ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Шадрина Наталья Николаевна

Решение краевых задач для эллиптических уравнений с условиями сопряжения

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук, профессор
Кожанов Александр Иванович

Улан-Удэ – 2018

Оглавление

Введение **4**

1 Некоторые задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа **29**

1.1 О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа 29

1.2 О влиянии параметров задач сопряжения на корректность 49

2 Решение краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах **71**

2.1 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями Дирихле на основании 71

2.2 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями Неймана на основании 79

2.3 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями 3-го рода на основании 85

2.4 Краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах с поверхностью сопряжения, перпендикулярной основанию . . 90

2.5 Краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах с двумя пересекающимися поверхностями сопряжения 96

3 Решение краевых задач в полуцилиндрах с трещиной (завесой), параллельной основанию **100**

3.1 Обобщенные условия сопряжения 100
3.2 Задачи с условиями Дирихле на основании полуцилиндров. Случай трещины 102
3.3 Задачи с условиями Дирихле на основании полуцилиндров. Случай завесы 108
3.4 Задачи с условиями Неймана на основании полуцилиндров. Случай трещины 112
3.5 Задачи с условиями Неймана на основании полуцилиндров. Случай завесы 117

4 Решение краевых задач в полупространстве с трещиной (завесой), перпендикулярной границе 122

4.1 Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с трещиной 122
4.2 Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с завесой 127
4.3 Краевые задачи в однородном полупространстве с комбинацией пересекающихся трещин и завес 131

Заключение 136

Библиографический список 138

Введение

1. Общая характеристика работы.

Актуальность работы. Диссертация посвящена изучению задач сопряжения (дифракции) для эллиптических уравнений. Задачи дифракции возникают при математическом моделировании многих процессов механики, физики, биологии и т.д. в случаях двух и более соприкасающихся сред с различными физическими характеристиками. В случае установившихся процессов (без учета изменений во времени) для моделирования используются эллиптические уравнения.

Для тех или иных классов дифференциальных уравнений задачи с условиями сопряжения изучаются довольно давно. Первоначально вопрос о разрешимости краевой задачи рассматривался как вопрос о решении задачи о существовании неподвижной точки того или иного преобразования. К середине 20 века разрешимость указанных задач сводилась к получению априорных оценок подходящего вида.

Фундаментальные результаты о разрешимости задач сопряжения были получены О.А Ладыженской, О.А. Олейник, В.А. Ильиным.

В работах О.А Ладыженской [38, 39, 40] изучены классические задачи дифракции для дифференциальных уравнений различных типов.

В статьях О.А Олейник изучены задачи с условиями сопряжения для дифференциальных уравнений различных типов [43, 44]. В работе [44] рассмотрены задача Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и первая краевая задача для общего параболического уравнения с разрывными коэффициентами.

Решение этих задач для уравнений с разрывными коэффициентами получено как предел решений соответствующих задач для уравнений с гладкими коэффициентами, приближающимися к заданным разрывным. С использованием интегральных априорных оценок С.Н. Бернштейна и с помощью теорем вложения С.М. Никольского доказаны существование и единственность классического и обобщенного решения указанных уравнений.

В статьях В.А. Ильина рассматриваются вопросы разрешимости в классическом смысле краевых задач для дифференциальных уравнений различных типов. В работах [19, 20, 21] изучается вопрос о разрешимости задач Дирихле и Неймана для общего линейного самосопряженного эллиптического оператора 2-го порядка с разрывными коэффициентами. Решение гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами приведено в работе [23]. В ходе доказательств строится функция Грина для оператора с разрывными коэффициентами, устанавливается ряд ее свойств. При помощи этих свойств доказывается существование полной в L_2 ортонормированной системы классических собственных функций и ее совпадение с системой обобщенных собственных функций.

В более поздних работах В.А. Ильина, опубликованных в соавторстве с П.В. Луференко и другими [24, 25], изучаются смешанные задачи для разрывного волнового уравнения, описывающего продольные колебания стержня. Данный стержень состоит из двух участков, имеющих разные линейные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. В работе [24] установлены актуальные для проведения оптимизации граничных управлений выражения через функции, входящие в граничные условия первого или второго родов. В работе [25] получены обобщенные решения рассматриваемых задач в пространстве $W_2^1(Q)$.

В статьях А.М. Рогожникова [51, 52] исследуется задача о продольных колебаниях, возбуждаемых в стержне, состоящем из нескольких участков из материалов с произвольными плотностями и упругостями. Исследование проводится в терминах обобщенного решения. В статье [51] приведен явный вид решения смешанной задачи о возбуждении колебаний в стержне, состоящем из n произвольных участков и утверждается единственность полученного решения. Также рассмотрен случай, когда время прохождения волны по каждому из участков было одинаковым [52]. В ходе исследования получено явное аналитическое решение задачи о возбуждении колебаний в указанном стержне и доказана его единственность.

Также задачи с условиями спряжения (склейки) рассматриваются в теории уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Краевые задачи для уравнений смешанного типа изучены в работах А.В. Бицадзе [7], М.С. Салахитдинова [54], М.М. Смирнова [57], Т.Д. Джураева [14], Е.И. Моисеева [42] и во многих других.

Ещё одним источником появления задач с условиями сопряжения (склейки) является теория краевых задач для дифференциальных уравнений с меняющимся направлением эволюции. Большое внимание указанным задачам уделили в своих работах С.А.Терсенов [60], С.Г.Пятков [49], С.В. Попов [48].

В последнее время задачи сопряжения стали изучаться и для неклассических дифференциальных уравнений. Решению таких задач посвящены исследования А.И.Кожанова, Е. Ф. Шарина, С.В. Потаповой, В.В. Шубина.

В работах А.И Кожанова [27], А.И Кожанова, Е.Ф. Шарина [105, 30] исследуется разрешимость задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. В статье [105] рассматривается задача сопряжения (обобщенная задача дифракции) в общем виде, из которой затем выделяются четыре специальных случая. В статье [30] авторы рассматривают специальные случаи с заданными краевыми условиями и условиями сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений составного типа высокого порядка. С использованием метода регуляризации, метода продолжения по параметру получены априорные оценки, на основании которых доказано существование и единственность регулярных решений для уравнений составного типа.

В статье А.И Кожанова, С.В. Потаповой [28] изучается задача сопряжения (обобщенная задача дифракции) для уравнения третьего порядка

$$u_t - h(x)u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t).$$

Рассматривается ситуация, когда коэффициент $h(x)$ строго положителен, но может иметь при $x = 0$ разрыв первого рода. Теоремы существования и единственности регулярных решений доказываются с помощью метода регуляризации, метода продолжения по параметру.

В статье О. А. Андроновой [4] рассматривается обобщение начально-краевой задачи математической физики с поверхностной и внутренней диссипацией энергии, доказана теорема о сильной разрешимости исследуемой задачи. Задача с поверхностной и внутренней диссипацией энергии исследована методами функционального анализа. Для исследования задачи использован метод введения вспомогательных краевых задач.

В работе В.В. Шубина [103] рассматриваются краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции

$$sign\, y u_{yyy} \pm Au + c(x,y)u = f(x,y), \quad Au = \frac{\partial}{\partial x_j}(a^{ij}(x)u_{x_i}),$$

в цилиндре $Q = \Omega \times (-T,T) = \{(x,y) : x \in \Omega, -T < y < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей и $T > 0$, A — эллиптический оператор. Учитывая краевые условия на боковой поверхности цилиндра $\partial\Omega \times (-T,T)$ и на основаниях $\Omega \times (-T)$ и $\Omega \times (T)$, а также условия сопряжения на сечении $\Omega \times \{0\}$, доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений поставленных задач.

В последнее время в связи с широким использованием новых материалов все возрастающий интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в кусочно-однородных средах, а также в средах, содержащих тонкие сильно и слабопроницаемые пленки — трещины и завесы [6, 8, 41, 50, 53, 101, 106].Трещины и завесы имеют место на неидеальных контактах составных разнородных материалов [2, 3, 13, 17, 31, 104].

С другой стороны, искусственные сильно и слабо проницаемые пленки моделируют различные экраны, дренажи, проводники, мембраны и т.д., которые широко используются на практике [36, 37, 56, 75]. Построение математических моделей динамических процессов для установившихся режимов в указанных средах приводит к граничным задачам относительно уравнения Лапласа с теми или иными условиями сопряжения [5, 12, 26, 35, 46, 62, 100].

Следует отметить, что кусочно-постоянные коэффициенты уравнений, кроме непосредственного моделирования процессов в кусочно-однородных средах, также используются для аппроксимации непрерывных функций проницаемости.

В задачах с кусочно-постоянными коэффициентами уравнений в областях, разделенных параллельными прямыми или окружностями, используются методы отражения, преобразования Лапласа, разложения в ряды Тейлора и др.[11, 32, 33, 34, 50, 102]. При решении задач сопряжения также применяется метод представления потенциалов в виде криволинейных интегралов с неизвестной плотностью по линиям сопряжения, что приводит к интегральным уравнениям, которые решаются приближенно итерационными методами. [9, 10, 15, 22, 55, 59, 61, 64, 76, 107]. Краевые задачи с неоднородными условиями сопряжения на сторонах разреза рассмотрены в работах [36, 37, 100], где задача сводится к решению системы интегральных уравнений.

В случае линий сопряжения, совпадающих с координатными линиями декартовой или полярной системы координат, применяется метод Фурье [16, 18, 47, 74]. Зачастую полученные этим методом решения в неограниченных областях имеют вид кратных несобственных интегралов от быстро осциллирующих функций, что существенно затрудняет использование полученных решений в численных расчетах. Также метод Фурье для неограниченных областей применим лишь для функций, которые должны удовлетворять достаточно сильным ограничениям в бесконечности [32, 35, 46].

При решении краевых задач в средах с условиями сопряжения на трещине, как и в случае классических условий сопряжения, потенциалы обычно представляются в виде интегралов по контуру трещины с неизвестной плотностью, что приводит к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям [2, 3, 41]. В работах [2, 3] комплексные потенциалы при наличии прямолинейной или кольцевой трещины выражены через заданные аналитические функции комплексной переменной, удовлетворяющие определенным ограничениям. Частные задачи в средах с трещиной и завесой исследуются в работах [5, 10, 13, 41].

Решению краевых задач с условиями сопряжения посвящены работы С.Е. Холодовского [66]-[73]. В статье [73] выведены обобщенные граничные условия на многослойных пленках, ограничивающих полупространство и состоящих из чередующихся бесконечно тонких сильно- и слабо проницаемых прослоек. Получены формулы, выражающие в однократных квадратурах решение задачи для уравнения Лапласа в полуплоскости D, ограниченной трехслойной пленкой, через решение классической задачи Дирихле в D без пленки.

Таким образом, построение решений новых классов краевых задач в кусочно-однородных областях с трещинами и завесами является актуальной задачей.

Цель работы:

1) исследование разрешимости краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, изучение зависимости существования и единствен-

ности решения от граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред;

2) исследование влияния параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), исследование разрешимости задач сопряжения для оператора Лапласа со спектральным параметром в составной области при задании на поверхности раздела специальных условий сопряжения(склейки);

3) решение различных классов краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах и полупространствах, в том числе содержащих пленочные включения, с использованием метода свертывания разложений Фурье.

Методы исследования.

В данной работе для нахождения решений и доказательства теорем использовались метод спектральных разложений, метод продолжения по параметру, метод априорных оценок, метод свертывания разложений Фурье, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях, семинарах:

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование (Улан-Удэ 2015) [97];
- Международный семинар "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа (Улан-Удэ 2014, 2015) [96, 98];
- V Международная конференция “Математика, ее приложения и математическое образование”, (Улан-Удэ 2014) [93];
- VII Международная конференция по математическому моделированию, (г. Якутск 2014) [94];

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений, посвященной 100-летию, 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева» (Новосибирск 2008, 2013) [84, 90];

- Международная научная конференция «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей», посвященной 85-летию со дня рождения А.С. Алексеева (Новосибирск 2013) [91];

- V Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск 2013) [92];

- VIII и IX Всероссийские симпозиумы по прикладной и промышленной математике (Адлер 2007, Кисловодск 2008, 2009) [79, 83, 85];

- VII Всероссийская научно-практическая конференция «Кулагинские чтения» (Чита 2007) [80];

- Межвузовские научные конференции в ЗабГПУ (Чита 2005-2011) [77, 78, 81, 82, 86, 88, 89];

- Семинар Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева "Неклассические дифференциальные уравнения"под руководством профессора А. И. Кожанова;

- Семинар Института математики и фундаментальной информатики сибирского федерального университета "Обратные задачи"под руководством профессора Ю. Я. Белова.

Публикации.

По материалам диссертации опубликованы 23 статьи [77]-[99], из них 9 статей [79, 83], [85] - [89], [95, 99] в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Остальные результаты опубликованы в сборниках трудов и тезисов научных конференций, том числе всероссийских и международных. Статья [99] опубликована в издании, включенном в международную базу цитирования Scopus. Работы [77, 86, 87] опубликованы в соавторстве. Соавтору в данных случаях принадлежат постановки задач.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф. – м. н., профессору А.И. Кожанову за содержательные лекции, ответственное руководство и постоянное участие, помощь в постановке задач, а так же д. ф. – м. н., профессору С.Е. Холодовскому за помощь и полезные советы при работе над диссертацией.

2. Краткое содержание работы

Первая часть диссертации посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, доказательству теорем существования и единственности решения, при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред. А также исследуется влияние параметров на единственность и неединственность регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), устанавливается существование собственных чисел и собственных функций для оператора Лапласа при задании на некоторой внутренней поверхности специальных условий сопряжения.

Известно, что классическая задача дифракции соответствует ситуации, в которой то или иное дифференциальное уравнение (возможно, с разрывными коэффициентами) рассматривается в двух областях с общим участком границы, и при этом на общем участке границы задаются условия непрерывности решения и потока (или же условия, обеспечивающие заданный скачок решения и потока) при переходе через поверхность раздела. Учитывая это обстоятельство, обобщенной задачей дифракции (задачей сопряжения), назовем такую задачу, в которой вместо условий непрерывности задаются условия сопряжения (склейки) с произвольными коэффициентами. Несмотря на то, что для уравнения второго порядка задачи дифракции изучаются давно, вопрос о влиянии на разрешимость задачи параметров — например, коэффициентов условий сопряжения — представляется на сегодняшний день изученным не полностью.

Как следует из обзора литературы, задачи сопряжения с теми или иными условиями, отличными от условий непрерывности, ранее изучались и как математические задачи, и как задачи, связанные с математическим моделированием. В настоящей работе задачи сопряжения рассматриваются с математической точки зрения.

В § 1.1 изучается разрешимость краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, доказываются теоремы существования и единственности решения, при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (-1, 1), Q^-$ и Q^+ — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0), Q^+ = \Omega \times (0, 1)$. Далее, пусть $p(x, y), c(x, y), f(x, y), \alpha_i(x), \beta_i(x)$ $(i = (\overline{1, 4}))$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, причем функция $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \bar{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)), (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 есть линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$ (свойства которых будут описаны позже). Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y)$

определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x,y)v_y) + c(x,y)v,$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x,y)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S(S = \Gamma \times (-1,1))$

$$u(x,y)_{|S} = 0,$$

на основаниях

$$u(x,-1) = 0, u(x,1) = 0, x \in \Omega;$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+:

$$\alpha_1(x)u(x,-0) + \alpha_2(x)u(x,+0) + \alpha_3(x)u_y(x,-0) + \alpha_4(x)u_y(x,+0)+$$

$$+(B_1 u)(x) = 0,$$

$$\beta_1(x)u(x,-0) + \beta_2(x)u(x,+0) + \beta_3(x)u_y(x,-0) + \beta_4(x)u_y(x,+0)+$$

$$+(B_2 u)(x) = 0.$$

Вследствие линейной независимости векторов $(\alpha_i(x)), (\beta_i(x))(i = (\overline{1,4}))$ данную задачу можно переформулировать как три отдельные задачи:

Задача I.

$$u_y(x,-0) = a_1(x)u(x,-0) + a_2(x)u(x,+0) + a_3(x)(B_1 u)(x) + a_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$u_y(x,+0) = b_1(x)u(x,-0) + b_2(x)u(x,+0) + b_3(x)(B_1 u)(x) + b_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Задача II.

$$u(x,-0) = a_1(x)u_y(x,-0) + a_2(x)u_y(x,+0) + a_3(x)(B_1u)(x) + a_4(x)(B_2u)(x),$$

$$u(x,+0) = b_1(x)u_y(x,-0) + b_2(x)u_y(x,+0) + b_3(x)(B_1u)(x) + b_4(x)(B_2u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Задача III.

$$u(x,-0) = a_1(x)u(x,+0) + a_2(x)u_y(x,-0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u,$$

$$u_y(x,+0) = b_1(x)u(x,+0) + b_2(x)u_y(x,-0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u,$$

$$x \in \Omega.$$

Для каждой из этих задач доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения. Доказательства теорем построены на получении априорных оценок, использовании метода продолжения по параметру, метода регуляризации и теорем вложения.

В § 1.2 исследуется влияние параметров на единственность и неединственность регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), устанавливается существование собственных чисел и собственных функций для оператора Лапласа при задании на некоторой внутренней поверхности специальных условий сопряжения.

Рассматривается ограниченная область Ω из пространства $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемой границей Γ, x - точка Ω, y есть точка интервала $(a,1)$, $-\infty < a < 0$, Q есть цилиндр $\Omega \times (a,1)$, $S = \Gamma \times (a,1)$ есть боковая граница Q, α, β - есть заданные действительные числа. Обозначим $Q_1 = \Omega \times (a,0), Q_2 = \Omega \times (0,1)$.

Задача на собственные значения с условиями сопряжения: *найти функцию $u(x,y)$ и число λ такие, что в цилиндрах Q_1 и Q_2 выполняется уравнение*

$$\Delta u = \lambda u \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x, y)$ условий

$$u(x, y)_{|S} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, a) = u(x, 1) = 0, x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0), u_y(x, +0) = \beta u_y(x, -0), x \in \Omega. \tag{4}$$

В доказанных в ходе исследования теоремах описаны все действительные собственные числа и все отвечающие конкретному собственному числу собственные функции задачи $(1) - (4)$. А также определены условия единственности и неединственности, существования и несуществования решений неоднородной задачи.

Следующая часть работы посвящена решению краевых задач для уравнения Лапласа в полуцилиндрах и полупространствах с классическими и обобщенными условиями сопряжения на трещинах и завесах. Применяемый метод позволяет выражать решения рассматриваемых задач в виде достаточно простых формул непосредственно через решения классических краевых задач в соответствующих полуцилиндрах (без условий сопряжения).

Во второй главе решены краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах D с классическими условиями сопряжения. В §§ 2.1-2.3 данной главы решены краевые задачи с граничными условиями 1-го, 2-го и 3-го рода на основании Q полуцилиндров при произвольных однородных условиях на боковой поверхности, когда плоскость разрыва проницаемости (плоскость сопряжения) параллельна основанию Q. В § 2.4 решены аналогичные краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах, когда плоскость сопряжения перпендикулярна основанию Q полуцилиндров, при этом полуцилиндры симметричны относительно указанной плоскости. В § 2.5 решены краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах, состоящих из четырех зон с двумя пересекающимися плоскостями сопряжения, рассмотренными в предыдущих параграфах. Решения всех рассмотренных задач выражены через решения классических задач в соответствующем однородном полуцилиндре с условием Дирихле или Неймана на его основании Q.

В § 2.1 рассмотрен двухслойный полуцилиндр $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$, кусочно-постоянной проницаемости k_i в D_i. В данном полуцилиндре рассмотрены краевые задачи с условием Дирихле (1-го рода) на его основании:

$$\Delta u_i = 0, \quad u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0,$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \partial_{x_i}^2 + \partial_y^2$ — оператор Лапласа, $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, $S = (x \in \partial Q) \times (y < 0)$– боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u] = \alpha \partial_n u + \beta u$, $\overrightarrow{n}$– вектор нормали к поверхности S. Так как $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y, то на поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках. При этом функция u_1 при $y \to -\infty$ удовлетворяет условию, обеспечивающему единственность соответствующей задачи Дирихле: в R^2 $u_1 = O(1)$ при $y \to -\infty$, в R^3 $u_1 \to 0$ при $y \to -\infty$ [5, 62]. В частном случае $Q = R^{m-1}$ область D является двухслойным полупространством, при этом граничные условия на боковой поверхности отсутствуют.

Решение данной задачи получено в виде

$$u_1(x, y) = (1 - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n F(x, y - 2nl), \quad y < -l,$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [F(x, y - 2nl) - \nu F(x, -y - 2l(n + 1))], \quad -l < y < 0,$$

где постоянная $\nu = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, функция $F(x, y)$ является решением соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на основании при сохранении граничной функции $f(x)$:

$$\Delta F = 0, \quad F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В § 2.2 рассмотрен класс краевых задач с граничным условием второго рода на основании двухслойного полуцилиндра $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$:

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0,$$

где k_i - проницаемость зоны D_i, оператор G определен в § 2.1, S - боковая поверхность полуцилиндра D. Решение получено в виде:

$$u_1(x, y) = (1 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n F(x, y - 2nl),$$

$$u_2(x, y) = F(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n [F(x, y - 2nl) + F(x, -y - 2nl)],$$

где $\mu = (k_2 - k_1)/(k_1 + k_2)$, $(|\mu| < 1)$, функция $F(x, y)$ является решением соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с граничной функцией $f(x)$:

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В § 2.3 в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ рассмотрен класс краевых задач вида:

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_2 + \gamma u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0,$$

где $\gamma > 0$ - постоянная, оператор G определен в § 2.1, S - боковая поверхность полуцилиндра D.

Решение получено в виде

$$u_1 = (1+\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p F(x, y - 2nl - z) dz,$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p [F(x, y - 2nl - z) +$$
$$+ \mu F(x, -y - 2l(n+1) - z)] dz,$$

где постоянная $\mu = (k_2 - k_1)/(k_1 + k_2)$, C_n^p — биномиальные коэффициенты, функция $F(x,y)$ является решением краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на его основании при сохранении граничной функции $f(x)$:

$$\Delta F = 0, \quad F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

.

В § 2.4 рассмотрен в пространстве $\mathbb{R}^m$ кусочно-однородный полуцилиндр $D = D^- \cup D^+$ проницаемости $k^{\pm}$ в $D^{\pm}$, $D^- = \{(x,y,\xi) : -r(\xi) < x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x,y,\xi) : 0 < x < r(\xi), y < 0\}$, где $r(\xi) \geq 0$ — заданная непрерывная функция. В данном случае полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$ разрыва проницаемости, при этом уравнение боковой поверхности $S^{\pm}$ полуцилиндра D имеет вид $x = \pm r(\xi)$. Рассмотрим в данном полуцилиндре $D = D^{-} \cup D^{+}$ класс краевых задач

$$\Delta\varphi^{\pm} = 0, \quad G[\varphi^{\pm}]_{|x=\pm r(\xi)} = 0,$$

$$G_0[\varphi^{-}]_{|y=0} = 0, \quad G_0[\varphi^{+}]_{|y=0} = f(x, \xi),$$

$$x = 0: \quad \varphi^{-} = \varphi^{+}, \quad k^{-}\partial_x\varphi^{-} = k^{+}\partial_x\varphi^{+},$$

где $G[\varphi^{\pm}] = \varphi^{\pm}$, $G[\varphi^{\pm}] = \partial_{n^{\pm}}\varphi^{\pm}$ или $G[\varphi^{\pm}] = \partial_{n^{\pm}}\varphi^{\pm} + \gamma_1\varphi^{\pm}$, $\gamma_1 = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на боковой поверхности S полуцилиндра D. Аналогично $G_0[\varphi^{\pm}] = \varphi^{\pm}$, $G_0[\varphi^{\pm}] = \partial_y\varphi^{\pm}$ или $G_0[\varphi^{\pm}] = \partial_y\varphi^{\pm} + \gamma\varphi^{\pm}$, $\gamma = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на основании $y = 0$ полуцилиндра D. Уравнение Лапласа выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, ..., \xi_{m-2}$. Решение данной задачи имеет вид:

$$\varphi^{-} = \frac{2k^{+}}{k^{-} + k^{+}} F(x, y), \quad x < 0,$$

$$\varphi^{+} = F(x, y) + \frac{k^{+} - k^{-}}{k^{+} + k^{-}} F(-x, y), \quad x > 0,$$

где $F(x, y)$ — решение задачи Дирихле в однородной полуплоскости с сохранением граничной функции:

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ f(x), x > 0. \end{cases}$$

В § 2.5 рассмотрен полуцилиндр D предыдущего пункта, состоящий из четырех зон: $D = D_1^{-} \cup D_2^{-} \cup D_1^{+} \cup D_2^{+}$, разделенных плоскостями $x = 0$ и $y = -l$ на зоны $D_i^{\pm}$ проницаемости k_i в D_i^{+} и $k_i p$ в D_i^{-}, где постоянная $p > 0$, $D_1^{-} = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, y < -l\}$, $D_1^{+} = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), y < -l\}$, $D_2^{-} = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, -l < y < 0\}$, $D_1^{+} = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), -l < y < 0\}$ (полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$).

Для потенциалов $\varphi_i^\pm$ в $D_i^\pm$ рассмотрены задачи в полуцилиндре D с граничным условием 1-го, 2-го или 3-го рода при $y = 0$:

$$\Delta\varphi_i^\pm = 0, \qquad G[\varphi_i^\pm]_{|x=\pm r(\xi)} = 0,$$

$$y = -l: \qquad \varphi_1^\pm = \varphi_2^\pm, \qquad k_1\partial_y\varphi_1^\pm = k_2\partial_y\varphi_2^\pm,$$

$$x = 0: \qquad \varphi_i^- = \varphi_i^+, \qquad p\partial_x\varphi_i^- = \partial_x\varphi_i^+,$$

с одним из граничных условий на основании полуцилиндра D:

$$\varphi_{2|y=0}^- = 0, \qquad \varphi_{2|y=0}^+ = f(x,\xi),$$

или

$$\partial_y\varphi_{2|y=0}^- = 0, \qquad \partial_y\varphi_{2|y=0}^+ = f(x,\xi),$$

или

$$\partial_y\varphi_2^- + \gamma\varphi_{2|y=0}^- = 0, \qquad \partial_y\varphi_2^+ + \gamma\varphi_{2|y=0}^+ = f(x,\xi).$$

Решения данных задач получены в виде композиции операторов

$$\varphi_i^- = \frac{2}{1+p}u_i(x,y,\xi), \qquad \varphi_i^+ = u_i(x,y,\xi) + \frac{1-p}{1+p}u_i(-x,y,\xi),$$

где функции $u_i(x,y,\xi)$, в зависимости от граничных условий на основании полуцилиндра, строятся по соответствующим итоговым формулам предыдущих параграфов.

Третья глава посвящена решению задач в полуцилиндрах с сильно и слабопроницаемыми пленочными включениями, параллельными основанию. Сильно проницаемые пленки названы трещинами, а слабо проницаемые пленки - завесами, при этом трещины моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой проницаемостью, завесы - бесконечно тонкими слоями с бесконечно малой проницаемостью [70].

В § 3.1 приведен вывод обобщенных условий сопряжения на трещинах и завесах.

В § 3.2 рассмотрен однородный полуцилиндр $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с сильно проницаемой трещиной $y = -l$, разделяющей область D на две зоны $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$. В полуцилиндре D рассмотрена задача

$$\Delta u_i = 0, \quad u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \qquad u_2 = u_1, \quad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A\partial_y^2 u_1,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0,$$

где $A > 0$ — параметр трещины, S — боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u] = \alpha\partial_n u + \beta u$, $\overrightarrow{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S, u_i — искомые потенциалы в D_i. На поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках, так как $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y. В данном случае проницаемость зон D_i одинаковая, т. е. $k_1 = k_2 = 1$.

Решение данной задачи получено в виде

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) \, dz,$$

$$u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) \\ - F(x, -y - 2nl - z)] \, dz,$$

где $\gamma = 2/A > 0$, $F(x, y)$ — решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без трещины:

$$\Delta F = 0 \quad F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В § 3.3 решена задача в полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ со слабопроницаемой завесой $y = -l$, разделяющей область D на две зоны $D_1 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ с условиями Дирихле на основании вида:

$$\Delta u_i = 0, \quad u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \qquad u_2 - u_1 = B\partial_y u_1, \quad \partial_y u_2 = \partial_y u_1,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0.$$

где B - параметр завесы, характеризующий ее малую толщину $(l \to 0)$ и малую проницаемость $(k_0 \to 0)$, при этом $B = \lim_{|k_0 \to 0, l \to 0} k_0/l$.

Решение данной задачи получено в виде:

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) \, dz,$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) -$$
$$- F(x, -y - 2nl - z)] \, dz,$$

где $\gamma = 2/B > 0$, $F(x,y)$ - решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без завесы:

$$\Delta F = 0, \quad F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В § 3.4 в полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$, где зоны D_i ($D_1 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$) разделены трещиной $y = -l$, с условиями Неймана на основании, рассмотрена задача вида

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_2 = u_1, \quad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A\partial_y^2 u_1,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0,$$

где $A > 0-$ параметр трещины, $S-$ боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u]$ определен в § 3.3.

Решение получено в виде:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl),$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k [\Phi_k(x, y - 2nl) + \Phi_k(x, -y - 2nl)],$$

где C_n^k- биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x,y) = F(x,y)$,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y - z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \; y < 0,$$

$F(x,y)$ - решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без трещины

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В § 3.5 рассмотрена задача в полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$, где зоны D_i ($D_1 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$) разделены слабо проницаемой завесой $y = -l$ с параметром B. Для потенциалов u_i в D_i решена задача

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_{2|y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_2 - u_1 = B \partial_y u_1, \quad \partial_y u_2 = \partial_y u_1,$$

$$G[u_i]_{|S} = 0.$$

Решение задачи имеет вид:

$$u_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl),$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k[\Phi_k(x, y-2nl) + \Phi_k(x, -y-2nl)],$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x,y) = F(x,y)$,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y-z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \; y < 0,$$

$F(x,y)$ — решение аналогичной задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$:

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F_{|y=0} = f(x),$$

$$G[F]_{|S} = 0.$$

В четвертой главе решены краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве (частный случай полуцилиндра) с трещиной (§ 4.1) и завесой (§ 4.2) перпендикулярной границе полупространства, когда на границе заданы условия 1-го, 2-го или 3-го рода. В § 4.3 решены краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с произвольной комбинацией двух пересекающихся трещин и завес, рассмотренных в § 4.1, § 4.2, при этом решения имеют вид композиции соответствующих операторов, полученных в §§ 3.2-3.5 и § 4.1, § 4.2.

