1,\ -h<\widetilde{z}<0), \tag{3.2.3}$$

$$\widetilde{\varphi}^E_{\tilde{z}} = -\widetilde{w}_{\tilde{x}} \quad (\widetilde{z}=0), \qquad \widetilde{\varphi}^E_{\tilde{z}}=0 \quad (\widetilde{z}=-h), \qquad \widetilde{\varphi}^E_{\tilde{y}}=0 \quad (\widetilde{y}=\pm 1), \tag{3.2.4}$$

$$\widetilde{\varphi}^E \to 0, \quad \widetilde{w}\to 0 \qquad (|\widetilde{x}|\to\infty). \tag{3.2.5}$$

Потенциал $\widetilde{\varphi}^D$ в правой части уравнения (3.2.1) задан формулой (3.1.13) и записан в безразмерных переменных. Функция $\widetilde{\varphi}^D_{\tilde{x}}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_0,0,\widetilde{z}_0)$ является четной по



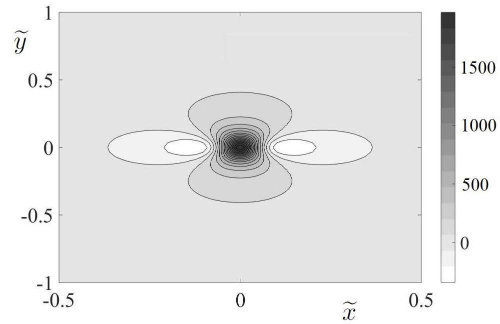


Рис. 3.2: Безразмерное давление $\widetilde{\varphi}^D_{\widetilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, 0, -h/2)$, вызванное диполем, в (3.2.1) для $\widetilde{y}_0 = 0$ и $\widetilde{z}_0 = -h/2$.

$\widetilde{x}$. Она также является четной по $\widetilde{y}$ если $\widetilde{y}_0 = 0$. Распределение давления от диполя $\widetilde{\varphi}^D_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, -h/2)$ показано на Рисунке 3.2 для диполя, расположенного в центре сечения канала. Решение стационарной задачи (3.2.1) – (3.2.5) зависит от четырех безразмерных параметров α, Fr, μ, δ, и безразмерных координат диполя $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{z}_0$. Требуется определить установившийся прогиб ледового покрова $\widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ и распределение деформаций (удлинений) в ледовом покрове $\widetilde{\varepsilon}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ для некоторых типичных значений параметров задачи. В частности, исследуется влияние разного расположения диполя в сечении канала на прогибы ледового покрова и распределение деформаций в ледовом покрове. Прогибы льда и деформации имеют масштабы w_{sc} (см. (3.1.21)) и $\epsilon_{sc} = h_i w_{sc}/(2L^2)$ соответственно. Эти масштабы зависят от интенсивности диполя через параметр ε.

Для исследования деформаций в ледовом покрове используется метод вычисления максимальных деформаций (удлинений) в пластине, предложенный в главе 1 с использованием критического значения ϵ_{cr}. В данном исследовании используется оценка $\epsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$ (обсуждение этого значения см. [23]).

Преобразование Фурье вдоль канала

$$\widetilde{w}^F(\xi, \widetilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) e^{-i\xi\widetilde{x}} d\widetilde{x}, \qquad \widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{w}^F(\xi, \widetilde{y}) e^{i\xi\widetilde{x}} d\xi,$$

примененное к уравнению пластины (3.2.1) и краевым условиям (3.2.2) дает

$$-\alpha \mathrm{Fr}^2 \xi^2 \widetilde{w}^F + \frac{1}{\mu^4} (1 - i\delta\xi) (\widetilde{w}^F_{\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} - 2\xi^2 \widetilde{w}^F_{\tilde{y}\tilde{y}} + \xi^4 \widetilde{w}^F) + \widetilde{w}^F - i\xi \mathrm{Fr}^2 (\widetilde{\varphi}^E)^F =$$
$$= i\xi (\widetilde{\varphi}^D)^F (\xi, \widetilde{y}, \widetilde{y}_0, 0, \widetilde{z}_0) \qquad (-1 < \widetilde{y} < 1), \qquad (3.2.6)$$

$$\widetilde{w}^F = 0, \quad \widetilde{w}^F_{\widetilde{y}} = 0 \qquad (\widetilde{y} = \pm 1). \tag{3.2.7}$$

Функция $\widetilde{w}^F(\xi, \widetilde{y})$ ищется в виде разложения

$$w^F(\xi, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi)\psi_j(\widetilde{y}), \tag{3.2.8}$$

где коэффициенты $a_j(\xi)$ необходимо определить, и функции $\psi_j(\widetilde{y})$ являются нормальными модами колебаний упругой балки

$$\psi_j^{IV} = \lambda_j^4 \psi_j \quad (-1 < \widetilde{y} < 1), \qquad \psi_j = \psi_j' = 0 \quad (\widetilde{y} = \pm 1), \tag{3.2.9}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \psi_i(\widetilde{y})\psi_j(\widetilde{y}) d\widetilde{y} = \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\delta_{jj} = 1$, и λ_j – собственные числа задачи (3.2.9), $j \geq 1$. Функции $\psi_j(\widetilde{y})$ с таким же обозначением использовались в главе 1 (замечание: данные функции отличаются от функций ψ, используемых во второй главе). Решение задачи (3.2.9) разделяется на четные $\psi_j^c(\widetilde{y})$ и нечетные $\psi_j^s(\widetilde{y})$ моды, где $\psi_j^c(-\widetilde{y}) = \psi_j^c(\widetilde{y})$ и $\psi_j^s(-\widetilde{y}) = -\psi_j^s(\widetilde{y})$ для $-1 < \widetilde{y} < 1$ и $j \geq 1$.

