Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

РЕЗАНОВА ЕКАТЕРИНА ВАЛЕРЬЕВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА

Специальность 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Гончарова О.Н.

Барнаул – 2018

Оглавление

Введение

Конвективные течения играют значительную роль как в природных, так и технологических процессах. Многие из них достаточно сложны для изучения в связи с наличием большого количества факторов, влияющих на характер течений. Одним из них является наличие тепло- и массопереноса через границы раздела. При математическом моделировании конвективных течений в данной работе эти процессы изучаются как по отдельности, так и совместно.

Несмотря на длительную историю исследований конвективных течений, развитие наукоемких технологий, которые применяются в пленочных испарителях, тепловых трубах, двухфазных системах охлаждения и др., а также новые физические эксперименты, проводимые в условиях нормальной и пониженной гравитации, постоянно расширяют круг задач, связанных с математическим моделированием конвекции и требующих более полного и точного описания явлений тепло- и массопереноса [11]. Среди таких задач выделяются исследования течений при наличии испарения/конденсации, которые все еще остаются не до конца изученными. Потребность в теоретическом изучении конвективных течений жидкостей и сопутствующих потоков газа в условиях испарения или конденсации на границе раздела вызвана необходимостью определения концепций планируемых экспериментов и прогнозирования их исходов, а также ввиду широкого круга прикладных задач.

Конвективные течения жидкостей и спутных потоков газа в условиях испарения или конденсации на границе раздела изучаются экспериментально и теоретически в [48, 49, 52, 88, 100, 102, 107, 110, 131]. Важной мотивацией для развития теории конвекции в областях с границами раздела послужили эксперименты, посвященные изучению конвекции в неподвижном и движущемся слое жидкости под действием сухого и влажного потока газа [48,49,99,104,107]. Пристальное внимание уделяется измерению массовой скорости испарения жидкости с границы раздела [47].

Особый интерес вызывают задачи конвекции жидкостей с учетом испарения, решаемые в рамках классических постановок задач для уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости и их приближений Обербека—Буссинеска [5, 18, 35, 82, 119]. Система уравнений Обербека—Буссинеска для описания конвективных течений является достаточно сложной не только ввиду ее нелинейности и высокого порядка, но и потому, что не относится к какому-либо классическому типу (см., например, [61]). Процесс диффузии пара (пассивной примеси) в средах, представляющих собой смесь газа и паров жидкости, изучается на основе уравнения диффузии, которое является следствием законов Фика и более общего закона Максвела—Стефана, описывающего диффузию многокомпонентной смеси [5,34]. Законы Фика нашли строгое экспериментальное подтверждение в [75] при изучении растворов слабых концентраций (см. также [58]). Это также относится к взаимной диффузии различных газов [73].

Конвективные течения в двухслойной системе "жидкость — газ", т.е. при наличии границы раздела, интенсивно изучаются в настоящее время аналитически и численно [5, 74, 97, 98, 129, 130]. В работах [5, 83, 117] и [55,77] заложены основы и представлены уточненные математические модели для теоретического исследования новых задач конвекции. Разработке и обоснованию математических моделей для изучения течений с учетом процессов тепло- и массопереноса на границах раздела посвящены работы [43,84,96–98,105,111]. Обзор используемых в настоящее время подходов и альтернативных моделей для описании испарительной конвекции представлен в [11].

Исследование математических моделей динамики жидкостей в областях с границами раздела предполагает построение точных решений, имеющих особую ценность. Они дают возможность достаточно быстро проанализировать степень влияния различных физических факторов на характер течений и интенсивность испарения либо конденсации. Точные решения задач с учетом тепломассопереноса на границе раздела позволяют предсказать и объяснить результаты физических экспериментов [31,32,48,49]. Изучение решений специального вида для описания двухслойных или многослойных течений жидкостей в бесконечных каналах с границами раздела вызывает большой интерес [6,90,91,106,118]. Немаловажную роль в динамике течений жидкости, содержащей примеси, играют взаимно обратные эффекты Соре (термодиффузии) и Дюфура (диффузионной теплопроводности) [5,7,53,54,69]. Первый из них связан с молекулярным переносом вещества при наличии градиента температур [17,33], а второй определяет возникновение разности температур вследствие разности концентраций компонентов примеси [17,33,57]. Эффект Дюфура проявляется при достаточно больших градиентах концентрации примеси в среде [17], вследствие чего в некоторых случаях им пренебрегают. В средах, представляющих собой смесь инертного газа и пара, он должен быть принят во внимание, поскольку в газах этот эффект может достигать нескольких градусов Цельсия, тогда как в жидкостях — меньше тысячных градуса (см. [17,33,57]). Точные решения уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности представлены в статьях [31,32,64,128].

В монографиях [5,69] проводится математическое моделирование течений в бинарных смесях на основе точных решений уравнений термодиффузионного движения, исследуются групповые свойства уравнений. Известными решениями, описывающими конвекцию в бесконечном горизонтальном слое со свободной границей под действием продольного градиента температуры и поперечного поля силы тяжести, являются обобщения решения Бириха [6,12]. Трехмерный аналог данного решения представлен в работе [60], где изучена групповая природа решения Бириха (см. также [90]).

Линейная зависимость температуры от одной из продольных координат при построении решений уравнений Обербека—Буссинеска рассматривалась впервые в [56]. Решения, которые могут быть названы обобщениями решения Остроумова—Бириха для задачи с испарением, изучаются в работах [28, 76, 94]. В строгом смысле подобные решения не могут быть названы точными, в частности, из-за бесконечности области течения. Однако решение типа Остроумова—Бириха [12] уравнений Обербека—Буссинеска нашло экспериментальное и численное подтверждение в работе [40].

По-видимому, впервые стационарная конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением на основе точного решения изучалась в работе [76]. Исследования проводились с учетом влияния концентрационных и температурных эффектов на процесс. Авторами получены зависимости количества жидкости, испаряющейся через границу раздела, и концентрации жидкости на этой границе от горизонтального градиента температуры. Работы [25, 26, 28, 31, 32, 64, 89, 94] содержат не только примеры точного решения для описания двухслойных течений с испарением на термокапиллярной границе раздела, но и замечания, касающиеся принципиальной важности учета эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности и типа граничных условий для концентрации пара на твердой стенке канала. Двухслойные течения с испарением с учетом эффекта Дюфура в газопаровой среде в условиях замкнутости потоков в верхнем и нижнем слоях изучены в [25, 26, 94]. В статье [28] представлено точное решение для описания двухслойных течений в случае заданного расхода газа. Отметим, что в [89] рассматривался случай жидкости с аномальным термокапиллярным эффектом. Сравнение результатов аналитических расчетов по испарению жидкости и экспериментальных данных представлено в [31, 32, 108].

Важным вопросом при изучении задач конвекции является исследование устойчивости получаемых точных решений. В работе [13] исследуется взаимодействие процессов тепло- и массопереноса в задаче об устойчивости механического равновесия двухслойной системы несмешивающихся жидкостей с растворенной в них третьей компонентой. Влияние продольных градиентов температуры на внешних стенках двухслойных систем с учетом сил Марангони на устойчивость течения было исследовано в [9]. Устойчивость точных решений, полученных в работах [28,32,79], изучалась в [10,66,67,78]. Показано, что длинноволновая асимптотика для декремента определяется из характеристик движения, все возникающие в системе длинноволновые возмущения затухают монотонно и тепловой механизм неустойчивости не является потенциально наиболее опасным.

В случае, когда течение жидкости сопровождается потоком газа, испарение, дополнительные касательные напряжения, термокапиллярный эффект могут оказывать достаточно сильное влияние на характер физического процесса. Поэтому при моделировании процессов тепло- и массопереноса одним из наиболее важных моментов является формулировка условий на границе раздела [43, 84, 97, 98]. В [5] представлен подробный вывод условий на свободной границе, являющихся следствием законов сохранения массы, импульса и энергии; используются дополнительные гипотезы, соотношения дифференциальной геометрии, классической теоремы переноса и ее поверхностного аналога. При математическом моделировании течений жидкостей с учетом массопереноса через термокапиллярную границу раздела за счет испарения осуществляется обобщение кинематического, динамического и энергетического условий на свободной поверхности. Граничные условия с учетом испарения выведены на основе интегральных законов сохранения в [84] с использованием статистической теории и без предположения о непрерывности температуры и касательных скоростей и в [43] в предположении о диффузионном потоке пара на границе раздела.

Течения жидкости с учетом испарения изучаются в приближении тонкого слоя [4, 27, 29, 30, 37, 38, 85, 86, 101, 103, 113, 115, 120, 132, 133]. Двумерная длинноволновая модель испаряющегося тонкого слоя жидкости, стекающего по неоднородно нагретой подложке, рассматривается в [113,114]. Локальный поток массы здесь определяется с помощью уравнения Герца—Кнудсена на границе раздела. Пленка вязкой жидкости, стекающая по наклонной нагретой поверхности, изучается в [103] в трехмерном случае. Данная задача решается в приближении теории смазки (lubrication approximation), при этом учитываются капиллярность, гравитация и испарение, и изучается влияние испарения на определенные типы неустойчивости (fingering instability).

Подробное описание задач, решаемых в приближении тонкого слоя, включая моделирование течений испаряющихся пленок жидкости и конденсируемых слоев, содержится в [120]. Предполагается, что однокомпонентная жидкость течет по твердой плоской поверхности, нагретой до температуры, которая превышает температуру насыщения при заданном давлении пара, либо по подложке, температура которой ниже, чем температура насыщения при заданном давлении пара. Скорость частиц пара предполагается достаточно малой, что позволяет считать пар несжимаемой жидкостью. В работах [37, 115] рассматривается математическая модель процесса стекания тонкой пленки жидкости по вертикальной стенке с учетом конденсации и испарения на границе раздела. Построены семейства точных обобщенных решений, описывающие эволюцию волн на поверхности стекающей пленки.

Течения тонкого слоя жидкости с учетом испарения на границе раздела часто описываются системой уравнений Навье—Стокса и переноса тепла [27, 29]. Однако моделирование подобных течений может быть проведено и на основе классических уравнений Обербека—Буссинеска, т.е. в случае, когда принимается во внимание тепловая гравитационная конвекция [30, 95, 123]. В [95] представлено сравнение результатов численных экспериментов, полученных в рамках уравнений Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска при различной интенсивности гравитации.

В настоящее время активно исследуются задачи о движении неустановившихся течений в плоских слоях со свободными границами [1–3,59,62,122].

В работе [122] представлены математические модели деформации вязкого слоя жидкости термокапиллярными силами в плоском и трехмерном случае, исследована разрешимость поставленных начально-краевых задач. Кроме того построены частично инвариантные решения специального вида исходной системы уравнений. При этом на свободных границах слоя задавалось квадратичное по продольной координате распределение температуры. Свободные границы остаются параллельными плоскостями во все моменты времени, расстояние между ними меняется, а задача сводится, в итоге, к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений. В [2] изучено точное решение, описывающее динамику утончающегося со временем плоского слоя идеальной жидкости, проанализирована его устойчивость относительно малых возмущений, дана физическая интерпретация решения. Групповая природа подобных решений исследовалась в [14]. Впервые численное моделирование деформирования вязкого слоя жидкости со свободными границами приведено в работе [62].

В [92,93] численно исследуются условия растекания и разбухания слоя, возможные механизмы контроля деформации слоя. Свободные границы при этом подвергаются действию дополнительных касательных напряжений со стороны внешней среды. Нестационарная двумерная задача динамики теплопроводного слоя вязкой жидкости изучалась в работах [16, 22, 24]. Там же разработан численный алгоритм нахождения распределения температуры в слое. Структура теплового поля в свободном слое в трехмерном случае анализировалась в работах [126, 127].

Исследование формирования сферических слоев жидкости, содержащих внутри пузырек газа, связано с изучением свойств так называемых микробаллонов. Микробаллоны или микросферы используются, например, в качестве сенсибилизаторов эмульсионных взрывчатых веществ [8]. Также свое применение они находят как элементы сферопласта — композиционного материала из полимерной матрицы с пустотелыми сферическими включениями, применяемого в строительстве в качестве упрочняющей добавки и наполнителя [39].

Ряд работ посвящен математическому моделированию динамики жидкой сферической оболочки, содержащей пузырек газа [19–21, 45, 72]. В [19] в качестве математической модели использовалась система уравнений Навье—Стокса, переноса тепла и диффузии, доказана разрешимость данной задачи в малом по времени. В [20] построен численный алгоритм решения задачи в диффузионном приближении. Для теплового приближения задачи доказаны существование и единственность решения [21]. Продолжением данных работ стали [36,63,125]. В [125] представлены результаты численного исследования динамики сферического слоя с учетом процессов тепло- и массопереноса.

Целью данной работы является аналитическое и численное исследование конвективных течений жидкостей в областях с границами раздела, сопровождающихся тепло- и массопереносом через межфазные границы.

Научная новизна определяется следующими результатами:

- Построены точные решения системы уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска, описывающие двухслойные течения с испарением на термокапиллярной границе раздела с учетом эффектов Соре и Дюфура в газопаровой среде. Получено условие возникновения возвратных течений вблизи границы раздела, характеризующееся линейной зависимостью продольного градиента температуры на границе раздела от расхода газа. Выделяются три класса течений: чисто термокапиллярное, смешанное и пуазейлевское – в зависимости от доминирующих сил. Для разных типов рабочих сред изучено влияние расхода газа, продольных градиентов температуры, эффекта термодиффузии на структуру течения, распределение тепла и концентрации пара в двухслойной системе. Увеличение расхода газа в верхнем слое системы приводит к увеличению значений функции продольной скорости. Построены и качественно исследованы зависимости интенсивности испарения от величин продольных градиентов температуры, толщины жидкого слоя и расхода газа. Проведено сравнение аналитических расчетов течения жидкости с учетом испарения с результатами экспериментов; получены как качественные, так и количественные совпадения. Математическое моделирование двухслойных течений с испарением выполнено для различных типов условий для концентрации пара и температуры на твердых границах.

- Построены математические модели течения тонкого слоя жидкости по наклонной подложке на основе уравнений Навье—Стокса и переноса тепла или уравнений конвекции Обербека—Буссинеска, а также уточненных условий на границе раздела с учетом испарения. Получены эволюционные уравнения, определяющие положение свободной границы, построен алгоритм их численного решения. Исследованы процесс стекания жидкого слоя по наклонной нагреваемой подложке при умеренных числах Рейнольдса и влияние сил плавучести на динамику слоя. Показано, что учет даже одного дополнительного слагаемого в энергетическом условии на границе раздела меняет как качественную, так и количественную картину течения.
- Проведено аналитическое и численное моделирование процесса переноса тепла в свободном слое вязкой несжимаемой жидкости на основе точных решений уравнений Навье—Стокса (в случае растекания слоя). Построен численный алгоритм решения трехмерной задачи о деформации слоя под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений на свободных (движущихся) границах, включающий алгоритмы расчета компонент скорости и распространения температуры в "центральной" части слоя. Исследовано влияние различных типов граничного теплового режима и дополнительных касательных напряжений на особенности динамики и пере-

носа тепла. Показана зависимость интенсивности динамики жидкого слоя при сонаправленном действии тангенциальных и термокапиллярных сил.

- Проведено математическое моделирование динамики сферически симметричного слоя вязкой несжимаемой жидкости, содержащего газовый пузырек в условиях кратковременной невесомости. Численно исследована задача о формировании сферического микробаллона в зависимости от внешнего теплового режима, давления и начальной плотности газа. Проведено сравнение численных результатов, полученных при решении задачи в полной, тепловой и квазиизотермической постановках. Показано, что полная постановка описывает наиболее интенсивную динамику сферического слоя. Снижение внешнего давления или увеличение начальной плотности газа в пузырьке приводит к более интенсивному увеличению размеров слоя. Численные эксперименты проведены для задачи о формировании микробаллона жидкого стекла.

Теоретическая и практическая значимость. Работа вносит вклад в теорию конвективных течений жидкостей и явлений тепломассопереноса на границах раздела. Точные решения специального вида позволяют оценить влияние испарения, термодиффузионных эффектов, граничного теплового режима, расхода газа на характер и структуру течений. Проведенные исследования позволяют понять роль отдельных механизмов (сил плавучести, эффектов испарения, затрат энергии для преодоления деформации поверхности раздела термокапиллярными силами, расхода тепла на парообразование, совершаемой при испарении работы вследствие изменения удельного объема) в формировании определенных типов течений тонких жидких пленок по нагретой подложке. Задача о формированиии сферических микробаллонов находит важное применение при разработке композиционных материалов (сферопласта) и сенсибилизаторов эмульсионных взрывчатых веществ. Полученные результаты могут быть использованы при разработке экспериментов по исследованию совместных конвективных течений жидкости и спутного потока газа в открытом и замкнутом слое, в том числе сопровождающихся испарением, а также при анализе их результатов.

Методы исследования. В работе применяются методы общей теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, гидродинамики. Для построения точных решений использовался математический аппарат общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного решения задач применялись конечно-разностные методы стабилизирующей поправки и Рунге-Кутты, численные алгоритмы типа «предиктор—корректор» решения интегро-дифференциальных уравнений. При реализации конечно-разностных схем использовались методы прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений, включая разработанный вариант метода прогонки с параметрами. Для проведения численных расчетов использованы авторские коды на языке FORTRAN.

Основные положения, выносимые на защиту: Автор диссертационной работы защищает:

1. результаты исследования двухслойных конвективных течений с испарением на основе новых точных решений, результаты классификации течений, результаты сравнения аналитических и экспериментальных расчетов по испарению жидкости на границе раздела на основе сравнения распределений массовой скорости испарения жидкости, полученных в настоящей работе, с известными данными экспериментов;
2. результаты численного исследования стекания тонкого слоя жидкости по наклонной нагретой подложке, сравнение результатов, полученных с использованием различных математических моделей;
3. результаты численного исследования растекания свободного слоя жидкости под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений;

4. результаты численного моделирования динамики сферического жидкого слоя, содержащего растворенный газ и газовый пузырек, в рамках полной математической модели с учетом диффузионных и тепловых процессов и ее квазиизотермического приближения.

Достоверность результатов обеспечивается корректной постановкой задач, использованием физически обоснованных математических моделей для описания конвективных течений жидкостей, сравнением результатов, полученных в данной работе, с теоретическими результатами других авторов, сопоставлением с результатами физических экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях, семинарах и съездах:

— XVIII, XIX, XX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2013, 2015, 2017);

— XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);

— Марчуковских научных чтениях (Новосибирск, 2017);

— Всероссийской научной конференции с элементами школы молодых ученых "Теплофизика и физическая гидрогазодинамика" (Ялта, Республика Крым, 2016);

— International Symposium and School of Young Scientists "Interfacial Phenomena and heat transfer" (Novosibirsk, Russia, 2016);

— Sixth, Seventh International Marangoni Association Conferences (Haifa, Israel, 2012; Wien, Austria, 2014);

— Sixth International Simposium "Bifurcations and instabilities in fluid dynamics" (ESPCI, PARIS-FRANCE, 2015);

— Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 2014);

— Всероссийской конференции "XXXI Сибирский теплофизический семинар" (Новосибирск, 2014);
— VIII международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Новосибирск, 2015);
— V, VI Всероссийских конференциях с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения" (Бийск, 2014; Барнаул, 2017);
— XIII, XIV Всероссийских школах-конференциях "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Новосибирск, 2014, 2016);
— Международной молодежной научной конференции "Тепломассоперенос в системах обеспечения тепловых режимов энергонасыщенного технического и технологического оборудования" (Томск, 2016);
— V, VI, VII Международных молодежных научно-практических конференциях с элементами научной школы "Прикладная математика и фундаментальная информатика" (Омск, 2017, 2018).
— Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководитель семинара: чл-корр. РАН, профессор В.В. Пухначев);
— Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Численные методы в механике сплошной среды" (руководители семинара: доктор физ-мат. наук А.Л. Куперштох и доктор физ-мат. наук, В.В. Остапенко);
— Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Математические модели механики сплошной среды" (руководители семинара: чл-корр. РАН, профессор П.И. Плотников и доктор физ-мат. наук В.Н. Старовойтов);
— Семинаре Института математики СО РАН "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики" (руководитель семинара: доктор физ-мат. наук, профессор А.М. Блохин);
— Объединенном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и Сибирского федерального университета "Математическое моделиро-

вание в механике" (руководитель семинара: доктор физ-мат. наук, профессор В.К. Андреев).

Исследования по теме диссертационной работы выполнялись в рамках следующих проектов Российского фонда фундаментальных исследований: № 14-08-00163 "Теоретическое и экспериментальное исследование процессов тепломассопереноса в двухслойных конвективных течениях с испарением"; № 17-08-00291 "Неклассические задачи термокапиллярной конвекции в двухслойных системах"; № 18-41-242005 "Теоретическое и экспериментальное исследование процессов тепломассообмена в двухфазных системах термического контроля".

Личный вклад. Все результаты, представленные в диссертации, получены лично автором или при его непосредственном участии. Автором проведены аналитические и численные расчеты, их обработка, сравнение с экспериментальными данными. Интерпретация полученных результатов и подготовка основных публикаций проводилась автором самостоятельно либо совместно с научным руководителем и соавторами.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 основных статей, входящих в издания из перечня ВАК [10, 28, 31, 32, 63–67, 89, 94, 123, 124, 126], из них 10 статей в журналах, включенных в международные базы цитирования Scopus и Web of Science.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и пяти приложений. **Общий объем диссертации 158 страниц, включая 34 рисунка, 9 таблиц. Список литературы содержит 133 наименования.**

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, сформулированы цели исследования, приводятся общая характеристика работы и литературный обзор.

В **первой главе** изучается двухслойное течение жидкости и смеси газа и пара в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками с учетом процесса испарения жидкости на термокапиллярной границе раздела. При описании течения газопаровой смеси в верхнем слое учитываются эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии.

В разделе 1.1 осуществляется построение новых точных решений типа Остроумова—Бириха [12,56]. В качестве математической модели течения используется система уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска. В верхнем слое системы определяющие соотношения дополняются уравнением диффузии для описания процесса переноса пара, понимаемого как пассивная примесь.

Раздел 1.2 посвящен формулировке граничных условий задачи. На твердых границах выполняются условия прилипания, на нижней стенке канала задано линейное относительно продольной координаты распределение температуры. На верхней границе рассматриваются различные типы граничных условий для функций концентрации пара и температуры. На термокапиллярной границе раздела считаются выполненными кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, соотношения баланса массы теплопереноса с учетом эффектов Соре и Дюфура. Концентрация насыщенного пара определяется с помощью следствия уравнений Менделеева—Клапейрона и Клапейрона—Клаузиуса. В верхнем слое системы полагается заданным расход газа.

В разделе 1.3 проведено исследование влияния различных типов условий для температуры и концентрации пара, а также эффекта термодиффузии на профили течения и распределение температуры и концентрации пара. Показаны изменения зависимостей продольных градиентов температуры друг от друга при смене типа граничного условия для концентрации пара или учете эффекта термодиффузии.

В разделе 1.4 на примере рабочих сред "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух" изучено влияние продольных градиентов температуры, расхода газа, типа системы "жидкость — газ", заполняющей канал, на структуру течения, распределение тепла в системе и концентрацию пара в верхнем слое канала. Получено условие возникновения возвратных течений вблизи границы раздела в виде явной зависимости скорости на границе раздела от расхода газа при линейном распределении температуры на верхней стенке канала и условии полного поглощения пара. Показана смена типа течения с термокапиллярного на пуазейлевский при уменьшении продольного градиента температуры на границе раздела сред. Исследована зависимость интенсивности испарения жидкости от продольного градиента температуры на границе раздела, толщины жидкого слоя и расхода газа; проведено сравнение аналитических результатов с экспериментальными данными. Показано, что существуют такие значения продольных градиентов температуры, при которых массовая скорость испарения жидкости имеет локальный максимум относительно толщины жидкого слоя, что доказано экспериментально [48, 49, 107]. Выявлено, что аналитические и экспериментальные результаты имеют качественно одинаковый характер: рост массовой скорости испарения с ростом расхода газа, и существуют такие значения продольных градиентов температуры, при которых результаты теоретических и экспериметальных исследований количественно близки.

Во второй главе изучается тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающий по наклонной, неравномерно нагретой подложке в условиях спутного потока газа. Течение сопровождается испарением на термокапиллярной границе раздела. Динамические процессы в газе не принимаются во внимание (односторонняя модель), вместе с тем, касательные напряжения, создаваемые газом, могут учитываться на границе раздела. Математические модели течений тонких слоев испаряющейся жидкости основаны на длинноволновом приближении основополагающих уравнений.

В разделе 2.1 предложена математическая модель течения тонкого слоя жидкости на основе системы уравнений Навье—Стокса и уравнения переноса тепла, а также кинематического, динамических и энергетического условий на термокапиллярной границе сформулированных в общем виде. На твердой непроницаемой подложке выполнено условие прилипания для скорости жидкости, и задано неоднородное распределение температуры. Локальный поток массы через границу раздела определяется с помощью уравнения Герца—Кнудсена. Построены аналитические решения задач для главных и первых членов разложений искомых функций по степеням малого параметра ε (отношение поперечной характерной длины к продольной). Проведен параметрический анализ задачи. Получено эволюционное уравнение для определения толщины слоя жидкости.

Раздел 2.2 посвящен моделированию стекания жидкого слоя на основе уравнений конвекции Обербека—Буссинеска и полных условий на границе раздела (если $Re = O(1)$). Толщина слоя жидкости в данном случае определяется, исходя из эволюционного уравнения, являющегося следствием кинематического условия на границе раздела.

В разделе 2.3 представлен алгоритм численного решения эволюционного уравнения, определяющего положение границы раздела. Решается тестовая задача на промежутке $[-L; L]$. На границах расчетной области полагаются выполненными периодические условия. Для численного решения уравнения для толщины жидкого слоя применяется неявная конечно-разностная схема, и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений методом пятиточечной прогонки и прогонки с параметрами.

В разделе 2.4 содержатся результаты численных исследований течений тонкого слоя этанола с испарением. Продемонстрировано влияние слагаемого, отвечающего затратам энергии на деформацию поверхности раздела термокапиллярыми силами на изменение толщины жидкого слоя. Представлено сравнение результатов моделирования течения тонкого слоя, проводимого с помощью математических моделей, основанных на уравнениях Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска. В случае, когда в качестве математической модели используется система Обербека-Буссинеска, наблюдается более интенсивное утоньшение слоя жидкости с течением времени.

Третья глава посвящена исследованию динамики слоя вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости со свободными границами и распределения тепла в нем в трехмерном случае. Границы слоя являются плоскими, движущимися параллельными поверхностями, подверженными неоднородному нагреву и действию термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений, индуцируемых внешней средой.

В разделе 3.1 приводится постановка задачи на основе уравнений Навье—Стокса и переноса тепла. На свободных подвижных верхней и нижней границах выполнены кинематическое и динамические условия, учитывающие тангенцальные напряжения, индуцируемые внешней средой, а также квадратичное относительно продольных координат распределение температуры. Задача дополнена начальными условиями, определяющими состояние слоя в момент времени. Поле скоростей определено на основе точных решений уравнений Навье—Стокса, искомые функции удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений. Функция, задающая положение свободной границы, также определяется, исходя из интегро-дифференциального уравнения [122].

Раздел 3.2 посвящен описанию численного алгоритма определения положения свободной границы с помощью двухэтапного метода "предиктор—корректор". Для нахождения фунций, задающих поле скоростей, строится трехшаговый алгоритм "предиктор-корректор" [62].

Численно решается задача о нахождении распределения температуры в бесконечном слое. Задача сводится к расчету функции температуры в параллелепипеде. На искусственно введенных "вертикальных" торцах расчетной области исследования заданы "мягкие" условия для температуры. В разделе 3.3 представлена схема численного расчета температуры в слое, основанная на методе стабилизирующей поправки, второго порядка аппроксимации.

Раздел 3.4 содержит численные исследования динамики жидкого слоя и распределения тепла в нем на примере жидкости типа этанол. Исследовано влияние различных зависимостей от времени функций, определяющих граничный тепловой режим и дополнительные касательные напряжения на динамику слоя жидкости и распределение температуры в "центральной" части слоя.

Четвертая глава посвящена задаче о динамике сферической оболочки вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободными поверхностями и заключающей внутри себя газовый пузырек. Газ, растворенный в жидкости, представляет собой пассивную добавку, а сама жидкость с растворенным в ней газом есть вязкая несжимаемая жидкость. Вследствие условия невесомости рассматривается сферически симметричный процесс.

В разделе 4.1 представлена математическая модель процесса формирования сферического микробаллона, основанная на уравнениях Навье—Стокса, переноса тепла и диффузии в размерной постановке. На свободных границах выполнены кинематические и динамические условия, концентрация газа на границах связана с давлением вне области согласно закону Генри. Условие баланса энергии и условие теплообмена с внешней средой задаются на внутренней и внешней границах, соответственно. Внутри газового пузырька справедливо уравнение Менделеева-Клапейрона. Коэффициенты кинематической вязкости, поверхностного натяжения, диффузии, температуро- и теплопроводности, а также коэффициенты в законе Генри являются функциями, зависящими от температуры. В силу уравнения неразрывности осуществляется переход к новой функции скорости (скорости изменения объема). Раздел 4.2 содержит описание постановки задачи в безразмерном виде.

Алгоритм численного решения задачи изложен в разделе 4.3. Определение внутреннего радиуса сферического слоя, скорости изменения объема и плотности газа в пузырьке, являющихся искомыми функциями, осуществляется методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного нахождения распределения концентрации газа в жидкости и температуры осуществляется переход к задаче на плоскости лагранжевых координат. Данные функции вычисляются с помощью неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации для уравнений диффузии и переноса тепла, соответственно. Для реализации схемы используется метод прогонки (для нахождения функции температуры — метод прогонки с параметром, в качестве которого выступают значения температуры на внутренней границе слоя).

В разделе 4.4 рассматривается квазиизотермическая постановка задачи, когда диффузионные процессы полагаются преобладающими по сравнению с тепловыми. При этом сохраняется учет зависимости коэффициентов диффузии, кинематической вязкости, поверхностного натяжения и коэффициента в законе Генри от температуры.

Раздел 4.5 содержит результаты численных исследований по моделированию формирования сферического микробаллона жидкого стекла, содержащего пузырек углекислого газа в полной и квазиизотермической постановке. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием полной модели и результатов задачи, решенной без учета диффузии газа. Исследовано влияние на динамику сферического слоя внешнего давления и количества газа в пузырьке в начальный момент времени. Увеличение плотности газа в пузырьке в начальный момент времени способствует более интенсивному расширению сферического слоя. В случае, когда учитываются и диффузионные и тепловые процессы, функция внутреннего радиуса жидкого слоя принимает наибольшие значения. Тепловые процессы вносят больший вклад в расширение сферического слоя, чем диффузионные.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы. Приводится **список литературы**. **Приложение 1** содержит коэффициенты, определяющие зависимость массы испаряющейся жидкости от продольного градиента температуры на границе раздела сред и толщины жидкого слоя. В **Приложении 2** приведены аналитические результаты по исследованию влияния эффекта Соре на градиенты температуры и концентрации пара в двухслойной системе. В **Приложении 3** содержатся значения физико-химических параметров рабочих сред. **Приложения 4 и 5** включают в себя детали алгоритмов численного решения задач, рассматриваемых в главах 2 и 3, соответственно.

