На правах рукописи

Романенко Галина Викторовна

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор **Белов Юрий Яковлевич**.

Официальные оппоненты:

Аниконов Юрий Евгеньевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория обратных задач математической физики, заведующий лабораторией.

Семенко Евгений Вениаминович, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный педагогический университет», кафедра алгебры и математического анализа, профессор.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится «____» __________ 2017 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» ______________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Обратными называют задачи, в которых по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений (коэффициентные обратные задачи), либо восстановить функцию, входящую в начальное условие (ретроспективные задачи) или в граничное условие (граничные обратные задачи). Эти задачи в большинстве случаев некорректны (неустойчивы по отношению к погрешностям измерений).

В целом, под обратными понимают задачи, решение которых состоит в обращении причинно-следственных связей, проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта или процесса и заключается в определении параметров данной модели по имеющимся результатам наблюдений и прочей экспериментальной информации.

Большой вклад в развитие теории обратных задач математической физики внесен представителями ряда отечественных математиков: Г.В. Алексеев[1], Ю.Е. Аниконов[2], Ю.Я. Белов[3], С.И. Кабанихин[4], А.И. Кожанов[5], А.И. Прилепко[6], С.Г. Пятков[7], А.Н. Тихонов[8], В.Г. Романов[9], Н. Н. Яненко[10] и др., а также их ученики и последователи.

Исследования в данной области проводятся также математиками из Италии, Китая, Казахстана, США, Франции, Швеции, Японии и др., например, E. Francini[11], A. Lorenzi[12], W. Rundell[13], M. Yamamoto, H. M. Yin, X. Zhang и др.

[1]Алексеев, Г. В. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г. В. Алексеев, Е. А. Калинина // Сиб. журн. индустр. математики. – 2007. – Т. 10. – №1. – С. 3 — 16.

[2]Аниконов, Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. электрон. матем. изв. - 2012. - №9. - С. 45 – 64.

[3]Belov, Yu. Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu. Ya. Belov. - Utrecht: VSP, 2002. - 211 p.

[4]Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[5]Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44. – №4. – С. 694 – 716.

[6]Прилепко, А.И. О единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала / А. И. Прилепко // Доклады Академии Наук СССР. – 1965. – Т.60. – №1. – С. 40 – 43.

[7]Пятков, С.Г. Некоторые обратные задачи для системы параболических уравнений / С. Г. Пятков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т.12. – №4. – С. 187 – 202.

[8]Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. 2-изд. 1979 год. 284 с.

[9]Романов, В.Г. Асимптотическое разложение фундаментального решения параболического уравнения и обратные задачи / В. Г. Романов // Доклады Академии наук. – 2015. – Т.464. – №2. – С.141.

[10]Яненко, Н. Н. Исследование задачи Коши методом слабой аппроксимации / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Докл. АН СССР. - 1966. - Т. 167. - №6. - С. 1242 – 1244.

[11]Francini, E. An inverse problem for higher order parabolic equation with integral overdetermination. Unique solvability and stabilization of the solution. / E. Francini, V. Kamynin // Pubblicazioni Dell'istituto di analisi globale e applicazioni. Serie «Problemi non ben pasti ed inversi». – Firenze. – 1996

[12]Lorenzi, A. An identification problem for a semilinear parabolic equation / A.Lorenzi, E. Paparon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. - 1988. -V. 151. - №1. - P. 263 – 287.

[13]Rundell, W. An inverse problem for a parabolic partial differential equation / W. Rundell // Rocky Mountain J. - 1983. - V. 13. - №4. - P. 679 – 688.

Цель работы. Основная цель диссертации заключается в доказательстве однозначной разрешимости коэффициентных обратных задач для параболических уравнений и систем специального вида с данными Коши, используя различные методы сведения обратных задач к прямым.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми. Новизна и интерес данной работы заключается в том, что задачи исследуются в классах гладких ограниченных функций, а неизвестные коэффициенты в них зависят от нескольких независимых переменных, входящих в уравнение. Для сведения обратных задач к прямым применяются различные методы.