В § 4.1 рассмотрена в полупространстве $D = \{(x,y,\xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ трещина в виде плоскости $x = 0$, разделяющей D на две зоны $D^-\{(x,y,\xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ и $D^+\{(x,y,\xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. На границе D (при $y = 0$) заданы произвольные граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$, что не умаляет общности. Для потенциалов $\varphi^\pm(x,y,\xi)$ в $D^\pm$ рассмотрен класс краевых задач вида

$$\Delta\varphi^\pm = 0,$$

$$G[\varphi^-]_{|y=0} = 0, \quad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x,\xi),$$

$$x = 0: \quad \varphi^+ = \varphi^-, \quad k^+\partial_x\varphi^+ - k^-\partial_x\varphi^- = A\partial_x^2\varphi^-,$$

где A — параметр трещины, оператор $G[\varphi^\pm] = \varphi^\pm$, $G[\varphi^\pm] = \partial_y\varphi^\pm$ или $G[\varphi^\pm] = \partial_y\varphi^\pm + h\varphi^\pm$, $h = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода, уравнение Лапласа выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, ..., \xi_{m-2}$. Решение имеет вид:

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(x-t,y,\xi)\,dt, \quad x \le 0,$$

$$\varphi^+ = F(x,y,\xi) - F(-x,y,\xi) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(-x-t,y,\xi)\,dt, \quad x \ge 0,$$

где $\beta = (k^+ + k^-)/A$, $r < \beta$, $F(x,y,\xi)$ — решение соответствующей задачи в однородном полупространстве (без трещины и при $k^+ = k^-$):

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0. \end{cases}$$

В § 4.2 рассмотрена в полупространстве $D = \{(x,y,\xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ завеса $x = 0$, разделяющая D на зоны $D^- = \{(x,y,\xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ и $D^+ = \{(x,y,\xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$) проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. На границе ∂D, как и выше, заданы граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$. Для потенциалов $\varphi^\pm(x,y,\xi)$ в $D^\pm$ решены краевые задачи вида

$$\Delta\varphi^\pm = 0,$$

$$G[\varphi^-]_{|y=0} = 0, \quad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x,\xi),$$

$$x = 0: \quad \varphi^+ - \varphi^- = Bk^-\partial_x\varphi^-, \quad k^+\partial_x\varphi^+ = k^-\partial_x\varphi^-,$$

где B — параметр завесы, оператор G определен в § 4.1.

Решение получено в виде:

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(x-t,y,\xi)\,dt, \quad x \le 0,$$

$$\varphi^+ = F(x,y,\xi)+F(-x,y,\xi)-\frac{2}{Bk^+}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(-x-t,y,\xi)\,dt, \quad x \ge 0,$$

где $\beta = (k^+ + k^-)/(Bk^-k^+)$, $r < \beta$, где $F(x,y,\xi)$ — решение соответствующей задачи в однородном полупространстве:

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0. \end{cases}$$

В § 4.3 решены краевые задачи в однородном полупространстве $D = \{(x,y,\xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, состоящем из четырех зон: $D = D_1^- \cup D_2^- \cup D_1^+ \cup D_2^+$, где $D_1^- = \{(x,y,\xi) : x < 0, y < -l, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_1^+ = \{(x,y,\xi) : x > 0, y < -l, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_2^- = \{(x,y,\xi) : x < 0, -l < y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_2^+ = \{(x,y,\xi) : x > 0, -l < y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ разделенных пересекающимися трещинами $x = 0$ и $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и A_2. На внешней границе D имеет место граничное условие 1-го рода, однородное при $x < 0$. Для потенциалов $\varphi_i^\pm(x,y,\xi)$ в $D_i^\pm$ задача примет вид

$$\Delta\varphi_i^\pm = 0, \quad \varphi^-_{2|y=0} = 0, \quad \varphi^+_{2|y=0} = f(x,\xi),$$

$$x = 0: \quad \varphi_i^+ = \varphi_i^-, \quad \partial_x\varphi_i^+ - \partial_x\varphi_i^- = A_1\partial_x^2\varphi_i^-,$$

$$y = -l: \quad \varphi_2^\pm = \varphi_1^\pm, \quad \partial_y\varphi_2^\pm - \partial_y\varphi_1^\pm = A_2\partial_y^\pm\varphi_1^\pm.$$

Если зоны $D_i^\pm$ разделены трещиной $x = 0$ и завесой $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и B_2, то условия сопряжения заменяются условиями вида

$$y = -l: \quad \varphi_2^\pm - \varphi_1^\pm = B_2\partial_y\varphi_2^\pm, \quad \partial_y\varphi_2^\pm = \partial_y\varphi_1^\pm.$$

Если зоны $D_i^{\pm}$ разделены завесой $x = 0$ и трещиной $y = -l$ с параметрами соответственно B_1 и A_2, то условия сопряжения заменяются условиями вида

$$x = 0: \quad \varphi_i^+ - \varphi_i^- = B_1 \partial_x \varphi_i^-, \quad \partial_x \varphi_i^+ = \partial_x \varphi_i^-.$$

Решение всех вышеперечисленных задач получено в виде композиции соответствующих операторов, полученных в главе 3.

Решения всех рассмотренных во второй, третьей и четвертой главах данной работы задач в кусочно-однородных полуцилиндрах D с трещинами и завесами при граничных условиях 1-го, 2-го или 3-го рода на основании Q выражены через решения классических краевых задач в соответствующих однородных полуцилиндрах Q с условиями Дирихле или Неймана на Q(на плоскости x, y область Q является полосой, квадрантом или полуплоскостью). Другими словами, решив некоторую классическую краевую задачу в однородном полуцилиндре D с условием Дирихле или Неймана на основании Q, по найденным формулам автоматически получаем решения серии краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах D с комбинациями трещин и завес и при различных комбинациях граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на Q. С другой стороны, каждая полученная формула также дает решения серии краевых задач для произвольных полуцилиндров с соответствующими условиями сопряжения на поверхностях разрыва проницаемости, на трещинах и завесах.

В "Заключении"перечислены основные результаты данной работы.

Глава 1

Некоторые задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа

1.1 О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (-1,1), Q^-$ и Q^+ — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1,0), Q^+ = \Omega \times (0,1)$. Далее, пусть $p(x,y), c(x,y), f(x,y), \alpha_i(x), \beta_i(x)$ $(i = (\overline{1,4}))$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [-1,1]$, причем функция $p(x,y)$ строго положительна при $(x,y) \in \bar{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)), (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 есть линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x,y)$ функцию $(B_i u)(x)$ (свойства которых будут описаны позже). Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x,y)v_y) + c(x,y)v,$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x,y) \tag{1.1.1}$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S = S_1 \bigcup S_2$, $S_1 = \Gamma \times (-1,0)$, $S_2 = \Gamma \times (0,1)$:

$$u(x,y)_{|S_1 \bigcup S_2} = 0, \tag{1.1.2}$$

на основаниях:

$$u(x,-1) = 0, \quad u(x,1) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1.3}$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+:

$$\alpha_1(x)u(x,-0) + \alpha_2(x)u(x,+0) + \alpha_3(x)u_y(x,-0) + \alpha_4(x)u_y(x,+0)+$$

$$+(B_1u)(x) = 0, \tag{1.1.4}$$

$$\beta_1(x)u(x,-0) + \beta_2(x)u(x,+0) + \beta_3(x)u_y(x,-0) + \beta_4(x)u_y(x,+0)+$$

$$+(B_2u)(x) = 0, \tag{1.1.5}$$

где $x \in \Omega$.

Условие линейной независимости векторов $(\alpha_i(x)),(\beta_i(x))$ $(i = (\overline{1,4}))$ означает, что в каждой точке x из $\overline{\Omega}$ один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) \\ \beta_1(x) & \beta_2(x) & \beta_3(x) & \beta_4(x) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда отличными от нуля являются один из миноров

$\Delta_1(x) = \alpha_3(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_3(x)$, $\Delta_2(x) = \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x)$,

$\Delta_3(x) = \alpha_1(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_1(x)$, $\Delta_4(x) = \alpha_2(x)\beta_3(x) - \alpha_3(x)\beta_2(x)$.

Более того, будем считать, что выполняется следующее

Условие А. Если существует точка x_0 из Ω, такая, что $\Delta_i(x_0) \neq 0$ для одного из чисел $i = 1, 2, 3, 4$, то выполняется $\Delta_i(x) \neq 0$ для всех x из $\overline{\Omega}$ и того же числа i.

При выполнении условия А задача сопряжения (1.1.1)-(1.1.5) может быть переформулирована как одна из следующих задач.

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u_y(x, -0) = a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u(x, +0) + a_3(x)(B_1 u)(x) + a_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u(x, +0) + b_3(x)(B_1 u)(x) + b_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Задача II. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)(B_1 u)(x) + a_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$u(x, +0) = b_1(x)u_y(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)(B_1 u)(x) + b_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Задача III. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u(x, +0) + a_2(x)u_y(x, -0) + a_3(x)(B_1 u)(x) + a_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0) + b_3(x)(B_1 u)(x) + b_4(x)(B_2 u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Задача IV. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u(x,+0) = a_1(x)u(x,-0) + a_2(x)u_y(x,+0) + a_3(x)(B_1u)(x) + a_4(x)(B_2u)(x),$$

$$u_y(x,-0) = b_1(x)u(x,-0) + b_2(x)u_y(x,+0) + b_3(x)(B_1u)(x) + b_4(x)(B_2u)(x),$$

$$x \in \Omega.$$

Уточним, что здесь функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$, $b_4(x)$ для каждой из задач вполне определенно вычисляются через исходные функции $\alpha_i(x), \beta_i(x)$, $i = \overline{1,4}$. Очевидно, что задачи III и IV однотипные. Далее будет рассмотрена только одна из них, а именно задача III. Кроме того, в данных задачах предполагается, что функция $a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x)$ может обращаться в нуль, в том числе и тождественно, при $x \in \overline{\Omega}$.

В заключение постановки задачи определим требуемое ниже пространство. Именно, обозначим через V следующее множество функций:

$$V = \{v(x,y) : v(x,y) \in W_2^2(Q^-) \cup W_2^2(Q^+)\}.$$

Прежде, чем сформулировать теорему 1.1.1, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$\bar{a_3} = \max_{\overline{\Omega}}(p(x,+0)|a_3(x)|), \quad \bar{a_4} = \max_{\overline{\Omega}}(p(x,-0)|a_4(x)|),$$

$$\bar{b_3} = \max_{\overline{\Omega}}(p(x,+0)|b_3(x)|), \quad \bar{b_4} = \max_{\overline{\Omega}}(p(x,-0)|b_4(x)|),$$

$$A_1 = \frac{\gamma_0(m_{11}\overline{b}_3 + m_{12}\overline{b}_4) + m_{11}\overline{a}_3 + m_{12}\overline{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2\gamma_0(\overline{b}_3 + \overline{b}_4)}{2},$$

$$A_2 = \frac{\gamma_0(m_{21}\overline{b}_3 + m_{22}\overline{b}_4) + m_{21}\overline{a}_3 + m_{22}\overline{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2(\overline{a}_3 + \overline{a}_4)}{2},$$

$$A_3 = \frac{\gamma_0(m_{31}\overline{b}_3 + m_{32}\overline{b}_4) + m_{31}\overline{a}_3 + m_{32}\overline{a}_4}{2},$$

$$A_4 = \frac{\gamma_0(m_{41}\overline{b}_3 + m_{42}\overline{b}_4) + m_{41}\overline{a}_3 + m_{42}\overline{a}_4}{2},$$

$$\Phi(\xi,\eta) = [\gamma_0 b_2(x)p(x,+0) - A_1]\xi^2 + [\gamma_0 b_1(x)p(x,+0) - a_2(x)p(x,-0)]\xi\eta -$$

$$-[a_1(x)p(x,-0) + A_2]\eta^2$$

(γ_0 и δ_0 здесь есть положительные постоянные, точное значение которых будет указано ниже).

Обсудим вначале вопрос о единственности решений задач сопряжения I-III.

Теорема 1.1.1 *Пусть выполняются условия:*

$$p(x,y) \in C^1(\overline{Q^-}), \quad p(x,y) \geq p_1 > 0, \quad (x,y) \in \overline{Q^-}, \tag{1.1.6}$$

$$p(x,y) \in C^1(\overline{Q^+}), \quad p(x,y) \geq p_2 > 0, \quad (x,y) \in \overline{Q^+}, \tag{1.1.7}$$

$$\|B_i v\|^2_{L_2(\Omega)} \leq m_{1i}\|v(x,+0)\|^2_{L_2(\Omega)} + m_{2i}\|v(x,-0)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+m_{3i}\|v\|^2_{L_2(Q^-)} + m_{4i}\|v\|^2_{L_2(Q^+)}, \quad v(x,y) \in V, i = 1,2, \tag{1.1.8}$$

$$c(x,y) \leq -c_0 \leq 0, \quad (x,y) \in \overline{Q}^{\pm}, \tag{1.1.9}$$

$$\exists\gamma_0 > 0, \exists\delta_0 > 0 : \Phi(\xi,\eta) \geq 0, \quad \forall(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad c(x,y) + A_3/\delta_0^2 \leq 0,$$

$$c(x,y) + A_4/\delta_0^2 \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in [-1,1]. \tag{1.1.10}$$

Тогда задача I в пространстве V не может иметь более одного решения.

Доказательство. Достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1.1.1) тождественно равна нулю, то выполняется $u(x,y) \equiv 0$. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q^-} uLudxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} uLudxdy = 0$$

и выделим в нем неотрицательно определенные слагаемые.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$-\int\limits_{Q^-} uLudxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+} uLudxdy=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-} u_{x_i}^2dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+} u_{x_i}^2dxdy-\int\limits_{Q^-} c(x,y)u^2dxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+} c(x,y)u^2dxdy+$$

$$+\int\limits_{Q^-} p(x,y)u_y^2dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+} p(x,y)u_y^2dxdy+$$

$$+\int\limits_{\partial Q^-} p(x,y)u\cdot u_y\nu_y dS+\gamma_0\int\limits_{\partial Q^+} p(x,y)u\cdot u_y\nu_y dS. \qquad (1.1.11)$$

Используя условия сопряжения, преобразуем два последних слагаемых равенства (1.1.11):

$$\int\limits_{\partial Q^-} p(x,y)u\cdot u_y\nu_y dS+\gamma_0\int\limits_{\partial Q^+} p(x,y)u\cdot u_y\nu_y dS=$$

$$=-\int\limits_{\Omega} p(x,-0)u(x,-0)u_y(x,-0)dx+\gamma_0\int\limits_{\Omega} p(x,+0)u(x,+0)u_y(x,+0)dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)u^2(x,+0)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]u(x,+0)u(x,-0)dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega} p(x,-0)a_1(x)u^2(x,-0)]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_3(x)p(x,+0)u(x,+0)-a_3(x)p(x,-0)u(x,-0)]B_1udx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_4(x)p(x,+0)u(x,+0)-a_4(x)p(x,-0)u(x,-0)]B_2udx.$$

Применяя введенные ранее обозначения, а также учитывая условие (1.1.8), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^-} u_{x_i}^2dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^+} u_{x_i}^2dxdy+$$

$$+\int\limits_{Q^-} p(x,y)u_y^2dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+} p(x,y)u_y^2dxdy+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)+A_1]u^2(x,+0)+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]u(x,+0)u(x,-0)dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega}[p(x,-0)a_1(x)-A_2]u^2(x,-0)dx-$$

$$-\int\limits_{Q^-}[c(x,y)-A_3/\delta_0^2]u^2(x,y)dxdy-$$

$$-\gamma_0\int\limits_{Q^+}[c(x,y)-A_4/\delta_0^2]u^2(x,y)dxdy\le 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^-}u_{x_i}^2dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^+}u_{x_i}^2dxdy+$$

$$+\int\limits_{Q^-} p(x,y)u_y^2dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+} p(x,y)u_y^2dxdy-$$

$$-\int\limits_{Q^-} c(x,y)u^2dxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+} c(x,y)u^2dxdy\le 0. \tag{1.1.12}$$

Отсюда очевидным образом получаем $u(x,y)\equiv 0$ в Q. Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 1.1.2 введем дополнительные обозначения:

$$A_{11}=\frac{\gamma_0(\bar b_3+\bar b_4)}{2},\quad A_{21}=\frac{\bar a_3+\bar a_4}{2},$$

$$A_5=\frac{\gamma_0(m_{11}\bar b_3+m_{12}\bar b_4)+m_{11}\bar a_3+m_{12}\bar a_4}{2},$$

$$A_6=\frac{\gamma_0(m_{21}\bar b_3+m_{22}\bar b_4)+m_{21}\bar a_3+m_{22}\bar a_4}{2},$$

$$\Phi_1(\xi,\eta)=[\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)-A_{11}\delta_1^2]\xi^2+[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]\xi\eta-$$

$$-[a_1(x)p(x,-0)+A_{21}\delta_1^2]\eta^2.$$

Теорема 1.1.2 *Пусть выполняются условия (1.1.6)-(1.1.9), а также условия*

$$\exists\gamma_0 > 0 \exists\delta_1 > 0 : \Phi_1(\eta,\xi) \geq 0, \quad (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$p_1 - A_5/\delta_1^2 > 0, \quad p_2 - A_6/\delta_1^2 > 0, \quad c(x,y) + A_3/\delta_1^2 \leq 0, \quad c(x,y) + A_4/\delta_1^2 \leq 0,$$

$$x \in \overline{\Omega}, y \in [-1,1].$$

Тогда задача II в пространстве V не может иметь более одного решения.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.1.1, в данном случае достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1.1.1) тождественно равна нулю, то $u(x,y) \equiv 0$. Используя условия сопряжения, учитывая условие (1.1.8) и применяя очевидные неравенства

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,-0)dx \leq \int\limits_{Q^-} u_y^2(x,y)dxdy, \quad \int\limits_{\Omega} u^2(x,+0)dx \leq \int\limits_{Q^+} u_y^2(x,y)dxdy, \tag{1.1.13}$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dxdy + \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dxdy +$$

$$+ \int\limits_{Q^-} [p(x,y) + A_5/\delta_1^2] u_y^2 dxdy + \gamma_0 \int\limits_{Q^+} [p(x,y) + A_6/\delta_1^2] u_y^2 dxdy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x,+0) + A_{11}\delta_1^2] u_y^2(x,+0) -$$

$$- \int\limits_{\Omega} [p(x,-0) a_1(x) + A_{21}\delta_1^2] u_y^2(x,-0) dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x,+0) - a_2(x) p(x,-0)] u(x,+0) u_y(x,-0) dx -$$

$$- \int\limits_{Q^-} [c(x,y) + A_3/\delta_1^2] u^2(x,y) dxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} [c(x,y) + A_4/\delta_1^2] u^2(x,y) dxdy \leq 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство (1.1.12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x,y)\equiv 0$ в Q. Теорема доказана.

Введем обозначение

$$\Phi_2(\xi,\eta)=[\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)-A_{11}\delta_2^2]\xi^2+[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]\xi\eta-$$
$$-[a_1(x)p(x,-0)+A_{21}\delta_2^2]\eta^2.$$

Теорема 1.1.3 *Пусть выполняются условия (1.1.6)-(1.1.9), а также условия*

$$\exists\gamma_0>0\exists\delta_2>0:\Phi_2(\eta,\xi)\geq 0,\quad (\eta,\xi)\in\mathbb{R}^2,$$
$$p_1-A_5/\delta_2^2>0,\quad p_2-A_6/\delta_2^2>0,\quad c(x,y)+A_3/\delta_2^2\leq 0,\quad c(x,y)+A_4/\delta_2^2\leq 0,$$
$$x\in\overline{\Omega},\quad y\in[-1,1].$$

Тогда задача III в пространстве V не может иметь более одного решения.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1.1 с учетом условия (1.1.8) получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^-}u_{x_i}^2dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\int_{Q^+}u_{x_i}^2dxdy+$$
$$+\int\limits_{Q^-}[p(x,y)+A_5/\delta_2^2]u_y^2dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+}[p(x,y)+A_6/\delta_2^2]u_y^2dxdy+$$
$$+\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)+A_{11}\delta_2^2]u_y^2(x,+0)-$$
$$-\int\limits_{\Omega}[p(x,-0)a_1(x)+A_{21}\delta_2^2]u_y^2(x,-0)dx-$$
$$-\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]u(x,+0)u_y(x,-0)dx-$$
$$-\int\limits_{Q^-}[c(x,y)+A_3/\delta_2^2]u^2(x,y)dxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+}[c(x,y)+A_4/\delta_2^2]u^2(x,y)dxdy\leq 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство (1.1.12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x,y)\equiv 0$ в Q. Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем дополнительные обозначения:

$$\tilde{a_3}=\max_{\overline{\Omega}}(|a_3(x)|),\ \tilde{a_4}=\max_{\overline{\Omega}}(|a_4(x)|),\ \tilde{b_3}=\max_{\overline{\Omega}}(|b_3(x)|),\ \tilde{b_4}=\max_{\overline{\Omega}}(|b_4(x)|).$$

Теорема 1.1.4 *(теорема существования). Пусть выполняются условия (1.1.6)-(1.1.10), а также следующие условия:*

$$c(x,y)\in C(\bar{Q}),\quad a_i(x)\in C^2(\overline{\Omega}),\quad i=1,2, \tag{1.1.14}$$

существуют операторы $\tilde{B}_i$ такие, что для всех $v(x,y)\in V$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(B_i v)=B_i v_{x_j}+\tilde{B}_i v,$$

$$\|\tilde{B}_i v\|^2_{L_2(\Omega)}\le \tilde{m}_{1i}\|v(x,+0)\|^2_{L_2(\Omega)}+\tilde{m}_{2i}\|v(x,-0)\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\tilde{m}_{3i}\|v\|^2_{L_2(Q^-)}+\tilde{m}_{4i}\|v\|^2_{L_2(Q^+)}, v(x,y)\in V,\quad i=1,2, \tag{1.1.15}$$

существуют положительные числа $\delta_{01}-\delta_{04}$ такие,что верны неравенства

$$2-(1+\tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2-(1+\tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2-\tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_0\tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right)-\tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_0\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}}\right)>0,$$

$$2-(1+\tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2-(1+\tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2-\tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_0\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right)-\tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_0\tilde{b}_3^2}{\delta_{01}}\right)>0. \tag{1.1.16}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x,y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи I.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач.

Задача I_λ. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u_y(x,-0) = \lambda[a_1(x)u(x,-0)+a_2(x)u(x,+0)+a_3(x)(B_1u)(x)+a_4(x)(B_2u)(x)],$$

$$u_y(x,+0) = \lambda[b_1(x)u(x,-0)+b_2(x)u(x,+0)+b_3(x)(B_1u)(x)+b_4(x)(B_2u)(x)]. \tag{1.1.17}$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых задача I_λ разрешима в пространстве V. Согласно теореме о методе продолжения по параметру [63], множество Λ совпадает со всем отрезком $[0,1]$, если оно непустое, открытое и замкнутое (в топологии метрического пространства $X = [0,1]$). Совпадение множества Λ с отрезком $[0,1]$ будет означать, что задача I_λ, то есть исходная задача I, разрешима в пространстве V.

Непустота Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему [39].

Открытость и замкнутость множества Λ будет иметь место, если для всевозможных решений задачи I_λ из пространства V выполняется априорная оценка

$$\|u\|_V \leq R_0$$

с постоянной K, не зависящей от функции $u(x,y)$ и от λ. Покажем, что требуемая оценка имеет место.

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q^-} uLudxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} uLudxdy = -\int\limits_{Q^-} uf(x,y)dxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} uf(x,y)dxdy. \tag{1.1.18}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\sum_{i=0}^{n} \int\limits_{Q^-} u_{x_i}^2 dxdy + \gamma_0 \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{Q^+} u_{x_i}^2 dxdy - \int\limits_{Q^-} c(x,y)u^2dxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} c(x,y)u^2dxdy +$$

$$+\int\limits_{Q^-} p(x,y)u_y^2dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+} p(x,y)u_y^2dxdy+\int\limits_{\partial Q^-} p(x,y)u\cdot u_y\upsilon_y dS+$$

$$\gamma_0\int\limits_{\partial Q^+} p(x,y)u\cdot u_y\upsilon_y dS=-\int\limits_{Q^-} uf(x,y)dxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+} uf(x,y)dxdy.$$

Учитывая, что имеют место неравенства

$$\int\limits_{Q^-} u^2(x,y)dxdy\le\int\limits_{Q^-} u_y^2(x,y)dxdy,\int\limits_{Q^+} u^2(x,y)dxdy\le\int\limits_{Q^+} u_y^2(x,y)dxdy,$$

применив к правой части неравенство Юнга и используя условия (1.1.16) задачи I_λ, а также условия теоремы, получим

$$\sum_{i=1}^n\int_{Q^-} u_{x_i}^2dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^n\int_{Q^+} u_{x_i}^2dxdy+\int\limits_{Q^-} p(x,y)u_y^2dxdy+$$

$$+\gamma_0\int\limits_{Q^+} p(x,y)u_y^2dxdy+\lambda\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_2(x)p(x,+0)+A_1]u^2(x,+0)+$$

$$+\lambda\int\limits_{\Omega}[\gamma_0 b_1(x)p(x,+0)-a_2(x)p(x,-0)]u(x,+0)u(x,-0)dx-$$

$$-\lambda\int\limits_{\Omega}[p(x,-0)a_1(x)-A_2]u^2(x,-0)dx-$$

$$-\int\limits_{Q^-}[c(x,y)+A_3/\delta_0^2]u^2(x,y)dxdy-\gamma_0\int\limits_{Q^+}[c(x,y)+A_4/\delta_0^2]u^2(x,y)dxdy\le$$

$$\le\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{Q^-} f^2dxdy+\frac{\gamma_0}{2\delta^2}\int\limits_{Q^+} f^2dxdy+\frac{\delta^2}{2}\int\limits_{Q^-} u_y^2dxdy+\frac{\gamma_0\delta^2}{2}\int\limits_{Q^+} u_y^2dxdy.$$

Используя условия (1.1.6)-(1.1.9), получим неравенство

$$k\left\{\sum_{i=1}^n\int\limits_{Q^-} u_{x_i}^2dxdy+\int\limits_{Q^-} u_y^2dxdy+\sum_{i=1}^n\int\limits_{Q^+} u_{x_i}^2dxdy+\int\limits_{Q^+} u_y^2dxdy\right\}\le$$

$$\le K\left(\int\limits_{Q^-} f^2(x,y)dxdy+\int\limits_{Q^+} f^2(x,y)dxdy\right),$$

в котором $k = min\left(1, \frac{p_0}{2}, \gamma, \frac{\gamma_0 p_0}{2}\right) > 0, K = max\left(\frac{1}{2p_0}, \frac{\gamma_0}{2p_0}\right)$.

Отсюда первая оценка имеет вид:

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q^-)} + \|u\|^2_{W_2^1(Q^+)} \leq K_1 \left(\int\limits_{Q^-} f^2(x,y)dxdy + \int\limits_{Q^+} f^2(x,y)dxdy \right). \quad (1.1.19)$$

Для получения второй априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q^-} u_{yy} Ludxdy + \gamma_0 \int\limits_{Q^+} u_{yy} Ludxdy = \int\limits_{Q^-} u_{yy} f(x,y)dxdy + \gamma_0 \int\limits_{Q^+} u_{yy} f(x,y)dxdy. \quad (1.1.20)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^-} u^2_{x_i y} dxdy + \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^+} u^2_{x_i y} dxdy - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_i y}(x,-0) u_{x_i}(x,-0)dx +$$

$$+\gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_i y}(x,+0) u_{x_i}(x,+0)dx + \int\limits_{Q^-} p u^2_{yy} dxdy + \gamma_0 \int\limits_{Q^+} p u^2_{yy} dxdy =$$

$$= \int\limits_{Q^-} f(x,y) u_{yy} dxdy + \gamma_0 \int\limits_{Q^+} f(x,y) u_{yy} dxdy - \int\limits_{Q^-} p_y u_y u_{yy} dxdy -$$

$$-\gamma_0 \int\limits_{Q^+} p_y u_y u_{yy} dxdy - \int\limits_{Q^-} c(x,y) u u_{yy} dxdy - \gamma_0 \int\limits_{Q^+} c(x,y) u u_{yy} dxdy. \quad (1.1.21)$$

Преобразуем отдельно третье и четвертое слагаемые левой части (1.1.21), используя условия сопряжения (1.1.17).

$$- \int\limits_{\Omega} u_{x_i y}(x,-0) u_{x_i}(x,-0)dx + \gamma_0 \int\limits_{\Omega} u_{x_i y}(x,+0) u_{x_i}(x,+0)dx =$$

$$= \lambda \int\limits_{\Omega} \Big[\gamma_0 b_2(x) u^2_{x_i}(x,+0) + [\gamma_0 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i}(x,-0) u_{x_i}(x,+0) -$$

$$-a_1(x) u^2_{x_i}(x,-0) - (u_{x_i}(x,-0) u(x,-0) a_{1x_i}(x) - u_{x_i}(x,-0) u(x,+0) a_{2x_i}(x) \Big] -$$

$$-\lambda \int\limits_{\Omega} \Big(u_{x_i}(x,-0) \frac{\partial}{\partial x_i}(B_1 u) a_3(x) - u_{x_i}(x,-0) B_1 u a_{3x_i}(x) -$$

$$u_{x_i}(x,-0)\frac{\partial}{\partial x_i}(B_2u)a_4(x)-u_{x_i}(x,-0)B_2ua_{4x_i}(x)+$$
$$+\gamma_0\big(u_{x_i}(x,+0)u(x,-0)b_{1x_i}(x)+u_{x_i}(x,+0)u(x,+0)b_{2x_i}(x)+$$
$$+u_{x_i}(x,+0)\frac{\partial}{\partial x_i}(B_1u)b_3(x)+u_{x_i}(x,+0)B_1ub_{3x_i}(x)+$$
$$+u_{x_i}(x,+0)\frac{\partial}{\partial x_i}(B_2u)b_4(x)+u_{x_i}(x,+0)B_2ub_{4x_i}(x)\big)\Big)dx.$$

Все слагаемые правой части данного равенства, кроме первого, оцениваются с помощью неравенства Юнга, неравенств (1.1.13), примененных для производных $u_{x_i}(x,-0)$, $u_{x_i}(x,+0)$, условий (1.1.8), (1.1.15) на операторы B_1, B_2. Далее, слагаемые в правой части (1.1.20) оцениваются сверху с помощью неравенства Юнга и первой оценки. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\gamma_0u^2_{x_i}(x,+0)b_2(x)+u_{x_i}(x,-0)u_{x_i}(x,+0)[\gamma_0b_1(x)-a_2(x)]-$$
$$-u^2_{x_i}(x,-0)a_1(x)\Big)dx+\frac{p_1}{2}\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy+\frac{\gamma_0p_2}{2}\int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_iy}\left(1-\frac{(1+\tilde a_3^2)\delta_{01}^2}{2}-\frac{(1+\tilde a_4^2)\delta_{02}^2}{2}-\tilde m_{21}\left[\frac{\tilde a_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_0\tilde b_3^2}{\delta_{03}^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\tilde m_{32}\left[\frac{\tilde a_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_0\tilde b_4^2}{\delta_{04}}\right]\right)dxdy\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_iy}\left(1-\frac{(1+\tilde b_3^2)\delta_{03}^2}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1+\tilde b_4^2)\delta_{04}^2}{2}-\tilde m_{12}\left[\frac{\tilde a_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_0\tilde b_4^2}{\delta_{04}^2}\right]-\tilde m_{11}\left[\frac{\tilde a_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_0-\tilde b_3^2}{\delta_{01}}\right]\right)dxdy\le$$
$$\le\delta\left[\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy\right]+M.$$

Отсюда и из условий (1.1.16) следует

$$\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_iy}dxdy+\gamma_0\int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy+\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_iy}dxdy\le M_1.$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q^-} u^2_{x_ix_j}dxdy+\gamma_0\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q^+} u^2_{x_ix_j}dxdy\le M_2$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [39]. Из полученных трех оценок следует искомая оценка

$$\|u\|_V\le R_0. \tag{1.1.22}$$

Оценка (1.1.22) означает, что задача I_λ разрешима в пространстве V для всех λ из отрезка [0,1] - то ест ь и для $\lambda=1$. Но тогда и искомая задача I будет разрешима в пространстве V. Теорема доказана.