Глава 1. Стационарная модель конвективных течений в двухслойной системе жидкости и газа с учетом испарения

1.1. Постановка задачи

Рассматривается двухслойное течение однокомпонентной жидкости и газа (смеси газа и пара) в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми верхней и нижней стенками (см. Рис. 1.1). Для верхнего слоя, содержащего газ, пар является пассивной добавкой. Система координат выбрана таким образом, что вектор силы тяжести $\mathbf{g}$ направлен противоположно оси Oy ($\mathbf{g} = (0, -g)$). В качестве математической модели течения используется система уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска. При описании течения газопаровой смеси в верхнем слое учитываются эффект Дюфура (эффект диффузионной теплопроводности) [33,34] и эффект Соре (эффект термодиффузии) [5]. Система уравнений для нахождения скорости, температуры, концентрации пара и давления в стационарном случае записывается в следующем виде [5]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big), \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) + g(\beta T + \underline{\gamma C}), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \chi\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \underline{\delta\Big(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\Big)}\Big), \tag{1.4}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = D\Big(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \alpha\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big)\Big). \tag{1.5}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси Ox- и Oy декартовой системы координат, $\bar{p}$ — модифицированное давление (отклонение от гидростатического), которое задается выражением $\bar{p} = p - \rho\mathbf{g}\ \cdot\mathbf{x} = p + \rho g y$, p — давление,

T — температура, C — концентрация пара в газе, ρ — плотность, ν, χ, D — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии, соответственно, α и δ характеризуют эффекты Соре и Дюффура, β — коэффициент теплового расширения, γ — концентрационный коэффициент плотности. Подчеркнутые слагаемые в уравнениях (1.2) и (1.4), а также уравнение (1.5) учитываются только в верхнем слое системы.

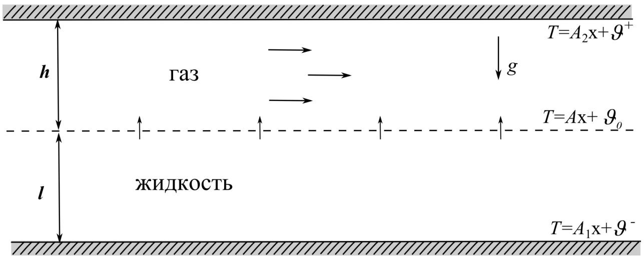


Рис. 1.1. Геометрия области течения.

Построим решение уравнений (1.1)-(1.5), где ненулевыми являются только продольные компоненты скорости, поперечные же равны нулю. Подобное решение является точным решением типа Остроумова—Бириха [12, 56]:

$$u_i = u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), \quad C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y), \quad (1.6)$$

где a_j^i и b_j — некоторые постоянные, индекс i (нижний либо верхний), $i = 1, 2$, отвечает за принадлежность слою, заполненному жидкостью ($i = 1$) либо смесью газа и пара ($i = 2$).

Вследствие условия непрерывности температуры на границе раздела имеем: $a_1^i = A = const$ ($i = 1, 2$). Тогда выражение для нахождения функции температуры будет выглядеть следующим образом:

$$T_i = (A + a_2^i y)x + \vartheta_i(y). \quad (1.7)$$

1.1.1. Точные решения для описания течения жидкости в нижнем слое системы.

С учетом вида решений (1.6) система уравнений (1.1)-(1.5) запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_1}\bar{p}_{1\,x} = \nu_1 u_{1\,yy}, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\bar{p}_{1\,y} = g\beta_1 T_1, \tag{1.9}$$

$$u_1 T_{1x} = \chi_1 T_{1\,yy}. \tag{1.10}$$

Таким образом, для моделирования течения жидкости необходимо определить функции скорости, температуры и давления. Путем дифференцирования уравнения (1.9) по переменной y и дальнейшей подстановки результата в (1.8) можно получить выражение

$$\nu_1 u_{1\,yyy} = g\beta_1 T_{1\,x} \quad \text{или} \quad \nu_1 u_{1\,yyy} = g\beta_1(A + a_2^1 y).$$

Функция u_1 вычисляется путем последовательного интегрирования данного выражения по поперечной координате y:

$$u_1 = \frac{g\beta_1}{\nu_1}\Big(\frac{y^4}{24}a_2^1 + \frac{y^3}{6}A\Big) + \frac{y^2}{2}c_1 + yc_2 + c_3. \tag{1.11}$$

Таким образом, получено выражение для скорости в нижнем слое, содержащее три константы интегрирования c_i $(i = 1, 2, 3)$.

Пользуясь уравненем (1.10), можно определить функцию температуры в жидкости. С учетом (1.7) получим уравнение вида:

$$u_1(A + a_2^1 y) = \chi_1 \vartheta_{1\,yy}.$$

Таким образом, может быть определена функция ϑ_1, поскольку $\vartheta_{1\,yy}$ имеет вид:

$$\vartheta_{1\,yy} = \frac{1}{\chi_1}(A + a_2^1 y)\Big[\frac{g\beta_1}{\nu_1}\Big(\frac{y^4}{24}a_2^1 + \frac{y^3}{6}A\Big) + \frac{y^2}{2}c_1 + yc_2 + c_3\Big] =$$

$$= \frac{y^5}{24}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1} + \frac{y^4}{24}\Big\{\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1} + 4\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1}\Big\} + \frac{y^3}{6}\Big\{\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1} + 3\frac{c_1 a_2^1}{\chi_1}\Big\}+$$

$$+\frac{y^2}{2}\Big\{\frac{c_1A}{\chi_1}+2\frac{c_2a_2^1}{\chi_1}\Big\}+y\Big\{\frac{c_2A}{\chi_1}+\frac{c_3a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{c_3A}{\chi_1},$$

В результате интегрирования получим:

$$\vartheta_1=\frac{y^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1}+\frac{y^6}{720}\Big\{\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}+4\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}\Big\}+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1}+3\frac{c_1a_2^1}{\chi_1}\Big\}+$$

$$+\frac{y^4}{24}\Big\{\frac{c_1A}{\chi_1}+2\frac{c_2a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^3}{6}\Big\{\frac{c_2A}{\chi_1}+\frac{c_3a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^2}{2}\frac{c_3A}{\chi_1}+yc_4+c_5.$$

Здесь c_4, c_5 — произвольные константы. Тогда распределение температуры в нижнем слое системы определяется следующим образом (см. 1.6):

$$T_1=(A+a_2^1y)x+\frac{y^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1}+\frac{y^6}{720}\Big\{\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}+4\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}\Big\}+ \tag{1.12}$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1}+3\frac{c_1a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^4}{24}\Big\{\frac{c_1A}{\chi_1}+2\frac{c_2a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^3}{6}\Big\{\frac{c_2A}{\chi_1}+\frac{c_3a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^2}{2}\frac{c_3A}{\chi_1}+yc_4+c_5.$$

Интегрируя уравнение (1.8) и подставляя результат в уравнение (1.9), получаем выражение вида

$$\bar{p}_1=\rho_1\nu_1u_{1\,yy}x+\widetilde{c_1}(y). \tag{1.13}$$

С учетом (1.9), (1.11), (1.12) имеем:

$$\widetilde{c_1}'_y(y)=\rho_1g\beta_1\Big\{\frac{y^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1}+\frac{y^6}{720}\Big\{\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}+4\frac{g\beta_1Aa_2^1}{\nu_1\chi_1}\Big\}+$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1}+3\frac{c_1a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^4}{24}\Big\{\frac{c_1A}{\chi_1}+2\frac{c_2a_2^1}{\chi_1}\Big\}+\frac{y^3}{6}\Big\{\frac{c_2A}{\chi_1}+\frac{c_3a_2^1}{\chi_1}\Big\}+$$

$$+\frac{y^2}{2}\frac{c_3A}{\chi_1}+yc_4+c_5\Big\}.$$

Для удобства последующего изложения запишем $\widetilde{c_1}'_y(y)$ в виде:

$$\widetilde{c_1}'_y(y)=y^7k_7+y^6k_6+y^5k_5+y^4k_4+y^3k_3+y^2k_2+yk_1+k_0.$$

Интегрируя данное выражение по y, определим функцию $\widetilde{c_1}$:

$$\widetilde{c_1}(y)=\frac{y^8}{8}k_7+\frac{y^7}{7}k_6+\frac{y^6}{6}k_5+\frac{y^5}{5}k_4+\frac{y^4}{4}k_3+\frac{y^3}{3}k_2+\frac{y^2}{2}k_1+yk_0+\widetilde{c_3}.$$

Подставим $\widetilde{c_1}(y)$ в формулу (1.13). Тогда функция $\bar{p}_1$ приобретет вид:

$$\bar{p}_1 = \rho_1\nu_1\Big(\frac{y^2}{2}\frac{g\beta_1 a_2^1}{\nu_1} + \frac{g\beta_1 A}{\nu_1}y + c_1\Big)x+ \tag{1.14}$$

$$+\frac{y^8}{8}k_7 + \frac{y^7}{7}k_6 + \frac{y^6}{6}k_5 + \frac{y^5}{5}k_4 + \frac{y^4}{4}k_3 + \frac{y^3}{3}k_2 + \frac{y^2}{2}k_1 + yk_0 + \widetilde{c_3},$$

где коэффициенты k_i $(i = 0, 1, ..., 7)$ вычисляются следующим образом:

$$k_7 = \frac{1}{1008}\frac{(g\beta_1 a_2^1)^2\rho_1}{\nu_1\chi_1}, \quad k_6 = \frac{1}{144}\frac{(g\beta_1)^2\rho_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1},$$

$$k_5 = \frac{1}{120}\frac{g\rho_1\beta_1}{\chi_1}\Big(\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1} + 3c_1 a_2^1\Big), \quad k_4 = \frac{1}{24}\frac{g\rho_1\beta_1}{\chi_1}(c_1 A + 2c_2 a_2^1),$$

$$k_3 = \frac{1}{6}\frac{g\rho_1\beta_1}{\chi_1}(c_2 A + c_3 a_2^1), \quad k_2 = \frac{1}{2}\frac{g\rho_1\beta_1}{\chi_1}c_3 A, \quad k_1 = g\rho_1\beta_1 c_4, \quad k_0 = g\rho_1\beta_1 c_5.$$

1.1.2. Точные решения для описания течения жидкости в верхнем слое системы без учета эффекта Соре

Система уравнений, определяющих скорость, распределение температуры, концентрацию пара и давление в газопаровой смеси записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_2}\bar{p}_{2\,x} = \nu_2 u_{2\,yy}, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\rho_2}\bar{p}_{2\,y} = g\beta_2 T_2 + g\gamma C, \tag{1.16}$$

$$u_2 T_{2x} = \chi_2 T_{2\,yy} + \chi_2\delta C_{yy}, \tag{1.17}$$

$$u_2 C_x = D C_{yy}. \tag{1.18}$$

Динамика жидкости в верхнем слое определяется видом функции скорости u_2, которая находится из уравнений (1.15) и (1.16). Продифференцируем (1.15) по y, а (1.16) — по x и получим в результате уравнение для определения функции u_2:

$$\nu_2 u_{2\,yyy} = g(\beta_2 T_{2\,x} + \gamma C_x),$$

а, следовательно:

$$u_2 = \frac{g}{\nu_2}\Big\{\frac{y^4}{24}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^3}{6}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big\} + \bar{c}_1\frac{y^2}{2} + \bar{c}_2 y + \bar{c}_3. \tag{1.19}$$

где $\bar{c}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — произвольные постоянные.

Функция концентрации пара C определяется из уравнения (1.18). Учитывая вид функции C (см. (1.6)), перепишем уравнение (1.18):

$$u_2(b_1 + b_2 y) = D\phi_{yy}.$$

Поскольку u_2 известно и определяется выражением (1.19), то для ϕ имеем:

$$\phi = \frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\frac{b_2}{D}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^6}{720}\Big[\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4\frac{g}{\nu_2}\frac{b_2}{D}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] +$$
$$+ \frac{y^5}{120}\Big[\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3\frac{b_2}{D}\bar{c}_1\Big] + \frac{y^4}{24}\Big[\frac{b_1}{D}\bar{c}_1 + 2\frac{b_2}{D}\bar{c}_2\Big] +$$
$$+ \frac{y^3}{6}\Big[\frac{b_1}{D}\bar{c}_2 + \frac{b_2}{D}\bar{c}_3\Big] + \frac{y^2}{2}\frac{b_1}{D}\bar{c}_3 + y\bar{c}_6 + \bar{c}_7. \tag{1.20}$$

Подставляя (1.20) в формулу (1.6), определяющую вид C_2, получим следующее выражение для концентрации пара в верхнем слое системы:

$$C = (b_1 + b_2 y)x + \frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\frac{b_2}{D}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$
$$+ \frac{y^6}{720}\Big[\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4\frac{g}{\nu_2}\frac{b_2}{D}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] + \frac{y^5}{120}\Big[\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3\frac{b_2}{D}\bar{c}_1\Big] +$$
$$+ \frac{y^4}{24}\Big[\frac{b_1}{D}\bar{c}_1 + 2\frac{b_2}{D}\bar{c}_2\Big] + \frac{y^3}{6}\Big[\frac{b_1}{D}\bar{c}_2 + \frac{b_2}{D}\bar{c}_3\Big] + \frac{y^2}{2}\frac{b_1}{D}\bar{c}_3 + y\bar{c}_6 + \bar{c}_7. \tag{1.21}$$

Определив выражение для концентрации, находим распределение температуры T_2 с помощью уравнения (1.17). Ввиду того, что функции u_2 и C найдены (см. соотношения (1.19) и (1.21)), а функция T имеет вид, представленный в формуле (1.6), получим выражение для функции ϑ_2:

$$\vartheta_2 = \frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2} - \delta\frac{b_2}{D}\Big)(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$
$$+ \frac{y^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2} - \delta\frac{b_1}{D}\Big)(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2} - \delta\frac{b_2}{D}\Big)(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big\} +$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g}{\nu_2}\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)(\beta_2 A+\gamma b_1)+3\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_1\Big\}+\frac{y^4}{24}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_1+$$

$$+2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_2\Big\}+\frac{y^3}{6}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_2+\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_3\Big\}+$$

$$+\frac{y^2}{2}\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_3+y\overline{c}_4+\overline{c}_5. \tag{1.22}$$

Таким образом, распределение температуры T_2 в газопаровом слое имеет вид:

$$T_2=(A+a_2^2y)x+\frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)(\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)+$$

$$+\frac{y^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)(\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)+4\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)(\beta_2 A+\gamma b_1)\Big\}+$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g}{\nu_2}\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)(\beta_2 A+\gamma b_1)+3\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_1\Big\}+\frac{y^4}{24}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_1+$$

$$+2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_2\Big\}+\frac{y^3}{6}\Big\{\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_2+\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)\overline{c}_3\Big\}+$$

$$+\frac{y^2}{2}\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)\overline{c}_3+y\overline{c}_4+\overline{c}_5. \tag{1.23}$$

Выражение для давления $\bar{p}_2$ получаем, исходя из уравнений (1.15), (1.16). Интегрируя уравнение (1.15) по x, имеем выражение вида:

$$\bar{p}_2=\rho_2\nu_2 u_{2\,yy}x+\widetilde{c_2}(y).$$

Вычисляя $\bar{p}_{2y}$, получим:

$$\bar{p}_2=\rho_2\nu_2 u_{2\,yyy}x+\widetilde{c}'_{2y}(y)=\rho_2 g\beta_2 T_2+\rho_2 g\gamma C.$$

С учетом соотношений (1.21) и (1.23) $\widetilde{c}'_{2y}$ определяется с помощью выражения:

$$\widetilde{c}'_{2y}(y)=\rho_2 g\beta_2\vartheta_2+\rho_2 g\gamma\phi.$$

Имея в виду (1.20), (1.22), функция $\widetilde{c_2}$ определяется следующим соотношением

$$\widetilde{c_2}(y)=\frac{y^8}{8}\overline{k}_7+\frac{y^7}{7}\overline{k}_6+\frac{y^6}{6}\overline{k}_5+\frac{y^5}{5}\overline{k}_4+\frac{y^4}{4}\overline{k}_3+\frac{y^3}{3}\overline{k}_2+\frac{y^2}{2}\overline{k}_1+y\overline{k}_0+\widetilde{c_4}.$$

где

$$\overline{k}_7=\frac{\rho_2 g}{1008}\frac{g}{\nu_2}\Big[\beta_2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)+\gamma\frac{b_2}{D}\Big](\beta_2 a_2^2+\gamma b_2),$$

$$\overline{k}_6=\frac{\rho_2 g}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big\{\Big[\beta_2\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)+\gamma\frac{b_1}{D}\Big](\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)+4\Big[\beta_2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)+\gamma\frac{b_2}{D}\Big](\beta_2 A+\gamma b_1)\Big\},$$

$$\overline{k}_5=\frac{\rho_2 g}{120}\Big\{\frac{g}{\nu_2}\Big[\beta_2\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)+\gamma\frac{b_1}{D}\Big](\beta_2 A+\gamma b_1)+3\Big[\beta_2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)+\gamma\frac{b_2}{D}\Big]\overline{c}_1\Big\},$$

$$\overline{k}_4=\frac{\rho_2 g}{24}\Big\{\Big[\beta_2\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)+\gamma\frac{b_1}{D}\Big]\overline{c}_1+2\Big[\beta_2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)+\gamma\frac{b_2}{D}\Big]\overline{c}_2\Big\},$$

$$\overline{k}_3=\frac{\rho_2 g}{6}\Big\{\Big[\beta_2\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)+\gamma\frac{b_1}{D}\Big]\overline{c}_2+\Big[\beta_2\Big(\frac{a_2^2}{\chi_2}-\delta\frac{b_2}{D}\Big)+\gamma\frac{b_2}{D}\Big]\overline{c}_3\Big\},$$

$$\overline{k}_2=\frac{\rho_2 g}{2}\Big\{\beta_2\Big(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D}\Big)+\gamma\frac{b_1}{D}\Big\}\overline{c}_3,$$

$$\overline{k}_1=\rho_2 g(\beta_2\overline{c}_4+\gamma\overline{c}_6),\quad \overline{k}_0=\rho_2 g(\beta_2\overline{c}_5+\gamma\overline{c}_7).$$

Теперь легко получить точное представление функции давления в верхнем слое:

$$\bar{p}_2=\rho_2\nu_2\Big\{\frac{y^2}{2}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)+y\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A+\gamma b_1)+\overline{c}_1\Big\}x+$$

$$\frac{y^8}{8}\overline{k}_7+\frac{y^7}{7}\overline{k}_6+\frac{y^6}{6}\overline{k}_5+\frac{y^5}{5}\overline{k}_4+\frac{y^4}{4}\overline{k}_3+\frac{y^3}{3}\overline{k}_2+\frac{y^2}{2}\overline{k}_1+y\overline{k}_0+\widetilde{c}_4, \qquad (1.24)$$

1.1.3. Точные решения для описания течения жидкости в верхнем слое системы с учетом эффекта Соре

Система уравнений, определяющих скорость, распределение температуры, концентрацию пара и давление в жидкости (в газопаровой смеси) состоит из уравнений (1.15)-(1.17) и уравнения

$$u_2 C_x = DC_{yy}+\alpha D T_{2\,yy}. \qquad (1.25)$$

Продольная скорость газопаровой смеси находится согласно (1.19). Для определения температуры и концентрации пара в верхнем слое необходимо решить систему уравнений (1.17), (1.25), которую, следуя (1.6), перепишем в виде:

$$u_2(A + a_2^2 y) = \chi_2 \vartheta_{2\,yy} + \chi_2 \delta \phi_{yy}, \tag{1.26}$$

$$u_2(b_1 + b_2 y) = D\phi_{yy} + \alpha D \vartheta_{2\,yy}. \tag{1.27}$$

Домножая уравнение (1.26) на D, а (1.27) на $\chi_2\delta$ и вычитая из первого уравнения второе, получим соотношение:

$$u_2(D(A + a_2^2 y) - \chi_2\delta(b_1 + b_2 y)) = D\chi_2\vartheta_{2\,yy} - D\alpha\chi_2\delta\vartheta_{2\,yy},$$

и, следовательно, выражение для $\vartheta_{2\,yy}$:

$$\vartheta_{2\,yy} = \frac{y^5}{24}B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^4}{24}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] +$$
$$+\frac{y^3}{6}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3B_2\bar{c}_1\Big] + \frac{y^2}{2}[B_1\bar{c}_1 + 2B_2\bar{c}_2] +$$
$$+y[B_1\bar{c}_2 + B_2\bar{c}_3] + B_1\bar{c}_3,$$

где

$$B_1 = \frac{DA - \chi_2\delta b_1}{D\chi_2(1-\alpha\delta)}, \quad B_2 = \frac{Da_2^2 - \chi_2\delta b_2}{D\chi_2(1-\alpha\delta)}. \tag{1.28}$$

Откуда после интегрирования сразу получим:

$$\vartheta_2 = \frac{y^7}{1008}B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^6}{720}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] +$$
$$+\frac{y^5}{120}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3B_2\bar{c}_1\Big] + \frac{y^4}{24}[B_1\bar{c}_1 + 2B_2\bar{c}_2] +$$
$$+\frac{y^3}{6}[B_1\bar{c}_2 + B_2\bar{c}_3] + \frac{y^2}{2}B_1\bar{c}_3 + y\bar{c}_4 + \bar{c}_5. \tag{1.29}$$

Здесь $\bar{c}_4$, $\bar{c}_5$ — произвольные постоянные. Тогда температура T_2 газопаровой смеси определяется выражением

$$T_2 = (A + a_2^2 y)x + \frac{y^7}{1008}B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$

$$+\frac{y^6}{720}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] + \frac{y^5}{120}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3B_2\bar{c}_1\Big] +$$

$$+\frac{y^4}{24}[B_1\overline{c}_1+2B_2\overline{c}_2]+\frac{y^3}{6}[B_1\overline{c}_2+B_2\overline{c}_3]+\frac{y^2}{2}B_1\overline{c}_3+y\overline{c}_4+\overline{c}_5. \qquad (1.30)$$

Соотношение (1.27) служит для определения функции ϕ. Подставив выражения для u_2 и ϑ_2 (см. (1.19) и (1.29)), получим:

$$\phi=\frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)+$$

$$+\frac{y^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big[(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)+4(\beta_2A+\gamma b_1)\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\Big]+$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big[\frac{g}{\nu_2}(\beta_2A+\gamma b_1)\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)+3\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_1\Big]+$$

$$+\frac{y^4}{24}\Big[\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_1+2\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_2\Big]+$$

$$+\frac{y^3}{6}\Big[\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_2+\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_3\Big]+\frac{y^2}{2}\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_3+y\overline{c}_6+\overline{c}_7. \qquad (1.31)$$

Здесь $\bar{c}_6$, $\bar{c}_7$ — неизвестные константы. Концентрация пара C определяется согласно следующему выражению:

$$C=(b_1+b_2y)x+\frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)+$$

$$+\frac{y^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big[(\beta_2a_2^2+\gamma b_2)\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)+4(\beta_2A+\gamma b_1)\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\Big]+$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big[\frac{g}{\nu_2}(\beta_2A+\gamma b_1)\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)+3\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_1\Big]+$$

$$+\frac{y^4}{24}\Big[\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_1+2\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_2\Big]+$$

$$+\frac{y^3}{6}\Big[\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_2+\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\overline{c}_3\Big]+\frac{y^2}{2}\Big(\frac{b_1}{D}-\alpha B_1\Big)\overline{c}_3+y\overline{c}_6+\overline{c}_7. \qquad (1.32)$$

Когда известны функции u_2, T_2 и C, функция давления в газопаровом слое $\bar{p}_2$ вычисляется с помощью уравнений (1.15), (1.16). Выражение, определяющее $\bar{p}_2$ имеет вид (1.24), а коэффициенты $\overline{k}_7$, ..., $\overline{k}_0$ определяются следующими соотношениями:

$$\overline{k}_7=\frac{\rho_2g}{1008}\frac{g}{\nu_2}\Big[\beta_2B_2+\gamma\Big(\frac{b_2}{D}-\alpha B_2\Big)\Big](\beta_2a_2^2+\gamma b_2),$$

$$\overline{k}_6 = \frac{\rho_2 g}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big\{\Big[\beta_2 B_1 + \gamma\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\Big](\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$

$$+4\Big[\beta_2 B_2 + \gamma\Big(\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big)\Big](\beta_2 A + \gamma b_1)\Big\},$$

$$\overline{k}_5 = \frac{\rho_2 g}{120}\Big\{\frac{g}{\nu_2}\Big[\beta_2 B_1 + \gamma\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\Big](\beta_2 A + \gamma b_1) + 3\Big[\beta_2 B_2 + \gamma\Big(\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big)\Big]\overline{c}_1\Big\},$$

$$\overline{k}_4 = \frac{\rho_2 g}{24}\Big\{\Big[\beta_2 B_1 + \gamma\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\Big]\overline{c}_1 + 2\Big[\beta_2 B_2 + \gamma\Big(\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big)\Big]\overline{c}_2\Big\},$$

$$\overline{k}_3 = \frac{\rho_2 g}{6}\Big\{\Big[\beta_2 B_1 + \gamma\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\Big]\overline{c}_2 + \Big[\beta_2 B_2 + \gamma\Big(\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big)\Big]\overline{c}_3\Big\},$$

$$\overline{k}_2 = \frac{\rho_2 g}{2}\Big\{\beta_2 B_1 + \gamma\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\Big\}\overline{c}_3, \quad \overline{k}_1 = \rho_2 g(\beta_2 \overline{c}_4 + \gamma \overline{c}_6),$$

$$\overline{k}_0 = \rho_2 g(\beta_2 \overline{c}_5 + \gamma \overline{c}_7).$$

Заметим, что все неизвестные константы интегрирования c_1, ..., c_5, $\overline{c}_1$, ..., $\overline{c}_7$, возникающие в ходе построения точных решений, будут определены с помощью граничных условий на границах канала (см. п. 1.2).

1.2. Граничные условия задачи

Сформулируем граничные условия, которым должны удовлетворять решения системы (1.1)-(1.5), описывающие двухслойные течения в канале с учетом испарения на границе раздела. Пусть на нижней твердой границе $y = -l$ выполняется условие прилипания:

$$u_1(-l) = 0, \tag{1.33}$$

температура распределена линейно:

$$T_1|_{y=-l} = (A + a_2^1(-l))x + \vartheta_1|_{y=-l} = A_1 x + \vartheta^-. \tag{1.34}$$

Здесь ϑ^- ($\vartheta^- = const$) считается заданной величиной. Продольный градиент температуры на нижней стенке канала A_1 имеет вид $A_1 = A - a_2^1 l$.

На верхней твердой стенке канала $y = h$ выполняется условие прилипания:

$$u_2(h) = 0, \tag{1.35}$$

и температура также определяется линейной зависимостью относительно продольной координаты x:

$$T_2|_{y=h} = (A + a_2^2 h)x + \vartheta_2|_{y=h} = A_2 x + \vartheta^+. \tag{1.36}$$

Здесь выражение $A_2 = A + a_2^2 h$ определяет продольный градиент температуры на верхней стенке канала, а ϑ^+ ($\vartheta^+ = const$) — заданная величина. Заметим, что задача решена и при условии отсутствия потока тепла на верхней стенке:

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} + \delta \frac{\partial C}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0. \tag{1.37}$$

На верхней границе системы должно выполняться условие для концентрации пара, которое может быть рассмотрено в двух различных вариантах. В первом случае полагаем, что отсутствует поток пара:

$$\frac{\partial C}{\partial y} + \alpha \frac{\partial T_2}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0 \tag{1.38}$$

(с учетом эффекта термодиффузии). В случае, когда эффект Соре в условии (1.38) не принимается во внимание, имеем:

$$\frac{\partial C}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0. \tag{1.39}$$

Второй вариант условия для функции C состоит в предположении, что верхняя стенка канала обладает свойством полной абсорбции (т.е. мгновенно впитывает пар) [76]:

$$C(h) = 0. \tag{1.40}$$

Пусть уравнение $y = 0$ определяет положение границы раздела, которая остается недеформированной. При $y = 0$ должны выполняться условия непрерывности касательных скоростей

$$u_1(0) = u_2(0) \tag{1.41}$$

и температуры

$$T_1(0) = T_2(0). \tag{1.42}$$

Условие переноса тепла на границе раздела имеет вид

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \delta\kappa_2 \frac{\partial C}{\partial y}|_{y=0} = -\lambda M \tag{1.43}$$

(с учетом диффузионного потока массы и эффекта Дюфура). Здесь κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности, λ — удельная теплота испарения, M — масса жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени (массовая скорость испарения). Уравнение баланса масс на границе раздела имеет следующий вид:

$$M = -D\rho_2 \frac{\partial C}{\partial y}|_{y=0}. \tag{1.44}$$

С учетом эффекта Соре условие (1.44) следует записывать так:

$$M = -D\rho_2 \Big(\frac{\partial C}{\partial y} + \alpha \frac{\partial T_2}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}. \tag{1.45}$$

Концентрация насыщенного пара определяется с помощью соотношения:

$$C|_{y=0} = C_*[1 + \varepsilon T_2|_{y=0}]. \tag{1.46}$$

Здесь $\varepsilon = \dfrac{\lambda\mu}{RT_0^2}$, μ — молярная масса испаряющейся жидкости, R — универсальная газовая постоянная, C_* — концентрация насыщеного пара при $T_2 = T_0$ (в [76] значение T_0 полагается равным 20^oC). Соотношение (1.46) является следствием уравнения Клапейрона—Клаузиуса [17] для давления насыщенного пара

$$P = P_0 exp\Big[\frac{\lambda\mu}{R}\Big(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\Big)\Big]$$

и уравнения Менделеева—Клапейрона для идеального газа $\rho_v RT = \mu P$. Здесь $(P_0,\ T_0)$ — некоторое исходное состояние, $\rho_v = C\rho_2$. В результате линеаризации соотношения

$$C = \frac{\tilde{C}_*}{T} exp\Big[-\frac{\lambda\mu}{RT}\Big]$$

и в предположении малости безразмерного параметра εT_* (T_* — характерное значение перепада температуры) имеет место линейная зависимость концентрации пара на границе раздела (1.46) для умеренных перепадов температуры. Заметим, что подобный подход, когда уравнение Клапейрона—Клаузиуса используется для вывода условия на границе раздела, упоминается в [76] (см. также [87]).

Кинематическое условие на границе раздела в общем случае имеет вид

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = V_n, \tag{1.47}$$

где V_n — скорость движения границы раздела в направлении внешней нормали. При решении стационарной задачи в предположении, что граница раздела остается недеформируемой, задается уравнением $y = 0$, и с учетом вида точных решений (1.6) получаем, что условие (1.47) выполняется автоматически.

