ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Романенко Галина Викторовна

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белов Юрий Яковлевич

Красноярск – 2017

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Исследование обратных задач вызвано в значительной степени необходимостью разработки математических методов решения большого класса важных прикладных задач, связанных с обработкой и интерпретацией результатов. Обратными называют задачи, в которых по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений (коэффициентные обратные задачи), либо восстановить функцию, входящую в начальное условие (ретроспективные задачи) или в граничное условие (граничные обратные задачи). Эти задачи в большинстве случаев некорректны (неустойчивы по отношению к погрешностям измерений).

В целом, под обратными понимают задачи, решение которых состоит в обращении причинно-следственных связей, проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта или процесса и заключается в определении параметров данной модели по имеющимся результатам наблюдений и прочей экспериментальной информации. Различные примеры обратных и некорректно поставленных задач приведены в [25], [29], [34], [73].

Исследование обратных задач сводится к вопросу об их корректности. Но так как практически все обратные задачи являлись некорректными с точки зрения их постановки, то существенный прогресс в исследовании стал возможен лишь во второй половине двадцатого века в связи с развитием теории некорректных задач, большой вклад в разработку которой сделан отечественными математиками А.Н. Тихоновым, А.И. Прилепко, М.М. Лаврентьевым, В.К. Ивановым и другими ([30], [42], [43], [46], [49], [72]). Первые же исследования в теории обратных задач были проведены Герглотцем [96] и были связаны с вопросами обратных задач сейсмики.

Большой вклад в развитие теории обратных задач математической физики внесен представителями ряда отечественных математических школ, представителями которых являются: Г.В. Алексеев, Д.С. Аниконов, Ю.Е. Аниконов, Ю.Я. Белов, А.Л. Бухгейм, В.В. Васин, А.О. Ватульян, А.Д. Искендеров, С.И. Кабанихин, А.И. Кожанов, М.В. Нещадим, А.И. Прилепко, С.Г. Пятков, В.Г. Романов и др., а также их ученики и последователи ([2] — [4], [8], [11], [23] — [25], [32], [34], [40], [49], [50], [69]).

Исследования в данной области проводятся также математиками из Италии, Китая, Казахстана, США, Франции, Швеции, Японии и др., например, A. Lorenzi, R. Riganti, W. Rundell, M. Yamamoto, H. M. Yin, X. Zhang и другие ([93], [97] — [100], [103] — [106]).

Исследованию различных коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа были посвящены работы ([1], [6], [7], [9], [10], [13], [15], [17] — [20], [22], [28], [36] — [38], [47], [48], [68], [75], [92]), исследованию обратных задач для систем уравнений параболического типа ([21], [32], [33], [35], [51] — [53], [71]), систем составного типа ([26], [89], [91]).

Исследование прямой задачи для двумерного нагруженного уравнения рассмотрено в работе [74], для одномерного нагруженного уравнения типа Бюргерса в работе [94], система нагруженных уравнений типа Бюргерса рассмотрена в [90].

Цель работы. Основная цель диссертации заключается в доказательстве однозначной разрешимости коэффициентных обратных задач для параболических уравнений и систем специального вида с данными Коши, используя различные методы сведения обратных задач к прямым.

Объект исследования. Обратные задачи для нелинейных параболических уравнений и систем специального вида с данными Коши.

Новизна и интерес данной работы заключается в том, что задачи исследуются в классах гладких ограниченных функций, а неизвестные коэффициенты в них зависят от нескольких независимых переменных, входящих в уравнение. Для сведения обратных задач к прямым применяются различные методы.

Методы исследования. Основной метод, применяющийся в диссертации при доказательстве разрешимости прямых задач — метод слабой аппроксимации, являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне и названный так Н.Н. Яненко [83]. Методы расщепления во многом получили развитие в работах Н.Н. Яненко, А.А. Самарского [70, 84], их учеников и последователей [14, 85, 86]. Суть метода заключается в том, что исходное уравнение расщепляют на более простые составляющие. Полученная вспомогательная расщеплённая задача оказывается, как правило, проще, и решение можно либо выписать точно, либо получить более точные априорные оценки. Далее, на основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации заключается, что решением прямой задачи является предельная функция, к которой сходится подпоследовательность последовательности решений вспомогательной расщеплённой задачи.

Для сведения обратных задач к прямым в главах диссертации использованы различные подходы:

- в главе 2 используется метод, предложенный Ю.Е. Аниконовым, который позволяет расщепить обратную задачу сложной структуры на две прямых меньшей размерности и имеющих более простую структуру;
- в главе 3 для исследования обратной задачи для системы уравнений разработан и применен метод, который приводит исходную обратную задачу к двум прямым задачам меньшей размерности. Алгоритм для систем разработан на основе метода, предложенного Ю.Е. Аниконовым для уравнений;
- в 4 главе рассмотрены прямые задачи для систем «нагруженных» уравнений, содержащих следы неизвестных функции и их производных. Такие системы могут быть получены при сведении обратной задачи к прямой,

используя некоторую дополнительную информацию о решении (условия переопределения).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 106 наименований, 23 из них являются работами автора по теме диссертации. В соавторстве написаны 15 работ. Объем диссертации составляет 116 страниц.

В **первой главе** приведены обозначения, вспомогательные утверждения и теоремы, необходимые в дальнейшем.

Во **второй главе** исследована задача идентификации коэффициента при дифференциальном операторе второго порядка, в многомерном параболическом уравнении с данными Коши.

Для перехода от обратной задачи к прямой, в предположении специальных условий на входные данные, использован подход, предложенный в работе [5]. Доказана теорема 2.1 редукции, на основании которой обратная задача приводится к вспомогательным прямым задачам. Существование и единственность решения вспомогательных прямых задач доказаны в теоремах 2.2, 2.3. На основании теорем 1.4, 2.1, 2.2, 2.3 доказана теорема 2.4 существования решения исходной обратной задачи и теорема единственности 2.5. Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и приведены решения, соответствующие этим входным данным.

Третья глава диссертации посвящена исследованию обратной задачи с данными Коши для системы многомерных параболических уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты при дифференциальном операторе второго порядка по выделенной переменной и сумме младших членов. Начальные данные заданы в виде произведения двух функций, зависящих от разных переменных.

Доказана теорема 3.1 редукции, на основании которой исходная обратная задача сведена к вспомогательным прямым задачам, одна из которых является классической задачей Коши для параболического уравнения, а вторая — система сильно нелинейных одномерных параболических уравнений. Существование и единственность решения вспомогательной прямой задачи для системы доказана в теоремах 3.2, 3.3. На основании теорем 1.4, 3.1, 3.2, 3.3 доказана теорема существования решения исходной обратной задачи 3.4 и теорема единственности 3.5. Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и приведены решения, соответствующие этим входным данным.

В **четвертой главе** диссертации рассмотрены одномерные прямые задачи для систем нагруженных (содержащих следы неизвестных функций и их производных) параболических уравнений и нагруженных систем составного типа. К прямым задачам для систем такого типа приводятся некоторые коэффициентные обратные задачи для линейных или полулинейных систем параболических уравнений (или систем составного типа), связанных по младшим членам, с данными Коши.

Достаточные условия разрешимости поставленных задач приведены в теоремах 3.4 и 4.2 соответственно для систем параболических уравнений и систем составного типа.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики и представлениями на научных конференциях и семинарах. Все полученные в работе результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 23 работах автора, из них 4 статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации [78], [79], [82], [101], одна статья в переводной версии журнала [95], остальные работы опубликованы в сборниках материалов научных конференций [54] — [67], [77], [80], [81], [102].

Пятнадцать работ написаны в соавторстве. И. В. Фроленкову принадлежат идеи постановок задач. В работах [78], [82] основной вклад в доказательство теорем существования и единственности решения принадлежит автору. В работе [79] доказательство теоремы редукции, а также доказательство теоремы существования и единственности решения обратной задачи принадлежит И. В. Фроленкову, автору принадлежит доказательство теорем существования и единственности решения прямой вспомогательной задачи.

В работе [77] рассмотрены две задачи. Автору принадлежит доказательство теоремы редукции для задачи 1, теорем существования и единственности решения редуцированной задачи. Доказательство однозначной разрешимости задачи 2 в случае суммы принадлежит И. В. Фроленкову, Е. Н. Кригер принадлежит получение оценки устойчивости по входным данным решения задачи 2 в случае суммы и доказательство локальной разрешимости задачи 2 в случае произведения.

В работе [102] решающий вклад в доказательство теорем существования решения в случае двумерного параболического уравнения и в случае уравнения типа Бюргерса принадлежит И. В. Фроленкову, автору принадлежит доказательство теоремы существования в случае одномерной системы уравнений параболического типа. В работах [54] — [65], [80], [81] основной вклад принадлежит автору.

Доклады по теме диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

– XLII Краевая научная студенческая конференция по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009);

–XLIII Краевая научная студенческая конференция по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2010);

–XLVIII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010);

– VII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2011);

– VIII Всероссийская конференция «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2012);

– VII Всесибирский конгресс женщин-математиков (г. Красноярск, 2012);

– Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (г. Новосибирск, 2012);

– XI молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2012» (г. Казань, 2012);

– IX Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием, посвященная 385-летию со дня основания г. Красноярска «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2013);

– 51-я Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2013);

– Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (г. Новосибирск, 2013);

– Международная конференция «Математические и информационные технологии, MIT–2013» (Врнячка Баня, Сербия, Будва, Черногория, 2013);

– Пятая Международная молодежная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2013);

– XII молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения–2013» (г. Казань, 2013);

– X юбилейная Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященная 80-летию образования Красноярского края «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2014).

Все результаты, представленные в диссертации, обсуждались на семинаре «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю. Я. Белова (2010 – 2016 гг.), на семинаре «Неклассические уравнения математической физики», приуроченному к 60-летию профессора С. Г. Пяткова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск, 2016), на семинаре «Математические модели механики сплошных сред» под руководством чл.-корр. РАН профессора П. И. Плотникова (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г.Новосибирск, 2017).

Работы по теме диссертационного исследования были отмечены дипломами конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М. А. Лаврентьева (2010 , 2013 гг.).

Автор выражает глубокую благодарность за руководство и помощь в работе над диссертацией доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. Я. Белову и кандидату физ.-мат. наук, доценту И. В. Фроленкову, а также всем участникам научного семинара «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, в особенности Е. Н. Кригер, за советы и замечания к диссертации.

1 Вспомогательные предложения

1.1 Основные определения и теоремы

Приведем основные теоремы, леммы и замечания.

Теорема 1.1 (Арцела). *Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство теоремы 1.1 можно найти, например, в [41, 45].

Рассмотрим в области $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ задачу Коши

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in E_n, \tag{1.2}$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\,(t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{1.3}$$

Теорема 1.2 (Принцип максимума). *Пусть $u(t,x)$ — классическое решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *выполнено условие* (1.3) *и выполняются соотношения*

$$|a_{ij}(t,x)| \leq M(|x^2|+1), \quad |b_i(t,x)| \leq M(|x^2|+1)^{1/2}, \quad M - const,$$

$$|\varphi(x)| \leq q,\ x \in E_n, \quad |f(t,x)| \leq f_0, \quad c(t,x) \leq m, \quad m - const,\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leq e^{mt}(f_0 t + q).$$

Доказательство см. в [31].

Лемма 1.1 (Неравенство Гронуолла). *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке $[0,t^*]$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\chi(t) \leq C + \int_0^t [A + B\chi(\theta)]\,d\theta,$$

где постоянные $A, B, C \geq 0$. *Тогда, если* $B > 0$, *то при* $0 \leq t \leq t^*$ *имеет место оценка*

$$\chi(t) \leq Ce^{Bt} + \frac{A}{B}\left(e^{Bt} - 1\right). \tag{1.4}$$

Если $B = 0$, *то*

$$\chi(t) \leq C + At.$$

Замечание 1.1. *Под системой параболических уравнений будем понимать системы, где каждое из уравнений является параболическим относительно одной из функций, например,*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx} + u_x + u(t,x)v(t,x) + f_1(t,x), \\ v_t(t,x) = v_{xx} + v_x + u(t,x) + v(t,x) + f_2(t,x). \end{cases}$$

Первое уравнение системы параболическое относительно функции $u(t,x)$, *второе — относительно* $v(t,x)$.

Замечание 1.2. *Под системой составного типа будем понимать системы, в которых одно из уравнений является параболическим относительно одной из функций, а второе является уравнением другого типа, например,*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx} + u_x + u(t,x) + v(t,x) + f_1(t,x), \\ v_t(t,x) = v_x + u(t,x)v(t,x) + f_2(t,x). \end{cases}$$

Первое уравнение системы параболическое относительно функции $u(t,x)$, *второе — уравнение в частных производных первого порядка относительно* $v(t,x)$.

Замечание 1.3. *В диссертации в главах 2 — 4 неизвестные коэффициенты в рассматриваемых уравнениях или системах стоят при старших производных, поэтому в работе строго доказано, что все искомые коэффициенты удовлетворяют условию параболичности* (1.3). *Соответственно и употребление в названии глав слова «параболический» подразумевает, что если рассмотрено уравнение с неизвестным коэффициентом при старшей производной, то доказано, что данный коэффициент положителен.*

1.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$ задачу Коши

$$\varphi_t = \Delta\varphi + h, \tag{1.5}$$

$$\varphi(0,x) = \omega_0(x). \tag{1.6}$$

Здесь $h(t,x)$ и $\omega_0(x)$ — заданные функции. Определению подлежит функция $u(t,x)$.

Определение 1.1. *Функция $\varphi(t,x)$, принадлежащая пространству $C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x)|\varphi_t(t,x), D^\alpha_x\varphi(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}),\ |\alpha| \le 2\}$, называется решением (классическим решением) задачи Коши, если в $\Pi_{[0,T]}$ она удовлетворяет уравнению* (1.5), *а при $t = 0$ — начальному условию* (1.6).

Теорема 1.3. *Задача Коши* (1.5), (1.6) *не может иметь более одного ограниченного в $\Pi_{[0,T]}$ классического решения.*

Теорема 1.4. *Пусть $\omega_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ ограничена, тогда существует единственное решение $\varphi(t,x)$ задачи* (1.5) *(при $h(t,x) = 0$), принадлежащее классу $C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x)|\varphi_t(t,x), D^\alpha_x\varphi(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}),\ |\alpha| \le 2\}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{|\alpha|\le 2} |D^\alpha_x \varphi_t(t,x)| \le C.$$

Обозначим через $B(\mathbb{R}^n)$ и $B(\Pi_{[0,T]})$ банаховы пространства непрерывных и ограниченных в $\mathbb{R}^n$ или, соответственно, в полосе $\Pi_{[0,T]}$ функций с нормой

$$||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u_0(x)| \text{ и } ||h||_{B(\Pi_{[0,T]})} = \sup_{(t,x)\in(\Pi_{[0,T]})} |h(t,x)|.$$

Теорема 1.5. *Если $\omega_0(x)$ принадлежит $B(\mathbb{R}^n)$, а функции $h(t,x)$, $h_{x_i}(t,x)$ $(i = 1,\dots,n)$ принадлежат $B(\Pi_{[0,T]})$, то существует принадлежащее $B(\Pi_{[0,T]})$ классическое решение $\varphi(t,x)$ задачи* (1.5), (1.6)*; при этом*

$$||\varphi||_{B(\Pi_{[0,T]})} \le ||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} + T||h||_{B(\Pi_{[0,T]})}.$$

Доказательство теорем 1.3 — 1.5 см. в [44].

Заметим, что в теореме 1.5 установлено существование классического решения задачи Коши (1.5), (1.6) при любых ограниченных ω_0 из $C(\mathbb{R}^n)$ и любых ограниченных h из $C(\Pi_{[0,T]})$, для которых непрерывны и ограничены в $\Pi_{[0,T]}$ все производные первого порядка по пространственным переменным.

1.3 Общая формулировка метода слабой аппроксимации

В пунктах 1.3, 1.4 приведено краткое описание метода слабой аппроксимации и теоремы сходимости метода. Подробнее информация изложена в [14, 87].

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u_0, \tag{1.7}$$

где $L(t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $L = \sum_{i=1}^m L_i$, $f = \sum_{i=1}^m f_i$ и $\bigcap_{i=1}^m D(L_i(t)) \subseteq D(L(t))$. Считаем,что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в $\mathfrak{B}$ и функции $f_i(t) \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, m$.

Наряду с задачей (1.7) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{du^\tau}{dt} + L_\tau(t)u^\tau = f_\tau(t), \quad t \in [0,T], \quad u^\tau(0) = u_0, \tag{1.8}$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tau,t)L_i(t), \qquad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\tau,t)f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau,t), \beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ при $\tau \to 0$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau,t) - 1)dt \to 0, \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau,t) - 1)dt \to 0.$$

Метод решения задачи (1.7), при котором в качестве приближенных решений $u^\tau, \tau > 0$, берутся решения u^τ задачи (1.8) и решение u задачи (1.7) находится как предел при $\tau \to 0$ решений u^τ, мы будем называть *методом слабой аппроксимации* [14, 83, 87].

Часто коэффициенты $\alpha_i(\tau, t), \beta_i(\tau, t)$ выбирают в виде

$$\alpha_i(\tau, t) = \beta_i(\tau, t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \leq t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

В этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.8) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_1(t)u^\tau = mf_1(t), \quad t \in (0, \frac{\tau}{m}], \quad \text{— первый дробный шаг,}$$

$$u(0) = u_0,$$

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_2(t)u^\tau = mf_2(t), \quad t \in (\frac{\tau}{m}, \frac{2\tau}{m}], \quad \text{— второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}], \dots (\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau]$. Тем самым находят решение на отрезке $[0, \tau]$ — нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$ — первом целом шаге, затем - на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0, T]$. Задачу (1.8) называют *расщеплением задачи* (1.7).

В тех случаях, когда все операторы L_i имеют более простую структуру, чем оператор L, построение и исследование различных свойств решения задачи (1.8) проще, чем аналогичное исследование задачи (1.7). Так в некоторых нелинейных задачах только расщепление позволяет получить априорные оценки, достаточные для доказательства теорем существования.

1.4 Одна теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Рассмотрим в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)|t_0 \le t \le t_1, x \in E_n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\bar{u}). \tag{1.9}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ — вектор-функции размерности l $(l \ge 0)$. Через $\bar{u} = (v_0, v_1,\ldots,v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом:

$$v_0 = u = (u_1,\ldots,u_l);$$

v_1 — вектор, составленный из всех производных от u первого порядка по x; v_2 — вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x и так далее; v_r — вектор, составленный из производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\bar{u} = \left(u_1,\ldots,u_l,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u_l}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r},\ldots,\frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right),$$

и система уравнений (1.9) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно $(r \ge 0)$.

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^m \varphi_j^i, \quad j = 1,\ldots,l,$$

где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau), \tag{1.10}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}$ определены соотношением

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \le t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (1.10) слабо аппроксимирует систему (1.9) [14, 83].

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.11}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.9), (1.10), (1.11). Под классическими решениями уравнений (1.10) (системы (1.11)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.10), в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, при $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.10) ((1.11)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.11) непрерывны по переменным (t, x) из $\Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau \le \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u_{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.11) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.11) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi_{[t_0,t_1]}^{N} = \{(t, x) | t_0 \le t \le t_1, |x| \le N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в уравнение (1.9), причём

$$\max_{\Pi^N_{[t_0,t_1]}} |\varphi_i(t,x,\bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t,x,\bar{u}^{\tau_k})| \to 0,$$

$$\tau_k \to 0, \; i = 1, \ldots, m. \tag{1.12}$$

Теорема 1.6. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (1.9) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство. Ниже для удобства обозначений будем опускать аргумент x и вместо индекса τ_k писать индекс ν, например, будем писать $u^\nu(t)$ вместо $u^{\tau_k}(t)$. Введем средние функции $u^\nu_{cp}(t)$:

$$u^\nu_{cp}(t) = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^{t+\nu} u^\nu(\theta)d\theta. \tag{1.13}$$

При любом t^* из интервала (t_0,t_1) в прямоугольнике $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ функции $u^\nu_{cp}(t)$ существуют (для достаточно малых ν) и сходятся при $\nu \to 0$ равномерно по t, x к функции $u(t)$.

Из (1.13) следует равенство

$$\frac{\partial u^\nu_{cp}(t)}{\partial t} = \frac{u^\nu(t+\tau) - u^\nu(t)}{\nu}.$$

Докажем, что $\frac{\partial u^\nu_{cp}}{\partial t}$ сходятся равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ к вектор–функции $\frac{\partial u}{\partial t}$. Осредним (1.11). Получим систему

$$\frac{\partial u^\nu_{cp}(t)}{\partial t} = \varphi(t,x,\bar{u}^\nu) + \mathfrak{F}_\nu,$$

где

$$\mathfrak{F}_\nu = \mathfrak{F}_\nu(t,x,\bar{u}^\nu) = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^{t+\nu}\left\{\sum_{i=1}^m \alpha_{i,\nu}(\theta)\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\bar{u}^\nu(\theta)) - \sum_{i=1}^m \varphi_i(t,x,\bar{u}^\nu(t))\right\}d\theta.$$

Так как меры множества σ_i, на которых $\alpha_{i,\nu}(t)$ не обращаются в нуль на $[t,t+\nu]$, равны, то

$$\mathfrak{F}_\nu = \frac{m}{\nu}\sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i} \{\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\bar{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t,x,\bar{u}^\nu(t))\}\,d\theta. \tag{1.14}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в (1.14):

$$|\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \bar{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t, x, \bar{u}^\nu(t))| \le$$
$$\le |\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \bar{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(\theta, x, \bar{u}^\nu(\theta))| + |\varphi_i(\theta, x, \bar{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t, x, \bar{u}^\nu(t))|\,.$$

При $\nu \to 0$ первый член в правой части последнего неравенства равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствие соотношения (1.12).

Второй член равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствие равномерной непрерывности по всем своим аргументам вектор-функции φ_i (см. условие 1) и равностепенной непрерывности $\bar{u}^\nu(t)$ по t в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$.