Замечание. Для решения $u(x,y)$ задачи I имеют место включения $u_{x_iy}(x,-0)\in L_2(\Omega)$, $u_{x_iy}(x,+0)\in L_2(\Omega), i=1,..,n$ - это следует из выполнения условий сопряжения и из того, что в условиях сопряжения каждое слагаемое правой части имеет обобщенную производную по переменной x_i.

Для x из $\bar\Omega$ и переменных ξ и η определим квадратичную по (ξ,η) форму $\Phi_3(x,\xi,\eta)$:

$$\Phi_3(x,\xi,\eta)=-a_1(x)\xi^2+[\gamma_1b_1(x)-a_2(x)]\xi\eta+\gamma_1b_2(x)\eta^2,$$

(γ_1 - положительное число, роль которого будет пояснена ниже).

Теорема 1.1.5 *(теорема существования). Пусть выполняются условия (1.1.6)-(1.1.9), (1.1.14), (1.1.15) а также следующие условия:*

$$a_1(x)\le 0,\quad b_2(x)\ge 0,\quad a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)\le 0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

$$\exists\gamma_1>0:\Phi_3(x,\xi,\eta)\ge\varphi_1(x)\xi^2+\varphi_2(x)\eta^2,\quad \varphi_1(x)\ge 0,\varphi_2(x)\ge 0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

$$|a_{2x_i}(x)|\le C\sqrt{\varphi_1(x)},\ |b_{1x_i}(x)|\le C\sqrt{\varphi_2(x)},\ C=const,\ x\in\overline{\Omega},\ i=1,..,n,$$

существуют положительные числа $\delta_{01}-\delta_{04}$ такие,что выполняется

$$2-(1+\tilde a_3^2)\delta_{01}^2-(1+\tilde a_4^2)\delta_{02}^2-\tilde m_{21}\left(\frac{\tilde a_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_1\tilde b_3^2}{\delta_{03}^2}\right)-\tilde m_{32}\left(\frac{\tilde a_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_1\tilde b_4^2}{\delta_{04}}\right)>0;$$

$$2-(1+\tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2-(1+\tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2-\tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2}+\frac{\gamma_1\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right)-\tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2}+\frac{\gamma_1\tilde{b}_3^2}{\delta_{01}}\right)>0.$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x,y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи II.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $a_j(x)\equiv 0, b_j(x)\equiv 0, j=3,4$. Пусть ε есть положительное число. Обозначим

$$a_{1\varepsilon}(x)=a_1(x)-\varepsilon, b_{2\varepsilon}(x)=b_2(x)+\varepsilon.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения (1.1.1) и такую, что выполняются условия (1.1.2), (1.1.3), а также условия

$$u(x,-0)=a_{1\varepsilon}(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_y(x,+0), x\in\Omega,$$

$$u(x,+0)=b_1(x)u_y(x,-0)+b_{2\varepsilon}(x)u_y(x,+0), x\in\Omega. \quad (1.1.23)$$

Поскольку функция $a_{1\varepsilon}(x)b_{2\varepsilon}(x)-a_2(x)b_1(x)$ строго отрицательна в $\bar{\Omega}$, то от (1.1.22), (1.1.23) можно перейти к соотношениям

$$u_y(x,-0)=\tilde{a}_{1\varepsilon}(x)u(x,-0)+\tilde{a}_{2\varepsilon}(x)u(x,+0), x\in\Omega,$$

$$u_y(x,+0)=\tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x,-0)+\tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x,+0), x\in\Omega \quad (1.1.24)$$

- то есть к условиям задачи I. Согласно теореме 4, рассматриваемая задача имеет решение $u^\varepsilon(x,y)$, принадлежащее пространству V. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,y)\}$ имеют место оценки, которые позволят перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. При получении оценок индекс "ε"у решения опустим.

Для решений задачи (1.1.1)-(1.1.3), (1.1.23) имеет место оценка (1.1.19) (что показывается дословным повторением доказательства той же оценки в теореме 4). Далее, преобразовав равенство (1.1.20) к виду (1.1.21), рассмотрим отдельно его третье и четвертое слагаемые. Используя условия сопряжения (1.1.23), получим

$$-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_iy}(x,-0)u_{x_i}(x,-0)dx+\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_iy}(x,+0)u_{x_i}(x,+0)dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[\gamma_1 b_2(x)u^2_{x_i,y}(x,+0)+[\gamma_1 b_1(x)-a_2(x)]u_{x_i,y}(x,-0)u_{x_i,y}(x,+0)-$$

$$-a_1(x)u^2_{x_i,y}(x,-0)\Big]dx+\int\limits_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}\Delta a_1(x)u^2_y(x,-0)-\frac{1}{2}\gamma_1\Delta b_2(x)u^2_y(x,+0)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}a_{2x_i}(x)u_y(x,+0)u_{x_iy}(x,-0)+\gamma_1\sum_{i=1}^{n}b_{1x_i}(x)u_y(x,-0)u_{x_iy}(x,+0)+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(u^2_{x_iy}(x,-0)+\gamma_1 u^2_{x_iy}(x,+0)\Big]dx.$$

В результате придем к равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[b_2(x)\gamma_1 u^2_{x_iy}(x,+0)+[\gamma_1 b_1(x)-a_2(x)]u_{x_iy}(x,-0)u_{x_iy}(x,+0)-$$

$$-a_1(x)u^2_{x_iy}(x,-0)\Big]dx+\frac{p_1}{2}\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy+\frac{\gamma_1 p_2}{2}\int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_iy}dxdy+\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_iy}dxdy+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[u^2_{x_iy}(x,-0)+\gamma_1 u^2_{x_iy}(x,+0)\Big]dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Big[-\frac{1}{2}\Delta_x a_1(x)u^2_y(x,-0)+\frac{1}{2}\Delta_x b_1(x)u^2_y(x,+0)\Big]dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[a_{2x_i}u_y(x,+0)u_{x_iy}(x,-0)+\gamma_1 b_{1x_i}u_y(x,+0)u_{x_iy}(x,-0)\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{Q^-}c(x,y)u_{yy}udxdy-\gamma_1\int\limits_{Q^+}c(x,y)u_{yy}udxdy.$$

Применяя далее неравенство Юнга, используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (1.1.13), получим оценку

$$\int\limits_{Q^-} u_{yy}^2 dxdy + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^-} u_{x_i y}^2 dxdy + \int\limits_{Q^+} u_{yy}^2 dxdy + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^+} u_{x_i y}^2 dxdy +$$

$$+\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big(u_{x_i y}^2(x,-0) + u_{x_i y}^2(x,+0) \Big) dx \leq M_3. \qquad (1.1.25)$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dxdy + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dxdy \leq M_4. \qquad (1.1.26)$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [39].

Из оценок (1.1.19), (1.1.25) и (1.1.26), из свойств рефлексивности гильбертова пространства и из теорем вложения (см. [39],[58]) следует, что существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_m\}$, функциональная последовательность

$\{u_m(x,y)\}, (u_m(x,y) = u^{\varepsilon_m}(x,y))$ функций из семейства $\{u^\varepsilon(x,y)\}$, и существует функция $u(x,y)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $u_m(x,y) \to u(x,y)$ слабо в пространствах $W_2^2(Q^-)$ и $W_2^2(Q^+)$, $u_m(x,-0) \to u(x,-0)$, $u_m(x,+0) \to u(x,+0)$, $u_{my}(x,-0) \to u_y(x,-0)$, $u_{my}(x,+0) \to u_y(x,+0)$, $\varepsilon_m u_{my}(x,-0) \to 0$, $\varepsilon_m u_{my}(x,+0) \to 0$ почти всюду в Ω.

Из этих сходимостей следует, что для предельной функции $u(x,y)$ в областях Q^- и Q^+ будет выполняться уравнение (1.1.1), будут выполняться условия (1.1.2), (1.1.3), а также требуемые условия сопряжения задачи II.

В случае ненулевых функций $a_3(x), b_3(x), a_4(x)$ и $b_4(x)$ доказательство приводится вполне аналогично вышеприведенному (лишь с более громоздкими выкладками).

Теорема доказана.

Для x из $\bar{\Omega}$ и переменных ξ и η определим квадратичную по (ξ, η) форму $\Phi_4(x, \xi, \eta)$:

$$\Phi_4(x, \xi, \eta) = -a_2(x)\xi^2 + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)]\xi\eta + \gamma_2 b_1(x)\eta^2,$$

(γ_2 - положительное число, роль которого будет пояснена ниже).

Теорема 1.1.6 *(теорема существования). Пусть выполняются условия (1.1.6)-(1.1.9), (1.1.14), (1.1.17) а также следующие условия*

$$a_2(x) \leq 0, \forall\ x \in \overline{\Omega},$$

$$\exists \gamma_2 > 0 : \Phi_4(x, \xi, \eta) \geq \psi_1(x)\xi^2 + \psi_2(x)\eta^2, \psi_1(x) \geq 0, \psi_2(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega},$$

$$|a_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_1(x)}, |b_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_2(x)}, C = const, x \in \bar{\Omega}, i = 1, .., n;$$

существуют положительные числа $\delta_{01} - \delta_{04}$ такие,что выполняется

$$2 - (1 + \tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right) - \tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}}\right) > 0;$$

$$2 - (1 + \tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) - \tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}}\right) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи III.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1.5, рассмотрим вначале случай $a_j(x) \equiv 0, b_j(x) \equiv 0, j = 3, 4$. Обозначим

$$a_{2\varepsilon}(x) = a_2(x) - \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Рассматривая задачу нахождения решения уравнения (1.1.1), удовлетворяющего условиям (1.1.2), (1.1.3), а также условиям

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, +0) + a_{2\varepsilon}(x)u_y(x, -0), x \in \Omega,$$

$$u_y(x,+0) = b_1(x)u_y(x,+0) + b_2(x)u_y(x,-0), x \in \Omega, \tag{1.1.27}$$

переходим к соотношениям вида (1.1.24), выражающим условия задачи I. Данная задача имеет решение $u^\varepsilon(x,y)$, принадлежащее пространству V, для функций $u^\varepsilon(x,y)$ имеет место первая априорная оценка (1.1.19).

Для получения следующих оценок рассмотрим соотношение (1.1.21). Используя условия сопряжения (1.1.27), получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[\gamma_2 b_1(x)u^2_{x_i}(x,+0) + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)]u_{x_iy}(x,-0)u_{x_i}(x,+0) -$$

$$-a_2(x)u^2_{x_iy}(x,-0)\Big]dx + \frac{p_1}{2}\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy + \frac{\gamma_2 p_2}{2}\int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_iy}dxdy + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_iy}dxdy + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u^2_{x_iy}(x,-0)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\Big[-\frac{1}{2}\Delta_x a_2(x)u^2_y(x,-0) + \frac{1}{2}\Delta_x b_1(x)u^2_y(x,+0)\Big]dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[a_{1x_i}u(x,+0)u_{x_iy}(x,-0) + \gamma_2 b_{2x_i}u_y(x,-0)u_{x_iy}(x,+0)\Big]dx +$$

$$+\int\limits_{Q^-}c(x,y)u_{yy}u\,dxdy - \gamma_2\int\limits_{Q^+}c(x,y)u_{yy}u\,dxdy.$$

Применяя далее неравенство Юнга, используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (1.1.13), получим оценку

$$\int\limits_{Q^-}u^2_{yy}dxdy + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_iy}dxdy + \int\limits_{Q^+}u^2_{yy}dxdy + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_iy}dxdy +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u^2_{x_iy}(x,-0)dx \le M_5. \tag{1.1.28}$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q^-}u^2_{x_ix_j}dxdy + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q^+}u^2_{x_ix_j}dxdy \le M_6. \tag{1.1.29}$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [39].

Из оценок (1.1.19), (1.1.28), (1.1.29) следует, что вновь можно осуществить всю схему выбора сходящихся последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x,y)\}$, и что существует функция $u(x,y)$, которая является решением уравнения (1.1.1), удовлетворяет условиям (1.1.2), (1.1.3) и условиям сопряжения задачи III.

Теорема доказана.

Примерами операторов B_1 и B_2, обладающих нужными свойствами, являются интегральные операторы, действия которых на функции $\upsilon(x,y)$ определяются равенствами

$$(B_i\upsilon)(x) = \int\limits_{\Omega} K_{1i}(x,\xi)\upsilon(\xi,+0)d\xi + \int\limits_{\Omega} K_{2i}(x,\xi)\upsilon(\xi,-0)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{Q^-} N_{1i}(x,\xi,\eta)\upsilon(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_{Q^+} N_{2i}(x,\xi,\eta)\upsilon(\xi,\eta)d\xi$$

с заданными ядрами $K_{1i}(x,\xi), K_{2i}(x,\xi), N_{1i}(x,\xi,\eta), N_{2i}(x,\xi,\eta), i = 1,2$. Условия на эти ядра, достаточные для выполнения условий теорем 1-6, нетрудно найти с помощью неравенств Гельдера.

Оператор Δ_x, участвующий в рассматриваемой задаче, можно заменить общим эллиптическим оператором порядка $2m$ ($m > 0$ - целое), действующим по переменным $x_1,..,x_n$ (с соответствующим дополнением граничных условий на S).

1.2 О влиянии параметров задач сопряжения на корректность

Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты - бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, y есть точка интервала $(a,1)$, $-\infty < a < 0$, Q есть цилиндр $\Omega\times(a,1)$, $S = \Gamma\times(a,1)$ есть боковая граница Q. Далее, пусть $f(x,y)$ есть заданная функция, определенная при $(x,y)\in\overline{Q}$, α, β и λ есть заданные действительные числа.

Обозначим $Q_1=\Omega\times(a,0)$, $Q_2=\Omega\times(0,1)$, $S_1=\Gamma\times(a,0)$, $S_2=\Gamma\times(0,1)$.

Задача сопряжения: *найти функцию $u(x,y)$ такую, что в цилиндрах Q_1 и Q_2 выполняется уравнение*

$$\Delta u=\lambda u+f(x,y) \tag{1.2.1}$$

и при этом для функции $u(x,y)$ выполняются условия

$$u(x,y)|_{S_1\cup S_2}=0, \tag{1.2.2}$$

$$u(x,a)=u(x,1)=0,\quad x\in\Omega, \tag{1.2.3}$$

$$u(x,-0)=\alpha u(x,+0),\quad u_y(x,+0)=\beta u_y(x,-0),\quad x\in\Omega. \tag{1.2.4}$$

Задача (1.2.1)-(1.2.4) в случае $\alpha=\beta=1$ представляет собой хорошо изученную классическую задачу дифракции, в случае же произвольных чисел α и β она уже не представляется хорошо изученной.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать случай $\alpha\beta\neq 0$ — поскольку при $\alpha\beta=0$ задача является распадающейся на независимые задачи в цилиндрах Q_1 и Q_2, и исследование их разрешимости не представляется сложным.

Обозначим через V множество функций

$$V=\{v(x,y):\quad v(x,y)\in W_2^2(Q_1),\quad v(x,y)\in W_2^2(Q_2)\}.$$

Очевидно, что для функций из пространства V определены следы $v(x,+0)$, $v(x,-0)$, $v_y(x,+0)$, $v_y(x,-0)$ (см. [29],[30]). Также очевидно, что пространство V есть банахово пространство с нормой

$$\|v\|_V=\left(\|v\|^2_{W_2^2(Q_1)}+\|v\|^2_{W_2^2(Q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Всюду ниже под решением (или регулярным решением) задачи (1.2.1)-(1.2.4) будем понимать функцию $v(x,y)$ из пространства V, являющуюся решением уравнения (1.2.1) в цилиндрах Q_1 и Q_2 и такую, что для нее выполняются условия (1.2.2)-(1.2.4).

Как уже говорилось выше, целью работы является исследование влияния параметров α, β, a и λ на единственность и неединственность, существование и несуществование решений задачи (1.2.1)-(1.2.4).

Вопрос о единственности и неединственности решений задачи (1.2.1)-(1.2.4) эквивалентен вопросу о существовании или несуществовании нетривиальных в цилиндрах Q_1 и Q_2 решений уравнения

$$\Delta u = \lambda u, \tag{1.2.1$_0$}$$

удовлетворяющих условиям (1.2.2)-(1.2.4). Другими словами, вопрос о единственности или неединственности решений задачи (1.2.1)-(1.2.4) эквивалентен вопросу о существовании собственных чисел и собственных функций в задаче (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Как будет показано ниже, при фиксированных α, β и λ единственность или неединственность решений задачи (1.2.1)-(1.2.4) (или задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4)) будет определяться числом a. *Числа* $a = a(\alpha, \beta, \lambda)$, *определяющие высоту цилиндра* Q *и такие, что при фиксированных* α, β *и* λ *имеет место неединственность решений задачи* (1.2.1)-(1.2.4), *назовем критическими числами задачи сопряжения.*

Пусть $\{W_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ система собственных функций задачи Дирихле для оператора Δ_x $\left(\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ с соответствующими собственными числами μ_k:

$$\Delta_x W_k = \mu_k W_k,\, W_k|_{\Gamma} = 0.$$

Известно, что собственные числа μ_k все отрицательные, конечнократные и имеют единственную предельную точку в $-\infty$. Будем считать, что числа μ_k упорядочены по убыванию.

Рассмотрим вначале случай $\lambda > \mu_1$.

Для неотрицательных действительных чисел t и для неположительных чисел a определим функцию $\varphi(t,a)$:

$$\varphi(t,a) = -\frac{(1-e^{2ta})(1+e^{-2t})}{(1+e^{2ta})(1-e^{-2t})}.$$

Установим вначале вспомогательное утверждение о свойствах этой функции.

Утверждение 1.2.1 *При фиксированном отрицательном a таком, что $a \neq -1$ функция $\varphi(t,a)$ будет строго монотонна по t при $t > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $a < -1$. Положим $b = -a$, $z = e^{-2t}$, $\psi_0(z) = \frac{(z^b-1)(z+1)}{(z^b+1)(z-1)}$. Справедливы равенства

$$\varphi(t,a) = -\psi_0(z), \quad \psi_0(0+0) = 1, \quad \psi_0(1-0) = b.$$

Покажем, что производная $\psi_0'(z)$ не обращается в нуль при $z \in (0,1)$. Имеем

$$\psi_0'(z) = \frac{-2z^{2b} + 2bz^{b+1} - 2bz^{b-1} + 2}{(z^b+1)^2(z-1)^2}, \quad \psi_0'(0+0) = 2, \quad \psi_0'(1-0) = 0.$$

Предположим, что существует точка z_0 из интервала $(0,1)$, в которой выполняется $\psi_0'(z_0) = 0$. Обозначим $\psi_1(z) = z^{2b} - bz^{b+1} + bz^{b-1} - 1$. Для функции $\psi_1(z)$ имеют место равенства

$$\psi_1(z_0) = 0, \quad \psi_1(0+0) = -1, \quad \psi_1(1-0) = 0.$$

Но тогда в интервале $(0,1)$ обязательно найдется точка z_1 такая, что $\psi_1'(z_1) = 0$. Положим

$$\psi_2(z) = 2bz^{b+1} - b(b+1)z^2 + b(b-1).$$

Имеем

$$\psi_1'(z) = z^{b-2}\psi_2(z), \quad \psi_2(z_1) = 0, \quad \psi_2(0+0) = b(b-1), \quad \psi_2(1-0) = 0.$$

Но тогда либо при $z \in (0,1)$ выполняется $\psi_2'(z) < 0$, либо в интервале $(0,1)$ найдется точка z_2 такая, что $\psi_2'(z_2) = 0$. Последнее равенство на интервале $(0,1)$ невозможно, значит, выполняется $\psi_2'(z) < 0$ при $z \in (0,1)$.

Поскольку $\psi_2(0+0) > 0$, $\psi_2(1-0) = 0$, то выполняется $\psi_1(z) > 0$ при $z \in (0,1)$. Получили противоречие с предположением о существовании точки z_0 такой, что $z_0 \in (0,1)$, $\psi_0'(z_0) = 0$.

Итак, для функции $\psi_0'(z)$ выполняется

$$\psi_0'(z) < 0, \quad \text{при} \quad z \in (0,1), \quad \psi_0'(1-0) \leq 0.$$

А это и означает, что функция $\varphi(t,a)$ строго монотонна при $t > 0$.

Случай $-1 < a < 0$ сводится к рассмотренному с помощью замены $z = e^{-2t}$, $c = -\frac{1}{a}$.

Утверждение доказано.

Обозначим $\delta_k(\lambda) = \sqrt{|\lambda - \mu_k|}$, $\gamma_k(\lambda) = \varphi(\delta_k(\lambda), a)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.2.1 *Пусть α, β, a и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем число a отрицательно. Тогда*

1. *если $a \neq -1$, $\lambda_0 > \mu_1$, $\alpha\beta \geq \gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta \leq -1$ при $a \in (-1,0)$, $\alpha\beta \leq \gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta \geq -1$ при $a < -1$, то задача (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$ имеет только нулевое решение;*

2. *если $a \neq -1$, $\lambda_0 > \mu_1$, $\alpha\beta \in (-1, \gamma_1(\lambda_0))$ при $a \in (-1,0)$, $\alpha\beta \in (\gamma_1(\lambda_0), -1)$ при $a < -1$ и для некоторого фиксированного натурального числа k_0 выполняется равенство*

$$\alpha\beta = \varphi(\delta_{k_0}(\lambda_0), a),$$

то число λ_0 будет собственным, причем простым, числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), если при тех же α, β, a и λ_0 для всех натуральных чисел k выполняется

$$\alpha\beta \neq \varphi(\delta_k(\lambda_0), a),$$

то задача (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$ имеет только нулевое решение;

3. если $a=-1$, $\alpha\beta=-1$, то любое число λ_0 из промежутка $(\mu_1,+\infty)$ будет собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), причем бесконечной кратности, если же $a=-1$, $\alpha\beta\neq-1$, $\lambda_0>\mu_1$, то задача (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda=\lambda_0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Решение $u(x,y)$ задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda=\lambda_0$ ищем в виде

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in Q_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in Q_2,\end{cases}$$

Функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ определим равенствами

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(y)W_k(x),\quad u_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k(y)W_k(x).$$

Уравнение (1.2.1$_0$) и условия (1.2.3) и (1.2.4) дают для функций $c_k(y)$ и $d_k(y)$ соотношения

$$\begin{aligned} c_k''(y)+(\mu_k-\lambda_0)c_k(y)=0, &\qquad d_k''(y)+(\mu_k-\lambda_0)d_k(y)=0,\\ c_k(a)=0, &\qquad d_k(1)=0,\\ c_k(-0)=\alpha d_k(+0), &\qquad d_k'(+0)=\beta c_k'(-0).\end{aligned}$$

Поскольку $\mu_k-\lambda_0<0$, то функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$ имеют вид

$$c_k(y)=A_ke^{\delta_k(\lambda_0)y}+B_ke^{-\delta_k(\lambda_0)y},\quad d_k(y)=C_ke^{\delta_k(\lambda_0)y}+D_ke^{-\delta_k(\lambda_0)y},$$

и для чисел A_k, B_k, C_k и D_k выполняется система

$$\begin{gathered} A_k+B_k=\alpha(C_k+D_k),\\ C_k-D_k=\beta(A_k-B_k),\\ A_ke^{\delta_k(\lambda_0)a}+B_ke^{-\delta_k(\lambda_0)a}=0,\\ C_ke^{\delta_k(\lambda_0)}+D_ke^{-\delta_k(\lambda_0)}=0.\end{gathered}$$

У этой системы существует нетривиальное решение, если выполняется равенство

$$(1+\alpha\beta)[e^{\delta_k(\lambda_0)(a-1)}-e^{-\delta_k(\lambda_0)(a-1)}]+(1-\alpha\beta)[e^{\delta_k(\lambda_0)(a+1)}-e^{-\delta_k(\lambda_0)(a+1)}]=0.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\alpha\beta = \varphi(\delta_k(\lambda_0), a). \tag{1.2.5}$$

Поскольку функция $\varphi(t, a)$ монотонно убывает при $a \in (-1, 0)$ от a до -1, монотонно возрастает при $a < -1$ вновь от a до -1 (см. доказанное выше утверждение (1.2.1)), то при $\lambda_0 > \mu_1$, $a \in (-1, 0)$, $\alpha\beta \geq \gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta \leq -1$, при $\lambda > \mu_1$, $a < -1$, $\alpha\beta \leq \gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta \geq -1$ равенство (1.2.5) выполняться не может, числа A_k, B_k, C_k и D_k есть нули для всех натуральных чисел k, все компоненты функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ есть тождественно нулевые функции.

Пусть теперь выполняются неравенства и включения п. 2, и пусть для некоторого фиксированного натурального числа k_0 выполняется равенство

$$\alpha\beta = \varphi(\delta_{k_0}(\lambda_0), a). \tag{1.2.5$'$}$$

Тогда компоненты $c_{k_0}(y)W_{k_0}(x)$ и $d_{k_0}(y)W_{k_0}(x)$ функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ будут ненулевыми. Это и означает существование нетривиального решения задачи ($1.2.1_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$. Далее, вследствие доказанного выше утверждения (1.2.1), равенство ($1.2.5'$), определяющее собственное число λ_0, может выполняться лишь для одного натурального числа k_0. Тем самым этому числу λ_0 соответствует лишь одна собственная функция (определенная с точностью до постоянного множителя), и, значит, при выполнении условия ($1.2.5'$) число λ_0 будет простым собственным числом задачи ($1.2.1_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Если для всех натуральных чисел k выполняется

$$\alpha\beta \neq \varphi(\delta_k(\lambda_0), a),$$

то число λ_0 не будет собственным числом задачи ($1.2.1_0$), (1.2.2)-(1.2.4) — это очевидно.

Наконец, пусть выполняется $a = -1$. Тогда, если $\alpha\beta = -1$, то равенство (1.2.5) будет выполняться для всех чисел λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$

и для всех натуральных чисел k. Другими словами, каждая из функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ будет содержать бесконечно много ненулевых линейно-независимых слагаемых. А это и означает, что любое число λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ будет собственным числом задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) бесконечной кратности.

Наоборот, если $a = -1$ и $\alpha\beta \neq -1$, то равенство (1.2.5) не будет выполняться, и тем самым при всех числах λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ задача $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$ будет иметь только нулевое решение.

Теорема полностью доказана.

Обсудим теперь вопрос о критических числах задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) в случае $\lambda > \mu_1$.

Обозначим

$$b_k(\lambda) = -\frac{1 + e^{-2\delta_k(\lambda)}}{1 - e^{-2\delta_k(\lambda)}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 1.2.2 *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа такие, что $\alpha\beta < 0$, $\lambda_0 > \mu_1$. Тогда имеют место свойства*

1. *если $\alpha\beta > -1$, то существует счетное множество чисел $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, принадлежащих интервалу $(-1, 0)$ и являющихся критическими для задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$, причем для чисел a_k^* выполняется $a_k^* \to 0$ при $k \to \infty$;*

2. *если $\alpha\beta = -1$, то лишь число $a = -1$ будет критическим для задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$;*

3. *если $\alpha\beta \in (b_1(\lambda_0), -1)$, то существует лишь конечное число критических чисел для задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$;*

4. *если $\alpha\beta \leq b_1(\lambda_0)$, то критических чисел задача $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$ не имеет.*

Доказательство. Число a будет критическим для задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) при фиксированных α, β и при $\lambda = \lambda_0$, если будет выполняться равенство (1.2.5).