Методы исследования. Основной метод, используемый в диссертации при доказательстве разрешимости прямых задач — метод слабой аппроксимации, являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне и названный так Н.Н. Яненко [14]. Методы расщепления во многом получили развитие в работах Н.Н. Яненко, А.А. Самарского, их учеников и последователей. Суть метода заключается в том, что исходное уравнение расщепляют на более простые составляющие. Полученная вспомогательная расщеплённая задача оказывается, как правило, проще, и решение можно либо выписать точно, либо получить более точные априорные оценки. Далее, на основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации заключается, что решением прямой задачи является предельная функция, к которой сходится подпоследовательность последовательности решений вспомогательной расщеплённой задачи.

Для сведения обратных задач к прямым в главах диссертации использованы различные подходы:

- в главе 2 используется метод, предложенный Ю.Е. Аниконовым[15], который позволяет расщепить обратную задачу сложной структуры на две прямых меньшей размерности и имеющих более простую структуру;

- в главе 3 для исследования обратной задачи для системы уравнений разработан и применен метод, который приводит исходную обратную задачу к двум прямым задачам меньшей размерности. Алгоритм для систем разработан на основе метода, предложенного Ю.Е. Аниконовым для уравнений;

- в 4 главе рассмотрены прямые задачи для систем «нагруженных» уравнений, содержащих следы неизвестных функции и их производных. Такие системы могут быть получены при сведении обратной задачи к прямой, используя некоторую дополнительную информацию о решении (условия переопределения).

На защиту выносятся:

[14]Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. — 197 с

[15]Аниконов, Ю. Е. Редукция многомерных обратных задач к начально-краевым задачам в пространствах Гильберта / Ю. Е. Аниконов, М. П. Вишневский // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – №3. – С. 495 – 514

– Доказательство однозначной разрешимости обратной задачи для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка.

– Доказательство однозначной разрешимости обратной задачи с данными Коши для системы многомерных параболических уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты при дифференциальном операторе второго порядка по выделенной переменной и сумме младших членов.

– Доказательство достаточных условий существования решений прямых задач для одномерных систем нагруженных уравнений специального вида с данными Коши.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики и обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач математической физики, а также при исследовании нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта РФФИ № 12-01-31033 «Исследование корректности специального класса нагруженных параболических уравнений с данными Коши методом слабой аппроксимации. Исследование свойств решений» под руководством И. В. Фроленкова и государственного задания Министерства образования и науки РФ № 1.7694.2013 «Задачи определения коэффициентов в многомерных уравнениях с частными производными» под руководством Ю. Я. Белова.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации рассматриваются задачи идентификации коэффициентов в параболических уравнениях и системах с данными Коши. Исследованы вопросы существования и единственности решений рассматриваемых задач. Поэтому область исследований соответствует пунктам 2 «Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» и 3 «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» в списке «Области исследований», определённом паспортом специальности «01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Апробация работы. Доклады по теме диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях: XLII краевая научная студенческая конференция по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009); XLIII краевая научная студенческая конференция по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2010, диплом II степени); XLVIII международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010, диплом II степени); VII всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2011, диплом I степени); VIII всероссийская конференция «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2012); VII всесибирский конгресс женщин-математиков (г. Красноярск, 2012); Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (г. Новосибирск, 2012); XI молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2012»; IX всероссийская научно-техническая конференция с международным участием, посвященная 385-летию со дня основания г. Красноярска «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2013); 51-я международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 12 – 18 апреля 2013); Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (г. Новосибирск, 18 – 24 августа 2013); Международная конференция «Математические и информационные технологии, MIT-2013» (Врнячка Баня, Сербия, 5 – 8 сентября 2013 г., Будва, Черногория, 9 – 14 сентября 2013); Пятая международная молодежная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 8 – 13 октября, 2013); XII молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения–2013» (г. Казань, 24 – 29 октября, 2013); X юбилейная всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященная 80-летию образования Красноярского края «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2014).

Все результаты, представленные в диссертации, обсуждались на семинаре «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю. Я. Белова (2010 – 2016 гг.), на семинаре «Неклассические уравнения математической физики», приуроченному к 60-летию профессора С. Г. Пяткова (Институт математики им. Соболева СО РАН, 2 февраля 2016 г., г.Новосибирск), а также на семинаре «Математические модели механики сплошных сред» (Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН профессора П. И. Плотникова, 28 февраля 2017 г., г.Новосибирск).

Работы по теме диссертации были отмечены наградами Конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М. А. Лаврентьева (2010, 2013 гг.).