Рассматриваются случаи расположения диполя как вдоль центральной линии канала, где $\widetilde{y}_0 = 0$, так и возле одной из стенок. Для диполя, движущегося вдоль центральной линии канала, решение (3.2.6) и (3.2.7) является четным по $\widetilde{y}$. Следовательно, в этом случае необходимо учитывать только четные моды в разложении (3.2.8). Четные и нечетные моды не взаимодействуют друг с другом и разложение (3.2.8) можно представить в виде

$$\widetilde{w}^F(\xi, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^c(\xi)\psi_j^c(\widetilde{y}) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^s(\xi)\psi_j^s(\widetilde{y}), \tag{3.2.10}$$

где a_j^c и a_j^s – коэффициенты разложения на четные и нечетные моды соответственно. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений для поиска $a_j^c(\xi)$ получается подстановкой (3.2.10) в уравнение (3.2.6), умножением обоих частей полученного уравнения на $\psi_j^c(\widetilde{y})$ и интегрированием результата по $\widetilde{y}$ от -1 до 1, с учетом условия ортогональности (3.2.9). Слагаемое $-i\xi(\widetilde{\varphi}^E)^F$ в (3.2.6) с упругим потенциалом приводит к матрице присоединенных масс (см. главу 1). Полученная система алгебраических уравнений решается методом редукции. Повторение аналогичной последовательности действий для нечетных мод $\psi_j^s(\widetilde{y})$ приводит к системе бесконечных алгебраических уравнений для поиска $a_j^s(\xi)$ (замечание: в методе решения в первой главе нечетные моды не вычислялись). В итоге, прогиб ледового покрова $\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ определяется с использованием обратного преобразования Фурье. Для численного решения рассматривается конечное число четных N_{mod}^c и N_{mod}^s и нечетных мод в разложении (3.2.10). Обратное преобразование Фурье функции (3.2.10) вычисляется аналитически с использованием линейного приближения коэффициентов $a_j^c(\xi)$ и $a_j^s(\xi)$. Детальное описание шагов метода решения для четных мод и функции внешней нагрузки изложено в главе 1.

3.3 Численные результаты

Задача взаимодействия ледового покрова в канале и движущегося диполя решается численно для пресноводного льда со следующими параметрами: $\rho_i = 917$ кг/м^3, $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.1$ с, $h_i = 0.1$ м, $L = 10$ м и H =2 м. Эти параметры использовались при расчетах в первой главе. Координаты диполя – (X, y_0, z_0) в размерных переменных, $X = Ut$. Скорость U и координаты диполя в сечении канала y_0 и z_0 изменяются в представленных расчетах. Как было замечено в первой главе, в канале существует счетное число критических скоростей, при которых деформации в ледовом покрове будут максимальными в рамках вязкоупругой модели. Это влияет на выбор скоростей движения диполя. Скорость диполя U в численном анализе выбирается в зависимости от критических скоростей гидроупругих волн, распространяющихся в замороженном канале. Характеристическая длина L_c ледового покрова равна 2.48 м в рассматриваемом случае. Для такой характеристической длины наличие стенок канала является важным и для прогибов льда и для распределения деформаций в ледовом покрове (см. главу 1). Наименьшая критическая скорость для рассматриваемого канала 5.38 м/с для $\tau = 0$ с и примерно 5.5 м/с для $\tau = 0.1$ с.

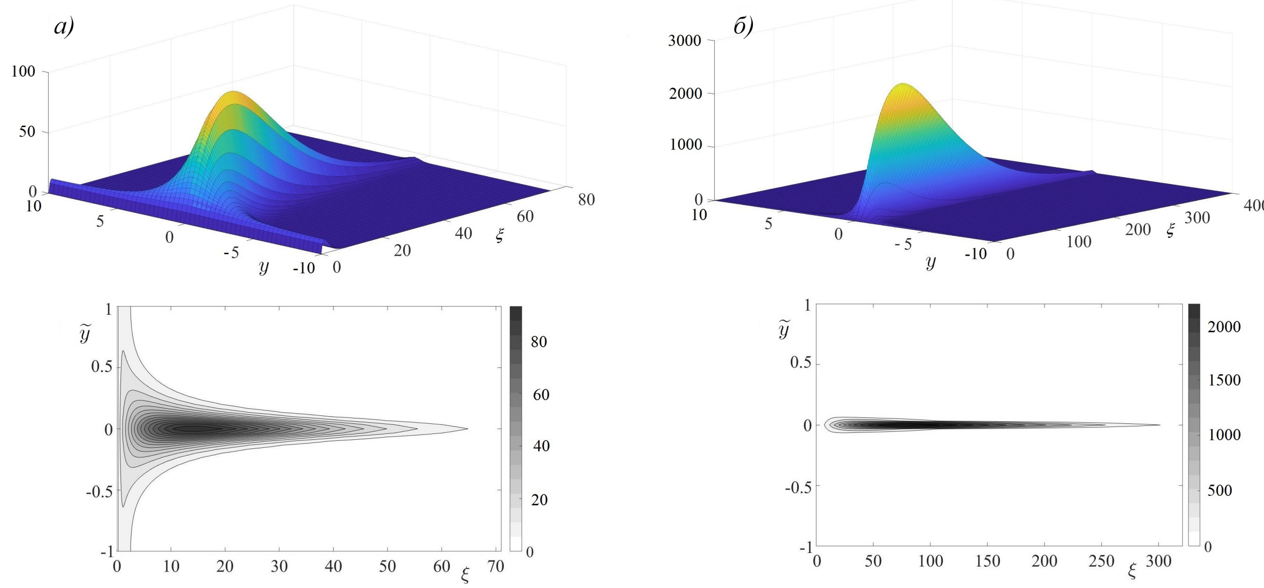


Рис. 3.3: Образ Фурье давления, вызванного диполем, в (3.2.6), $(\widetilde{\varphi}^D_{\widetilde{x}})^F(\xi, \widetilde{y}, 0, 0, \widetilde{z}_0)$, для диполя движущегося вдоль центральной линии канала и расположенного на расстоянии *а)* $|\widetilde{z}_0| = h/2$, *б)* $|\widetilde{z}_0| = h/10$ от ледового покрова в безразмерных переменных.

Вычисления прогибов ледового покрова $\widetilde{w}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ и деформаций по формуле (1.1.11) требует определения обратного преобразования Фурье функций и вычисления функций $a^c_j(\xi)$ и $a^s_j(\xi)$ в разложении (3.2.10). В итоге, требуется вычислить $3(N^c_{\rm mod} + N^s_{\rm mod})$ интегралов для разных значений $\widetilde{x}$ вдоль канала. Число четных и нечетных мод, учитываемых в каждой сумме (3.2.10), изменялось от 5 до 15 для проверки сходимости численного решения для прогибов ледового покрова (3.2.10) и для соответствующего распределения деформаций. Для выбранного набора параметров задачи вычисления обратного преобразования Фурье достигают хорошей точности с интервалом интегрирования (0, 400) с переменным шагом от 0.01 до 1. Потенциал диполя $\varphi^D(x, y, y_0, 0, z_0)$ на границе лед-жидкость вычисляется по формулам (3.1.12) и (3.1.13). Суммы в данных уравнениях быстро сходятся. Число слагаемых в каждой сумме N_{dip} изменялось от 10 до 1000 для проверки сходимости и точности численных расчетов. Правая часть уравнения (3.2.6) показана на Рисунке 3.3 для двух разных положений диполя в канале с разным расстоянием от ледового покрова. Результаты на графике показывают, что вызванное диполем давление локализовано в окрестности диполя в направлении $\widetilde{y}$. Однако данное давление медленно затухает с увеличением параметра преобразования Фурье ξ.