Обозначим $\widetilde{b_k}(\lambda_0) = -b_k(\lambda_0)$. Равенство (1.2.5) эквивалентно равенству

$$a = \frac{1}{2\delta_k(\lambda_0)} \ln \frac{\widetilde{b_k}(\lambda_0) + \alpha\beta}{\widetilde{b_k}(\lambda_0) - \alpha\beta}. \tag{1.2.6}$$

Если $\alpha\beta > -1$, то выполняется $\widetilde{b_k}(\lambda_0) + \alpha\beta > 0$. Следовательно, равенство (1.2.6) и будет определять искомую последовательность $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ критических чисел, и для этой последовательности будет выполняться $a_k^* \to 0$ при $k \to \infty$.

Очевидно, что при $\alpha\beta = -1$ лишь при $a = -1$ будет выполняться равенство (1.2.5).

Пусть теперь выполняется $b_1(\lambda_0) < \alpha\beta < -1$. Поскольку последовательность $\{b_k(\lambda_0)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает и имеет своим пределом -1, то существует натуральное число k_1 такое, что выполняются неравенства

$$b_{k_1}(\lambda_0) < \alpha\beta \le b_{k_1+1}(\lambda_0).$$

Но тогда равенство (1.2.5) будет выполняться лишь для конечного набора отрицательных чисел a_k^*, $k = 1, \ldots, k_1$. Эти числа и будут критическими для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$.

Наконец, пусть выполняется $\alpha\beta \le b_1(\lambda_0)$. Очевидно, что в этом случае равенство (1.2.5) не может выполняться. Критических чисел нет.

Теорема полностью доказана.

На следующем шаге обсудим вопрос о собственных числах задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), лежащих на промежутке $(-\infty, \mu_1]$.

Положим $h(t, a) = \alpha\beta \cos at \cdot \sin t - \cos t \cdot \sin at$.

Утверждение 1.2.2 *Пусть a, α и β есть фиксированные действительные числа такие, что $a < 0$, и если $a = -1$, то $\alpha\beta \neq -1$. Тогда функция $h(t, a)$ имеет при $t \geq 0$ счетное множество нулей, причем это множество не имеет конечных предельных точек.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если считать переменную t комплексной ($t = \tau + i\theta$), то функция $h(t, a)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости функцией, и в силу внутренней теоремы единственности [7] она не может иметь более чем счетное множество нулей, само же это множество не может иметь конечных предельных точек. Следовательно, и при сужении функции $h(t, a)$ на полуось $t \geq 0$ множество ее нулей не может иметь конечных предельных точек.

Очевидно, что при $\alpha\beta = \pm 1$ функция $h(t, a)$ имеет при $t \geq 0$ бесконечно много нулей. Пусть теперь $\alpha\beta \neq \pm 1$. Определим функцию $h_1(t, b)$:

$$h_1(t, b) = \frac{\alpha\beta + 1}{\alpha\beta - 1} \sin(b + 1)t - \sin(b - 1)t.$$

Покажем, что при $b > 0$ функция $h_1(t, b)$ имеет на полуоси $t \geq 0$ бесконечно много нулей. Предположим, что это не так. Тогда найдется положительное число T такое, что при $t > T$ функция $h_1(t, b)$ либо положительна, либо отрицательна. Пусть для определенности выполняется $h_1(t, b) < 0$ при $t > T$. Рассмотрим вначале случай $b > 1$. Зафиксируем натуральное число k. Имеем

$$\frac{2(k + 1)(b + 1)}{b - 1} - \frac{(2k + 1)(b + 1)}{b - 1} = \frac{b + 1}{b - 1} > 1.$$

Следовательно, на интервале $\left(\frac{(2k+1)(b+1)}{b-1}, \frac{2(k+1)(b+1)}{b-1}\right)$ имеется по крайней мере одно натуральное число l_k. Положим $t_k = \frac{\pi l_k}{b+1}$. Имеем $h_1(t_k, b) = -\sin \frac{\pi l_k (b-1)}{b+1} > 0$. Поскольку число k можно неограниченно увеличивать, то указанный выше интервал будет неограниченно сдвигаться вправо, и число l_k можно сделать сколь угодно большим — в частности, таким, что будет выполняться $t_k > T$. Получаем противоречие с предположением об отрицательности функции $h_1(t, b)$ при $t > T$.

Рассмотрим теперь случай $0 < b < 1$. Зафиксируем натуральное число k и определим натуральное число l_k^* как число, принадлежащее интервалу $\left(\frac{2k(1+b)}{1-b}, \frac{(2k+1)(1+b)}{1-b}\right)$ (такое натуральное число l_k^* существует). Положим

$t_k^* = \frac{\pi l_k^*}{b+1}$. Имеем $h_1(t_k^*, b) > 0$. Произвольность числа k и предположение об отрицательности функции $h_1(t,b)$ вновь дают противоречие.

Предположение о положительности функции $h_1(t,b)$ при $t > T$ и аналогичные изложенным выше рассуждения также приводят в случаях $0 < b < 1$ или $b > 1$ к противоречию. Следовательно, при $b > 0$, $b \neq 1$ функция $h_1(t,b)$ имеет бесконечно много нулей при $t \geq 0$. Наличие у функции $h_1(t,b)$ при $b = 1$ бесконечного числа нулей очевидно.

Итак, функция $h_1(t,b)$ при $b > 0$ имеет бесконечно много нулей. Положив $b = -a$ и учитывая равенство

$$h(t,a) = \frac{1}{2}\left[(\alpha\beta - 1)\sin(a+1)t - (\alpha\beta + 1)\sin(a-1)t\right],$$

очевидным образом получаем, что и функция $h(t,a)$ при $a < 0$, $t \geq 0$ имеет бесконечно много нулей.

Из проведенных выше рассуждений и следует, что утверждение (1.2.2) полностью доказано.

Вернемся к задаче ($1.2.1_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Обозначим через t_m, $m = 1, 2, \ldots$, положительные корни функции $h(t,a)$, расположенные в порядке возрастания, через $\lambda_{k,m}$ обозначим числа $\lambda_{k,m} = \mu_k - t_m^2$. Далее, для $a > -1$, $\alpha\beta \in (-1, a)$, или $a < -1$, $\alpha\beta \in (a, -1)$ обозначим через $t_{0,k}(\lambda)$ положительное решение уравнения $\alpha\beta = \varphi(\delta_k(\lambda), a)$ (если оно существует). Наконец, для заданного числа λ_0 из промежутка $(-\infty, \mu_1]$ через $\lambda_{k,0}$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим число $\lambda_{k,0} = \mu_k + t_{0,k}^2(\lambda_0)$.

Теорема 1.2.3 *Пусть α, β, a и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем число a отрицательно, число λ_0 принадлежит промежутку $(-\infty, \mu_1]$. Тогда*

1. *если $\alpha\beta > 0$, $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$ для некоторых натуральных чисел k и m, то λ_0 будет собственным числом задачи ($1.2.1_0$), (1.2.2)-(1.2.4),*

если же $\alpha\beta > 0$, λ_0 *не совпадает ни с одним из чисел* $\lambda_{k,m}$, *то задача* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*) *при* $\lambda = \lambda_0$ *будет иметь только нулевое решение;*

2. *если* $a \neq -1$, $\alpha\beta \in (-1, a)$ *при* $a > -1$ *или* $\alpha\beta \in (a, -1)$ *при* $a < -1$, $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$ *или* $\lambda_0 = \lambda_{l,0}$ *(если число* $\lambda_{l,0}$ *определено) для некоторых натуральных чисел* k, m *и* l, *то* λ_0 *будет собственным числом задачи* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*), *если же* λ_0 *при тех же ограничениях на числа* a *и* $\alpha\beta$ *не совпадает ни с одним из чисел* $\lambda_{k,m}$ *или* $\lambda_{l,0}$, *то задача* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*) *будет иметь только нулевое решение;*

3. *если* $a \neq -1$, $\alpha\beta \leq -1$ *или* $\alpha\beta \in (a, 0)$ *при* $a > -1$, $\alpha\beta \in (-\infty, a)$ *или* $\alpha\beta \in [-1, 0)$ *при* $a < -1$, $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$ *для некоторых натуральных чисел* k *и* m, *то* λ_0 *будет собственным числом задачи* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*), *если же* λ_0 *при тех же ограничениях на числа* a *и* $\alpha\beta$ *не совпадает ни с одним из чисел* $\lambda_{k,m}$, *то задача* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*) *при* $\lambda = \lambda_0$ *будет иметь только нулевое решение;*

4. *если* $a \neq -1$, $\alpha\beta = a$, $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$ *или* $\lambda_0 = \mu_l$ *для некоторых натуральных чисел* k, m *и* l, *то* λ_0 *будет собственным числом задачи* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*), *если же* λ_0 *не совпадает ни с одним из чисел* $\lambda_{k,m}$ *или* μ_l, *то задача* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*) *будет иметь только нулевое решение;*

5. *если* $a = -1$, $\alpha\beta = -1$, *то любое число* λ_0 *из промежутка* $(-\infty, \mu_1]$ *будет собственным числом задачи* (*1.2.1*$_0$), *(2)-(4), если же* $a = -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta \neq -1$, $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$ *для некоторых натуральных чисел* k *и* m, *то* λ_0 *будет собственным числом задачи* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*), *если же* λ_0 *при тех же ограничениях на числа* a *и* $\alpha\beta$ *не совпадает ни с одним из чисел* $\lambda_{k,m}$, *то задача* (*1.2.1*$_0$), (*1.2.2*)-(*1.2.4*) *будет иметь только нулевое решение.*

Доказательство. Решение задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) вновь определим с помощью функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ (см. доказательство теоремы 1), функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ вновь определим рядами

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) W_k(x), \quad u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(y) W_k(x).$$

Для функций $c_k(y)$, $d_k(y)$ и числа λ_0 должны выполняться равенства

$$\begin{aligned}
&c_k''(y) + (\mu_k - \lambda_0)c_k(y) = 0, \;\; d_k''(y) + (\mu_k - \lambda_0)d_k(y) = 0,\\
&c_k(a) = 0, \quad d_k(1) = 0,\\
&c_k(-0) = \alpha d_k(+0), \qquad\qquad d_k'(+0) = \beta c_k'(-0).
\end{aligned}$$

Если $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, то имеем $\mu_k - \lambda_{k,m} = t_m^2 > 0$,

$$c_k(y) = A_k \cos t_m y + B_k \sin t_m y,$$

$$d_k(y) = C_k \cos t_m y + D_k \sin t_m y,$$

для чисел A_k, B_k, C_k и D_k выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&A_k = \alpha C_k,\\
&D_k = \beta B_k,\\
&A_k \cos t_m a + B_k \sin t_m a = 0,\\
&C_k \cos t_m + D_k \sin t_m = 0.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы есть число $h(t_m, a)$, и это число равно нулю. Следовательно, числа A_k, B_k, C_k, D_k не все одновременно обращаются в нуль, функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ будут содержать ненулевую компоненту, и тем самым число $\lambda_{k,m}$ будет представлять собой собственное число задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4).

Пусть теперь число λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$. Если λ_0 есть собственное число задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4), то хотя бы для одного натурального числа k_1 функции $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ не будут тождественно нулевыми. С другой стороны, если для данного числа k_1 выполняется $\mu_{k_1} - \lambda_0 > 0$, то определитель соответствующей алгебраической системы для чисел A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1} и D_{k_1} должен обращаться в нуль. Но тогда число λ_0 должно совпадать с одним из чисел $\lambda_{k_1,m}$, а это не так. Далее, если для числа k_1 выполняется $\mu_{k_1} - \lambda_0 < 0$, то должно выполняться равенство (1.2.5), а это невозможно в силу положительности произведения $\alpha\beta$. Аналогично, равенство $\mu_{k_1} - \lambda_0 = 0$ не может выполняться, поскольку в этом случае из равенства соответствующего определителя нулю следует $a = \alpha\beta$, что также невозможно. Следовательно, предположение о том, что число λ_0 есть собственное число задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) приводит к противоречию. Другими словами, число λ_0, не совпадающее ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, не является собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы доказывается в целом аналогично, добавляется лишь то, что при принадлежности $\alpha\beta$ указанным промежуткам появляется, быть может, дополнительное собственное число $\lambda_{l,0}$.

Третья часть теоремы теперь очевидна.

Пусть выполняется $a \neq -1$, $\alpha\beta = a$. Если $\lambda_0 = \mu_l$, то имеют место равенства $c_l(y) = A_l y + B_l$, $d_l(y) = C_l y + D_l$, условия (1.2.3) и (1.2.4) порождают алгебраическую систему, определитель которой равен нулю. Следовательно, функции $c_l(y)$ и $d_l(y)$ будут ненулевыми, число λ_0 будет собственным числом для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Если $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, то существование нетривиальных функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ устанавливается аналогично первому случаю.

Если λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$ или μ_l, то, вновь аналогично первому случаю, устанавливается, что все функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$ будут тождественно нулевыми, и тем самым число λ_0 не будет собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4).

Четвертая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\alpha\beta = a = -1$, и пусть λ_0 есть произвольное число из промежутка $(-\infty, \mu_1]$. Если для некоторого натурального числа k_1 выполняется $\lambda_0 < \mu_{k_1}$, то определитель соответствующей алгебраической системы будет равен нулю, числа A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1} и D_{k_1} не будут одновременно обращаться в нуль, соответствующие функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ не будут тождественно нулевыми. Если для некоторого натурального числа k_2 выполняется $\lambda_0 > \mu_{k_2}$, то вновь функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ не будут тождественно нулевыми — поскольку вновь определитель соответствующей алгебраической системы будет нулевым. Наконец, если для некоторого натурального числа k_0 выполняется $\lambda_0 = \mu_{k_0}$, то согласно доказанному в четвертой части теоремы число λ_0 будет собственным числом задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4).

Если теперь в случае $a = -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta \neq -1$ выполняется $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, или, наоборот, число λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, то требуемое в пятой части теоремы установлено ранее.

Теорема полностью доказана.

Резюмируем доказанное в теоремах 1.2.1 и 1.2.3:

1. *при* $\alpha\beta > 0$ *задача* $(1.2.1_0)$, *(1.2.2)-(1.2.4) не имеет собственных чисел, принадлежащих промежутку* $(\mu_1, +\infty)$, *на промежутке же* $(-\infty, \mu_1]$ *собственными числами являются числа* $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, *и только они;*

2. *при* $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$ *на промежутке* $(\mu_1, +\infty)$ *может лежать лишь одно собственное число задачи* $(1.2.1_0)$, *(1.2.2)-(1.2.4), или же собственных чисел на этом промежутке нет;*

3. *при* $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta \neq a$ *собственными числами задачи* $(1.2.1_0)$, *(1.2.2)-(1.2.4), принадлежащими промежутку* $(-\infty, \mu_1]$, *являются числа* $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, *а также, возможно, одно из чисел* $\lambda_{l,0}$*;*

4. *при* $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta = a$ *собственными числами задачи* $(1.2.1_0)$,

(1.2.2)-(1.2.4), принадлежащими промежутку $(-\infty, \mu_1]$, являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, а также числа μ_l, $l = 1, 2, \ldots$;

5. *при $a = -1$, $\alpha\beta \neq -1$ собственными числами задачи (1.2.1₀), (1.2.2)-(1.2.4), принадлежащими промежутку $(-\infty, \mu_1]$, являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$;*

6. *при $a = -1$, $\alpha\beta = -1$ любое действительное число λ будет собственным числом задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4).*

Замечание 1.2.1 *Нетрудно установить, что каждое из чисел $\lambda_{k,m}$ или μ_l (в соответствующей ситуации) будет собственным числом задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) конечной кратности, но при этом не обязательно простым (последнее нетрудно показать на примере одномерной области Ω).*

Обсудим теперь вопрос о критических числах задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) в случае $\lambda \in (-\infty, \mu_1]$. Рассмотрим вначале случай, когда параметр λ совпадает с одним из чисел μ_k.

Заметим, что при фиксированном положительном t уравнение

$$h(t, a) = 0$$

относительно параметра a представляет собой простейшее тригонометрическое уравнение, причем его отрицательные корни можно расположить в последовательность, сходящуюся к $-\infty$. Для числа t, равного $\delta_k(\lambda)$, через $a_{l,k}(\lambda)$, $l, k = 1, 2, \ldots$, обозначим корни уравнения (1.2.7), расположенные в указанную выше последовательность.

Теорема 1.2.4 *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем $\lambda_0 = \mu_{k0}$ для некоторого числа k_0. Имеют место свойства:*

1. *если $k_0 > 1$, то для любого натурального числа k_1 такого, что $1 \leq k_1 < k_0$, числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для*

задачи $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ *при* $\lambda = \lambda_0$, *причем как в случае* $\alpha\beta > 0$, *так и в случае* $\alpha\beta < 0$;

2. *если* $\alpha\beta < 0$, *то дополнительно к числам* $a_{l,k_1}(\lambda_0)$ *критическим будет также число* $a = \alpha\beta$;

3. *если* $\alpha\beta > 0$, $k_0 = 1$, *то критических чисел задача* $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ *при* $\lambda = \lambda_0$ *не имеет;*

4. *если* $\alpha\beta \in (-1, 0)$, *то существует последовательность* $\{a^*_{k,k_0}\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ *такая, что* $a^*_{k,k_0} \in (-1, 0)$, $a^*_{k,k_0} \to 0$ *при* $k \to \infty$, *и при этом дополнительно к числам* $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, $\alpha\beta$ *числа* a^*_{k,k_0} *также будут критическими для задачи* $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ *при* $\lambda = \lambda_0$;

5. *если* $\alpha\beta \in (b_{k_0+1}(\lambda_0), -1)$, *то дополнительно к числам* $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, $\alpha\beta$ *существует лишь конечное множество критических чисел для задачи* $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ *при* $\lambda = \lambda_0$;

6. *если* $\alpha\beta \leq b_{k_0+1}(\lambda_0)$ *или* $\alpha\beta = -1$, *то, кроме чисел* $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $\alpha\beta$, *других критических чисел задача* $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ *не имеет.*

Доказательство. Если $\lambda_0 = \mu_{k_0}$, то при $k_0 > 1$, $1 \leq k_1 < k_0$ для функций $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ имеем

$$c''_{k_1} + (\mu_{k_1} - \mu_{k_0})c_{k_1} = 0, \quad d''_{k_1} + (\mu_{k_1} - \mu_{k_0})d_{k_1} = 0,$$

и при этом выполняется $\mu_{k_1} - \mu_{k_0} > 0$. Но тогда функции $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ будут ненулевыми, если будет выполняться $h(\delta_{k_1}(\lambda_0), a) = 0$. А это и означает, что числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для задачи $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ при $\lambda = \lambda_0$, причем число $\alpha\beta$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Если теперь $\alpha\beta < 0$, то функции $c_{k_0}(y)$ и $d_{k_0}(y)$ могут быть ненулевыми в случае $a = \alpha\beta$, что и означает, что число $\alpha\beta$ также будет критическим для задачи $(1.2.1_0)$, $(1.2.2)$-$(1.2.4)$ при $\lambda = \lambda_0$.

Третья часть теоремы теперь очевидна.

Справедливость четвертой части теоремы устанавливается так же, как доказывалась справедливость первой части теоремы 1.2.2. Более точно, числа a^*_{k,k_0} с нужными свойствами определяются равенствами

$$a^*_{k,k_0} = \frac{1}{2\delta_k(\lambda_0)} \ln \frac{\widetilde{b}_k(\lambda_0) + \alpha\beta}{\widetilde{b}_k(\lambda_0) - \alpha\beta}, \quad k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots .$$

Наконец, доказательство справедливости пятой и шестой частей теоремы вполне соответствует доказательству третьей и четвертой частей теоремы (1.2.2).

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда λ не совпадает ни с одним из чисел μ_k.

Теорема 1.2.5 *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа, и пусть k_0 есть натуральное число такое, что $\mu_{k_1+1} < \lambda_0 < \mu_{k_0}$. Имеют место свойства:*

1. *для любого натурального числа k_1 такого, что $1 \leq k_1 \leq k_0$, числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$, причем как в случае $\alpha\beta > 0$, так и в случае $\alpha\beta < 0$;*

2. *если $\alpha\beta \in (-1, 0)$, то существует последовательность $\{a^*_{k,k_0}\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ такая, что $a^*_{k,k_0} \to 0$ при $k \to \infty$, и при этом дополнительно к числам $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, числа a^*_{k,k_0} также будут критическими для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$;*

3. *если $\alpha\beta \in (b_{k_0+1}(\lambda_0), -1)$, то дополнительно к числам $a_{l,k_0}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, существует лишь конечное множество критических чисел для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$;*

4. *если $\alpha\beta \leq b_{k_0+1}(\lambda_0)$, то, кроме чисел $a_{l,k_0}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, других критических чисел задача (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) не имеет;*

5. *если $\alpha\beta = -1$, то лишь число $a = -1$ будет критическим для для задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4) при $\lambda = \lambda_0$.*

Доказательство этой теоремы теперь очевидно.

О разрешимости задачи (1.2.1)-(1.2.4)

В теоремах 1.2.1 и 1.2.3 описаны все действительные собственные числа задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4). Заметим, что при доказательстве этих теорем автоматически описаны и все отвечающие конкретному собственному числу собственные функции — этот факт вытекает из того, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2\ldots$, образуют базис в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и тем самым все собственные функции представляются через функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, и далее - через функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$; последние же определяются как решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $v(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения* (1.2.1$_0$) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2.2) *и* (1.2.3), *а также условия*

$$v(x, -0) = \beta v(x, +0), \;\; v_y(x, +0) = \alpha v_y(x, -0) \qquad (1.2.4')$$

(α и β - параметры, определяющие задачу (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4)).
В теоремах 1.2.1-1.2.5 показано, что свойства данного действительного числа λ_0 быть или не быть собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), свойства данного отрицательного числа a быть или не быть критическим для той же задачи определяется лишь произведением параметров α и β. Следовательно, если число λ_0 является собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), то это же число будет собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4$'$), и наоборот, если же число λ_0 не является собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2)-(1.2.4), то оно же не будет собственным числом задачи (1.2.1$_0$), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4$'$) и наоборот.

Проведённые выше рассуждения позволяют получить теорему о несуществовании решений краевой задачи (1.2.1)-(1.2.4).

Теорема 1.2.6 *Пусть* λ_0 *есть собственное число задачи* $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4), *и пусть для заданной функции* $f(x,y)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *и для некоторой функции* $v_0(x,y)$, *являющейся собственной функцией задачи* $(1.2.1_0)$, (1.2.2), (1.2.3), $(1.2.4')$ *при* $\lambda = \lambda_0$, *выполняется*

$$\int\limits_Q f v_0 dx dy \neq 0. \tag{1.2.7}$$

Тогда задача сопряжения (1.2.1)-(1.2.4) *не имеет регулярных решений.*

Доказательство. Предположим, что существует функция $u(x,y)$ из пространства V, являющаяся решением задачи (1.2.1)-(1.2.4). Имеют место равенства

$$\int\limits_Q f v_0 dx dy = \int\limits_{Q_1} f v_0 dx dy + \int\limits_{Q_2} f v_0 dx dy = \int\limits_{Q_1} (Lu - \lambda_0 u) v_0 dx dy +$$

$$+ \int\limits_{Q_2} (Lu - \lambda_0 u) v_0 dx dy = \int\limits_{Q_1} u(Lv_0 - \lambda_0 v_0) dx dy + \int\limits_{Q_2} u(Lv_0 - \lambda_0 v_0) dx dy = 0,$$

и эти равенства приводят к противоречию с условием (1.2.7). Следовательно, предположение о существовании регулярного решения задачи (1.2.1)-(1.2.4) для заданной функции $f(x,y)$ неверно.

Теорема доказана.

Обсудим теперь вопрос о существовании решений задачи (1.2.1)-(1.2.4). Искомое решение $u(x,y)$ данной задачи будем искать в виде

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{c}_k(y) W_k(x), & (x,y) \in Q_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{d}_k(y) W_k(x), & (x,y) \in Q_2. \end{cases}$$

Пусть λ не совпадает ни с одним из собственных чисел задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4). Представим функцию $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y), & (x,y)\in Q_1,\\ f_2(x,y), & (x,y)\in Q_2,\end{cases}$$

и далее каждую из функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ представим рядом Фурье:

$$f_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}(y)W_k(x), \quad f_{1k}(y)=\int\limits_{\Omega} f_1(x,y)W_k(x)dx,$$

$$f_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(y)W_k(x), \quad f_{2k}(y)=\int\limits_{\Omega} f_2(x,y)W_k(x)dx.$$

Для функций $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ должны выполняться равенства

$$\widetilde{c}_k''(y)+(\mu_k-\lambda)\widetilde{c}_k(y)=f_{1k}(y), \tag{1.2.8}$$

$$\widetilde{d}_k''(y)+(\mu_k-\lambda)\widetilde{d}_k(y)=f_{2k}(y), \tag{1.2.9}$$

$$\widetilde{c}_k(-0)=\alpha\widetilde{d}_k(+0), \quad \widetilde{d}_k'(+0)=\beta\widetilde{c}_k''(-0). \tag{1.2.10}$$

Из этих равенств и из того, что λ не является собственным числом задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) следует, что функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ однозначно определяются через функции $f_{1k}(y)$ и $f_{2k}(y)$. Определив функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$, находим формальное решение задачи (1.2.1)-(1.2.4); если ряды, участвующие в формальном решении, их производным по переменным $x_1 ... x_n, y$ до второго порядка, будут сходиться в пространстве L_2, то формальное решение даст решение задачи (1.2.1)-(1.2.4), принадлежащее пространству V.

Пусть теперь λ есть собственное число задачи $(1.2.1_0)$, (1.2.2)-(1.2.4) некоторой конечной кратности m. В этом случае все функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ как решение задачи (1.2.8)-(1.2.10) определить невозможно.

Обозначим через $k_1 ... k_m$ те натуральные числа k, для которых задача

$$c_k''(y)+(\mu_k-\lambda)c_k(y)=0,$$

$$d_k''(y)+(\mu_k-\lambda)d_k(y)=0,$$

$$c_k(-0) = \alpha d_k(+0), \quad d'_k(+0) = \beta c'_k(-0)$$

имеет нетривиальное решение. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} f_{1k_i}(y) &\equiv 0, \quad a < y < 0, \quad i = 1, ...m, \\ f_{2k_i}(y) &\equiv 0, \quad 0 < y < 1, \quad i = 1, ...m. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Тогда можно положить $\widetilde{c}_{k_i}(y) \equiv 0$, $\widetilde{d}_{k_i}(y) \equiv 0$, $i = 1, .., m$. Для всех остальных индексов k функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ вновь определяются однозначно. В результате вновь получим формальное решение задачи (1.2.1)-(1.2.4); если соответствующие ряды будут сходиться, то формальное решение станет решением из требуемого класса.

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1.2.2 *Как следует из сказанного выше, условий* (1.2.11) *достаточно для существования формального решения задачи* (1.2.1)-(1.2.4).

Замечание 1.2.3 *При выполнении условий* (1.2.11) *условие* (1.2.7) *выполняться не может.*

Замечание 1.2.4 *Очевидно, что условия* (1.2.11) *не дают однозначной разрешимости задачи* (1.2.1)-(1.2.4).

Глава 2

Решение краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах

2.1 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями Дирихле на основании

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ двухслойный полуцилиндр $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ кусочно-постоянной проницаемости k_i в D_i. В данном полуцилиндре рассмотрим класс краевых задач с условием Дирихле (1-го рода) на его основании:

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.1.1}$$

$$y = -l : \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \tag{2.1.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0. \tag{2.1.3}$$

Здесь $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \partial_{x_i}^2 + \partial_y^2$ — оператор Лапласа, $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, $S = (x \in \partial Q) \times (y < 0)$ — боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u] = \alpha \partial_n u + \beta u$, $\overrightarrow{n}$ — вектор нормали к поверхности S, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y, т. е. на поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках. При этом функция u_1 при $y \to -\infty$ удовлетворяет условию, обеспечивающему единственность соответствующей задачи Дирихле: в R^2 при $y \to -\infty$ $u_1 = O(1)$, в R^3 при $y \to -\infty$ $u_1 \to 0$ [5, 62].

В частном случае $Q = R^{m-1}$ область D является двухслойным полупространством, при этом граничные условия (2.1.3) на S отсутствуют.

Задача (2.1.1)-(2.1.3) описывает установившиеся динамические процессы (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии и др.) в двухслойном полуцилиндре D [5, 11, 35]; здесь u_i — потенциал (температура, давление, концентрация вещества и т.д.) в зоне D_i. Условия (2.1.2) являются классическими условиями сопряжения, выражающими непрерывность потенциала и нормальной скорости потока на поверхности разрыва проницаемости [12, 26].

Пусть известно решение $F(x, y)$ соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на его основании при сохранении граничной функции $f(x)$ (2.1.1):

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x), \tag{2.1.4}$$

$$G[F]_{|S} = 0. \tag{2.1.5}$$

Задача (2.1.4), (2.1.5) описывает аналогичные динамические процессы относительно потенциала $F(x, y)$ в однородном полуцилиндре D.

Методом свертывания разложений Фурье, развитым в работах [66]-[73], выразим решение исходной задачи (2.1.1)-(2.1.3) в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$ через решение $F(x, y)$ задачи (2.1.4), (2.1.5) в однородном полуцилиндре.

Для вывода общих формул, следуя указанным работам, рассмотрим частный случай задачи (2.1.1)-(2.1.3) на плоскости x, y при $x \in Q = R$ (полученные формулы будут справедливы для общего случая указанных задач). Отсюда для функций u_i получим задачу в двухслойной полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x \in R, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x \in R, -l < y < 0\}$ вида

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.1.6}$$

$$y = -l: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2, \tag{2.1.7}$$

$u_1 = O(1)$ при $y \to -\infty$. Выразим решение данной задачи через решение $F(x, y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x). \tag{2.1.8}$$

Решение последней задачи (2.1.8) строится по формуле Пуассона [1, с.265] в однократных квадратурах:

$$F(x, y) = -\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \tag{2.1.9}$$

и для кусочно-непрерывных граничных функций $f(x)$, составленных из многочленов, функция $F(x, y)$ выражается в конечном виде через элементарные функции.