Публикации и личный вклад. Основные результаты диссертации опубликованы в 23 работах автора, из них 4 статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации [1] — [4], одна статья в переводной версии журнала [22], остальные работы опубликованы в сборниках материалов научных конференций.

Пятнадцать работ написаны в соавторстве. И. В. Фроленкову принадлежат идеи постановок задач. В работах [1], [4] основной вклад в доказательство теорем существования и единственности решения принадлежит автору. В работе [2] доказательство теоремы редукции, а также доказательство теоремы существования и единственности решения обратной задачи принадлежит И. В. Фроленкову, автору принадлежит доказательство теорем существования и единственности решения прямой вспомогательной задачи.

В работе [9] рассмотрены две задачи. Автору принадлежит доказательство теоремы редукции для задачи 1, теорем существования и единственности решения редуцированной задачи. Доказательство однозначной разрешимости задачи 2 в случае суммы принадлежит И. В. Фроленкову, Е. Н. Кригер принадлежит получение оценки устойчивости по входным данным решения задачи 2 в случае суммы и доказательство локальной разрешимости задачи 2 в случае произведения.

В работе [21] решающий вклад в доказательство теорем существования решения в случае двумерного параболического уравнения и в случае уравнения типа Бюргерса принадлежит И. В. Фроленкову, автору принадлежит доказательство теоремы существования в случае одномерной системы уравнений параболического типа. В работах [5] — [17], [18], [19] основной вклад принадлежит автору.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 106 наименований, 23 из них являются работами автора по теме диссертации. В соавторстве написаны 15 работ. Объем диссертации составляет 116 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дано обоснование актуальности и научной новизны диссертационной работы, а также перечислены сходства и различия с исследованными ранее работами других учёных.

В **первой главе** приведены обозначения, вспомогательные утверждения и теоремы, необходимые для чтения последующих глав диссертации.

Во **второй главе** исследована задача идентификации коэффициента при дифференциальном операторе второго порядка в многомерном параболическом уравнении с данными Коши. Используя подход, предложенный в работе Ю.Е. Аниконова [16], обратная задача приведена к прямой в предположении специальных условий на входные данные. Основные результаты второй главы опубликованы в [1, 2].

В области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ рассмотрена задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{1}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$, Δ_x — оператор Лапласа, с начальным условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2}$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c_1(t) \ge c_0 > 0$, $a_0, b_0, c_0 - const$. Функция $u_0(x,z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^{n+1}$. Одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) подлежит определению функция $\lambda(t,z)$.

Пусть задано условие переопределения

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) \tag{3}$$

[16]Аниконов, Ю. Е. Редукция многомерных обратных задач к начально-краевым задачам в пространствах Гильберта / Ю. Е. Аниконов, М. П. Вишневский // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – №3. – С. 495 – 514

и выполнено условие согласования $u_0(0,z) = \psi(0,z)$.

Допустим выполнение условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \geq \mu > 0, \quad \mu\text{— const.} \tag{4}$$

Теорема 2.1. ([1, 2]) *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f(t,z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x \varphi,$$
$$\varphi(0,x) = w_0(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t)f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$f(0,z) = v_0(z), \tag{6}$$

то функции $u(t,x,z)$ и $\lambda(t,z)$, определенные формулами

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z),$$
$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (1) — (3) *в предположении, что*

$$u_0(x,z) = w_0(x)v_0(z).$$

Относительно входных данных сделаны следующие предположения:

- функции $v_0(z), \psi(t,z)$ достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \leq C, \quad (t,z) \in \widetilde{G}_{[0,T]},$$
$$k = 0,1,\ldots,4, \; i = 0,1,\ldots,6; \tag{7}$$

- для функций $v_0(z), \psi(t,z)$ выполняется следующее условие при $t \in [0,t^*]$, $t^* \leq T$:

$$\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \delta, \quad \delta = const. \tag{8}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2. ([1]) *Пусть выполняются условия* (4), (7), (8) *на входные данные. Тогда существует t^*, $0 < t^* \leq T$ — константа, зависящая от константы μ, постоянных, ограничивающих функции $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, и постоянных из* (7)*, такая, что существует решение $f(t,z)$ задачи* (6) *в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,z)\right|\le C. \tag{9}$$