Следовательно, при $\nu \to 0$ функция $\mathfrak{F}_\nu \to 0$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Так как $\varphi(t, x, \bar{u}^\nu(t))$ сходится равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ к $\varphi(t, x, \bar{u}(t))$, то

$$\frac{\partial u^\nu_{cp}(t)}{\partial t} \to \varphi(t, x, \bar{u}(t)) \quad \text{равномерно в } \Pi^N_{[t_0,t^*]}.$$

По теореме о дифференцировании функциональных последовательностей $\frac{\partial u^\nu_{cp}(t)}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \bar{u}(t))$, то есть u — классическое решение системы (1.9) в $\Pi^N_{[t^*,t_1]}$ при любом $t^* = (t_0, t_1)$ и, следовательно, в $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Теорема доказана.

Замечание. *Рассмотрим систему уравнений* (1.9) *с вектор-функцией* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. *Из доказательства теоремы 1.6 ([14]) легко видеть, что если* $u^{\tau_k}(t, x)$ *— решение системы*

$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_1, \quad t_0 + n\tau_k < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right)\tau_k,$$
$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_2, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right) < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right)\tau_k,$$
$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = p\varphi_3, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right) < t \le t_0 + (n+1)\,\tau_k,$$

где $p > 1$ *— некоторое фиксированное целое число, и выполняются условия* 1, 2, *то* $u(t, x)$ *является решением системы* (1.9) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

1.5 Метод исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений Ю. Е. Аниконова

В работе [5] Ю.Е.Аниконов предложил следующий метод исследования обратных задач.

Пусть $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ — вещественные евклидовы пространства переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$ $(n \geq 1, m \geq 1)$.

Рассматривается эволюционное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A_x W + L_z W + \lambda(x,t) B_x W, \quad x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m, t \geq 0, \tag{1.15}$$

где A_x, B_x — линейные операторы, действующие только по переменным x и не зависящие от z; L_z — линейный оператор, действует только по переменным z и не зависит от x.

Требуется найти функции $W(x,z,t)$, $\lambda(x,t)$, входящие в уравнение (1.15), если заданы начально-краевые данные

$$W(x,z,0) = W_0(x,z), \quad W(x,0,t) = Q(x,t). \tag{1.16}$$

Теорема 1.7. *Пусть данные $W_0(x,z)$, $Q(x,t)$ обратной задачи (1.15), (1.16) удовлетворяют условиям:*

$$W_0(x,z) = (c(x), b(z)), \quad B_x Q \neq 0, \quad W_0(x,0) = Q(x,0),$$

где $c(x)$, $b(z)$ — элементы гильбертова пространства H, зависящие от $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}^m$ соответственно.

Тогда, если существуют решения $f(x,t)$ и $\varphi(z,t)$ следующих задач Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L_z \varphi, \quad \varphi|_{t=0} = b(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_x f + B_x f \frac{\partial Q/\partial t - A_x Q - (f, g(t))}{B_x Q}, \quad f|_{t=0} = c(x), \quad g(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{z=0},$$

то функции $W(x, z, t)$, $\lambda(x, t)$, *определенные формулами*

$$W(x, z, t) = (f(x, t), \varphi(z, t)),$$

$$\lambda(x, t) = \frac{\partial Q/\partial t - A_x Q - (f, g(t))}{B_x Q},$$

являются решением обратной задачи (1.15), (1.16).

2 Многомерное параболическое уравнение с начальными данными в виде произведения

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{2.1}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z)+c_2(t)u_z(t,x,z)+c_3(t)u(t,x,z)$, с начальным условием условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2.2}$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c_1(t) \ge c_0 > 0$. Функция $u_0(x,z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.1), (2.2).

Пусть задано условие переопределения

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) \tag{2.3}$$

и выполнено условие согласования

$$u_0(0,z) = \psi(0,z). \tag{2.4}$$

Предполагаем выполнение условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \ge \mu > 0, \quad \mu\text{— const.} \tag{2.5}$$

2.2 Один метод решения многомерных обратных задач для параболических уравнений специального вида

Для исследования обратной задачи используем подход, предложенный Ю.Е.Аниконовым. Задача (2.1)— (2.3) является частным случаем задачи, рассмотренной в [5].

Сформулируем и докажем теорему редукции для задачи (2.1)— (2.3).

Теорема 2.1 ([78, 79]). *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f(t,z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x\varphi,$$
$$\varphi(0,x) = w_0(x), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t)f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$f(0,z) = v_0(z), \tag{2.7}$$

то функции $u(t,x,z)$ и $\lambda(t,z)$, определенные формулами

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z),$$
$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (2.1) — (2.3) *в предположении, что*

$$u_0(x,z) = w_0(x)v_0(z).$$

Доказательство. Проверим справедливость теоремы непосредственной подстановкой в уравнения (2.1), (2.2) выражений для неизвестных функций.

Подставим $u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z)$ и $\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ в уравнение (2.1), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}f + \frac{\partial f}{\partial t}\varphi =$$
$$= a(t)\varphi f_{zz} + b(t)f\Delta_x\varphi + \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}B_z(f)\varphi.$$

Сгруппируем относительно f и φ, получим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - b(t)\Delta_x\varphi\right)f =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} - a(t)f_{zz} - \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}B_z(f)\right)\varphi.$$

Учитывая, что $\varphi(t,x)$ — решение задачи (2.8), а $f(t,z)$ — решение задачи (2.9), получаем тождество.

Очевидно, что функция $u(t,x,z)=\varphi(t,x)f(t,z)$ удовлетворяет начальному условию из (2.2)

$$u(0,x,z)=\varphi(0,x)f(0,z)=w_0(x)v_0(z)=u_0(x,z).$$

Проверим выполнение условий переопределения $u(t,0,z) = \psi(t,z)$. Пусть $A(t,z)=u(t,0,z)-\psi(t,z)$. Покажем, что $A(t,z)=0$. Рассмотрим уравнение (2.1) при $x=(0,0,\dots,0)$, получим

$$\begin{aligned}u_t(t,0,z)&=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\lambda(t,z)B_z(u)=\\&=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\&+\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}B_x(u(t,0,z)+\psi(t,z)-\psi(t,z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_t(t,0,z)&=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\lambda(t,z)B_z(u)=\\&=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\&+\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t)}{B_z(\psi)}B_z(\psi(t,z))+\\&+\lambda(t,z)B_z(A(t,z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_t(t,0,z)&=a(t)(u_{zz}(t,0,z)-\psi_{zz}(t,z))+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\&+\psi_t(t,z)-f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t)+\lambda(t,z)B_z(A(t,z)).\end{aligned}$$

Получили задачу Коши следующего вида

$$A_t(t,z)=a(t)A_{zz}(t,z)+\lambda(t,z)B_z(A(t,z));\quad A(0,z)=0.$$

Так как единственным решением данной задачи является $A(t,z)=0$, тогда $u(t,0,z)=\psi(t,z)$. Условие переопределения выполняется. $\square$

Применим теорему 2.1 и получим две прямых задачи (2.8) и (2.9).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x \varphi,$$
$$\varphi(0,x) = w_0(x), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$f(0,z) = v_0(z). \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. *Пусть* $\widetilde{G}_{[0,T]} = G_{[0,T]} \bigcup \Pi_{[0,T]}$, *где*

$$G_{[0,T]} = \big\{(t,z) \mid z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\},$$

$$\Pi_{[0,T]} = \big\{(t,x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T\big\}.$$

2.3 Доказательство существования решения задачи (2.1) – (2.3)

2.3.1 Доказательство существования решения прямой задачи (2.9)

Для доказательства существования решения задачи (2.9) рассмотрим в области $G_{[0,T]}$ вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f) S_\delta\left(\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right), \quad f(0,z) = v_0(z), \tag{2.10}$$

здесь $\beta(t,z) = \psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z)$ — это известная функция.

$S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая на всей области определения и обладающая следующими свойствами:

$S_\delta(\vartheta) \ge \frac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \le 2, k = \overline{1,4},$

$$S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \frac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \le \frac{\delta}{3}, \\ \rho(\vartheta), & \text{при } \frac{\delta}{3} < \vartheta < \frac{\delta}{2}, \\ \vartheta, & \text{при } \vartheta \ge \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

где $\rho(\vartheta)$ — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемая функция.

Функция $v_0(z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}$. Определению подлежит функция $f(t,z)$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи (2.10) используем метод слабой аппроксимации [14, 83]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau J = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f_t^\tau = 3\,a(t) f_{zz}^\tau(t,z), \qquad j\tau < t \le \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{2.11}$$

$$f_t^\tau = 3\,(c_1(t) f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_z^\tau(t,z)) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau, \tag{2.12}$$

$$f_t^\tau = 3\,c_3(t) f^\tau(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau, \tag{2.13}$$

$$f^\tau(0,z) = v_0(z), \qquad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \tag{2.14}$$

где $\lambda^\tau(t,z) = \frac{\beta(t,z) - f^\tau(t-\frac{\tau}{3},z)\,\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $v_0(z), \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k} v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \le C, \quad k = 0,1,\ldots,4,\ i = 0,1,\ldots,6. \tag{2.15}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $f^\tau(t,z)$ задачи (2.11)—(2.14) в классе гладких ограниченных функций.

Будем считать далее, что $C > 1$ — некоторые константы, вообще говоря различные, зависящие от констант, ограничивающих коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, константы μ из условия (2.5) и константы, ограничивающей входные данные, из условия (2.15). Константы C не зависят от τ.

Введем обозначение $V_k = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{d^k}{dz^k} v_0(z)\right|$, где $k = \overline{0,4}$ — порядок производной.

На первом дробном шаге, $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение

$$f_t^\tau = 3\,a(t) f_{zz}^\tau(t,z).$$

В силу теоремы принципа максимума для задачи Коши 1.2, учитывая (2.14), получим оценку

$$|f^\tau(\xi, z)| \leq V_0,\ 0 < \xi \leq t,\ 0 < t \leq \frac{\tau}{3}. \tag{2.16}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$

$$f_t^\tau = 3\left(c_1(t) f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_z^\tau(t,z)\right) S_\delta\left(\frac{\beta(t,z) - f^\tau(t-\frac{\tau}{3}, z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right).$$

В силу оценки (2.16), свойств срезающей функции и принципа максимума 1.2 справедлива оценка

$$|f^\tau(\xi, z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau\left(\frac{\tau}{3}, z\right)| \leq V_0,\ \frac{\tau}{3} < \xi \leq \frac{2\tau}{3}. \tag{2.17}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.13) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f^\tau(\xi, z) = f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$
$$+ 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta) f^\tau(\eta, z) S_\delta\left(\frac{\beta(\eta,z) - f^\tau(\eta-\frac{\tau}{3}, z)\varphi_t(\eta,0)}{B_z(\psi)}\right) d\eta.$$

Справедливо выполнение следующего неравенства

$$|f^\tau(\xi, z)| \leq \left|f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| +$$
$$+ 3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta) f^\tau(\eta, z) S_\delta\left(\frac{\beta(\eta,z) - f^\tau(\eta-\frac{\tau}{3}, z)\varphi_t(\eta,0)}{B_z(\psi)}\right) d\eta\right| \leq$$
$$\leq \left|f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left|f^\tau(\eta, z)\right| \left(1 + \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|f^\tau(\frac{2\tau}{3}, z)\right|\right) d\eta,$$
$$\frac{2\tau}{3} < \xi \leq t, \quad \frac{2\tau}{3} \leq t \leq \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, а также учитывая оценку (2.17) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le V_0 + C(1+V_0)\int\limits_0^\tau \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(\eta,z)| d\eta, \quad 0 < t \le \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла 1.1, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le V_0 e^{C\tau(1+V_0)} + 1 - 1 \le (1+V_0)e^{C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{C\tau(1+V_0)} e^{C\tau(1+V_0)e^{C\tau(1+V_0)}} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C\tau(1+V_0)} \le 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{3C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

На втором временном шаге, при условии $e^{3C\tau(1+V_0)} \le 2$, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{5C\tau(1+V_0)} - 1, \ 0 < t \le 3\tau.$$

Рассуждая аналогично, на l-ом шаге $(l < J)$ получаем

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{(2l+1)C\tau(1+V_0)} - 1, \ 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_1^*, $0 < t_1^* \le T$, которая удовлетворяет неравенству

$$e^{3t_1^* C(1+V_0)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{3t_1^* C(1+V_0)} - 1 \le C, \quad 0 < t \le t_1^*.$$

В итоге получили равномерную по τ оценку

$$|f^\tau(t,z)| \le C, \ (t,z) \in G_{[0,t_1^*]}. \tag{2.18}$$

Оценим первую производную функции $f(t,z)$. Продифференцируем (2.11)—(2.14) по z.

$$f^\tau_{tz} = 3\,a(t) f^\tau_{zzz}(t,z), \qquad j\tau < t \le \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau; \tag{2.19}$$

$$f^\tau_{tz} = 3\,\left((c_1(t)f^\tau_{zzz}(t,z) + c_2(t)f^\tau_{zz}(t,z))\,S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \right.$$
$$\left. + (c_1(t)f^\tau_{zz}(t,z) + c_2(t)f^\tau_z(t,z))\,S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\right),$$
$$\Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau; \tag{2.20}$$

$$f^\tau_{tz} = 3\,\Big(c_3(t)f^\tau_z(t,z)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_3(t)f^\tau(t,z)S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\Big),$$
$$\Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \tag{2.21}$$

$$f^\tau_z(0,z) = v_{0z}(z), \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \tag{2.22}$$

где $\lambda^\tau_z = m_1(t,z)f^\tau_z(t-\frac{\tau}{3},z) + m_2(t,z)$, причем $m_2(t,z) = \frac{\beta_z(t,z)-\lambda(t,z)B_z(\psi_z)}{B_z(\psi)}$ и $m_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ. На первом дробном шаге, $t\in(0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (2.19). В силу принципа максимума 1.2 получим оценку:

$$|f^\tau_z(\xi,z)| \le V_1, \quad 0<\xi\le t,\ 0<t\le\frac{\tau}{3}. \tag{2.23}$$

На втором дробном шаге, $t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.20). Введем обозначение $g_1 = f^\tau_z(t,z)$, получим уравнение

$$g_{1t} = A_1 g_{1zz} + E_1 g_{1z} + K_1 g_1,$$

где $A_1 = 3\,c_1(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,
$E_1 = 3(c_2(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_1(t){S_\delta}'(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z))$,
$K_1 = c_2(t)S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)$. В силу принципа максимума 1.2, свойств срезающей функции и оценки (2.23) получаем

$$|g_1| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |g_1(t-\frac{\tau}{3},z)|e^{C\tau(1+g_1(t-\frac{\tau}{3},z))} \le V_1 e^{C\tau(1+V_1)} +$$
$$+1-1 \le (V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$|f_z^\tau(\xi,z)| \le (V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1,\ \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \tag{2.24}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.21) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f_z^\tau(\xi,z) = f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big) + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^\tau(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) +$$
$$+ c_3(\eta)f^\tau(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta.$$

Справедливо выполнение следующего неравенства

$$|f_z^\tau(\xi,z)| \le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| +$$
$$+3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^\tau(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) + c_3(\eta)f^\tau(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta\right| \le$$
$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}|f_z^\tau(\eta,z)| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_z^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right|d\eta \le$$
$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right|d\eta \le$$

$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right|e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta, \quad \frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, также учитывая оценку (2.24) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \Big((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1\Big)e^{C\tau} + C\int\limits_0^\tau(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta,$$
$$0 < t \le \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла 1.1, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)}-1\right)e^{2C\tau}+e^{C\tau}-1, \quad 0<t\le\tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)}-1\right), \quad 0<t\le\tau. \tag{2.25}$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t\in(\tau,2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)}\right)e^{3C\tau(1+V_1)e^{3C\tau(1+V_1)}}-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{3C\tau(1+V_1)}\le 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{9C\tau(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

На втором целом временном шаге в предположении, что $e^{9C\tau(1+V_1)}\le 2$, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{15C\tau(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге $(l<J)$ приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3(2l+1)C\tau(1+V_1}\right)-1, \quad 0<t\le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_2^*, $0<t_2^*\le t_1^*\le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{9t_2^*C(1+V_1)}\le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{9t_2^*C(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le t_2^*.$$

Для $f_z(t,z)$ справедлива равномерная по τ оценка

$$|f_z^\tau(t,z)|\le C,\ (t,z)\in G_{[0,t_2^*]}. \tag{2.26}$$

Продифференцируем (2.19)—(2.22) по z и получим оценку на вторую производную функции $f(t,z)$.

$$f^{\tau}_{tzz} = 3\,a(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \qquad (2.27)$$

$$f^{\tau}_{tzz} = 3\left[\left(c_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{\tau}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{zzz}(t,z)\right)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z)) + \right.$$
$$+\,2\left(c_1(t)f^{\tau}_{zzz}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{zz}(t,z)\right)S^{'}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z)) +$$
$$+\left(c_1(t)f^{\tau}_{zz}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{z}(t,z)\right)\times$$
$$\left.\times\left(S^{''}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z) + S^{'}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{zz}(t,z)\right)\right],$$
$$\left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \qquad (2.28)$$

$$f^{\tau}_{tzz} = 3\left[c_3(t)f^{\tau}_{zz}(t,z)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z)) + 2\,c_3(t)f^{\tau}_{z}(t,z)S^{'}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z) + \right.$$
$$\left. + c_3(t)f^{\tau}(t,z)\left(S^{''}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau 2}_{z}(t,z) + S^{'}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{zz}(t,z)\right)\right],$$
$$\left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le \left(j+1\right)\tau; \qquad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{\tau}(0,z) = \frac{d^2}{dz^2}v_0(z), \quad j=0,1,2,\ldots,(J-1), \quad J\tau = T, \qquad (2.30)$$

где $\lambda^{\tau}_{zz} = p_1(t,z)f^{\tau}_{zz}(t-\frac{\tau}{3},z) + p_2(t,z)$, причем $p_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ и $p_2(t,z) = \frac{\beta_{zz}(t,z)-(2\,\lambda_z(t,z)+\lambda(t,z))B_z(\psi_{zz})}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t \in (0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (2.27). В силу принципа максимума 1.2 получим оценку:

$$|f^{\tau}_{zz}(\xi,z)| \le V_2, \quad 0 < \xi \le t,\ 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \qquad (2.31)$$

На втором дробном шаге, $t \in (\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.28). Обозначим $g_2 = f^{\tau}_{zz}$, получим уравнение

$$g_{2t} = A_2 g_{2zz} + E_2 g_{2z} + K_2 g_2 + D_2,$$

где $A_2 = 3\,c_1(t)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))$,

$E_2 = 3(c_2(t)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z)) + 2c_1(t)S^{'}_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z))$,

$K_2 = 3(2c_2(t)S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z) + c_1(t)(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) +$
$+ S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z))),$
$D_2 = 3c_2(t)f^\tau_z(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z))$. В силу принципа максимума 1.2, свойства срезающей функции и оценки (2.31) получаем

$$|g_2| \le (\sup_{z\in\mathbb{R}} |g_2(t-\frac{\tau}{3},z)| + C\tau(g_2(t-\frac{\tau}{3},z)+1)+1-1)e^{C\tau(1+g_2(t-\frac{\tau}{3},z))} \le$$
$$\le (V_2+1)\,(Ct+1)e^{C\tau(1+V_2)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$|f^\tau_{zz}(\xi,z)| \le (V_2+1)\,e^{2C\tau(1+V_2)} - 1, \quad \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \tag{2.32}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.29) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$.

$$f^\tau_{zz}(\xi,z) = f^\tau_{zz}\left(\frac{2\tau}{3},z\right) +$$
$$+ 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} (c_3(\eta)f^\tau_{zz}(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) + 2c_3(\eta)f^\tau_z(\eta,z)S'_\delta(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_z(\eta,z) +$$
$$+ c_3(t)f^\tau(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)))d\eta.$$

В итоге получаем оценку

$$|f^\tau_{zz}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f^\tau_{zz}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^\tau_{zz}(\eta,z)| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}}|f^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{3},z)|)d\eta \le$$
$$\le \left|f^\tau_{zz}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (|f^\tau_{zz}(\eta,z)|+1)d\eta,$$
$$\frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

От обеих частей последнего неравенства возьмем $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, также учитывая оценку (2.32) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)e^{2C\tau(1+V_2)}-1\right)e^{C\tau}+$$
$$+C\int_0^{\tau}(|f_{zz}^{\tau}(\eta,z)|+1)d\eta, \quad 0<t\leq\tau.$$

Отсюда, по лемме Гронуолла 1.1, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)e^{2C\tau(1+V_2)}-1\right)e^{2C\tau}+e^{C\tau}-1, \quad 0<t\leq\tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)\,e^{4C\tau(1+V_2)}-1\right), 0<t\leq\tau. \tag{2.33}$$

На первом целом шаге получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)\,e^{4C\tau(1+V_2)}\right)e^{4C\tau(1+V_2)e^{4C\tau(1+V_2)}}-1, \quad 0<t\leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(1+V_2)}\leq 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)\,e^{12C\tau(1+V_2)}\right)-1, \quad 0<t\leq 2\tau.$$

При условии, что $e^{12C\tau(1+V_2)}\leq 2$, на втором временном шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)\,e^{20C\tau(1+V_2)}\right)-1, \quad 0<t\leq 3\tau.$$

Аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l<J$) приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zz}^{\tau}(t,z)| \leq \left((V_2+1)\,e^{4(2l+1)C\tau(1+V_2)}\right)-1, \quad 0<t\leq (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_3^*, $0<t_3^*\leq t_2^*\leq T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12t_3^*C(1+V_2)}\leq 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t,z)| \le \Big((V_2+1)\, e^{12t_3^* C(1+V_2)} \Big) - 1, \quad 0 < t \le t_3^*.$$

Получили оценку второй производной равномерную по τ

$$|f^{\tau}_{zz}(t,z)| \le C,\ (t,x) \in G_{[0,t_3^*]}. \tag{2.34}$$

Оценки третьей и четвертой производной функции $f(t,z)$ по временной переменной получаются аналогично оценкам второй производной. Итоговая оценка третьей производной функции $f(t,z)$ равномерная по τ:

$$|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_4^*]} \quad t_4^* \le t_3^* \le T. \tag{2.35}$$

Оценку четвертой производной функции $f(t,z)$ равномерную по τ:

$$\left| \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{\tau}(t,z) \right| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_5^*]} \quad t_5^* \le t_4^* \le T. \tag{2.36}$$

Таким образом, в $G_{[0,t_5^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{\tau}(t,z) \right| \le C, \quad k = 0,1,\ldots,4. \tag{2.37}$$

В силу оценки (2.37), правые части уравнений (2.11)—(2.14) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t_5^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$|f^{\tau}_{t}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_5^*]}. \tag{2.38}$$

Дифференцируя уравнения задачи (2.11)—(2.14) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$|f^{\tau}_{tz}(t,z)| + |f^{\tau}_{tzz}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_5^*]},$$

что вместе с (2.35), (2.36) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы 1.1 Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t,z)$ последовательности $f^{\tau}(t,z)$ решений задачи (2.11)—(2.14) сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $f(t,z) \in C^{0,2}_{t,z}(G^M_{[0,t^*_5]})$, ($M > 0$ - целое). $G^M_{[0,t^*_5]} = \{|z| \leq M,\ 0 \leq t \leq t^*_5 \leq T\}$. На основании теоремы 1.6 сходимости МСА, $f(t,z)$ — решение задачи (2.10), причем $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G^M_{[0,t^*_5]})$, где

$$C^{1,2}_{t,z}(G^M_{[0,t^*_5]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G^M_{[0,t^*_5]}), k = 0,1,2 \right\},$$

при этом

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \right| \leq C, \quad k = 0,1,2. \tag{2.39}$$

В силу произвольности выбора M функция $f(t,z)$ — решение задачи (2.10) из класса $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*_5]})$. Пусть выполняется следующее условие при $t \in [0, t^*_5]$

$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \delta. \tag{2.40}$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (2.10), докажем, что при $t \in [0, t^*_5]$ выполняется

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Интегрируем (2.10) по временной переменной в пределах от 0 до t:

$$f(t,z) = v_0(z) + \int\limits_0^t \Psi(\eta,z)d\eta,$$

где $\Psi(t,z) = a(t)f_{zz} + B_z(f)S_\delta\left(\frac{\beta(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right)$.