Пусть граничная функция $f(x)$ (2.1.6), (2.1.8) представляется интегралом Фурье:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} g(x, \lambda)d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \tag{2.1.10}$$

где $f_i(\lambda)-$ коэффициенты Фурье:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{pmatrix} dx, \tag{2.1.11}$$

при этом функция $f(x)$ должна быть абсолютно интегрируемой в каждом конечном промежутке и вне некоторого промежутка функция $f(x)$ должна монотонно стремиться к нулю [65, с.529]:

$$|f(x)| \in L(a, b), \qquad \forall[a, b] \in R; \qquad f(x) \to 0, \qquad x \to \pm\infty. \tag{2.1.12}$$

Отсюда с учетом единственности решения задачи Дирихле (2.1.8) функция $F(x, y)$ представима в виде разложения Фурье:

$$F(x, y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g d\lambda, \qquad y \leq 0, \tag{2.1.13}$$

где функция g имеет вид (2.1.10). Последняя формула представляет собой решение задачи Дирихле (2.1.8), полученное методом Фурье [1, 5, 35, 62].

Для решения исходной задачи (2.1.6), (2.1.7) в качестве промежуточного используем метод Фурье. Применяя указанный метод, ограниченные в D_i решения уравнения (2.1.6) найдем в виде

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda(y+l)} g\, d\lambda, \qquad y < -l, \tag{2.1.14}$$

$$u_2 = \int\limits_0^\infty [a_2\, sh\, \lambda(y+l) + a_3\, ch\, \lambda(y+l)] g d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{2.1.15}$$

где $a_i(\lambda)-$ искомые параметры, функция $g = g(x, \lambda)$ имеет вид (2.1.10). Из граничного условия (2.1.6) и условий сопряжения (2.1.7) с учетом разложения граничной функции (2.1.10) для параметров a_i получим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_2\, sh\, \lambda l + a_3\, ch\, \lambda l = 1, \qquad a_1 = a_3, \qquad k_1 a_1 = k_2 a_2,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = a_3 = \frac{k_2}{d}, \qquad a_2 = \frac{k_1}{d},$$

где

$$d = k_1\, sh\, \lambda l + k_2\, ch\, \lambda l. \tag{2.1.16}$$

Отсюда функции u_i (2.1.14), (2.1.15) примут вид

$$u_1 = k_2 \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{2.1.17}$$

$$u_2 = \int\limits_0^\infty \frac{[k_1 sh\lambda(y+l) + k_2 ch\lambda(y+l)]g}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{2.1.18}$$

где функции d, g равны (2.1.16), (2.1.10).

Лемма 2.1.1 *Если граничная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (2.2.12), то решение задачи (2.1.6), (2.1.7) строится по формулам (2.1.17), (2.1.18).*

Доказательство. Из равенства (2.1.16) следует $d \geq k_2 > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (2.1.17), (2.1.18) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (2.1.17), (2.1.18) имеют асимптотику $O(e^{\lambda y})$, где $y < 0$. Отсюда интегралы (2.1.17), (2.1.18) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (2.1.6), (2.1.7) для функций (2.1.17), (2.1.18) проверяются непосредственной подстановкой.

Лемма доказана.

Полученное решение (2.1.17), (2.1.18) имеет вид разложений Фурье, т. е. оно содержит две квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье (2.1.11)) от сильно осциллирующих функций, что вызывает трудности при практическом использовании этих формул.

Следуя методу работ [66]-[73], преобразуем полученные решения (2.1.17), (2.1.18) к виду, не содержащему разложений Фурье. Для этого выделим в разложениях Фурье (2.1.17), (2.1.18) разложение заданной функции $F(x,y)$ (2.1.13). Из равенства (2.1.16) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{(k_1+k_2)(1-q)},$$

где

$$q = \nu e^{-2\lambda l}, \qquad \nu = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \qquad |\nu| < 1. \tag{2.1.19}$$

Отсюда найденное решение (2.1.17), (2.1.18) по переменной интегрирования λ отличается от разложения функции $F(x,y)$ (2.1.13) лишь наличием множителя $(1-q)^{-1}$, где q имеет вид (2.1.19), причем $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \frac{2}{k_1+k_2}\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n e^{-\lambda l(2n+1)}.$$

Отсюда функции u_i (2.1.17), (2.1.18) примут вид

$$u_1 = (1-\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n\int_0^{\infty} e^{\lambda(y-2nl)}\,g\,d\lambda, \qquad y<-l,$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n\int_0^{\infty}[e^{\lambda(y-2nl)} - \nu e^{-\lambda(y+2nl+2l)}]\,g\,d\lambda, \qquad -l<y<0.$$

Выделяя в последних формулах разложение (2.1.13), решение задачи (2.1.6), (2.1.7) выразим функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ непосредственно через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле (2.1.8):

$$u_1(x,y) = (1-\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n F(x,y-2nl), \qquad y<-l, \tag{2.1.20}$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n[F(x,y-2nl) - \nu F(x,-y-2l(n+1))], \qquad -l<y<0, \tag{2.1.21}$$

постоянная ν при этом имеет вид (2.1.19).

Формулы (2.1.20), (2.1.21) следуют из формул (2.1.17), (2.1.18), в которых соответствующие интегралы Фурье заменены заданной функцией $F(x,y)$. Отсюда с учетом леммы 2.1.1 функции (2.1.20), (2.1.21) являются решением задачи (2.1.6), (2.1.7). Последнее также можно проверить и непосредственно, при этом учитывается, что ряды (2.1.20), (2.1.21) и их производные мажорируются сходящимися числовыми рядами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\nu^n$, где $|\nu|<1$ (2.1.19). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.1.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи Дирихле (2.1.8), то решение задачи (2.1.6), (2.1.7) строится по формулам (2.1.20), (2.1.21).*

Формулы (2.1.20), (2.1.21) справедливы для общего случая задачи (2.1.1)-(2.1.3). Действительно, формулы (2.1.20), (2.1.21) имеют вид операторов, действующих на функцию $F(x, y)$ по одной переменной y. В условиях сопряжения (2.1.7) и в граничном условии (2.1.6) также участвует одна переменная y, при этом функции u_i (2.1.20), (2.1.21) удовлетворяют условиям сопряжения (2.1.2) тождественно (для любой дифференцируемой функции F). Отсюда по свободной переменной x функции $F(x, y)$ и $u_i(x, y)$ могут удовлетворять дополнительным условиям, в частности граничным условиям (2.1.3) на S. Остальные условия задачи проверяются непосредственной подстановкой функций (2.1.20), (2.1.21) в условия задачи (2.1.1)-(2.1.3). При этом учитываются условия задачи (2.1.4), (2.1.5) для функции $F(x, y)$.

Таким образом, формулы (2.1.20), (2.1.21) дают решения серии краевых задач в двухслойных полуцилиндрах. Именно: решив некоторую краевую задачу в однородном полуцилиндре, т. е. определив функцию $F(x, y)$, по формулам (2.1.20), (2.1.21) получаем решение аналогичной задачи в двухслойном полуцилиндре.

Например, на плоскости в случае двухслойного квадранта $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x > 0, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x > 0, -l < y < 0\}$ при граничном условии (2.1.3) первого рода

$$u_{i|x=0} = 0 \tag{2.1.22}$$

решение краевой задачи (2.1.1), (2.1.2), (2.1.22) строится по формулам (2.1.20), (2.1.21), в которых функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_0^\infty f(\xi) \left[\frac{1}{(\xi + x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi - x)^2 + y^2} \right] d\xi, \tag{2.1.23}$$

где функция $F(x, y)$ является решением задачи Дирихле в однородном квадранте $D = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$:

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x), \qquad F_{|x=0} = 0.$$

В случае двухслойной полуполосы $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, -l < y < 0\}$ при граничных условиях (2.1.3) первого рода:

$$u_{i|x=0} = 0, \qquad u_{i|x=\pi} = 0 \tag{2.1.24}$$

решение краевой задачи (2.1.1), (2.1.2), (2.1.24) строится по формулам (2.1.20), (2.1.21), с фукцией $F(x, y)$, имеющей вид

$$F(x, y) = -\frac{sh\, y\, sin\, x}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(t)\sin t}{[ch\, y - \cos(t-x)][ch\, y - \cos(t+x)]} dt. \tag{2.1.25}$$

Здесь функция $F(x, y)$ является решением задачи Дирихле в однородной полосе $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y < 0\}$

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x), \qquad F_{|x=0, x=\pi} = 0.$$

Замечание 2.1.1 *Полученное решение (2.1.20), (2.1.21) имеет достаточно простой вид: формулы (2.1.20), (2.1.21) не содержат квадратур и непосредственно выражают решение исходной задачи (2.1.1)-(2.1.3) через функцию $F(x, y)$ (2.1.4), (2.1.5) в виде быстросходящихся рядов (со скоростью геометрической прогрессии).*

Замечание 2.1.2 *Формулы (2.1.20), (2.1.21) справедливы для широкого класса функций $F(x, y)$: ряды (2.1.20), (2.1.21) сходятся для ограниченных и для неограниченных в бесконечности (при $y \to \infty$) функций $F(x, y)$ с ростом по произвольному степенному закону.*

Замечание 2.1.3 *Как было показано, формулы (2.1.20), (2.1.21) дают решения серии краевых задач, т. е. меняя в этих формулах функцию $F(x, y)$, получим решения краевых задач в различных двухслойных полуцилиндрах (где $F(x, y)$ - решение краевой задачи в соответствующем однородном полуцилиндре).*

Замечание 2.1.4 *Отметим также, что непосредственное решение задач (2.1.1)-(2.1.3) в двухслойных полуцилиндрах методом Фурье ставит ряд сложных вопросов о нахождении собственных функций для оператора Лапласа с условиями на S (2.1.3), о построении соответствующего спектра и т.д. Другими словами, возможность вывода формул (2.1.20), (2.1.21) непосредственно для общего случая двухслойных полуцилиндров (без перехода на плоскость с последующим свертыванием интегралов Фурье) была бы весьма затруднительна.*

Указанные замечания справедливы для решений краевых задач, полученных ниже.

2.2 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями Неймана на основании

Рассмотрим в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ класс краевых задач с граничным условием второго рода:

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.2.1}$$

$$y = -l : \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \tag{2.2.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0, \tag{2.2.3}$$

где k_i — проницаемость зоны D_i, оператор G определен в (2.1.3), S — боковая поверхность полуцилиндра D.

Пусть известно решение $F(x, y)$ соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с граничной функцией $f(x)$ (2.2.1):

$$\Delta F = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = f(x), \tag{2.2.4}$$

$$G[F]_{|S} = 0. \tag{2.2.5}$$

Выразим решение исходной задачи (2.2.1)-(2.2.3) в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$ непосредственно через функцию $F(x, y)$ (2.2.4), (2.2.5).

Для вывода общих формул рассмотрим частный случай задачи (2.2.1)-(2.2.3) на плоскости, т. е. при $x \in Q = R$. Отсюда для функций u_i получим задачу в двухслойной полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x \in R, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x \in R, -l < y < 0\}$ вида

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.2.6}$$

$$y = -l : \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2. \tag{2.2.7}$$

Пусть $F(x, y)-$ известное решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = f(x). \tag{2.2.8}$$

Методом функции Грина [5, 35, 62] решение задачи (2.2.8) строится по формуле

$$F(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) ln[(\xi - x)^2 + y^2] d\xi, \tag{2.2.9}$$

при этом для класса кусочно-непрерывных граничных функций $f(x)$, составленных из многочленов, функция $F(x, y)$ (2.2.9) определяется в элементарных функциях.

Выразим решение задачи (2.2.6), (2.2.7) через функцию $F(x, y)$ (2.2.9). Предположим, что функция $F(x, 0)$ разлагается в интеграл Фурье (в окончательных формулах данное предположение несущественно), т.е.

$$F(x, 0) = \int\limits_{0}^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \tag{2.2.10}$$

где

$$g(x, \lambda) = f_1 \, sin \, \lambda x + f_2 \, cos \, \lambda x, \tag{2.2.11}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x,0) \begin{pmatrix} sin\,\lambda x \\ cos\,\lambda x \end{pmatrix} dx. \qquad (2.2.12)$$

Рассмотрим задачу Дирихле в полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$ с граничной функцией $F(x, 0)$:

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad u_{|y=0} = F(x,0), \qquad (2.2.13)$$

решением которой является функция $F(x, y)$. С другой стороны, решая задачу Дирихле (2.2.13) методом Фурье, с учетом единственности ее решения получим представление функции $F(x, y)$ в виде интеграла Фурье

$$F(x,y) = \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y \le 0, \qquad (2.2.14)$$

где g имеет вид (2.2.11).

Представим решение задачи (2.2.6), (2.2.7) также в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int\limits_0^{\infty} a_1 e^{\lambda(y+l)} g\, d\lambda, \qquad u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^{\infty} a_2\, g\, ch\, \lambda y\, d\lambda, \qquad (2.2.15)$$

при этом функции (2.2.15) удовлетворяют уравнению и граничному условию (2.2.6) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (2.2.15)). Из условий сопряжения (2.2.7) с учетом разложения (2.2.14) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений

$$a_1 = e^{-\lambda l} + a_2\, ch\, \lambda l, \qquad k_1 a_1 = k_2 e^{-\lambda l} - k_2 a_2\, sh\, \lambda\, l,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{k_2}{d}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda l}(k_2 - k_1)}{d},$$

где

$$d = k_1\, ch\, \lambda l + k_2\, sh\, \lambda l. \qquad (2.2.16)$$

Отсюда функции (2.2.15) примут вид

$$u_1 = k_2 \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{2.2.17}$$

$$u_2 = F(x,y) + (k_2 - k_1) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} ch\, \lambda y}{d}\, g\, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{2.2.18}$$

где d, g равны (2.2.16), (2.2.11).

Лемма 2.2.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи Неймана (2.2.8) и функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье (2.2.10), то решение задачи (2.2.6), (2.2.7) строится по формулам (2.2.17), (2.2.18).*

Доказательство. Из равенства (2.2.16) следует $d \geq k_1 > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (2.2.17), (2.2.18) имеют соответственно асимптотику $O(e^{\lambda y})$ при $y < -l$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (2.2.17), (2.2.18) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (2.2.6), (2.2.7) для функций (2.2.17), (2.2.18) с учетом разложения (2.2.14) проверяются непосредственно.

Лемма доказана.

Преобразуем полученные решения (2.2.17), (2.2.18) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (2.2.16) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{2\, e^{-\lambda l}}{(k_1 + k_2)(1 - q)},$$

где

$$q = \mu e^{-2\lambda l}, \qquad \mu = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, \qquad |\mu| < 1, \tag{2.2.19}$$

$|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1 - q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \frac{2}{k_1 + k_2} \sum_{n=0}^\infty \mu^n e^{-\lambda l(2n+1)}.$$

При этом функции u_i (2.2.17), (2.2.18) примут вид

$$u_1 = (1+\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda(y-2nl)}\, g\, d\lambda, \qquad y < -l,$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \int\limits_0^{\infty} [e^{\lambda(y-2nl)} + e^{-\lambda(y+2nl)}] g\, d\lambda, \qquad -l < y < 0.$$

Отсюда с учетом разложения (2.2.14) решение задачи (2.2.6), (2.2.7) выражается через решение $F(x,y)$ задачи Неймана (2.2.8) в виде

$$u_1(x,y) = (1+\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n F(x, y-2nl), \tag{2.2.20}$$

$$u_2(x,y) = F(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n [F(x, y-2nl) + F(x, -y-2nl)], \tag{2.2.21}$$

где μ имеет вид (2.2.19) ($|\mu| < 1$).

Формулы (2.2.20), (2.2.21) следуют из формул (2.2.17), (2.2.18), в которых соответствующие интегралы Фурье заменены функцией $F(x,y)$. На основании леммы 2.2.1 функции (2.2.17), (2.2.18), а значит и функции (2.2.20), (2.2.21) являются решением исходной задачи (2.2.6), (2.2.7), что можно также непосредственно проверить. Действительно, из формулы (2.2.9) следует, что функция $F(x,y)$ и ее производные при $y \to -\infty$ могут иметь рост не выше некоторого степенного закона $O(|y|^{\alpha})$. Отсюда ряды (2.2.20), (2.2.21) и их производные мажорируются сходящимися числовыми рядами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^n \nu^{\alpha}$, где $|\mu| < 1$ (2.2.19). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.2.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи Неймана (2.2.8), то решение задачи (2.2.6), (2.2.7) имеет вид (2.2.20), (2.2.21).*

Формулы (2.2.20), (2.2.21) имеют вид операторов, действующих на функцию $F(x,y)$ по одной переменной y, при этом переменная x остается свободной. Поскольку в исходной задаче (2.2.1)-(2.2.3) дополнительные условия выполняются по свободной переменной x, то решение этой задачи также строится по формулам (2.2.20), (2.2.21), что проверяется непосредственно аналогично предыдущему параграфу.

Таким образом, решение задачи (2.2.1)-(2.2.3) в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$ выражается через решение $F(x, y)$ задачи (2.2.4), (2.2.5) в однородном полуцилиндре D по формулам (2.2.20), (2.2.21).

Полученные формулы (2.2.20), (2.2.21), как и формулы (2.1.20), (2.1.21), дают решения серии краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах.

Например, в случае двухслойного квадранта $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x > 0, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x > 0, -l < y < 0\}$ при граничном условии (2.2.3) первого рода $u_{i|x=0} = 0$ решение краевой задачи (2.2.1)-(2.2.3) строится по формулам (2.2.20), (2.2.21), в которых функция $F(x, y)$ является решением смешанной краевой задачи в однородном квадранте $D = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$:

$$\Delta F = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = f(x), \qquad F_{|x=0} = 0,$$

и имеет вид

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty f(\xi)\{ln[(\xi + x)^2 + y^2] - ln[(\xi - x)^2 + y^2]\}d\xi.$$

В случае кусочно-однородной полуполосы $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, -l < y < 0\}$ при граничных условиях (2.2.3) первого рода $u_{i|x=0} = 0$, $u_{i|x=\pi} = 0$ решение краевой задачи (2.2.1)-(2.2.3) строится по формулам (2.2.20), (2.2.21), в которых функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty f(t) \ln \frac{ch\, y - cos(t + x)}{ch\, y - cos(t - x)} dt,$$

при этом функция $F(x, y)$ является решением смешанной краевой задачи в однородной полосе $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y < 0\}$ вида

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F_{|y=0} = f(x), \quad F_{|x=0} = 0, \quad F_{|x=\pi} = 0.$$

2.3 Краевые задачи в двухслойных полуцилиндрах с условиями 3-го рода на основании

Рассмотрим в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ класс краевых задач вида

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_2 + \gamma u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.3.1}$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \tag{2.3.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0, \tag{2.3.3}$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, оператор G определен в (2.1.3), S — боковая поверхность полуцилиндра D.

Как и в § 2.1, выразим решение задачи (2.3.1)-(2.3.3) через решение $F(x, y)$ задачи (2.1.4)-(2.1.5) в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на его основании при сохранении граничной функции $f(x)$ (2.3.1):

$$\Delta F = 0, \quad F_{|y=0} = f(x), \tag{2.3.4}$$

$$G[F]_{|S} = 0. \tag{2.3.5}$$

Для вывода общих формул рассмотрим частный случай задачи (2.3.1)-(2.3.3) в двухслойной полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x \in R, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x \in R, -l < y < 0\}$:

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_2 + \gamma u_{2|y=0} = f(x), \tag{2.3.6}$$

$$y = -l: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \tag{2.3.7}$$

и выразим решение данной задачи через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле в однородной полуплоскости (2.1.8) с граничной функцией $f(x)$ (2.3.6):

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x). \tag{2.3.8}$$

Пусть граничная функция $f(x)$, а значит и функция $F(x, y)$, разлагаются в интегралы Фурье (2.1.10), (2.1.13):

$$f(x) = \int\limits_0^\infty g(x, \lambda) d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = f_1 \sin \lambda x + f_2 \cos \lambda x, \tag{2.3.9}$$

$$F(x, y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} \, g \, d\lambda, \qquad y \leq 0, \tag{2.3.10}$$

где $f_i(\lambda)$ — коэффициенты Фурье граничной функции $f(x)$ (2.1.11). Представим решение задачи (2.3.6), (2.3.7) в виде:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1 \, e^{\lambda(y+l)} \, g \, d\lambda, \qquad y < -l,$$

$$u_2 = \int\limits_0^\infty [a_2 \, sh \, \lambda(y + l) + a_3 \, ch \, \lambda(y + l)] \, g \, d\lambda, \qquad -l < y < 0,$$

где функция g имеет вид (2.3.9). Тогда из граничного условия (2.3.6) и условий сопряжения (2.3.7) с учетом разложения граничной функции (2.3.9) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений:

$$a_2(\lambda \, ch \, \lambda l + \gamma \, sh \, \lambda l) + a_3(\lambda \, sh \, \lambda l + \gamma \, ch \, \lambda l) = 1,$$

$$a_1 = a_3, \qquad k_1 a_1 = k_2 a_2,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = a_3 = \frac{k_2}{d}, \qquad a_2 = \frac{k_1}{d},$$

где

$$d = k_1(\lambda \, ch \, \lambda l + \gamma \, sh \, \lambda l) + k_2(\lambda \, sh \, \lambda l + \gamma \, ch \, \lambda l). \tag{2.3.11}$$

Отсюда решение задачи (2.3.6), (2.3.7) примет вид

$$u_1 = k_2 \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{2.3.12}$$

$$u_2 = \int\limits_0^\infty \frac{[k_1 sh\,\lambda(y+l) + k_2 ch\,\lambda(y+l)]g}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{2.3.13}$$

где d, g равны (2.3.11), (2.3.9).

Лемма 2.3.1 *Если граничная функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье (2.3.9), то решение задачи (2.3.6), (2.3.7) строится по формулам (2.3.12), (2.3.13).*

Доказательство. Из равенства (2.3.11) следует $d \geq k_2\gamma > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (2.3.12), (2.3.13) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (2.3.12), (2.3.13) имеют асимптотику $O(\lambda^{-1}e^{\lambda y})$, где $y < 0$. Отсюда интегралы (2.3.12), (2.3.13) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (2.3.6), (2.3.7) для функций (2.3.12), (2.3.13) проверяются непосредственной подстановкой.

Лемма доказана.

Преобразуем полученное решение (2.3.12), (2.3.13) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (2.3.11) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{2\,e^{-\lambda l}}{(k_1+k_2)(\lambda+\gamma)(1-q)}, \tag{2.3.14}$$

где

$$q = e^{-2\lambda l}\mu\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma} = e^{-2\lambda l}\mu\left(1 - \frac{2\gamma}{\lambda+\gamma}\right), \qquad \mu = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}, \tag{2.3.15}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Раскладывая $(1-q)^{-1}$ в ряд, из (2.3.14) с учетом формулы бинома Ньютона получим

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{(k_1+k_2)(\lambda+\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda nl} \mu^n \left(1 - \frac{2\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^n =$$

$$\frac{2}{k_1+k_2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n e^{-\lambda l(2n+1)} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{(\lambda+\gamma)^{p+1}},$$

где C_n^p — биномиальные коэффициенты. Отсюда разложения функций u_i (2.3.12), (2.3.13) по переменной λ отличаются от разложения решения задачи Дирихле $F(x,y)$ (2.3.10) наличием множителя $(\lambda+\gamma)^{-p-1}$.

Для выделения из разложений функций u_i (2.3.12), (2.3.13) функции $F(x,y)$ (2.3.10) воспользуемся формулой, указанной в работах [66]-[69]. Приведем вывод этой формулы для решения $F(x,y)$ задачи Дирихле (2.3.8). Из формулы разложение функции $F(x,y)$ (2.3.10) следует

$$F(x, y-z) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-z)}\, g\, d\lambda, \qquad y \leq 0,$$

где $z > 0$ – параметр. Умножая это равенство на $e^{-\gamma z} z^p (p!)^{-1}$, где $\gamma > 0$, $p = 0, 1, 2...$, и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, получим

$$\frac{1}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p\, F(x, y-z)\, dz = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} g \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-(\lambda+\gamma)z} z^p}{p!} dz \right) d\lambda,$$

при этом изменение порядка интегрирования следует из равномерной сходимости последних интегралов. Вычисляя внутренний интеграл по формуле 2.3.3.2 [45, с.322]:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(\lambda+\gamma)z} z^p}{p!}\, dz = \frac{1}{(\lambda+\gamma)^{p+1}},$$

получим формулу

$$\frac{1}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p\, F(x, y-z)\, dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x,\lambda)}{(\lambda+\gamma)^{p+1}}\, d\lambda, \qquad y \leq 0, \tag{2.3.16}$$

где функция $g(x,\lambda)$ имеет вид (2.3.9), $F(x,y)$ - решение задачи Дирихле (2.3.8), $\gamma > 0$, $p = 0, 1, 2...$.

Используя формулу (2.3.16), решение задачи (2.3.6), (2.3.7) выразим через решение задачи Дирихле $F(x, y)$ в виде

$$u_1 = (1+\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p F(x, y-2nl-z)dz, \quad (2.3.17)$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p [F(x, y-2nl-z)+$$

$$+\mu F(x, -y-2l(n+1)-z)]dz, \quad (2.3.18)$$

где постоянная μ имеет вид (2.3.15).

Формулы (2.3.17), (2.3.18) представляют собой преобразованные формулы (2.3.12), (2.3.13). Из леммы 2.3.1 следует, что функции (2.3.12),(2.3.13), а значит и функции (2.3.17),(2.3.18) являются решением задачи (2.3.6),(2.3.7). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.3.1 *Если функция $F(x, y)$ является решением задачи Дирихле (2.3.8), то решение задачи (2.3.6), (2.3.7) имеет вид (2.3.17), (2.3.18).*

Рассмотрим частный случай задачи (2.3.6), (2.3.7) при $k_1 = k_2$, т. е. третью краевую задачу в однородной полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta u = 0, \qquad \partial_y u + \gamma u_{|y=0} = f(x). \quad (2.3.19)$$

Представляя решение данной задачи в виде

$$u = \int_0^{\infty} a\, e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y < 0,$$

где функция g имеет вид (2.3.9), из граничного условия (2.3.19) найдем $a = (\lambda + \gamma)^{-1}$. Отсюда с учетом формулы (2.3.16) при $p = 0$ решение задачи (2.3.19) получим в виде

$$u = \int_0^\infty e^{-\gamma z} F(x, y - z)\, dz. \qquad (2.3.20)$$

Последняя формула выражает решение третьей краевой задачи (2.3.19) в полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$ через решение $F(x, y)$ первой краевой задачи (Дирихле) в этой полуплоскости с сохранением граничной функции.

Полученные формулы (2.3.17), (2.3.18), (2.3.20) справедливы в общем случае полуцилиндров D. Именно, решение исходной задачи (2.3.1) - (2.3.3) в двухслойном полуцилиндре D с граничным условием 3-го рода на его основании строится по формулам (2.3.17), (2.3.18), где функция $F(x, y)$ является ограниченным решением задачи (2.3.4),(2.3.5) в однородном полуцилиндре D с граничным условием 1-го рода на его основании, что проверяется непосредственно.

Аналогично решение краевых задач в однородном полуцилиндре D с граничным условием третьего рода на его основании:

$$\Delta u = 0, \qquad \partial_y u + \gamma u_{|y=0} = f(x), \qquad G[u]_{|S} = 0 \qquad (2.3.21)$$

строится по формуле (2.3.20), где $F(x, y)$ — решение задачи (2.3.4), (2.3.5) в однородном полуцилиндре с граничным условием первого рода на его основании.

2.4 Краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах с поверхностью сопряжения, перпендикулярной основанию

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ кусочно-однородный полуцилиндр $D = D^- \cup D^+$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$, $D^- = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), y < 0\}$, где $r(\xi) \geq 0$ — заданная непрерывная функция. В данном случае полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$ разрыва проницаемости, при этом уравнение боковой поверхности $S^{\pm}$ полуцилиндра D имеет вид $x = \pm r(\xi)$, где $r(\xi) \geq 0$. Отсюда векторы внешней нормали $\overrightarrow{n}^{\pm}$ к поверхностям $S^{\pm}$ отличаются лишь знаком первой своей координаты (знаком проекции на ось x):

$$\overrightarrow{n}^{\pm} = (\pm c_1, 0, c_3, ..., c_m), \tag{2.4.1}$$

где c_i — составляющие косинусы вектора $\overrightarrow{n}^{\pm}$ на оси $x, y, \xi_1, ..., \xi_{m-2}$, при этом проекции $\overrightarrow{n}^{\pm}$ на ось y равны нулю.

Рассмотрим в данном полуцилиндре $D = D^{-} \cup D^{+}$ класс краевых задач

$$\Delta\varphi^{\pm} = 0, \qquad G[\varphi^{\pm}]_{|x=\pm r(\xi)} = 0, \tag{2.4.2}$$

$$G_0[\varphi^{-}]_{|y=0} = 0, \qquad G_0[\varphi^{+}]_{|y=0} = f(x, \xi), \tag{2.4.3}$$

$$x = 0: \qquad \varphi^{-} = \varphi^{+}, \qquad k^{-}\partial_x\varphi^{-} = k^{+}\partial_x\varphi^{+}, \tag{2.4.4}$$

где $G[\varphi^{\pm}] = \varphi^{\pm}$, $G[\varphi^{\pm}] = \partial_{n^{\pm}}\varphi^{\pm}$ или $G[\varphi^{\pm}] = \partial_{n^{\pm}}\varphi^{\pm} + \gamma_1\varphi^{\pm}$, $\gamma_1 = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на боковой поверхности S полуцилиндра D, аналогично $G_0[\varphi^{\pm}] = \varphi^{\pm}$, $G_0[\varphi^{\pm}] = \partial_y\varphi^{\pm}$ или $G_0[\varphi^{\pm}] = \partial_y\varphi^{\pm} + \gamma\varphi^{\pm}$, $\gamma = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на основании $y = 0$ полуцилиндра D, уравнение Лапласа (2.4.2) выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, ..., \xi_{m-2}$. Здесь граничное условие на основании полуцилиндра (2.4.3) однородно при $x < 0$, что не умаляет общности, т. к. задача (2.4.2)-(2.4.4) с однородным граничным условием (2.4.3) при $x > 0$ (и неоднородным условием при $x < 0$) решается аналогично, а в общем случае решение задачи имеет вид суммы указанных решений.