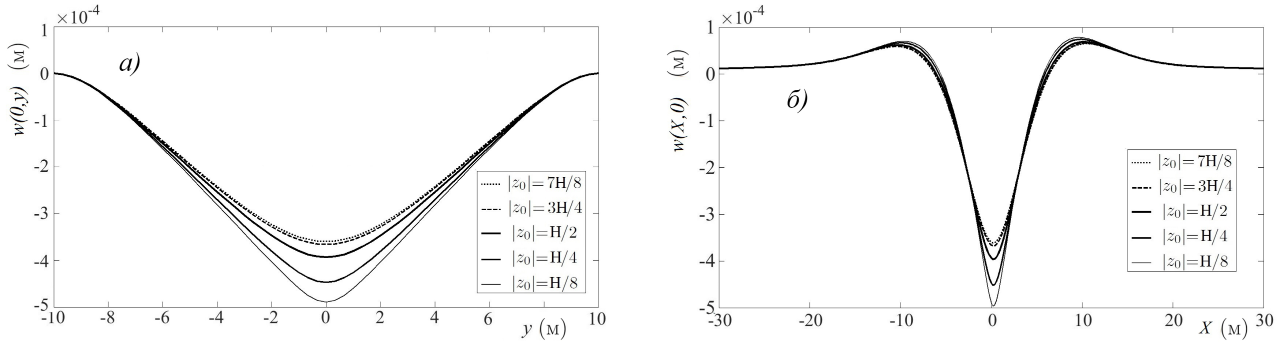


Рис. 3.4: Прогиб ледового покрова *а)* поперек канала в точке $X = 0$, *б)* вдоль центральной линии канала $y = 0$. Скорость диполя $U = 3$ м/с. Глубина $|z_0|$ показана на графике, H=2 м.

Рассматривается интенсивность диполя I (см. уравнение (3.1.8)), соответствующая сфере радиуса $R = 0.5$ м в неограниченной жидкости. Диаметр такой сферы в два раза меньше глубины канала. Интенсивность диполя $I = UR^3/2$ зависит от скорости диполя U (см. [52]). Тогда $\varepsilon = R/L = 0.05$ и $\mu = L/L_c = 4.02$ больше 1 (см. уравнение (3.1.21)). Численные результаты представлены в размерных переменных для сферы постоянного радиуса $R = 0.5$ м и разных скоростей диполя U (замечание: рассматриваемая задача в безразмерных переменных, см. уравнение (3.1.25), зависит от скорости диполя U, но не зависит от радиуса сферы R). Соответственно, прогибы и деформации в ледовом покрове, представленные ниже, могут быть умножены на коэффициент $(\widetilde{R}/0.5)^3$ для получения результатов для любой допустимой интенсивности диполя $I = U\widetilde{R}^3/2$.

Прогибы и деформации в ледовом покрове показаны на Рисунках 3.4 - 3.6 для диполя, движущегося вдоль центральной линии канала $y_0 = 0$ на разном расстоянии от ледового покрова $|z_0| = 7H/8$, $3H/4$, $H/2$, $H/4$, $H/8$ м и для скоростей 3 и 7 м/с. Для докритической скорости диполя $U = 3$ м/с прогибы и деформации показаны на Рисунках 3.4 и 3.5 соответственно. В этом случае и прогибы и деформации являются четными функциями по X и y. Деформации вдоль центральной линии (Рисунок 3.5*б*) всегда выше деформаций вдоль стенок канала (Рисунок 3.5*в*). Для диполя, движущегося на глубине 0.25 м под ледовым покровом на докритической скорости, максимальные деформации равны $1.2 \cdot 10^{-5}$

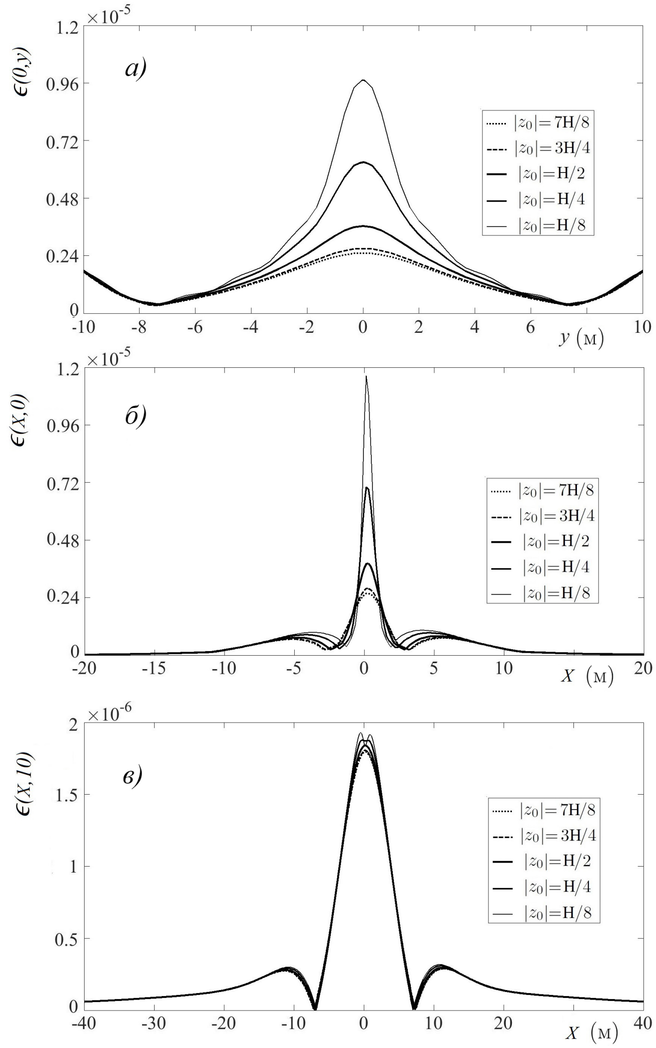


Рис. 3.5: Деформации *а)* поперек канала в точке $X = 0$, *б)* вдоль центральной линии канала $y = 0$, *в)* вдоль вертикальных стенок канала $y = \pm 10$ м, для $U = 3$ м/с и $H = 2$ м.