Так как выполняется условие (2.5), то справедливо равенство

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} - \frac{\varphi_t(t,0)\int_0^t \Psi(\eta,z)d\eta}{B_z(\psi)}. \tag{2.41}$$

В силу условия (2.40), учитывая (2.15), (2.39), получим при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \delta - A(\delta)t \geq \frac{\delta}{2}.$$

Здесь $A(\delta)$ — некоторая положительная константа, которая оценивает входные данные и зависит от δ, константы C из (2.15), а также константы, ограничивающей коэффициент $a(t)$.

В силу определения срезающей функции $S_\delta(\theta)$ имеем

$$S_\delta(\lambda(t,z)) = \lambda(t,z), \text{ при } t \in [0,t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_5^*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Следовательно, доказано существование решения $f(t,z)$ задачи (2.9) в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$.

Теорема 2.2 ([78]). *Пусть выполняются условия* (2.5), (2.15), (2.40) *на входные данные. Тогда существует* t^*, $0 < t^* \le T$ *— константа, зависящая от* μ *из* (2.5), *постоянных, ограничивающих функции* $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, *и постоянных из* (2.15), *ограничивающих входные данные, такая, что решение* $f(t,z)$ *задачи* (2.9) *существует в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \right| \le C. \tag{2.42}$$

Поскольку существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, то будем говорить, что задача (2.9) разрешима в малом временном интервале.

2.3.2 Доказательство единственности решения прямой задачи (2.9)

Докажем единственность решения задачи (2.9). Предположим, что $f_1(t,z)$ и $f_2(t,z)$ — два классических решения задачи (2.9). Справедливы соотношения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = a(t) f_{1zz} + B_z(f_1) \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_1(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = a(t) f_{2zz} + B_z(f_2) \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_2(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

$$f_1(0,z) = v_0(z), \quad f_2(0,z) = v_0(z).$$

Покажем, что $f(t,z) = f_1(t,z) - f_2(t,z) \equiv 0$.

Так как $f(t,z) = f_1(t,z) - f_2(t,z)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f)\lambda_1 - B_z(f_2)\frac{f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}, \tag{2.43}$$

$$f(0,z) = 0, \tag{2.44}$$

здесь и далее $\lambda_1 = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_1(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Перепишем уравнение (2.43) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (a(t) + c_1(t)\lambda_1) f_{zz} + c_2(t)\lambda_1 f_z + f\left(c_3(t)\lambda_1 - B_z(f_2)\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right). \tag{2.45}$$

Уравнение (2.45) является уравнением параболического типа, следовательно к задаче Коши (2.45), (2.44) применим принцип максимума 1.2. Получим оценку на функцию $f(t,z)$ следущего вида

$$|f(t,z)| \equiv 0.$$

Следовательно, так как показано, что $f_1(t,z) - f_2(t,z) \equiv 0$, то решение единственно.

Теорема 2.3 ([78]). *Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда решение* $f(t,z)$ *задачи* (2.9) *класса* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (2.42), *единственно.*

2.3.3 Доказательство существования решения обратной задачи (2.1) – (2.3)

Задача (2.8) является классической задачей Коши для параболического уравнения, поэтому для нее справедливы условия теоремы 1.4. В силу того, что функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ выражаются через известные функции, а именно

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x) f(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

где $\varphi(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}$, $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}$ —решения задач (2.8) и (2.9), справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{2} \sum_{|\alpha|\le 2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u(t,x,z) \right| + \sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \lambda(t,z) \right| \le C. \tag{2.46}$$

В силу теорем 1.4, 2.1 — 2.3 справедлива теорема

Теорема 2.4 ([78]). *Пусть выполняются условия теорем 1.4, 2.1 — 2.3. Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ *обратной задачи* (2.1) — (2.3) *в классе*

$$Z(t^*) = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,z) \mid u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}),\ \lambda(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) \right\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}) = \left\{ u(t,x,z) \middle| D_x^\alpha u, \frac{\partial^k}{\partial z^k} u \in C(\widetilde{G}_{[0,t^*]}), k = 0,1,2,\ |\alpha| \le 2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению (2.46).

2.4 Доказательство единственности решения обратной задачи (2.1) – (2.3)

Пусть выполняются условия (2.5), (2.15), (2.46). Доказательство единственности решения задачи (2.1)–(2.3) будем вести от противного. Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z)$ и $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — два классических решения задачи (2.1), (2.2). Причем, пара функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z)$ — решение, определяемое теоремой 2.1 и удовлетворяющее условию (2.3), а пара функций $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющее условию (2.46). Тогда справедливы соотношения:

$$u_{1t} = a(t)u_{1zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_1(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u_1),$$

$$u_{2t} = a(t)u_{2zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_2(t,x,z) + \lambda_2(t,z)B_z(u_2),$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u_2(0,x,z) = u_0(x,z),$$

$$u_1(t,0,z)=\psi(t,z),\quad u_2(t,0,z)=\psi(t,z).$$

Разность $u_1(t,x,z)-u_2(t,x,z)=u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z)-\lambda_2(t,z)=\lambda(t,z)$ является решением задачи

$$u_t=a(t)u_{zz}(t,x,z)+b(t)\Delta_x u(t,x,z)+\lambda_1(t,z)B_z(u)+\lambda(t,z)B_z(u_2), \tag{2.47}$$

$$u(0,x,z)=0,\quad u(t,0,z)=0. \tag{2.48}$$

Полагаем в уравнении (2.47) $x=0$. Используя (2.48), выражаем коэффициент при функции $\lambda(t,z)$. Подставляя его выражение в (2.48), получим

$$\begin{aligned}u_t=a(t)u_{zz}(t,x,z)+b(t)\Delta_x u(t,x,z)+\lambda_1(t,z)B_z(u)+\\+\frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}B_z(u_2),\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$u(0,x,z)=0. \tag{2.50}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_k(t)=\sup_{G_{[0,t]}}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u(\xi,x,z)\right|,\quad k=0,1,2.$$

В силу принципа максимума 1.2 получим оценки на уравнение (2.49)

$$|u(\xi,x,z)|\le Ce^{C\xi}g_2(t)\xi,\quad (\xi,x,z)\in G_{[0,t]},\quad 0\le t\le t^*,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ получим оценку

$$g_0(t)\le Ctg_2(t)\le C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\quad 0\le t\le t^*.$$

Дифференцируя уравнения (2.49), (2.50) по x один или два раза, в силу принципа максимума 1.2 для уравнения

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u_t=a(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u_{zz}(t,x,z)+b(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}\Delta_x u(t,x,z)+\\+\lambda_1(t,z)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}B_z(u)\right)+\frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}B_z(u_2)\right),\quad k=1,2,\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u(0,x,z) = 0, \quad k = 1,2, \tag{2.52}$$

получаем аналогичные оценки

$$g_k(t) \leq Ctg_2(t) \leq C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \quad k = 1,2 \quad 0 \leq t \leq t^*.$$

Сложим все оценки, получим

$$g_0(t,z) + g_1(t,z) + g_2(t,z) \leq C(g_2(t,z) + g_1(t,z) + g_0(t,z))t, \quad 0 \leq t \leq t^*.$$

Отсюда получим, что при $t \in [0,\zeta]$, где $\zeta < \frac{1}{C}$, выполняется равенство $g_0(t,z) + g_1(t,z) + g_2(t,z) = 0$ и, следовательно,

$$u(t,x,z) = 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя рассуждения для $t \in [0,2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z) = 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов получим оценку

$$u(t,x,z) \equiv 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Учитывая, что $u_1(t,x,z) \equiv u_2(t,x,z), \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$, из (2.47), получим, что для $\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t,z)B_z(\psi) = 0,$$

откуда в силу (2.5) следует, что

$$\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z) = 0, \quad t \in [0,t^*].$$

Справедлива

Теорема 2.5 ([78]). *Пусть выполняются условия теоремы 2.4. Тогда решение* $u(t,x,z), \lambda(t,z)$ *задачи* (2.1)–(2.3)*, удовлетворяющее соотношению* (2.46)*, единственно в классе* $Z(t^*)$*.*

2.5 Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу Коши для параболического уравнения.

В области $G_{[0,0.5]} = \{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 0.5\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{zz}(t,x,z) + u_{xx}(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{2.53}$$

где $B_z(u) = u_{zz}(t,x,z) + u_z(t,x,z) + 2u(t,x,z)$, с начальным условием условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1). \tag{2.54}$$

Функции $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c_1(t) = c_2(t) = 1$, $c_3(t) = 2$ — непрерывные, ограниченные на $[0, 0.5]$. Функция $u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^2$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.53), (2.54).

Пусть задано условие переопределения следующего вида

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3),$$

и выполнено условие согласования

$$u_0(0,z) = \psi(0,z) = \sin(z) + 3.$$

Необходимо выполнение следующего условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \ge \mu > 0, \quad \mu\text{— const.}$$

Нетрудно проверить, что данное условие выполняется

$$B_z(\psi) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) =$$
$$= (t+1)(\sin(z) + \cos(z) + 6) \ge \mu > 0,$$

достаточно взять $\mu = 0,5$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi_{xx},\quad \varphi(0,x)=w_0(x)=\sin(x)+1.$$

Решением этой задачи будет является функция $\varphi(t,x)=e^{-t}\sin(x)+1$. В этом можно убедится, подставив функцию $\varphi(t,x)$ в уравнение.

$$-e^{(-t)}\sin(x)=-e^{(-t)}\sin(x),\quad \varphi(0,x)=w_0(x)=\sin(x)+1.$$

Функция $w_0(x)=(\sin(x)+1)\in C(\mathbb{R})$ ограничена.

Для задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=f_{zz}+B_z(f)\frac{\sin(z)(2+t)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},\\ f(0,z)&=v_0(z)=\sin(z)+3,\end{aligned}\qquad(2.55)$$

решением будет является функция $f(t,z)=(t+1)(\sin(z)+3)$.

При этом

$$B_z(f)=(t+1)(-\sin(z))+(t+1)\cos(z)+2(t+1)(\sin(z)+3)=$$
$$=(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6),$$

$$\lambda(t,z)=\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}=$$
$$=\frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}.$$

Подставим решение в уравнение

$$\sin(z)+3=-(t+1)\sin(z)+(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)\frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$

$$\sin(z)+3=-(t+1)\sin(z)+\sin(z)+3+(t+1)\sin(z),$$

получаем верное тождество.

Для существования решения задачи (2.55) необходимо выполнение условия

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right|+\left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right|\le C,\quad k=0,1,\ldots,4,\ i=0,1,\ldots,6.\qquad(2.56)$$

Это условие выполняется в силу ограниченности всех производных от функций $v_0(z) = \sin(z) + 3$ и $\psi(t, z) = (t + 1)(\sin(z) + 3)$.

По теореме 2.1 функция $u(t, x, z)$ представима в виде

$$u(t, x, z) = \varphi(t, x)f(t, z) = (t + 1)(e^{-t} \sin(x) + 1)(\sin(z) + 3).$$

Проверим, удовлетворяет ли функция $u(t, x, z)$ уравнению. Для этого выпишем все функции, участвующие в уравнении

$$u_t = (\sin(z) + 3) \big(\sin(x)(e^{-t} - (t + 1)e^{-t}) + 1\big) =$$
$$= (\sin(z) + 3) \big(\sin(x)e^{-t}(-t) + 1\big),$$

$$u_{xx} = -(\sin(z) + 3)(t + 1) \sin(x)e^{-t},$$
$$u_{zz} = -(\sin(x)e^{-t} + 1)(t + 1) \sin(z),$$

$$\lambda(t, z) = \frac{\psi_t(t, z) - a(t)\psi_{zz}(t, z) - f(t, z)\varphi_t(t, 0)}{B_z(\psi)} =$$
$$= \frac{\sin(z)(t + 2) + 3}{(t + 1)(\sin(z) + \cos(z) + 6)},$$

$$B_z(u)(t + 1)(- \sin(z)) + (t + 1) \cos(z) + 2(t + 1)(\sin(z) + 3) =$$
$$= (t + 1)(\sin(z) + \cos(z) + 6),$$

и подставим их в уравнение (2.53).

$$(\sin(z) + 3) \big(\sin(x)e^{-t}(-t) + 1\big) =$$
$$= -(\sin(x)e^{-t} + 1)(t + 1) \sin(z) - (\sin(z) + 3)(t + 1) \sin(x)e^{-t}+$$
$$+ (t + 1)(\sin(z) + \cos(z) + 6)\frac{\sin(z)(t + 2) + 3}{(t + 1)(\sin(z) + \cos(z) + 6)}.$$

После элементарных преобразований последнее уравнение примет вид

$$\sin(z)\sin(x)e^{-t}(-t) + \sin(z) + 3\sin(x)e^{-t}(-t) + 3 =$$
$$= -2te^{-t}\sin(z)\sin(x) - 3te^{-t}\sin(x) - t\sin(z) - 2e^{-t}\sin(z)\sin(x) -$$
$$- 3e^{-t}\sin(x) - \sin(z) + te^{-t}\sin(z)\sin(x) + t\sin(z) +$$
$$+ 2e^{-t}\sin(z)\sin(x) + 2\sin(z) + 3te^{-t}\sin(x) + 3.$$

После сокращения, получим верное тождество.

Функция $u_0(x, z)$ представима в виде

$$u_0(x, z) = w_0(x)v_0(z) = (\sin(z) + 3)(\sin(x) + 1).$$

Условие для существования решения задачи (2.55):

$$\frac{\beta(t, z) - v_0(z)\varphi_t(t, 0)}{B_z(\psi)} = \frac{\sin(z)(t + 2) + 3}{(t + 1)(\sin(z) + \cos(z) + 6)} \geq \delta,$$

выполняется при $\delta = 0,05$ и $\forall\, t \in [0, 0.5]$.

Данный пример показывает, что множество решений задачи (2.1) — (2.3) не пусто.

3 Система многомерных параболических уравнений с начальными данными, заданными в виде произведения

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Gamma_{[0,T]} = \big\{(t, x, z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ задачу Коши для системы параболических уравнений ($i = \overline{1, m}$)

$$u^i_t = a^i(t)u^i_{zz}(t, x, z) + b(t)\Delta_x u^i(t, x, z) + \lambda^i(t, z)\left(B^i_z(u^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)u^k\right), \quad (3.1)$$

где $B^i_z(u^i) = c^i_1(t)u^i_{zz}(t, x, z) + c^i_2(t)u^i_z(t, x, z) + c^i_3(t)u^i(t, x, z)$, с начальными условиями вида

$$u^i(0, x, z) = u^i_0(x, z). \quad (3.2)$$

Функции $a^i(t), b(t), c^i_l(t), g^k_i(t)$, ($l = 1, 2, 3,\ i, k = \overline{1, m}$) — непрерывные, ограниченные на $[0, T]$, причем $a^i(t) \ge a_0 > 0,\ b(t) \ge b_0 > 0,\ c^i_1(t) \ge c_0 > 0$. Функции $u^i_0(x, z)$ действительнозначные и заданы в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функции $\lambda^i(t, z)$ подлежат определению одновременно с решением $u^i(t, x, z)$ задачи (3.1), (3.2).

Пусть заданы условия переопределения

$$u^i(t, 0, z) = \psi^i(t, z), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.3)$$

и выполнены условия согласования

$$u^i_0(0, z) = \psi^i(0, z), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

Предполагаем выполнение условий

$$\left|B^i_z(\psi^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k\right| \ge \mu^i > 0, \quad \mu^i\text{— const}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.5)$$

3.2 Метод исследования многомерных обратных задач для систем параболических уравнений специального вида

Идею метода, предложенного Ю.Е. Аникoновым [5], расширим на случай систем специального вида. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3.1 ([101]). *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f^i(t,z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x \varphi, \qquad \varphi(0,x) = w_0(x), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = a^i(t) f^i_{zz} + \left(B^i_z(f^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t) f^k \right) \times$$
$$\times \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}, \qquad f^i(0,z) = v^i_0(z), \tag{3.7}$$

то функции $u^i(t,x,z)$ и $\lambda^i(t,z)$, определенные формулами

$$u^i(t,x,z) = \varphi(t,x) f^i(t,z),$$
$$\lambda^i(t,z) = \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k},$$

являются решением обратной задачи (3.1) — (3.2) *в предположении, что*

$$u^i_0(x,z) = w_0(x) v^i_0(z). \tag{3.8}$$

Доказательство. Проверим справедливость теоремы непосредственной подстановкой в уравнения системы (3.1), (3.2) выражений для неизвестных функций.

При подстановке в уравнения системы (3.1) $u^i(t,x,z) = \varphi(t,x) f^i(t,z)$ и $\lambda^i(t,z) = \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}$ получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} f^i + \frac{\partial f^i}{\partial t}\varphi = a^i(t)\varphi f^i_{zz} + b(t) f^i \Delta_x \varphi +$$
$$+ \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k} \left(B^i_z(\varphi f^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)\varphi f^k \right).$$

В силу линейности оператора B^i_z справедливо следующее

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} f^i + \frac{\partial f^i}{\partial t}\varphi = a^i(t)\varphi f^i_{zz} + b(t) f^i \Delta_x \varphi +$$
$$+ \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k} \left(B^i_z(f^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t) f^k \right)\varphi.$$

Сгруппируем относительно f^i и φ, получим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - b(t)\Delta_x\varphi\right) f^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial t} - a^i(t) f^i_{zz} - \right.$$

$$\left. - \left(B^i_z(f^i) + \sum_{k=1}^m g^k_i(t) f^k\right) \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^m g^k_i(t)\psi^k}\right)\varphi.$$

Учитывая, что $\varphi(t,x)$ — решение задачи (3.6), а $f^i(t,z)$ — решение задачи (3.7), получаем тождество.

Очевидно, что функции $u^i(t,x,z) = \varphi(t,x) f^i(t,z)$ удовлетворяет начальному условию из (3.2), если выполнено условие (3.9)

$$u^i(0,x,z) = \varphi(0,x) f^i(0,z) = w_0(x) v^i_0(z) = u^i_0(x,z).$$

Проверим выполнение условий переопределения $u^i(t,0,z) = \psi^i(t,z)$. Пусть $A^i(t,z) = u^i(t,0,z) - \psi^i(t,z)$. Покажем, что $A^i(t,z) = 0$. Рассмотрим систему уравнений (3.1) при $x = (0,0,\ldots,0)$. Здесь и далее будем писать $x = 0$, подразумевая n-мерный вектор $x = (0,0,\ldots,0)$.

$$u^i_t(t,0,z) = a^i(t)u^i_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,0,z) + \lambda^i(t,z)\left(B^i_z(u^i) + \sum_{k=1}^m g^k_i(t)u^k\right) =$$

$$= a^i(t)u^i_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,0,z) + \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi) + \sum\limits_{k=1}^m g^k_i(t)\psi^k} \times$$

$$\times \left(\left(B^i_z(u^i) + \sum_{p=1,p\neq i}^k \sum_{k=1}^m g^k_i(t)u^k\right) \pm \left(B^i_z(\psi^i) + \sum_{k=1}^m g^k_i(t)\psi^k\right)\right).$$

$$u^i_t(t,0,z) = a^i(t)u^i_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,0,z) +$$

$$+ \lambda^i(t,z)\left(B^i_z(A^i(t,z)) + \sum_{k=1}^m g^k_i(t)A^k(t,z)\right) +$$

$$+ \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi) + \sum\limits_{k=1}^m g^k_i(t)\psi^k}\left(B^i_z(\psi^i) + \sum_{k=1}^m g^k_i(t)\psi^k\right).$$

$$u^i_t(t,0,z) = a^i(t)(u^i_{zz}(t,0,z) - \psi^i_{zz}(t,z)) + b(t)\Delta_x u^i(t,0,z) +$$
$$+ \psi^i_t(t,z) - f^i(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t) + \lambda^i(t,z)\left(B^i_z(A^i(t,z)) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)A^k(t,z)\right).$$

Получили задачу Коши для системы уравнений с однородными начальными условиями

$$A^i_t(t,z) = a^i(t)A^i_{zz}(t,z) + \lambda^i(t,z)\left(B^i_z(A^i(t,z)) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)A^k(t,z)\right),$$
$$A^i(0,z) = 0.$$

Так как единственным решением данной задачи является $A^i(t,z) = 0$, тогда $u^i(t,0,z) = \psi^i(t,z)$. Условие переопределения выполняется. □

Согласно теореме 3.1 обратная задача (3.1) — (3.3) сводится к исследованию двух вспомогательных задач (3.6), (3.7).