Для решения данной задачи, как и выше, рассмотрим частный случай, когда полуцилиндр D являются полуплоскостью $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$, состоящей из двух квадрантов $D^{-} = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$, $D^{+} = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$ проницаемости $k^{\pm}$ в $D^{\pm}$, при этом граничные условия (2.4.2) при $x = \pm r(\xi)$ отсутствуют. Рассмотрим на границе $y = 0$

полуплоскости D граничное условие 1-го рода (полученные формулы будут справедливы для произвольных граничных условий). Отсюда задача (2.4.2)-(2.4.4) для функций $\varphi^{\pm}(x,y)$ примет вид

$$\Delta\varphi^{\pm} = 0, \tag{2.4.5}$$

$$\varphi^{-}_{|y=0} = 0, \qquad \varphi^{+}_{|y=0} = f(x), \tag{2.4.6}$$

$$x = 0: \qquad \varphi^{-} = \varphi^{+}, \qquad k^{-}\partial_x\varphi^{-} = k^{+}\partial_x\varphi^{+}, \tag{2.4.7}$$

Выразим решение этой задачи через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле в однородной полуплоскости с сохранением граничной функции:

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x), x > 0. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

Пусть функция $F(0,y)$ при $-\infty < y < 0$ представляется интегралом Фурье по синусам:

$$F(0,y) = \int\limits_0^\infty g(y,\lambda)d\lambda, \qquad g(y,\lambda) = f_0 \sin\lambda y, \tag{2.4.9}$$

где $f_0(\lambda)$— соответствующий коэффициент Фурье:

$$f_0(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} F(0,y)\sin\lambda y\,dy.$$

Рассмотрим первую краевую задачу в квадранте $D^{-} = \{(x,y) : x < 0, y < 0\}$:

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad u_{|y=0} = 0, \qquad u_{|x=0} = F(0,y), \tag{2.4.10}$$

решением которой является функция $F(x,y)$ (см. (2.4.8)). С другой стороны, применяя метод Фурье к задаче (2.4.10), с учетом единственности ее решения получим разложение функции $F(x,y)$ в квадранте D^{-} вида

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} g\,d\lambda, \qquad x \le 0, \qquad y \le 0, \tag{2.4.11}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (2.4.9). Представляя решение задачи (2.4.5)- (2.4.7) в виде

$$\varphi^- = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x<0,$$

$$\varphi^+ = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2\, e^{-\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x>0,$$

из условий сопряжения (2.4.7) с учетом (2.4.11) для параметров a_i получим систему уравнений

$$a_1 = 1 + a_2, \qquad k^- a_1 = k^+ - k^+ a_2,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k^+}{k^- + k^+}, \qquad a_2 = \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-}.$$

Отсюда с учетом равенства (2.4.11) решение задачи (2.4.5)-(2.4.7) выражается через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле (2.4.8) в конечном виде

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{k^- + k^+} F(x,y), \qquad x<0, \tag{2.4.12}$$

$$\varphi^+ = F(x,y) + \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} F(-x,y), \qquad x>0. \tag{2.4.13}$$

Формулы (2.4.12), (2.4.13) справедливы для общего случая задачи (2.4.2)-(2.4.4).

Теорема 2.4.1 *Решение задачи (2.4.2)-(2.4.4) в кусочно-однородном полуцилиндре $D = D^- \cup D^+$ имеет вид*

$$\varphi^-(x,y,\xi) = \frac{2k^+}{k^- + k^+} F(x,y,\xi), \qquad x<0, \tag{2.4.14}$$

$$\varphi^+(x,y,\xi) = F(x,y,\xi) + \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} F(-x,y,\xi), \qquad x>0. \tag{2.4.15}$$

где $F(x,y,\xi)$ — решение соответствующей задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y,\xi) : -r(\xi) < x < r(\xi), y<0, \xi \in Q\}$ вида

$$\Delta F = 0, \qquad G_0[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x>0, \end{cases} \tag{2.4.16}$$

$$G[F]_{|x=\pm r(\xi)} = 0. \tag{2.4.17}$$

Доказательство. Уравнение (2.4.2) и условия сопряжения (2.4.4) для функций (2.4.14), (2.4.15) очевидно выполняются. В силу условия (2.4.16) выполняется граничное условие (2.4.3) на основании полуцилиндра D для функций (2.4.14), (2.4.15). Аргументы второго слагаемого в (2.4.15) принадлежат области D^-, в которой граничное условие (2.4.16) для функции F однородно.

Из формул (2.4.14), (2.4.15) следует, что для доказательства выполнения граничного условия (2.4.2) на боковой поверхности S достаточно показать, что функция $F(-x, y, \xi)$ удовлетворяет граничному условию (2.4.2) для функции φ^+ при $x = r(\xi) > 0$. Из равенства (2.4.1) следует

$$\partial_{n^+} F(-x, y, \xi)_{|x=r(\xi)} = c_1 \partial_x F(-x, y, \xi) + H(-x, y, \xi)_{|x=r(\xi)} =$$
$$= -c_1 \partial_t F(t, y, \xi) + H(t, y, \xi)_{|t=-r(\xi)} = \partial_{n^-} F(x, y, \xi)_{|x=-r(\xi)},$$

где $H(t, y, \xi) = c_3 \partial_{\xi_1} F(t, y, \xi) + ... + c_m \partial_{\xi_{m-2}} F(t, y, \xi)$, $t = -x$. Отсюда граничное условие (2.4.2) 1-го, 2-го или 3-го рода на S выполняется, т. к. функция $F(x, y, \xi)$ удовлетворяет соответствующему граничному условию (2.4.17).

Теорема доказана.

Отметим, что в случае граничного условия (2.4.3) при $y = 0$ третьего рода (при $G_0[\varphi] = \partial_y \varphi + \gamma\varphi$) решение задачи (2.4.2)-(2.4.4) с учетом формулы (2.3.20) приводится к виду

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{k^+ + k^-} \int_0^\infty e^{-\gamma z} F(x, y - z, \xi)\, dz, \tag{2.4.18}$$

$$\varphi^+ = \int_0^\infty e^{-\gamma z} \left[F(x, y - z, \xi) + \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} F(-x, y - z, \xi) \right] dz, \tag{2.4.19}$$

где $F(x, y, \xi)$ — решение задачи в однородном полуцилиндре D с условием

Дирихле на его основании:

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases} \tag{2.4.20}$$

$$G[F]_{|x=\pm r(\xi)} = 0. \tag{2.4.21}$$

Таким образом, решения задач (2.4.2)-(2.4.4) в кусочно-однородном полуцилиндре $D = D^- \cup D^+$ с граничными условиями (2.4.3) первого и третьего рода при $y = 0$ выражаются соответственно по формулам (2.4.14), (2.4.15) и (2.4.18), (2.4.19) через решение $F(x, y, \xi)$ задачи (2.4.20), (2.4.21) в однородном полуцилиндре с условием Дирихле на основании. В случае граничного условия (2.4.3) второго рода при $y = 0$ решение задачи (2.4.2)-(2.4.4) выражается по формулам (2.4.14), (2.4.15) через решение $F(x, y, \xi)$ задачи (2.4.16), (2.4.17) в однородном полуцилиндре с условием Неймана на основании (при $G_0[F] = \partial_y F$ (2.4.17)).

Например, на плоскости x, y в случае кусочно-однородной полуполосы $D = D^- \cup D^+$, $D^- = \{(x, y, \xi) : -\pi/2 < x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x, y, \xi) : 0 < x < \pi/2, y < 0\}$, решение смешанной краевой задачи с граничными условиями 3-го рода при $y = 0$ и 1-го рода при $x = \pm\pi/2$:

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \qquad \varphi^\pm_{|x=\pm\pi/2} = 0,$$

$$\partial_y\varphi^- + \gamma\varphi^-_{|y=0} = 0, \qquad \partial_y\varphi^+ + \gamma\varphi^+_{|y=0} = f(x,\xi),$$

$$x = 0: \qquad \varphi^- = \varphi^+, \qquad k^-\partial_x\varphi^- = k^+\partial_x\varphi^+$$

строится по формулам (2.4.18), (2.4.19), в которых функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x,y) = -\frac{\operatorname{sh} y \cos x}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{f(t)\cos t}{[\operatorname{ch} y - \cos(t-x)][\operatorname{ch} y + \cos(t+x)]} dt,$$

при этом функция $F(x, y)$ является решением задачи Дирихле в полуполосе D вида

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases} \qquad F_{|x=\pm\pi/2} = 0.$$

Таким образом, формулы (2.4.14), (2.4.15) и (2.4.18), (2.4.19) дают решения серии краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах. Именно: решив некоторую краевую задачу в однородном цилиндре, т. е. определив функцию $F(x,y,\xi)$, по указанным формулам получаем решение аналогичных задач в кусочно-однородных полуцилиндрах.

2.5 Краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах с двумя пересекающимися поверхностями сопряжения

Полученные в предыдущих параграфах формулы (2.1.20), (2.1.21), (2.2.20), (2.2.21), (2.3.17), (2.3.18) для $u_i(x,y)$ и (2.4.14), (2.4.15) для $\varphi^{\pm}(x,y,\xi)$ имеют вид операторов, действующих на соответствующую функцию F по одной переменной, причем в соответствующих условиях сопряжения также участвует одна указанная переменная, остальные переменные остаются свободными. При этом функции $u_i(x,y)$ и $\varphi^{\pm}(x,y,\xi)$ удовлетворяют соответствующим условиям сопряжения тождественно (для любой дифференцируемой функции F). Отсюда по свободным переменным функции $u_i(x,y)$ и $\varphi^{\pm}(x,y,\xi)$ также могут удовлетворять условиям сопряжения. Тогда решения полученных задач строятся в виде композиции соответствующих операторов.

Рассмотрим полуцилиндр D предыдущего пункта, состоящий из четырех зон: $D = D_1^- \cup D_2^- \cup D_1^+ \cup D_2^+$, разделенных плоскостями $x = 0$ и $y = -l$ на зоны $D_i^{\pm}$ проницаемости k_i в D_i^+ и $k_i p$ в D_i^- , где постоянная $p > 0$, $r(\xi) \geq 0$ — заданная непрерывная функция $D_1^- = \{(x,y,\xi) : -r(\xi) < x < 0, y < -l, \xi \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_1^+ = \{(x,y,\xi) : 0 < x < r(\xi), y < -l, \xi \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_2^- = \{(x,y,\xi) : -r(\xi) < x < 0, -l < y < 0, \xi \in Q \subseteq R^{m-2}\}$,

$D_2^+ = \{(x,y,\xi) : 0 < x < r(\xi), -l < y < 0, \xi \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ (полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$).

Рассмотрим для потенциалов $\varphi_i^\pm$ в $D_i^\pm$ задачи в полуцилиндре D с граничным условием 1-го рода при $y = 0$:

$$\Delta\varphi_i^\pm = 0, \qquad G[\varphi_i^\pm]_{|x=\pm r(\xi)} = 0, \tag{2.5.1}$$

$$y = -l: \qquad \varphi_1^\pm = \varphi_2^\pm, \qquad k_1\partial_y\varphi_1^\pm = k_2\partial_y\varphi_2^\pm, \tag{2.5.2}$$

$$x = 0: \qquad \varphi_i^- = \varphi_i^+, \qquad p\,\partial_x\varphi_i^- = \partial_x\varphi_i^+, \tag{2.5.3}$$

$$\varphi_{2|y=0}^- = 0, \qquad \varphi_{2|y=0}^+ = f(x,\xi), \tag{2.5.4}$$

где оператор G является оператором граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода (2.4.2). Представим решение задачи (2.5.1)-(2.5.4) в виде (2.4.14), (2.4.15):

$$\varphi_i^- = \frac{2}{1+p}u_i(x,y,\xi), \qquad \varphi_i^+ = u_i(x,y,\xi) + \frac{1-p}{1+p}u_i(-x,y,\xi), \tag{2.5.5}$$

при этом функции $\varphi_i^\pm$ тождественно удовлетворяют условиям (2.5.3) при $x = 0$. Отсюда для функций u_i в D_i получим задачу вида (2.1.1)-(2.1.3):

$$\Delta u_i = 0, \qquad G[u_i]_{|x=\pm r(\xi)} = 0, \qquad u_{2|y=0} = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases}$$

$$y = -l: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2,$$

где $D_1 = \{(x,y) : -r(\xi) < x < r(\xi), y < -l, \xi \in Q\}$, $D_2 = \{(x,y,\xi) : -r(\xi) < x < r(\xi), -l < y < 0, \xi \in Q\}$. Решение последней задачи имеет вид (2.1.20), (2.1.21):

$$u_1 = (1-\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n F(x, y-2nl, \xi), \tag{2.5.6}$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n[F(x,y-2nl,\xi) - \nu F(x,-y-2l(n+1),\xi)], \tag{2.5.7}$$

где $\nu = (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}$, $F(x, y, \xi)$– решение краевой задачи в однородном полуцилиндре D с условием Дирихле на его основании:

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x, \xi), x > 0, \end{cases} \qquad G[F]_{|x=\pm r(\xi)} = 0. \tag{2.5.8}$$

Таким образом, решение задачи (2.5.1)-(2.5.4) строится по формулам (2.5.5)-(2.5.7).

Если на основании полуцилиндра D заданы условия 2-го рода

$$\partial_y \varphi^-_{2|y=0} = 0, \qquad \partial_y \varphi^+_{2|y=0} = f(x, \xi), \tag{2.5.9}$$

то рассуждая аналогично, решение соответствующей задачи (2.5.1)-(2.5.3), (2.5.9) найдем в виде (2.5.5), где функции $u_i(x, y, \xi)$ строятся по формулам (2.2.20), (2.2.21):

$$u_1 = (1 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n F(x, y - 2nl, \xi),$$

$$u_2 = F(x, y, \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n [F(x, y - 2nl, \xi) + F(x, -y - 2nl, \xi)],$$

$\mu = (k_2 - k_1)(k_1 + k_2)^{-1}$, $F(x, y, \xi)$ — решение задачи в однородном полуцилиндре D с условием Неймана на его основании:

$$\Delta F = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x, \xi), x > 0 \end{cases}, \qquad G[F]_{|x=\pm r(\xi)} = 0.$$

Если на основании полуцилиндра D заданы условия 3-го рода

$$\partial_y \varphi^-_2 + \gamma \varphi^-_{2|y=0} = 0, \qquad \partial_y \varphi^+ + \gamma \varphi^+_{2|y=0} = f(x, \xi), \tag{2.5.10}$$

то решение задачи (2.5.1)-(2.5.3), (2.5.10) имеет вид (2.5.5), где функции $u_i(x, y, \xi)$ строятся по формулам (2.3.17), (2.3.18):

$$u_1 = (1 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{(-2\gamma)^j}{j!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} t^j F(x, y - 2nl - t, \xi) dt,$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{(-2\gamma)^j}{j!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} t^j [F(x, y - 2nl - t, \xi) +$$

$$+ \mu F(x, -y - 2l(n+1) - t, \xi)] dt,$$

$F(x, y, \xi)$ — решение задачи (2.5.8) в однородном полуцилиндре с условием Дирихле на его основании.

Справедливость полученных формул проверяется непосредственно.

Таким образом, в основе всех рассмотренных данной главе задач в кусочно-однородных полуцилиндрах лежат решения классических задач в однородных полуцилиндрах с условиями 1-го или 2-го рода на их основаниях.

Глава 3

Решение краевых задач в полуцилиндрах с трещиной (завесой), параллельной основанию

3.1 Обобщенные условия сопряжения

В данной и следующей главе рассматриваются краевые задачи в полуцилиндрах, содержащих пленочные включения типа сильно проницаемой трещины или слабо проницаемой завесы. Следуя работам [66]-[72], трещину и завесу моделируем бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещины и бесконечно малой для завесы проницаемостью.

Рассмотрим в пространстве $(x, y) \in R^m$ трещину (завесу) в виде плоскости $y = 0$, разделяющей две однородные области $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y > 0\}$ проницаемости k_i в D_i. Аналогично работе [68] приведем вывод обобщенных условий сопряжения на данной трещине (завесе). Заменим трещину (завесу) $y = 0$ слоем $D_0 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, 0 < y < l\}$ конечной толщины l и проницаемости k_0. Отсюда для потенциалов $u_i(x, y)$, определенных в D_i, выполняются классические условия сопряжения на ∂D_0 вида

$$y = 0 : \qquad u_0 = u_1, \qquad k_0\partial_y u_0 = k_1\partial_y u_1, \tag{3.1.1}$$

$$y = -l : \qquad u_2 = u_0, \qquad k_2\partial_y u_2 = k_0\partial_y u_0, \tag{3.1.2}$$

При этом потенциалы u_i в D_i удовлетворяют уравнению Лапласа по всем переменным $(x_1, ..., x_{m-1}, y)$:

$$\Delta u_i = 0. \tag{3.1.3}$$

Найдем приращения потенциала и нормальной скорости (потока) на ∂D_0. С учетом равенств (3.1.1), (3.1.2) и теоремы о среднем получим

$$u_{2|y=l} - u_{1|y=0} = u_{0|y=l} - u_{0|y=0} = \frac{l}{k_0} k_0 \partial_y u_{0|y=c_1}, \tag{3.1.4}$$

$$k_2 \partial_y u_{2|y=l} - k_1 \partial_y u_{1|y=0} = k_0 \partial_y u_{0|y=l} - k_0 \partial_y u_{0|y=0} = k_0 l \partial_y^2 u_{0|y=c_2}, \tag{3.1.5}$$

где $c_i \in (0, l)$.

Пусть слой D_0 вырождается в трещину, т. е. $l \to 0$, $k_0 \to \infty$ так, что $k_0 l \to A$, где A — параметр трещины. Переходя к указанному пределу, из равенства (3.1.4) и первого равенства (3.1.1) следует $\lim u_{0|y=l} = \lim u_{0|y=0} = \lim u_{1|y=0}$. Отсюда с учетом принципа максимума для уравнения Лапласа (3.1.3) получим $\lim u_{0|y=c_2} = \lim u_{1|y=0}$ при $\forall c_2 \in (0, l)$. Действуя на последнее соотношение оператором Лапласа по свободным переменным $(x_1, ..., x_{m-1})$, с учетом уравнения (3.1.3) найдем $\lim \partial_y^2 u_{0|y=c_2} = \lim \partial_y^2 u_{1|y=0}$. Отсюда из равенств (3.1.4), (3.1.5) получим обобщенные условия сопряжения на сильно проницаемой трещине $y = 0$ вида

$$y = 0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2 \partial_y u_2 - k_1 \partial_y u_1 = A \partial_y^2 u_1, \tag{3.1.6}$$

Пусть слой D_0 вырождается в завесу, т. е. $l \to 0$, $k_0 \to 0$ так, что $l/k_0 \to B$, где B — параметр завесы. Тогда из равенства (3.1.5) и второго равенства (3.1.1) следует $\lim k_0 \partial_y u_{0|y=l} = \lim k_0 \partial_y u_{0|y=0} = \lim k_1 \partial_y u_{1|y=0}$. Откуда $\lim k_0 \partial_y u_{0|y=c_1} = \lim k_1 \partial_y u_{1|y=0}$ для $\forall c_1 \in (0, l)$. Отсюда с учетом (3.1.4), (3.1.5) получим обобщенные условия сопряжения на слабо проницаемой завесе $y = 0$ вида

$$y = 0: \qquad u_2 - u_1 = B k_1 \partial_y u_1, \qquad k_2 \partial_y u_2 = k_1 \partial_y u_1. \tag{3.1.7}$$

Из равенств (3.1.6) и (3.1.7) следует, что на трещине потенциал непрерывен, а поток терпит разрыв; на завесе поток непрерывен, а потенциал терпит разрыв. Это объясняется тем, что частицы движущейся среды, протекая по сильно проницаемой трещине, могут вытекать из нее в точках, отличных от точек втекания, и чтобы прорвать завесу на ней должна поддерживаться некоторая разность потенциалов [66]-[68].

Полученные условия сопряжения (3.1.6), (3.1.7) совпадают с аналогичными условиями сопряжения на трещинах и завесах, полученных из других соображений [26, 2, 8, 46].

3.2 Задачи с условиями Дирихле на основании полуцилиндров. Случай трещины

Рассмотрим однородный полуцилиндр $D = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с сильно проницаемой трещиной $y = -l$, разделяющей область D на две зоны $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$. Рассмотрим в D задачу

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.2.1}$$

$$y = -l : \qquad u_2 = u_1, \qquad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A\partial_y^2 u_1, \tag{3.2.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0, \tag{3.2.3}$$

где $A > 0$ — параметр трещины (3.1.6), S — боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u] = \alpha\partial_n u + \beta u$, $\overrightarrow{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y, т. е. на поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках, u_i — искомые потенциалы в D_i. В данном случае проницаемость зон D_i одинаковая, т. е. в условиях сопряжения (3.1.6) $k_1 = k_2 = 1$.

Пусть, как и выше, известно решение $F(x,y)$ соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без трещины

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x), \tag{3.2.4}$$

$$G[F]_{|S} = 0 \tag{3.2.5}$$

(задача (3.2.4), (3.2.5) рассмотрена в § 2.1 (2.1.4), (2.1.5)). Выразим решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) в полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$ с трещиной $y = -l$ через решение $F(x,y)$ задачи (3.2.4), (3.2.5) в однородном полуцилиндре.

Для вывода общих формул рассмотрим частный случай задачи (3.2.1)-(3.2.3) на плоскости x, y при $x \in Q = R$. Отсюда для функций u_i получим задачу в полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) : x \in R, y < -l\}$, $D_2 = \{(x,y) : x \in R, -l < y < 0\}$ вида

$$\Delta u_i = 0, \qquad (x,y) \in D_i, \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.2.6}$$

$$y = -l: \qquad u_2 = u_1, \qquad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A\partial_y^2 u_1, \tag{3.2.7}$$

Выразим решение данной задачи через решение $F(x,y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости $D = \{(x,y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta F(x,y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x). \tag{3.2.8}$$

Пусть граничная функция $f(x)$, а значит и функция $F(x,y)$, представляется интегралом Фурье (2.1.10),(2.1.13):

$$f(x) = \int\limits_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda, \qquad g(x,\lambda) = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \tag{3.2.9}$$

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y \le 0, \tag{3.2.10}$$

здесь $f_i(\lambda)$ — коэффициенты Фурье граничной функции $f(x)$ (2.1.11). Представим решение задачи (3.2.6), (3.2.7) в виде:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1 \, e^{\lambda(y+l)} g \, d\lambda, \qquad y < -l, \tag{3.2.11}$$

$$u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2 \, g \, sh \, \lambda y \, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{3.2.12}$$

здесь функция $g(x,\lambda)$ имеет вид (3.2.9), при этом функции u_i удовлетворяют уравнению и граничному условию (3.2.6). Тогда из условий сопряжения (3.2.7) с учетом разложения (3.2.10) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений:

$$e^{-\lambda l} - a_2 \, sh \, \lambda l = a_1, \qquad e^{-\lambda l} + a_2 \, ch \, \lambda l = a_1(1 + A\lambda)$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda l} A\lambda}{d},$$

где

$$d = A\lambda \, sh \, \lambda l + e^{\lambda l}. \tag{3.2.13}$$

Отсюда функции u_i (3.2.11), (3.2.12) примут вид

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{3.2.14}$$

$$u_2 = F(x,y) + A \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \lambda \, g \, sh \, \lambda y}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{3.2.15}$$

где функции d, g равны (3.2.13), (3.2.9), $F(x,y)$ - решение задачи Дирихле (3.2.8).

Лемма 3.2.1 *Если граничная функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье (3.2.9), то решение задачи (3.2.6),(3.2.7) строится по формулам (3.2.14), (3.2.15).*

Доказательство. Из равенства (3.2.13) следует $d \geq 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (3.2.14), (3.2.15) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (3.2.14), (3.2.15) имеют соответственно асимптотику $O(\lambda^{-1}e^{\lambda y})$ при $y < -l < 0$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (3.2.14), (3.2.15) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (3.2.6), (3.2.7) для функций (3.2.14), (3.2.15) проверяются непосредственной подстановкой.

Полученное решение (3.2.14), (3.2.15) содержит две квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье (2.1.11)) от сильно осциллирующих функций. Следуя методу работ [66]-[72], приведем полученные решения (3.2.14), (3.2.15) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (3.2.13) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda+\gamma)(1-q)},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{A} > 0, \qquad q = \frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda+\gamma}, \tag{3.2.16}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda l(2n+1)}\lambda^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}.$$

Отсюда функции u_i (3.2.14),(3.2.15) примут вид

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda(y-2nl)}\lambda^n\, g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}} d\lambda, \tag{3.2.17}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\right)^n [e^{\lambda(y-2nl)} - e^{-\lambda(y+2nl)}]\, g\, d\lambda. \tag{3.2.18}$$

Воспользуемся формулой (2.3.16):

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n\, F(x, y-z)\, dz = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x,\lambda)}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\, d\lambda, \qquad y \leq 0, \tag{3.2.19}$$

где $F(x,y)$ — решение задачи Дирихле (2.3.8) (или (3.2.8)), функция g имеет вид (3.2.9), постоянная $\gamma > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ Дифференцируя данное равенство k раз по y, находим

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^k F(x, y-z)\, dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y}\,\lambda^k g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\, d\lambda. \tag{3.2.20}$$

Отсюда решение (3.2.17), (3.2.18) задачи (3.2.6), (3.2.7) приводится к виду

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^n F(x, y-2nl-z)\, dz, \tag{3.2.21}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^{n-1}\, \partial_y^n [F(x, y-2nl-z) - \\ -F(x, -y-2nl-z)]\, dz, \tag{3.2.22}$$

где γ имеет вид (3.2.16), $F(x,y)$– решение задачи Дирихле (3.2.8).

Полученные формулы (3.2.21), (3.2.22) справедливы для общего случая задачи (3.2.1)-(3.2.3) в полуцилиндре D. При этом формулы (3.2.21), (3.2.22) справедливы для ограниченных и неограниченных при $y \to -\infty$ функций $F(x,y)$.

Теорема 3.2.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи (3.2.4), (3.2.5) и для любого $n \geq 0$ функции $\partial_y^n F(x,y)$ удовлетворяют условию $|\partial_y^n F(x,y)| = O(\alpha^n e^{\alpha|y|})$ при $y \to -\infty$, где $0 < \alpha < \alpha_0$, $\alpha_0(e^{2l\alpha_0}+1) = \gamma$, то решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) строится по формулам (3.2.21), (3.2.22).*

Доказательство. Аргументы функции F под знаками рядов (3.2.21), (3.2.22) принадлежат области D, где выполняются условия теоремы. Отсюда

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n\, |\partial_y^n F(x, y-2nl-z)|\, dz < c\frac{\alpha^n}{n!} e^{\alpha(2nl-y)} \int\limits_0^\infty e^{-(\gamma-\alpha)z} z^n\, dz = \frac{ce^{-\alpha y}}{\gamma-\alpha} b^n,$$

$$b = \frac{\alpha e^{2l\alpha}}{\gamma - \alpha},$$

причем $0 < b < 1$, т. е. мажорирующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \tag{3.2.23}$$

является сходящейся геометрической прогрессией. Тогда ряды (3.2.21), (3.2.22) сходятся абсолютно и равномерно, и допускают дифференцирование необходимое число раз.

Формулы (3.2.21), (3.2.22) имеют вид операторов, действующих на заданную функцию $F(x, y)$ по одной переменной y, при этом условия сопряжения (3.2.2) по этой переменной y выполняются тождественно (для любой дважды дифференцируемой функции $F(x, y)$), что проверяется интегрированием по частям. Переменная x в (3.2.21), (3.2.22) остается свободной (параметром) и по этой переменной функции (3.2.21), (3.2.22) вместе в функцией $F(x, y)$ могут удовлетворять дополнительным условиям.

Для проверки выполнения остальных условий задачи (3.2.1)-(3.2.3) приведем формулы (3.2.21), (3.2.22) к виду, не содержащему производных. С учетом равенства

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\right)^n = \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{-\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^k \tag{3.2.24}$$

и формулы (3.2.19) решение (3.2.17), (3.2.18) задачи (3.2.1)-(3.2.3), примет вид

$$u_1 = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl), \tag{3.2.25}$$

$$u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k [\Phi_k(x, y - 2nl) - \Phi_k(x, -y - 2nl)], \tag{3.2.26}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x, y) = F(x, y)$,

$$\Phi_k(x, y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y - z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \ y < 0.$$

Отсюда уравнение и граничные условия (3.2.1), (3.2.3) выполняются, т. к. они имеют место для функции $F(x, y)$.

Отметим, что формулы (3.2.21), (3.2.22), дающие решение общей задачи (3.2.1)-(3.2.3) выведены посредством применения метода Фурье к решению частной задачи (3.2.6), (3.2.7) в полуплоскости. При этом непосредственное решение общей задачи (3.2.1)-(3.2.3) методом Фурье, как отмечалось, вызывает большие математические трудности (связанные с нахождением собственных функций для оператора Лапласа с условиями на S (3.2.3), (3.2.5) и т.д.). Кроме того, в случаях, когда метод Фурье применим, например, в случае задачи (3.2.6), (3.2.7), формулы (3.2.21), (3.2.22) проще формул (3.2.14), (3.2.15), полученных методом Фурье. Именно, формулы (3.2.14), (3.2.15) содержат две квадратуры внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье f_i от сильно осциллирующих подынтегральных функций, а формулы (3.2.21), (3.2.22) содержат одну квадратуру и имеют вид быстросходящихся рядов (со скоростью геометрических прогрессий). С другой стороны, формулы (3.2.21), (3.2.22) справедливы для более широкого класса заданных функций F (в смысле их поведения на ∞), чем решения (3.2.14), (3.2.15), полученные методом Фурье.