(Рисунок 3.5*б*) и расположены в точности над диполем. Используя коэффициент $(\widetilde{R}/0.5)^3$ легко определить, что максимальные удлинения достигают критического значения $\epsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$ для диполя соответствующего сфере радиуса 0.85 м, движущейся со скоростью 3 м/с в неограниченной жидкости.

Деформации для сверхкритической скорости диполя $U = 7$ м/с показаны на Рисунке 3.6 для разного расстояния диполя от ледового покрова. Важное отличие между докритическим случаем, Рисунки 3.4 и 3.5, и сверхкритическим случаем, Рисунок 3.6, состоит в том, что в последнем случае наблюдается гидроупругая волна спереди диполя, создаваемая движением. Это согласуется с результатами для поведения ледового покрова при больших временах, полученных в главе 2.

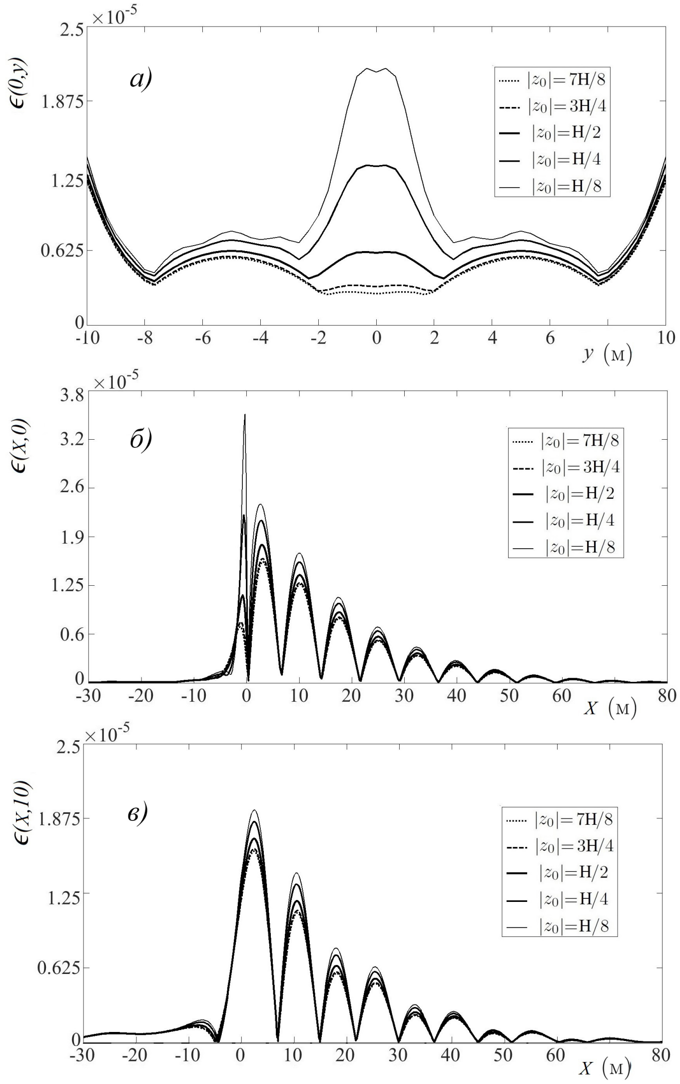


Рис. 3.6: Деформации *а)* поперек канала в точке $X = 0$, *б)* вдоль центральной линии канала $y = 0$, *в)* вдоль вертикальных стенок канала $y = \pm 10$ м, для $U = 7$ м/с, $H = 2$ м.

Деформации достигают критического значения $\epsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$ в области перед диполем, если интенсивность I диполя увеличить в 4 раза. Это означает, что диполь с интенсивностью эквивалентной сфере радиуса 0.8 м в неограниченной жидкости, движущейся со скоростью 7 м/с на глубине 0.5 м, может сломать ледовый покров толщиной 0.10 м на расстоянии 3 м спереди диполя (Рисунок 3.6*б*). Результаты на Рисунке 3.6 также показывают, что деформации на стенках при $X = 0$ больше деформаций над диполем, если глубина погружения диполя больше, чем 1 м.

Влияние расположения диполя в сечении канала на прогибы и деформации в ледовом покрове показано на Рисунках 3.7 и 3.8. Диполь движется на глубине 1 м.