Замечание 3.1. *Будем считать что* $\Gamma_{[0,T]} = G_{[0,T]} \bigcup \Pi_{[0,T]}$, *где*

$$G_{[0,T]} = \big\{(t,z) \mid z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\},$$

$$\Pi_{[0,T]} = \big\{(t,x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T\big\}.$$

3.3 Доказательство существования решения задачи (3.1)–(3.3)

3.3.1 Доказательство существования решения прямой задачи (3.7)

Для доказательства существования решения задачи (3.7) рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,z) | z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\}$ вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = a^i(t)f^i_{zz} + S_{\delta^i}\left(\frac{\beta^i(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}\right)\left(B^i_z(f^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)f^k\right),$$
$$f^i(0,z) = v_0(z), \tag{3.9}$$

здесь $\beta^i(t,z) = \psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z)$ — это известные функции. $S_{\delta^i}(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая на всей области определения и обладающая следующими свойствами:

$S_{\delta^i}(\vartheta) \geq \frac{\delta^i}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S^{(k)}_{\delta^i}(\vartheta) \leq 2, k = \overline{1,4}$,

$$S_{\delta^i}(\vartheta) = \begin{cases} \frac{\delta^i}{3}, & \text{при } \vartheta \leq \frac{\delta^i}{3}, \\ \rho(\vartheta), & \text{при } \frac{\delta^i}{3} < \vartheta < \frac{\delta^i}{2}, \\ \vartheta, & \text{при } \vartheta \geq \frac{\delta^i}{2}, \end{cases}$$

где $\rho(\vartheta)$ — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемая функция.

Функции $v^i_0(z)$ действительнозначные и заданы в $\mathbb{R}$. Определению подлежат функции $f^i(t,z)$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации [14, 83]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau J = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f^{i\tau}_t = 3\,a^i(t) f^{i\tau}_{zz}(t,z), \qquad j\tau < t \leq \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{3.10}$$

$$f^{i\tau}_t = 3\,(c^i_1(t) f^{i\tau}_{zz}(t,z) + c^i_2(t) f^{i\tau}_z(t,z)) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z)), \quad \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \leq \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau, \tag{3.11}$$

$$f^{i\tau}_t = 3\left(\big(c^i_3(t) + g^i_i(t)\big) f^{i\tau}(t,z) + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} g^k_i(t) f^{k\tau}\left(t - \frac{\tau}{3}, z\right)\right) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z)),$$
$$\Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \leq \Big(j+1\Big)\tau, \tag{3.12}$$

$$f^{i\tau}(0,z) = v_0(z), \qquad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \tag{3.13}$$

здесь $\lambda^{i\tau}(t,z) = \dfrac{\beta^i(t,z) - f^{i\tau}(t-\frac{\tau}{3},z)\,\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}$.

Относительно функций $v^i_0(z), \psi^i(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^{l_1}}{dz^{l_1}}v_0^i(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{l_1}}{\partial z^{l_1}}\psi^i(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial z^{l_2}}\psi^i(t,z)\right| \le C,$$
$$l_1 = 0, 1, \dots, 4,\ l_2 = 0, 1, \dots, 6\,, i = \overline{1, m}. \quad (3.14)$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $f^\tau(t,z)$ задачи (3.10)—(3.13) в классе гладких ограниченных функций.

Будем считать далее, что $C > 1$ — некоторые константы, вообще говоря различные, зависящие от констант, ограничивающих коэффициенты $a^i(t)$, $b(t)$, констант μ^i из условия (3.5) и константы, ограничивающей входные данные, из условия (3.14). Константы C не зависят от τ.

Введем обозначение

$$V_l^i = \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^l}{dz^l}v_0^i(z)\right|, \quad F_l^i(t) = \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^l}{dz^l}f^i(t,z)\right|, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad (3.15)$$

$$S_l(0) = \sum_{i=1}^m V_l^i, \qquad S_l(t) = \sum_{i=1}^m F_l^i(t),$$

где $l = \overline{0, 4}$ — порядок производной.

На первом дробном шаге, $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$, рассматриваем следующую систему уравнений

$$f_t^{i\tau} = 3\, a^i(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z), \quad i = \overline{1, m}.$$

Данная система представляет вместе с (3.13) m независимых задач Коши для параболических уравнений. В силу принципа максимума для задачи Коши 1.2, учитывая (3.13), получим оценки

$$|f^{i\tau}(\xi, z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}|v_0^i|,\ 0 < \xi \le t,\ 0 < t \le \frac{\tau}{3}.$$

Возьмем от левой части последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$ и, учитывая обозначение (3.15), получим

$$F_0^i(\xi) \le V_0^i, \qquad\qquad 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \quad (3.16)$$

Сложив m неравенств (3.16), получим следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{m} F_0^i(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} V_0^i, \qquad 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \tag{3.17}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$

$$f_t^{i\tau} = 3\left(c_1^i(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z) + c_2^i(t) f_z^{i\tau}(t,z)\right) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z)), \quad i = \overline{1,m}.$$

Данная система также распадается на m задач Коши, поэтому в силу (3.15), свойств срезающей функции и принципа максимума 1.2 справедлива оценка

$$|f^{i\tau}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{i\tau}\left(\frac{\tau}{3}, z\right)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |v_0^i|, \quad \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}.$$

Возьмем от левой части последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$ и, учитывая обозначение (3.15), получим

$$F_0^i(\xi) \le V_0^i, \qquad \frac{\tau}{3} < t \le \frac{2\tau}{3}. \tag{3.18}$$

Сложив m неравенств (3.18), получим следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{m} F_0^i(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} V_0^i, \qquad \frac{\tau}{3} < t \le \frac{2\tau}{3}. \tag{3.19}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (3.12) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f^{i\tau}(\xi,z) = f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$
$$+3\int_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z)) \left(\left(c_3^i(\eta) + g_i^i(\eta)\right) f^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^{m} g_i^k(\eta) f^{k\tau}(\eta - \frac{\tau}{3}, z)\right) d\eta =$$

$$= f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) + 3\int_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} S_{\delta^i}\left(\frac{\beta^i(t,\, z) - f^{i\tau}(\eta - \frac{\tau}{3},\, z)\,\varphi_t(\eta,0)}{B_z^i(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k}\right) \times$$
$$\times \left(\left(c_3^i(\eta) + g_i^i(\eta)\right) f^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^{m} g_i^k(\eta) f^{k\tau}(\eta - \frac{\tau}{3}, z)\right) d\eta,$$

$$|f^{i\tau}(\xi,z)| \;=\; \left|f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| \;+\; 3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} S_{\delta^i}\left(\frac{\beta^i(t,\,z) - f^{i\tau}(\eta-\frac{\tau}{3},\,z)\,\varphi_t(\eta,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\right)f^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(\eta)f^{k\tau}(\eta-\frac{\tau}{3},\,z)\right)d\eta\right| \leq$$

$$\leq \left|f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| +$$

$$+\,C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}|f^{i\tau}(\eta,z)|\left(1+\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right|+\sum_{k=1}^{m}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f^{k\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right|\right)d\eta.$$

Возьмем от обеих частей последних неравенств $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, а также учитывая оценку (3.16) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$F_0^i(t) \leq V_0^i + (1+\sum_{i=1}^{m} V_0^i)\int\limits_0^{\tau} F_0^i(\eta)d\eta, \qquad 0<t\leq\tau. \tag{3.20}$$

Сложив m неравенств (3.20), получим следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{m} F_0^i(t) \leq \sum_{i=1}^{m} V_0^i + (1+\sum_{i=1}^{m} V_0^i)\int\limits_0^{\tau}\sum_{i=1}^{m} F_0^i(\eta)d\eta, \quad 0<t\leq\tau. \tag{3.21}$$

Используя лемму Гронуолла 1.1, получим

$$\sum_{i=1}^{m} F_0^i(t) \leq \sum_{i=1}^{m} V_0^i e^{\tau(1+\sum\limits_{i=1}^{m} V_0^i)}, \quad 0<t\leq\tau.$$

Следуя обозначениям (3.15), имеем

$$S_0(t) \leq S_0(0)e^{\tau(1+S_0(0))} = S_0(0)e^{\tau(1+S_0(0))} \pm 1 \leq$$

$$\leq (S_0(0)+1)e^{\tau(1+S_0(0))} - 1, \quad 0<t\leq\tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t\in(\tau,2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$S_0(t) \leq (1+S_0(0))e^{C\tau(1+S_0(0))}e^{C\tau(1+S_0(0))e^{C\tau(1+S_0(0))}} - 1, \quad 0<t\leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C\tau(1+S_0(0))} \le 2,$$

получим

$$S_0(t) \le (1+S_0(0))e^{3C\tau(1+S_0(0))} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

На втором временном шаге, при условии $e^{3C\tau(1+S_0(0))} \le 2$, получим

$$S_0(t) \le (1+S_0(0))e^{5C\tau(1+S_0(0))} - 1, \ 0 < t \le 3\tau.$$

Рассуждая аналогично, на l-ом шаге $(l < J)$ получаем

$$S_0(t) \le (1+S_0(0))e^{(2l+1)C\tau(1+S_0(0))} - 1, \ 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_1^*, $0 < t_1^* \le T$, которая удовлетворяет неравенству

$$e^{3t_1^* C(1+S_0(0))} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$S_0(t) \le (1+S_0(0))e^{3t_1^* C(1+S_0(0))} - 1 \le C, \quad 0 < t \le t_1^*.$$

В итоге получили равномерную по τ оценку

$$S_0(t) \le C, \ (t,z) \in G_{[0,t_1^*]}. \tag{3.22}$$

Оценим первую производную функций $f^i(t,z), \quad i = \overline{1,m}$. Продифференцируем (3.10)—(3.13) по z.

$$f^{i\tau}_{tz} = 3\,a^i(t) f^{i\tau}_{zzz}(t,z), \qquad j\tau < t \le \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} f^{i\tau}_{tz} = 3\,(c^i_1(t) f^{i\tau}_{zzz}(t,z) + c^i_2(t) f^{i\tau}_{zz}(t,z)) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z)) + \\ + 3\,(c^i_1(t) f^{i\tau}_{zz}(t,z) + c^i_2(t) f^{i\tau}_{z}(t,z)) \left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)'_z \lambda^{i\tau}_z(t,z), \ \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau, \end{gathered} \tag{3.24}$$

$$f_{tz}^{i\tau} = 3\left(\left(c_3^i(t)+g_i^i(t)\right)f_z^{i\tau}(t,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(t) f_z^{k\tau}\left(t-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$
$$\times S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))+$$
$$+3\left(\left(c_3^i(t)+g_i^i(t)\right)f^{i\tau}(t,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(t) f^{k\tau}\left(t-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$
$$\times\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)_z' \lambda_z^{i\tau}(t,z),\ \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le \left(j+1\right)\tau, \quad (3.25)$$

$$f_z^{i\tau}(0,z) = \frac{d}{dz}v_0(z), \qquad j=0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau=T, \qquad (3.26)$$

здесь $\lambda_z^{i\tau}\left(t-\frac{\tau}{3},z\right) = m_1^i(t,z) f_z^{i\tau}(t-\frac{\tau}{3},z)+m_2^i(t,z)$, причем $m_1^i(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k}$ и $m_2^i(t,z) = \frac{\beta_z^i(t,z)-\lambda^i(t,z)\left(B_z^i(\psi_z^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi_z^k\right)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t\in(0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (3.23). Принимая во внимание обозначение $q_1^i = f_z^{i\tau}(t,z)$, получаем распадающуюся систему параболических уравнений с начальными условиями из (3.26). Таким образом, имеем m задач Коши, для которых справедливы оценки принципа максимума 1.2

$$q_1^i = |f_z^{i\tau}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v_0(z)\right|, \quad 0<\xi\le t,\ 0<t\le\frac{\tau}{3}.$$

Возьмем $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$ от функций $f_z^{i\tau}(\xi,z)$ и просуммируем все m неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} F_1^i(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} V_1^i, \qquad 0<t\le\frac{\tau}{3}. \qquad (3.27)$$

На втором дробном шаге, $t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (3.24). Используя обозначение $q_1^i = f_z^{i\tau}(t,z)$, получим уравнение

$$q_{1t}^i = A_1 q_{1zz}^i + E_1 q_{1z}^i + K_1 q_1^i,$$

где $A_1 = 3\,c_1^i(t) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau})$,
$E_1 = 3(c_2^i(t) S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}) + c_1^i(t)\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau})\right)_z' \lambda_z^{i\tau}(t,z)$,
$K_1 = c_2^i(t)\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau})\right)_z' \lambda_z^{i\tau}(t,z)$.

В силу принципа максимума 1.2, свойств срезающей функции и оценки (3.27) получаем

$$|q_1^i| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |q_1^i(t-\frac{\tau}{3}, z)| e^{C\tau(1+q_1^i(t-\frac{\tau}{3},z))} \le \sup_{z\in\mathbb{R}} e^{C\tau(1+\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v_0(z)\right|)} \left|\frac{d}{dz}v_0(z)\right|,$$

$$F^i(\xi) \le V_1^i e^{C\tau(1+V_1^i)} + 1 - 1 \le (V_1^i+1)e^{C\tau(1+V_1^i)} - 1.$$

Суммируем и получаем, что

$$\sum_{i=1}^m F_1^i(\xi) \le \left(\sum_{i=1}^m V_1^i + 1\right) e^{C\tau\left(1+\sum\limits_{i=1}^m V_1^i\right)} - 1,\ \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \tag{3.28}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (3.25) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f_z^{i\tau}(\xi,z) = f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) + \\ + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \Bigg[\left(\big(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\big) f_z^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^m g_i^k(\eta) f_z^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3}, z\right)\right) \times \\ \times S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z)) + \left(\big(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\big) f^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^m g_i^k(\eta) f^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3}, z\right)\right) \times \\ \times \big(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z))\big)_z' \lambda_z^{i\tau}(\eta,z) \Bigg] d\eta.$$

Справедлива оценка

$$|f_z^{i\tau}(\xi,z)| \le \left|f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| + \\ + 3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \Bigg[\left(\big(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\big) f_z^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^m g_i^k(\eta) f_z^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3}, z\right)\right) \times \right. \\ \times S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z)) + \left(\big(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\big) f^{i\tau}(\eta,z) + \sum_{k=1,k\ne i}^m g_i^k(\eta) f^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3}, z\right)\right) \times \\ \left. \times \big(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z))\big)_z' \lambda_z^{i\tau}(\eta,z) \Bigg] d\eta\right|,$$

$$|f_z^{i\tau}(\xi,z)| \le \left|f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|f_z^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1}^{m} f_z^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)+1\right|d\eta \le$$

$$\le \left|f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|f_z^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{i=1}^{m} f_z^{i\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)+1\right|d\eta \le$$

$$\le \left|f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|f_z^{i\tau}(\eta,z)+1\right|d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|\sum_{i=1}^{m} f_z^{i\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)\right|d\eta$$

Возьмем от обеих частей последних неравенств $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, а также учитывая оценку с предыдущего дробного шага и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге, учитывая обозначения (3.15), получим

$$F_1^i(t) \le F_1^i\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(F_1^i(\eta)+1)d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{i=1}^{m}F_1^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)d\eta, 0<t\le\tau$$

Суммируем неравенства

$$\sum_{i=1}^{m}F_1^i(t) \le \sum_{i=1}^{m}F_1^i\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m}F_1^i(\eta)+1\right)d\eta +$$

$$+ C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{i=1}^{m}F_1^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)d\eta \le \sum_{i=1}^{m}F_1^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m}F_1^i(\eta)+1\right)d\eta \le$$

$$\le \left(\left(\sum_{i=1}^{m}V_1^i+1\right)e^{C\tau\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m}V_1^i\right)}-1\right)e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m}F_1^i(\eta)+1\right)d\eta,$$

$$0<t\le\tau.$$

Используя лемму Гроноулла 1.1, получаем следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{m}F_1^i(t) \le \left(\left(\sum_{i=1}^{m}V_1^i+1\right)e^{C\tau\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m}V_1^i\right)}-1\right)e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1 \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m}V_1^i+1\right)e^{3C\tau\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m}V_1^i\right)} - 1, \quad 0<t\le\tau.$$

Учитывая обозначения (3.15),

$$S_1(t) \le (S_1(0)+1)e^{3C\tau(S_1(0)+1)} - 1, \quad 0 < t \le \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$S_1(t) \le \left((S_1(0)+1)e^{3C\tau(1+S_1(0))}\right) e^{3C\tau(1+S_1(0))e^{3C\tau(1+S_1(0))}} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{3C\tau(1+S_1(0))} \le 2,$$

получим

$$S_1(t) \le \left((S_1(0)+1)e^{9C\tau(1+S_1(0))}\right) - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

В предположении, что $e^{9C\tau(1+S_1(0))} \le 2$, на втором целом временном шаге получим

$$S_1(t) \le \left((S_1(0)+1)e^{15C\tau(1+S_1(0))}\right) - 1, \quad 0 < t \le 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < J$) приводят к неравенству

$$S_1(t) \le \left((S_1(0)+1)e^{3(2l+1)C\tau(1+S_1(0)}\right) - 1, \quad 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_2^*, $0 < t_2^* \le t_1^* \le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{9t_2^*C(1+S_1(0))} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$S_1(t) \le \left((S_1(0)+1)e^{9t_2^*C(1+S_1(0))}\right) - 1, \quad 0 < t \le t_2^*.$$

Справедлива равномерная по τ оценка

$$S_1(t) \le C, \ (t,z) \in G_{[0,t_2^*]}. \tag{3.29}$$

Продифференцируем (3.23)—(3.26) по z и получим оценку на вторую производную функций $f^i(t,z), \quad i = \overline{1,m}$.

$$f^{i\tau}_{tzz} = 3\,a^i(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{i\tau}(t,z) \quad j\tau < t \le \ \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{3.30}$$

$$f^{i\tau}_{tzz} = 3\ \Bigg[\left(c^i_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{i\tau}(t,z) + c^i_2(t)f^{i\tau}_{zzz}(t,z)\right)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) +$$

$$+ 2\left(c^i_1(t)f^{i\tau}_{zzz}(t,z) + c^i_2(t)f^{i\tau}_{zz}(t,z)\right)\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)'_z\lambda^{i\tau}_z(t,z) +$$

$$+ \left(c^i_1(t)f^{i\tau}_{zz}(t,z) + c_2(t)f^{i\tau}_z(t,z)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))}{\partial z^2}\lambda^{i\tau}_z(t,z) + \left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)'_z\lambda^{i\tau}_{zz}(t,z)\right)\Bigg],$$

$$\left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \quad (3.31)$$

$$f^{i\tau}_{tzz} = 3\left(\big(c^i_3(t)+g^i_i(t)\big)f^{i\tau}_{zz}(t,z) + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} g^k_i(t)f^{k\tau}_{zz}\left(t-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$

$$\times S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z)) + 6\left(\big(c^i_3(t)+g^i_i(t)\big)f^{i\tau}_z(t,z) + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} g^k_i(t)f^{k\tau}_z\left(t-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$

$$\times\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)'_z\lambda^{i\tau}_z(t,z) +$$

$$+ 3\left(\big(c^i_3(t)+g^i_i(t)\big)f^{i\tau}(t,z) + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} g^k_i(t)f^{k\tau}\left(t-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))}{\partial z^2}\lambda^{i\tau}_z(t,z) + \left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))\right)'_z\lambda^{i\tau}_{zz}(t,z)\right),$$

$$\left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le \left(j+1\right)\tau, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{i\tau}(0,z) = \frac{d^2}{dz^2}v^i_0(z), \qquad j = 0,1,2,\ldots,(J-1), \quad J\tau = T, \qquad (3.33)$$

где $\lambda^\tau_{zz} = m^i_1(t,z)f^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},z) + m^i_3(t,z)$, причем $m^i_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}$ и $m^i_3(t,z) = \beta^i_{zz}(t,z) - \lambda^i_z(t,z) + \frac{\varphi_t(t,0)B^i_z(\psi^i_z)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k_z}{\left(B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k\right)^2}f^{i\tau}_z(t-\frac{\tau}{3},z)$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t\in(0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (3.30). Обозначим $q^i_2 = f^{i\tau}_{zz}(t,z)$. Справедлива следующая оценка

$$q^i_2 = |f^{i\tau}_{zz}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^2}{dz^2}v_0(z)\right|, \quad 0<\xi\le t,\ 0<t\le\frac{\tau}{3}.$$

Возьмем $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$ от функций $f^{i\tau}_{zz}(\xi,z)$ и просуммируем все m неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} F_2^i(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} V_2^i, \qquad\qquad 0<t\le\frac{\tau}{3}. \qquad (3.34)$$