Динамическое условие в общем случае имеет вид [5]

$$(-p_1\mathbf{n} + 2\rho_1\nu_1 D(\mathbf{v}_1)\mathbf{n}) - (-p_2\mathbf{n} + 2\rho_2\nu_2 D(\mathbf{v}_2)\mathbf{n}) = 2H\sigma\mathbf{n} + \nabla_\Gamma\sigma. \qquad (1.48)$$

Здесь $D(\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформации, $D_{i,j}(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$ $(i, j = 1, 2)$. Проекция условия (1.48) на касательный вектор к границе раздела $y = 0$ для решения (1.6) приводит к соотношению:

$$\rho_1\nu_1 u_{1\,y} = \rho_2\nu_2 u_{2\,y} + \sigma_T T_x. \qquad (1.49)$$

Здесь σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения σ. Принимается линейная зависимость σ от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0),$$

где $\sigma_T = const$, $\sigma_T < 0$ (нормальный термокапиллярный эффект). Проекция динамического условия (1.48) на вектор нормали к границе раздела имеет вид:

$$p_1 = p_2. \qquad (1.50)$$

Задача решается при условии заданного расхода газа Q в верхнем газопаровом слое:

$$\int_0^h \rho_2 u_2 dy = Q. \qquad (1.51)$$

При решении задачи с недеформируемой границей раздела условия (1.50), (1.51) заменены на соотношения замкнутости потока отдельно для каждого слоя (см. [76]):

$$\int_{-l}^0 u_1 dy = 0, \quad \int_0^h u_2 dy = 0.$$

1.3. Определение основных параметров решения и констант интегрирования задачи

Реализация представленных в разделе 1.2 граничных условий (1.33)-(1.46), (1.49)-(1.51) приводит к определению неизвестных констант интегрирования c_i $(i = 1, ..., 5)$, $\bar{c}_j$ $(j = 1, ..., 7)$, параметров a_k^m и b_k $(k, m = 1, 2)$, задающих вид искомых функций, а также массовой скорости испарения M. В зависимости от вида условий, накладываемых на распределение температуры и концентрации пара на верхней стенке канала, и учета эффекта Соре возможны различные алгоритмы определения вышеназванных констант и параметров.

1.3.1. Определение констант интегрирования при условии отсутствия потока пара на верхней границе и с учетом эффекта Соре

Пусть на верхней стенке канала $y = h$ выполняется условие (1.38), при этом принимается во внимание эффект термодиффузии в газопаровом слое. Исходя из условия (1.38) и вида точного решения для концентрации пара получим следующие соотношения:

$$b_2 + \alpha a_2^2 = 0, \quad \phi_y(h) + \alpha\vartheta_y(h) = 0. \tag{1.52}$$

Ввиду того, что температура на верхней и нижней границах распределена линейно (см. условия (1.34) и (1.36)), имеют место следующие соотношения:

$$a_2^1 = (A - A_1)/l, \quad a_2^2 = (A_2 - A)/h, \tag{1.53}$$

и

$$\vartheta(-l) = \vartheta^-, \quad \vartheta(h) = \vartheta^+. \tag{1.54}$$

Исходя из условия баланса масс (1.45) и вида функций T_2 и C, можно записать следующие соотношения:

$$b_2 = -\alpha a_2^2, \quad M = -D\rho_2(\bar{c}_6 + \alpha\bar{c}_4). \tag{1.55}$$

Первое из равенств совпадает с выражением в (1.52).

Условие переноса тепла на границе раздела (1.43) влечет за собой равенства

$$\kappa_1 a_2^1 - \kappa_2 a_2^2 - \delta\kappa_2 b_2 = 0, \quad \kappa_1 c_4 - \kappa_2\bar{c}_4 - \delta\kappa_2\bar{c}_6 = -\lambda M. \tag{1.56}$$

Первые соотношения в (1.52) и (1.56) определют связь: $a_2^1 = Ka_2^2$, где $K = \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}(1 - \alpha\delta)$. Поскольку выполнены (1.53), получаем:

$$\frac{A - A_1}{l} = K\frac{A_2 - A}{h},$$

и, следовательно:

$$A_1 = A(1 + \frac{l}{h}K) - A_2\frac{l}{h}K. \tag{1.57}$$

Заметим, что может быть реализован случай $A = A_1 = A_2$. Соотношение (1.46) для концентрации насыщенного пара приводит к равенствам

$$b_1 = C_*\varepsilon A, \quad \bar{c}_7 = C_* + C_*\varepsilon(\bar{c}_5 - T_0). \tag{1.58}$$

Из динамических условий (1.49) и (1.50) следуют соотношения

$$c_1 = \bar{c}_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}, \quad c_2 = \bar{c}_2\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1} + \frac{\sigma_T A}{\rho_1\nu_1}. \tag{1.59}$$

Условия непрерывности скорости (1.41) и температуры (1.42) на границе $y = 0$ влекут за собой равенства

$$c_3 = \bar{c}_3, \quad c_5 = \bar{c}_5. \tag{1.60}$$

Неизвестные константы интегрирования $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ могут быть определены с помощью условий прилипания для скорости (1.33), (1.35) и соотношения, определяющего заданный поток газа (1.51). Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\frac{l^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_1 - l\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = \frac{\sigma_T A l}{\rho_1\nu_1} - \frac{g\beta_1}{\nu_1}\Big(\frac{l^4}{24}a_2^1 - \frac{l^3}{6}A\Big),$$

$$\frac{h^2}{2}\bar{c}_1 + h\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = -\frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^4}{24}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{h^3}{6}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big],$$

$$\frac{h^3}{6}\bar{c}_1 + \frac{h^2}{2}\bar{c}_2 + h\bar{c}_3 = \frac{Q}{\rho_2} - \frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^5}{120}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{h^4}{24}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big].$$

Зная $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, легко определить и константы c_1, c_2, c_3 (см. (1.59), (1.60)).

Принимая во внимание вид точных решений и второе из соотношений в (1.52), можно записать равенство, связывающее константы интегрирования $\bar{c}_4$ и $\bar{c}_6$:

$$\alpha\bar{c}_4 + \bar{c}_6 = F, \tag{1.61}$$

$$F = -\frac{h^6}{144}\frac{g}{\nu_2}a_2^2(\beta_2 - \alpha\gamma)(E_2 + \alpha B_2) - \frac{h^5}{120}\frac{g}{\nu_2}\Big[a_2^2(\beta_2 - \alpha\gamma)(E_1 + \alpha B_1) +$$
$$+ 4(\beta_2 A + \gamma b_1)(E_2 + \alpha B_2)\Big] -$$
$$- \frac{h^4}{24}\Big[\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)(E_1 + \alpha B_1) + 3\bar{c}_1(E_2 + \alpha B_2)\Big] - \frac{h^3}{6}\Big[\bar{c}_1(E_1 + \alpha B_1) +$$
$$+ 2\bar{c}_2(E_2 + \alpha B_2)\Big] - \frac{h^2}{2}\Big[\bar{c}_2(E_1 + \alpha B_1) + \bar{c}_3(E_2 + \alpha B_2)\Big] - h\bar{c}_3(E_1 + \alpha B_1),$$

здесь

$$E_1 = \frac{b_1}{D} - \alpha B_1, \quad E_2 = \frac{b_2}{D} - \alpha B_2 \tag{1.62}$$

(см. также (1.28)).

Масса испаряющейся с границы раздела жидкости определяется из следствия (1.55) условия баланса масс и соотношения (1.61):

$$M = -D\rho_2 F. \tag{1.63}$$

Константа c_4 находится с помощью второго из соотношений в (1.56), когда известны $\bar{c}_4$ и $\bar{c}_6$:

$$c_4 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_4 + \frac{\delta\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_6 - \frac{\lambda M}{\kappa_1}.$$

Константы интегрирования $\bar{c}_4$, $\bar{c}_6$ и c_5 суть решения системы линейных алгебраических уравнений, являющихся следствием условий для температуры на твердых стенках канала (1.54) и соотношений (1.55), (1.63):

$$-l\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_4 - l\frac{\delta\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_6 + c_5 = \vartheta^- + \frac{l^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1} - \frac{l^6}{144}\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1} + \frac{l^5}{120}\Big(\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1} + \frac{3a_2^1}{\chi_1}c_1\Big) -$$

$$-\frac{l^4}{24}\Big(\frac{A}{\chi_1}c_1 + \frac{2a_2^1}{\chi_1}c_2\Big) + \frac{l^3}{6}\Big(\frac{A}{\chi_1}c_2 + \frac{a_2^1}{\chi_1}c_3\Big) - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3 - l\frac{\lambda M}{\kappa_1},$$

$$h\bar{c}_4 + c_5 = \vartheta^+ - \frac{h^7}{1008}B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) - \frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}[B_1(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2(\beta_2 A + \gamma b_1)] -$$

$$-\frac{h^5}{120}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3B_2\bar{c}_1\Big] - \frac{h^4}{24}[B_1\bar{c}_1 + 2B_2\bar{c}_2] - \frac{h^3}{6}[B_1\bar{c}_2 + B_2\bar{c}_3] - \frac{h^2}{2}B_1\bar{c}_3,$$

$$\alpha\bar{c}_4 + \bar{c}_6 = F.$$

Константу интегрирования $\bar{c}_7$ можно найти, зная $\bar{c}_5$, с помощью (1.58), (1.60).

1.3.2. Определение констант интегрирования при условии нулевой концентрации пара на верхней границе с учетом эффекта Соре

В случае, когда на верхней границе задано условие полного поглощения пара верхней стенкой канала (1.40), имеем

$$b_2 = -\frac{b_1}{h}, \qquad \varphi(h) = 0. \tag{1.64}$$

Уравнение баланса массы (1.45) с учетом эффекта термодиффузии диктует выполнение соотношений (1.55). Принимая во внимание следствие условия для концентрации насыщенного пара (1.58) и соотношения (1.53), получаем связь продольных градиентов температуры A и A_2 между собой:

$$A_2 = A + C_*\varepsilon A/\alpha.$$

Данное соотношение, а также первое из следствий условия переноса тепла (1.56) влекут за собой выражение, определяющее продольный градиент температуры на нижней твердой границе при заданном градиенте A на границе раздела:

$$A_1 = A + A\frac{l}{h}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{C_*\varepsilon}{\alpha}(\alpha\delta - 1).$$

Второе уравнение в (1.56) определяет связь между между константами интегрирования $\bar{c}_6$, c_4 и $\bar{c}_4$:

$$\bar{c}_6 = \frac{\kappa_1}{\lambda D\rho_2 - \delta\kappa_2}c_4 - \frac{\kappa_2 + \lambda D\rho_2\alpha}{\lambda D\rho_2 + \delta\kappa_2}\bar{c}_4. \qquad (1.65)$$

Ввиду выражений (1.59), (1.60), задающих зависимости между константами интергирования c_1 и $\bar{c}_1$, c_2 и $\bar{c}_2$, c_3 и $\bar{c}_3$, а также условий прилипания (1.33), (1.35) и уравнения, определяющего расход газа в верхнем слое (1.51), константы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ находятся как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{l^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_1 - l\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = \frac{\sigma_T A l}{\rho_1\nu_1} - \frac{g\beta_1}{\nu_1}\Big(a_2^1\frac{l^4}{24} - A\frac{l^3}{6}\Big),$$

$$\frac{h^2}{2}\bar{c}_1 + h\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = -\frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^4}{24}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{h^3}{6}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big],$$

$$\frac{h^3}{6}\bar{c}_1 + \frac{h^2}{2}\bar{c}_2 + h\bar{c}_3 = \frac{Q}{\rho_2} - \frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^5}{120}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{h^4}{24}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big].$$

Зная константы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$, найдем c_1, c_2 и c_3.

С учетом формул (1.56), (1.55), (1.58) и (1.60) можно определить константы c_4, $\bar{c}_4$ и c_5 из решения системы линейных алгебраических уравнений: $\vartheta_1(-l) = \vartheta^-$, $\vartheta_2(h) = \vartheta^+$, $\phi(h) = 0$ (см. (1.34), (1.36) и (1.40)):

$$-lc_4 + c_5 = \vartheta^- + \frac{l^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1} - \frac{l^6}{144}\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1} + \frac{l^5}{120}\Big(\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1} + \frac{3a_2^1}{\chi_1}c_1\Big) -$$

$$-\frac{l^4}{24}\Big(\frac{A}{\chi_1}c_1 + \frac{2a_2^1}{\chi_1}c_2\Big) + \frac{l^3}{6}\Big(\frac{A}{\chi_1}c_2 + \frac{a_2^1}{\chi_1}c_3\Big) - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3,$$

$$h\bar{c}_4 + c_5 = \vartheta^+ - \frac{h^7}{1008}B_2\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) - \frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}[B_1(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2(\beta_2 A + \gamma b_1)] -$$

$$-\frac{h^5}{120}\Big[B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A+\gamma b_1)+3B_2\bar{c}_1\Big]-\frac{h^4}{24}[B_1\bar{c}_1+2B_2\bar{c}_2]-\frac{h^3}{6}[B_1\bar{c}_2+B_2\bar{c}_3]-\frac{h^2}{2}B_1\bar{c}_3,$$

$$h\frac{\kappa_1}{D\rho_2\lambda+\delta\kappa_2}c_4-h\frac{\lambda D\rho_2\alpha+\kappa_2}{D\rho_2\lambda+\delta\kappa_2}\bar{c}_4+C_*\varepsilon c_5=-\frac{h^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}E_2(\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)-$$

$$-\frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}[E_1(\beta_2 a_2^2+\gamma b_2)+4E_2(\beta_2 A+\gamma b_1)]-\frac{h^5}{120}\Big[\frac{g}{\nu_2}E_1(\beta_2 A+\gamma b_1)+3E_2\bar{c}_1^2\Big]-$$

$$-\frac{h^4}{24}[E_1\bar{c}_1+2E_2\bar{c}_2]-\frac{h^3}{6}[E_1\bar{c}_2+E_2\bar{c}_3]-\frac{h^2}{2}E_1\bar{c}_3-C_*+C_*\varepsilon T_0.$$

Таким образом, определены все неизвестные константы интегрирования. Массовая скорость испарения на границе раздела может быть найдена с помощью формулы (1.55). Установлено, что выражение, определяющее величину M, представляет собой линейную функцию от расхода газа в верхнем слое системы Q. Зависимость M от продольного градиента температуры A и толщины жидкого слоя l имеет следующий вид:

$$M=-D\rho_2\frac{\sum\limits_{i,j}A^i l^j f_j^i}{\sum\limits_k l^k f_k},\tag{1.66}$$

где $i=0,...,2$, $j=0,...,9$, $k=0,...,3$. Коэффициенты f_j^i и f_k приведены в Приложении 1.

1.3.3. Определение констант интегрирования при условии отсутствия потока пара на верхней границе без учета эффекта Соре

В случае, когда на верхней границе полагается выполненным условие нулевого потока пара (1.39), а эффект Соре не учитывается при моделировании ($\alpha=0$), алгоритм нахождения констант интегрирования и соотношений, которым должны удовлетворять параметры задачи, несколько упростится. Условие баланса масс (1.45) приведет к соотношениям

$$b_2=0,\quad M=-D\rho_2\bar{c}_6.\tag{1.67}$$

Следствиями условия теплопереноса (1.43) на границе раздела $y = 0$ при учете первого из соотношений (1.67) являются выражения:

$$\kappa_1 a_2^1 - \kappa_2 a_2^2 = 0, \quad \kappa_1 c_4 - \kappa_2 \bar{c}_4 - \delta \kappa_2 \bar{c}_6 = -\lambda M. \tag{1.68}$$

Из условий, обеспечивающих тепловой режим на границах канала (см. (1.34), (1.36)), и первго соотношения в (1.68), следует зависимость продольного градиента A_2 от A и A_1:

$$A_2 = A + (A - A_1)\frac{h}{l}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}.$$

Отметим, что в данном случае два из трех продольных градиентов температуры на границах канала полагаются заданными (коэффициенты a_2^1 и a_2^2 вычисляются согласно формулам (1.53)). Соотношение (1.58) определяет коэффициент b_1; с помощью равенств (1.59) и (1.60) устанавливаются связи между константами интегрирования c_1, c_2, c_3 и $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$. Система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$ записывается аналогично случаю, когда при условии отсутствия потока пара на границе раздела эффект термодиффузии принимается во внимание (1.38). Константа интегрирования $\bar{c}_6$ определяется, исходя из соотношения

$$\bar{c}_6 = -\frac{h^5}{120}\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}\beta_2 a_2^2 - \frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}\frac{b_1}{D}(\beta_2 A + \gamma b_1) - \frac{h^3}{6}\frac{b_1}{D}\bar{c}_1 - \frac{h^2}{2}\frac{b_1}{D}\bar{c}_2 - h\frac{b_1}{D}\bar{c}_3,$$

являющегося следствием второго из условий (1.64). Тогда сразу может быть найдена массовая скорость испаряющейся с границы раздела жидкости из второго из соотношений (1.55), записанного при $\alpha = 0$. Для нахождения констант интегрирования c_4 и c_5 строится система линейных алгебраических уравнений, являющаяся следствием условий для температуры на твердых границах канала (1.34), (1.36):

$$-lc_4 + c_5 = \vartheta^- + \frac{l^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1} - \frac{l^6}{720}5\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1} + \frac{l^5}{120}(\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1} + 3\frac{a_2^1}{\chi_1}c_1) -$$

$$-\frac{l^4}{24}(\frac{A}{\chi_1}c_1 + 2\frac{a_2^1}{\chi_1}c_2) + \frac{l^3}{6}(\frac{A}{\chi_1}c_2 + \frac{a_2^1}{\chi_1}c_3) - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3,$$

$$h\frac{\kappa_1}{\kappa_2}c_4+c_5=\vartheta^+-\frac{h^7}{1008}\frac{g\beta_2(a_2^2)^2}{\nu_2\chi_2}-\frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}[\beta_2 a_2^2(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D})+4\frac{a_2^2}{\chi_2}(\beta_2 A+\gamma b_1)]-$$

$$-\frac{h^5}{120}[\frac{g}{\nu_2}(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D})(\beta_2 A+\gamma b_1)+3\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_1]-\frac{h^4}{24}[(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D})\bar{c}_1+\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_2]-$$

$$-\frac{h^3}{6}[(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D})\bar{c}_2+\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_3]-\frac{h^2}{2}(\frac{A}{\chi_2}-\delta\frac{b_1}{D})\bar{c}_3+h\delta\bar{c}_6-\frac{h\lambda M}{\kappa_2}.$$

Здесь для $\bar{c}_4$ используется равенство (см. (1.56))

$$\bar{c}_4=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}c_4-\delta\bar{c}_6+\frac{\lambda M}{\kappa_2}.$$

1.3.4. Определение констант интегрирования при условии нулевой концентрации пара на верхней границе без учета эффекта Соре

В случае, когда действие эффекта Соре в газопаровом слое системы не принимается во внимание, а на верхней границе выполняется условие полной абсорбции пара (1.40), с учетом условия баланса масс (1.45) коэффициент, определяющий градиент температуры вдоль границы раздела, необходимо положить равным нулю. Тем самым, ввиду первых соотношений в (1.58) и (1.64) концентрация пара в слое газа не будет зависеть от продольной координаты, поскольку $b_1=0$, $b_2=0$. Условие переноса тепла на границе раздела (см. первое равенство в (1.56)) диктует необходимость задания таких продольных градиентов температуры на верхней и нижней твердых стенках канала, которые будут удовлетворять соотношению:

$$A_2=-A_1\frac{h}{l}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \tag{1.69}$$

В итоге неизвестные константы интегрирования $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$ будут определяться из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{l^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_1-l\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_2+\bar{c}_3=-\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{l^4}{24}a_2^1,$$

$$\frac{h^2}{2}\bar{c}_1 + h\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = -\frac{g\beta_2}{\nu_2}\frac{h^4}{24}a_2^2,$$
$$\frac{h^3}{6}\bar{c}_1 + \frac{h^2}{2}\bar{c}_2 + h\bar{c}_3 = \frac{Q}{\rho_2} - \frac{g\beta_2}{\nu_2}\frac{h^5}{120}a_2^2.$$

В силу вторых соотношений в (1.56) и (1.60), а также следствия условия баланса масс (1.44) без учета эффекта термодиффузии (см. (1.55))

$$M = -D\rho_2\bar{c}_6,$$

система уравнений, задающая константы c_4, $\bar{c}_4$ и c_5 с учетом изложенных выше рассуждений и формул (1.28), (1.62), имеет следующий вид:

$$-lc_4 + c_5 = \vartheta^- + \frac{l^7}{1008}\frac{g\beta_1(a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1} + \frac{l^5}{120}3\frac{a_2^1}{\chi_1}c_1 - \frac{l^4}{24}2\frac{a_2^1}{\chi_1}c_2 + \frac{l^3}{6}\frac{a_2^1}{\chi_1}c_3\Big) - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3,$$
$$h\bar{c}_4 + c_5 = \vartheta^+ - \frac{h^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\frac{\beta_2(a_2^2)^2}{\chi_2} - \frac{h^5}{120}\frac{g}{\nu_2}3\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_1 - \frac{h^4}{24}2\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_2 - \frac{h^3}{6}\frac{a_2^2}{\chi_2}\bar{c}_3,$$
$$h\frac{\kappa_1}{D\rho_2\lambda + \delta\kappa_2}c_4 - h\frac{\kappa_2}{D\rho_2\lambda + \delta\kappa_2}\bar{c}_4 + C_*\varepsilon c_5 = -C_* + C_*\varepsilon T_0.$$

1.3.5. Анализ влияния эффекта Соре и условий для концентрации пара на верхней стенке канала на зависимости параметров, определяющих точное решение

В пунктах 1.3.1 — 1.3.4 было показано, что выбор граничных условий для концентрации пара, а также учет эффекта Соре влияют на характер зависимостей параметров, определяющих точное решение. Результаты исследований влияния эффекта термодиффузии на построение точных решений позволяют сделать следующие выводы. В случае, когда на верхней стенке канала выполняется условие нулевой концентрации пара, продольный градиент температуры на границе раздела сред считается произвольно заданным при учете эффекта термодиффузии и полагается равным нулю при его отсутствии. Тем самым, речь идет об отсутствии термокапиллярного эффекта. Также заметим, что без учета эффекта Соре обращаются в ноль коэффициенты, определяющие продольные градиенты концентрации пара.

Если на верхней твердой границе выполняется условие отсутствия потока пара, то как при учете эффекта термодиффузии, так и без него два продольных градиента температуры на границах системы задаются произвольным образом (например градиенты на границе раздела и нижней твердой границе), а третий вычисляется согласно формуле, представленной в таблице в Приложении 2. Однако без учета эффекта Соре коэффициент b_2 равен нулю, тогда как при учете этого эффекта он должен быть вычислен (см. также [78, 79]).

1.3.6. Определение констант интегрирования при условиях теплоизоляции верхней границы, отсутствия потока пара с учетом эффекта Соре

Рассмотрим случай, когда верхняя стенка горизонтального канала предполагается теплоизолированной (см. (1.37)), при этом функция концентрации пара на границе $y = h$ удовлетворяет условию (1.38). Ввиду равенства (1.37) получим соотношения:

$$a_2^2 = 0, \quad \vartheta_{2y}(h) = 0. \tag{1.70}$$

Первое из следствий условия (1.38) (см. соотношения (1.52)) в силу (1.70) диктует равенство нулю коэффициента b_2. С учетом полученных равенств и следствия условия переноса тепла (1.56) параметр a_2^1 также равен нулю:

$$a_2^1 = 0. \tag{1.71}$$

Первое равенство в (1.53) определяет зависимость a_2^1 от продольных градиентов температуры на нижней границе и границе раздела сред. Отсюда с учетом (1.71) следует равенство продольных градиентов температуры: $A = A_1$. Параметр b_1 находится с помощью первого из соотношений (1.58). Зависимость констант интегрирования c_1, c_2 и c_3, c_5 от $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$, $\bar{c}_5$ определяются фомулами (1.59) и (1.60), соответственно.

Неизвестные константы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ находятся с помощью условий прилипания для скорости (1.33), (1.35) и соотношения, определяющего заданный поток газа в верхнем слое (1.51). Система линейных алгебраических уравнений принимает вид:

$$\frac{l^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_1 - l\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = \frac{\sigma_T Al}{\rho_1\nu_1} + \frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{l^3}{6}A,$$

$$\frac{h^2}{2}\bar{c}_1 + h\bar{c}_2 + \bar{c}_3 = -\frac{g}{\nu_2}\frac{h^3}{6}(\beta_2 A + \gamma b_1),$$

$$\frac{h^3}{6}\bar{c}_1 + \frac{h^2}{2}\bar{c}_2 + h\bar{c}_3 = \frac{Q}{\rho_2} - \frac{g}{\nu_2}\frac{h^4}{24}(\beta_2 A + \gamma b_1).$$

Таким образом, определяются константы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, а, следовательно, и c_1, c_2, c_3.

Второе из условий (1.70) позволяет вычислить неизвестную константу $\bar{c}_4$ (см. (1.29)):

$$\bar{c}_4 = -\frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)B_1 - \frac{h^3}{6}B_1\bar{c}_1 - \frac{h^2}{2}B_1\bar{c}_2 - hB_1\bar{c}_3.$$

Константа интегрирования $\bar{c}_6$ находится с помощью второго соотношения в (1.52) (см. также (1.29), (1.31)):

$$\bar{c}_6 = -\frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big) - \frac{h^3}{6}\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\bar{c}_1 - \frac{h^2}{2}\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\bar{c}_2 -$$

$$-h\Big(\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big)\bar{c}_3 - \alpha\Big[\frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)B_1 + \frac{h^3}{6}B_1\bar{c}_1 + \frac{h^2}{2}B_1\bar{c}_2 + hB_1\bar{c}_3 + \bar{c}_4\Big].$$

Масса испаряющейся с границы раздела жидкости M определяется вторым из соотношений (1.55) при найденных $\bar{c}_4$ и $\bar{c}_6$. Следствие условия переноса тепла на границе раздела (1.56) позволяет определить константу c_4, с учетом того, что $\bar{c}_4$, $\bar{c}_6$ и M уже найдены:

$$c_4 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_4 + \frac{\delta\kappa_2}{\kappa_1}\bar{c}_6 - \frac{\lambda}{\kappa_1}M.$$

Неизвестная константа c_5 вычисляется с помощью условия (1.54), задающего распределение температуры на нижней стенке канала:

$$c_5 = \vartheta^- + \frac{l^5}{120}\frac{g\beta_1(A)^2}{\nu_1\chi_1} - -\frac{l^4}{24}\frac{A}{\chi_1}c_1 + \frac{l^3}{6}\frac{A}{\chi_1}c_2 - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3 + lc_4.$$

Определив c_5 из соотношения (1.58), легко найти константу интегрирования $\bar{c}_7$. Таким образом, определены все неизвестные параметры задачи.

1.4. Результаты исследования течений жидкости в двухслойных системах

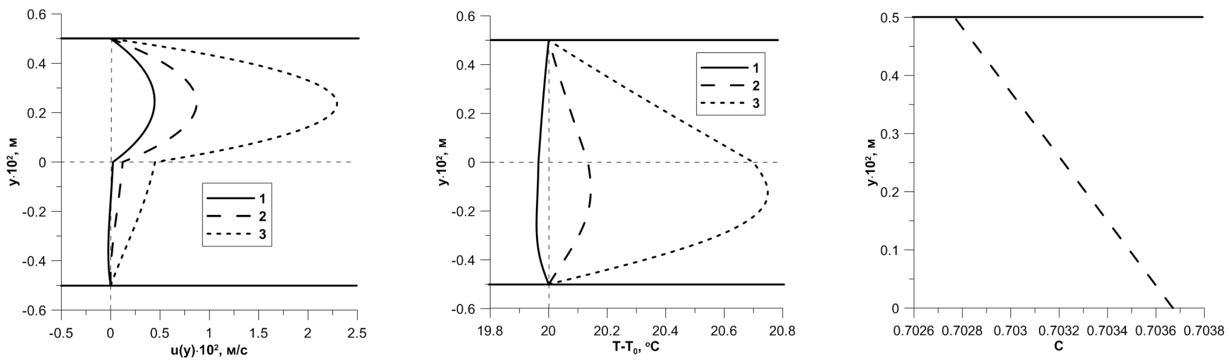
Исследование влияния различных эффектов на структуру течения, распределение температуры в канале, а также распределение концентрации пара жидкости в верхнем слое проводилось на примерах систем "жидкость — газ" таких, как "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух". Физико-химические параметры рабочих жидкостей приведены в Приложении 3 (см. также [42, 107, 109]). Получены результаты по исследованию влияния температурного режима (значений продольных градиентов температуры, задаваемых на границах канала), расхода газа, интенсивности поля силы тяжести, толщины жидкого и газопарового слоев, типа системы "жидкость — газ" на характер течения и интенсивность испарения на границы раздела [26, 28, 31, 32, 94].

Представим результаты исследования двухслойных течений, полученные на основе точных решений (1.11), (1.12), (1.14), (1.19), (1.21), (1.23), (1.24), (1.30), (1.32) при различных условиях для концентрации пара и с учетом эффекта Соре.

1.4.1. Исследование структуры течения, распределения температуры и концентрации пара в верхнем слое системы

В ходе проведенных исследований установлено, что в двухслойной системе могут реализоваться три класса течений — чисто термокапиллярное, смешанное и пуазейлевское — в зависимости от доминирующих сил [10, 78–80]. Чисто термокапиллярное течение возникает в случае преобладания термокапиллярных сил и характеризуется возвратным течением в нижнем слое. Для течений смешанного типа характерно расслоение профиля скорости вблизи границы раздела. Первый тип смешанного течения характеризуется расслоением скорости и появлением зон с возвратным течением вблизи границы раздела. Данный тип возникает вследствие действия двух основных механизмов, противоположно направленных относительно друг друга, — касательных напряжений и термокапиллярного эффекта. Второй тип смешанного течения характеризуется расслоением скорости вблизи границы раздела с положительной продольной составляющей вектора скорости. Здесь основными механизмами являются касательные напряжения и термокапиллярный эффект, но в данном случае оба эффекта действуют сонаправленно. Третий тип смешанного течения определяется структурой поля скоростей, близкой к распределению Куэтта в одном из слоев системы или одновременно в обеих средах. Основной механизм течений пуазейлевского типа обусловлен градиентом давления в обеих средах. Среди течений пуазейлевского типа выделяются три подкласса: для первого характерны профили скорости, близкие к параболическим (чисто пуазейлевское течение); для второго подкласса наблюдается формирование зон с возвратным течением в пристеночных областях в одном из слоев, что вызвано градиентом давления и вязкими силами; наконец, для третьего подкласса характерно наличие застойных зон в жидкости, а профили скорости в газе близки к параболическому; основными механизмами течения являются термокапиллярные сил и касательные напряжения. Классификация течений представлена также в [10, 78–80], где установлено, фактически, расширение классификации течений Наполитано [116].