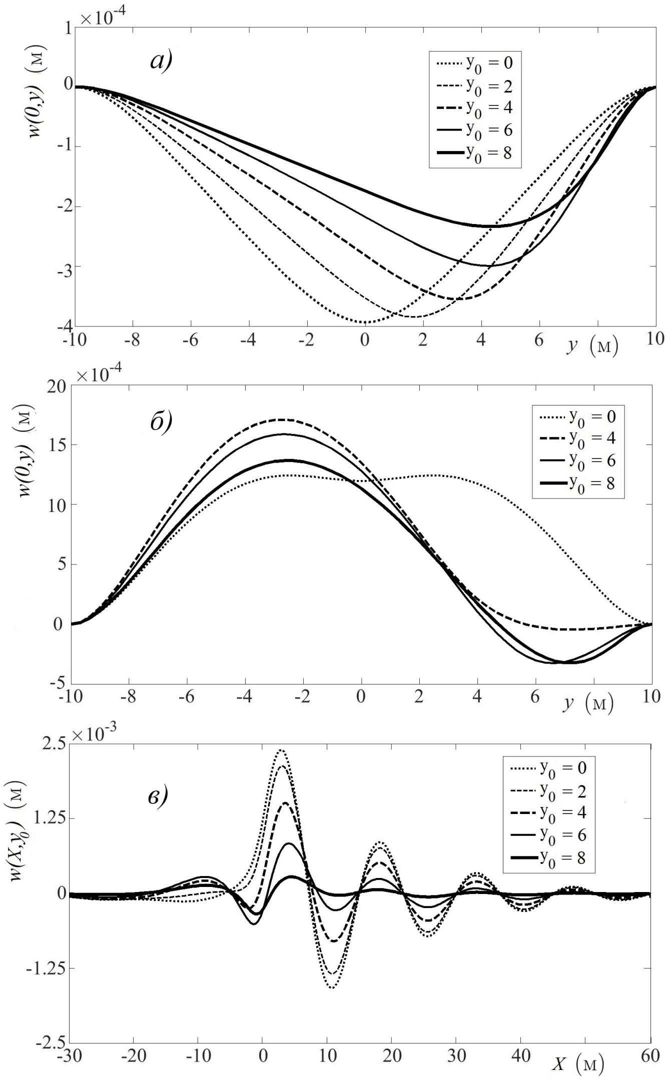


Рис. 3.7: Прогибы ледового покрова поперек канала над диполем $X = 0$ для скорости диполя *а)* $U = 3$м/с, *б)* $U = 7$м/с. *в)* Прогибы вдоль центральной линии канала $y = y_0$ для скорости 7 м/с. Положение диполя поперек канала y_0 показано на легенде (в метрах).

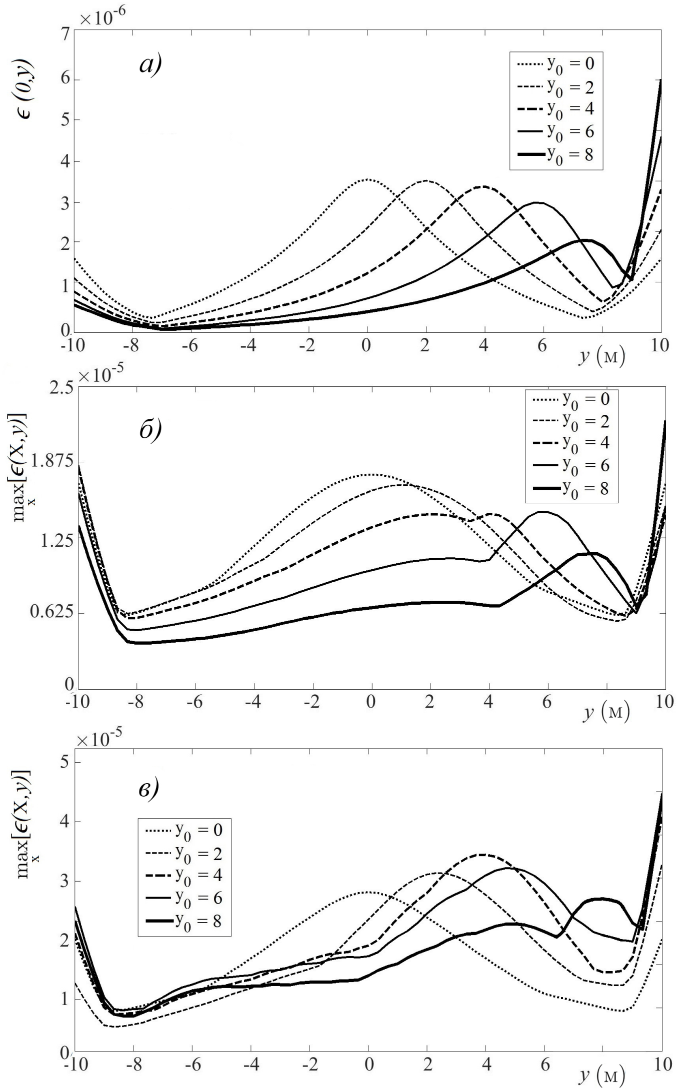


Рис. 3.8: Деформации в ледовом покрове над диполем $X = 0$ для диполя движущегося возле правой стенки *а)* со скоростью $U = 3$ м/с для разных значений y_0. *б)* Максимальные деформации вдоль канала как функции от y для сверхкритической скорости $U = 7$ м/с. *в)* Максимальные удлинения вдоль канала как функции от y для сверхкритической скорости $U = 12$ м/с. Диполь движется на глубине $z_0 = 1$ м, значение y_0 показано на графике.

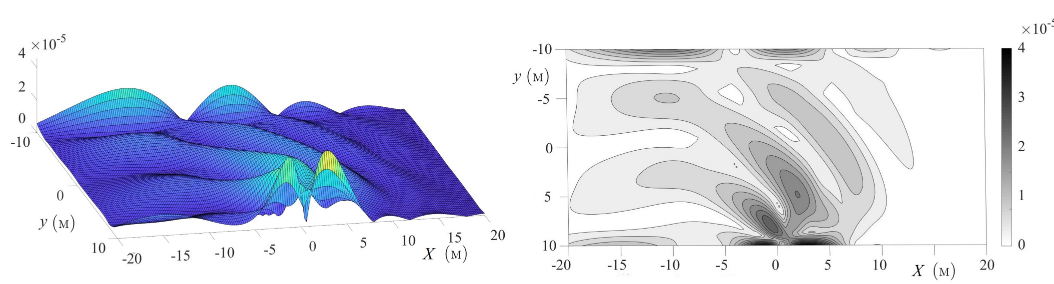


Рис. 3.9: Деформации как функция от X и y для движущегося со скоростью $U = 12$ м/с на глубине $|z_0| = 1$ м и при $y_0 = 8$ м.

Эффект расположения диполя относительно центральной линии канала изменяется в зависимости от скорости диполя. Результаты на Рисунке 3.7*а* показывают, что для докритической скорости $U = 3$ м/с максимальные прогибы льда находятся над диполем $X = 0$ и увеличиваются с увеличением расстояния от диполя до ближайшей стены. Однако для сверхкритической скорости $U = 7$ м/с (см. Рисунок 3.7*б*), диполь, движущийся вблизи одной из стенок, может создавать прогибы льда, большие чем при движении диполя вдоль центральной линии канала. При этом, максимальные прогибы достигаются на противоположной части канала. При сверхкритических скоростях диполь создает прогибы льда сложной волной формы спереди и сзади диполя (см. Рисунки 3.7*б* и *в*, 3.8*б* и *в* и 3.9), которая сильно зависит от расстояния диполя от центральной линии в канале. Деформации $\epsilon(0, y)$ над диполем для докритической скорости $U = 3$ м/с показаны на Рисунке 3.8*а*. В целом, деформации монотонно уменьшаются с расстоянием от диполя, за исключением деформаций на ближайшей стенке, которые увеличиваются при приближении диполя к этой стенке. Аналогичный эффект наблюдается для докритической скорости $U = 7$ м/с, в данном случае максимальные удлинения вдоль центральной линии канала как функции от y показаны на Рисунке 3.8*б*. Можно сделать вывод, что ледовый покров сломается возле стенки, но не над диполем, если диполь движется близко к одной из стенок. Для большой скорости $U = 12$ м/с максимальные деформации всегда достигаются на стенке для $y_0 \geq 2$ м. Распределение деформаций $\epsilon(x, y)$, вдоль ледового покрова при $y_0 = 8$ м, $|z_0| = 1$ м и $U = 12$ м/с показаны на Рисунке 3.9 как трехмерный график и в виде линий уровня. На данном графике хорошо прослеживается форма волн спереди и сзади, напоминающая клин Кельвина.