На втором дробном шаге, $t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (3.31). Используя обозначение $q_2^i = f^{\tau}_{zz}(t,z)$, получим уравнение

$$q^i_{2t} = A_2 q^i_{2zz} + E_2 q^i_{2z} + K_2 q^i_2 + D_2,$$

где $A_2 = 3\,c_1^i(t)S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau})$,
$E_2 = 3c_2^i(t)S_{\delta^i}(\lambda^{\tau}) + 6c_1^i(t)\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau})\right)'_z\lambda^{i\tau}_z(t,z)$,
$K_2 = 6c_2^i(t)\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))'\right)_z\lambda^{i\tau}_z(t,z) + 3c_1^i(t)\left(\frac{\partial^2 S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))}{\partial z^2}\lambda^{i\tau\,2}_z(t,z)+\right.$
$\left.+\,(S_{\delta^i}(\lambda^{\tau}))'_z\lambda^{i\tau}_{zz}(t,z))\right)$,
$D_2 = 3c_2^i(t)f^{\tau}_z(t,z)\left(\frac{\partial^2 S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))}{\partial z^2}\lambda^{i\tau\,2}_z(t,z) + (S_{\delta^i}(\lambda^{\tau}))'_z\lambda^{i\tau}_{zz}(t,z)\right)$. Вместе с (3.33) получаем m задач Коши, по принципа максимума 1.2, а также по свойству срезающей функции и оценки (3.34) получаем

$$|q_2^i| \le (\sup_{z\in\mathbb{R}}|q_2^i(t-\frac{\tau}{3},z)| + C\tau(q_2^i(t-\frac{\tau}{3},z)+1)+1-1)e^{C\tau(1+q_2^i(t-\frac{\tau}{3},z))} \le$$
$$\le\left(\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^2}{dz^2}v_0^i(z)\right|+1\right)(Ct+1)e^{C\tau\left(1+\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^2}{dz^2}v_0^i(z)\right|\right)}-1.$$

Учитывая обозначения, имеем

$$F_2^i(\xi) \le \left(V_2^i+1\right)(Ct+1)e^{C\tau(1+V_2^i)}-1 \le$$
$$\le\left(V_2^i+1\right)e^{2C\tau(1+V_2^i)}-1, \quad \frac{\tau}{3}<\xi\le\frac{2\tau}{3}.$$

Суммируем неравенства по i от 1 до m

$$\sum_{i=1}^{m}F_2^i(\xi) \le \left(\sum_{i=1}^{m}V_2^i+m\right)e^{2C\tau(k+\sum\limits_{i=1}^{m}V_2^i)}-m, \quad \frac{\tau}{3}<\xi\le\frac{2\tau}{3}. \qquad (3.35)$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (3.32) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$.

$$f_{zz}^{i\tau}(\xi,z) = f_{zz}^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$

$$+\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left[3\left(\left(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\right)f_{zz}^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(\eta) f_{zz}^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times\right.$$

$$\times S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z)) + 6\left(\left(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\right)f_z^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(\eta) f_z^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$

$$\times\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z))\right)_z^{'}\lambda_z^{i\tau}(\eta,z)+$$

$$+3\left(\left(c_3^i(\eta)+g_i^i(\eta)\right)f^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1,k\neq i}^{m} g_i^k(\eta) f^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)\right)\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial^2 S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(t,z))}{\partial z^2}\lambda_z^{i\tau}(\eta,z)+\left(S_{\delta^i}(\lambda^{i\tau}(\eta,z))\right)_z^{'}\lambda_{zz}^{i\tau}(\eta,z)\right)\right]d\eta,$$

$$|f_{zz}^{i\tau}(\xi,z)| \le \left|f_{zz}^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|f_{zz}^{i\tau}(\eta,z)+\sum_{k=1}^{m} f_{zz}^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)+1\right|d\eta \le$$

$$\le \left|f_{zz}^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|f_{zz}^{i\tau}(\eta,z)+1\right|d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left|\sum_{k=1}^{m} f_{zz}^{k\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{3},z\right)\right|d\eta,$$

Возьмем от обеих частей последних неравенств $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, а также учитывая оценку с предыдущего дробного шага и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге, учитывая обозначения (3.15), получим

$$F_2^i(t) \le F_2^i\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(F_2^i(\eta)+1)d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{i=1}^{m} F_2^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)d\eta, 0 < t \le \tau$$

$$\sum_{i=1}^{m} F_2^i(t) \leq \sum_{i=1}^{m} F_2^i\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m} F_2^i(\eta) + m\right)d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{i=1}^{m} F_2^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)d\eta \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} F_2^i\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m} F_2^i(\eta) + m\right)d\eta \leq$$

$$\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{m} V_2^i + m\right)e^{2C\tau\left(m+\sum\limits_{i=1}^{m} V_1^i\right)} - m\right)e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{m} F_1^i(\eta) + m\right)d\eta,$$

$$0 < t \leq \tau.$$

Используя лемму Гронуолла 1.1, получаем следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{m} F_2^i(t) \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{m} V_2^i + m\right)e^{2C\tau\left(m+\sum\limits_{i=1}^{m} V_2^i\right)} - m\right)e^{2C\tau} + me^{C\tau} - m \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m} V_2^i + m\right)e^{4C\tau\left(m+\sum\limits_{i=1}^{m} V_2^i\right)} - m, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Учитывая обозначения (3.15),

$$S_2(t) \leq (S_2(0) + m)e^{4C\tau(S_2(0)+m)} - m, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$S_2(t) \leq \left((S_2(0) + m)\,e^{4C\tau(m+S_2(0)}\right)e^{4C\tau(m+S_2(0))e^{4C\tau(m+S_2(0))}} - m, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(m+S_2(0))} \leq 2,$$

получим

$$S_2(t) \leq \left((S_2(0) + m)\,e^{12C\tau(m+S_2(0))}\right) - m, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

При условии, что $e^{12C\tau(m+S_2(0))} \leq 2$, на втором временном шаге получим

$$S_2(t) \leq \left((S_2(0) + m)\,e^{20C\tau(m+S_2(0))}\right) - m, \quad 0 < t \leq 3\tau.$$

Аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < J$) приводят к неравенству

$$S_2(t) \leq \left((S_2(0) + m)\, e^{4(2l+1)C\tau(m+S_2(0))}\right) - m, \quad 0 < t \leq (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_3^*, $0 < t_3^* \leq t_2^* \leq T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12t_3^* C(m+S_2(0))} \leq 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$S_2(t) \leq \left((S_2(0) + m)\, e^{12t_3^* C(m+S_2(0))}\right) - 1, \quad 0 < t \leq t_3^*.$$

Получили оценку второй производной равномерную по τ

$$S_2(t) \leq C, \ (t, z) \in G_{[0,t_3^*]}. \tag{3.36}$$

Оценки третьей и четвертой производной проводятся аналогично оценкам второй производной. Соответственно имеем

$$S_3(t) \leq C, \ (t, z) \in G_{[0,t_4^*]}, \tag{3.37}$$

здесь t_4^*, $0 < t_4^* \leq t_3^* \leq T$.

$$S_4(t) \leq C, \ (t, z) \in G_{[0,t_5^*]}, \tag{3.38}$$

здесь t_5^*, $0 < t_5^* \leq t_4^* \leq T$.

Таким образом, в $G_{[0,t_5^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$S_l(t) \leq C, \quad l = 0, 1, \ldots, 4. \tag{3.39}$$

В силу оценки (3.39), правые части уравнений (3.10)—(3.13) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0, t_5^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$\sum_{i=1}^{m} |f_t^{i\tau}(t, z)| \leq C, \quad (t, z) \in G_{[0,t_5^*]}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.40}$$

Дифференцируя уравнения задачи (3.10)—(3.13) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$\sum_{i=1}^{m}|\frac{\partial^l}{\partial z^l}f^{i\tau}(t,z)|+\sum_{i=1}^{m}|f^{i\tau}_{tzz}(t,z)|\leq C,\quad (t,z)\in G_{[0,t_5^*]},\quad i=\overline{1,m}$$

что вместе с (3.37), (3.38) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы 1.1 Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $f^{i\tau_k}(t,z)$ $(\forall i=\overline{1,m})$ последовательности $f^{i\tau}(t,z)$ $(\forall i=\overline{1,m})$ решений задачи (3.10)—(3.13) сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $f^i(t,z)\in C^{0,2}_{t,z}(G^M_{[0,t_5^*]})$, $(M>0$ — целое). $G^M_{[0,t_5^*]}=\{|z|\leq M,\ 0\leq t\leq t_5^*\leq T\}$. На основании теоремы 1.6 сходимости МСА, $f^i(t,z)$ — решение задачи (3.9), причем $f^i(t,z)\in C^{1,2}_{t,z}(G^M_{[0,t_5^*]})$, где

$$C^{1,2}_{t,z}(G^M_{[0,t_5^*]})=\left\{f^i(t,z)\Big|{f^i}_t(t,z),\frac{\partial^l}{\partial z^l}f^i(t,z)\in C(G_{[0,t_5^*]}),l=0,1,2,\quad i=\overline{1,m}\right\},$$

при этом

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}f^i(t,z)\right|\leq C,\quad l=0,1,2,\quad i=\overline{1,m}. \tag{3.41}$$

В силу произвольности выбора M функции $f^i(t,z)$ — решение задачи (3.9) из класса $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t_5^*]})$.

Пусть выполняются следующие условие при $t\in[0,t_5^*]$

$$\frac{\beta^i(t,z)-{v^i}_0(z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m}g^k_i(t)\psi^k}\geq\delta^i,\quad i=\overline{1,m}. \tag{3.42}$$

Для того чтобы снять срезку в системе уравнений из задачи (3.9), докажем, что при $t\in[0,t_5^*]$ выполняется

$$\frac{\beta^i(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m}g^k_i(t)\psi^k}\geq\frac{\delta^i}{2},\quad i=\overline{1,m}.$$

Проинтегрируем систему из задачи (3.9) по временной переменной в пределах от 0 до t:

$$f^i(t,z) = v_0^i(z) + \int\limits_0^t \Psi^i(\eta,z)d\eta, \quad i=\overline{1,m},$$

где $\Psi^i(t,z) = a^i(t){f^i}_{zz} + S_{\delta^i}\left(\frac{\beta^i(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k}\right)\left(B_z^i(f^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)f^k\right)$.

Так как выполняется условие (3.5), тогда справедливо выполнение следующих равенств

$$\frac{\beta^i(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k} = \frac{\beta^i(t,z)-{v^i}_0(z)\varphi_t(t,0))}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k} - \\ - \frac{\varphi_t(t,0)\int_0^t \Psi^i(\eta,z)d\eta}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k}, \quad i=\overline{1,m}. \quad (3.43)$$

В силу выполнения условий (3.42), учитывая (3.14), (3.41), получим, что при соответствующих $t \in \left[0, \frac{\delta^i}{2A^i(\delta^i)}\right]$ выполняется

$$\frac{\beta^i(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k} \geq \delta^i - A^i(\delta^i)t \geq \frac{\delta^i}{2}, \quad \forall i=\overline{1,m}.$$

Здесь $A^i(\delta^i)$ — некоторые положительные константы, которые оценивают входные данные и зависят от δ^i, константы C из (3.14), а также констант, ограничивающих коэффициенты $a^i(t)$. В силу определения срезающей функции $S_{\delta^i}(\theta)$ имеем

$$S_{\delta^i}(\lambda^i(t,z)) = \lambda^i(t,z), \text{ при } t\in[0,t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_5^*, \frac{\delta^i}{2A^i(\delta^i)}\right), \forall i=\overline{1,m}.$$

Следовательно, доказано существование решения $f^i(t,z)$ задачи (3.7) в классе $C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t^*]})$.

Теорема 3.2 ([101]). *Пусть выполняются условия* (3.5), (3.14), (3.42) *на входные данные. Тогда существует* t^*: $0 < t^* \leq T$ *— константа, зависящая от* μ^i *из* (3.5), δ^i, *а также постоянных, ограничивающих функции*

$a^i(t), b(t), c_1^i(t), g_i^k(t)$ $(k, i = \overline{1,m})$, и постоянных из (3.14), ограничивающих входные данные, такая, что решение $f^i(t,z)\,(\forall i = \overline{1,m})$ задачи (3.7) существует в классе

$$C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f^i(t,z) \middle| {f^i}_t(t,z), \frac{\partial^l}{\partial z^l} f^i(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}),\, l = 0,1,2,\, i = \overline{1,m} \right\},$$

удовлетворяющее соотношениям

$$\sum_{l=0}^{2} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} f^k(t,z) \right| \le C. \tag{3.44}$$

Поскольку существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, то будем говорить, что задача (3.7) разрешима в малом временном интервале.

3.3.2 Доказательство единственности решения прямой задачи (3.7)

Докажем единственность решения задачи (3.7). Предположим, что $f_1^i(t,z)$ и $f_2^i(t,z)\,(i = \overline{1,m})$ — два классических решения задачи (3.7). Справедливы соотношения

$$\frac{\partial f_1^i}{\partial t} = a^i(t) f_{1zz}^i + \left(B_z^i(f_1^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t) f_1^k \right) \times \\ \times \frac{\psi_t^i(t,z) - a^i(t)\psi_{zz}^i(t,z) - f_1^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k},$$

$$\frac{\partial f_2^i}{\partial t} = a^i(t) f_{2zz}^i + \left(B_z^i(f_2^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t) f_2^k \right) \times \\ \times \frac{\psi_t^i(t,z) - a^i(t)\psi_{zz}^i(t,z) - f_2^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k},$$

$$f_1^i(0,z) = v_0^i(z), \quad f_2^i(0,z) = v_0^i(z), \quad i = \overline{1,m}.$$

Покажем, что $F^i(t,z) = f_1^i(t,z) - f_2^i(t,z) \equiv 0, \quad i = \overline{1,m}.$

Так как $F^i(t,z) = f_1^i(t,z) - f_2^i(t,z)(i=\overline{1,m})$, то

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = a^i(t)F^i_{zz} + \left(B^i_z(F^i) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)F^k\right)\lambda^i_1 + \\ + \left(B^i_z(f^i_2) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)f^k_2\right)\frac{F^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}, \quad (3.45)$$

$$F^i(0,z) = 0, \quad (3.46)$$

здесь и далее $\lambda^i_1 = \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i_1(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}$.

Перепишем систему (3.45) в виде

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = (a^i(t) + c^i_1(t)\lambda^i_1)F^i_{zz} + c^i_2(t)\lambda^i_1 F^i_z + \\ + F^i\left(c^i_3(t)\lambda^i_1 - \left(B^i_z(f^i_2) + \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)f^k_2\right)\frac{\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}\right) + \\ + \lambda^i_1 \sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)F^k. \quad (3.47)$$

Решением системы (3.47), которое удовлетворяет начальным условиям (3.46), являются функции

$$F^i(t,z) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Так как показано, что $f^i_1(t,z) - f^i_2(t,z) \equiv 0, \quad \forall i = \overline{1,m}$, то решение задачи (3.7) единственно.

Теорема 3.3 ([101]). *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда решение* $f^i(t,z)\,(i=\overline{1,m})$ *задачи* (3.7) *в классе* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (3.44), *единственно.*

3.3.3 Доказательство существования решения обратной задачи (3.1) – (3.3)

Задача (3.6) является классической задачей Коши для параболического уравнения, поэтому для нее справедливы условия теоремы 1.4. Решение обратной задачи (3.1) — (3.3) рассматриваем в области

$$\Gamma_{[0,T]} = \Pi_{[0,T]} \cup G_{[0,T]}.$$

В силу того, что функции $u^i(t,x,z)$, $\lambda^i(t,z)$ выражаются через известные функции, а именно

$$u^i(t,x,z) = \varphi(t,x) f^i(t,z),$$
$$\lambda^i(t,z) = \frac{\psi^i_t(t,z) - a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k},$$

где $\varphi(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(\Pi_{[0,T]})$, $f^i(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$ —решения задач (3.6) и (3.7), справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{2}\sum_{|\alpha|\le 2}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D^\alpha_x u^i(t,x,z)\right| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{2}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}\lambda^i(t,z)\right| \le C. \qquad (3.48)$$

В силу теорем 1.4, 3.1 — 3.3 справедлива теорема

Теорема 3.4 ([101]). *Пусть выполняются условия теорем 1.4, 3.1 — 3.3. Тогда существует решение* $u^i(t,x,z)$, $\lambda^i(t,z)$ *обратной задачи* (3.1) — (3.3) *в классе*

$$Z(t^*) = \Big\{ u^i(t,x,z), \lambda^i(t,z) \mid u^i(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\Gamma_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda^i(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}), i = \overline{1,m} \Big\}, \qquad (3.49)$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\Gamma_{[0,t^*]}) = \Big\{ u^i(t,x,z) \Big| D^\alpha_x u^i, \frac{\partial^l}{\partial z^l} u^i \in C(\Gamma_{[0,t^*]}),$$
$$l = 0,1,2,\ i = \overline{1,m},\ |\alpha| \le 2 \Big\},$$

удовлетворяющее соотношению (3.48).

3.4 Доказательство единственности решения обратной задачи (3.1) – (3.3)

Пусть выполняются условия теоремы 3.4. Доказательство единственности решения задачи (3.1) – (3.3) будем вести от противного.

Пусть $u_1^i(t,x,z), \lambda_1^i(t,z)$ и $u_2^i(t,x,z), \lambda_2^i(t,z)$, $(i = \overline{1,m})$— два классических решения задачи (3.1), (3.2). Причем, функции $u_1^i(t,x,z)$, $\lambda_1^i(t,z)$ — решение, определяемое теоремой 3.1 и удовлетворяющее условию (3.3), а функции $u_2^i(t,x,z), \lambda_2^i(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (3.1)–(3.3), удовлетворяющее условию (3.48). Тогда справедливы соотношения:

$$u_{1t}^i = a^i(t)u_{1zz}^i(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_1^i(t,x,z) + \lambda_1^i(t,z)\left(B_z^i(u_1^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u_1^k\right),$$

$$u_{2t}^i = a^i(t)u_{2zz}^i(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_2^i(t,x,z) + \lambda_2^i(t,z)\left(B_z^i(u_2^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u_2^k\right),$$

$$u_1^i(0,x,z) = u_0^i(x,z), \quad u_2^i(0,x,z) = u_0^i(x,z),$$

$$u_1^i(t,0,z) = \psi^i(t,z), \quad u_2^i(t,0,z) = \psi^i(t,z).$$

Разность $u_1^i(t,x,z) - u_2^i(t,x,z) = u^i(t,x,z)$, $\lambda_1^i(t,z) - \lambda_2^i(t,z) = \lambda^i(t,z)$ является решением задачи

$$u_t^i = a^i(t)u_{zz}^i(t,x,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,x,z) + \lambda_1^i(t,z)\left(B_z^i(u^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u^k\right) + \\ + \lambda^i(t,z)\left(B_z^i(u_2^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u_2^k\right), \quad (3.50)$$

$$u^i(0,x,z) = 0, \quad u^i(t,0,z) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (3.51)$$

Полагаем в системе (3.50) $x = 0$. Используя (3.51), выражаем коэффициенты $\lambda^i(t,z)$. Подставим полученное выражение в (3.51), получим

$$u_t^i = a^i(t)u_{zz}^i(t,x,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,x,z) + \lambda_1^i(t,z)\left(B_z^i(u^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u^k\right) + \\ + \frac{b(t)\Delta_x u^i(t,0,z)}{B_z^i(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k}\left(B_z^i(u_2^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)u_2^k\right), \quad (3.52)$$

$$u^i(0,x,z) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (3.53)$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_j(t) = \sup_{\Gamma_{[0,t]}}\left|\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\partial^j}{\partial x_l^j} u^i(\xi,x,z)\right|, \quad j = 0,1,2.$$

Будем рассматривать первое уравнение системы (3.52) как параболическое относительно функции u^1, второе – относительно u^2 и т.д, $m-$е – относительно u^m с начальными условиями вида (3.53). К каждому уравнению применим принцип максимума 1.2, затем сложим полученные оценки вида

$$\left|\sum_{i=1}^{m} u^i(\xi,x,z)\right| \le e^{C\xi} C(g_2(t)+g_0(t))\xi, \quad (\xi,x,z)\in G_{[0,t]}, \quad 0\le t\le t^*,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ получим оценку

$$g_0(t)\le Ct(g_2(t)+g_0(t))\le C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t, \quad 0\le t\le t^*.$$

Дифференцируем систему (3.52), (3.53) по x один или два раза,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}u_t^i = a^i(t)\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}u^i(t,x,z)_{zz} + b(t)\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}(\Delta_x u^i(t,x,z))+\\ +\lambda_1^i(t,z)B_z^i\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}u^i\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}g_i^k(t)u^k\right)+\\ +\frac{b(t)\Delta_x u^i(t,0,z)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m}g_i^k(t)\psi^k}B_z^i\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}u_2^i\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}g_i^k(t)u_2^k\right),\end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^q}{\partial x_l^q}u^i(0,x,z)=0, \quad q=1,2, \quad i=\overline{1,m}, \quad (3.55)$$

и получаем аналогичные оценки

$$g_q(t)\le Ct(g_2(t)+g_0(t))\le C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t, \quad q=1,2 \quad 0\le t\le t^*.$$

Сложим все оценки, получим

$$g_0(t,z)+g_1(t,z)+g_2(t,z)\le C(g_2(t,z)+g_1(t,z)+g_0(t,z))t, \quad 0\le t\le t^*.$$

Отсюда получим, что при $t\in[0,\zeta]$, где $\zeta<\frac{1}{C}$, выполняется равенство $g_0(t,z)+g_1(t,z)+g_2(t,z)=0$ и, следовательно,

$$u^i(t,x,z)=0, \quad (t,x,z)\in\Gamma_{[0,\zeta]}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Повторяя рассуждения для $t \in [0, 2\zeta]$, получим, что

$$u^i(t,x,z) = 0, \quad (t,x,z) \in \Gamma_{[0,2\zeta]}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Через конечное число шагов получим оценку

$$u^i(t,x,z) \equiv 0, \quad (t,x,z) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Учитывая, что $u_1^i(t,x,z) \equiv u_2^i(t,x,z)$, $(t,x,z) \in \Gamma_{[0,t^*]}$, $(i = \overline{1,m})$, из (3.50), получим, что для $\lambda^i(t,z) = \lambda_1^i(t,z) - \lambda_2^i(t,z)$ $(i = \overline{1,m})$ выполняются соотношения

$$\lambda^i(t,z)\left(B_z^i(\psi^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k\right) = 0, \quad i = \overline{1,m},$$

откуда в силу (3.5) следует, что

$$\lambda^i(t,z) = \lambda_1^i(t,z) - \lambda_2^i(t,z) = 0, \quad t \in [0,t^*], \quad i = \overline{1,m}.$$

Справедлива

Теорема 3.5 ([101]). *Пусть выполняются условия теоремы 3.4. Тогда решение* $u^i(t,x,z)$, $\lambda^i(t,z)$ *задачи* (3.1)–(3.3), *удовлетворяющее соотношению* (3.48), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

3.5 Пример

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу Коши для системы параболических уравнений.