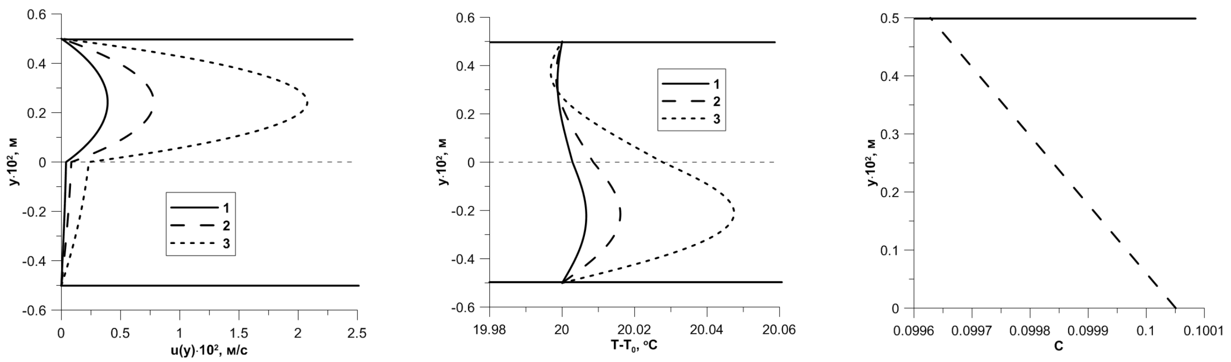
Как было показано в пункте 1.3, выбор условий для концентрации пара на верхней границе $y = h$, а также учет эффекта Соре влияют на зависимости, связывающие константы интегрирования и продольные градиенты температуры между собой. Рассмотрим случай, когда на верхней стенке канала выполняется условие отсутствия потока пара (1.38). На рисунке 1.2 представлены профили скорости, температуры и концентрации пара в системе "HFE7100 — азот" при равной толщине слоев жидкости и газопаровой смеси, фиксированных значениях продольных градиентов температуры A и A_2 (здесь $A = A_1 = 10$К/м, A_2 вычисляется согласно формуле в Приложении 2) и различных значениях расхода газа Q в верхнем слое. Снижение расхода газа влечет уменьшение скорости в системе и может способствовать возникновению возвратных течений вблизи термокапиллярной границы (см. рисунок 1.2а). Течения смешанного типа, возникающие при меньших значениях параметра Q, изменяются на пуазейлевские. При увеличении значения Q возрастает перепад температур в системе (рисунок 1.2б). Отметим, что при малом расходе газа (в случае, когда $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с)) наименьшее значение температуры наблюдается на границе раздела $y = 0$. При бо́льших значениях параметра Q минимум температур достигается на твердых стенках канала. Рисунок 1.2в демонстрирует распределение концентрации пара в верхнем слое системы. В данном случае профиль концентрации пара близок к линейному.



а б в

Рис. 1.2. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "HFE7100 — азот" при различных значениях расхода газа Q при условии отсутствия потока пара при $y = h$ с учетом эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = A_1 = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с)).

На рисунке 1.3 представлены профили скорости, температуры и концентрации пара в системе "этанол — воздух" в тех же условиях, которые были приняты для системы "HFE7100 — азот" (рисунок 1.2). В данном случае возвратных течений вблизи границы раздела не наблюдается (см. рисунок 1.3а), несколько снижается интенсивность течения в жидком слое. При изменении исследуемых веществ распределение температуры носит качественно иной характер. Так, в системе "этанол — воздух" (рисунок 1.3б), внутри верхнего газопарового слоя наблюдается локальный минимум температур, причем данная особенность сохраняется для всех значений расхода газа. Отметим также, что при этом, как и в системе "HFE7100 — азот", сохраняется тенденция увеличения температуры на границе $y = 0$ с ростом параметра Q. При изменении физико-химических параметров системы распределение концентрации пара в верхнем слое системы качественно не меняется, однако имеют место значительные количественные изменения (см. рисунки 1.2в и 1.3в).

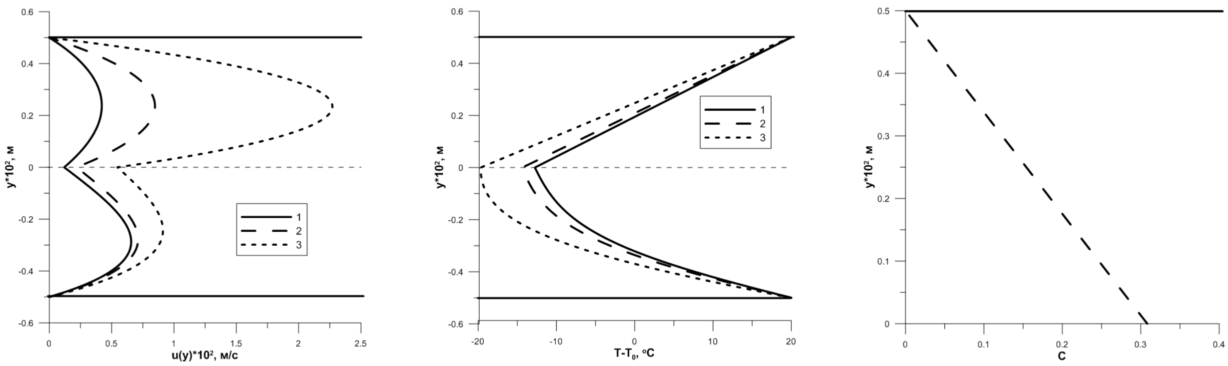


а б в

Рис. 1.3. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа Q при условии отсутствия потока пара при $y = h$ с учетом эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = A_1 = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с)).

Рисунок 1.4 демонстрирует профили искомых функций в системе "HFE7100 — азот" в условиях нулевой концентрации пара (1.40) на верхней границе системы; при построении решений эффект термодиффузии принимается во внимание. В данном случае при тех же значениях расхода газа и продольного градиента температуры на границе $y = 0$ имеют место некоторые качественные и количественные различия. Отметим, однако, что продольные градиенты на твердых стенках меняют свои значения вследствие различных зависимостей градиентов температуры друг от друга (см. пункты 1.3.1 и 1.3.2, а также Приложение 2). Профили скорости, представленные на рисунке 1.4а, не характеризуют возвратные течения. Кроме того, в жидком слое наблюдается ярко выраженный локальный максимум скорости (чисто пуазейлевское течение), тогда как при использовании условия отсутствия потока пара наблюдалась качественно иная картина течения в нижнем слое (рисунок 1.2а) и смена режимов течения со смешанного на пуазейлевский. Значительные количественные и качественные отличия наблюдаются в профилях температуры (см. рисунки 1.2б и 1.4б): с ростом расхода газа происходит снижение температуры на границе раздела $y = 0$. Профили концентрации пара ввиду изменившихся граничных условия имеют значительные количественные различия (рисунки 1.2в и 1.4в).

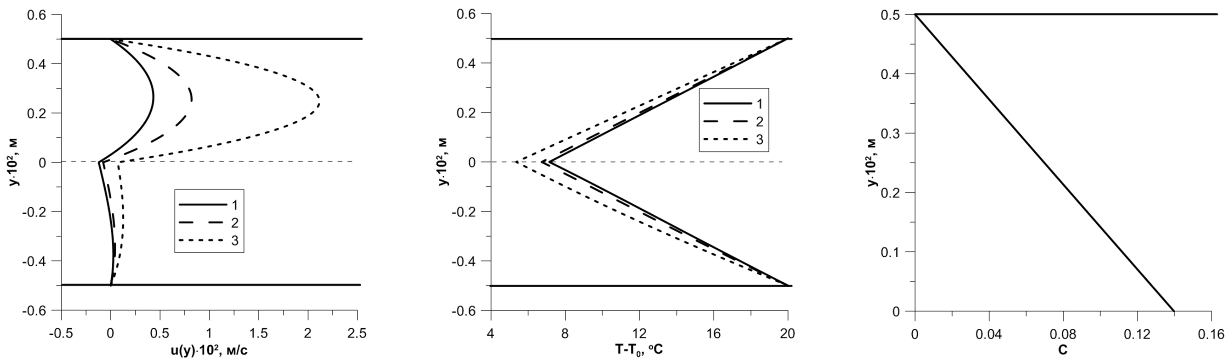
На рисунке 1.5 представлены профили продольной скорости, температуры и концентрации пара в системе "этанол — воздух" , построенные с использованием условия нулевой концентрации пара на границе $y = h$, эффект Соре при этом учитывается. В сравнении с рассмотренной ранее системой "HFE7100 — азот" интенсивность течения в жидком слое существенно слабее, менее выражен локальный максимум скорости. Перепад температур значительно меньше, кроме того, в нижнем слое распределение температуры носит почти линейный характер, чего не наблюдалось для системы "HFE7100 — азот" (см. рисунки 1.4б и 1.5б). При сохранении характера распределения концентрации пара в газопаровом слое отмечены существенные количественные различия (рисунки 1.4в и 1.5в).



а б в

Рис. 1.4. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "HFE7100 — азот" при различных значениях расхода газа Q при условии нулевой концентрации пара при $y = h$ с учетом эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с)).

Рассмотрим случай, когда при использовании условия отсутствия потока пара на верхней границе канала эффект термодиффузии не учитывается (формула (1.39)). Рисунки 1.6 и 1.7 демонстрируют профили искомых функций для систем "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух" , соответственно. Заметим, что интенсивность течения жидкости возросла в сравнении с результатами, представленными на рисунках 1.2 и 1.3, когда эффект Соре принимался во внимание. При исследовании двухслойных течений в системе "жидкость — газ" типа "этанол — воздух" наблюдаются возвратные течения вблизи границы раздела (сравните рисунки 1.7 и 1.3). Обнаружено, что в системе "HFE7100 — азот" эффект Соре препятствует формированию интенсивных возвратных течений. Распределения температуры в обеих системах "жидкость — газ" имеют как качественные, так и количественные различия в зависимости от того, принимается эффект термодиффузии во внимание или нет (см. рисунки 1.2б и 1.6б, 1.3б и 1.7б). В отсутствие эффекта Соре наблюдается охлаждение границы раздела $y = 0$ при увеличении расхода

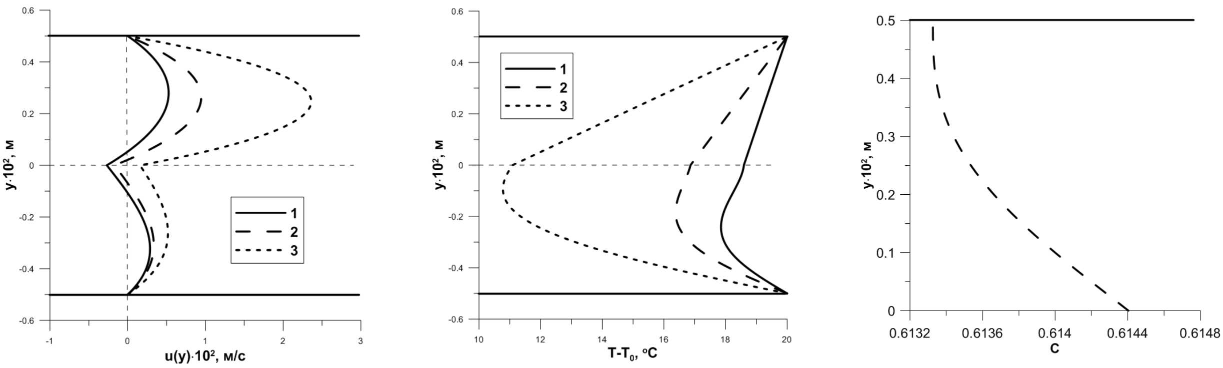


а б в

Рис. 1.5. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа Q при условии нулевой концентрации пара при $y = h$ с учетом эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с)).

газа в верхнем слое для обеих типов систем "жидкость — газ". Интересно заметить, что профили концентрации пара в верхнем слое также имеют как качественные, так и некоторые количественные отличия (рисунки 1.2в и 1.6в, 1.3в и 1.7в).

Рисунки 1.8 и 1.9 демонстрируют структуру течения, распределение температуры и концентрации пара в случае, когда полагается, что пар полностью поглощается верхней стенкой канала (условие (1.40)). Пусть эффект термодиффузии не учитывается в газопаровом слое при исследовании течений в системах "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух". Отметим, что в данном случае продольный градиент температуры на границе раздела A равен нулю, а зависимость продольных градиентов температуры на твердых стенках канала A_1 и A_2 определяется согласно формуле (1.69) (см. также Приложение 2). Для обеих исследуемых жидкостей (HFE7100 и этанола) наблюдается некоторое увеличение значений продольной скорости в сравнении со случаем, когда эффект Соре принимался во внимание (см. рисунки 1.4 и

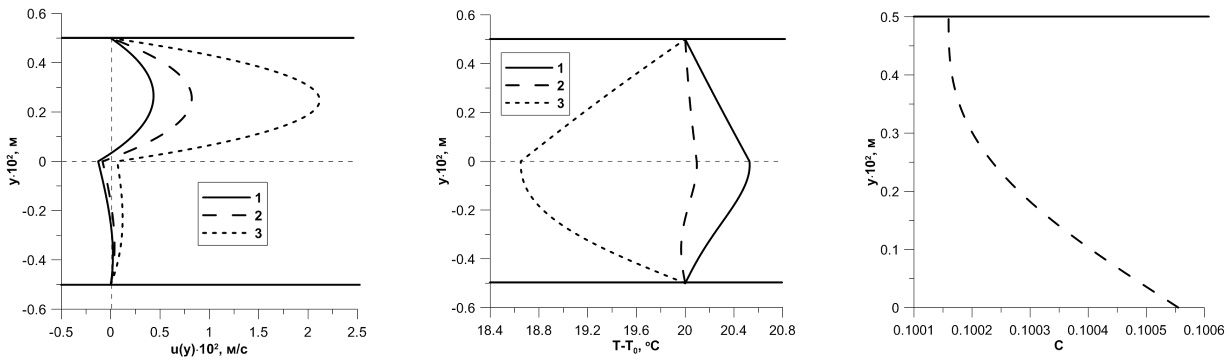


а б в

Рис. 1.6. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "HFE7100 — азот" при различных значениях расхода газа Q при условии отсутствия потока пара при $y = h$ без учета эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = A_1 = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с)).

1.5). При этом, по-прежнему, в системе "HFE7100 — азот" интенсивность течения в нижнем слое выше, чем в системе "этанол — воздух". В отсутствие эффекта термодиффузии для обеих систем наблюдается близкое к линейному распределение температуры в жидком слое, значение температуры на границе раздела при этом несколько выше, чем в случае учета эффекта Соре (рисунки 1.4б, 1.5б и 1.8, 1.9). Характер профилей концентрации пара в верхнем слое сохраняется независимо от влияния этого эффекта. Данная тенденция характерна для обеих систем, однако, наблюдаются некоторые количественные отличия. Так, в случае, когда в качестве жидкости выбирается HFE7100, а в качестве газа — азот, значения концентрации пара вблизи границы раздела значительно выше, чем при использовании в качестве рабочих сред этанола и воздуха. Учет эффекта термодиффузии незначительно снижал этот показатель для обеих систем.

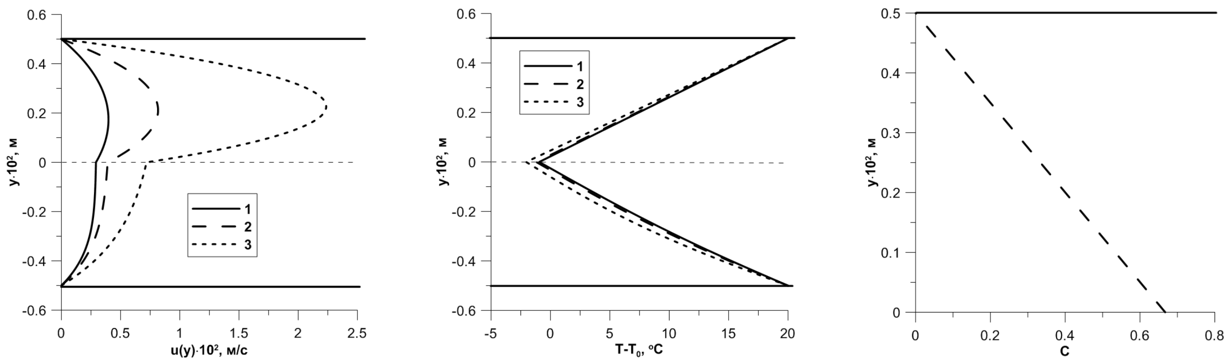
Таким образом, на структуру течения, распределения температуры в системе и концентрации пара в верхнем слое канала оказывают влияние



а б в

Рис. 1.7. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа Q при условии отсутствия потока пара при $y = h$ без учета эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A = A_1 = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с)).

выбор как граничных условий для концентрации пара на верхней стенке канала, так и типа системы "жидкость — газ". В случае, когда пар полностью поглощается верхней стенкой, изменение концентрации пара C в верхнем слое носит близкий к линейному характер; разница значений C на границе раздела и верхней стенке канала достаточно велика. Эффект термодиффузии также может способствовать значительному изменению особенностей поведения функции C. В случае, когда в качестве рабочих сред выбираются HFE7100 и азот, наблюдаются более яркие отличия в профилях искомых функций при увеличении значений расхода газа, чем при использовании системы "этанол — воздух".

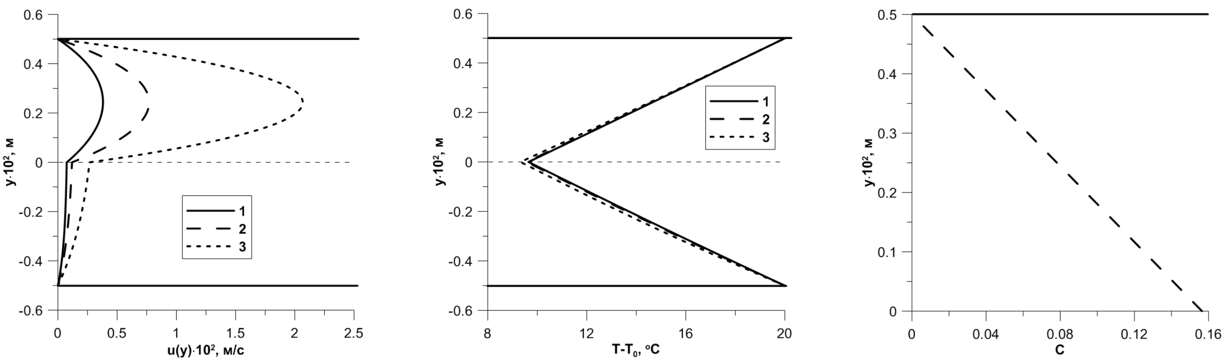


а б в

Рис. 1.8. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "HFE7100 — азот" при различных значениях расхода газа Q при условии нулевой концентрации пара при $y = h$ без учета эффекта Соре, $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A_1 = 10$ К/м: 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с)).

1.4.2. Исследование влияния продольных градиентов температуры на структуру течения и распределение температуры в системе

Рассмотрим случай, когда на верхней стенке канала выполняется условие (1.38) для концентрации пара, и эффект Соре учитывается. Изменение значений продольных градиентов температуры влечет изменение структуры течения, распределения температуры и концентрации пара в газовой среде. При определенных граничных температурных режимах возможно возникновение возвратных течений вблизи термокапиллярной границы раздела и смена типа течения [26, 28, 31, 32, 94]. Заметим, что функции продольных скоростей $u_1(y)$ и $u_2(y)$ на границе $y = 0$ удовлетворяют соотношениям $u_1(y)|_{y=0} = u_2(y)|_{y=0} = U = c_3$. Равенство нулю скорости U на термокапиллярной границе влечет за собой следуюшее соотношение: $Q = KA$, где K — константа, зависящая от типа жидкости, уровня гравитации и толщин жидкого и газопарового слоев:

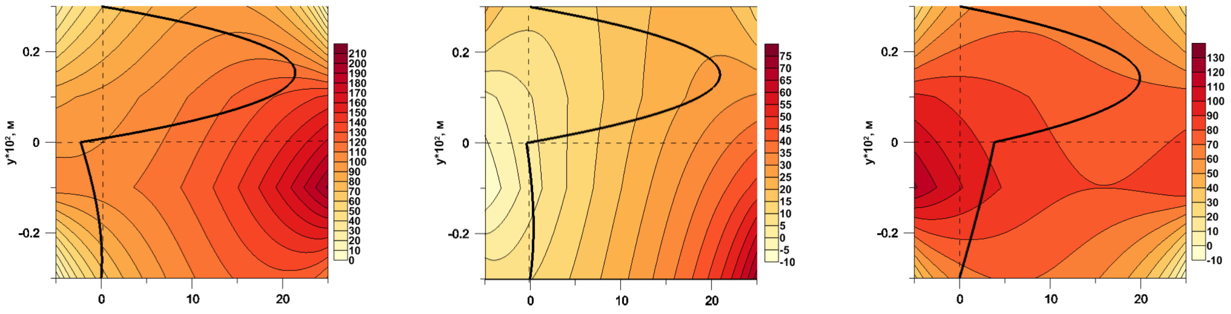


а б в

Рис. 1.9. Профили а — скорости, б — температуры, в — концентрации в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа Q при условии нулевой концентрации пара при $y = h$ без учета эффекта Соре. $h = l = 0.5 \cdot 10^{-2}$м, $A_1 = 10$ К/м. 1 — $Q = 0.18 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 2 — $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), 3 — $Q = 0.96 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с) (профиль концентрации приведен для $Q = 0.36 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с)).

$$K = \frac{h^4}{24}\frac{g\rho_2}{\nu_2}(\beta_2+\gamma C_*\varepsilon) - \frac{\rho_1}{6\nu_2}\frac{h^3}{h+l}\Big(\frac{l^2}{6}g\beta_1 + \frac{\sigma_T}{\rho_1}\Big) - \frac{g\rho_2}{36\nu_2}\frac{h^4}{h+l}(2h+3l)(\beta_2+\gamma C_*\varepsilon).$$

На рисунке 1.10 представлены примеры профилей скорости и распределения температуры в системе "этанол-воздух" при различных значениях продольных градиентов температуры и фиксированном расходе газа, демонстрирующие как возвратные течения вблизи границы раздела, так и сонаправленные с потоком газа. Константа K для системы с высотами слоев $h = 0.3 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 0.3 \cdot 10^{-2}$ м, находящейся в условиях нормальной гравитации, имеет значение $3.1615 \cdot 10^{-3}$ кг/(К с). "Застойная" точка на границе $y = 0$ наблюдается в рассматриваемых условиях в случае, когда продольный градиент температуры A равен $1.7792 \cdot 10^2$ К/м (здесь и далее A_1 полагается равным A, A_2 и вычисляется согласно Приложения 2). При значениях, превышающих данное, направление скорости на границе раздела меняется на противоположное, т.е. наблюдаются возвратные течения, происходит изменение режима течения с течения с "термокапиллярным" профилем скорости (рисунок 1.10а) на "пуазейлевский" (см. рисунок 1.10в).

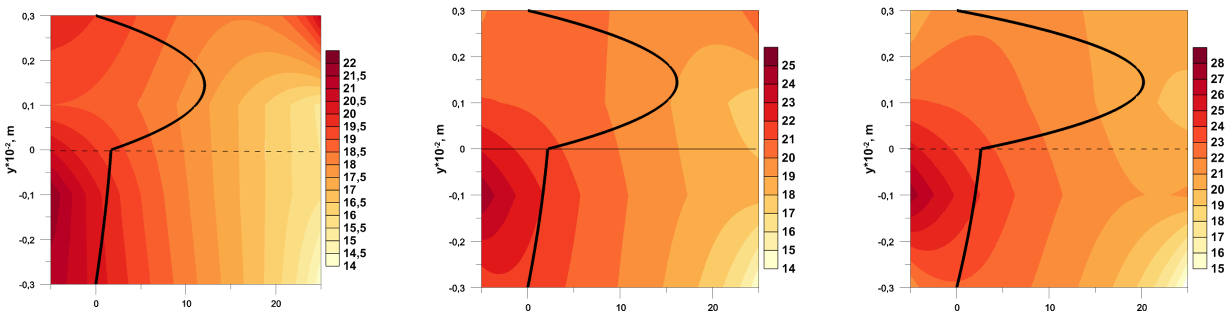


а б в

Рис. 1.10. Профили скорости и распределение температуры в системе "этанол — воздух", $Q = 5.625 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$м: а — $A = 3 \cdot 10^2$ К/м; б — $A = 1.7792 \cdot 10^2$ К/м; в — $A = -1 \cdot 10^2$ К/м.

Рисунок 1.11 демонстрирует профили скорости и распределение температуры в системе "этанол — воздух" для различных значений расхода газа Q в случае использования условия нулевой концентрации пара на границе $y = h$. Продольный градиент температуры на границе раздела A полагается равным -20 К/м. Распределение температуры в системе с ростом Q изменяется как качественно, так и количественно, при этом возрастает максимальное значение температуры.

На рисунке 1.12 показаны профили скорости и распределение температуры в случае, когда продольный градиент температуры на границе раздела A равен 20 К/м. В сравнении с рисунком 1.11 профили скорости меняются слабо. Однако, распределение температуры претерпевает значительные качественные изменения: зона охлаждения границы раздела сдвигается в направлении противоположном направлению оси Ox.



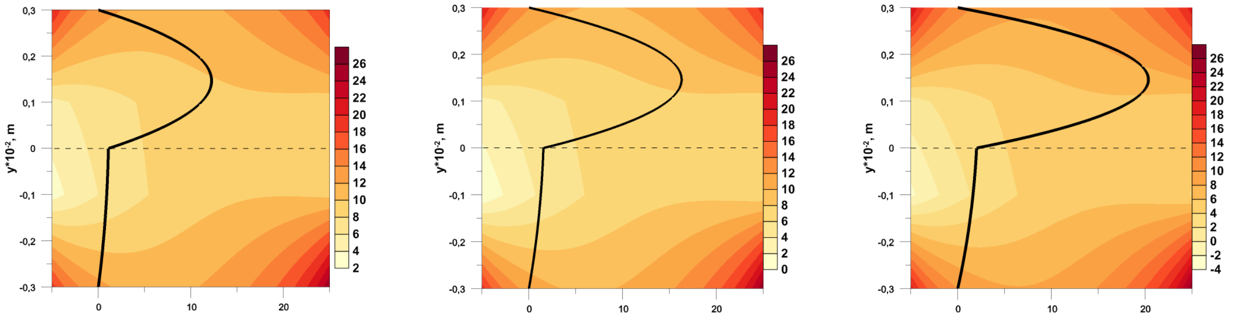
а б в

Рис. 1.11. Профили скорости и распределения температуры в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа, $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$м, $A = -20$ К/м: а — $Q = 3.375 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с); б — $Q = 4.5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с); в — $Q = 5.625 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с).

1.4.3. Влияние расхода газа в верхнем слое системы, толщины слоя жидкости и продольных градиентов температуры на испарение жидкости на границе раздела. Сравнение с экспериментальными данными

На основе предложеннных точных решений было проведено сравнение аналитических результатов с экспериментальными данными (см. [48,49,107], а также [31]). Рисунок 1.13 демонстрирует влияние расхода газа Q и продольных градиентов температуры A на интенсивность испарения жидкости в системах "HFE7100 — азот"(рис. 1.13а) и "этанол — воздух" (рис. 1.13б). На рисунке 1.13а аналитические расчеты приведены для значений параметров ϑ^+ и ϑ^-, равных 80^o С, а на рисунке 1.13б — 30^o С. Для экспериментальных данных зависимость величины от параметра Q имеет нелинейную форму (см. рисунки 1.13а и 1.13б, линия "1"), тогда как аналитические расчеты показывают линейную зависимость (линии "3"и "4"на рисунках 1.13а и 1.13б).

В таблице 2 отражены результаты сравнения массовой скорости испарения на границе раздела, полученные в ходе физических экспериментов

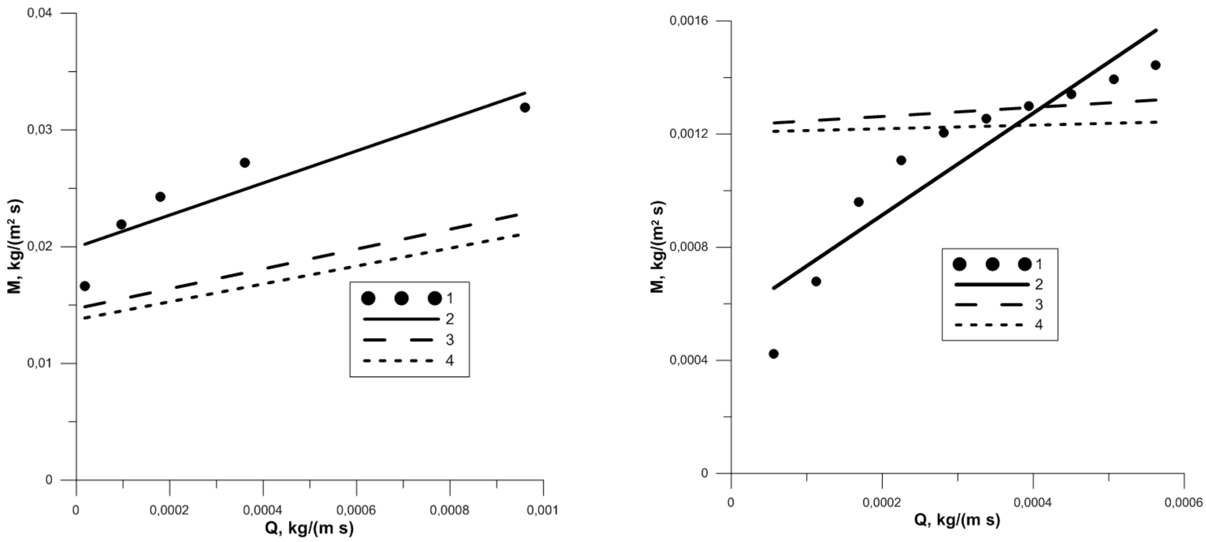


а б в

Рис. 1.12. Профили скорости и распределения температуры в системе "этанол — воздух" при различных значениях расхода газа, $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$м, $A = 20$ К/м: а — $Q = 3.375 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с); б — $Q = 4.5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с); в — $Q = 5.625 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с).

и вычисленные аналитически, для различных значений расхода газа для системы "этанол — воздух", а в таблице 3 представлены аналогичные результаты для системы "HFE7100 — азот". Параметр U_g в первых столбцах таблиц определяет значения скорости газа в верхнем слое, при которых проводились экспериментальные исследования, во вторых столбцах — соответствующие им значения расхода газа Q. Все аналитические расчеты получены в случае, когда на верхней стенке канала выполняется условие нулевой концентрации пара, учитывается эффект Соре. Таким образом, выявлено, что, хотя приводимые аналитические и экспериментальные результаты количественно отличаются, но имеет место качественно одинаковый характер: рост массовой скорости испарения жидкости M с ростом расхода газа Q. Следует отметить, что теоретические вычисления для первой из систем приведены для значений параметров ϑ^+ и ϑ^-, равных 20^o С, а для второй 80^o С.

Рисунки 1.14а и 1.14б демонстрируют влияние изменения продольного градиента температуры на границе раздела A и толщины жидкого слоя l на интенсивность испарения жидкости на границе $y = 0$ (см. формулу (1.66)). Значения параметров A и l выбраны в диапазоне от -100 до 100 К/м и от



а б

Рис. 1.13. Зависимость интенсивности испарения жидкости от расхода газа: а — система "HFE7100 — азот", $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м $l = 0.3 \cdot 10^{-2}$ м, 1 — экспериментальные данные, 2 — линия тренда экспериментальных данных, 3 — расчеты при $A = -100$ К/м, 4 — расчеты при $A = -90$ К/м; б — система "этанол-воздух", $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$ м, 1 — экспериментальные данные, 2 — линия тренда экспериментальных данных, 3 — расчеты при $A = -50$ К/м, 4 — расчеты при $A = -20$ К/м.

$0.1 \cdot 10^{-2}$ до $0.5 \cdot 10^{-2}$ м, соответственно, что удовлетворяет значениям параметров, описанных в работах [48, 49, 107] экспериментов. Для представленных диапазонов значений вид функции (1.66), качественно и количественно зависит от типа системы "жидкость-газ". Для обеих рассматриваемых систем "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух" существуют такие значения продольных градиентов температуры A, при которых масса испаряющейся жидкости M имеет локальный максимум относительно толщины жидкого слоя l, что было показано экспериментально.