3.3 Задачи с условиями Дирихле на основании полуцилиндров. Случай завесы

Пусть в рассмотренном полуцилиндре D зоны D_i разделены слабо проницаемой завесой $y = -l$ с параметром B. Отсюда для потенциалов u_i в D_i получим задачу

$$\Delta u_i = 0, \qquad (x, y) \in D_i; \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.3.1}$$

$$y = -l: \qquad u_2 - u_1 = B\partial_y u_1, \qquad \partial_y u_2 = \partial_y u_1, \tag{3.3.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0. \tag{3.3.3}$$

Выразим решение задачи (3.3.1)-(3.3.3) через решение $F(x, y)$ задачи (3.2.4), (3.2.5) в однородном полуцилиндре:

$$\Delta F = 0, \qquad (x, y) \in D; \qquad F_{|y=0} = f(x), \tag{3.3.4}$$

$$G[F]_{|S} = 0. \tag{3.3.5}$$

Для вывода общих формул, как и выше, рассмотрим частный случай задачи (3.3.1)-(3.3.3) на плоскости x, y при $x \in Q = R$:

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.3.6}$$

$$y = -l: \qquad u_2 - u_1 = B\partial_y u_1, \qquad \partial_y u_2 = \partial_y u_1, \tag{3.3.7}$$

и выразим решение данной задачи через решение $F(x, y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta F(x, y) = 0, \qquad F_{|y=0} = f(x). \tag{3.3.8}$$

Пусть граничная функция $f(x)$, а значит и функция $F(x, y)$, разлагаются в интегралы Фурье

$$f(x) = \int\limits_0^\infty g(x, \lambda) d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = f_1 \sin \lambda x + f_2 \cos \lambda x, \tag{3.3.9}$$

$$F(x, y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g \, d\lambda, \qquad y \leq 0. \tag{3.3.10}$$

Представляя решение задачи (3.3.6), (3.3.7) в виде:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1 \, e^{\lambda(y+l)} g \, d\lambda, \qquad y < -l, \tag{3.3.11}$$

$$u_2 = F(x, y) + \int\limits_0^\infty a_2 \, g \, sh \, \lambda y \, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{3.3.12}$$

из условий сопряжения (3.3.7) с учетом (3.3.10) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений:

$$e^{-\lambda l} - a_2 \, sh \, \lambda l = a_1(1 + \lambda B), \qquad e^{-\lambda l} + a_2 \, ch \, \lambda l = a_1$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = -\frac{e^{-\lambda l} B\lambda}{d},$$

где

$$d = B\lambda\, ch\, \lambda l + e^{\lambda l}. \tag{3.3.13}$$

Отсюда функции u_i (3.3.11), (3.3.12) примут вид

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{3.3.14}$$

$$u_2 = F(x,y) - B\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l}\lambda\, g\, sh\, \lambda y}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{3.3.15}$$

где функции d, g равны (3.3.13), (3.3.9), $F(x,y)$ - решение задачи Дирихле (3.3.8).

Лемма 3.3.1 *Если граничная функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье (3.3.9), то решение задачи (3.3.6), (3.3.7) строится по формулам (3.3.14), (3.3.15).*

Доказательство. Из равенства (3.3.13) следует $d \geq 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (3.3.14), (3.3.15) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (3.3.14), (3.3.15) имеют соответственно асимптотику $O(\lambda^{-1} e^{\lambda y})$ при $y < -l < 0$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (3.3.14), (3.3.15) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (3.3.6), (3.3.7) для функций (3.3.14), (3.3.15) проверяются непосредственной подстановкой.

Приведем полученные решения (3.3.14), (3.3.15) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (3.3.13) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda + \gamma)(1 - q)},$$

где
$$\gamma = \frac{2}{B} > 0, \qquad q = -\frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda + \gamma}, \tag{3.3.16}$$
при этом $|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем
$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda l(2n+1)}(-\lambda)^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}.$$
Отсюда функции u_i (3.3.14),(3.3.15) примут вид
$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(y-2nl)}(-\lambda)^n\, g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}} d\lambda, \tag{3.3.17}$$
$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{\lambda+\gamma}\right)^n \left[e^{\lambda(y-2nl)} - e^{-\lambda(y+2nl)}\right] g\, d\lambda. \tag{3.3.18}$$
С учетом формулы (3.2.20):
$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^k F(x, y-z)\, dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y}\lambda^k g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\, d\lambda$$
решение (3.3.17), (3.3.18) задачи (3.3.6), (3.3.7) приведем к виду
$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^n F(x, y-2nl-z)\, dz, \tag{3.3.19}$$
$$\begin{gathered} u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1}\, \partial_y^n [F(x, y-2nl-z) - \\ -F(x, -y-2nl-z)]\, dz, \end{gathered} \tag{3.3.20}$$
где γ имеет вид (3.3.16), $F(x,y)-$ решение задачи Дирихле (3.3.8).

Формулы (3.3.19), (3.3.20), как и выше, справедливы для общего случая задачи (3.3.1)-(3.3.3), где $F(x,y)-$ решение задачи (3.3.4), (3.3.5).

Теорема 3.3.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи (3.3.4), (3.3.5) и удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, то решение задачи (3.3.1)-(3.3.3) строится по формулам (3.3.19), (3.3.20).*

С учетом равенств (3.2.24) и (3.2.19) функции u_i (3.3.17), (3.3.18) приводятся к виду, не содержащему производных:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl), \tag{3.3.21}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k [\Phi_k(x, y - 2nl) - \Phi_k(x, -y - 2nl)], \tag{3.3.22}$$

где C_n^k– биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x,y) = F(x,y)$,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y - z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \; y < 0.$$

Отсюда доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.1. При этом учитывается, что модули членов рядов (3.3.19), (3.3.20) и (3.2.21), (3.2.22), а также рядов (3.3.21), (3.3.22) и (3.2.25), (3.2.26) совпадают, т. е. эти ряды (3.3.19), (3.3.20) мажорируются сходящимся рядом вида (3.2.23).

3.4 Задачи с условиями Неймана на основании полуцилиндров. Случай трещины

Рассмотрим в однородном полуцилиндре $D = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с трещиной $y = -l$, разделяющей область D на две зоны $D_1 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$ и $D_2 = \{(x,y) : x = (x_1, ..., x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ задачу

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.4.1}$$

$$y = -l : \qquad u_2 = u_1, \qquad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A\partial_y^2 u_1, \tag{3.4.2}$$

$$G[u_i]_{|S} = 0, \tag{3.4.3}$$

где $A > 0$ — параметр трещины, S — боковая поверхность полуцилиндра D, оператор $G[u]$ определен в (3.2.3).

Пусть известно решение $F(x,y)$ соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D=\{(x,y): x=(x_1,...,x_{m-1})\in Q\subseteq R^{m-1}, y<0\}$ без трещины

$$\Delta F=0, \qquad \partial_y F_{|y=0}=f(x), \tag{3.4.4}$$

$$G[F]_{|S}=0 \tag{3.4.5}$$

(задача (3.4.4), (3.4.5) рассмотрена в § 2.1 (2.2.4), (2.2.5)). Выразим решение задачи (3.4.1)-(3.4.3) в полуцилиндре $D=D_1\cup D_2$ с трещиной $y=-l$ через решение $F(x,y)$ задачи (3.4.4), (3.4.5) в однородном полуцилиндре.

Для вывода общих формул рассмотрим частный случай задачи (3.4.1)-(3.4.3) в полуплоскости $D=D_1\cup D_2$, $D_1=\{(x,y): x\in Q=R, y<-l\}$, $D_2=\{(x,y): x\in Q=R, -l<y<0\}$ вида

$$\Delta u_i=0, \qquad \partial_y u_{2|y=0}=f(x), \tag{3.4.6}$$

$$y=-l: \qquad u_2=u_1, \qquad \partial_y u_2-\partial_y u_1=A\partial_y^2 u_1, \tag{3.4.7}$$

Пусть $F(x,y)$ — известное решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости $D=\{(x,y): x\in R, y<0\}$:

$$\Delta F(x,y)=0, \qquad \partial_y F_{|y=0}=f(x). \tag{3.4.8}$$

Выразим решение данной задачи (3.4.6), (3.4.7) через решение $F(x,y)$. Предположим, что функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье (2.2.10):

$$F(x,0)=\int\limits_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda, \qquad g(x,\lambda)=f_1\sin\lambda x+f_2\cos\lambda x, \tag{3.4.9}$$

где $f_i(\lambda)$ — коэффициенты Фурье функции $F(x,0)$ (2.2.12). Отсюда решая методом Фурье задачу Дирихле в полуплоскости $D=\{(x,y): x\in R, y<$

$0\}$ с граничной функцией $F(x,0)$, получим разложение функции $F(x,y)$ в интеграл Фурье вида

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y \le 0, \tag{3.4.10}$$

где g имеет вид (2.4.9).

Представим решение задачи (3.4.6), (3.4.7) также в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda(y+l)} g\, d\lambda, \qquad u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2\, g\, ch\, \lambda y\, d\lambda, \tag{3.4.11}$$

при этом функции (3.4.11) удовлетворяют уравнению и граничному условию (3.4.6). Из условий сопряжения (3.4.7) с учетом разложения (3.4.10) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений

$$e^{-\lambda l} + a_2\, ch\, \lambda l = a_1, \qquad e^{-\lambda l} - a_2\, sh\, \lambda l = a_1(1 + A\lambda),$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda l} A\lambda}{d},$$

где

$$d = A\lambda\, ch\, \lambda l + e^{\lambda l}. \tag{3.4.12}$$

Отсюда функции u_i (3.4.11) примут вид

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{3.4.13}$$

$$u_2 = F(x,y) - A \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \lambda\, g\, ch\, \lambda y}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{3.4.14}$$

где функции d, g равны (3.4.12), (3.4.9), $F(x,y)$ — решение задачи (3.4.8).

Лемма 3.4.1 *Если функция $F(x, y)$ является решением задачи Неймана (3.4.8) и функция $F(x, 0)$ разлагается в интеграл Фурье (3.4.10), то решение задачи (3.4.6),(3.4.7) строится по формулам (3.4.13),(3.4.14).*

Доказательство. Из равенства (3.4.12) следует $d \geq 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (3.4.13), (3.4.14) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (3.4.13), (3.4.14) имеют соответственно асимптотику $O(\lambda^{-1}e^{\lambda y})$ при $y < -l < 0$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (3.4.13), (3.4.14) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (3.4.6), (3.4.7) для функций (3.4.13), (3.4.14) проверяются непосредственной подстановкой.

Приведем решение (3.4.13), (3.4.14) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (3.4.12) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda + \gamma)(1 - q)},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{A} > 0, \qquad q = -\frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda + \gamma}, \tag{3.4.15}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1 - q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda l(2n+1)}\lambda^n}{(\lambda + \gamma)^{n+1}}.$$

Отсюда функции u_i (3.4.13),(3.4.14) примут вид

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(y-2nl)}\lambda^n \, g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \tag{3.4.16}$$

$$u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \gamma}\right)^n [e^{\lambda(y-2nl)} + e^{-\lambda(y+2nl)}] \, g \, d\lambda. \tag{3.4.17}$$

Заменяя в разложении (3.4.10) переменную $y \leq 0$ на $y - z$ $(z > 0)$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma z} z^n (n!)^{-1}$, где $\gamma > 0$, $n = 0, 1, 2...$, и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, получим формулу, аналогичную (3.2.19):

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \, F(x, y - z) \, dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} \, d\lambda, \qquad y \leq 0, \tag{3.4.18}$$

а также формулу, полученную из (3.4.18) дифференцированием по y:

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^k F(x, y - z) \, dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} \, \lambda^k g(x, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} \, d\lambda, \tag{3.4.19}$$

где $F(x, y)$ — решение задачи Неймана (3.4.8), функция g имеет вид (3.4.9). Отсюда решение (3.4.16), (3.4.17) привем к виду

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) \, dz, \tag{3.4.20}$$

$$\begin{aligned} u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) - \\ - F(x, -y - 2nl - z)] \, dz, \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

где γ имеет вид (3.4.15).

Поскольку формулы (3.4.20), (3.4.21) имеют вид операторов, действующих на заданную функцию $F(x, y)$ по одной переменной y, то эти формулы справедливы для общего случая задачи (3.4.1)-(3.4.3).

Теорема 3.4.1 *Если функция $F(x, y)$ является решением задачи (3.4.4), (3.4.5) и удовлетворяет условиям теоремы (3.2.1), то решение задачи (3.4.1)-(3.4.3) строится по формулам (3.4.20), (3.4.21).*

С учетом равенств (3.2.24) и (3.4.18) функции u_i (3.4.16), (3.4.17) приводятся к виду, не содержащему производных:

$$u_1 = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl), \tag{3.4.22}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k [\Phi_k(x, y-2nl) + \Phi_k(x, -y-2nl)], \quad (3.4.23)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x,y) = F(x,y)$,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y-z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \; y < 0.$$

При этом модули членов рядов (3.4.20)-(3.4.23) совпадают с модулями соответствующих членов рядов (3.2.21), (3.2.22), (3.2.25), (3.2.26). Отсюда ряды (3.4.20)-(3.4.23) сходятся. Условия задачи (3.4.1)-(3.4.3) для функций полученных функций u_i проверяются непосредственно, аналогично теореме (3.2.1).

3.5 Задачи с условиями Неймана на основании полуцилиндров. Случай завесы

Пусть в рассмотренном полуцилиндре D (3.4.1)-(3.4.3) зоны D_i разделены слабо проницаемой завесой $y = -l$ с параметром B. Отсюда для потенциалов u_i в D_i получим задачу

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \quad (3.5.1)$$

$$y = -l : \qquad u_2 - u_1 = B\partial_y u_1, \qquad \partial_y u_2 = \partial_y u_1, \quad (3.5.2)$$

$$G[u_i]_{|S} = 0. \quad (3.5.3)$$

Выразим решение задачи (3.5.1)-(3.5.3) через решение $F(x,y)$ аналогичной задачи в однородном полуцилиндре:

$$\Delta F = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = f(x), \quad (3.5.4)$$

$$G[F]_{|S} = 0. \quad (3.5.5)$$

Для вывода общих формул рассмотрим частный случай задачи (3.5.1)-(3.5.3) в полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) : x \in R, y < -l\}$,

$D_2 = \{(x,y) : x \in R, -l < y < 0\}$ вида

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \tag{3.5.6}$$

$$y = -l: \qquad u_2 - u_1 = B\partial_y u_1, \qquad \partial_y u_2 = \partial_y u_1, \tag{3.5.7}$$

Пусть $F(x,y)$ — известное решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости $D = \{(x,y) : x \in R, y < 0\}$:

$$\Delta F(x,y) = 0, \qquad \partial_y F_{|y=0} = f(x). \tag{3.5.8}$$

Выразим решение данной задачи (3.5.6), (3.5.7)через функцию $F(x,y)$. Пусть функция $F(x,0)$, а значит и функция $F(x,y)$, разлагаются в интегралы Фурье

$$F(x,0) = \int\limits_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda, \qquad g(x,\lambda) = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \tag{3.5.9}$$

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y \le 0. \tag{3.5.10}$$

где f_i — коэффициенты Фурье функции $F(x,0)$. Представляя решение задачи (3.5.6), (3.5.7) в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda(y+l)} g\, d\lambda, \qquad u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2\, g\, ch\,\lambda y\, d\lambda, \tag{3.5.11}$$

из условий сопряжения (3.5.7) с учетом разложения (3.5.10) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений

$$e^{-\lambda l} + a_2\, ch\,\lambda l = a_1(1 + \lambda B), \qquad e^{-\lambda l} - a_2\, sh\,\lambda l = a_1$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda l} B\lambda}{d},$$

где

$$d = B\lambda\, sh\, \lambda l + e^{\lambda l}. \qquad (3.5.12)$$

Отсюда функции u_i (3.5.12) примут вид

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \qquad (3.5.13)$$

$$u_2 = F(x,y) + B \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \lambda\, g\, ch\, \lambda y}{d} d\lambda, \qquad -l < y < 0, \qquad (3.5.14)$$

где функции d, g равны (3.5.12), (3.5.9), $F(x,y)$ — решение задачи Неймана (3.5.8).

Лемма 3.5.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи Неймана (3.5.8) и функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье (3.5.9), то решение задачи (3.5.6), (3.5.7) строится по формулам (3.5.13), (3.5.14).*

Доказательство. Из равенства (3.5.12) следует $d \geq 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т.е. подынтегральные функции (3.5.13), (3.5.14) ограничены при $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции (3.5.13), (3.5.14) имеют соответственно асимптотику $O(\lambda^{-1} e^{\lambda y})$ при $y < -l < 0$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (3.5.13), (3.5.14) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (3.5.6), (3.5.7) для функций (3.5.13), (3.5.14) проверяются непосредственно.

Приведем полученные решения (3.5.13), (3.5.14) к виду, не содержащему разложений Фурье. Из равенства (3.5.12) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda + \gamma)(1 - q)},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{B} > 0, \qquad q = \frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda + \gamma}, \qquad (3.5.15)$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda l(2n+1)}\lambda^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}.$$

Отсюда функции u_i (3.5.13), (3.5.14) примут вид

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda(y-2nl)}\lambda^n\, g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}} d\lambda, \tag{3.5.16}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\right)^n \left[e^{\lambda(y-2nl)} + e^{-\lambda(y+2nl)}\right] g\, d\lambda. \tag{3.5.17}$$

При этом с учетом формулы (3.4.19):

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^k F(x, y-z)\, dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y}\lambda^k g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\, d\lambda$$

решение (3.5.16), (3.5.17) задачи (3.5.6), (3.5.7) приведем к виду

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n\, \partial_y^n F(x, y-2nl-z)\, dz, \tag{3.5.18}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1}\, \partial_y^n [F(x, y-2nl-z) +$$
$$+ F(x, -y-2nl-z)]\, dz, \tag{3.5.19}$$

где γ имеет вид (3.5.15), $F(x,y)$ — решение задачи Неймана (3.5.8).

Формулы (3.5.18), (3.5.19), справедливы для общего случая задачи (3.5.1)-(3.5.3).

Теорема 3.5.1 *Если функция $F(x,y)$ является решением задачи (3.5.4), (3.5.5) и удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, то решение задачи (3.5.1)-(3.5.3) строится по формулам (3.5.18), (3.5.19).*

С учетом равенств (3.2.24) и (3.4.18) функции u_i (3.5.16), (3.5.17) приводятся к виду, не содержащему производных:

$$u_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Phi_{k+1}(x, y-2nl), \tag{3.5.20}$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k[\Phi_k(x, y-2nl) + \Phi_k(x,-y-2nl)], \qquad (3.5.21)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x,y) = F(x,y)$,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y-z)\, dz \qquad k = 1, 2, ..., \ y < 0.$$

Отсюда справедливость теоремы следует из того, что модули члены рядов (3.5.18)-(3.5.21) совпадают с модулями членов соответствующих рядов (3.2.21), (3.2.22), (3.2.25), (3.2.26), т. е. доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.1.

Глава 4

Решение краевых задач в полупространстве с трещиной (завесой), перпендикулярной границе

4.1 Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с трещиной

Рассмотрим в полупространстве $D = \{(x, y, \xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in R^{m-2})$ трещину в виде плоскости $x = 0$, разделяющей D на две зоны $D^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in R^{m-2})\}$ и $D^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-2}) \in R^{m-2})\}$, проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. В данном случае в отличие от предыдущей главы трещина $x = 0$ пересекает границу $y = 0$. Пусть на границе D (при $y = 0$) заданы произвольные граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$, что не умаляет общности. Для потенциалов $\varphi^\pm(x, y, \xi)$ в $D^\pm$ рассмотрим класс краевых задач вида

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \tag{4.1.1}$$

$$G[\varphi^-]_{|y=0} = 0, \qquad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x, \xi), \tag{4.1.2}$$

$$x = 0 : \qquad \varphi^+ = \varphi^-, \qquad k^+\partial_x\varphi^+ - k^-\partial_x\varphi^- = A\partial_x^2\varphi^-, \tag{4.1.3}$$

где A— параметр трещины, оператор $G[\varphi^\pm] = \varphi^\pm$, $G[\varphi^\pm] = \partial_y\varphi^\pm$ или $G[\varphi^\pm] = \partial_y\varphi^\pm + h\varphi^\pm$, $h = const > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода, уравнение Лапласа (4.1.1) выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, ..., \xi_{m-2}$.

Выразим решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) через решение $F(x, y, \xi)$ соответствующей задачи в однородном полупространстве (без трещины и при $k^+ = k^-$):

$$\Delta F = 0, \qquad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Для вывода общих формул, как и выше, рассмотрим частный случай, когда область D являются полуплоскостью $D = \{(x, y) : x \in R, y < 0\}$, состоящей из двух квадрантов $D^- = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$, разделенных трещиной $x = 0$, и для определенности на границе $y = 0$ рассмотрим граничное условие 1-го рода (полученные формулы будут справедливы для произвольных граничных условий). Отсюда задача (4.1.1)-(4.1.3) для функций $\varphi^\pm(x, y)$ примет вид

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \tag{4.1.5}$$

$$\varphi^-_{|y=0} = 0, \qquad \varphi^+_{|y=0} = f(x), \tag{4.1.6}$$

$$x = 0: \qquad \varphi^+ = \varphi^-, \qquad k^+\partial_x\varphi^+ - k^-\partial_x\varphi^- = A\partial_x^2\varphi^-, \tag{4.1.7}$$

Выразим решение этой задачи через решение $F(x, y)$ соответствующей задачи Дирихле в однородной полуплоскости:

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x), x > 0. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Пусть функция $F(0, y)$ при $-\infty < y < 0$ разлагается в интеграл Фурье по синусам:

$$F(0, y) = \int\limits_0^\infty g(y, \lambda) d\lambda, \qquad g = f_0 \sin\lambda y, \tag{4.1.9}$$

где $f_0(\lambda)$ — коэффициент Фурье:

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^0 F(0, y) \sin\lambda y \, dy. \tag{4.1.10}$$

Отсюда функция $F(x,y)$ в квадранте $D^- = \{(x,y) : x < 0, y < 0\}$(где граничное условие (4.1.8) однородное) представима в виде

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x \leq 0, \qquad y \leq 0, \tag{4.1.11}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (4.1.9). Интеграл справа (4.1.11) (и функция $F(x,y)$ слева) является решением задачи Дирихле в квадранте D^- вида

$$\Delta u = 0, \qquad u_{|x=0} = F(0,y), \qquad u_{|y=0} = 0.$$

Представим решение задачи (4.1.5)- (4.1.7) в виде

$$\varphi^-(x,y) = \int\limits_0^\infty a_1 \, e^{\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x \leq 0, \tag{4.1.12}$$

$$\varphi^+(x,y) = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2 \, e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x \geq 0, \tag{4.1.13}$$

где функция g имеет вид (4.1.9). При этом функции (4.1.12), (4.1.13) удовлетворяют условия задачи (4.1.5), (4.1.6). Тогда из условий сопряжения на трещине (4.1.7) с учетом разложения (4.1.11) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений

$$1 + a_2 = a_1, \qquad k^+ - k^+ a_2 - k^- a_1 = A\lambda a_1,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k^+}{d}, \qquad a_2 = -1 + \frac{2k^+}{d},$$

где

$$d = A(\lambda + \beta), \qquad \beta = \frac{k^+ + k^-}{A}. \tag{4.1.14}$$

Отсюда функции $\varphi^\pm(x,y)$ (4.1.12), (4.1.13) с учетом (4.1.11) примут вид

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g}{\lambda + \beta} \, d\lambda, \qquad x \leq 0, \tag{4.1.15}$$

$$\varphi^+ = F(x,y) - F(-x,y) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g}{\lambda+\beta}\,d\lambda, \qquad x \le 0, \tag{4.1.16}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (4.1.9), $F(x,y)$– решение задачи Дирихле (4.1.8).

Заменяя в разложении (4.1.11) переменную $x \le 0$ на $x - t$ $(t > 0)$, умножая полученное равенство на $e^{-\beta t}$, где $\beta > 0$, и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, получим формулу:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(x-t,y)dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda+\beta}\,d\lambda, \qquad x \le 0. \tag{4.1.17}$$

Отсюда решение (4.1.15), (4.1.16) задачи (4.1.5)-(4.1.7) выразим непосредственно через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле (4.1.8) (без разложений Фурье) в виде

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(x-t,y)\,dt, \qquad x \le 0, \tag{4.1.18}$$

$$\varphi^+ = F(x,y) - F(-x,y) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(-x-t,y)\,dt, \qquad x \ge 0. \tag{4.1.19}$$

Полученные формулы справедливы для общего случая задачи (4.1.1)-(4.1.3) в пространстве R^m.

Теорема 4.1.1 *Если функция $F(x,y,\xi)$ является решением задачи (4.1.4), удовлетворяющим условию $F(x,y,\xi) = O(e^{r|y|})$ при $y \to -\infty$, то решение исходной задачи (4.1.1)-(4.1.3) в кусочно-однородном полупространстве $D = D^- \cup D^+$ при наличии трещины $x = 0$ строится по формулам:*

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \le 0, \tag{4.1.20}$$

$$\varphi^+ = F(x,y,\xi) - F(-x,y,\xi) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(-x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \ge 0, \tag{4.1.21}$$

где β имеет вид (4.1.14), $r < \beta$.

Утверждение теоремы проверяется непосредственно, при этом учитывается, что условия сопряжения (4.1.3) для функций (4.1.20), (4.1.21) выполняются тождественно и то, что аргументы функции F под знаками интегралов принадлежат области D^-, где условия задачи для функции F однородны.

Отметим, что в случае граничных условий (4.1.2) 3-го рода, т. е. при $G[\varphi] = \partial_y\varphi + h\varphi$, решение соответствующей задачи (4.1.4) в однородном полупространстве $y < 0$:

$$\Delta u = 0, \qquad \partial_y u + hu_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases}$$

выражается через решение задачи Дирихле

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases} \tag{4.1.22}$$

по формуле (2.3.20):

$$u(x,y,\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-hz}F(x,y-z,\xi)\,dz. \tag{4.1.23}$$

Отсюда решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) в кусочно-однородном полупространстве $D = D^- \cup D^+$ при наличии трещины $x = 0$ с граничными условиями 3-го рода приводится к виду

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}u(x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \le 0 \tag{4.1.24}$$

$$\varphi^+ = u(x,y,\xi) - u(-x,y,\xi) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}u(-x-t,y,\xi)dt, \qquad x \geq 0, \tag{4.1.25}$$

где функция $u(x,y,\xi)$ имеет вид (4.1.23), $F(x,y,\xi)$ — решение задачи Дирихле (4.1.22).

Таким образом, решения задач (4.1.1)-(4.1.3) в кусочно-однородном полупространстве $y < 0$ с трещиной $x = 0$ при граничных условиях (4.1.2) 1-го и 3-го рода выражаются соответственно по формулам (4.1.20), (4.1.21) и (4.1.24), (4.1.25), (4.1.23) через решение $F(x,y,\xi)$ задачи Дирихле (4.1.22) в однородном полупространстве $y < 0$. В случае граничного условия 2-го рода решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) с трещиной $x = 0$ выражается по формулам (4.1.20), (4.1.21) через решение $F(x,y,\xi)$ задачи Неймана (4.1.4) (где $G[F] = \partial_y F$) в однородном полупространстве.

4.2 Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с завесой

Рассмотрим в полупространстве $D = \{(x,y,\xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in R^{m-2})$ завесу $x = 0$, разделяющую D на зоны $D^- = \{(x,y,\xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in R^{m-2})\}$ и $D^+ = \{(x,y,\xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1,...,\xi_{m-2}) \in R^{m-2})\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. Пусть на границе ∂D, как и выше, заданы граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$. Отсюда для потенциалов $\varphi^\pm(x,y,\xi)$ в $D^\pm$ получим класс краевых задач вида

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \tag{4.2.1}$$

$$G[\varphi^-]_{|y=0} = 0, \qquad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x,\xi), \tag{4.2.2}$$

$$x = 0: \qquad \varphi^+ - \varphi^- = Bk^-\partial_x\varphi^-, \qquad k^+\partial_x\varphi^+ = k^-\partial_x\varphi^-, \tag{4.2.3}$$

где B — параметр завесы, оператор G определен в (4.1.2).

Выразим решение задачи (4.2.1)-(4.2.3) через решение $F(x,y,\xi)$ соответствующей задачи в однородном полупространстве

$$\Delta F = 0, \qquad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Рассмотрим частный случай задачи (4.2.1)-(4.2.3), когда область D являются полуплоскостью $D = \{(x,y) : x \in R, y < 0\}$, состоящей из двух квадрантов $D^- = \{(x,y) : x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x,y) : x > 0, y < 0\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$, разделенных завесой $x = 0$, при граничном условии 1-го рода:

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \tag{4.2.5}$$

$$\varphi^-_{|y=0} = 0, \qquad \varphi^+_{|y=0} = f(x), \tag{4.2.6}$$

$$x = 0: \qquad \varphi^+ - \varphi^- = Bk^-\partial_x\varphi^-, \qquad k^+\partial_x\varphi^+ = k^-\partial_x\varphi^-, \tag{4.2.7}$$

При этом известно решение $F(x,y)$ соответствующей задачи Дирихле в однородной полуплоскости:

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x), x > 0. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Функция $F(x,y)$ в квадранте D^- при условии (4.1.9) имеет вид (4.1.11):

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x}\, g\, d\lambda, \qquad x \le 0, \qquad y \le 0; \qquad g = f_0 \sin\lambda y, \tag{4.2.9}$$

где $f_0(\lambda)$ — коэффициент Фурье функции $F(0,y)$ (4.1.10). Представляя решение задачи (4.2.5)-(4.2.7) в виде (4.1.12), (4.1.13):

$$\varphi^- = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x \le 0,$$

$$\varphi^+ = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2\, e^{-\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x \ge 0,$$

из условий сопряжения (4.2.7) с учетом (4.2.9) для параметров a_i получим систему уравнений

$$1 + a_2 - a_1 = Bk^- \lambda\, a_1, \qquad k^+ - k^+ a_2 = k^- a_1,$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k^+}{d}, \qquad a_2 = 1 - \frac{2k^-}{d},$$

где

$$d = Bk^- k^+ (\lambda + \beta), \qquad \beta = \frac{k^+ + k^-}{Bk^- k^+}. \tag{4.2.10}$$

Отсюда с учетом разложения (4.2.9) получим

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g}{\lambda + \beta}\, d\lambda, \qquad x \le 0,$$

$$\varphi^+ = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{Bk^+} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g}{\lambda + \beta}\, d\lambda, \qquad x \ge 0,$$

где функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (4.2.9). Тогда с учетом формулы (4.1.17) решение задачи (4.2.5)-(4.2.7) выразим непосредственно через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (4.2.8) в виде

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-} \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(x - t, y)\, dt, \qquad x \le 0, \tag{4.2.11}$$

$$\varphi^+ = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{Bk^+} \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} F(-x - t, y)\, dt, \qquad x \ge 0, \tag{4.2.12}$$

Полученные формулы справедливы для общего случая задачи (4.2.1)-(4.2.3) в пространстве R^m.