В области $\Gamma_{[0,0.5]} = \left\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 0.5\right\}$ исследуется система уравнений

$$u_t^i = a^i(t)u_{zz}^i(t,x,z) + b(t)u_{xx}^i(t,x,z) + \lambda^i(t,z)\left(B_z^i(u^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t)u^k\right), \quad (3.56)$$

где $B_z(u) = u_{zz}(t,x,z) + u_z(t,x,z) + u(t,x,z)$, с начальными условиями

$$u^i(0,x,z) = u_0^i(x,z) = (\sin(z) + (i+2))(\sin(x) + 1), \quad i = \overline{1,m}. \quad (3.57)$$

Выберем $a^i(t) = b^i(t) = c_1^i(t) = c_2^i(t) = c_3^i(t) = g_i^k(t) = 1$, $k = \overline{1,m}$, $\forall i = \overline{1,m}$. Функции $u_0^i(x,z)$ действительнозначные, ограничены и заданы в $\mathbb{R}^2$. Функция $\lambda^i(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u^i(t,x,z)$ задачи (3.56), (3.57).

Зададим условия переопределения следующего вида

$$u^i(t,0,z) = \psi^i(t,z) = (t+1)(\sin(z) + (i+2)), \quad i = \overline{1,m}.$$

Условия согласования

$$u_0^i(0,z) = \psi^i(0,z) = \sin(z) + (i+2).$$

Необходимо выполнение следующих условий

$$|B_z^i(\psi^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k| =$$
$$= \left| c_1^i(t)\psi_{zz}^i(t,z) + c_2^i(t)\psi_z^i(t,z) + c_3^i(t)\psi^i(t,z) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k \right| \geq \mu > 0,$$
$$\mu \text{— const}.$$

Нетрудно проверить, что данные условия будут выполняться для предложенного набора входных данных

$$\left| B_z^i(\psi^i) + \sum_{k=1}^m g_i^k(t)\psi^k \right| =$$
$$= (t+1)\left| m \cdot \sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum_{k=1}^m (k+2) \right| \geq \mu^i > 0,$$

здесь выбор μ^i зависит от количества уравнений m и числа i. Неравенства будут выполнены, например, при $\mu^i = 1$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xx}, \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x) + 1.$$

Решением данной задачи является функция $\varphi(t,x) = e^{-t}\sin(x) + 1$. Это легко проверить, подставив функцию $\varphi(t,x)$ в уравнение

$$-e^{(-t)}\sin(x) = -e^{(-t)}\sin(x), \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x) + 1.$$

Функция $w_0(x) = (\sin(x)+1) \in C(\mathbb{R}^n)$ ограничена.

Для задачи

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = f_{zz} + \left(B_z^i(f^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t) f^k \right) \times \\ \times \frac{(i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum\limits_{k=1}^{m}(k+2))}, \tag{3.58}$$

$$f^i(0,z) = v_0^i(z) = \sin(z) + (i+2),$$

функции $f^i(t,z) = (t+1)(\sin(z) + (i+2))$ являются решением и

$$B_z^i(f^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t) f^k = (t+1)\left(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum_{k=1}^{m}(k+2) \right),$$

$$\lambda^i(t,z) = \frac{\psi_t^i(t,z) - a^i(t)\psi_{zz}^i(t,z) - f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_i^k(t)\psi^k} = \\ = \frac{(i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum\limits_{k=1}^{m}(k+2))}.$$

Данное утверждение также проверятся непосредственной подстановкой решения в систему

$$\sin(z) + (i+2) = -(t+1)\sin(z) + \\ + (t+1)\left(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum_{k=1}^{m}(k+2) \right) \times \\ \times \frac{(i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum\limits_{k=1}^{m}(k+2))},$$

$$\sin(z) + (i+2) = -(t+1)\sin(z) + (i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z).$$

Для существования решения задачи (3.58) необходимо выполнение условий

$$\left| \frac{d^{l_1}}{dz^{l_1}} v_0^i(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{l_1}}{\partial z^{l_1}} \psi^i(t,z) \right| + \left| \frac{\partial^{l_2}}{\partial z^{l_2}} \psi^i(t,z) \right| \le C, \\ l_1 = 0,1,\dots,4,\ l_2 = 0,1,\dots,6,\ \forall i = \overline{1,m}.$$

Условия выполняются в силу ограниченности всех производных от функций $v_0^i(z) = \sin(z) + (i+2)$ и $\psi^i(t,z) = (t+1)(\sin(z) + (i+2))$.

По теореме 3.1 функция $u^i(t,x,z)$ представима в виде

$$u^i(t,x,z) = \varphi(t,x) f^i(t,z) = (t+1)(e^{-t}\sin(x) + 1)(\sin(z) + (i+2)).$$

Проверим, удовлетворяют ли функции $u^i(t,x,z)$ исходной системе уравнений.

Функции

$$\begin{aligned}
&{u^i}_t = (\sin(z) + (i+2)) \left(\sin(x)(e^{-t} - (t+1)e^{-t}) + 1\right) = \\
&\quad = (\sin(z) + (i+2)) \left(\sin(x)e^{-t}(-t) + 1\right), \\
&{u^i}_{xx} = -(\sin(z) + (i+2))(t+1)\sin(x)e^{-t}, \\
&{u^i}_{zz} = -(\sin(x)e^{-t} + 1)(t+1)\sin(z), \\
&\lambda^i(t,z) = \frac{(i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum\limits_{k=1}^{m}(k+2))}, \\
&B_z^i(u^i) + \sum_{k=1}^{m} g_i^k(t) u^k = \\
&\quad = (t+1)(\sin(x)e^{-t} + 1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum_{k=1}^{m}(k+2))
\end{aligned}$$

подставим в (3.56)

$$\begin{aligned}
((\sin(z) + (i+2)) \left(\sin(x)e^{-t}(-t) + 1\right) &= -(\sin(x)e^{-t} + 1)(t+1)\sin(z) - \\
&- (\sin(z) + (i+2))(t+1)\sin(x)e^{-t} + (t+1)(\sin(x)e^{-t} + 1)\times \\
&\times \left(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum_{k=1}^{m}(k+2)\right)\times \\
&\times \frac{(i+2) + t\sin(z) + 2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z) + \cos(z) + (i+2) + \sum\limits_{k=1}^{m}(k+2))}.
\end{aligned}$$

Элементарными преобразованиями приведем к виду

$$\begin{gathered}((\sin(z)+(i+2))\left(\sin(x)e^{-t}(-t)+1\right)= \\ =-(\sin(x)e^{-t}+1)(t+1)\sin(z)-(\sin(z)+(i+2))(t+1)\sin(x)e^{-t}+ \\ +(\sin(x)e^{-t}+1)((i+2)+t\sin(z)+2\sin(z)).\end{gathered}$$

После сокращения, получим верное тождество $\forall i=\overline{1,m}$.

Функции

$$u_0^i(x,z)=w_0(x)v_0^i(z)=(\sin(z)+(i+2))(\sin(x)+1).$$

Условия существования решения задачи (3.58)

$$\begin{gathered}\frac{\beta^i(t,z)-{v^i}_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z^i(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^m g^k(t)\psi^k}= \\ =\frac{(i+2)+t\sin(z)+2\sin(z)}{(t+1)(m\cdot\sin(z)+\cos(z)+(i+2)+\sum\limits_{k=1}^m(k+2))}\geq\delta^i,\end{gathered}$$

здесь выбор δ^i зависит от количества уравнений m и номера i. В силу того, что функции, участвующие в неравенствах, ограничены, а также m и i являются конечными числами, мы можем выбрать $\delta^i:\ 0<\delta^i<1$.

Данный пример показывает, что множество решений задачи (3.1) — (3.3) не является пустым.

4 Системы нагруженных параболических уравнений и нагруженных систем составного типа

В данной главе рассмотрены и исследованы следующие модели: система двух одномерных нагруженных параболических уравнений, связанных по младшим членам, с данными Коши и задача Коши для нагруженной системы составного типа специального вида. К таким моделям могут быть сведены с помощью условий переопределения некоторые обратные задачи для линейных или полулинейных систем уравнений параболического типа и систем составного типа соответственно.

Подобные исследования прямых задач для нагруженных параболических уравнений и систем нагруженных уравнений типа Бюргерса рассмотрены в [74, 94, 90].

Полученный результат может быть использован в качестве достаточного условия существования решения вспомогательных прямых задач.

4.1 Существование решения задачи для системы двух одномерных параболических нагруженных уравнений с данными Коши

4.1.1 Постановка задачи

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек α_k, $k = \overline{1, r}$.

Рассмотрим теперь в полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ задачу Коши для системы нагруженных неклассических параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t(t,x) = a_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))u_x + \\ + f_1(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)), \\ v_t(t,x) = a_2(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))v_{xx} + b_2(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))v_x + \\ + f_2(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \;\; v(0, x) = v_0(x), \;\; x \in E_1, \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. *Через*

$$\overline{\varphi}_u(t) = \left(u(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right), k = \overline{1,r}, j = 0,1,\ldots,p_1,$$

$$\overline{\varphi}_v(t) = \left(v(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,\alpha_k)\right), k = \overline{1,r}, j = 0,1,\ldots,p_1,$$

обозначены вектор-функции, компоненты которых являются следами (зависящими только от переменной t) функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$, а также соответственно всех их производных по пространственной переменной x до порядка p_1 включительно.

Пусть $p \geq max\{2, p_1\}$.

Замечание 4.2. *Через $Z^p([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, $v(t,x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$, где*

$$C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]}) = \left\{\psi(t,x) \mid \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^j\psi}{\partial x^j} \in C(G_{[0,t^*]}),\ j = \overline{0,p}\right\}, \tag{4.3}$$

ограниченных при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в систему уравнений (4.1),

$$\sum_{j=0}^{p}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right|\right) \leq C. \tag{4.4}$$

Определение 4.1. *Под классическим решением задачи (4.1), (4.2) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать пару функций $u(t,x), v(t,x) \in Z^p([0,t^*])$, удовлетворяющую (4.1), (4.2) в $G_{[0,t^*]}$.*

Здесь $0 < t^* \leq T$ — некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от входных данных, и $t^* \leq T$, то будем говорить, что пара функций $\{u(t,x), v(t,x)\}$ является решением задачи (4.1), (4.2) в малом временном интервале. Если t^* фиксировано и $t^* = T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что пара функций $\{u(t,x), v(t,x)\}$ является решением задачи (4.1), (4.2) во всем временном интервале (либо будем использовать термин "глобальная разрешимость").

4.1.2 Достаточные условия существования решения

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 4.1. *Действительнозначные функции a_1, a_2, b_1, b_2 определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов, функции a_1, a_2 удовлетворяют условиям $a_1 \geq a_0 > 0$, $a_2 \geq a_0 > 0$, $a_0 - const$. Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:*

$$\left|a_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|a_2\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \\ + \left|b_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|b_2\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| \leq P_{\gamma_1}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (4.5)$$

Замечание 4.3. *Здесь и далее $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$ — целые числа,*

$$S_{q,w}(t) = \sum_{j=0}^{p+2}\left(\sup_{0<\xi\leq t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}q(\xi,x)\right| + \sup_{0<\xi\leq t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}w(\xi,x)\right|\right),$$
$$q(t,x),\ w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1]),$$

$P_\zeta(y) = \tilde{C}(1+|y|+\dots+|y|^\zeta)$, $\tilde{C} > 1$ *— постоянная, не зависящая от функций $q(t,x)$, $w(t,x)$ и их производных.*

Условие 4.2. *Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ — действительнозначные, имеют все непрерывные производные до порядка $p+2$ и удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \leq C,\ x \in E_1.$$

Условие 4.3. *Функции f_1, f_2 — действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Для любых $t_1 \in (0,T]$,*

$q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ *данные функции как функции переменных* $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ *непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:*

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_1\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_2\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|\right) \le$$
$$\le P_{\gamma_2}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (4.6)$$

Теорема 4.1 ([82]). *Пусть выполняются условия 4.1—4.3.*

a *Если условия 4.1, 4.3 выполняются при* $\gamma_1 \ge 0$, $\gamma_2 = 0$ *или* $\gamma_2 = 1$, *то классическое решение* $\{u(t,x), v(t,x)\}$ *задачи* (4.1), (4.2) *существует в классе* $Z^p([0,T])$.

b *Если условия 4.1, 4.3 выполняются при* $\gamma_1 \ge 0$, $\gamma_2 > 1$, *то существует константа* t^*, $0 < t^* \le T$, *зависящая от постоянной* $\tilde{C}$ *из* (4.5), (4.6), *такая, что классическое решение* $\{u(t,x), v(t,x)\}$ *задачи* (4.1), (4.2) *существует в классе* $Z^p([0,t^*])$.

Доказательство. Введём следующие обозначения.

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) = \sum_{j=0}^{p+2}\left(\sup_{n\tau<\xi\le t\le(n+1)\tau}\ \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right| + \right.$$
$$\left. + \sup_{n\tau<\xi\le t\le(n+1)\tau}\ \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right|\right),$$
$$n\tau < t \le (n+1)\tau, j = 0,1,\ldots,p+2, \quad (4.7)$$

$$S_{u,v}(0) = \sum_{j=0}^{p+2}\left(\sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right).$$

Справедливы следующие утверждения.

1. $$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right| \le S_{u^\tau,v^\tau}(t),\ j_1 = 0,1,\ldots,p+2\ ,$$
$$\xi \in (n\tau, t],\ t \in (n\tau,(n+1)\tau]; \quad (4.8)$$

2. функции $S_{u^\tau,v^\tau}(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$.

Доказательство проводится с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне [14, 83]. Используется расщепление исходной задачи на два дробных шага со сдвигом по времени на $(t-\frac{\tau}{2})$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах.

$$\begin{aligned} u^\tau_t(t,x) &= 2\,a_1(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_{xx}+2b_1(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_x,\\ v^\tau_t(t,x) &= 2\,a_2(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))v^\tau_{xx}+2b_2(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))v^\tau_x,\\ &\qquad n\tau<t\le(n+\frac{1}{2})\tau, \end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} u^\tau_t(t,x) &= 2\,f_1(t-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2})),\\ v^\tau_t(t,x) &= 2\,f_2(t-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2})),\\ &\qquad (n+\frac{1}{2})\tau<t\le(n+1)\tau, \end{aligned}\tag{4.10}$$

$$u^\tau(t,x)|_{t\le0}=u_0(x),\quad v^\tau(t,x)|_{t\le0}=v_0(x),\quad x\in E_1,\tag{4.11}$$

здесь $n=0,\dots,N-1,\quad N\tau=T$,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}) &= \left(u^\tau(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k)\right),\\ \overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}) &= \left(v^\tau(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k)\right),\quad k=\overline{1,r},\ j=0,1,\dots,p. \end{aligned}$$

Докажем теперь априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x),v^\tau(t,x)\}$ задачи (4.9)–(4.10) в классах $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,T]})$ (или $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]}$ для некоторой константы $0<t^*\le T$).

Назовем n-м целым временным шагом полуинтервал $(n\tau,(n+1)\tau]$, где $n=0,1,\dots,N-1$.

Рассмотрим случай **a**.

На первом дробном шаге $t\in\big(0,\frac{\tau}{2}\big]$ для решения u^τ,v^τ задачи (4.9) с начальными данными (4.11) в силу выполнения условий 4.1—4.3 по теореме принципа максимума 1.2 получим оценку

$$|u^\tau(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1} |u_0(x)|\,, \quad |v^\tau(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1} |v_0(x)|\,, \quad 0<\xi\le t, \quad 0<t\le \frac{\tau}{2}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к неравенству

$$|u^\tau(\xi,x)| + |v^\tau(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1} |u_0(x)| + \sup_{x\in E_1} |v_0(x)|\,,\ 0<\xi\le t, \quad 0<t\le \frac{\tau}{2}.$$

В силу условия 1 мы можем продифференцировать задачу (4.9), (4.11) по x от одного до $p+2$ раз включительно

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} u_t^\tau(t,x) = 2\,a_1(t,x,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau_{xx} +$$
$$+\,2b_1(t,x,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau_{x},$$
$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} v_t^\tau(t,x) = 2\,a_2(t,x,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau_{xx} +$$
$$+\,2b_2(t,x,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau_{x},$$
$$j=1,\dots,p+2, \quad n\tau<t\le (n+\frac{1}{2})\tau,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\tau(t,x)|_{t\le 0} = \frac{d^j}{dx^j}u_0(x), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} v^\tau(t,x)|_{t\le 0} = \frac{d^j}{dx^j}v_0(x),$$
$$j=1,\dots,p+2, \quad x\in E_1,$$

откуда по принципу максимума 1.2 получим оценку

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right|, \quad \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} v^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|,$$
$$j=1,\dots,p+2,\ 0<\xi\le t,\ 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\tau(\xi,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} v^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|,$$
$$j=1,\dots,p+2, \quad 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Суммируем полученные неравенства от 1 до $p+2$ и, с учетом обозначений (4.7), получаем

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u,v}(0), \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}. \tag{4.12}$$

Рассмотрим второй дробный шаг нулевого целого шага $t \in \left(\frac{\tau}{2}, \tau\right]$. Проинтегрируем уравнение (4.10) по временной переменной по интервалу $(\frac{\tau}{2}, \xi]$, получим

$$u^\tau(\xi, x) = u^\tau(\frac{\tau}{2}, x) +$$

$$+ 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} f_1 \left(\theta - \frac{\tau}{2}, x, u^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), v^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), \overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2}), \overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})\right) d\theta,$$

$$v^\tau(\xi, x) = v^\tau(\frac{\tau}{2}, x) +$$

$$+ 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} f_2 \left(\theta - \frac{\tau}{2}, x, u^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), v^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), \overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2}), \overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})\right) d\theta,$$

$$\xi \in (\frac{\tau}{2}, t], \ \frac{\tau}{2} < t \leq \tau.$$

Справедливы оценки

$$|u^\tau(\xi, x)| \leq \left|u^\tau(\frac{\tau}{2}, x)\right| +$$

$$+ 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} \left| f_1 \left(\theta - \frac{\tau}{2}, x, u^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), v^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), \overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2}), \overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})\right)\right| d\theta,$$

$$|v^\tau(\xi, x)| \leq \left|v^\tau(\frac{\tau}{2}, x)\right| +$$

$$+ 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} \left| f_2 \left(\theta - \frac{\tau}{2}, x, u^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), v^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}, x), \overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2}), \overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})\right)\right| d\theta,$$

$$\xi \in (\frac{\tau}{2}, t], \ \frac{\tau}{2} < t \leq \tau.$$

Из последних неравенств, условия 4.3 (неравенство (4.6)) и предположения теоремы (пункт **a**) следуют оценки

$$\begin{aligned} |u^\tau(\xi, x)| &\leq |u^\tau(\frac{\tau}{2}, x)| + 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \tilde{C}(1 + S_{u^\tau, v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})), d\theta, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \in (\frac{\tau}{2}, t], \ \frac{\tau}{2} < t \leq \tau, \\ |v^\tau(\xi, x)| &\leq |v^\tau(\frac{\tau}{2}, x)| + 2 \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \tilde{C}(1 + S_{u^\tau, v^\tau}(\theta - \frac{\tau}{2})), d\theta, \end{aligned}$$

откуда, используя свойства функции $S_{u^\tau, v^\tau}(t)$ (4.7), а также сложив неравенства получим

$$|u^\tau(\xi,x)|+|v^\tau(\xi,x)|\le|u^\tau(\frac{\tau}{2},x)|+|v^\tau(\frac{\tau}{2},x)|+\tilde{C}\left(1+S_{u^\tau,v^\tau}(\frac{\tau}{2})\right)\tau,$$
$$\xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau. \quad (4.13)$$

Продифференцируем уравнение (4.10) по x от одного до $p+2$ раз включительно, условия 1, 3 позволяют нам повторить проделанные рассуждения и получить оценку

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right|\le\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau\left(\frac{\tau}{2},x\right)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau\left(\frac{\tau}{2},x\right)\right|+$$
$$+\tilde{C}\left(1+S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\tau,\ \xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau,\quad j=1,\dots,p+2. \quad (4.14)$$

Суммируем последнее от одного до $p+2$, с учетом обозначений (4.7), а также учитывая (4.13), (4.14), следует

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t)\le S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)+\tilde{C}\left(1+S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\tau,\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau.$$

Из данного неравенства с учетом (4.12) получим на нулевом целом временном шаге

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t)\le S_{u,v}(0)+C(1+S_{u,v}(0))\tau,\ 0<t\le\tau.$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные (из условий 4.1 – 4.3), и независящие от параметра расщепления τ.