Теорема 2.3. ([1]) *Пусть выполняются условия теоремы 2.2, тогда решение $f(t,z)$ задачи* (6) *в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, удовлетворяющее соотношению* (9)*, единственно.*

Теорема 2.4. ([1]) *Пусть выполняются условия теорем 1.4, 2.1 — 2.3. Тогда существует решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ обратной задачи* (1) — (3) *в классе*

$$Z(t^*)=\left\{u(t,x,z),\lambda(t,z)\mid u(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}),\ \lambda(t,z)\in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})\right\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]})=\left\{u(t,x,z)\middle|D^\alpha_x u,\frac{\partial^k}{\partial z^k}u\in C(\widetilde{G}_{[0,t^*]}),k=0,1,2,\ |\alpha|\le 2\right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{|\alpha|\le 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^\alpha_x u(t,x,z)\right|+\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\lambda(t,z)\right|\le C. \tag{10}$$

Теорема 2.5. ([1]) *Пусть выполняются условия теоремы 2.4. Тогда решение $u(t,x,z),\lambda(t,z)$ задачи* (1)–(3)*, удовлетворяющее соотношению* (10)*, единственно в классе $Z(t^*)$.*

В конце главы приведен пример задачи, входные данные которой удовлетворяют условиям доказанных теорем.

Третья глава диссертации посвящена обобщению метода, предложенного Ю. Е. Аниконовым, на случай системы многомерных параболических уравнений и исследованию обратной задачи с данными Коши для системы многомерных параболических уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты при дифференциальном операторе второго порядка по выделенной переменной и сумме младших членов. Начальные данные заданы в виде произведения двух функций, зависящих от разных переменных. Основные результаты третьей главы опубликованы в [3].

В области $\Gamma_{[0,T]}=\left\{(t,x,z)\mid x\in\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{R},\ 0\le t\le T\right\}$ рассмотрена задача Коши для системы параболических уравнений ($i=\overline{1,m}$)

$$u^i_t=a^i(t)u^i_{zz}(t,x,z)+b(t)\Delta_x u^i(t,x,z)+\lambda^i(t,z)\left(B^i_z(u^i)+\sum_{k=1}^{m}g^k_i(t)u^k\right), \tag{11}$$

где $B^i_z(u^i)=c^i_1(t)u^i_{zz}(t,x,z)+c^i_2(t)u^i_z(t,x,z)+c^i_3(t)u^i(t,x,z)$, с начальными условиями вида

$$u^i(0,x,z)=u^i_0(x,z). \tag{12}$$

Функции $a^i(t),b(t),c^i_l(t),g^k_i(t)$, ($l=1,2,3,\ i,k=\overline{1,m}$) заданы и ограничены на $[0,T]$, причем $a^i(t)\ge a_0>0,\ b(t)\ge b_0>0,\ c^i_1(t)\ge c_0>0$. Действительнозначные функции $u^i_0(x,z)$

заданы в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функции $\lambda^i(t,z)$ подлежат определению одновременно с решением $u^i(t,x,z)$ задачи (11), (12).

Пусть заданы условия переопределения

$$u^i(t,0,z)=\psi^i(t,z), \quad i=\overline{1,m}, \tag{13}$$

и выполнены условия согласования $u^i_0(0,z)=\psi^i(0,z), \quad i=\overline{1,m}.$

Пусть выполнены условия

$$\left|B^i_z(\psi^i)+\sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k\right| \geq \mu^i>0, \quad \mu^i\text{— const}, \quad i=\overline{1,m}. \tag{14}$$

Справедлива следующая теорема о представлении решения задачи (11) — (13).

Теорема 3.1. ([3]) *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f^i(t,z)$ следующих задач Коши:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=b(t)\Delta_x\varphi, \qquad \varphi(0,x)=w_0(x), \tag{15}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial t}=a^i(t)f^i_{zz}+\left(B^i_z(f^i)+\sum_{k=1}^{m} g^k_i(t)f^k\right)\times$$
$$\times\frac{\psi^i_t(t,z)-a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}, \qquad f^i(0,z)=v^i_0(z), \tag{16}$$

то функции $u^i(t,x,z)$ и $\lambda^i(t,z)$, определенные формулами

$$u^i(t,x,z)=\varphi(t,x)f^i(t,z),$$

$$\lambda^i(t,z)=\frac{\psi^i_t(t,z)-a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z)-f^i(t,z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k},$$