Теорема 4.2.1 *Если функция $F(x, y, \xi)$ является решением задачи (4.2.4), удовлетворяющим условию $F(x, y, \xi) = O(e^{r|y|})$ при $y \to -\infty$,* *то решение задачи (4.2.1)-(4.2.3) в кусочно-однородном полупространстве $D = D^- \cup D^+$ при наличии завесы $x = 0$ строится по формулам:*

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \le 0, \tag{4.2.13}$$

$$\varphi^+ = F(x,y,\xi) + F(-x,y,\xi) - \frac{2}{Bk^+}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(-x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \ge 0, \tag{4.2.14}$$

где β имеет вид (4.2.10), $r < \beta$.

Утверждение теоремы проверяется непосредственно аналогично теореме предыдущего параграфа.

В случае граничных условий (4.2.2) 3-го рода решение соответствующей задачи (4.2.4) в однородном полупространстве $y < 0$ выражается через решение задачи Дирихле

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0, \end{cases} \tag{4.2.15}$$

в виде (4.1.24):

$$u(x,y,\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-hz}F(x,y-z,\xi)\,dz. \tag{4.2.16}$$

Отсюда решение задачи (4.2.1)-(4.2.3) в кусочно-однородном полупространстве $D = D^- \cup D^+$ при наличии завесы $x = 0$ с граничными условиями 3-го рода строятся по формуле

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}u(x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \le 0, \tag{4.2.17}$$

$$\varphi^+ = u(x,y,\xi) + u(-x,y,\xi) - \frac{2}{Bk^+}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}u(-x-t,y,\xi)dt, \qquad x \ge 0, \tag{4.2.18}$$

где функция $u(x,y,\xi)$ имеет вид (4.2.16).

Таким образом, решения задач (4.2.1)-(4.2.3) в кусочно-однородном полупространстве $y < 0$ с завесой $x = 0$ при граничных условиях (4.2.2) 1-го и 3-го рода выражаются соответственно по формулам (4.2.13), (4.2.14) и (4.2.17), (4.2.18), (4.2.16) через решение $F(x, y, \xi)$ задачи Дирихле (4.2.15) в однородном полупространстве $y < 0$. В случае граничного условия 2-го рода решение задачи (4.2.1)-(4.2.3) с завесой $x = 0$ выражается по формулам (4.2.13), (4.2.14) через решение $F(x, y, \xi)$ задачи Неймана (4.2.4) при $G[F] = \partial_y F$.

4.3 Краевые задачи в однородном полупространстве с комбинацией пересекающихся трещин и завес

Полученные в предыдущих параграфах формулы для $\varphi^{\pm}$, как и формулы для u_i предыдущей главы, имеют вид операторов, действующих на соответствующую функцию F по одной переменной, при этом соответствующие условия сопряжения на трещине (завесе) по этой переменной выполняются тождественно (для любой дважды дифференцируемой функции F). Отсюда функции $\varphi^{\pm}$ и u_i по свободным переменным также могут удовлетворять условиям сопряжения на трещине (завесе). При этом решения полученных задач строятся в виде композиции соответствующих операторов.

Рассмотрим однородное полупространство $D = \{(x, y, \xi) : x \in R, y < 0, \xi \in R^{m-2}\}$, состоящее из четырех зон: $D = D_1^- \cup D_2^- \cup D_1^+ \cup D_2^+$, разделенных трещинами или завесами $x = 0$, $y = -l$, где $D_1^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, y < -l, \xi \in R^{m-2}\}$, $D_1^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, y < -l, \xi \in R^{m-2}\}$, $D_2^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, -l < y < 0, \xi \in R^{m-2}\}$, $D_2^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, -l < y < 0, \xi \in R^{m-2}\}$.

1. Пусть на внешней границе D имеет место граничное условие 1-го рода, которое, не умаляя общности, считаем однородным при $x < 0$. Рассмотрим случай двух пересекающихся трещин $x = 0$ и $y = -l$ с парамет-

рами соответственно A_1 и A_2. Для потенциалов $\varphi_i^{\pm}(x,y,\xi)$ в $D_i^{\pm}$ задача примет вид

$$\Delta\varphi_i^{\pm}=0,\qquad \varphi^-_{2|y=0}=0,\qquad \varphi^+_{2|y=0}=f(x,\xi), \tag{4.3.1}$$

$$x=0:\qquad \varphi_i^+=\varphi_i^-,\qquad \partial_x\varphi_i^+-\partial_x\varphi_i^-=A_1\partial_x^2\varphi_i^-, \tag{4.3.2}$$

$$y=-l:\qquad \varphi_2^{\pm}=\varphi_1^{\pm},\qquad \partial_y\varphi_2^{\pm}-\partial_y\varphi_1^{\pm}=A_2\partial_y^{\pm}\varphi_1^{\pm}. \tag{4.3.3}$$

Представим решение задачи (4.3.1)-(4.3.3) в виде (4.1.18), (4.1.19):

$$\varphi_i^-=\beta\int\limits_0^{\infty}e^{-\beta t}u_i(x-t,y,\xi)\,dt,\qquad x<0, \tag{4.3.4}$$

$$\varphi_i^+=u_i(x,y,\xi)-u_i(-x,y,\xi)+\beta\int\limits_0^{\infty}e^{-\beta t}u_i(-x-t,y,\xi)\,dt,\qquad x>0, \tag{4.3.5}$$

где $\beta=2/A_1$. При этом функции $\varphi_i^{\pm}$ тождественно удовлетворяют условиям (4.3.2) на трещине $x=0$. Отсюда для функций u_i в D_i получим задачу вида (3.2.1), (3.2.2):

$$\Delta u_i=0,\qquad u_{2|y=0}=\begin{cases}0, x<0\\ f(x,\xi), x>0\end{cases},$$

$$y=-l:\qquad u_2=u_1,\qquad \partial_y u_2-\partial_y u_1=A_2\partial_y^2u_1,$$

где $D_1=\{(x,y,\xi): x\in R, y<-l, \xi\in R^{m-2}\}$, $D_2=\{(x,y,\xi): x\in R, -l<y<0, \xi\in R^{m-2}\}$. Решение последней задачи имеет вид (3.2.21), (3.2.22):

$$u_1=\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\gamma z}z^n\,\partial_y^nF(x,y-2nl-z,\xi)\,dz, \tag{4.3.6}$$

$$u_2=F(x,y,\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\gamma z}z^{n-1}\,\partial_y^n[F(x,y-2nl-z,\xi)-$$
$$-F(x,-y-2nl-z,\xi)]\,dz, \tag{4.3.7}$$

где $\gamma = 2/A_2$, $F(x,y,\xi)-$ решение задачи Дирихле (4.1.8):

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ f(x,\xi), x > 0 \end{cases}, \tag{4.3.8}$$

Таким образом, решение задачи (4.3.1)-(4.3.3) строится по формулам (4.3.4)-(4.3.7).

Если зоны $D_i^{\pm}$ разделены трещиной $x = 0$ и завесой $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и B_2, то условия сопряжения (4.3.3) заменяются условиями вида

$$y = -l: \qquad \varphi_2^{\pm} - \varphi_1^{\pm} = B_2 \partial_y \varphi_1^{\pm}, \qquad \partial_y \varphi_2^{\pm} = \partial_y \varphi_1^{\pm}, \tag{4.3.9}$$

Отсюда рассуждая аналогично предыдущему случаю, решение задачи (4.3.1), (4.3.2), (4.3.9) получим в виде (4.3.4), (4.3.5), где функции $u_i(x,y,\xi)$ строятся по формулам (3.3.19), (3.3.20):

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y - 2nl - z, \xi) \, dz, \tag{4.3.10}$$

$$u_2 = F(x,y,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z, \xi) - \\ - F(x, -y - 2nl - z, \xi)] \, dz, \tag{4.3.11}$$

где $\gamma = 2/B_2$, $F(x,y,\xi)$ — решение задачи Дирихле (4.3.8).

Пусть зоны $D_i^{\pm}$ разделены завесой $x = 0$ и трещиной $y = -l$ с параметрами соответственно B_1 и A_2. Тогда в задаче (4.3.1)-(4.3.3)) условия (4.3.2) заменяются условиями вида

$$x = 0: \qquad \varphi_i^{+} - \varphi_i^{-} = B_1 \partial_x \varphi_i^{-}, \qquad \partial_x \varphi_i^{+} = \partial_x \varphi_i^{-}. \tag{4.3.12}$$

Тогда аналогично сказанному решение полученной задачи (4.3.1), (4.3.3), (4.3.12) найдем в виде (4.2.11), (4.2.12):

$$\varphi_i^{-} = \beta \int\limits_0^{\infty} e^{-\beta t} u_i(x - t, y, \xi) \, dt, \qquad x \leq 0, \tag{4.3.13}$$

$$\varphi_i^+ = u_i(x,y,\xi) + u_i(-x,y,\xi) - \beta \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} u_i(-x-t,y,\xi)\,dt, \qquad x \ge 0, \tag{4.3.14}$$

где $\beta = 2/B_1$, функции $u_i(x,y,\xi)$ строятся по формулам (4.3.6), (4.3.7).

Если зоны $D_i^\pm$ разделены завесами $x = 0$ и $y = -l$ с параметрами соответственно B_1 и B_2, то решение соответствующей задачи (4.3.1), (4.3.9), (4.3.12) строится по формулам (4.3.13), (4.3.14), где функции имеют вид (4.3.10), (4.3).

2. Пусть на внешней границе полупространства D имеют место граничные условия 2-го рода, которые считаем однородными при $x = 0$. Рассмотрим случай двух трещин $x = 0$, $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и A_2. Для потенциалов $\varphi_i^\pm$ в $D_i^\pm$ задача имеет вид (4.3.2), (4.3.3)

$$\Delta\varphi_i^\pm = 0, \qquad \partial_y \varphi^-_{2|y=0} = 0, \qquad \partial_y \varphi^+_{2|y=0} = f(x,\xi), \tag{4.3.15}$$

решение которой строится по формулам (4.3.4), (4.3.5), где функции u_i имеют вид (3.4.20), (3.4.21):

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y-2nl-z,\xi)\,dz, \tag{4.3.16}$$

$$u_2 = F(x,y,\xi) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x,y-2nl-z,\xi) +$$
$$+ F(x,-y-2nl-z,\xi)]\,dz, \tag{4.3.17}$$

где $\gamma = 2/A_2$, $F(x,y,\xi)$ — решение задачи Неймана:

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ f(x,\xi), x > 0 \end{cases}, \tag{4.3.18}$$

Если зоны $D_i^\pm$ разделены трещиной $x = 0$ и завесой $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и B_2, то решение полученной задачи (4.3.2), (4.3.9), (4.3.15) строится по формулам (4.3.4), (4.3.5), где функции u_i имеют вид (3.5.18), (3.5.19):

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \, \partial_y^n F(x, y - 2nl - z, \xi) \, dz, \tag{4.3.19}$$

$$u_2 = F(x, y, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \, \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z\xi,) + F(x, -y - 2nl - z, \xi)] \, dz, \tag{4.3.20}$$

где $\gamma = 2/B_2$, $F(x, y, \xi)$ — решение задачи Неймана (4.3.18).

Пусть зоны $D_i^{\pm}$ разделены завесой $x = 0$ и трещиной $y = -l$ с параметрами соответственно B_1 и A_2. Тогда решение соответствующей задачи (4.3.3), (4.3.12), (4.3.15) строится по формулам (4.3.13), (4.3.14), где функции u_i имеют вид (4.3.16), (4.3).

Если зоны $D_i^{\pm}$ разделены завесами $x = 0$ и $y = -l$ с параметрами B_1 и B_2, то решение соответствующей задачи (4.3.9), (4.3.12), (4.3.15) строится по формулам (4.3.13), (4.3.14) где функции u_i имеют вид (4.3.19), (4.3).

Справедливость полученных решений проверяется непосредственно.

Таким образом, решения всех рассмотренных в данной главе задач с трещинами и завесами выражаются через решения классических задач Дирихле (4.3.8) и Неймана (4.3.18) в однородном полупространстве $y < 0$, которые строятся по известным формулам, например, методом функции Грина [4, 22, 37], а в случае полуплоскости $y < 0-$ по формулам (2.1.9), (2.2.9).

Заключение

Основные результаты работы.

1) В работе проведено исследование разрешимости краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, изучение зависимости существования и единственности решения от граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред, доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения краевой задачи для линейного эллиптического уравнения.

2) Исследовано влияние параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), исследована разрешимость задач сопряжения для оператора Лапласа со спектральным параметром в составной области при задании на поверхности раздела специальных условий сопряжения(склейки). В доказанных в ходе исследования теоремах описаны все действительные собственные числа и все отвечающие конкретному собственному числу собственные функции указанных задач. А также определены условия единственности и неединственности, существования и несуществования решений неоднородной задачи.

3) Решены краевые задачи

- в кусочно-однородных полуцилиндрах с плоскостью разрыва проницаемости (плоскостью сопряжения), параллельной основанию, на котором заданы неоднородные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, - в кусочно-однородных симметричных полуцилиндрах с плоскостью сопряжения, перпендикулярной основанию, на котором заданы неоднородные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, - в кусочно-однородных симметричных полуцилиндрах, состоящих из четырех зон с двумя пересекающимися плоскостями сопряжения, рассмотренными выше, - в однородных полуцилиндрах с трещиной, а также завесой, параллельной основанию, на котором заданы неоднородные условия 1-го или 2-го рода, - в кусочно-однородном полупространстве с трещиной, а также завесой, перпендикулярной границе, на которой заданы неоднородные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, - в однородном полупространстве, состоящем из четырех зон, разделенных трещинами и завесами, параллельными и перпендикулярными границе в произвольном их сочетании, при граничных условиях 1-го или 2-го рода. В рассмотренных задачах на боковой поверхности полуцилиндров заданы однородные условия 1-го, 2-го или 3-го рода. Решения всех рассмотренных задач выражены через решения классических краевых задач в соответствующем однородном полуцилиндре (или полупространстве) с условиями Дирихле или Неймана на основании полуцилиндров (на границе полупространства).

Библиографический список

1. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. — М.: Наука, 1969. — 288 с.

2. Абдурахманов, И.М. О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной / И.М. Абдурахманов // Прикладная математика и механика. — 1969. — Т. 33. — Вып. 5.— С. 871 - 875.

3. Абдурахманов, И.М. Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной / И.М. Абдурахманов, М.Г. Алишаев // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 4. — С. 173 - 177.

4. Андронова, О.А. Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии / О.А. Андронова // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2009. — Т. 22(61). — № 1. — С. 1- 13.

5. Арсенин, В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1974. — 431 с.

6. Бахвалов, Н.С. Осреднение процесса передачи тепла в периодических средах при наличии излучения / Н.С. Бахвалов // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 10.— С. 1765 - 1773.

7. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 234 с.

8. Васильев, Б.А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области / Б.А. Васильев // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20. — № 3. — С. 530 - 533.

9. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

10. Голубев, Г.В. Определение поля давлений в кусочно-однородных пластах различной формы / Г.В. Голубев // Уч. зап. Казан.ГУ. — 1958. — Т. 118.— Кн. 2. — С. 166 - 192.

11. Голубева, О.В. Курс механики сплошных сред / О.В. Голубева. — М.: Выс. шк., 1972. — 364 с.

12. Голубева, О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения / О.В. Голубева // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 1. — С. 113 - 116.

13. Гуревич, А.В. Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала / А.В. Гуревич, А.Л. Крылов, Д.Н. Топор // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298. — № 4. — С. 846 - 850.

14. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно - составного типа / Т.Д. Джураев. — Ташкент: Издательство ФАН Узбекской ССР, 1979. — 120 с.

15. Дмитриев, В.И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 167 с.

16. Жарий, О.Ю. Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости / О.Ю. Жарий // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54. — Вып. 1. — С. 109 - 115.

17. Зазовский, А.Ф. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности / А.Ф. Зазовский, Г.Т. Тодуа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 4. — С. 107 - 116.

18. Зулькарнаев, И.У. Решение краевой задачи для уравнений Пуассона и Лапласа с краевыми условиями четвертого рода на концентрических границах постоянного радиуса / И.У. Зулькарнаев // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26. — № 2. — С. 351 - 353.

19. Ильин, В.А. О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — № 1. — С. 28 - 30.

20. Ильин, В.А. О системе классических собственных функций линейного самосопряженного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — № 2. — С. 272 - 275.

21. Ильин, В.А. Задача на собственные функции для оператора $Lu = div[p(x)gradu] - q(x)u$ с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин, И.А. Шишмарев // Сибирский математический журнал. — 1961. — Т. 2. — № 4. — С. 523 - 536.

22. Ильин, В.А. Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин, И.А. Шишмарев // Сибирский математический журнал. — 1961. — Т. 2. — № 1. — С. 46 - 58.

23. Ильин, В.А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1962. — Т. 142. — № 1. — С. 21 - 24.

24. Ильин, В.А. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы / В.А. Ильин, П.В. Луференко // Докл. АН — 2009. — Т. 428 — № 1. — С. 12 - 15.

25. Ильин, В.А. Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов / В.А. Ильин, П.В. Луференко // ДАН СССР. — 2009. — Т. 429. — № 3. — С. 317 - 321.

26. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. — М.: Наука, 1964. — 487 с.

27. Кожанов, А.И. Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления / А.И. Кожанов // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН. — 2002. — С. 96 - 109.

28. Кожанов, А.И. Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками со знакопостоянной функцией при старшей производной / А.И. Кожанов, С.В. Потапова // Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика. — 2015. — Т. 15. — № 2. — С. 52 - 59.

29. Кожанов, А.И. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной / А.И. Кожанов, С.В. Потапова // Дальневост. мат. журн. — 2014. — Т. 14. — № 1. — С. 48 - 65.

30. Кожанов, А.И. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка II. / А.И Кожанов, Е.Ф. Шарин // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21. — № 1. — С. 18 - 28.

31. Колпаков, А.Г. О склеенных телах / А.Г. Колпаков // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28. — № 8. — С. 1386 - 1395.

32. Копаев, А.В. Фильтрационные теоремы об окружностях / А.В. Копаев, В.М. Радыгин // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 1. — С. 179 - 183.

33. Копаев, А.В. Фильтрационные теоремы о прямых / А.В. Копаев, В.М. Радыгин // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 86 - 90.

34. Костицына, Л.И. К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной пористой среде / Л.И. Костицына // Уч. зап. МОПИ. — 1966. — Т. 164. — Вып. 6. — С. 67 - 82.

35. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970. — 710 с.

36. Крутицкий, П.А. Особенности градиента решения в обобщенной задаче о скачке для уравнения Лапласа вне разреза на плоскости / П.А. Крутицкий, А.И. Сгибнев // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 9. — С. 1165 - 1175.

37. Крутицкий, П.А. Обобщенная задача о скачке для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости / П.А. Крутицкий, К.В. Прозоров // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40. — № 9. — С. 1176 - 1189.

38. Ладыженская, О.А. О решении общей задачи дифракции / О.А. Ладыженская // ДАН СССР. — 1954. — Т. 96. — № 3 — С. 433 - 436.

39. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, — 1973.— 576 с.

40. Ладыженская, О.А. О классической разрешимости задач дифракции / О.А. Ладыженская, В.Я. Ривкинд, Н.Н. Уральцева// Тр. МИАН СССР. — 1966. — Т. 92. — С. 116 - 146.

41. Максимов, А.В. Численное моделирование тепловых процессов в соединениях разнородных материалов / А.В. Максимов, Ю.А. Повещенко, Ю.П. Попов [и др.] // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 7. — С. 1244 - 1251.

42. Моисеев, Е.И. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / Е.И. Моисеев, Т.Н. Лихоманенко // ДАН. — 2012. — Т. 446. — № 3. — С. 256 - 258.

43. Олейник, О.А. Об одном методе решения общей задачи дифракции / О.А. Олейник // ДАН СССР. — 1960. — С. 1054 - 1057.

44. Олейник, О.А. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами / О.А. Олейник // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124. — № 6 — С. 1219 — 1222.

45. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1981. — 798 с.

46. Пилатовский, В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта / В.П. Пилатовский. — М.: Недра, 1966. — 317 с.

47. Положий, Г.Н. Уравнения математической физики / Г.Н. Положий. — М.: Высшая школа, 1964. — 560 с.

48. Попов, С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // ДАН. — 2005. — Т. 400. — № 1. — С. 29 - 31.

49. Пятков, С.Г. О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем / С.Г. Пятков //Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. — Т. XIII. — № 4(44) — С. 83 – 96.

50. Радыгин, В.М. Применение интегральной формулы Шварца в задачах сопряжения математической физики / В.М. Радыгин // Задачи технической гидродинамики. МОИП. — М.: Наука, 1991. — С. 94 - 99.

51. Рогожников, А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков / А.М. Рогожников // ДАН. — 2011. — Т. 441. — № 4. — С. 449 - 451.

52. Рогожников, А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами / А.М. Рогожников // ДАН. — 2012. — Т. 444. — № 5. — С. 488 - 491.

53. Ромм, Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е.С. Ромм. — Л.: Недра, 1985. — 240 с.

54. Салахитдинов, М.С. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов. — Ташкент: ФАН, 1997. — 166 с.

55. Сетуха, А.В. Трехмерная краевая задача Неймана с обобщенными граничными условиями и уравнение Прандтля / А.В. Сетуха // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38. — № 4. — С. 505 - 515.

56. Симоненко, И.Б. Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной / И.Б. Симоненко // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 2. — С. 301 - 309.

57. Смирнов, И.П. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости / И.П. Смирнов // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 49. — № 5. — С. 643 - 648.

58. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 333 с.

59. Скворцов, Э.В. Решение некоторых задач сопряжения сведением к обобщенной задаче Римана / Э.В. Скворцов, Б.Х. Фарзан, А.Я. Чилап // Прикладная математика и механика. 1963. — Т. 27. — Вып. 2. — С. 351 - 355.

60. Терсенов, С.Л. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.Л. Терсенов — Новосибирск: Наука, 1985. — 105 с.

61. Тимофеев, Ю.А. Об одном приближенном методе расчета температурных полей кусочно-однородных тел / Ю.А. Тимофеев // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16. — № 8. — С. 1492 - 1503.

62. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

63. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 488 с.

64. Тумашев, Г.Г. Определение поля давлений в кусочно-однородных пластах / Г.Г. Тумашев // Изв. вузов. Математика. — 1958. — № 3. — С. 203 - 216.

65. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1962. — Т. 3. — 656 с.

66. Холодовский, С.Е. Метод свертывания интегралов Фурье в решении краевых задач с условиями сопряжения / С.Е. Холодовский // Обо-

зрение прикладной и промышленной математики. — 2006. — Т. 13. — Вып. 2. — С. 366 - 367.

67. Холодовский, С.Е. Метод эффективного решения краевых задач с обобщенными условиями сопряжения / С.Е. Холодовский // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2006. — Т. 13. — Вып. 6. — С. 1128 - 1130.

68. Холодовский, С.Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения / С.Е. Холодовский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47. — № 9. — С. 1550 - 1556.

69. Холодовский, С.Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) / С.Е. Холодовский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48. — № 7. — С. 1209 - 1213.

70. Холодовский, С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах / С.Е. Холодовский // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45. — № 6. — С. 855 - 859.

71. Холодовский, С.Е. О решении краевых задач на кусочно-однородной плоскости с параболической трещиной (завесой) / С.Е. Холодовский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49. — № 11. — С. 1931 - 1936.

72. Холодовский, С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве / С.Е. Холодовский // Дифференциальные уравнения. — Т. 45. — № 8. — 2009. — С. 1204 - 1208.

73. Холодовский, С.Е. О многослойных пленках на границе полупространства / С.Е. Холодовский // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99. — № 3. — С. 421 – 427.

74. Чередниченко, В.Г. Об одной задаче сопряжения гармонических функций и обратной ей / В.Г. Чередниченко// Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 4. — С. 682 - 689.

75. Чернышев, С.Н. Движение воды по сетям трещин / С.Н. Чернышев. — М.: Недра, 1979. — 140 с.

76. Чилап, А.Я. Задача сопряжения для уравнений эллиптического типа / А.Я. Чилап // Изв. вузов. Математика. — 1968. — № 9. — С. 106 - 111.

77. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в неоднородной полуплоскости / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГПУ. Чита. — 2007. — Вып. 7. — С. 58 - 62.

78. Шадрина, Н.Н. Об эффективном решении третьей краевой задачи в кусочно-однородной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГПУ. Чита. — 2007. — Вып. 7. — С. 62 - 65.

79. Шадрина, Н.Н. О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14. — Вып. 4. М. — С. 764 - 765.

80. Шадрина, Н.Н. Об эффективном решении первой краевой задачи в неоднородной полосе / Н.Н. Шадрина // VII Всероссийская научно-практическая конференция «Кулагинские чтения». Чита, ЧГУ. — 2007. — Ч. 1. — С. 148 - 150.

81. Шадрина, Н.Н. Решении третьей краевой задачи в двухслойной анизотропной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГГПУ. Чита, 2008. — Вып. 8. — С. 60 - 64.

82. Шадрина, Н.Н. О решении смешанных краевых задач типа (II, III) в двухслойной анизотропной полосе // Математический анализ и его приложения. Заб.ГГПУ. Чита, 2008. — Вып. 8. — С. 64 - 71.

83. Шадрина, Н.Н. О решении граничных задач в кусочно-неоднородной полуплоскости с линией сопряжения, пересекающей границу / Н.Н. Шадрина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 537 - 538.

84. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородной анизо-тропной полосе / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск, 2008. — С. 233.

85. Шадрина, Н.Н. О математической модели линейных динамических процессов в неоднородных анизотропных средах / Н.Н. Шадрина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16. — Вып. 3. М. — С. 571 - 572.

86. Шадрина, Н.Н. Решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе с трещиной (завесой) / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического ун-та. Серия Физика, математика, техника, технология.Чита. — 2010. — № 2(31). — С. 141 - 144.

87. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения типа трещины (завесы) / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 6. — С. 100 - 106.

88. Шадрина, Н.Н. О решении задачи Неймана в полуплоскости с трещиной (завесой) // Ученые записки ЗабГГПУ. Серия "Физика, математика, техника, технология"Чита. — 2011.— № 3(38). — С. 217 - 220.

89. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородной полуплоскости с трещиной (завесой) / Н.Н. Шадрина // Ученые записки ЗабГГПУ. Серия "Физика, математика, техника, технология Чита. — № 3(44). — 2012. — С. 157 - 160.

90. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородном полупространстве, содержащем трещину, перпендикулярную границе / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск. — 2013. — С. 294.

91. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородном полупространстве, содержащем завесу, перпендикулярную границе / Н.Н. Шадрина //Международная научная конференция «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей» посвященная 85-летию со дня рождения А.С. Алексеева. Новосибирск. — 2013. — С. 98.

92. Шадрина, Н.Н. О разрешимости задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Пятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск. — 2013. — С. 101.

93. Шадрина, Н.Н. Существование решения некоторой задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // V меж-

дународная конференция “Математика, ее приложения и математическое образование”, Улан-Удэ. — 2014. — С. 345.

94. Шадрина, Н.Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // VII Международная конференция по математическому моделированию, Якутск. — 2014. — С. 82 - 83.

95. Шадрина, Н.Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21. — № 1(81). — С. 75 - 89.

96. Шадрина, Н.Н. Единственность решения некоторой задачи сопряжения для уравнения эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Международный семинар "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа Улан-Удэ. — 2014. — С. 149 - 152.

97. Шадрина, Н.Н. Единственность и неединственность решений, собственные значения и собственные функции некоторых задач сопряжения для эллиптических операторов / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование Улан-Удэ, 2015. — С. 322 - 323.

98. Шадрина, Н.Н. Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве, разделенном сильнопроницаемой пленкой / Н.Н. Шадрина // Международный семинар "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа г. Улан-Удэ. — 2015. — С. 143 - 146.

99. Шадрина, Н.Н. О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений / Н.Н. Шадрина // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2016. — Т. 13. — С. 411 - 425.

100. Шевелева, В.Н. Об одной задаче контактной теплопроводности / В.Н. Шевелева // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 172 - 174.

101. Шефтель, З.Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами / З.Г. Шефтель // Сибирский математический журнал. — 1965. — Т. 4. — № 3. — С. 636 - 668.

102. Шпилевой, А.Я. Использование римановых поверхностей при исследовании процессов в кусочно-однородных средах / А.Я. Шпилевой // Исследования по специальным задачам гидродинамики. МОИП. М.: Наука. — 1982. — С. 39 - 42.

103. Шубин, В.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом / В.В. Шубин // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2012. — Т. 12. — № 1. — С. 126 - 138.

104. Brown, S.R. Transport of fluid and electric current through a single fracture / S.R. Brown // J. Geophysics Research. — 1989. — V. 94. — № 7. — P. 9429 - 9438.

105. Kozhanov, A.I. The conjugation problem for some nonclassical high-order differential equations / A.I. Kozhanov, E.F. Sharin // J. of Mathematical Sciences. — 2015. — V. 204. — № 3. P. 298 - 314.

106. Oger L., Gauthier C. Heterogeneites et longueurs caracteristiques dans les milieux poreux / L. Oger , C. Gauthier // Entropie. — 1989. — V. 25. — № 152. — P. 29 - 42.

107. Ungureanu-David E. O problema de miscare plana a unui fluid intrun mediu poros neomogen / E. Ungureanu-David // Stud. si cerc. Mat. — 1993. — V. 45. — № 4. — P. 363 - 373.