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t)\le S_{u,v}(0)+1-1+C(1+S_{u,v}(0))\tau\le$$
$$\le(1+S_{u,v}(0))(1+C\tau)-1\le(1+S_{u,v}(0))e^{C\tau}-1. \quad (4.15)$$

На первом целом временном шаге, $t\in(\tau,2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t)\le(1+S_{u^\tau,v^\tau}(\tau))e^{C\tau}-1\le(1+S_{u,v}(0))e^{2C\tau}-1.$$

Через конечное число шагов на интервале $\big((N-1)\tau, N\tau\big]$ получим

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \big(1 + S_{u,v}(0)\big)e^{NC\tau} - 1 =$$
$$= \big(1 + S_{u,v}(0)\big)\cdot e^{CT} - 1 \le C, \ \forall t \in \big((N-1)\tau, N\tau\big].$$

В итоге получим на отрезке $[0,T]$

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \big(1 + S_{u,v}(0)\big)\cdot e^{CT} - 1 \le C, \ \forall t \in [0,T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(t,x)\right| \le C, \ j = 0,1,\dots,p+2, \quad (t,x)\in G_{[0,T]}. \tag{4.16}$$

Из оценок (4.16) следует, что правые части уравнений (4.9)–(4.10) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ. Дифференцируя уравнения (4.9)–(4.10) по x, в силу (4.16), получим оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_t^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v_t^\tau(t,x)\right| \le C, \ j = 0,1,\dots,p. \tag{4.17}$$

Оценки (4.16), (4.17) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела 1.1, некоторая подпоследовательность $\{u^{\tau_k}(t,x), v^{\tau_k}(t,x)\}$ последовательности $\{u^\tau(t,x), v^\tau(t,x)\}$ решений задачи (4.9)–(4.11) сходится вместе с производными по x до порядка p включительно к функциям $u(t,x)\in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$, $v(t,x)\in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$ соответственно, которые в силу теоремы 1.6 сходимости МСА являются решением задачи (4.1), (4.2), причем $u(t,x)\in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$, $v(t,x)\in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x)\in G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right| \le C, \ j = 0,1,\dots,p. \tag{4.18}$$

Случай **а** доказан.

Для **случая b**, повторяя аналогичные рассуждения на первом дробном шаге, получаем аналогичную оценку (4.12).

На втором дробном шаге, в силу условий теоремы получим оценку

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right| \le \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right| +$$
$$+ 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} P_{\gamma_2}\left(S_{u^\tau,v^\tau}\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right)\right)d\theta, \quad \xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau, \quad j=1,\dots,p+2.$$

Суммируем полученные оценки и учитывая обозначение (4.7), получим на втором дробном шаге

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} P_{\gamma_2}\left(S_{u^\tau,v^\tau}\left(\theta-\frac{\tau}{2}\right)\right)d\theta,\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau,$$

откуда в силу неубывания S_{u^τ,v^τ}

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u^\tau,v^\tau}(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} P_{\gamma_2}(S_{u^\tau,v^\tau}(\theta))\,d\theta,\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau. \tag{4.19}$$

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = CP_{\gamma_2}(\omega(t)), \quad \omega(0)=S_{u,v}(0). \tag{4.20}$$

Напомним, что $P_{\gamma_2}(y)=\tilde{C}(1+y+\dots+y^{\gamma_2})$, $\gamma_2>1$ - целая постоянная, константы C и $\tilde{C}$ не зависят от параметра расщепления τ.

По теореме Коши существует постоянная $0<t^*\le T$, такая что решение $\omega\in C^1[0,t^*]$ данной задачи на отрезке $[0,t^*]$, где t^* зависит от C, $\tilde{C}$ и начальных данных $S_{u,v}(0)$. Очевидно, что $\omega(t)$ - строго возрастающая функция.

Из (4.19), (4.20) следует, что если для некоторого $t_0\in(0,t^*)$ выполняется неравенство $S_{u^\tau,v^\tau}(t_0)\le\omega(t_0)$, то выполняется $S_{u^\tau,v^\tau}(t)\le\omega(t)$, $t\in[t_0,t^*]$.

Поскольку

$$S_{u^\tau,v^\tau}(\frac{\tau}{2}) \le S_{u,v}(0)=\omega(0)\le\omega(\frac{\tau}{2}),$$

то из (4.19) следует

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \omega(t), \text{ при } \frac{\tau}{2} < t \le \tau.$$

С учетом оценки (4.12) на нулевом целом временном шаге

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \omega(\tau), \text{ при } 0 < t \le \tau.$$

Проделывая аналогичные рассуждения на первом временном шаге доказано, что

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \omega(2\tau), \text{ при } 0 < t \le 2\tau,$$

и так далее. Через конечное число шагов получим равномерную по τ оценку

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \omega(t^*), \text{ при } 0 < t \le t^*.$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} v^\tau(t,x)\right| \le C, \; j = 0, 1, \dots, p+2, (t,x) \in G_{[0,t^*]}.$$

Повторив рассуждения случая **a**, делаем вывод, что некоторая подпоследовательность $\{u^{\tau_k}(t,x), v^{\tau_k}(t,x)\}$ последовательности $\{u^\tau(t,x), v^\tau(t,x)\}$ решений задачи (4.9)–(4.11) сходится вместе с производными по x до порядка p включительно к функциям $u(t,x) \in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right)$, $v(t,x) \in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right)$ соответственно, которые в силу теоремы 1.6 сходимости МСА являются решением задачи (4.1), (4.2), причем $u(t,x) \in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right)$, $v(t,x) \in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} v(t,x)\right| \le C, \; j = 0, 1, \dots, p. \tag{4.21}$$

Таким образом, доказано существование решения «в малом». Случай **b** доказан.

□

4.1.3 Пример

В качестве примера, демонстрирующего применение теоремы 4.1, рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, t \in [0,T], x \in E_1\}$ задачу нахождения действительнозначных функций $U(t,x), V(t,x), g_1(t), i = 1,2$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + U + V + g_1(t)m_1(t,x), \\ V_t = V_{xx} + U + V + g_2(t)m_2(t,x), \end{cases} \tag{4.22}$$

начальным условиям

$$U(0,x) = U_0(x),\ \ V(0,x) = V_0(x),\ \ x \in E_1, \tag{4.23}$$

и условию переопределения

$$U(t,0) = \beta(t), \tag{4.24}$$

где $m_i(t,x), U_0(x), V_0(x), \beta(t),\ (i = 1,2)$ — заданные действительнозначные функции.

Считаем, что выполнено условие согласования

$$U_0(0) = \beta(0).$$

Пусть выполняется соотношение

$$|m_1(t,0)| \geq \delta > 0,\ \ t \in [0,T],\ \ \ \delta - const. \tag{4.25}$$

Пусть входные данные имеют все нужные непрерывные производные и удовлетворяют соотношению в $\Pi_{[0,T]}$:

$$|\beta(t)| + |\beta^{'}(t)| + \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}m_i(t,x)\right| + \sum_{k=0}^{4}\left|\frac{d^k}{dx^k}U_0(x)\right| + \sum_{k=0}^{4}\left|\frac{d^k}{dx^k}V_0(x)\right| \leqslant C. \tag{4.26}$$

Задача (4.22)—(4.24) приводится к вспомогательной прямой задаче

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + U + V + \frac{\beta'(t) - U_{xx}(t,0) - \beta(t) - V(t,0)}{m_1(t,0)} m_1(t,x), \\ V_t = V_{xx} + U + V + g_2(t)m_2(t,x), \end{cases} \tag{4.27}$$

$$U(0,x) = U_0(x),\ \ V(0,x) = V_0(x). \tag{4.28}$$

В данном примере функции $a_i(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))$, $b_i(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))$ и $f_i(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))$ $(i=1,2)$ из системы (4.1) имеют вид

$$a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = 1,$$

$$b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = 0,$$

$$f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = U + V + \frac{\beta'(t) - U_{xx}(t,0) - \beta(t) - V(t,0)}{m_1(t,0)} m_1(t,x),$$

$$f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = U + V + g_2(t) m_2(t,x).$$

Условия 4.1—4.3 теоремы 4.1 выполняются в силу (4.25), (4.26), причем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, так как

$$a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) + a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) + \\ + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) + b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = 2,$$

$$\left| U + V + \frac{\beta'(t) - U_{xx}(t,0) - \beta(t) - V(t,0)}{m_1(t,0)} m_1(t,x) \right| + \\ + |U + V + g_2(t) m_2(t,x)| \le C(1 + U + V).$$

Таким образом, классическое решение $\{U(t,x), V(t,x)\}$ задачи (4.27), (4.28) существует в классе $Z_x^2([0,T])$, при наборе входных данных, удовлетворяющему неравенству (4.26).

4.2 Существование решения задачи для одномерной нагруженной системы составного типа с данными Коши

4.2.1 Постановка задачи

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек α_k, $k = \overline{1,r}$. Рассмотрим в полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ задачу Коши для системы нагруженных неклассических уравнений

$$u_t(t,x) = a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x+$$
$$+ f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \tag{4.29}$$
$$v_t(t,x) = b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in E_1. \tag{4.30}$$

4.2.2 Достаточные условия существования решения

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 4.4. *Действительнозначные функции a_1, b_1, b_2 определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов и функция a_1 удовлетворяет условию $a_1 \geq a_0 > 0$, $a_0 - const$.*
Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:

$$\left|a_1\bigl(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\bigr)\right| +$$
$$+\left|b_1\bigl(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\bigr)\right| + \left|b_2\bigl(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\bigr)\right| \leq P_{\gamma_1}\left(S_{q,w}(t)\right). \tag{4.31}$$

Условие 4.5. *Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ — действительнозначные, имеют все непрерывные производные до порядка $p+2$ и удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \leq C,\ x \in E_1.$$

Условие 4.6. *Функции f_1, f_2 — действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящи-*

ми в следующее соотношение:

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_1\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_2\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|\right)\leq$$

$$\leq P_{\gamma_2}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (4.32)$$

Теорема 4.2 ([82]). *Пусть выполняются условия 4.4—4.6.*

a *Если условия 4.4, 4.6 выполняются при $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 = 0$ или $\gamma_2 = 1$, то классическое решение $\{u(t,x), v(t,x)\}$ задачи (4.29), (4.30) существует в классе $Z^p([0,T])$.*

b *Если условия 4.4, 4.6 выполняются при $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 > 1$, то существует константа t^*, $0 < t^* \leq T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$ из (4.31), (4.32), такая, что классическое решение $\{u(t,x), v(t,x)\}$ задачи (4.29), (4.30) существует в классе $Z^p([0,t^*])$.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично задаче для нагруженных параболических уравнений, с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне [14, 83]. Используется расщепление исходной задачи на два дробных шага со сдвигом по времени на $(t-\frac{\tau}{2})$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах.

$$\begin{aligned}
&u^\tau_t(t,x) = 2\,a_1(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_x,\\
&v^\tau_t(t,x) = 2\,b_2(t,\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}t-\frac{\tau}{2}))v^\tau_x, \qquad n\tau < t \leq (n+\frac{1}{2})\tau,
\end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
&u^\tau_t(t,x) = 2\,f_1(t-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2})),\\
&v^\tau_t(t,x) = 2\,f_2(t-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(t-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(t-\frac{\tau}{2})), \quad (4.34)\\
&\qquad (n+\frac{1}{2})\tau < t \leq (n+1)\tau,
\end{aligned}$$

$$u^\tau(t,x)|_{t\leq 0} = u_0(x), \quad v^\tau(t,x)|_{t\leq 0} = v_0(x), \quad x \in E_1, \quad (4.35)$$

здесь $n = 0,\ldots,N-1, \quad N\tau = T,$

$$\overline{\varphi}^{\tau}_{u^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}) = \left(u^{\tau}(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u^{\tau}(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k)\right),$$

$$\overline{\varphi}^{\tau}_{v^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}) = \left(v^{\tau}(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}v^{\tau}(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k)\right), k=\overline{1,r},\ j=0,1,\ldots,p.$$

Перейдем к получению априорных оценок.

Рассмотрим случай **a**.

На первом дробном шаге $t \in \left(0, \frac{\tau}{2}\right]$ для решения $\{u^{\tau}, v^{\tau}\}$ задачи (4.33) с начальными данными (4.35), в силу выполнения условий 4.4 — 4.6, по теореме принципа максимума 1.2 получим оценку для первого уравнения

$$|u^{\tau}(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1}|u_0(x)|, 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Второе уравнение системы — уравнение первого порядка в частных производных. Для данного уравнения известно точное решение:
$v^{\tau}(t,x) = v_0(x-\psi(t))$, где $\psi'(t) = -b_2(t,\overline{\varphi}^{\tau}_{u^{\tau}}(t),\overline{\varphi}^{\tau}_{v^{\tau}}(t))$, $\psi(t)\big|_{t=0} = 0$. Таким образом, справедлива оценка

$$|v^{\tau}(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1}|v_0(x)|, 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к неравенству

$$|u^{\tau}(\xi,x)| + |v^{\tau}(\xi,x)| \le \sup_{x\in E_1}|u_0(x)| + \sup_{x\in E_1}|v_0(x)|,\ 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

В силу условия 4.4 мы можем продифференцировать задачу (4.33), (4.35) по x от одного до $p+2$ раз включительно

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^{\tau}_t(t,x) = 2\,a_1(t,x,\overline{\varphi}^{\tau}_{u^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^{\tau}_{v^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^{\tau}_{xx} +$$
$$+ b_1(t,x,\overline{\varphi}^{\tau}_{u^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^{\tau}_{v^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^{\tau}_x,$$
$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^{\tau}_t(t,x) = 2\,b_2(t,x,\overline{\varphi}^{\tau}_{u^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^{\tau}_{v^{\tau}}(t-\frac{\tau}{2}))\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^{\tau}_x,$$
$$j=1,\ldots,p+2, \quad n\tau<t\le(n+\frac{1}{2})\tau,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^{\tau}(t,x)|_{t\le 0} = \frac{d^j}{dx^j}u_0(x), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j}v^{\tau}(t,x)|_{t\le 0} = \frac{d^j}{dx^j}v_0(x),$$
$$j=1,\ldots,p+2, \quad x\in E_1.$$

Повторив рассуждения, получим оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right|, \quad \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|,$$
$$j=1,\ldots,p+2, \quad , 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Сложим полученные оценки, приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|,$$
$$j=1,\ldots,p+2, \quad 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}.$$

Суммируем последнее неравенство от одного до $p+2$ и, учитывая обозначения (4.7), получаем

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u,v}(0), \quad 0<t\le\frac{\tau}{2} \quad 0<t\le\frac{\tau}{2}. \tag{4.36}$$

Рассмотрим второй дробный шаг нулевого целого шага $t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]$. Проинтегрируем уравнение (4.34) по временной переменной по интервалу $(\frac{\tau}{2},\xi]$, получим

$$u^\tau(\xi,x) = u^\tau(\frac{\tau}{2},x)+$$
$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} f_1\left(\theta-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})\right)d\theta,$$
$$v^\tau(\xi,x) = v^\tau(\frac{\tau}{2},x)+$$
$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} f_2\left(\theta-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})\right)d\theta,$$
$$\xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau.$$

Оценим

$$
\begin{aligned}
&|u^\tau(\xi,x)| \le \left|u^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right| + \\
&+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left|f_1\left(\theta-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})\right)\right|\,d\theta,\\
&|v^\tau(\xi,x)| \le \left|v^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right| + \\
&+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left|f_2\left(\theta-\frac{\tau}{2},x,u^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),v^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x),\overline{\varphi}^\tau_{u^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2}),\overline{\varphi}^\tau_{v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})\right)\right|\,d\theta,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau.
\end{aligned}
$$

Из последнего неравенства, условия 4.6 (неравенство (4.32)) и предположения **а** теоремы следует оценка

$$
\left.
\begin{aligned}
&|u^\tau(\xi,x)| \le |u^\tau(\frac{\tau}{2},x)| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\tilde{C}(1+S_{u^\tau,v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})),d\theta,\\
&|v^\tau(\xi,x)| \le |v^\tau(\frac{\tau}{2},x)| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\tilde{C}(1+S_{u^\tau,v^\tau}(\theta-\frac{\tau}{2})),d\theta,
\end{aligned}
\right.
\quad \xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau,
$$

откуда, используя свойства функции $S_{u^\tau,v^\tau}(t)$ (4.7), а так же суммируя неравенства, получим

$$
\begin{aligned}
|u^\tau(\xi,x)|+|v^\tau(\xi,x)| \le |u^\tau(\frac{\tau}{2},x)|+|v^\tau(\frac{\tau}{2},x)|+\tilde{C}\left(1+S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\tau,&\\
\xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau.&
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Теперь продифференцируем уравнение (4.34) по x от одного до $p+2$ раз включительно, условия 4.4, 4.6 позволяют нам повторить проделанные рассуждения и получить оценку

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\xi,x)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\xi,x)\right| \le \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^\tau(\frac{\tau}{2},x)\right|+&\\
+\tilde{C}\left(1+S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\tau,\ \xi\in(\frac{\tau}{2},t],\ \frac{\tau}{2}<t\le\tau,\quad j=1,\dots,p+2.&
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Суммируем полученные неравенства от одного до $p+2$, при этом учитываем обозначения (4.7)

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u^\tau,v^\tau}(\frac{\tau}{2}) + \tilde{C}\left(1 + S_{u^\tau,v^\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\tau,\ \frac{\tau}{2} < t \le \tau.$$

Из данного неравенства с учетом (4.36) получим на нулевом целом временном шаге

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le S_{u,v}(0) + C(1 + S_{u,v}(0))\tau,\ 0 < t \le \tau.$$

Здесь и далее считаем, что $C > 1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные (из условий 1-3), и независящие от параметра расщепления τ.

$$\begin{aligned} S_{u^\tau,v^\tau}(t) &\le S_{u,v}(0) + 1 - 1 + C(1 + S_{u,v}(0))\tau \le \\ &\le (1 + S_{u,v}(0))(1 + C\tau) - 1 \le (1 + S_{u,v}(0))e^{C\tau} - 1. \end{aligned} \tag{4.39}$$

На первом целом временном шаге, $t \in (\tau, 2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le (1 + S_{u^\tau,v^\tau}(\tau))e^{C\tau} - 1 \le (1 + S_{u,v}(0))e^{2C\tau} - 1.$$

Через конечное число шагов на интервале $\big((N-1)\tau, N\tau\big]$ получим

$$\begin{aligned} S_{u^\tau,v^\tau}(t) &\le \big(1 + S_{u,v}(0)\big)e^{NC\tau} - 1 = \\ &= \big(1 + S_{u,v}(0)\big) \cdot e^{CT} - 1 \le C,\ \forall t \in \big((N-1)\tau, N\tau\big]. \end{aligned}$$

В итоге получим на отрезке $[0,T]$

$$S_{u^\tau,v^\tau}(t) \le \big(1 + S_{u,v}(0)\big) \cdot e^{CT} - 1 \le C,\ \forall t \in [0,T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} v^\tau(t,x)\right| \le C,\ j = 0, 1, \ldots, p+2, \quad (t,x) \in G_{[0,T]}. \tag{4.40}$$

Из оценок (4.40) следует, что правые части уравнений (4.33)–(4.34) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ. Дифференцируя уравнения (4.33)–(4.34) по x, в силу (4.40), получим оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_t^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v_t^\tau(t,x)\right| \le C,\ \ j=0,1,\ldots,p. \tag{4.41}$$

Оценки (4.40), (4.41) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела 1.1, некоторая подпоследовательность $\{u^{\tau_k}(t,x), v^{\tau_k}(t,x)\}$ последовательности $\{u^\tau(t,x), v^\tau(t,x)\}$ решений задачи (4.33)–(4.35) сходится вместе с производными по x до порядка p включительно к функциям $u(t,x)\in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$, $v(t,x)\in C^{0,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$ соответственно, которые в силу теоремы 1.6 сходимости МСА являются решением задачи (4.29), (4.30), причем $u(t,x)\in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$, $v(t,x)\in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)$. При этом справедливы следующие оценки при $(t,x)\in G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right| \le C,\ \ j=0,1,\ldots,p. \tag{4.42}$$

Случай **a** доказан. Для **случая b**, повторяя аналогичные рассуждения на первом дробном шаге, получаем аналогичную оценку (4.36). Доказательство второго дробного шага повторяет рассуждения доказательства случая **b** теоремы 4.1, которые приводились ранее в диссертации. $\square$

4.2.3 Пример

Рассмотрим на примере из работы [26] применение доказанной в работе теоремы 4.2 и сравним результаты.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|\, t\in[0,T], x\in E_1\}$ рассмотрена задача определения действительнозначных функций $u^1(t,x)$, $u^2(t,x)$, $b_{11}(t)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, $b_{22}(t)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$
\begin{gathered}
u_t^1 + a_{11}(t)u_x^1(t,x) + \sum_{k=1}^{2} b_{1k}u^k(t,x) = \nu(t)u_{xx}^1 + f_1(t,x), \\
u_t^2 + a_{22}(t)u_x^2(t,x) + \sum_{k=1}^{2} b_{2k}u^k(t,x) = f_2(t,x),
\end{gathered} \tag{4.43}
$$

начальному условию

$$
u^k(0,x) = u_0^k(x), \quad k = 1,2, \tag{4.44}
$$

и условиям переопределения

$$
u^k(t,0) = \alpha^k(t), \quad u^k(t,l) = \beta^k(t), \quad k = 1,2. \tag{4.45}
$$

Пусть выполнены условия согласования

$$
u_0^k(0) = \alpha^k(0),\ u_0^k(l) = \beta^k(l), \quad k = 1,2.
$$

Здесь $a_{kk}(t)$, $f_k(t,x)$, $u_0^k(x)$, $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ $(k = 1,2)$, $\nu(t)$ — заданные действительнозначные непрерывные в $G_{[0,T]}$ функции.