являются решением обратной задачи (11) — (12) *в предположении, что*

$$u^i_0(x,z)=w_0(x)v^i_0(z). \tag{17}$$

Относительно входных данных сделаны следующие предположения:

- функции $v^i_0(z),\psi^i(t,z)$ достаточно гладкие и удовлетворяют соотношению

$$\left|\frac{d^{l_1}}{dz^{l_1}}v^i_0(z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{l_1}}{\partial z^{l_1}}\psi^i(t,z)\right|+\left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial z^{l_2}}\psi^i(t,z)\right|\leq C, \quad (t,z)\in\Gamma_{[0,T]},$$
$$l_1=0,1,\dots,4,\ l_2=0,1,\dots,6,\ i=\overline{1,m}, \tag{18}$$

- для функций $v^i_0(z),\psi^i(t,z)$ выполняются следующие условия при $t\in[0,t^*]$, $t^*\leq T$:

$$\frac{\psi^i_t(t,z)-a^i(t)\psi^i_{zz}(t,z)-v^i{}_0(z)\varphi_t(t,0)}{B^i_z(\psi^i)+\sum\limits_{k=1}^{m} g^k_i(t)\psi^k}\geq\delta^i, \quad \delta^i=const,\ i=\overline{1,m}. \tag{19}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2. ([3]) *Пусть выполняются условия* (14), (18), (19). *Тогда существует* t^**:* $0 < t^* \leq T$ *— константа, зависящая от констант* μ^i , δ^i, *а также постоянных, ограничивающих функции* $a^i(t), b(t), c_1^i(t), g_i^k(t)$ $(k, i = \overline{1, m})$, *и постоянных из* (18), *такая, что существует решение* $f(t, z) = (f^1(t, z), \ldots, f^m(t, z))$ *задачи* (16) *в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f^i(t, z) \middle| {f^i}_t(t, z), \frac{\partial^l}{\partial z^l} f^i(t, z) \in C(G_{[0,t^*]}),\, l = 0, 1, 2,\, i = \overline{1, m} \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{l=0}^{2} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} f^k(t, z) \right| \leq C. \tag{20}$$

Теорема 3.3. ([3]) *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда решение* $f(t, z) = (f^1(t, z), \ldots, f^m(t, z))$ *задачи* (16) *класса* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (20)*, единственно.*

Теорема 3.4. ([3]) *Пусть выполняются условия теорем 1.4, 3.1 — 3.3. Тогда существует решение* $u^i(t, x, z)$, $\lambda^i(t, z)$ *обратной задачи* (11) — (13) *в классе*

$$Z(t^*) = \left\{ u^i(t, x, z), \lambda^i(t, z) \mid u^i(t, x, z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\Gamma_{[0,t^*]}),\ \lambda^i(t, z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}), i = \overline{1, m} \right\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\Gamma_{[0,t^*]}) = \left\{ u^i(t, x, z) \middle| D^\alpha_x u^i, \frac{\partial^l}{\partial z^l} u^i \in C(\Gamma_{[0,t^*]}), l = 0, 1, 2,\, i = \overline{1, m},\, |\alpha| \leq 2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=0}^{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D^\alpha_x u^i(t, x, z) \right| + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=0}^{2} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} \lambda^i(t, z) \right| \leq C. \tag{21}$$

Теорема 3.5. ([3]) *Пусть выполняются условия теоремы 3.4, тогда решение* $u(t, x, z) = (u^1(t, x, z), \ldots, u^m(t, x, z))$, $\lambda(t, z) = (\lambda^1(t, z), \ldots, \lambda^m(t, z))$ *задачи* (11)–(13)*, удовлетворяющее соотношению* (21)*, единственно в классе* $Z(t^*)$.

В конце главы построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и соответствующего им решения.

Четвертая глава состоит из двух частей. Первая часть посвящена задаче Коши для системы двух одномерных нагруженных (содержащих следы неизвестных функций и их производных) параболических уравнений специального вида, связанных по младшим членам, вторая — нагруженным системам составного типа. К системам такого типа приводятся некоторые коэффициентные обратные задачи для линейных или полулинейных систем одномерных параболических уравнений (или систем составного типа соответственно), связанных по младшим членам, с данными Коши. Основные результаты четвертой главы представлены в работах [4, 22].