Заключение

Основные результаты, полученные в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

1. Для задачи движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль вязкоупругого ледового покрова в канале построено решение в виде бегущей волны. Проведено исследование полученного решения, в частности, определена зависимость формирования прогибов льда от скорости движения нагрузки и ее соотношения к критическим скоростям гидроупругих волн, оценено влияние жестких стенок на характеристики прогибов и деформаций в ледовом покрове. Определено влияние размеров канала, скорости движения нагрузки, гидродинамического давления и значения коэффициента запаздывания на получаемые результаты. Показано, что учет стенок канала важен как для узких, так и для широких каналов.

2. Доказана единственность классического решения для нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова в канале под действием внешней нагрузки.

3. Для нестационарной задачи движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль упругого ледового покрова в канале построено аналитическое решение при больших временах. Проведен анализ полученных аналитических формул для прогибов ледового покрова. С использованием численных и аналитических методов решена нестационарная задача о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль замороженного канала при конечных временах. Поведение нестационарных прогибов льда исследовано при разных значения времени. Получена согласованность результатов задач, рассмотренных в пунктах 1 и 3.

4. Проведено исследование корректности гипотез линейной теории гидроупругости в постановке задачи о взаимодействии вязкоупругого ледового покрова и

движущегося диполя подо льдом в канале с учетом нелинейных кинематического условия и интеграла Коши-Лагранжа. Оригинальная постановка сведена к трем разным случаям, в которых сохраняется условие малых колебаний ледового покрова. С использованием численных и аналитических методов решена задача прямолинейного движения диполя с малой интенсивностью под вязкоупругой ледовой пластиной вдоль канала. Оценено влияние расположения диполя в сечении канала на прогибы и деформации в ледовом покрове.

Литература

[1] Squire, V. Moving loads on ice plates / V. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne. – Kluwer Academic Publishers – 1996.

[2] Хейсин, Д. Е. Перемещение нагрузки по пластине, плавающей на поверхности идеальной жидкости / Д. Е. Хейсин // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – (1). – с. 178-180.

[3] Хейсин, Д. Е. Динамика ледяного покрова / Д. Е. Хейсин. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1967. – 215 с.

[4] Sabodash, P. F. A dynamic problem for a thin elastic plate / P. F. Sabodash, I. G. Filippov // International Applied Mechanics. – 1967. – 3(6). – p. 28-31.

[5] Nevel, D. E. Moving loads on a floating ice sheet / D. E. Nevel. – No. CRREL-RR-261. Cold regions research and engineering lab. Hanover NH. – 1970.

[6] Părău, E. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load / E. Părău, F. Dias // Journal of Fluid Mechanics. – 2002. – 460. – p. 281-305.

[7] Hegarty, G. M. A boundary-integral method for the interaction of large-amplitude ocean waves with a compliant floating raft such as a sea-ice floe / G. M. Hegarty, V. Squire // Journal of Engineering Mathematics. – 2008. – 62(4). – p. 355-372.

[8] Bonnefoy, F. Nonlinear higher-order spectral solution for a two-dimensional moving load on ice / F. Bonnefoy, M. H. Meylan, P. Ferrant // Journal of Fluid Mechanics. – 2009. – 621. – p. 215-242.

[9] Plotnikov, P. I. Modelling nonlinear hydroelastic waves / P. I. Plotnikov, J. F. Toland // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2011. – 369.1947. – p. 2942-2956.

[10] Guyenne, P. Asymptotic Modeling and Numerical Simulation of Solitary Waves in a Floating Ice Sheet / P. Guyenne, E. I. Părău // The Twenty-fifth International Offshore and Polar Engineering Conference. International Society of Offshore and Polar Engineers. – 2015.

[11] Yeung, R. W. Effects of a translating load on a floating plate-structural drag and plate deformation / R. W. Yeung, J. W. Kim // Journal of fluids and structures. – 2000. – 14(7). – p. 993-1011.

[12] Kashiwagi, M. Transient responses of a VLFS during landing and take-off of an airplane / M. Kashiwagi // Journal of Marine Science and Technology. – 2004. – 9(1). – p. 14-23.

[13] Погорелова, А. В. Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову / А. В. Погорелова // ПМТФ. – 2008. – Т.49, №1. – с. 89-99.

[14] Meylan, M. H. Time-dependent motion of a two-dimensional floating elastic plate / M. H. Meylan, I. V. Sturova // J Fluids and Structures. – 2009. – 25.3. – p. 445-460.

[15] Погорелова, А. В. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета / А. В. Погорелова, В. М. Козин, А. А. Матюшина // ПМТФ. – 2015. – Т.56, №5. – с. 214-221.

[16] Newman, J. N. Channel wall effects in radiation-diffraction analysis / J. N. Newman // In Proc. 31 Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, (IWWWFB 2016). – 2016. – p. 117-120.

[17] Козин, В. М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты / В. М. Козин. – М.: Академия Естествознания. – 2007. – 355 с.

[18] Fuamba, M. Modeling of dam break wave propagation in a partially ice-covered channel / M. Fuamba, N. Bouaanani, C. Marche // Advances in Water Resources. – 2007. – 30. – p. 2499-2510.

[19] Hinchey, M. Research on low and high speed hovercraft icebreaking / M. Hinchey, B. Colbourne // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1995. – 22(1). – p. 32-42.

[20] Жесткая, В. Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову / В. Д. Жесткая // ПМТФ. – 1999. – Т.40, №4. – с. 243-248.

[21] Жесткая, В. Д. Исследование возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке / В. Д. Жесткая, В. М. Козин. – М.: Дальнаука. – 2003. – 161 с.