Обнаружены ситуации, когда учет или неучет эффекта Соре приводит к смене испарения ($M > 0$) / конденсации ($M < 0$) (см. рисунок 1.14а и [80]).

Таким образом, в данной главе построены новые точные решения для моделирования двухслойных течений жидкости и газа в горизонтальном ка-

Таблица 2. Зависимость интенсивности испарения жидкости от расхода газа в системе "этанол-воздух"; $h = 0.3 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 0.3 \cdot 10^{-2}$, $A_1 = -100$ К/м.

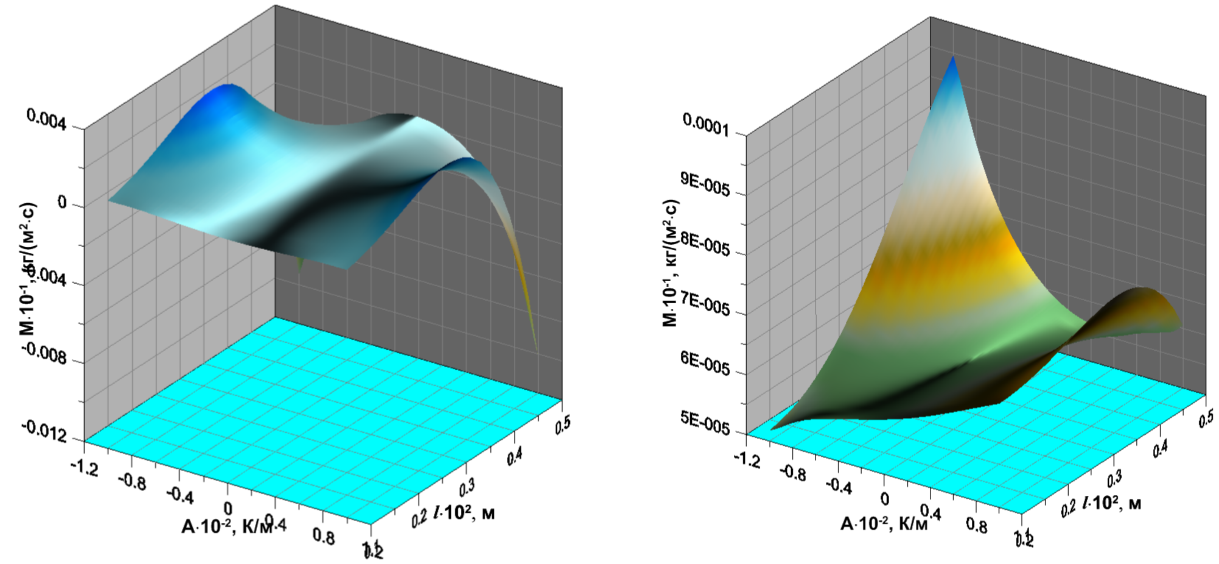
U_g, м/с	Q, кг/(м · с)	M эксп.	M теорет.
0.1389	$0.5625 \cdot 10^{-3}$	$1.444 \cdot 10^{-3}$	$1.1422 \cdot 10^{-3}$
0.125	$0.50625 \cdot 10^{-3}$	$1.395 \cdot 10^{-3}$	$1.1229 \cdot 10^{-3}$
0.111	$0.45 \cdot 10^{-3}$	$1.341 \cdot 10^{-3}$	$1.1035 \cdot 10^{-3}$
0.0972	$0.39375 \cdot 10^{-3}$	$1.299 \cdot 10^{-3}$	$1.0841 \cdot 10^{-3}$
0.0833	$0.3375 \cdot 10^{-3}$	$1.255 \cdot 10^{-3}$	$1.0648 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3. Зависимость интенсивности испарения жидкости от расхода газа в системе "HFE7100 — азот"; $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 0.3 \cdot 10^{-2}$, $A_1 = -100$ К/м.

U_g, м/с	Q, кг/(м · с)	M эксп.	M теорет.
0.16	$0.96 \cdot 10^{-3}$	$3.195 \cdot 10^{-2}$	$2.11 \cdot 10^{-2}$
0.06	$0.36 \cdot 10^{-3}$	$2.721 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$
0.03	$0.18 \cdot 10^{-3}$	$2.428 \cdot 10^{-2}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$
0.016	$0.96 \cdot 10^{-4}$	$2.19 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$
0.003	$0.18 \cdot 10^{-4}$	$1.6645 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$

нале с учетом эффектов Соре и Дюфура в газопаровом слое и испарения на термокапиллярной границе раздела. Реализованы алгоритмы нахождения неизвестных констант интегрирования с учетом и без учета эффекта термодиффузии в случае различных условий на верхней границе канала для концентрации пара и температуры.

Проведена классификация течений и их анализ в рамках рассмотренных постановок. При условии отсутствия потока пара на верхней стенке канала распределение температуры в системе существенно зависит от учета эффекта термодиффузии. Если эффект Соре не учитывается, то локальный минимум температуры в системе достигается на границе раздела либо вблизи нее. При учете эффекта термодиффузии выявлены случаи, когда на границе раздела достигается локальный максимум температуры. Распреде-



а б

Рис. 1.14. Зависимость интенсивности испарения от продольного градиента температуры и толщины жидкого слоя: а — в системе "HFE7100 — азот" $Q = 3.6 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с), $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м; б — в системе "этанол — воздух" $Q = 4.5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с), $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м.

ление концентрации пара носит нелинейный характер, и количественные изменения невелики. Если концентрация пара на верхней стенке равна нулю, то профиль температуры близок к линейному и одинаково слабо меняется при учете либо неучете эффекта термодиффузии. Однако в случае, когда эффект Соре принимается во внимание, в системе "HFE7100 — азот" наблюдается нелинейность в распределении температуры в жидком слое. Изменение концентрации пара C в верхнем слое носит близкий к линейному характер, и разница значений концентрации на границе раздела и верхней стенке достаточно велика.

Выделены три класса течений — чисто термокапиллярное, смешанное и пуазейлевское — в зависимости от доминирующих сил, а также подклассы смешанного и пуазейлевского течений. Получено условие возникновения возвратных течений вблизи границы раздела в случае нулевого потока пара на верхней стенке канала с учетом эффекта Соре. Данные условия характеризуется линейной зависимостью продольного градиента температуры A на границе раздела от расхода газа. Определены диапазоны значений A, при которых наблюдаются различные типы течений; показана смена течения Марангони, обусловленного термокаппилярным эффектом, на пуазейлевское течение.

Исследована зависимость особенностей течений от выбора рабочих сред. Для системы "HFE7100 — азот", наблюдаются более яркие изменения профилей всех искомых функций при увеличении значений расхода газа, чем для системы "этанол — воздух".

Проведено сравнение экспериментальных и аналитических результатов исследования испарения жидкости на границе раздела в системах "HFE7100 — азот" и "этанол — воздух". Выявлено, что качественные совпадения имеют место при использовании обоих типов условий для концентрации пара на верхней стенке. Однако при использовании условия полного поглощения пара верхней стенкой канала, наблюдаются наилучшие количественные совпадения с экспериментами при учете эффекта термодиффузии. Показано, что изменение расхода газа приводит к одинаковым качественным результатам при теоретических и экспериментальных исследованиях. При этом можно подобрать такие значения продольных градиентов температуры на границах системы, при которых данные аналитических расчетов совпадают с результатами экспериментов. Показано, что влияние толщины слоя жидкости l на испарение жидкости имеет качественно схожий характер как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях; наличие локального максимума массовой скорости испарения наблюдается при близких значениях толщины l.

Глава 2. Течение тонкого слоя жидкости по наклонной подложке

2.1. Постановка задачи на основе уравнений Навье—Стокса

Изучается тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающий по наклонной, неравномерно нагретой подложке в условиях спутного потока газа и испарения на термокапиллярной границе раздела. Задача рассматривается в случае, когда динамические процессы в газе не принимаются во внимание (односторонняя модель). Однако касательные напряжения, создаваемые газом, могут учитываться на границе раздела.

В рассматриваемой задаче течение жидкости изучается на основе системы уравнений Навье—Стокса и уравнения переноса тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) + g_1, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + g_2, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big). \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, w)$ —вектор скорости жидкости, p — давление, T — температура, ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, χ — коэффициент температуропроводности, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ — вектор массовых сил.

На рисунке 2.1 представлена геометрия области течения. Твердая непроницаемая подложка наклонена под углом α к горизонту. Система координат выбрана таким образом, что ось Ox направлена вдоль твердой гра-

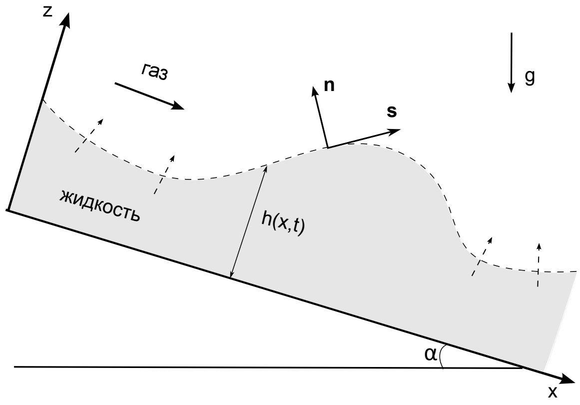


Рис. 2.1. Геометрия области течения

ницы. Твердая граница определяется уравнением $z = 0$, а положение границы раздела Γ — уравнением $z = h(x,t)$. Вектор силы тяжести имеет вид $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$, $g = |\mathbf{g}|$.

Пусть на твердой подложке $z = 0$ выполняются условия прилипания:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0; \tag{2.5}$$

а также задано распределение температуры:

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x,t). \tag{2.6}$$

Кинематическое, динамическое и энергетическое условия на границе раздела Γ могут быть записаны в следующем размерном виде [11, 23, 98]:

$$\rho(\upsilon_n - D_n) = \rho^g(\upsilon_n^g - D_n) = J_{ev}, \tag{2.7}$$

$$P_n - P_n^g = \frac{\rho^g - \rho}{\rho\rho^g} J_{ev}^2 + 2\sigma H, \tag{2.8}$$

$$2\rho\nu\mathbf{s}\cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n} - 2\rho^g\nu^g\mathbf{s}\cdot D(\mathbf{v}^g)\mathbf{n} = \nabla_\Gamma\sigma\cdot\mathbf{s}, \tag{2.9}$$

$$\kappa\frac{\partial T}{\partial n} - \kappa^g\frac{\partial T^g}{\partial n} - T\frac{d\sigma}{dT}div_\Gamma\mathbf{v} = J_{ev}\Big\{\lambda_U + \frac{\rho-\rho^g}{\rho\rho^g}P_n\Big\} +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(\rho^g-\rho)^2}{\rho^2\rho^{g2}}J_{ev}^3 + 2\sigma H\Big(1 - \frac{\rho}{\rho^g}\Big)\frac{J_{ev}}{\rho}, \tag{2.10}$$

где (2.8) и (2.9) — проекции динамического условия на нормаль и касательный вектор к границе Γ, соответственно. Здесь введены следующие обозначения: υ_n — нормальная скорость, D_n — скорость смещения границы

Γ в направлении нормали, $D_n = -\dfrac{F_t}{|\nabla_x F|}$, если Γ задана неявно в виде $F = 0$, градиент ∇_x вычисляется относительно пространственных переменных, $P_n = -p + 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}$ — нормальная составляющая вектора напряжений, κ — коэффициент теплопроводности, J_{ev} — поток испаряющейся жидкости, $\mathbf{s}$ — единичный касательный вектор, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ — коэффициент поверхностного натяжения (здесь σ_0 — некоторое относительное значение поверхностного натяжения, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения, σ_0 и σ_T — положительные постоянные), ∇_Γ — поверхностный градиент ($\nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$), H — средняя кривизна поверхности Γ. Принадлежность внешней газовой фазе обозначается с помощью индекса g. Первые два слагаемых в левой части условия (2.10) отвечают за дефект тепла при его переносе через границу раздела, третье определяет затраты энергии для преодоления деформации поверхности термокапиллярными силами вдоль поверхности. Правая часть соотношения (2.10) пропорциональна скорости потока испаряющейся массы и ответственна за затраты тепла на деформацию свободной поверхности в результате испарения. Первое слагаемое в правой части определяет расход тепла на парообразование, второе — на деформацию границы, третье — на изменение кинетической энергии вещества при фазовом переходе, и последнее — на совершаемую веществом жидкости при испарении (конденсации) работу вследствие изменения удельного объема [11,43,81]. Кроме того, необходимо задать выражение, определяющее локальный поток массы [11, 114]:

$$J = \alpha\rho_s\lambda_U\Big(\frac{M}{2\pi R_g T_s^3}\Big)^{1/2}(T - T_s). \tag{2.11}$$

Здесь α — коэффициент аккомодации, λ_U — скрытая теплота испарения, ρ_s — плотность пара, M — молекулярный вес, R_g — универсальная газовая постоянная, T_s — температура насыщенного пара.

В [114] уравнение (2.10), определяющее баланс энергии на свободной границе, задано в упрощенной форме:

$$\kappa\frac{\partial T}{\partial n} + \lambda_U J = 0. \qquad (2.12)$$

2.1.1. Постановка задачи в безразмерных переменных

В задаче о течении тонкого слоя имеется два различных масштаба длины, поскольку характерная длина деформации свободной поверхности намного превосходит амплитуду деформации. Пусть l — продольная характерная длина, d — поперечная характерная длина, причем $l \gg d$, так что $\varepsilon = \dfrac{d}{l}$ представляет собой малый параметр задачи. Отметим, что характерные продольная и поперечная скорости u_* и w_* также связаны между собой: $w_* = \varepsilon u_*$. Пусть характерное время процесса t_* связано с другими параметрами задачи следующим образом $l = u_* t_*$, а характерное давление задается выражением $p_* = \dfrac{\rho u_* \nu l}{d^2}$.

Система уравнений (2.1)-(2.4) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$Re\varepsilon^2(u_t + uu_x + wu_z) - \varepsilon^2 u_{xx} = u_{zz} - p_x + \gamma_1 \sin\alpha, \qquad (2.13)$$

$$Re\varepsilon^4(w_t + uw_x + ww_z) - \varepsilon^4 w_{xx} - \varepsilon^2 w_{zz} = -p_z - \gamma_2 \cos\alpha, \qquad (2.14)$$

$$u_x + w_z = 0, \qquad (2.15)$$

$$RePr\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) - \varepsilon^2 T_{xx} = T_{zz}. \qquad (2.16)$$

Здесь введены следующие обозначения для безразмерных комплексов: $Re = \dfrac{u_* l}{\nu}$ — число Рейнольдса, $Pr = \dfrac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, $\gamma_1 = \dfrac{Gr}{BuRe\varepsilon}$, $\gamma_2 = \dfrac{Gr}{BuRe}$, $Gr = \dfrac{Bugd^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа, $Bu = \beta T_*$ — число Буссинеска, T_* — характерный перепад температуры.

Пусть уравнение вида $z = h(x,t)$, по-прежнему, используется для задания границы раздела. Вектор нормали к границе $\mathbf{n}$ и касательный вектор $\mathbf{s}$ имеют координаты (n_1, n_2) и $(n_2, -n_1)$, соответственно, где $n_1 =$

$-\dfrac{\varepsilon h_x}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}}$, $n_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}}$. Кривизна свободной границы и скорость ее перемещения по направлению внешней нормали задаются соотношениями:

$$2H = \frac{\varepsilon h_{xx}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 h_x^2)^3}}, \quad D_n = -\frac{\varepsilon h_t}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}}.$$

На границе раздела $z = h(x,t)$ должны быть выполнены кинематическое, динамическое и энергетическое условия [23, 97, 98]. Представим кинематическое условие в виде:

$$-\varepsilon(h_t + h_x u - w)\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}} = J_{ev}\bar{J}. \tag{2.17}$$

Динамические условия (2.8) и (2.9) в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$-p + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 h_x^2}[\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] = -p^g + \frac{\bar{\rho}\bar{\nu}\bar{\upsilon}}{\bar{h}}\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 h_x^2}\cdot$$

$$\cdot[\varepsilon^2 h_x^2 u_x^g + w_z^g - \varepsilon h_x(u_z^g + w_x^g)] + Re\varepsilon^2(1 - \frac{1}{\bar{\rho}})J_{ev}^2\bar{J}^2 + 2\sigma H\frac{\varepsilon^2}{Ca}, \tag{2.18}$$

$$\frac{2}{1+\varepsilon^2 h_x^2}\Big[-\varepsilon h_x u_x + \varepsilon h_x w_z - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \varepsilon^2 h_x)(u_z + \varepsilon^2 w_x)\Big] -$$

$$-\frac{\bar{\rho}\bar{\nu}\bar{\upsilon}}{\bar{h}}\frac{2}{1+\varepsilon^2 h_x^2}\Big[-\varepsilon h_x u_x^g + \varepsilon h_x w_z^g + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_z^g + w_x^g)\Big] =$$

$$= -\frac{Ma}{RePr}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}}(T_x + h_x T_z)\Big]. \tag{2.19}$$

Представим энергетическое условие в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \beta_2\{T div_\Gamma v\} = \beta_3\bar{J}J_{ev} + \beta_4\bar{J}J_{ev}\Big\{-p + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 h_x^2}[\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z -$$

$$-h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)]\Big\} + \frac{1}{2}\beta_5\bar{J}^3 J_{ev}^3 + \beta_6\sigma\Big\{\frac{\varepsilon h_{xx}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 h_x^2)^3}}\Big\}\bar{J}J_{ev}. \tag{2.20}$$

Здесь $\dfrac{\partial T}{\partial n}$ и $div_\Gamma \mathbf{v}$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 h_x^2}}(-\varepsilon^2 H_x T_x + T_z),$$

$$div_\Gamma \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{2} n_i (n \cdot \nabla v_i) =$$

$$= (u_x + w_z)|_\Gamma - \Big\{ \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{1+\varepsilon^2 h_x^2} u_x - \frac{\varepsilon h_x}{1+\varepsilon^2 h_x^2} u_z - - \frac{\varepsilon h_x}{1+\varepsilon^2 h_x^2} w_x + \frac{1}{1+\varepsilon^2 h_x^2} w_z \Big\}.$$

Поскольку принята линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, то в безразмерной форме она имеет вид: $\sigma = 1 - \alpha_\sigma T$, $\alpha_\sigma = \dfrac{MaCa}{RePr}$. Также введены следующие обозначения: $Ma = \dfrac{\sigma_T T_* l}{\rho\nu\chi}$ — число Марангони, $Ca = \dfrac{u_*\rho\nu}{\sigma_0}$ — капиллярное число, $\bar{\nu}$, $\bar{\rho}$ — отношение коэффициентов кинематической вязкости и плотностей газа и жидкости, соответственно $\Big(\bar{\nu} = \dfrac{\nu^g}{\nu}; \bar{\rho} = \dfrac{\rho^g}{\rho}\Big)$, $\bar{v} = \dfrac{u_*^g}{u_*}$ — отношение характерной продольной скорости газа к характерной скорости жидкости u_*, p^g — давление в газе. Коэффициенты β_i $(i = 2, ..., 6)$ следующим образом выражаются через другие безразмерные комплексы: $\beta_2 = \dfrac{Ma}{Re^2 PrE\overline{U}}$, $\beta_3 = \dfrac{1}{E}$, $\beta_4 = (\dfrac{1}{\bar{\rho}} - 1)\dfrac{1}{E\overline{U}}$, $\beta_5 = (1 - \dfrac{1}{\bar{\rho}})^2 \dfrac{1}{E\overline{U}}$, $\beta_6 = (1 - \dfrac{1}{\bar{\rho}})\dfrac{1}{ReCaE\overline{U}}$, $\overline{U} = \dfrac{\lambda_U}{u_*^2}$, $E = \dfrac{\kappa T_*}{\lambda_U \rho\nu}$ — параметр испарения [120].

Для определения величины локального потока массы пара на границе раздела J_{ev} примем соотношение (см. [114]):

$$J_{ev} = \alpha_J T|_{z=h(x,t)}. \tag{2.21}$$

Здесь коэффициент α_J определится, исходя из соотношения Герца-Кнудсена, записанного в размерной форме [23, 114] (см. (2.11)) $\Big(\alpha_J = \alpha\rho_s\lambda_U \dfrac{T_*}{J_*}\big(\dfrac{M}{2\pi R_g T_s^3}\big)^{1/2}\Big)$. Отметим, что $\bar{J} = \dfrac{J_*^{ev}}{\rho u_*}$ или $\bar{J} = \dfrac{E}{Re}$, где характерная величина потока массы пара J_*^{ev} вычисляется следующим образом: $J_*^{ev} = \dfrac{\kappa T_*}{\lambda_U \rho\nu}$.

На твердой границе $z = 0$ условия прилипания и распределение температуры сохраняют вид (2.5) и (2.6).

Выбирая характерную скорость u_*, равной характерной скорости релаксации вязких напряжений $u_\nu = \dfrac{\nu}{l}$, получим $Re = 1$. Тем самым дальнейшее моделирование применимо для случая умеренных чисел Рейнольдса ($Re = O(1)$).

2.1.2. Решение задачи для главных членов разложения

Для определения искомых функций u, w, T, p, а также толщины слоя жидкости h рассматривается система уравнений (2.13)-(2.16) в длинноволновом приближении. Решение задачи ищем в виде разложений по степеням малого параметра ε:

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + ..., \qquad w = w^0 + \varepsilon w^1 + ...,$$

$$p = p^0 + \varepsilon p^1 + ..., \qquad T = T^0 + \varepsilon T^1 + ...$$

Тогда уравнения (2.13)-(2.16), записанные для главных членов разложения, примут вид

$$p^0_x = u^0_{zz} + \gamma_1 \sin\alpha, \tag{2.22}$$

$$p^0_z = -\gamma_2 \cos\alpha, \tag{2.23}$$

$$w^0_z = -u^0_x, \tag{2.24}$$

$$T^0_{zz} = 0. \tag{2.25}$$

Следствием условий прилипания (2.5) на границе $z = 0$ являются условия

$$u^0|_{z=0} = 0, \quad w^0|_{z=0} = 0, \tag{2.26}$$

а условие для температуры (2.6) приведет к следующему требованию:

$$T^0|_{z=0} = \Theta_0. \tag{2.27}$$

Следствием условий на границе раздела (2.17)-(2.21) являются следующие соотношения:

$$p^0 = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx}(1 - \alpha_\sigma \Theta^0), \tag{2.28}$$

$$u^0_z = -\alpha_{Ma} \tilde{\Theta}, \tag{2.29}$$

$$T_z^0 = \bar{\beta}_3 J_0 + \bar{\beta}_6 J_0 h_{xx}. \tag{2.30}$$

Здесь $\Theta^0 = T^0|_{z=h(x,t)}$, $\tilde{\Theta} = (T_x^0 + h_x T_z^0)|_{z=h(x,t)}$. Заметим, что динамическое условие (2.19) и условие баланса энергии (2.20) на границе раздела записаны без учета дополнительных касательных напряжений и дивергентного слагаемого.

Интегрируя уравнения (2.29)-(2.30), получим, что общими решениями являются функции u^0, w^0, p^0, T^0 вида:

$$u^0 = (C_0)_x \frac{z^2}{2} - \gamma_1 \sin\alpha \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2(x,t), \tag{2.31}$$

$$w^0 = -(C_0)_{xx} \frac{z^3}{6} - (C_1)_x \frac{z^2}{2} - (C_2)_x + C_3(x,t), \tag{2.32}$$

$$p^0 = -\gamma_2 \cos\alpha z + C_0, \tag{2.33}$$

$$T^0 = A(x,t) z + C_4(x,t). \tag{2.34}$$

Принимая во внимание условия на твердой подложке, имеем $C_2(x,t) = 0$, $C_3(x,t) = 0$, $C_4(x,t) = \Theta_0(x,t)$. Исходя из условий на границе раздела, получим, что коэффициенты $C_0(x,t)$, $C_1(x,t)$, $A(x,t)$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$C_0(x,t) = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx}(1 - \alpha_\sigma \Theta^0) + \gamma_2 \cos\alpha h,$$

$$C_1(x,t) = -\alpha_{Ma}\tilde{\Theta} - (C_0)_x h + \gamma_1 \sin\alpha h,$$
$$A = \frac{(\bar{\beta}_3 \alpha_J + \bar{\beta}_6 h_{xx} \alpha_J)\Theta_0}{1 - \bar{\beta}_3 \alpha_J h - \bar{\beta}_6 \alpha_J h_{xx} h},$$

Здесь $\overline{\beta}_3 = \varepsilon \beta_3 \overline{J}$, $\overline{\beta}_6 = \varepsilon^2 \beta_6 \overline{J}$. Для Θ^0 и $\tilde{\Theta}$ имеем: $\Theta^0 = Ah + \Theta_0$, $\tilde{\Theta} = A_x h + (\Theta_0)_x + h_x A$.

2.1.3. Решение задачи для первых членов разложения

Уравнения (2.13)-(2.16), записанные для первых членов разложения по степеням параметра ε, примут вид

$$p_x^1 = u_{zz}^1 + \gamma_1 \sin\alpha, \tag{2.35}$$

$$p_z^1 = -\gamma_2 \cos\alpha, \tag{2.36}$$

$$w_z^1 = -u_x^1, \tag{2.37}$$

$$T_{zz}^1 = 0. \tag{2.38}$$

Следствием условий прилипания на границе $z = 0$ (2.5) являются условия

$$u^1|_{z=0} = 0, \quad w^1|_{z=0} = 0, \tag{2.39}$$

а температура (2.6) удовлетворяет равенству:

$$T^1|_{z=0} = \Theta_0. \tag{2.40}$$

2.1.4. Определение толщины жидкого слоя

Используя соотношение (2.17), получим следующее уравнение для определения толщины слоя жидкости:

$$h_t + uh_x - w + \frac{E}{\varepsilon} J_{ev} = 0. \tag{2.41}$$

Перепишем его в следующем виде:

$$h_t + h_x\Big[(C_0)_x\frac{h^2}{2} - \gamma_1 \sin\alpha\frac{h^2}{2} + C_1 h\Big] - \Big[-(C_0)_{xx}\frac{h^3}{6} - (C_1)_x\frac{h^2}{2}\Big] + \frac{E}{\varepsilon}J_{ev} = 0$$

или

$$h_t + h_x(C_0)_x\Big[-\frac{h^2}{2} - 1\Big] + h_x\gamma_1\sin\alpha\Big[\frac{h^2}{2} + 1\Big] + (C_0)_{xx}\Big[\frac{h^3}{6} - h\Big] -$$

$$-\alpha_{Ma}\Big[h_x\widetilde{\Theta}h + \widetilde{\Theta}_x\Big] + \frac{E}{\varepsilon}J_{ev} = 0. \tag{2.42}$$

Здесь $J_{ev} = \alpha_J[A(x,t)h + \Theta_0(x,t)]$.

Следует отметить, что для замыкания постановки задачи следует задать начальное положение термокапиллярной граница раздела.

Задача состоит в нахождении функции $h(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$h_t + h_x\Big[(C_0)_x\frac{h^2}{2} - \gamma_1 \sin\alpha\frac{h^2}{2} + C_1 h\Big] - \Big[-(C_0)_{xx}\frac{h^3}{6} - (C_1)_x\frac{h^2}{2}\Big] + \frac{E}{\varepsilon}J_{ev} = 0,$$

Таблица 2.1

Значения параметров α_f в системе "этанол — азот"

α_f — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\alpha_\sigma = \dfrac{MaCa}{RePr}$	10^{-2}	10^{-1}
$\alpha_{Ca} = \dfrac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^5\varepsilon^3$	$10^5\varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2(\dfrac{1}{\bar\rho} - 1)\bar J^2$	$10^{-5}\varepsilon^2$	$10^{-3}\varepsilon^2$
$\alpha_\tau = \dfrac{\bar\rho\,\bar\nu\,\bar v\,\varepsilon}{\bar h}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \dfrac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^3\varepsilon$	$10^4\varepsilon$

начальным условиям $h(x,0) = h_0(x) = 1 - 0.1\cos(kx)$ (см. [114]) и условия на бесконечности.

Поскольку

$$(C_0)_x = -\alpha_{Ca}h_{xxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_x) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_x,$$

$$(C_0)_{xx} = -\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_{xx}) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_{xx},$$

$$(C_1)_x = -\alpha_{Ma}(A_xh + (\Theta_0)_x + h_xA)_x -$$

$$-\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_{xx}) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_{xx}\Big]h -$$

$$-\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_x) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_x\Big]h_x + \gamma_1\sin\alpha \cdot h_x,$$

представим уравнение (2.1.4) в виде

$$h_t + h_x\Big[\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_x) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_x\Big]\frac{h^2}{2} - \gamma_1\sin\alpha\frac{h^2}{2} +$$

$$+\Big[-\alpha_{Ma}\tilde\Theta - (C_0)_xh + \gamma_1\sin\alpha h\Big]h\Big] +$$

$$+\Big[\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_{xx}) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_{xx}\Big]\frac{h^3}{6} +$$

$$+\Big[-\alpha_{Ma}(A_xh + (\Theta_0)_x + h_xA)_x - \Big[-\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)_{xx}) + \gamma_2\cos\alpha \cdot h_{xx}\Big]h -$$

Таблица 2.2

Значения параметров α_f в системе "HFE 7100 — азот"

α_f — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\alpha_\sigma = \dfrac{MaCa}{RePr}$	10^{-3}	10^{-2}
$\alpha_{Ca} = \dfrac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^6\varepsilon^3$	$10^6\varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2(\dfrac{1}{\bar\rho} - 1)\bar J^2$	$10^{-3}\varepsilon^2$	$10^{-1}\varepsilon^2$
$\alpha_\tau = \dfrac{\bar\rho\,\bar\nu\,\bar v\,\varepsilon}{\bar h}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \dfrac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^4\varepsilon$	$10^5\varepsilon$

$$-\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)_x)+\gamma_2\cos\alpha\cdot h_x\Big]h_x+\gamma_1\sin\alpha\cdot h_x\Big]\frac{h^2}{2}\Big]+\frac{E}{\varepsilon}J_{ev}=0,$$

или

$$h_t + h_x\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)_x)+\gamma_2\cos\alpha\cdot h_x\Big]\Big[-\frac{h^2}{2}-1\Big]+$$

$$+h_x\gamma_1\sin\alpha\Big[\frac{h^2}{2}+1\Big]+\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)_{xx})+\gamma_2\cos\alpha\cdot h_{xx}\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\frac{h^3}{6}-h\Big]-\alpha_{Ma}\Big[h_x\widetilde\Theta h+\widetilde\Theta_x\Big]+\frac{E}{\varepsilon}J_{ev}=0.$$

Подставляя в полученное выражение соотношение для $\widetilde\Theta$, имеем следующее уравнение, определяющее толщину слоя жидкости:

$$h_t + h_x\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)_x)+\gamma_2\cos\alpha\cdot h_x\Big]\Big[-\frac{h^2}{2}-1\Big]+$$

$$+h_x\gamma_1\sin\alpha\Big[\frac{h^2}{2}+1\Big]+\Big[-\alpha_{Ca}h_{xxxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)_{xx})+\gamma_2\cos\alpha\cdot h_{xx}\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\frac{h^3}{6}-h\Big]-\alpha_{Ma}\Big[h_xh(A_xh+(\Theta_0)_x+h_xA)+A_{xx}h+2A_xh_x+(\Theta_0)_{xx}+h_{xx}A\Big]+\frac{E}{\varepsilon}J_{ev}=0.$$

Данное уравнение можно представить в дивергентном виде:

$$h_t + \Big[-C_{0\,x}\frac{h^3}{3}+\gamma_1\sin\alpha\frac{h^3}{3}-\alpha_{Ma}\widetilde\Theta\frac{h^2}{2}\Big]_x+\frac{E}{\varepsilon}J_{ev}=0,$$

Таблица 2.3

Значения параметров α_f в системе "FC 72 — азот"

α_f — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\alpha_\sigma = \dfrac{MaCa}{RePr}$	10^{-2}	10^{-1}
$\alpha_{Ca} = \dfrac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^5\varepsilon^3$	$10^5\varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2(\dfrac{1}{\bar\rho} - 1)\bar J^2$	$10^{-3}\varepsilon^2$	$10^{-1}\varepsilon^2$
$\alpha_\tau = \dfrac{\bar\rho\,\bar\nu\,\bar v\,\varepsilon}{\bar h}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \dfrac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^4\varepsilon$	$10^5\varepsilon$

или, подставляя выражения для $\widetilde\Theta$ и J_{ev}:

$$h_t + \Big[- C_{0\,x}\frac{h^3}{3} + \gamma_1 \sin\alpha \frac{h^3}{3} + \alpha_{Ma}(Ah + \Theta_0)hh_x\Big]_x - \alpha_{Ma}\Big[(Ah+\Theta_0)\frac{h^2}{2}\Big]_{xx} +$$

$$+\frac{E}{\varepsilon}\alpha_J(Ah + \Theta_0) = 0.$$

Здесь $C_{0\,x}$ и A имеют вид

$$C_{0\,x} = [-\alpha_{Ca}h_{xx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)) + \gamma_2\cos\alpha h]_x,$$

$$A = \frac{(\bar\beta_3\alpha_J + \bar\beta_6 h_{xx}\alpha_J)\Theta_0}{1 - \bar\beta_3\alpha_J h - \bar\beta_6\alpha_J h_{xx}h}.$$

Система уравнений для определения толщины жидкого слоя принимает вид:

$$h_t - C_{0\,x}h^2h_x - C_{0\,xx}\frac{h^3}{3} + \gamma_1\sin\alpha h^2h_x - \alpha_{Ma}\Big[A_{xx}h + 2A_xh_x + Ah_{xx} + \Theta_{0\,xx}\Big]\frac{h^2}{2} +$$

$$+\frac{E}{\varepsilon}\alpha_J(Ah + \Theta_0) = 0.$$

$$C_0 = p^g - \alpha_{Ca}h_{xx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)) + \gamma_2\cos\alpha\, h,$$

$$A = \frac{(\bar\beta_3\alpha_J + \bar\beta_6 h_{xx}\alpha_J)\Theta_0}{1 - \bar\beta_3\alpha_J h - \bar\beta_6\alpha_J h_{xx}h},$$

На границах $x = \pm L$ выполняются условия: $h = 1 + \delta_1$, $h_x = 0$. В начальный момент времени толщина слоя жидкости зависит от x следующим образом: $h = 1 - \delta_1\cos(kx)$. Функция $\Theta_0 = 1 + \delta_0\cos(kx)$.