Пусть выполняется соотношение

$$
|\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)| \geq \delta > 0,\ i = 1,2,\ t \in [0,T],\ \ \delta - const.
$$

Задача (4.43)—(4.45) сведена к вспомогательной прямой задаче

$$
\begin{gathered}
u_t^1 + a_{11}(t)u_x^1(t,x) + (A_1u_{xx}^1(t,l) + A_2u_x^1(t,l) + A_3u_{xx}^1(t,0) + \\
+ A_4u_x^1(t,0) + A_5)u^1(t,x) + (B_1u_{xx}^1(t,0) + B_2u_x^1(t,0) + \\
+ B_3u_{xx}^1(t,l) + B_4u_x^1(t,l) + B_5)u^2(t,x) = \nu(t)u_{xx}^1 + f_1(t,x), \\
u_t^2 + a_{22}(t)u_x^2(t,x) + (C_1u_x^2(t,l) + C_2u_x^2(t,0) + C_3)u^1(t,x) + \\
+ (D_1u_x^2(t,0) + D_2u_x^2(t,l) + D_3)u^1(t,x) = f_2(t,x),
\end{gathered} \tag{4.46}
$$

$$
u^k(0,x) = u_0^k(x), \quad k = 1,2. \tag{4.47}
$$

$A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$ — известные функции. Относительно входных данных предполагается, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения, и удовлетворяют им:

$$
|a_{jj}(t)| \leq C,\ (j = 1,2), \quad |\nu(t)| \leq C, \tag{4.48}
$$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s} f^k(t,x)\right| \le C, \quad \left|\frac{d^s}{dx^s} u_0^k(x)\right| \le C, \quad (s=\overline{0,4},\ k=1,2), \tag{4.49}$$

$$|\alpha_i(t)| + |\beta_i(t)| + |\alpha_i'(t)| + |\beta_i'(t)| \le C, \quad (i=\overline{0,2}). \tag{4.50}$$

В данном примере в прямой задаче (4.46), (4.47) функции $a_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))$, $b_i(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))$ и $f_i(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t))$ $(i = 1, 2)$ из системы (4.29) имеют вид

$$a_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) = \nu(t),$$

$$b_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) = -a_{11}(t), \quad b_2(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) = -a_{22}(t),$$

$$\begin{aligned} f_1(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) &= f_1(t,x) - \\ &- (A_1 u^1_{xx}(t,l) + A_2 u^1_x(t,l) + A_3 u^1_{xx}(t,0) + A_4 u^1_x(t,0) + A_5) u^1(t,x) - \\ &- (B_1 u^1_{xx}(t,0) + B_2 u^1_x(t,0) + B_3 u^1_{xx}(t,l) + B_4 u^1_x(t,l) + B_5) u^2(t,x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) &= f_2(t,x) - \\ &- (C_1 u^2_x(t,l) + C_2 u^2_x(t,0) + C_3) u^1(t,x) - \\ &- (D_1 u^2_x(t,0) + D_2 u^2_x(t,l) + D_3) u^1(t,x). \end{aligned}$$

Условия 4.4—4.6 теоремы 4.2 выполняются в силу необходимых ограничений на входные данные при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2$, следовательно, классическое решение $\{u^1(t,x), u^2(t,x)\}$ задачи (4.46), (4.47) существует в классе $Z^2_x([0,t^*])$, при наборе входных данных, удовлетворяющему (4.48) — (4.50).

Этот результат соответствует результату, полученному авторами в работе [26].

Заключение

В ходе диссертационного исследования поставленные задачи были выполнены и получены следующие результаты.

Рассмотрена обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка. Для приведения обратной задачи к прямой был использован подход, предложенный в работе Ю.Е.Аниконова, где показано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента, а вторая является обычной задачей Коши для одномерного параболического уравнения. Доказано существование и единственность решения прямой задачи с данными Коши при помощи метода слабой аппроксимации. Доказана однозначная разрешимость обратной задачи в малом временном интервале.

Исследована обратная задача с данными Коши для системы многомерных параболических уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты при дифференциальном операторе второго порядка по выделенной переменной и сумме младших членов. Начальные данные заданы в виде произведения двух функций, зависящих от разных переменных. Для приведения обратной задачи к прямой используется подход, аналогичный ранее предложенному для уравнений в работе Ю.Е. Аниконова. В настоящей диссертации алгоритм получил развитие на случай системы многомерных параболических уравнений специальной структуры. Для вспомогательных прямых и исходной обратной задачи получены достаточные условия существования и единственности решения в малом временном интервале.

Доказаны достаточные условия существования решения прямой задачи в случае задачи Коши для системы двух одномерных нагруженных параболических уравнений специального вида, связанных по младшим членам и в случае системы одномерных нагруженных уравнений составного типа (одно из уравнений параболическое) с данными Коши. К системам такого типа сводятся некоторые коэффициентные обратные задачи для систем одномерных параболических уравнений с данными Коши и обратные задачи для систем составного типа. Полученные условия могут быть использованы при исследовании обратных задач для систем подобной структуры.

Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем существования и единственности, приведены решения, соответствующие этим данным.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и имеют теоретическую значимость. Они могут быть использованы для построения общей теории обратных задач.

Список литературы

[1] Абашеева, Н. Л. О линейной обратной задаче для параболического уравнения второго порядка / Н. Л. Абашеева // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. 9. – №1. – С. 3 – 12.

[2] Алексеев, Г. В. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г. В. Алексеев, Е. А. Калинина // Сиб. журн. индустр. математики. – 2007. – Т. 10. – №1. – С. 3 – 16.

[3] Аниконов, Д. С. Обратная задача типа локации для гиперболической системы / Д. С. Аниконов, С.Г. Казанцев // Сиб. журн. индустр. математики. – 2013. – Т. 16. – №4. – С. 3 – 20.

[4] Аниконов, Ю. Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю.Е. Аниконов, Ю.Я. Белов // Доклады Академии Наук СССР. – 1989. – Т. 306. – №6. – С. 1289 – 1293.

[5] Аниконов, Ю. Е. Редукция многомерных обратных задач к начально-краевым задачам в пространствах Гильберта / Ю. Е. Аниконов, М. П. Вишневский // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – №3. – С. 495 – 514.

[6] Аниконов, Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. электрон. матем. изв. — 2012. — №9. — С. 45-–64.

[7] Аниконов, Ю. Е. Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений 2-го порядка / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013.— Т. 16. — №2. — С. 40 – 49.

[8] Аниконов, Ю. Е. Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. журн. индустр. матем.– 2015. — Т. 18. — №2. — С. 36– 47.

[9] Баранов, С. Н. О задаче идентификации нескольких коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения / С. Н. Баранов, Ю. Я. Белов // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т.5. – №1 – С.30–40.

[10] Безнощенко, Н. Я. Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении / Н. Я. Безнощенко // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т.11. – №4. – С.19 – 26.

[11] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации функции источника в системе уравнений составного типа// J. Sib. Fed.University. Math. Phys.– 2011. – Т.4. – №4 – С.445–457.

[12] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы// J. Sib. Fed.University. Math. Phys.– 2010. – Т.3. – №4 – С.487–499.

[13] Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче идентификации коэффициентом многомерного параболического уравнения / Ю. Я. Белов, А. С. Ермолаев // – В сб. «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения», Красноярск: КрасГУ. – 1996. – С. 16 – 27.

[14] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. – Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999. – 236 с.

[15] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов , К. В. Коршун // J. Sib. Fed.University. Math. Phys. – 2012. – Т.5. – №4 – С.497–506.

[16] Белов, Ю. Я. Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков. — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. — 172 с.

[17] Белов, Ю. Я. Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения / Ю. Я.Белов, С. В.Полынцева // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 369. – №5. – С. 583 – 586.

[18] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения / Ю. Я.Белов, С. В.Полынцева // Совместный выпуск, часть I, Вычислительные технологии, 9(2004), Вестник КазНУ. Алматы-Новосибирск. – 2004. – Т.42. – №3. – С. 273-280.

[19] Белов, Ю. Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – №5. – С. 583 – 585.

[20] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации двух коэффициентов полулинейного ультрапараболического уравнения / Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Совместный выпуск. Вычислительные технологии. Региональный вестник Востока. Изд-во Вост.Казахстанского гос. унт-та. Усть-Каменогорск. – 2003. – Т.8. – Ч. 1. – С. 120–131.

[21] Бендер, О. А. Разрешимость задачи идентификации функции источника в нелинейной системе параболического типа / О. А. Бендер // Материалы восьмой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения — 2009». Казань:Казан. мат.об-во. – 2009. – С. 133.

[22] Боричевская, А. Г. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с данными Коши на части боковой поверхности цилиндра / А. Г.

Боричевская, С. Г. Пятков // Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54. – №2. – С. 436–449.

[23] Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — 184 с.

[24] Васин, И. А. Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений / И. А. Васин, В. Л. Камынин // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – №4. – С. 750 – 766.

[25] Ватульян, А. О. Математические модели и обратные задачи / А.О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал.

[26] Вячеславова, П. Ю. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа / П. Ю. Вячеславова, Р.В. Сорокин // Журн.СФУ: математика и физика. – 2009. – Т.2. – №3. – С. 288–297.

[27] Гегечкори, З. Г. О сходимости метода слабой аппроксимации / З. Г. Гегечкори, Г. В. Демидов // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4. – №2. –– С. 43—50.

[28] Даценко, А. В. О задаче идентификации двух младших коэффициентов и коэффициента при производной по времени в параболическом уравнении / А. В. Даценко, С.В. Полынцева // Журн.СФУ: математика и физика. – 2012. – Т.5. – №1. – С. 63 – 74.

[29] Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

[30] Иванов, В. К. Интегральное уравнение первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала / В. К. Иванов // Доклады Академии Наук СССР. – 1962. – Т. 142. – №5. – С. 998–1000.

[31] Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17. – № 3. – С. 3–146.

[32] Искендеров, А. Д. Обратная задача для линейной системы параболических уравнений / А. Д. Искендеров, А. Я. Ахундов // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 424. – №4. – С. 442–444.

[33] Искендеров, А. Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений / А. Д. Искендеров, А. Я. Ахундов // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10. – №5. – С. 890–898.

[34] Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[35] Кадиев, А. М. Обратная задача для системы параболических уравнений / А. М. Кадиев, В. И. Максимов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43. – №3. – С. 358–367.

[36] Камынин, В. Л. Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении / В. Л. Камынин // Математические заметки. – 2008. – Т.84. – №1. – С. 48–58.

[37] Кожанов, А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче / А. И. Кожанов // Математические заметки. – 2004. – Т. 76. – Вып. 6. – С. 840—853.

[38] Кожанов, А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46. – №5. – С. 1054—1071.

[39] Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44. – №4. – С. 694—716.

[40] Кожанов, А. И. О разрешимости некоторых нелокальныхи связанных с ними обратных задач для параболических уравнений / А. И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2011. – Т. 18. – №2. – С. 64—78.

[41] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функциального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 6-е изд. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

[42] Лаврентьев, М. М. К вопросу об обратной задаче теории потенциала / М. М. Лаврентьев // Доклады Академии Наук СССР. – 1965. – Т. 106. – №3. – С. 389–390.

[43] Лаврентьев, М. М. О восстановлении правой части параболического уравнения / М. М. Лаврентьев, В. И. Максимов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48. – №4. – С. 674–680.

[44] Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

[45] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» / И. П. Натансон. – 3-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 560 с.

[46] Новиков, П. С. О единственности обратной задачи теории потенциала / П. С. Новиков // Доклады Академии Наук СССР. – 1938. – Т. 18. – №3. – С. 165–168.

[47] Полынцева, С. В. Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / С. В. Полынцева // Некласси-

ческие уравнения математической физики, Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», Новосибирск, Институт математики СО РАН. – 2007. – С. 221–231.

[48] Полынцева, С. В. Задача идентификации коэффициентов при производной по времени и пространственной переменной / С. В. Полынцева // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2008 – Т.1. – №.23. – С. 308–317.

[49] Прилепко, А.И. О единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала / А. И. Прилепко // Доклады Академии Наук СССР. – 1965. – Т.60. – №1. – С. 40 – 43.

[50] Пятков, С.Г. Некоторые обратные задачи для системы параболических уравнений / С. Г. Пятков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т.12. – №4. – С. 187–202.

[51] Пятков, С.Г. Об одной линейной обратной задаче для параболической системы уравнений / С. Г. Пятков, Е. М. Короткова// Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т.21. – №3. – С. 76–87.

[52] Пятков, С.Г. О некоторых классах коэффициентных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, М. Л. Самков// Математические труды. – 2012. – Т.15. – №1. – С. 155–177.

[53] Пятков, С.Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов// Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – Т.35. – №12. – С. 61–75.

[54] Романенко Г.В. Представление решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И. В. Фроленков // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции

«Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2010. — С.63.

[55] Романенко Г.В. О представлении решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко // Труды XLIII Краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам. - Красноярск. — ИПК СФУ. — 2010. — С.97 – 101.

[56] Романенко Г.В. Представление решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И. В. Фроленков // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2011. — С. 60.

[57] Романенко Г.В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Г.В. Романенко // Материалы VII Всероссийской научной студенческой конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 50-летию первого полета человека в космос. — Изд-во СФУ. — Красноярск. — 2011. — С.69 – 73.

[58] Романенко Г.В. О представлении решения некоторых обратных задач для систем многомерных параболических уравнений / Г.В. Романенко // М75 Молодёжь и наука: сборник материалов VIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 155-летию со дня рождения К.Э.Циолковского [Электронный ресурс] № заказа 7880/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск : Сиб. федер. ун-т., 2012.

[59] Романенко, Г. В. О представлении решения обратной задачи для системы двумерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Тезисы Международной конференции, посвященной 80-летию со дня

рождения академика М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012 г. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 103–104.

[60] Романенко, Г. В. О представлении решения обратной задачи для системы многомерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // VII Всесибирский конгресс женщин-математиков (посвящается Софье Васильевне Ковалевской): Материалы Всероссийской научной конференции, 2 — 4 октября 2012 г. / Под ред. Л.И. Покидышевой, Красноярск: СибГТУ, 2012. — С.196 – 199.

[61] Романенко, Г. В. О решении одной обратной задачи для системы многомерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / сост. Р.К.Губайдуллина, под ред. Ф.Г.Авхадиева и др. - Казань: Издательство Казан. матем. об-во, 2012. — Т. 45.: Лобачевские чтения — 2012: материалы XI молодежной научной школы-конференции. — С.170 – 172.

[62] Романенко, Г. В. О существовании решения системы одномерных нагруженных уравнений специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска [Электронный ресурс] № заказа 2394/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск : Сиб. федер. ун-т. — 2013.

[63] Романенко, Г. В. О существовании решения системы одномерных параболических нагруженных уравнений с данными Коши / Г. В. Романенко // Материалы 51-й Международной научной студенческой конферен-

ции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. - Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2013. — С. 100.

[64] Романенко, Г. В. Об одном подходе к приведению обратных задач специального вида для параболических уравнений и систем к прямым / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Тезисы докладов пятой международной молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 8-13 октября, 2013 г.). — Новосибирск: Сибирское научное издательство. — 2013. — С. 77.

[65] Романенко, Г. В. О существовании решения систем составного типа специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Труды Математического центра им. Н.И.. Лобачевского: материалы двенадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2013» (Казань, 24-29 октября, 2013 г.) .– Казань: Казан. ун-т, 2013. — Т. 47.— С.143 – 145.

[66] Романенко, Г. В. О существовании решения системы двух многомерных нагруженных параболических уравнений специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края, [Электронный ресурс], № заказа 1644/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск: Сиб. федер. ун-т. — 2014. – 1998. – №11. – С. 143 – 148.

[67] Романенко Г. В. О существовании решения системы составного типа специального вида с данными Коши [Электронный ресурс] / Г. В. Романенко // П827 Проспект Свободный – 2015: материалы науч. конф., посвященной

70-летию Великой Победы (15-25 апреля 2015 г.); отв. ред. Е. И. Костоглодова. – Электрон. дан. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. – С. 19 – 22.

[68] Романов, В.Г. Об одной обратной задаче для параболического уравнения / В. Г. Романов // Матем. заметки. – 1976. – Т.19. – №4. – С.595 – 600.

[69] Романов, В.Г. Асимптотическое разложение фундаментального решения параболического уравнения и обратные задачи / В. Г. Романов // Доклады Академии наук. – 2015. – Т.464. – №2. – С.141.

[70] Самарский, А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области / А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – №5. – С. 787 – 811.

[71] Спичак, Г. А. Задачи идентификации коэффициентов в одной нелинейной системе уравнений параболического типа / Г.А. Спичак, Т. Н. Шипина // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» – Сибирское научное издательство, Новосибирск. – 2012. – С. 108.

[72] Тихонов, А. Н. Об обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения / А. Н. Тихонов // Журнал ВМ и МФ.1983. N1. Т.23. С.95 – 101.

[73] Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. // 2-изд. 1979 год. 284 стр.

[74] Фроленков, И. В. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков,

Ю. Я. Белов // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. статей; Отв. ред. А. И. Кожанов. – Новосибирск: Изд. Института мат., 2012. – С. 262–279.

[75] Фроленков, И. В. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2010. – Т.3. – №5. – С. 556–564.

[76] Фроленков, И. В. О существовании решения задачи идентификации коэффициента специального вида при функции источника / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 120–134.

[77] Фроленков, И. В. Некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер, Г. В. Романенко // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко: тезисы докладов. — Новосибирск, 2011. — С. 127–128.

[78] Фроленков, И. В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. — 2012. — Т. 5. — №1. — С. 122–131.

[79] Фроленков, И. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2012. — Т. 15. — № 2. — С. 139–146.

[80] Фроленков, И. В. О существовании решения систем нагруженных дифференциальных уравнений специального вида с данными Коши / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Материалы международной конференции, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция» (Новосибирск, 18-24 августа 2013 г.) — С. 280.

[81] Frolenkov, I. V. On existence of Cauchy problems solutions for two-dimensional loaded parabolic equations and systems of special form / I. V. Frolenkov, G. V. Romanenko // Справочник конференции "Математические и информационные технологии, МИТ-2013"(Врнячка Баня, Сербия, 5–8 сентября 2013 г. Будва, Черногория, 9–14 сентября 2013 г.) — С.85

[82] Фроленков, И. В. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2014. — Т. 17. — №1. — С.135–148.

[83] Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. — 197 с.

[84] Яненко, Н. Н. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений / Н. Н. Яненко // Сиб. мат. журн. — 1964. — Т. 5. — №6. — С. 1431–1434.

[85] Яненко, Н. Н. Исследование задачи Коши методом слабой аппроксимации / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167. — №6. — С. 1242–1244.

[86] Яненко, Н. Н. Метод слабой аппроксимации как конструктивный метод построения решения задачи Коши / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. — 1966. — С. 60–83.

[87] Belov, Yu. Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu. Ya. Belov. — Utrecht: VSP, 2002. — 211 p.

[88] Belov, Yu. Ya. On Estimates of Solutions of the Split Problems for Some Multi-Dimensional Partial Differential Equations / Yu. Ya. Belov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2009. — V. 2. — №3. — P. 258–270.

[89] Belov, Yu. Ya. On some identification problem for source function to one semievolutionary system / Yu. Ya. Belov, V.G. Kopylova. // Journal of Inverse and III-posed Problems — V. 20. — №5–6. — P. 723—743.

[90] Belov, Yu. Ya. On solvability of the Cauchy problem for a loaded system / Yu. Ya. Belov, K. V. Korshun // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2014. — V. 7. — №2. — P. 155–161.

[91] Belov, Yu. Ya. The problem of determining the source function for a system of composite type / Yu.Ya. Belov, T.N. Shipina // J. Inv. Ill – Posed Problems. – 1998. – V.6. – №4. – P.287 – 308.

[92] Danilaev, P. G. Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications. / P. G. Danilaev. – VSP, The Netherlands. – 2001.

[93] Dinh Nho Hao. A non-characteristic Cauchy problem for linear parabolic equations and related inverse problems: I. Solvability // Inverse Probl. – 1994. – V.10. – P. 295–315.

[94] Frolenkov, I. V. On the existence of solution of some problems for nonlinear loaded parabolic equations with Cauchy data / Igor V. Frolenkov, Maria A. Darzhaa // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2014. – V. 7. — №2. – P. 173–185.

[95] Frolenkov I. V. On Solvability of Some Special Systems of One-Dimensional Loaded Parabolic Equations and Composite-Type Systems with Cauchy Data / I. V. Frolenkov, G. V. Romanenko // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2014. — V. 8. — №. 2. — P. 196-207.

[96] Herglotz, G. Uber die Elastizitat der Erde bei Borucksichtigung inter Variablen Dichte. / G. Herglotz. // Zeit schr. fur Math. und Phys. – 1905. – Bd52. – №3. – S.275 –299.

[97] Lorenzi, A. An identification problem for a semilinear parabolic equation / A. Lorenzi, E. Paparon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1988. — V. 151. — №1. — P. 263–287.

[98] Lorenzi, A. Fredholm-type results for integrodifferential identification parabolic problems / A. Lorenzi, A. Prilepko // Differential Integral Equations. — 1993. — V. 6. — №3. — P. 535–552.

[99] Kishimoto, N. A Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity / N. Kishimoto // Differential Integral Equations. — 2009. — V. 22.— №5/6. — P. 447–464.

[100] Pilant, M. S. An inverse problem for a nonlinear parabolic equation / M. S. Pilant, W. Rundell // Partial Differential Equations. — 1986. — V. 11. — №4. — P. 445–457.

[101] Romanenko, G. V. A representation of solution of the identification problem of the coefficients at second order operator in the multi-dimensional parabolic

equations system / G. V. Romanenko. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2014. — V.7. — №1. — P. 100–111.

[102] Romanenko, G. V. On existence of Cauchy problems solutions for loaded parabolic equations and systems of special form / G. V. Romanenko, I. V. Frolenkov // Zbornik radova Konferencije MIT 2013: Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematicki fakultet; Novosibirsk: Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014 (Kraljevo: Ofsetpres). — P. 573 – 579.

[103] Riganti, R. Inverse Problem for the Nonlinear Heat Equation with Final Overdetermination /R. Riganti, E. Savateev // Torino, Politecnico di Torino:Rapporto Interno. — 1995. — V. 7.

[104] Rundell, W. An inverse problem for a parabolic partial differential equation / W. Rundell // Rocky Mountain J. — 1983. — V. 13. — №4. — P. 679–688.

[105] Rundell, W. A Parabolic Inverse Problem with an Unknown Boundary Condition / W. Rundell, H.M.Yin // Journal of Differential Equations. — 1990. — V. 86. — P. 234–242.

[106] Visan, M. Global well-posedness and scattering for a class of nonlinear Schrödinger equations below the energy space / M. Visan, X. Zhang // Differential Integral Equations. — 2009. — V. 22. — №1/2. — P. 99–124.