[22] Козин, В. М. Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жесткая, А. В. Погорелова, С. Д. Чижиумов, М. Р. Джабраилов, В. С. Морозов, А. Н. Кустов. – М.: Академия Естествознания. – 2008. – 329 с.

[23] Brocklehurst, P. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall / P. Brocklehurst, A. A. Korobkin, E. I. Părău // J Eng Math. – 2010. – 68. – p. 215-231.

[24] Daly, S. F. Wave propagation in ice-covered channels / S. F. Daly // J. of Hydraulic Eng. – 1993. – 119(8). – p. 895-910.

[25] Steffler, P. M. Discussion of Wave propagation in ice-covered channels / P. M. Steffler, F. E. Hicks // J. of Hydraulic Eng. – 1994. – 120(12). – p. 1478-1479.

[26] Korobkin, A. A. Waves propagating along a channel with ice cover / A. A. Korobkin, T. I. Khabakhpasheva, A. A. Papin // Eur J Mech B/Fluids. – 2014. – 47. – p. 166-175.

[27] Батяев, Е. А. Гидроупругие волны в канале со свободным ледовым покровом / Е. А. Батяев, Т. И. Хабахпашева // Изв. РАН. МЖГ. – 2015. – №6. – с. 71-88.

[28] Wilson, J. T. Moving loads on floating ice sheets / J. T. Wilson. - Project 2432. University of Michigan Research Institute. – 1958.

[29] Hosking, R. J. Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load / R. J. Hosking, A. D. Sneyd, D. W. Waugh // J Fluid Mechanics. – 1988. – 196. – p. 409-430.

[30] Takizawa, T. Response of a floating sea ice sheet to a moving vehicle / Takizawa T. // In Proc. Fifth International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, Tokyo. – 1986. – 4. – p. 614-621.

[31] Tabata, T. Studies on visco-elastic properties of sea ice / T. Tabata // In Arctic Sea Ice. US National Academy of Sciences & National Research Council (Washington, DC). – 1958. – publication 598. – p. 139-147.

[32] Mase, G. E. Theory and problem of Continuum Mechanics / G. E. Mase. – Schaum's outline series. McGraw-Hill Book Company. – 1970. – 223 p.

[33] Brocklehurst, P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures / P. Brocklehurst. – PhD thesis, University of East Anglia, UK. – 2012.

[34] Shishmarev, K. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // Applied Ocean Research. – 2016. – 59. – p. 313-326.

[35] Schulkes, R. Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load / R. Schulkes, A. Sneyd // Journal of Fluid Mechanics. – 1988. – 186. – p. 25-46.

[36] Коробкин, А. А. О несимметричном ударе вершиной волны по упругой пластине / А. А. Коробкин, Т. И. Хабахпашева // ПМТФ. – 1998. – Т.39, №5. – с. 148-158.

[37] Korobkin, A. Unsteady hydroelasticity of floating plates / A. Korobkin // Journal of Fluids and Structures. – 2000. – 14(7). – p. 971-991.

[38] Хабахпашева, Т. И. Удар поверхностной волной по упругой обшивке судна / Т. И. Хабахпашева // Изв. РАН. МЖГ. – 2006. – №3. – с. 114-124.

[39] Савин, А. А. Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем / А. А. Савин, А. С. Савин // Изв. РАН. МЖГ. – 2015. – №5. – с. 16-23.

[40] Савин, А. А. Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем / А. А. Савин, А. С. Савин // Изв. РАН. МЖГ. – 2012. – №2. – с. 3-10.

[41] Ильичев, А. Т. Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости / А. Т. Ильичев, А. С. Савин // ТМФ. – 2017. – Т.193(3). – с. 455–465.

[42] Савин, А.А. Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником / А.А. Савин, А.С. Савин // Изв. РАН. МЖГ. – 2013. – №3. – с. 24-30.

[43] Li, Z. F. Large amplitude motions of a submerged circular cylinder in water with an ice cover / Z. F. Li, Y. Y. Shi, G. X. Wu // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2017. – 65. – p. 141-159.

[44] Погорелова, А. В. Движение тонкого тела в жидкости под плавающей пластиной / А. В. Погорелова, В. М. Козин, В. Л. Земляк // ПМТФ. – 2012. – Т.53(1). – с. 32-44.

[45] Погорелова, А. В. Нестационарное движение источника в жидкости под плавающей пластиной / А. В. Погорелова // ПМТФ. – 2011. – Т.52(5). – с. 49-59.

[46] Стурова, И. В. Колебания погруженного цилиндрического тела в жидкости при наличии неоднородного ледяного покрова / И. В. Стурова, Л. А. Ткачева // Полярная механика: материалы третьей международной конференции, 27–30 сентября 2016, Владивосток (Инженерная школа ДВФУ). – 2016. – с. 976-985.

[47] Sturova, I. V. Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya / I. V. Sturova // Journal of Fluid Mechanics. – 2015. – 784. – p. 373-3-95.

[48] Ткачева, Л. А. Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова / Л. А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – 56(6). – с. 173–186.

[49] Li, Z. F. Wave radiation and diffraction by a circular cylinder submerged below an ice sheet with a crack / Z. F. Li, G. X. Wu, C. Y. Ji // J. Fluid Mech. – 2018. – 845. – p. 682-712.

[50] Li, Z. F. Interaction of wave with a body submerged below an ice sheet with multiple arbitrarily spaced cracks / Z. F. Li, G. X. Wu, C. Y. Ji // Physics of Fluids. – 2018. – 30 (5). – 057107 p.

[51] Timoshenko, S. Theory of Plates and Shells / S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – 2nd ed., McGraw-Hill, New York, U.S.A. – 1959.

[52] Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе // Учебник. – Под ред. И.А. Кибеля. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.

[53] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – Физматлит. – 2008.

[54] Erdelyi, A. Asymptotic expansions / A. Erdelyi. – New York: Dover Publications, Inc. – 1956.

[55] Найфэ, А. Х. Введение в методы возмущений / А. Х. Найфэ. – М.: Мир. – 1984.

[56] Weigant, W. A. On the uniqueness of the solution of the flow problem with a given vortex / W. A. Weigant, A. A. Papin // Mathematical notes. – 2014. – 96(6). – p. 820–826.

[57] Шишмарев, К. А. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления / К. А. Шишмарев, Т. И. Хабахпашева // Вычислительные технологии. – 2019. – Т. 24, № 2. – С. 111–128.