Таблица 2.4

Значения параметров β_i в системе "этанол — азот"

β_i — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\beta_2 = \dfrac{Ma}{Re^2 Pr E\overline{\overline{U}}}$	$10 \cdot \varepsilon^{-2}$	$10 \cdot \varepsilon^{-2}$
$\beta_3 = \dfrac{1}{E}$	10^4	10^3
$\beta_4 = (\dfrac{1}{\overline{\rho}} - 1)\dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	10	1
$\beta_5 = (1 - \dfrac{1}{\overline{\rho}})^2 \dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	10^3	10^2
$\beta_6 = (1 - \dfrac{1}{\overline{\rho}})\dfrac{1}{ReCaE\overline{\overline{U}}}$	$-10^6\varepsilon^{-1}$	$-10^5\varepsilon^{-1}$
$\overline{\beta}_2 = \varepsilon\beta_2$	$10\varepsilon^{-1}$	$10\varepsilon^{-1}$
$\overline{\beta}_3 = \varepsilon\beta_3\overline{J}$	ε	ε
$\overline{\beta}_6 = \varepsilon^2\beta_6\overline{J}$	$-10^2\varepsilon$	$-10^2\varepsilon$

2.2. Постановка задачи на основе уравнений конвекции Обербека—Буссинеска

Пусть в качестве математической модели рассматриваемой задачи используется система уравнений Обербека—Буссинеска, т.е. принимаются во внимание силы плавучести. Тогда система уравнений, описывающая течения жидкости по наклонной подложке в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$Re\varepsilon^2(u_t + uu_x + wu_z) = -p'_x + \varepsilon^2 u_{xx} + u_{zz} - \gamma_1 T \sin\alpha, \tag{2.43}$$

$$Re\varepsilon^4(w_t + uw_x + ww_z) = -p'_z + \varepsilon^4 w_{xx} + \varepsilon^2 w_{zz} + \gamma_2 T \cos\alpha, \tag{2.44}$$

$$u_x + w_z = 0, \tag{2.45}$$

$$RePr\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) = \varepsilon^2 T_{xx} + T_{zz}. \tag{2.46}$$

Таблица 2.5

Значения параметров β_i в системе "HFE7100 — азот"

β_i — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\beta_2 = \dfrac{Ma}{Re^2 Pr E \overline{\overline{U}}}$	ε^{-2}	ε^{-2}
$\beta_3 = \dfrac{1}{E}$	10^3	10^2
$\beta_4 = (\dfrac{1}{\rho} - 1)\dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	1	0.1
$\beta_5 = (1 - \dfrac{1}{\rho})^2 \dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	10^3	10^2
$\beta_6 = (1 - \dfrac{1}{\rho})\dfrac{1}{ReCaE\overline{\overline{U}}}$	$-10^6\varepsilon^{-1}$	$-10^5\varepsilon^{-1}$
$\overline{\beta}_2 = \varepsilon\beta_2$	ε^{-1}	ε^{-1}
$\overline{\beta}_3 = \varepsilon\beta_3\overline{J}$	ε	ε
$\overline{\beta}_6 = \varepsilon^2\beta_6\overline{J}$	$-10^2\varepsilon$	$-10^2\varepsilon$

Здесь p' — модифицированное давление ($p' = p - \dfrac{\gamma_1}{\beta T_*} x \sin\alpha + \dfrac{\gamma_2}{\beta T_*} z \cos\alpha$), $\gamma_1 = \dfrac{Gr}{Re\varepsilon}$, $\gamma_2 = \dfrac{Gr}{Re}$, $Gr = \dfrac{d^3 g \beta T_*}{\nu^2}$ — число Грасгофа,

Система координат выбрана так, чтобы ось Ox была направлена вдоль твердой границы $z = 0$, $g = |\mathbf{g}|$, вектор силы тяжести имеет вид $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$ (Рис. 2.1).

В ходе параметрического анализа задачи в случае, когда члены более высокого порядка, чем ε^2 не принимаются во внимание, обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия примут вид

$$(h_t + h_x u - w) + \frac{E}{\varepsilon} J_{ev} = 0, \tag{2.47}$$

$$-p + 2\varepsilon^2(w_z - h_x u_z) = -p^g + \alpha_E J_{ev}^2 + \alpha_{Ca} h_{xx}(1 - \alpha_\sigma T), \tag{2.48}$$

$$\varepsilon^2 h_x(w_z - u_x) + 0.5(u_z + \varepsilon^2 w_x) =$$

$$= \alpha_\tau\Big[\varepsilon h_x(w_z^g - u_x^g) + 0.5(u_z^g + w_x^g)\Big] - 0.5\alpha_{Ma}(T_x + h_x T_z), \tag{2.49}$$

Таблица 2.6

Значения параметров β_i в системе "FC72 — азот"

β_i — параметр	значения ($T_* = 1\ K$)	значения ($T_* = 10\ K$)
$\beta_2 = \dfrac{Ma}{Re^2 Pr E\overline{\overline{U}}}$	ε^{-2}	ε^{-2}
$\beta_3 = \dfrac{1}{E}$	10^3	10^2
$\beta_4 = (\dfrac{1}{\rho} - 1)\dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	1	0.1
$\beta_5 = (1 - \dfrac{1}{\rho})^2 \dfrac{1}{E\overline{\overline{U}}}$	10^3	10^2
$\beta_6 = (1 - \dfrac{1}{\rho})\dfrac{1}{ReCaE\overline{\overline{U}}}$	$-10^7\varepsilon^{-1}$	$-10^6\varepsilon^{-1}$
$\overline{\beta}_2 = \varepsilon\beta_2$	ε^{-1}	ε^{-1}
$\overline{\beta}_3 = \varepsilon\beta_3\overline{J}$	ε	ε
$\overline{\beta}_6 = \varepsilon^2\beta_6\overline{J}$	$-10^2\varepsilon$	$-10^2\varepsilon$

$$-T_z + \varepsilon^2 h_x T_x + \beta_2\{T div_\Gamma \mathbf{v}\} = \beta_3 J_{ev} + \beta_4 J_{ev}[-p + 2\varepsilon^2(w_z - h_x u_z)] +$$
$$+0.5\beta_5 J_{ev}^3 + \beta_6\, \varepsilon h_{xx}(1 - \alpha_\sigma T) J_{ev}. \tag{2.50}$$

2.2.1. Определение толщины жидкого слоя

Ограничимся в данном случае постановкой задач для главных членов разложений искомых функций по степеням малого параметра ε. Вследствие уравнений (2.43)-(2.46) и (2.47)-(2.50), уравнение для толщины слоя h можно записать в виде:

$$h_t + h_x\Big[\underline{\frac{1}{24}\gamma_2\cos\alpha A_x h^4 + \frac{1}{6}(\gamma_2\cos\alpha(\Theta_0)_x + \gamma_1\sin\alpha A)h^3} +$$
$$+\frac{1}{2}((C_0)_x + \gamma_1\sin\alpha\Theta_0)h^2 + C_1 h\Big] + \Big[\underline{\frac{1}{120}\gamma_2\cos\alpha A_{xx}h^5 + \frac{1}{24}(\gamma_2\cos\alpha(\Theta_0)_{xx}} +$$
$$\underline{+\gamma_1\sin\alpha A_x)h^4} + \frac{1}{6}((C_0)_{xx} + \underline{\gamma_1\sin\alpha(\Theta_0)_x})h^3 + \frac{1}{2}(C_1)_x h^2\Big] +$$
$$+\frac{E}{\varepsilon}\alpha_J(Ah + \Theta_0) = 0. \tag{2.51}$$

Здесь

$$J_{ev} = \alpha_J[A(x,t)h + \Theta_0(x,t)].$$

Нижним подчеркиванием отмечены слагаемые, получаемые в случае использования системы уравнений Обербека—Буссинеска. Функция Θ_0 предполагается заданной (см. (2.6)). Для функции A имеет место следующее дифференциальное уравнение:

$$-A + \beta_2(Ah+\Theta_0)\Big(\frac{1}{24}\gamma_2\cos\alpha A_{xx}h^4 + \frac{1}{6}\gamma_2\cos\alpha(\Theta_0)_{xx}h^3 + \frac{1}{2}(C_0)_{xx}h^2 +$$
$$+\frac{1}{6}\gamma_1\sin\alpha A_x h^3 + \frac{1}{2}\gamma_1\sin\alpha(\Theta_0)_x h^2 + (C_1)_x h\Big) - \beta_2(Ah+\Theta_0)h_x\Big(\frac{1}{6}\gamma_2\cos\alpha h^3 +$$
$$+\frac{1}{2}h^2[(\Theta_0)_x\gamma_2\cos\alpha + A\gamma_1\sin\alpha] + h[(C_0)_x + \Theta_0\gamma_1\sin\alpha] + C_1\Big) =$$
$$= \alpha_J(\beta_3 + \bar{\beta}_6 h_{xx})(Ah+\Theta_0). \tag{2.52}$$

Здесь $\bar{\beta}_6 = \beta_6\varepsilon$. Функции C_0, C_1 выражаются через функции h и A следующим образом:

$$C_0(x,t) = p^g - \alpha_{Ca}h_{xx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)) - \gamma_2\cos\alpha(1/2)Ah^2 - \gamma_2\cos\alpha\Theta_0 h -$$
$$-\gamma_1(\beta T_*)^{-1}x\sin\alpha + \gamma_2 h\cos\alpha, \tag{2.53}$$

$$C_1(x,t) = -\alpha_{Ma}(Ah+\Theta_0)_x - h\Big(-\alpha_{Ca}h_{xxx}(1-\alpha_\sigma(Ah+\Theta_0)) +$$
$$+\alpha_{Ca}\alpha_\sigma h_{xx}(Ah+\Theta_0)_x - (1/2)\gamma_2\cos\alpha(Ah^2)_x - \gamma_2\cos\alpha(\Theta_0 h)_x - \gamma_1(\beta T_*)^{-1}\sin\alpha +$$
$$+\gamma_2\cos\alpha h_x\Big) - \gamma_1\sin\alpha\Big((1/2)Ah^2 + \Theta_0 h\Big) - \gamma_2\cos\alpha\Big((1/6)A_x h^3 + (1/2)(\Theta_0)_x h^2\Big). \tag{2.54}$$

2.3. Алгоритм численного решения

Рассматривается периодическая задача о нахождении функции h, удовлетворяющей уравнению (2.51) на промежутке $[-L; L]$. Полагаются выполненными следующие периодические условия:

$$h|_{x=-L} = h|_{x=L},$$

$$h_x|_{x=-L} = h_x|_{x=L}, \tag{2.55}$$

$$h_{xx}|_{x=-L} = h_{xx}|_{x=L}.$$

Пусть начальное положение термокапиллярной границы определяется функцией $h_0(x) = 1 - \delta_0 \cos kx$. Функция Θ_0, определяющая неравномерный нагрев подложки, также полагается заданной.

С учетом (2.53) и (2.54) уравнение (2.51) перепишется в виде:

$$h_t + A_4 h_{xxxx} + A_3 h_{xxx} + A_2 h_{xx} + A_1 h + D = 0. \tag{2.56}$$

Здесь коэффициенты A_4, A_3, A_2, A_1, D представляют собой функции, зависящие от A, h, Θ_0 и их производных.

Для численного решения уравнения (2.56) применяется неявная конечно-разностная схема следующего вида:

$$\frac{h^{k+1} - h^k}{\tau} + A_4^k h_{xxxx}^{k+1} + A_3^k h_{xxx}^{k+1} + A_2^k h_{xx}^{k+1} + A_1^k h^{k+1} + D^k = 0. \tag{2.57}$$

Для реализации неявной схемы вводится равномерная разностная сетка $x_1, x_2, ..., x_{N+1}$, $x_n = -L + (n-1)\Delta x$, $n = 1, 2, ..., N+1$ с шагом $\Delta x = 2L/N$. Используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации для всех производных по x, входящих в (2.57).

Конечно-разностную схему (2.57) можно записать в следующем виде:

$$b_2^k h_1^{k+1} + c_2^k h_2^{k+1} + e_2^k h_3^{k+1} + f_2^k h_4^{k+1} = d_2^k, \;\; n = 2;$$

$$a_n^k h_{n-2}^{k+1} + b_n^k h_{n-1}^{k+1} + c_n^k h_n^{k+1} + e_n^k h_{n+1}^{k+1} + f_n^k h_{n+2}^{k+1} = d_n^k, \;\; n = 3, 4, ..., N-1;$$

$$a_N^k h_{N-2}^{k+1} + b_N^k h_{N-1}^{k+1} + c_N^k h_N^{k+1} + e_N^k h_{N+1}^{k+1} = d_N^k, \;\; n = N. \tag{2.58}$$

Коэффициенты a_n^k, b_n^k, c_n^k, d_n^k, e_n^k, f_n^k приведены в Приложении 4. Для реализации периодических условий (2.55) используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации (см. [70]).

Задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (2.58) методом пятиточечной прогонки и прогонки с параметром

[65,124]. Поиск h_n осуществляется в виде $h_n = \alpha_n h_{n+1} + \beta_n h_{n+2} + \gamma_n + \delta_n h_N$. Формулы для прогоночных коэффициентов задаются соотношениями:

$$\alpha_n = -\frac{b_n\beta_{n-1} + e_n + \beta_{n-1}a_n a_{n-2}}{a_n\beta_{n-2} + b_n\alpha_{n-1} + c_n + a_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}},$$

$$\beta_n = \frac{-f_n}{a_n\beta_{n-2} + b_n\alpha_{n-1} + c_n + a_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}},$$

$$\gamma_n = \frac{d_n - a_n\gamma_{n-2} - b_n\gamma_{n-1} - a_n\gamma_{n-1}\alpha_{n-2}}{a_n\beta_{n-2} + b_n\alpha_{n-1} + c_n + a_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}},$$

$$\delta_n = -\frac{a_n\delta_{n-2} + b_n\delta_{n-1} + a_n\delta_{n-1}\alpha_{n-2}}{a_n\beta_{n-2} + b_n\alpha_{n-1} + c_n + a_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}.$$

Здесь n принимает значения $n = 3, 4, ..., N-1$. Стартовые значения коэффициентов α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, β_2, γ_2, δ_2 продиктованы первым уравнением системы (2.58) и граничным условием. Затем в качестве обратного хода прогонки используется соотношение $h_n = \widetilde{\alpha}_n h_{N+1} + \widetilde{\beta}_n$. В роли параметра выступает неизвестное значение h_{N+1} при $x = -L$ и $x = L$ на каждом временном слое с привлечением другого граничного условия.

Численное решения задачи о течении тонкого слоя жидкости по наклонной подложке состоит из следующих этапов:

1. Расчет на новом временном слое $k+1$ начинается с вычисления значений функции A, исходя из (2.52) значения толщины слоя берутся с предыдущего временного слоя:

$$A_n = \frac{(\bar{\beta}_3\alpha_J + \bar{\beta}_6(h_{xx})_n\alpha_J)(\Theta_0)_n}{1 - \bar{\beta}_3\alpha_J h - \bar{\beta}_6\alpha_J(h_{xx})_n h_n},$$

Здесь $(h_{xx})_n = \dfrac{h_{n+1} - 2h_n + h_{n-1}}{\Delta x^2}$, $(\Theta_0)_n = 1 + \delta cos(kx_n)$, $n = 2, ..., N$. Для аппроксимации второй производной по пространственной переменной x на границах исследуемой области $[-L, L]$ используются соотношения $\dfrac{h_3 - 2h_2 + h_1}{\Delta x^2}$ и $\dfrac{h_{N1} - 2h_N + h_{N-1}}{\Delta x^2}$.

2. С помощью полученных для A значений насчитываются коэффициенты $(C_0)_n$:

$$C_0 = p^g - \alpha_{Ca}(h_{xx})_n(1 - \alpha_\sigma(A_n h_n + (\Theta_0)_n)) + \gamma_2 \cos\alpha h_n,$$

3. Насчитываются значения толщины слоя жидкости h на новом временном слое с помощью схемы Кранка—Николсона для переменной по времени.

Данная неявная схема реализуется методом прогонки. Для замыкания задачи необходимо задавать условия на введенных торцах $x = \pm L$. В качестве таких условий можно использовать условие периодичности по координате x [41], полагать толщину слоя h равной константе ($x \to -\infty$, h=1), а ее производную равной 0 ($x \to \infty$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}$=0) [101].

Значения физических характеристик рабочих сред приведены в работе [42], а также в Приложении 3. Значения использумых в задаче безразмерных параметров представлены в таблицах 2.1-2.6 для двух различных значений характерной температуры $T_* = 1\ K$ и $T_* = 10\ K$ (см. также [23, 98]), характерное время процесса t_* равно $0.7 \cdot 10^2$ сек.

2.4. Результаты численного исследования

Численно исследовано периодическое стекание жидкости (этанол). Начальное положение термокапиллярной границы задается в виде $h_0 = 1 - \delta_0 \cos kx$. Неравномерный нагрев подложки (см. 2.6) определяется с помощью функции

$$\Theta_0 = 1 + \delta_1 \cos k_1 x \cdot \cos k_2 t. \tag{2.59}$$

Здесь $\delta_0 = 0.01$, $\delta_1 = 0.25$, $k = k_1 = \pi/2$, $L = 2$. Безразмерные параметры $\bar{\beta}_3$, $\bar{\beta}_6$ принимались равными 0.1 и 0, соответственно.

Рисунки 2.2а и 2.2б демонстрируют процесс испарения жидкого слоя со временем в условиях нормальной гравитации ($g = 9.8$ м/с^2). На рисунке 2.2а представлены значения толщины слоя в различные моменты времени в случае, когда твердая подложка подвержена неоднородному нагреву ($k_2 = 0$, см. (2.59)). Риснок 2.2б иллюстрирует зависимость толщины жидкого слоя от времени в случае нестационарного нагрева (здесь $k_2 = 2$).

Следует отметить, что при определении функции Θ_0 в виде (2.59) нестационарность нагрева подложки замедляет процесс испарения.

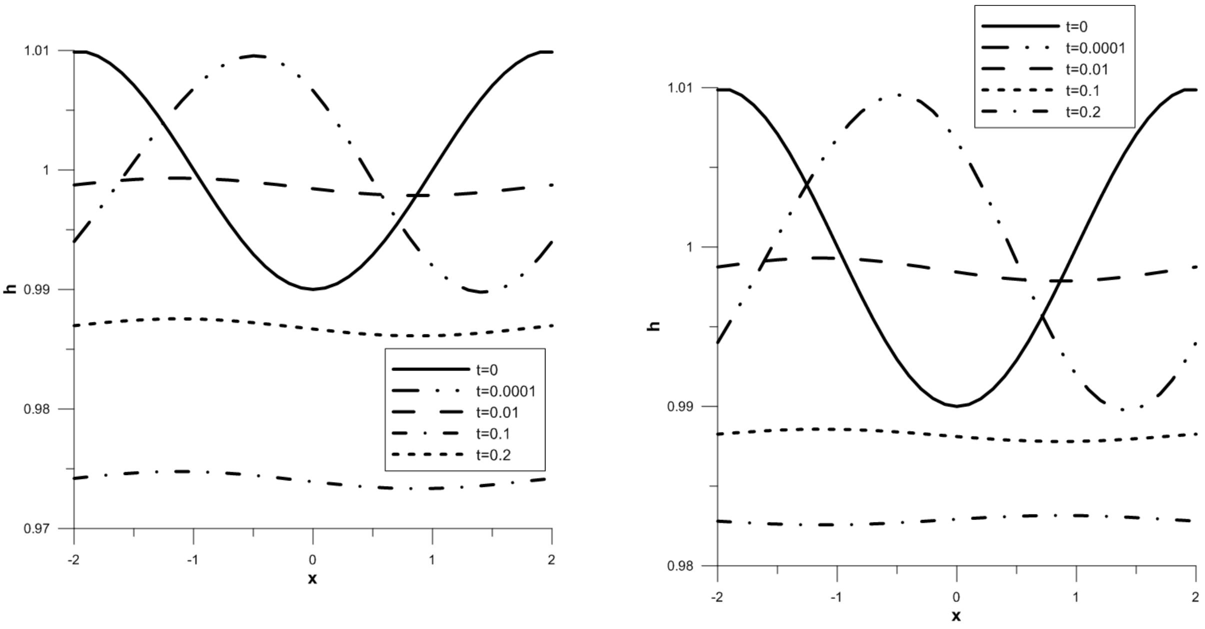
Рисунок 2.3а демонстрирует течение жидкости по наклоненной под разными углами нестационарно нагреваемой подложке в момент времени $t = 0.1$ (безразмерное время), $k_2 = 2$, угол α принимает значения, равные $\pi/8$, $\pi/6$, $\pi/4$. С увеличением угла наклона подложки наблюдается уменьшение толщины жидкого слоя.

На рисунке 2.3б представлено сравнение результатов моделирования испарения тонкого слоя жидкости в условиях нормальной гравитации ($g = 9.8$ м/с^2), проводимого с помощью математических моделей, основанных на уравнениях Навье—Стокса (NSE) и Обербека—Буссинеска (OBE). Наблюдаются качественно близкие результаты, но присутствуют некоторые количественные различия. Использование системы уравнений Обербека—Буссинеска в качестве определяющей позволяет описать более интенсивное испарение слоя жидкости.

Рисунок 2.4 демонстрирует влияние слагаемого, отвечающего за вклад затрат энергии, расходуемой на преодоление деформации поверхности термокапиллярными силами вдоль поверхности, на изменение толщины жидкого слоя [23,81]. В качестве математической модели используются уравнения Навье—Стокса, параметры $\bar{\beta}_3 = 0.1$, $\bar{\beta}_6 = 0$. В случае, когда коэффициент $\bar{\beta}_2$ полагается равным нулю, данный эффект не принимается во внимание, интенсивность испарения жидкости снижается.

На рисунке 2.5 рассматривается случай, когда непроницаемая подложка сохраняет постоянную температуру: $\Theta_0 = 1$. При данных условиях со временем наблюдается установление стационарной картины стекания подложки.

Представлена математическая модель течений тонкого слоя жидкости по наклонной неравномерно нагретой подложке на основе длинноволнового приближения системы уравнений Навье—Стокса и уравнений конвекции



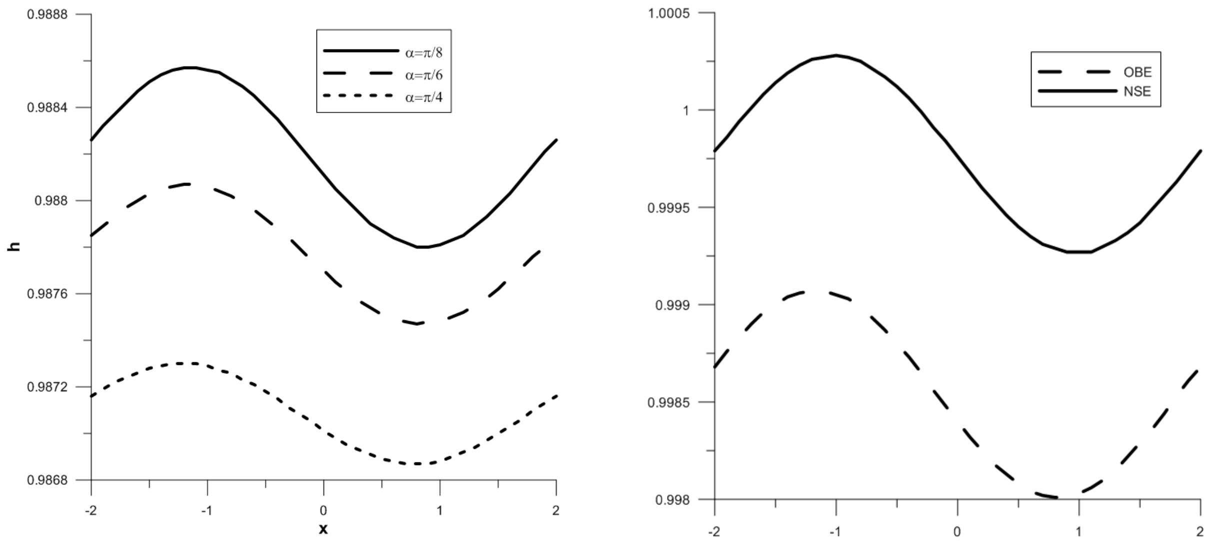
а

б

Рис. 2.2. Испарение слоя жидкости с течением времени: а — в условиях неоднородного нагрева ($k_2 = 0$); б — в условиях нестационарного нагрева ($k_2 = 2$).

Обербека—Буссинеска, а также обобщенных кинематического, динамического и энергетического условий на термокапилярной границе. Построены точные (аналитические) решения задач для главных и первых членов разложений искомых функций по степеням малого параметра. Проведен параметрический анализ задачи.

Получены эволюционные уравнения, определяющие толщину слоя жидкости в случаях использования как системы уранений Навье—Стокса, так и уравнений Обербека—Буссинеска. Данные эволюционные уравнения учитывают влияние гравитации, капиллярных и термокапиллярных сил, характера нагрева подложки на интенсивность испарения жидкости. Построен численный алгоритм расчета задачи о течении жидкости с учетом испарения в приближении тонкого слоя. Проведено численное исследование процесса стекания жидкости при различных углах наклона и характере нагрева подложки, разных уровнях гравитации. Представлено сравнение результа-



а б

Рис. 2.3. Испарение слоя жидкости в условиях нестационарного нагрева ($k_2 = 2$): а — при различных углах наклона подложки; б — с использованием математических моделей, основанных на уравнениях Обербека—Буссинеска и Навье—Стокса.

тов исследования течения жидкости в случае использования в качестве математической модели уравнений Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска.

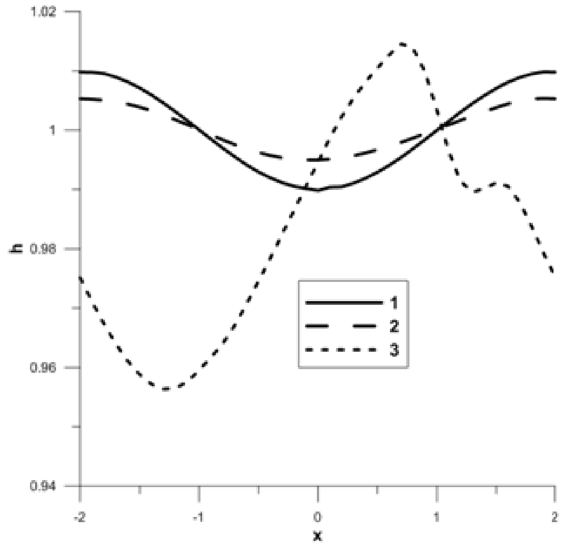


Рис. 2.4. Изменение характера течения тонкого слоя со временем: 1 — начальное положение границы раздела; 2 — положение границы раздела в момент времени $t = 10^{-3}$, $\bar{\beta}_2 = 0$; 3 — положение границы раздела в момент времени $t = 10^{-3}$, $\bar{\beta}_2 = 0.3$.

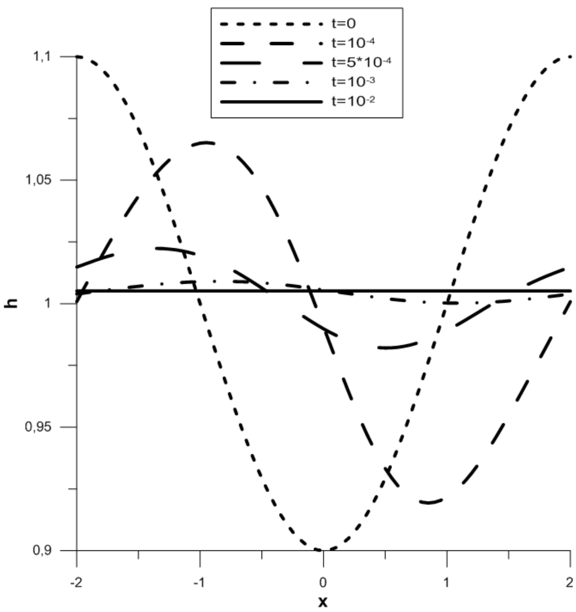


Рис. 2.5. Изменение характера течения тонкого слоя со временем, $\bar{\beta}_6 = 0$, $\Theta_0 = 1$.