1. Система нагруженных параболических уравнений

В пространстве E_1 переменных x, выбрано r различных точек α_k, $k=\overline{1,r}$. В полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x)|0\le t\le T, x\in E_1\}$ рассмотрена задача Коши для системы нагруженных неклассических параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx}+b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x+f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\\ v_t(t,x) &= a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_{xx}+b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x+f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \tag{22}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\;\; v(0,x)=v_0(x),\;\; x\in E_1, \tag{23}$$

Замечание 4.1. Через

$$\overline{\varphi}_u(t)=\left(u(t,\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right),k=\overline{1,r},j=0,1,\ldots,p_1,$$

$$\overline{\varphi}_v(t)=\left(v(t,\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,\alpha_k)\right),k=\overline{1,r},j=0,1,\ldots,p_1,$$

обозначены вектор-функции, компоненты которой является следами (зависящими только от переменной t) функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$, а также соответственно всех их производных по пространственной переменной x до порядка p_1 включительно.

Пусть $p\ge max\{2,p_1\}$.

Замечание 4.2. Через $Z^p([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})=\left\{\psi(t,x)\mid \frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^j\psi}{\partial x^j}\in C(G_{[0,t^*]}),\; j=\overline{0,p}\right\}, \tag{24}$$

ограниченных при $(t,x)\in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в систему уравнений (22),

$$\sum_{j=0}^{p}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right|\right)\le C. \tag{25}$$

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 4.1. Действительнозначные функции a_1, a_2, b_1, b_2, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов, и функции a_1, a_2 удовлетворяют условиям $a_1\ge a_0>0$, $a_2\ge a_0>0$, $a_0-const$. Для любых $t_1\in(0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x)\in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x)\in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\left|a_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|+\left|a_2\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|+\\ &\qquad+\left|b_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|+\left|b_2\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|\le P_{\gamma_1}\left(S_{q,w}(t)\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Замечание 4.3. Здесь и далее $\gamma_1\ge 0$ и $\gamma_2\ge 0$ — целые числа,

$$S_{q,w}(t)=\sum_{j=0}^{p+2}\left(\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}q(\xi,x)\right|+\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}w(\xi,x)\right|\right),$$

$$q(t,x),\; w(t,x)\in Z^{p+2}([0,t_1]),$$

$P_\zeta(y) = \tilde{C}(1+|y|+\dots+|y|^\zeta)$, $\tilde{C} > 1$ — постоянная, не зависящая от функций $q(t,x)$, $w(t,x)$ и их производных.

Условие 4.2. Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ — действительнозначные, имеют все непрерывные производные до порядка $p+2$ и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \le C,\ \ x \in E_1.$$

Условие 4.3. Функции f_1, f_2 — действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_1\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_2\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|\right) \le P_{\gamma_2}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (27)$$

Теорема 4.1. ([4], [22]) *Пусть выполняются условия 4.1—4.3.*

a *Если условия 4.1, 4.3 выполняются при* $\gamma_1 \ge 0$, $\gamma_2 = 0$ *или* $\gamma_2 = 1$, *то классическое решение* $\{u(t,x), v(t,x)\}$ *задачи* (22), (23) *существует в классе* $Z^p([0,T])$.

b *Если условия 4.1, 4.3 выполняются при* $\gamma_1 \ge 0$, $\gamma_2 > 1$, *то существует константа* t^*, $0 < t^* \le T$, *зависящая от постоянной* $\tilde{C}$ *из* (26), (27), *такая, что классическое решение* $\{u(t,x), v(t,x)\}$ *задачи* (22), (23) *существует в классе* $Z^p([0,t^*])$.