[58] Shishmarev, K. A. The ice response to an oscillating load moving along a frozen channel / K. A. Shishmarev, T. I. Khabakhpasheva, A. A. Korobkin // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2018. – 193, 012072.

[59] Shishmarev, K. A. Deflection of ice cover caused by an underwater body moving in channel / K. A. Shishmarev, T. I. Khabakhpasheva, A. A. Korobkin // IOP Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – 894, 012109.

[60] Shishmarev, K. A. Uniqueness of a solution of an ice plate oscillation problem in a channel / K. A. Shishmarev, A. A. Papin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2018. – 11(4). – p. 449-458.

[61] Шишмарев, К. А. Математическая модель взаимодействия ледового покрова и гидродинамического диполя в канале / К. А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – № 1 (93). – С. 148-151.

[62] Папин, А. А. Однозначная разрешимость задачи об упругих колебаниях ледового покрова в канале / А. А. Папин, К. А. Шишмарев // Известия АГУ, Барнаул. – 2016. – Вып. 1 (89). – с.157-162.

[63] Шишмарев, К. А. Влияние ширины канала на вязкоупругие колебания ледового покрова под действием движущейся нагрузки / К. А. Шишмарев // Известия АГУ, Барнаул. 2016. – Вып. 1 (89). – с.196-201.

[64] Шишмарев, К. А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки / К. А. Шишмарев // Известия АГУ, Барнаул. – 2015. – Вып. 1/2 (85). – с.189-194.

[65] Шишмарев, К. А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн / К. А. Шишмарев // Известия АГУ, Барнаул. 2015. – Вып. 1/1 (85). – с.126-132.

[66] Shishmarev, K. A. Large time behaviour of the ice cover caused by a load moving along a frozen channel / K. A. Shishmarev, T. I. Khabakhpasheva, A. A. Korobkin // Proc. 33-rd Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies (Ed: Yves-Marie Scolan) April 4-7, 2018, Guidel-Plages, France. – 2018. – p. 185-189.

[67] Khabakhpasheva, T. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel / T. Khabakhpasheva, K. Shishmarev, A. Korobkin // Applied Ocean Research. – 2019. –86. – p. 154-165.

[68] Shishmarev, K. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // Applied Ocean Research. – 2016. – 59. – p. 313–326.

[69] Shishmarev, K. Hydroelastic waves caused by a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // Proc. 5th Int. Conf. Hydroelastisity in Marine Technology (Zagreb: VIDICI d.o.o.). – 2015. – p. 149-160.

[70] Шишмарев, К. А. Движение нагрузки по ледовому покрову канала // К. А. Шишмарев, Т. И. Хабахпашева, А. А. Коробкин // Материалы третьей международной конференции "Полярная механика 2016", 27–30 сентября, Владивосток. – 2016. – с. 225–236.

[71] Коробкин, А. А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн / А. А. Коробкин, А. А. Папин, К. А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1-1 (73). – с. 55–59.

[72] Коробкин, А. А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн

/ А. А. Коробкин, А. А. Папин, К. А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1-2 (73). – с. 23–27.

[73] Jones, F. Machinery's handbook / F. Jones, H. Ryffel, E. Oberg, C. McCauley // 27th edn, Industrial Press Inc, New York. – 2004.

[74] Goodman, D. The flexural response of a tabular ice island to ocean swell / D. Goodman, P. Wadhams, V. Squire. – Ann Glaciol. – 1980. – 1. – p. 23-27.

[75] Жесткая, В. Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной / В. Д. Жесткая, М. Р. Джабраилов // ПМТФ. – 2008. – 49(3). – p. 151–156.

[76] Matiushina, A. A. Effect of Impact Load on the Ice Cover During the Landing of an Airplane / A. A. Matiushina, A. V. Pogorelova, V. M. Kozin // International Journal of Offshore and Polar Engineering. – 2016. – 26(1). – p. 6–12.

[77] Brocklehurst, P. Hydroelastic wave diffraction by a vertical cylinder / P. Brocklehurst, A. A. Korobkin, E. I. Părău // Phil Trans Roy Soc A. – 2011. – 369. – p. 2833–2851.

[78] Malenica, S. Water wave diffraction by vertical circular cylinder in partially frozen sea / S. Malenica, A. A. Korobkin // In Proc. 18th Internations Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Le Croisic, France. – 2003.

[79] Овсянников, Л. В. Общие уравнения и примеры, Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей / Л. В. Овсянников. – Новосибирск, Наука. – 1967. – 75 с.

[80] Sedenko, V. I. Solvability of initial-boundary value problems for Euler's equations for flows of an ideal incompressible nonhomogeneous fluid and an ideal barotropic fluid bounded by free surfaces / V. I. Sedenko // Mat. sb. – 1995. – 185(11). – p. 57–78.

[81] Хлуднев, А. М. Задачи теории упругости в негладких областях / А. М. Хлуднев. – М., Физмат. – 2010. – 252 с.

[82] Хлуднев, А. М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением / А. М. Хлуднев// Сиб. журн. индустр. матем. – 2011. – 14(1). – с. 114–126.

[83] Neustroeva, N. V. Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic beams / N. V. Neustroeva, N. P. Lazarev // ib. Elektron. Mat. Izv. – 2016. – 13(1). – p. 26–37.

[84] Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жизкости / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука. – 2008. – 365 с.

[85] Алексеев, Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Алексеев Г. В. – М.: Научный мир. – 2010. – 411 с.

[86] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва, Наука. – 1975. – 576 с.

[87] Lu, H. Existence of positive solutions to a non-positive elastic beam equation with both ends fixed / H. Lu, L. Sun, J. Sun // Boundary Value Problems. – 2012. – 56. – 10 p.

[88] Basson, M. Solvability of a Model for the Vibration of a Beam with a Damping Tip Body / M. Basson, M. de Villiers, N. F. J. van Rensburg // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – p. 1–7.

[89] Zemlyak, V. L. The Research on Deformed State of Hummocked Ice Caused by Motion of a Submarine Vessel / V. L. Zemlyak, V. M. Kozin, N. O. Baurin, K. I. Ipatov // Proceedings of the Twenty-seventh International Ocean and Polar Engineering Conference San Francisco, CA, USA, June 25-30, 2017. – p. 1332-1337.

[90] Gakhov, F. D. Boundary Value Problems / F. D. Gakhov. – Pergamon press. – 1966.