Глава 3. Моделирование течения в бесконечном слое жидкости под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений

3.1. Постановка задачи

Пусть вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость заполняет бесконечный слой со свободными границами (см. рис. 3.1). Задача изучается в условиях невесомости, границы слоя остаются параллельными плоскостями, подверженными неоднородному нагреву. Слой жидкости находится под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений, индуцируемых внешней средой.

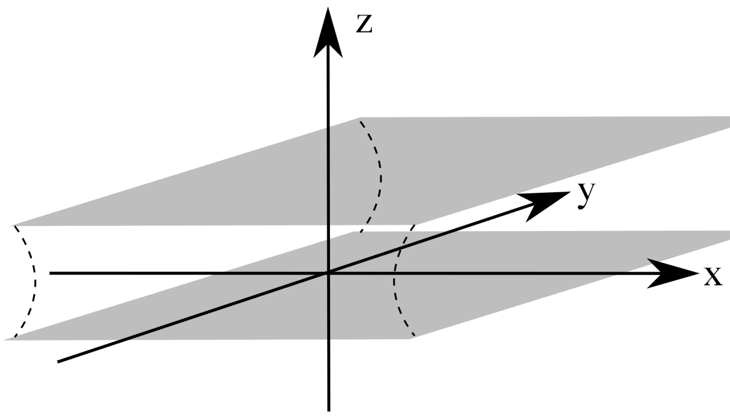


Рис. 3.1. Геометрия области течения

Система координат выбрана таким образом, что оси Ox и Oy параллельны свободным границам, а ось Oz перпендикулярна к ним. Тогда заполненная жидкостью область Ω и свободные границы Γ_1 и Γ_2 задаются следующим образом:

$$\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -Z(t) < z < Z(t)\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, z = -Z(t)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, z = Z(t)\},$$

Единичные касательные вектора и вектора внешней нормали к поверхностям Γ_1 и Γ_2 имеют вид: $\mathbf{s}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 0, \pm 1)$. Динамика жидкости, распределение температуры и давление внутри слоя Ω определяются, исходя из уравнений Навье—Стокса и переноса тепла [5, 46]:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \tag{3.1}$$

$$div \mathbf{v} = 0, \tag{3.2}$$

$$T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости ($\mathbf{v} = (u, v, w)$), T — температура, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, соответственно.

В отсутствии переноса массы через свободные границы кинематическое и динамическое условия на поверхностях Γ_1 и Γ_2 записываются в следующем общем виде [23, 24]:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm w|_{z=\pm Z(t)} = \frac{dZ}{dt}, \tag{3.4}$$

$$-p\mathbf{n} + 2\rho\nu D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} + p^g \mathbf{n} - 2\rho^g \nu^g D(\mathbf{v^g})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} =$$

$$= 2H\sigma\mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma. \tag{3.5}$$

Здесь $D(\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформаций, H — средняя кривизна свободной поверхности Γ, p^g — внешнее давление, ρ^g — плотность газа, ν^g — коэффициент кинематической вязкости газа, $\mathbf{v^g}$ — вектор скорости газа, ∇_Γ — поверхностный градиент. Коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры ($\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$).

Уравнения (3.1)-(3.3) запишем в безразмерном виде следующим образом [46], оставив прежние обозначения для всех искомых функций:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{3.6}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), \tag{3.7}$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + \frac{1}{Re}(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \tag{3.8}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \tag{3.9}$$

$$T_t + uT_x + vT_y + wT_z = \frac{1}{RePr}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \tag{3.10}$$

Здесь Re — число Рейнольдса $\left(Re = \dfrac{v_* l}{\nu}\right)$, Pr — число Прандтля $\left(Pr = \dfrac{\nu}{\chi}\right)$. Для перехода к безразмерному виду были выбраны характерный размер l, например, толщина слоя жидкости в момент времени $t = 0$, характерная скорость жидкости v_*, характерное время t_* $\left(t_* = \dfrac{l}{v_*}\right)$, характерное давление p_* ($p_* = \rho v_*^2$), характерная температура или перепад температур T_*.

Условия (3.4)-(3.5) на свободных поверхностях имеют вид:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm w|_{z=\pm Z(t)} = \frac{dZ}{dt}, \tag{3.11}$$

$$-p + \frac{2}{Re}\mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)} = -P^g, \tag{3.12}$$

$$2\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{D(v)n}|_{z=\pm Z(t)} = \tau_1(x, y, t) - \frac{Ma}{RePr}T_x, \tag{3.13}$$

$$2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{D(v)n}|_{z=\pm Z(t)} = \tau_2(x, y, t) - \frac{Ma}{RePr}T_y. \tag{3.14}$$

Здесь P^g считается известным (внешнее давление), $\tau_1(x, y, t)$, $\tau_2(x, y, t)$ — тангенциальные напряжения, индуцируемые внешней средой (последние определяются, фактически, следующим образом: $\tau_1 = \dfrac{2}{Re}\bar{\rho}\bar{\nu}\mathbf{s}_1 \cdot D(\mathbf{v}_g)\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)}$, $\tau_2 = \dfrac{2}{Re}\bar{\rho}\bar{\nu}\mathbf{s}_2 \cdot D(\mathbf{v}_g)\mathbf{n}|_{z=\pm Z(t)}$), $\bar{\rho}, \bar{\nu}$ — отношения плотностей и коэффициентов кинематической вязкости газа и жидкости, Ma — число Марангони $\left(Ma = \dfrac{\sigma_T T_* l}{\rho \nu \chi}\right)$.

Пусть температура на свободных границах полагается известной и представляет собой квадратичную зависимость от продольных координат [59, 122]

$$T(x, y, \pm Z(t), t) = \frac{1}{2}A(t)x^2 + \frac{1}{2}B(t)y^2 + \Theta(t), \tag{3.15}$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $\Theta(t)$ — некоторые заданные функции времени.

Задача должна быть дополнена начальными условиями, определяющими состояние слоя в момент времени $t = 0$:

$$Z(0) = Z_0, \quad \mathbf{v}(x,y,z,0) = \mathbf{v}_0(x,y,z), \quad T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z). \tag{3.16}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что поле скоростей может быть определено на основе точных решений системы уравнений Навье—Стокса (3.6)-(3.9) [59, 121, 122]:

$$u(x,z,t) = (f(z,t) + g(z,t))x, \quad v(y,z,t) = (f(z,t) - g(z,t))y,$$

$$w(z,t) = -2\int_0^z f(\alpha,t)d\alpha. \tag{3.17}$$

$$p = \frac{1}{Re}w_z(z,t) - \int_0^z w_t(\alpha,t)d\alpha - \frac{1}{2}w^2(z,t) + \chi(t). \tag{3.18}$$

Здесь функции $f(z,t)$ и $g(z,t)$ удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений [59, 122]

$$f_t + f^2 + g^2 - 2f_z\int_0^z f(t,\alpha)d\alpha - \frac{1}{Re}f_{zz} = 0, \tag{3.19}$$

$$g_t + 2fg - 2g_z\int_0^z f(t,\alpha)d\alpha - \frac{1}{Re}g_{zz} = 0, \tag{3.20}$$

а $\chi(t)$ — произвольная функция времени.

С учетом вида точного решения (3.18) и в силу вида распределения температуры (3.15), функции τ_1, τ_2 должны иметь следующий вид:

$$\tau_1 = x\widetilde{\tau}(t), \quad \tau_2 = y\widetilde{\tau}(t), \tag{3.21}$$

где $\widetilde{\tau}(t)$ — заданная функция времени.

Тогда на свободной поверхности $z = Z(t)$ условия (3.12)-(3.14) примут вид:

$$f_z(Z(t),t) = \widetilde{\tau}(t) - \frac{Ma}{2RePr}(A(t)+B(t)), \quad g_z(Z(t),t) = -\frac{Ma}{2RePr}(A(t)-B(t)).$$

Далее, аналогично [59,122], будем исходить из предположения о симметричности процессов относительно плоскости $z = 0$, и потребуем выполнения условий

$$f_z(0,t) = 0, \qquad g_z(0,t) = 0.$$

Рассматривая задачу в случае симметрии относительно плоскости Oxy, можно определить положение свободной границы $Z(t)$ с помощью интегро-дифференциального уравнения следующего вида [59,122]:

$$\frac{dZ}{dt} = -2\int_0^{Z(t)} f(t,z)dz. \tag{3.22}$$

В начальный момент времени функции $f(z,t)$ и $g(z,t)$ также полагаются заданными:

$$f(z,0) = g(z,0) = 0, \qquad 0 \le z \le Z_0, \tag{3.23}$$

что соответствует заданию поля скоростей в начальный мамент времени.

3.2. Численное определение поля скоростей и положения свободной границы

В силу того, что свободные границы слоя являются подвижными, численное нахождение искомых функций должно быть начато с определения расчетной области задачи. Таким образом, должна быть определена функция $Z(t)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению (3.22) и начальному условию (3.16). Заметим, что, поскольку на каждом временном слое t^{k+1} будет изменяться положение свободной границы, разностная сетка по координате z также должна пересчитываться на каждом слое по времени. Шаг сетки определяется как $h_z = \bar{Z}/\bar{M}$, где $\bar{Z} = Z^{k+1}$, а сама сетка задается следующим образом: $z_m = (m-1)h_z$ $(m = 1, ..., \bar{M}+1)$. Полагая функцию $f^k(z)$ известной, можно определить положение свободной границы Z^{k+1} с помощью численного алгоритма типа "предиктор—

корректор" [51, 62]. Двухэтапная схема расчета имеет следующий вид:

$$Z^{k+1} = Z^{k-1} - 2\Delta t \int_0^{Z^k} f^k(z)dz$$

— предиктор,

$$\bar{Z}^{k+1} = Z^k - \Delta t \left[\int_0^{Z^{k+1}} f^{k+1}(z)dz + \int_0^{Z^k} f^k(z)dz \right]$$

— корректор. Здесь Δt — шаг по времени.

Для численного решения уравнений (3.19) и (3.20) применяется трехшаговая схема "предиктор—корректор" второго порядка точности следующего вида:

$$q^{k+1/4} = q^k + 0.5\Delta t[-\Lambda_1 q^{k+1/4} + \Phi^k],$$

$$q^{k+1/2} = q^{k+1/4} + 0.5\Delta t[-\Lambda_2 q^{k+1/2}],$$

$$q^{k+1} = q^k + \Delta t[-\Lambda q^{k+1/2} + \Phi^k],$$

где q^{k+1} — значения функций $f(t,z)$ или $g(t,z)$ в узлах сетки $z_m = (m-1)h_z$ $(m = 1, ..., \bar{M}+1)$, $h_z = \bar{Z}/\bar{M}$, где $\bar{Z} = Z^{k+1}$ — это новое положение свободной границы на временном слое $k+1$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, Λ_i представляют собой конечно-разностные операторы соответствующих дифференциальных операторов $(-1/Re)\partial^2/\partial z^2$ и $-F\partial/\partial z$, функции F и Φ^k определяются из (3.19) и (3.20). Интегралы, содержащиеся в формулах (3.22), (3.19), (3.20), могут быть определены с помощью квадратурных формул. Вследствие того, что на каждом временном слое t^{k+1} определяется новая пространственная сетка по координате z, возникает необходимость в пересчете полученных функций $f(t^k, z_m)$ и $g(t^k, z_m)$ в новых узлах пространственной сетки. Для этого могут быть использованы интерполяционные (в случае растекания слоя) или экстраполяционные (в случае его разбухания) формулы. В случае применения интерполяционных формул Лагранжа четвертого порядка [71] переход на следующий временной слой функции $f(t^k, z_m)$ осуществляется согласно следующему соотношению:

$$f_m^{k+1} = f_m^k + f_{m+1}^k \frac{z_m^{k+1} - z_m^k}{z_{m+1}^k - z_m^k} + f_{m+2}^k \frac{(z_m^{k+1} - z_m^k)(z_m^{k+1} - z_{m+1}^k)}{(z_{m+2}^k - z_m^k)(z_{m+2}^k - z_{m+1}^k)} +$$

$$+ f_{m+3}^k \frac{(z_m^{k+1} - z_m^k)(z_m^{k+1} - z_{m+1}^k)(z_m^{k+1} - z_{m+2}^k)}{(z_{m+3}^k - z_m^k)(z_{m+3}^k - z_{m+1}^k)(z_{m+3}^k - z_{m+2}^k)} +$$

$$+ f_{m+4}^k \frac{(z_m^{k+1} - z_m^k)(z_m^{k+1} - z_{m+1}^k)(z_m^{k+1} - z_{m+2}^k)(z_m^{k+1} - z_{m+3}^k)}{(z_{m+4}^k - z_m^k)(z_{m+4}^k - z_{m+1}^k)(z_{m+4}^k - z_{m+2}^k)(z_{m+4}^k - z_{m+3}^k)}.$$

Здесь $f_m^k = f(t^k, z_m)$. Аналогичная схема строится для функции $g(t^k, z_m)$.

3.3. Численный алгоритм исследования процесса переноса тепла

Численное нахождение распределения тепла в бесконечном слое сводится к расчету функции температуры в параллелепипеде. Следует отметить, что численное решение аналогичной задачи в двумерном случае (определение температуры жидкости в прямоугольной области) было рассмотрено в работах [16, 24]. Рассмотрим параллелепипед

$$\Omega = \{-N < x < N, -L < y < L, \ -\overline{Z} < z < \overline{Z}\}, \tag{3.24}$$

с подвижными недеформируемыми границами $z = \pm\overline{Z}(t)$ в качестве расчетной области (см. рис. 3.2). На границах $z = \pm\overline{Z}(t)$ задано распределение температуры на сторонах $z = \pm\overline{Z}(t)$ параллелепипеда Ω (см. (3.15)).

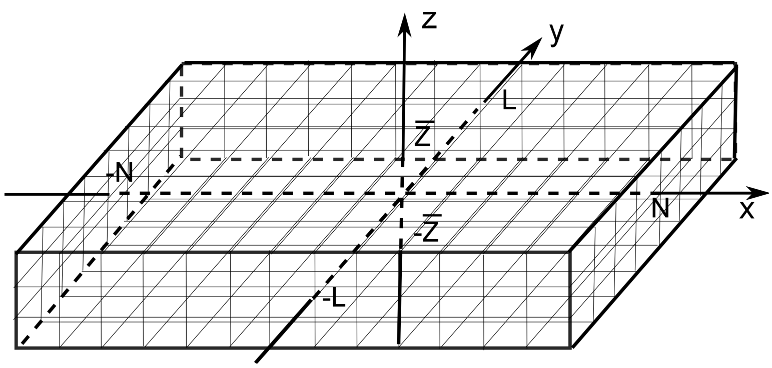


Рис. 3.2. Область численного исследования Ω (параллелепипед)

На искусственно введенных "вертикальных" торцах $x = \pm N$ и $y = \pm L$ области Ω должны быть заданы "мягкие" условия для температуры. Данные условия должны быть следствием условий на бесконечности и уравнения переноса тепла [15,68,92]. Пусть на бесконечности выполняется условие $T \to T_\infty$ ($T_\infty = const$). Тогда, в предположении, что $T_x \to 0$ и $T_y \to 0$, на торцах параллелепипеда $x = \pm N$ и $y = \pm L$ могут быть заданы условия

$$T_{xx} = 0, \qquad T_{yy} = 0, \tag{3.25}$$

соответственно. Если при $x \to \pm\infty$ или $y \to \pm\infty$ выполняются все предположения, приводящие к (3.25), то на "вертикальных" торцах, задаваемых уравнениями $x = \pm N$, $y = \pm L$, считаем справедливыми условия вида

$$T_t + uT_x = 0, \qquad T_t + vT_y = 0, \tag{3.26}$$

соответственно. Еще одним видом условий на границах расчетной области $x = \pm N$ и $y = \pm L$ служат, соответственно, следующие соотношения:

$$T_t + uT_x = \chi T_{xx}, \qquad T_t + vT_y = \chi T_{yy}. \tag{3.27}$$

Однако стоит отметить, что при использовании условий (3.25), (3.27) возникает необходимость аппроксимации вторых производных на границах.

Пусть в начальный момент времени задано распределение температуры:

$$T|_{t=0} = T_0(x, y), \tag{3.28}$$

согласованное с граничным условием (3.15) Численное исследование процесса переноса тепла в параллелепипеде Ω осуществляется с помощью конечно разностной схемы, основанной на методе стабилизирующей поправки. Разностная схема второго порядка аппроксимации для уравнения переноса тепла (3.10) имеет следующий вид:

$$\frac{T^{k+1/3} - T^k}{\Delta t} = K_1 T^{k+1/3} + K_2 T^k + K_3 T^k - (S_1 T)^{k+1/3} - (S_2 T)^k,$$

$$\frac{T^{k+2/3} - T^{k+1/3}}{\Delta t} = K_2(T^{k+2/3} - T^k),$$
$$\frac{T^{k+1} - T^{k+2/3}}{\Delta t} = K_3(T^{k+1} - T^k). \qquad (3.29)$$

Здесь $T^k(x,y,z) = T(t^k,x,y,z)$, K_i — разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов ($K_1 \sim \frac{1}{RePr}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $K_2 \sim \frac{1}{RePr}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $K_3 \sim \frac{1}{RePr}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$), производные второго порядка аппроксимируются конечно-разностными аналогами второго порядка. Конвективное слагаемое $ST = u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}$ представлено как сумма слагаемых S_1T и S_2T ($S_1T = 0.5(wT_z + (wT)_z)$, $S_2T = 0.5(uT_x + (uT)_x + vT_y + (vT)_y)$), где производные первого порядка аппроксимируются центральными разностями.

Для реализации схемы (3.29) вводится разностная сетка по пространственным переменным (x_n, y_l, z_m) (см. рис. 3.2): $x_n = (n-1)h_x$ ($n = 1, ..., \bar{N}+1$), $h_x = N/\bar{N}$, $y_l = (l-1)h_y$ ($l = 1, ..., \bar{L}+1$), $h_y = L/\bar{L}$. Сетка является подвижной относительно координаты z: $z_m = (m-1)h_z$ ($m = 1, ..., \bar{M}+1$), $h_z = \bar{Z}/\bar{M}$, где $\bar{Z} = Z^{k+1}$ — это новое положение свободной границы на временном слое $k+1$. В случае, если течение симметрично относительно оси OZ, в качестве расчетной области может быть выбрана половина параллелепипеда (3.24). В качестве условия на новой границе области $z = 0$ задается соотношение $T_x = 0$.

Численная схема (3.29) представляется в виде систем линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$-a_{n,l,m}T^{k+1/3}_{n,l,m-1} + b_{n,l,m}T^{k+1/3}_{n,l,m} - c_{n,l,m}T^{k+1/3}_{n,l,m+1} = d_{n,l,m},$$

$$-a_{n,l,m}T^{k+2/3}_{n-1,l,m} + b_{n,l,m}T^{k+2/3}_{n,l,m} - c_{n,l,m}T^{k+2/3}_{n+1,l,m} = d_{n,l,m},$$

$$-a_{n,l,m}T^{k+1}_{n,l+1,m} + b_{n,l,m}T^{k+1}_{n,l,m} - c_{n,l,m}T^{k+1}_{n,l+1,m} = d_{n,l,m}.$$

На каждом временном подслое значения температуры в узлах сетки определяются методом прогонки [70] (см. Приложение 5).

Проведены расчеты схемной диффузии [44,68,112] конечно-разностной схемы (3.29) при решении трехмерной задачи о распределении температуры в области с подвижными границами. Коэффициент, отвечающий за схемную диффузию вычислялся на основе алгоритма, изложенного в монографии [68], с учетом трехслойного характера схемы стабилизирующей поправки. Результаты позволили сделать вывод о незначительных значениях данного коэффициента, не влияющих на устойчивость и сходимость конечно-разностной схемы.

3.4. Результаты численных исследований

Проведены численные исследования динамики жидкого слоя и распределения тепла в нем при различных видах взаимодействия термокапиллярных сил и касательных напряжений со стороны внешней газовой среды. Касательные напряжения могут усиливать либо ослаблять действия термокапиллярных сил. Исследования проводились для случая растекания слоя жидкости типа этанол. В качестве характерных параметров задачи принимались следующие значения: $T_* = 1$ К, $\upsilon_* = \dfrac{\nu}{l}$, $t_* = 10^2$ с. Тогда безразмерные комплексы принимают значения: $Pr = 17$, $Re = 1$, $Ma = 7800$. Начальное положение свободной границы слоя Z_0 выбрано равным 0.5.

Были проведены расчеты динамики слоя жидкости в случае разных зависимостей функций A, B и $\widetilde{\tau}$ от времени. В первом случае использовалась зависимость вида:

$$A(t) = \frac{A_0}{1+t^2},\ B(t) = \frac{B_0}{1+t^2},\ \widetilde{\tau}(t) = A_\tau \frac{\tau_0}{1+t^2}; \tag{3.30}$$

во втором преполагалась экспоненциальная зависимость:

$$A(t) = A_0 t e^t,\ B(t) = B_0 t e^t,\ \widetilde{\tau}(t) = A_\tau \tau_0 t e^t. \tag{3.31}$$

Проведено численное исследование влияния различных параметров системы на интенсивность растекания жидкого слоя и распределения тепла

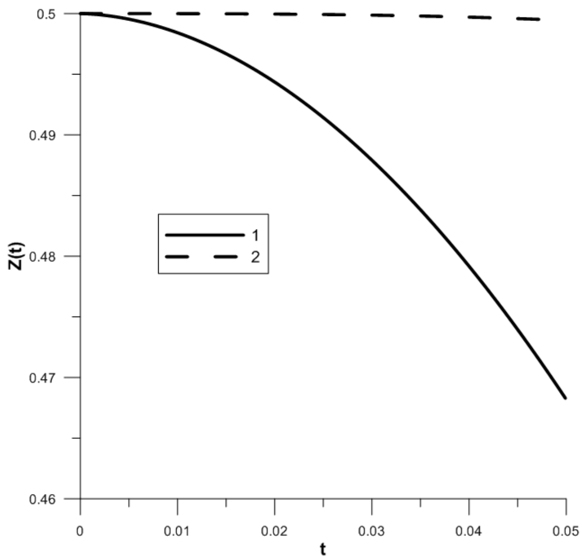


Рис. 3.3. Изменение положения границы слоя со временем при различных типах зависимостей функций A, B и $\widetilde{\tau}$ от времени: "1" — функции определяются согласно формуле (3.30); "2" — функции определяются согласно формуле (3.31).

в нем. Рисунок 3.3 демонстрирует интенсивность растекания слоя в случае использования формул (3.30) (линия "1") и соотношений (3.31) (линия "2"). Значения параметров выбраны следущи образом: $A_0 = -0.1$, $B_0 = -0.01$, $\tau_0 = -0.1$, $A_\tau = 400$. Использование первого типа зависимостей приводит к более интенсивному процессу растекания слоя. Здесь касательные напряжения, возрастающие со временем, усиливают действие термокапиллярных сил. На рисунке 3.4 изображено поле скоростей для случая зависимостей вида (3.30) в момент времени $t = 0.05$.

Проведено исследование влияния дополнительных касательных напряжений на распределение температуры в слое. Начальное положение свободной границы слоя $\bar{Z}$ полагается равным 0.5, "вертикальные" торцы исследуемой области задаются следующим образом: $N = L = 5$. На рисунках 3.5-3.10 представлены распределения температуры в жидком слое при фиксированных значениях одной из "горизонтальных" координат (координаты y). Функции A, B и $\widetilde{\tau}$ имеют вид, определяемый формулой (3.31).

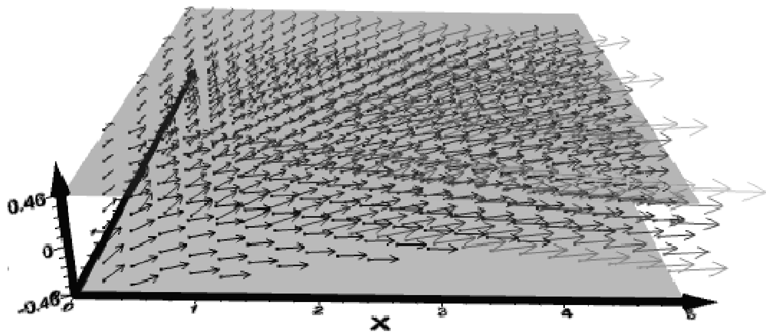


Рис. 3.4. Поле скоростей в жидком слое

Для небольших значений времени $t = 0.05$ распределения температуры имеют схожий характер (см. рис. 3.5, 3.7, 3.9), с течением времени действие дополнительных касательных напряжений становится более явным. Достаточно яркие различия в распределении температуры наблюдаются в зависимости от направления дополнительных касательных напряжений. В случае, когда параметр τ_0 имеет отрицательные значения, т.е. дополнительные касательные напряжения усиливают действие капиллярных сил (см. рис. 3.6), температура внутри слоя с течением времени быстрее приобретает более равномерное распределение. При этом характер распределения температуры слабо изменяется при переходе от одного сечения по оси Oy к другому. Качественные изменения по направлению координаты y наблюдаются в случае, когда A_0 и B_0 имеют противоположные знаки. Рисунки 3.9 и 3.10 демонстрируют случай, когда $A_0 = -0.1$, $B_0 = 0.1$, $\tau_0 = 0.1$.

На рисунках 3.12 и 3.11 представлено изменение характера распределения температуры со временем в случае, когда в качестве функций A, B и $\widetilde{\tau}$ использовались соотношения вида (3.30). Как было показано ранее (см. рис. 3.3), в данном случае растекание слоя происходит значительно быстрее. Температура в слое при этом приобретае более равномерное распределение даже за небольшой промежуток времени.

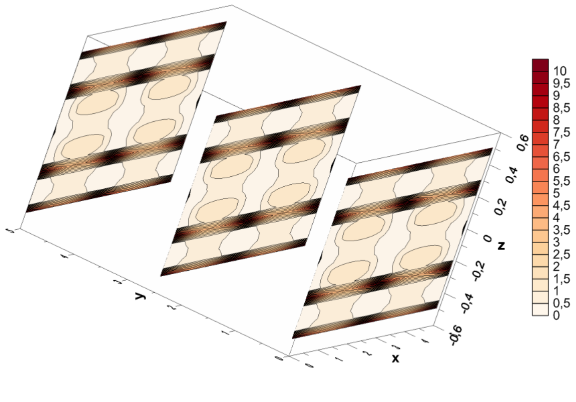


Рис. 3.5. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = -0.1$ в момент времени $t = 0.05$, зависимость типа (3.31)

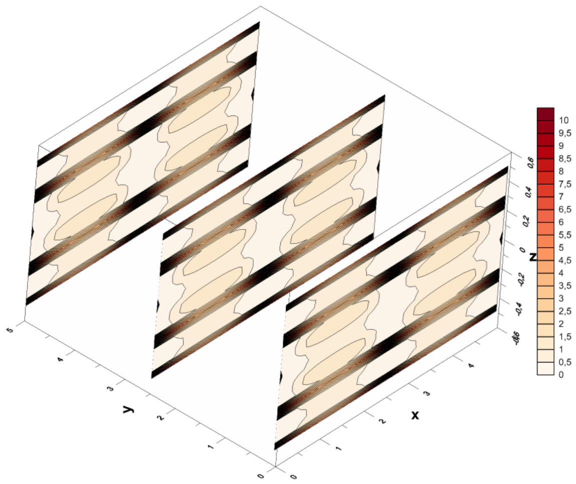


Рис. 3.6. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = -0.1$ в момент времени $t = 0.1$, зависимость типа (3.31)

Проведено сравнение результатов о распределении температуры для различных типов мягких граничных условий на "торцах" прямоугольной области в двумерном случае. Распределение температуры на свободных границах и функция, определяющая касательные напряжения приобретают вид

$$T(x, \pm Z(t), t) = \frac{1}{2}A(t)x^2 + \Theta(t), \qquad \tau(x,t) = x\widetilde{\tau}(t).$$

В качестве зависимостей функций A и $\widetilde{\tau}$ от времени выбраны формулы вида (3.31), которые в двумерном случае представимы в виде $A(t) = A_0\,t\,\exp(t)$, $\widetilde{\tau}(t) = A_\tau \tau_0\,t\,\exp(t)$. Параметры A_0 и τ_0, определяющие направление продольного градиента температуры и дополнительных касательных напряжений, полагаются равными -0.1 и 0.1, соответственно, т.е. в данном случае дополнительные касательные напряжения усиливают действие термокапиллярных сил.

На рисунках 3.13, 3.14, 3.15 представлены численные результаты по расчету распределения температуры в прямоугольнике в момент времени $t = 0.02$ при использовании на торцах исследуемой области "мягких" усло-

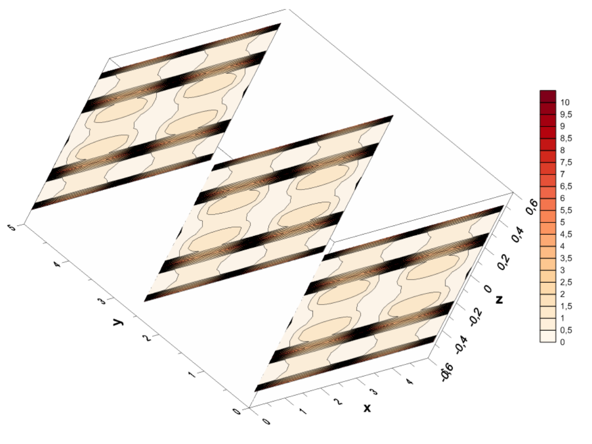


Рис. 3.7. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.05$, зависимость типа (3.31)

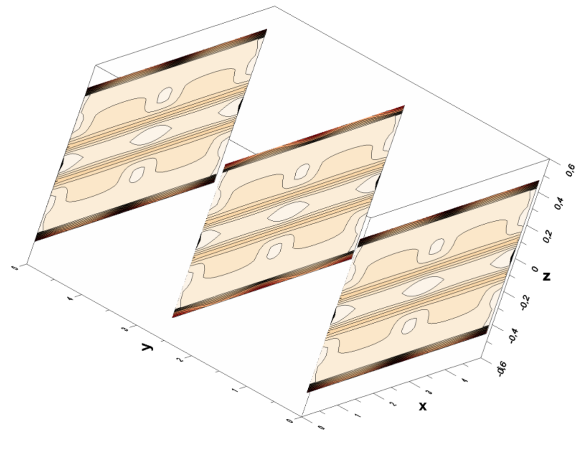


Рис. 3.8. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.1$, зависимость типа (3.31)

вий типа (3.25), (3.26) и (3.27), соответственно. Рисунки 3.16, 3.17, 3.18 демонстрируют аналогичные результаты в момент времени $t = 0.1$. При сравнении результатов, полученных с использованием различных типов "мягких" условий, наблюдается качественно схожая картина как в момент времени $t = 0.02$, так и позднее (при $t = 0.1$). Однако имеют место некоторые количественные отличия вблизи "вертикальных" торцов исследуемой области: наибольшее значение температуры достигается при использовании условия (3.27), наименьшее — при (3.25).