2. Система нагруженных уравнений составного типа

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассмотрена задача Коши для системы нагруженных неклассических уравнений

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x + f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\\ v_t(t,x) &= b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \quad (28)$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \ v(0,x) = v_0(x),\ \ x \in E_1, \quad (29)$$

Для задачи (28), (29) справедливы замечания из пункта 1.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 4.4. Действительнозначные функции a_1, b_1, b_2, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов, и функция a_1 удовлетворяет условию $a_1 \ge a_0 > 0$, $a_0 - const$. Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:

$$\left|a_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \ + \left|b_1\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|b_2\big(t,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| \le P_{\gamma_1}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (30)$$

Условие 4.5. Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ — действительнозначные, имеют все непрерывные производные до порядка $p+2$ и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \le C,\ \ x \in E_1.$$

Условие 4.6. Функции f_1, f_2 — действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Для любых $t_1 \in (0,T]$, $q(t,x)$, $w(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции как функции переменных
$(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение:

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_1\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_2\big(t,x,q,w,\overline{\varphi}_q(t),\overline{\varphi}_w(t)\big)\right|\right) \leq P_{\gamma_2}\left(S_{q,w}(t)\right). \quad (31)$$

Теорема 4.2 ([4], [22]) *Пусть выполняются условия 4.4—4.6.*

a *Если условия 4.4, 4.6 выполняются при $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 = 0$ или $\gamma_2 = 1$, то классическое решение $\{u(t,x), v(t,x)\}$ задачи (28), (29) существует в классе $Z^p([0,T])$.*

b *Если условия 4.4, 4.6 выполняются при $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 > 1$, то существует константа t^*, $0 < t^* \leq T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$ из (30), (31), такая, что классическое решение $\{u(t,x), v(t,x)\}$ задачи (28), (29) существует в классе $Z^p([0,t^*])$.*

В диссертации на примере нескольких работ рассмотрено применение доказанных теорем и проанализированы результаты.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. Я. Белову и кандидату физ.-мат. наук, доценту И. В. Фроленкову за руководство и неоценимую помощь в работе над диссертацией, а также всем участникам семинара «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета и, в частности Е. Н. Кригер, за полезные советы по диссертации.

Заключение

В диссертации получены следующие результаты:

1. Исследована обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка. Для сведения обратной задачи к прямой был использован подход, предложенный в работе Ю.Е.Аниконова, в которой показано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента, а вторая является обычной задачей Коши для одномерного параболического уравнения. Доказано существование и единственность прямой задачи с данными Коши при помощи метода слабой аппроксимации. Доказана однозначная разрешимость обратной задачи в малом временном интервале.

2. Рассмотрена обратная задача с данными Коши для системы многомерных параболических уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты при дифференциальном операторе второго порядка по выделенной переменной и сумме младших членов. Начальные данные заданы в виде произведения двух функций, зависящих от разных переменных. Для сведения обратной задачи используется подход, аналогичный ранее предложенному для уравнений в работе Ю.Е. Аниконова. В настоящей диссертации алгоритм получил развитие на случай системы многомерных параболических уравнений специальной структуры. Для вспомогательных прямых и исходной обратной задачи получены достаточные условия существования и единственности решения в малом временном интервале.

3. Исследованы задача Коши для системы двух одномерных нагруженных параболических уравнений специального вида, связанных по младшим членам и система одномерных нагруженных уравнений составного типа (одно из уравнений параболическое) с данными Коши. К системам такого типа сводятся линейные и полулинейные коэффициентные обратные задачи для систем одномерных параболических уравнений и обратные задачи для систем составного типа. Доказаны достаточные условия существования решения прямых задач. Полученные условия помогут ускорить и упростить известный алгоритм исследования обратных задач.

4. Для исследованных задач построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и соответствующих им решений.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах из Перечня ВАК

[1] Фроленков, И. В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. — 2012. — Т. 5. — №1. — С. 122–131.

[2] Фроленков, И. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15. – № 2. – С. 139–146.

[3] Romanenko, G. V. A representation of solution of the identification problem of the coefficients at second order operator in the multi-dimensional parabolic equations system / G. V. Romanenko. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2014. — V.7. — №1. — P. 100–111.

[4] Фроленков, И. В. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2014. — Т. 17. — №1. — С.135–148.

Прочие публикации

[5] Романенко Г.В. Представление решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И. В. Фроленков // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2010. — С.63.

[6] Романенко Г.В. О представлении решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко // Труды XLIII Краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам. - Красноярск. — ИПК СФУ. — 2010. — С.97 – 101.

[7] Романенко Г.В. Представление решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И. В. Фроленков // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2011. — С. 60.

[8] Романенко Г.В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Г.В. Романенко // Материалы VII Всероссийской научной студенческой конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 50-летию первого полета человека в космос. — Изд-во СФУ. — Красноярск. — 2011. — С.69 – 73.

[9] Фроленков, И. В. Некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер, Г. В. Романенко // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко: тезисы докладов. — Новосибирск, 2011. — С. 127–128.

[10] Романенко Г.В. О представлении решения некоторых обратных задач для систем многомерных параболических уравнений / Г.В. Романенко // М75 Молодёжь и наука: сборник материалов VIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 155-летию со дня рождения К.Э.Циолковского [Электронный ресурс] № заказа 7880/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2012.

[11] Романенко, Г. В. О представлении решения обратной задачи для системы двумерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Тезисы Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012 г. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 103–104.

[12] Романенко, Г. В. О представлении решения обратной задачи для системы многомерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // VII Всесибир-

ский конгресс женщин-математиков (посвящается Софье Васильевне Ковалевской): Материалы Всероссийской научной конференции, 2 — 4 октября 2012 г. / Под ред. Л.И. Покидышевой, Красноярск: СибГТУ, 2012. — С.196 – 199.

[13] Романенко, Г. В. О решении одной обратной задачи для системы многомерных параболических уравнений / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / сост. Р.К.Губайдуллина, под ред. Ф.Г.Авхадиева и др. - Казань: Издательство Казан. матем. об-во, 2012. — Т. 45.: Лобачевские чтения — 2012: материалы XI молодежной научной школы-конференции. — С.170 – 172.

[14] Романенко, Г. В. О существовании решения системы одномерных нагруженных уравнений специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска [Электронный ресурс] № заказа 2394/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск : Сиб. федер. ун-т. — 2013.

[15] Романенко, Г. В. О существовании решения системы одномерных параболических нагруженных уравнений с данными Коши / Г. В. Романенко // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. - Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2013. — С. 100.

[16] Романенко, Г. В. Об одном подходе к приведению обратных задач специального вида для параболических уравнений и систем к прямым / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Тезисы докладов пятой международной молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 8 – 13 октября, 2013 г.). — Новосибирск: Сибирское научное издательство. — 2013. — С. 77.

[17] Романенко, Г. В. О существовании решения систем составного типа специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко, И. В. Фроленков // Труды Математического центра им. Н.И.. Лобачевского: материалы двенадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2013» (Казань, 24-29 октября, 2013 г.) .- Казань: Казан. ун-т, 2013. - Т. 47.- С.143 - 145.

[18] Фроленков, И. В. О существовании решения систем нагруженных дифференциальных уравнений специального вида с данными Коши / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Материалы международной конференции, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция» (Новосибирск, 18-24 августа 2013 г.) — С. 280.

[19] Frolenkov, I. V. On existence of Cauchy problems solutions for two-dimensional loaded parabolic equations and systems of special form / I. V. Frolenkov, G. V. Romanenko //

Справочник конференции «Математические и информационные технологии, МИТ-2013» (Врнячка Баня, Сербия, 5–8 сентября 2013 г. Будва, Черногория, 9–14 сентября 2013 г.) — С.85

[20] Романенко, Г. В. О существовании решения системы двух многомерных нагруженных параболических уравнений специального вида с данными Коши / Г. В. Романенко // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края, [Электронный ресурс], № заказа 1644/отв. ред. О.А.Краев - Красноярск: Сиб. федер. ун-т. — 2014.

[21] G. V. Romanenko, I. V. Frolenkov. On existence of Cauchy problems solutions for loaded parabolic equations and systems of special form // Zbornik radova Konferencije MIT 2013: Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematicki fakultet; Novosibirsk: Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014 (Kraljevo: Ofsetpres). — P. 573 – 579.

[22] Frolenkov I. V. On Solvability of Some Special Systems of One-Dimensional Loaded Parabolic Equations and Composite-Type Systems with Cauchy Data / I. V. Frolenkov, G. V. Romanenko // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2014. — V. 8. — №. 2. — P. 196-207.

[23] Романенко Г. В. О существовании решения системы составного типа специального вида с данными Коши [Электронный ресурс] / Г. В. Романенко // П827 Проспект Свободный – 2015: материалы науч. конф., посвященной 70-летию Великой Победы (15-25 апреля 2015 г.); отв. ред. Е. И. Костоглодова. – Электрон. дан. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. – С. 19 – 22.