Таким образом, проведено аналитическое и численное моделирование процесса переноса тепла в свободном слое вязкой несжимаемой жидкости на основе точных решений уравнений Навье—Стокса. Построен численный алгоритм решения задачи о деформации слоя в случае действия на свободных границах термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений, включающий алгоритмы расчета компонент скорости и процесса переноса тепла в "центральной" части слоя с движущимися границами в трехмерном случае. Выявлено влияние типа зависимости продольных гра-

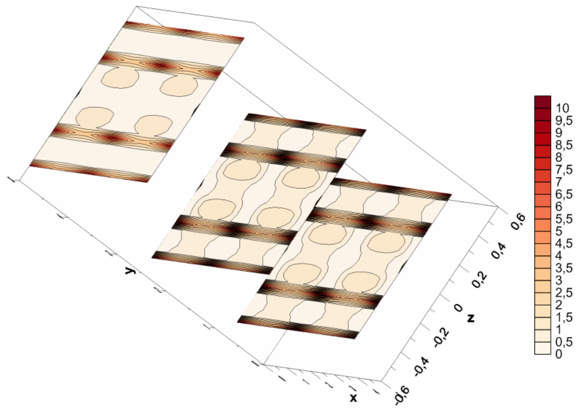


Рис. 3.9. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.05$, $A_0 = -0.1$, $B_0 = 0.1$, зависимость типа (3.31)

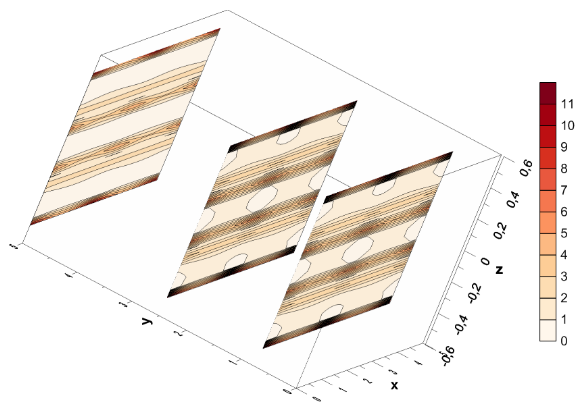


Рис. 3.10. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.1$, $A_0 = -0.1$, $B_0 = 0.1$, зависимость типа (3.31)

диентов температуры и дополнительных касательных напряжений от времени на динамику жидкого слоя: степенная зависимость приводит к более интенсивному растеканию слоя, чем экспоненциальная.

Исследовано влияние различных типов теплового режима и дополнительных касательных напряжений на распределение температуры в слое в трехмерном случае. В условиях, когда дополнительные касательные напряжения усиливают действие термокапиллярных сил, температура внутри слоя приобретает более равномерное распределение. Проведены численные расчеты распределения температуры при использовании различных типов "мягких" условий на торцах исследуемой области (прямоугольника) в двумерном случае. Показано, что качественная картина течения сохраняется, однако наблюдаются некоторые количественные различия вблизи "вертикальных" торцов.

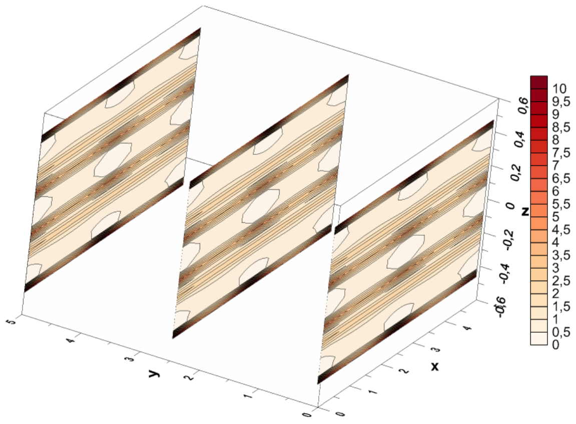


Рис. 3.11. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.05$, $A_0 = -0.1$, $B_0 = -0.01$, зависимость типа (3.30)

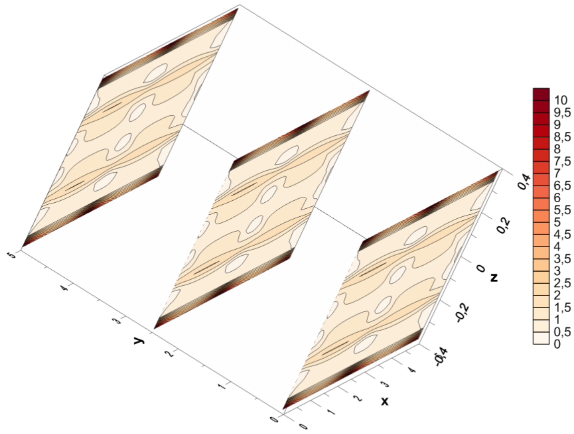


Рис. 3.12. Распределение тепла в слое при $\tau_0 = 0.1$ в момент времени $t = 0.1$, $A_0 = -0.1$, $B_0 = -0.01$, зависимость типа (3.30)

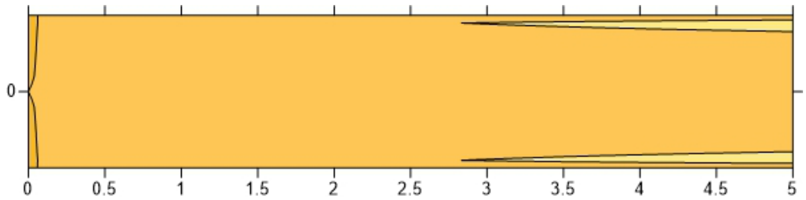


Рис. 3.13. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.02$, условие на торцах типа (3.25)

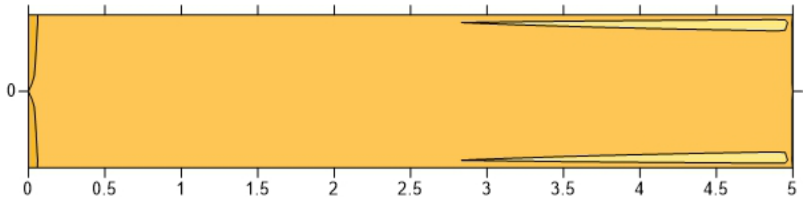


Рис. 3.14. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.02$, условие на торцах типа (3.26)

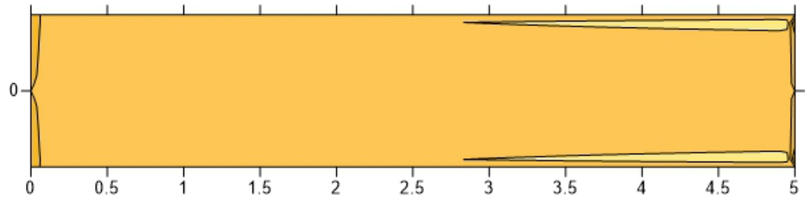


Рис. 3.15. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.02$, условие на торцах типа (3.27)

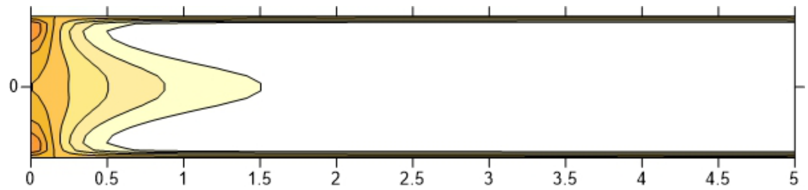


Рис. 3.16. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.1$, условие на торцах типа (3.25)

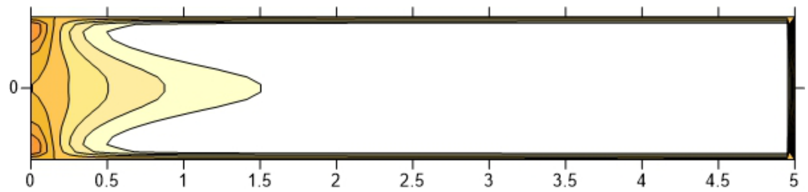


Рис. 3.17. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.1$, условие на торцах типа (3.26)

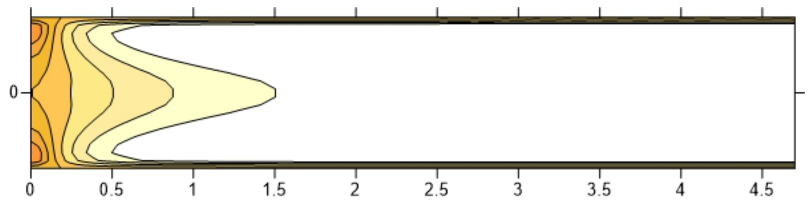


Рис. 3.18. Распределение тепла в 2D слое в момент времени $t = 0.1$, условие на торцах типа (3.27)

Глава 4. Численное исследование динамики жидкого сферически симметричного слоя, содержащего газовый пузырек

4.1. Постановка задачи

Изучим задачу о динамике сферической оболочки вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободными поверхностями и заключающей внутри себя газовый пузырек (см. рисунок 4.1). Газ, растворенный в жидкости, представляет собой пассивную добавку, а сама жидкость с растворенным в ней газом есть вязкая несжимаемая жидкость. Вследствие условия невесомости рассматривается сферически симметричный процесс; только радиальная составляющая скорости жидкости отлична от нуля, физические величины зависят от расстояния от начала координат и изменяются со временем. Считаем, что внутри пузырька давление, плотность и абсолютная температура есть функции только времени, связанные уравнением Менделеева—Клапейрона. На границах сферической оболочки, являющихся свободными границами, выполняются кинематическое и динамическое условия, закон Генри, определяющий связь значений концентрации газа на границе области с давлением вне этой области. Условия баланса энергии непрерывности температуры задаются на внутренней и внешней границах, соответственно.

Введем обозначения: R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы сферической оболочки, ρ и ρ^g — плотности жидкости и газа, C — концентрация газа в жидкости, v — скорость, T — температура, T^g — температура газа в пузыре, P^g и P_{vn} — давление в газе и внешнее. Коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и поверхностного натяжения ν, D, σ, коэффициенты температуро- и теплопроводности χ и κ, коэффициент в законе Генри A полагаются функциями, зависящими от температуры. Пусть β — коэффициент теплоотдачи, c_1 — теплоемкость жидкости, c_v — теплоемкость газа (при постоянном объеме), m — масса газа в пузырьке, $\tilde{R}$ — универсальная газовая постоянная.

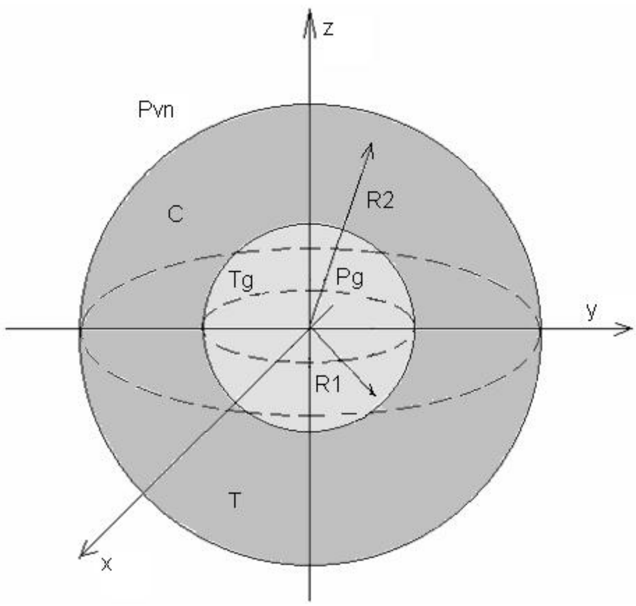


Рис. 4.1. Геометрия области решения задачи

В ходе решения задачи определяются положения свободных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$, значения скорости $v(t,r)$, распределения температуры $T(t,r)$, концентрации газа $C(t,r)$ в жидкости, давления $P(t,r)$. В качестве математической модели рассматриваемой задачи используется система уравнений Навье—Стокса, уравнения переноса тепла и диффузии в области $R_1(t) < r < R_2(t)$ [19]:

$$v_t + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\nu(T)\frac{\partial v}{\partial r}\Big) - \frac{4}{r^2}\nu(T)v, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0, \tag{4.2}$$

$$T_t + v\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\chi(T)\frac{\partial T}{\partial r}\Big) + 2\nu(T)\frac{1}{c_1}\Big[(\frac{\partial v}{\partial r})^2 + 2(\frac{v}{r})^2\Big], \tag{4.3}$$

$$C_t + v\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 D(T)\frac{\partial C}{\partial r}\Big). \tag{4.4}$$

В области $0 < r < R_1(t)$ задается уравнение состояния:

$$P^g = \tilde{R}\rho^g T^g. \tag{4.5}$$

Краевые условия на свободных границах запишем следующим образом. При $r = R_1(t)$:

$$v = \frac{dR_1}{dt}, \qquad P = P^g - 2\frac{\sigma}{R_1} + 2\rho\nu\frac{\partial v}{\partial r}, \tag{4.6}$$

$$T = T^g, \qquad P^g\frac{d}{dt}\Big(\frac{4}{3}\pi R_1^3\Big) + \frac{d}{dt}(c_v mT) = \tag{4.7}$$

$$= 4\pi R_1^2\kappa\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{d}{dt}\Big[4\pi R_1^2 T^2\frac{d}{dt}\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)\Big] + \sigma\frac{d}{dt}(4\pi R_1^2) + \mu\frac{dm}{dt},$$

$$C = A(T^g)(P^g)^n; \tag{4.8}$$

при $r = R_2(t)$:

$$v = \frac{dR_2}{dt}, \qquad P = P_{vn} + 2\frac{\sigma}{R_2} + 2\rho\nu\frac{\partial v}{\partial r}, \tag{4.9}$$

$$T = T_{vn}; \qquad \kappa\frac{\partial T}{\partial r} + \beta(T - T_{vn}) = 0, \tag{4.10}$$

$$C = A(T_{vn})(P_{vn})^n. \tag{4.11}$$

Здесь

$$m = m_0 + \int_0^t 4\pi R_1^2 D\frac{\partial C}{\partial r}\Big|_{r=R_1} dt, \qquad \rho^g = \frac{3m}{4\pi R_1^3}. \tag{4.12}$$

Первые соотношения в (4.6) и (4.9) являются следствием кинематических условий на свободных границах $r = R_i(t)$, вторые соотношения в (4.6) и (4.9) — следствия динамических условий. Закон Генри представлен выражениями (4.8) и (4.11). Соотношения (4.7) дают условие непрерывности температуры и баланс энергии на внутренней границе оболочки, соответственно.

Изменение массы жидкости в пузырьке задается соотношением (4.12). Соотношение (4.10) есть условие теплообмена с внешней средой.

При $t = 0$ задаются начальные значения функций:

$$R_{10} = R_1(0) < r < R_2(0) = R_{20}, \quad m_0, \quad T_0^g = T^g(0),$$

$$v(0,r) = v_0(r), \quad T(0,r) = T_0(r), \quad C(0,r) = C_0(r).$$

В силу кинематического условия на свободных границах выполнен закон сохранения объема сферической оболочки:

$$R_2^3(t) - R_1^3(t) = R_{20}^3 - R_{10}^3. \tag{4.13}$$

Из уравнения неразрывности (4.2) следует, что функцию v можно представить в виде

$$v(t,r) = \frac{V(t)}{r^2}. \tag{4.14}$$

4.2. Приведение задачи к безразмерному виду

Для численного решения поставленной задачи приведем систему уравнений (4.1)–(4.4) и граничные условия к безразмерному виду, оставив прежние обозначения для всех переменных. С учетом перехода к новой функции V (скорости изменения объема, см. (4.14)) уравнение (4.1) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$Sh\frac{1}{r^2}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{r^2}\Big(-\frac{2V}{r^3}\Big) =$$

$$= -Eu\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{Re}\frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\nu(T)\Big(-\frac{2V}{r^3}\Big)\Big) - 2\nu(T)\frac{V}{r^2}\Big]. \tag{4.15}$$

Здесь возникли следующие безразмерные комплексы: $Sh = \dfrac{r_*}{t_* v_*}$ — число Струхала, $Re = \dfrac{v_* r_*}{\nu_*}$ — число Рейнольдса, $Eu = \dfrac{P_*}{\rho_* v_*^2}$ — число Эйлера. Звездочкой обозначены характерные величины процесса. Динамические условия на свободных границах в безразмерной форме имеют следующий вид:

$$P|_{r=R_1} = P^g - 2Si\frac{\sigma|_{r=R_1}}{R_1} - \frac{4}{S}\rho\nu(T|_{r=R_1})\frac{V}{R_1^3},$$

$$P|_{r=R_2} = P_{vn} + 2Si\frac{\sigma|_{r=R_2}}{R_2} - \frac{4}{S}\rho\nu(T|_{r=R_2})\frac{V}{R_2^3}.$$

Здесь $Si = \dfrac{\sigma_*}{r_*P_*}$, $S = \dfrac{r_*P_*}{\rho_*\nu_*v_*}$. Проинтегрируем уравнение (4.15) по r. Получим в результате:

$$Sh\frac{dV}{dt}\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big) - \frac{V^2}{2}\Big(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4}\Big) =$$

$$= -Eu\frac{1}{\rho}\Big[P_{vn} - P^g + 2Si\Big(\frac{\sigma(T|_{r=R_1})}{R_1} + \frac{\sigma(T|_{r=R_2})}{R_2}\Big)\Big] -$$

$$-\frac{4Eu}{S}V(t)\Big[\frac{\nu(T|_{r=R_1})}{R_1^3} - \frac{\nu(T|_{r=R_2})}{R_2^3}\Big] -$$

$$-\frac{4}{Re}V\Big[\frac{\nu(T|_{r=R_2})}{R_2^3} - \frac{\nu(T|_{r=R_1})}{R_1^3}\Big] - \frac{8}{Re}V\int_{R_1}^{R_2}\frac{\nu(T)}{r^4}dr - \frac{4}{Re}V\int_{R_1}^{R_2}\frac{\nu(T)}{r^4}dr.$$

С учетом равенства $Re = \dfrac{S}{Eu}$ имеем:

$$Sh\frac{dV}{dt}\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big) - \frac{1}{2}V^2\Big(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4}\Big) + \frac{12}{Re}V\int_{R_1}^{R_2}\frac{\nu(T)}{r^4}dr =$$

$$= -Eu\frac{1}{\rho}\Big[P_{vn} - P^g + 2Si\Big(\frac{\sigma(T|_{r=R_1})}{R_1} + \frac{\sigma(T|_{r=R_2})}{R_2}\Big)\Big]. \qquad (4.16)$$

Уравнение переноса тепла (4.3) можно записать в виде:

$$Sh\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{Pe}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\chi(T)\frac{\partial T}{\partial r}\Big) +$$

$$+\frac{2P_*}{c_1T_*\rho_*S}\nu(T)\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 + 2\Big(\frac{v}{r}\Big)^2\Big]. \qquad (4.17)$$

Здесь $Pe = \dfrac{r_* v_*}{\chi_*}$ — число Пекле, $\dfrac{2P_*}{c_1 T_* \rho_* S}$ также является безразмерной величиной.

Уравнение диффузии газа в жидкости (4.4) в безразмерной форме имеет вид

$$Sh\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{Pe_d}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 D(T)\frac{\partial C}{\partial r}\Big), \tag{4.18}$$

где $Pe_d = \dfrac{r_* v_*}{D_*}$ — диффузионное число Пекле. Кинематические условия на внутренней и внешней свободных границах с учетом (4.14) в безразмерной форме принимают вид

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{1}{Sh}\frac{V}{R_1^2}, \qquad \frac{dR_2}{dt} = \frac{1}{Sh}\frac{V}{R_2^2}. \tag{4.19}$$

Для записи условия баланса энергии на внутренней границе в безразмерном виде введем безразмерные комплексы: $\dfrac{1}{3}Sh\dfrac{P_* r_*}{\sigma_*} = k_1$, $Sh\dfrac{c_V m_* T_*}{4\pi r_*^2 \sigma_*} = k_2$, $\dfrac{\kappa_* T_*}{v_* \sigma_*} = k_3$. Тогда получим

$$k_1 P_g \frac{dR_1^3}{dt} + k_2 \frac{d}{dt}(mT) =$$

$$= k_3 \kappa(T)\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial r} + Sh\frac{d}{dt}\Big[R_1^2 T^2 \frac{d}{dT}\Big(\frac{\sigma}{T}\Big) + \Big] + Sh\sigma\frac{dR_1^2}{dt}. \tag{4.20}$$

Закон Генри на границах записывается следующим образом:

$$C|_{r=R_1} = HA(T^g)(P^g)^n, \qquad C|_{r=R_2} = HA(T_{vn})(P_{vn})^n, \tag{4.21}$$

где $H = \dfrac{A_* P_*^n}{\rho_*}$. Граничное условие для температуры (4.10) принимает вид:

$$T|_{r=R_2} = Tvn; \qquad \kappa(T)\frac{\partial T}{\partial r} + Bi(T - T_{vn})\Big|_{r=R_2} = 0. \tag{4.22}$$

Здесь $Bi = \dfrac{\beta r_*}{\kappa_*}$ — число Био. Условие определяющее изменение массы газа в пузырьке можно переписать в виде

$$Sh\frac{d\rho^g}{dt} = -Sh\frac{3}{R_1}\frac{dR_1}{dt}\rho^g + \frac{3}{Pe_d}\frac{1}{R_1}D(T)\frac{\partial C}{\partial r}\Big|_{r=R_1}. \tag{4.23}$$

4.3. Алгоритм численного решения задачи в полной постановке

Общая схема решения задачи (4.16)—(4.22) состоит в осуществлении следующих этапов:

1. Переход на новый временной слой $(k+1)$ начинается с расчета $R_1^{k+1}, V^{k+1}, \rho^{k+1}$ методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.16), (4.19), (4.23). Внешний радиус оболочки R_2^{k+1} вычисляется с помощью закона сохранения объема оболочки (4.13) (см. кинематические условия на свободных границах (4.19)).
2. С помощью неявной разностной схемы для уравнения (4.18) вычисляется функция концентрации газа на временном слое $(k+1)$.
3. Температура жидкости определяется с помощью неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации для уравнения (4.17).

Отметим, что в дальнейшем выбор характерных величин будет осуществляться таким образом, что $Sh = 1$.

Численная схема метода Рунге-Кутты расчета функций $R_1(t), V(t), \rho(t)$ может быть представлена в виде:

$$V^{k+1} = V^k + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$R_1^{k+1} = R_1^k + \frac{\tau}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

$$\rho^{k+1} = \rho^k + \frac{\tau}{6}(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4),$$

где k_i, q_i, w_i $(i = 1, ..., 4)$ вычисляются следующим образом:

$$k_1 = K(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$k_2 = K\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_1\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$k_3 = K\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_2\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$k_4 = K(t^k + \tau, V^k + k_3\tau, R_1^k + q_3\tau, \rho^k + w_3\tau),$$

$$q_1 = Q(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$q_2 = Q\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_1\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$q_3 = Q\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_2\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$q_4 = Q(t^k + \tau, V^k + k_3\tau, R_1^k + q_3\tau, \rho^k + w_3\tau),$$

$$w_1 = W(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$w_2 = W\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_1\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$w_3 = W\Big(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_2\frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2\frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$w_4 = W(t^k + \tau, V^k + k_3\tau, R_1^k + q_3\tau, \rho^k + w_3\tau).$$

Для функций K, Q, W имеют место зависимости вида:

$$K(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k) = \frac{1}{2}(V^k)^2((R_2^k)^2 + (R_1^k)^2)\frac{R_2^k + R_1^k}{(R_2^k R_1^k)^3} +$$
$$+\frac{1}{Re}\frac{1}{\rho^k}\Big[P'^g - P'_{vn} - 2\overline{Si}\sigma(T^k)\frac{(R_2^k + R_1^k)}{R_2^k R_1^k}\Big]\frac{R_2^k R_1^k}{R_2^k - R_1^k} -$$
$$-\frac{4}{Re}\nu(T^k)V^k\frac{(R_2^k)^2 + R_2^k R_1^k + (R_1^k)^2}{(R_2^k)^2(R_1^k)^2},$$

$$Q(t^k, V^k, R_1^k) = \frac{V^k}{(R_1^k)^2},$$

$$W(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k) = -3\frac{\rho^{gk}V^k}{(R_1^k)^3} + \frac{9}{Pe_d}D(T^k)\,\frac{C_2^k - C_1^k}{x_2^k - x_1^k}\,\frac{R_1^k}{R_{20}^3 - R_{10}^3}.$$

Для численного нахождения распределения концентрации газа в жидкости C и температуры T осуществляется переход к задаче на плоскости лагранжевых координат. Для этого вводится новая безразмерная пространственная переменная x:

$$x = \frac{r^3 - R_1^3(t)}{R_{20}^3 - R_{10}^3}.$$

Таким образом осуществляется переход на каждом шаге по времени в фиксированную область. После перехода в неподвижную систему координат с пространственной переменной x уравнение диффузии выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\overline{D}(t,x)\frac{\partial C}{\partial x}\Big], \tag{4.24}$$

где

$$\overline{D}(t,x) = \frac{9}{Pe_d}\frac{1}{(R_{20}^3 - R_{10}^3)^2}[R_{20}^3 - R_{10}^3 x + R_1^3(t)]^{4/3} D(T(t)).$$

На каждом временном слое k вводится итерационный процесс нахождения концентрации газа C и температуры T в оболочке. Для численного решения уравнения диффузии (4.24) строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной [20]:

$$\frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau_C} = \frac{1}{\hbar_i}\Big[\overline{\overline{D}}_{i+1}\frac{C_{i+1}^{s+1} - C_i^{s+1}}{h_{i+1}} - \overline{\overline{D}}_i\frac{C_i^{s+1} - C_{i-1}^{s+1}}{h_i}\Big], \tag{4.25}$$

где C_i^s — значения концентрации на s-ой итерации, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$, $\overline{\overline{D}}_i = 0,5[\overline{D}(t^{k+1}, x_{i-1}) + \overline{D}(t^{k+1}, x_i)]$, $t^{s+1} = t^s + \tau_C$, τ_C — шаг разбиения на подслои на каждом временном слое k.

Для реализации схемы (4.25) используется метод прогонки [71]. Применяется критерий сходимости итерационного процесса вида:

$$\frac{\max_i |C_i^{s+1} - C_i^s|}{\max_i |C_i^{s+1}|} \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность (см. [20]). Предполагается параболический профиль начального распределения концентрации с максимумом в центре слоя.

Для уравнения переноса тепла (4.17) строится аналогичная разностная схема

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\tau_T} = \frac{1}{\hbar_i}\Big[\overline{\overline{\chi}}_{i+1}\frac{T_{i+1}^{m+1} - T_i^{m+1}}{h_{i+1}} - \overline{\overline{\chi}}_i\frac{T_i^{m+1} - T_{i-1}^{m+1}}{h_i}\Big]. \qquad (4.26)$$

Здесь $\overline{\overline{\chi}}_i = 0,5[\overline{\chi}(t^{k+1}, x_{i-1}) + \overline{\chi}(t^{k+1}, x_i)]$, $t^{m+1} = t^m + \tau_T$. Для вычисления $\overline{\chi}$ используется выражение

$$\overline{\chi}(t,x) = \frac{9}{Pe}\frac{1}{(R_{20}^3 - R_{10}^3)^2}\Big[\Big(R_{20}^3 - R_{10}^3\Big)x + R_1^3(t)\Big]^{4/3}\chi(T(t,x)).$$

Отметим, что здесь и далее уравнение переноса тепла используется без учета диссипативной функции.

Для реализации схемы (4.26) применяется метод прогонки с параметром, где в качестве параметра выбирается неизвестное значение температуры $\overline{T}$ при $x = 0$ (т.е. T_1), совпадающее с T^g на каждом временном слое. Данной схеме (4.26) соответствует система линейных алгебраических уравнений

$$-a_iT_{i-1} + b_iT_i - c_iT_{i+1} = d_i, i = 2, ...I.$$

Поиск T_i в виде $T_i = \gamma_i\overline{T} + \alpha_iT_{i+1} + \beta_i$ позволяет выразить все T_i через $\overline{T}$:

$$T_i = \widetilde{\gamma}_i\overline{T} + \widetilde{\beta}_i,$$

а уравнение (4.20) позволяет найти $\overline{T}$.

Проведено тестирование неявных разностных схем (4.25) и (4.26) на формальном точном решении и на последовательностях пространственных сеток. Было рассмотрено уравнение вида $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{4\lambda}{\pi^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, а в качестве точного решения использовалась функция $F(x,t) = \exp(-\lambda t)\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}x\Big)$.

Заметим, что были проведены тестовые расчеты на основе алгоритма, в котором метод Рунге—Кутты применялся для вычисления каждой из функций $R_1(t), V(t), \rho(t)$ по отдельности. Численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искомых величин.

4.4. Задача в диффузионном приближении

В ряде случаев диффузионные процессы оказываются преобладающими по сравнению с тепловыми, и тогда можно рассмотреть квазизотермическую модель, когда температура всей системы считается равной температуре газа вне оболочки. При этом предполагается зависимость распределения температуры только от времени. Для численного решения такой задачи используем безразмерную постановку (4.16), (4.18), (4.23), (4.21). Перепишем указанные уравнения в следующем виде:
При $t > 0$ имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}V^2\frac{(R_2^2+R_1^2)(R_2+R_1)}{R_2^3R_1^3} + \frac{1}{Re}\frac{1}{\rho}\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\cdot$$

$$\cdot\Big[P'^g - P'_{vn} - 2\overline{Si}\sigma(T)\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\Big] - \frac{4}{Re}\nu(T)V\frac{(R_2^2+R_2R_1+R_1^2)}{R_2^2R_1^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^2C) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{Pe_d}r^2D(T)\frac{\partial C}{\partial r} - VC\Big), \quad R_1 < r < R_2;$$

$$C|_{r=R_1} = \widetilde{A}(T)P^{g\,n}, \quad C|_{r=R_2} = \widetilde{A}(T)P_{vn}^n,$$

$$\frac{d\rho^g}{dt} = -3\rho^g\frac{1}{R_1}\frac{dR_1}{dt} + \frac{3}{Pe_d}\frac{1}{R_1}D(T)\frac{\partial C}{\partial r}\Big|_{r=R_1},$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{V}{R_1^2}, \quad \frac{dR_2}{dt} = \frac{V}{R_2^2}.$$

При $t = 0$ задаются начальные условия:

$$R_1(0) = R_{10}, \quad R_2(0) = R_{20}, \quad V(0) = V_0, \quad C(0,r) = C_0(r), \quad \rho^g(0) = \rho_0^g.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\widetilde{A}(T) = HA(T)$, $P^g = \widetilde{R}'\rho^gT^g$, $P'^g = P^gS$, $\overline{Si} = SiS$, $\widetilde{R}' = \dfrac{\widetilde{R}\rho_*T_*}{P_*}$.

Для нахождения приближенных значений внутреннего радиуса оболочки, скорости и плотности газа в пузырьке используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Внешний радиус оболочки вычисляется из закона сохранения объема оболочки. Для численного решения уравнения диффузии строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной (4.25).

4.5. Результаты численных исследований

В данной работе проведены численные исследования процесса формирования жидкой стеклянной оболочки, содержащей углекислый газ. Характерные значения выбраны следующим образом [50]: характерный размер $r_* = 0.05$ см, характерная скорость жидкости $v_* = 1$ см/с, характерная температура $T_* = 1673$ К, характерное внешнее давление $P_* = 1013250$ дин/см^2 (= 1 атм), характерная плотность жидкого стекла (в диапазоне температур $T = 1273 \div 1673$ К) $\rho_* = 2$ г/см^3, теплоемкость жидкости $c_1 = 0.345$ кал/(г К), теплоемкость газа при постоянном объеме $c_V = 0.27724$ кал/(г К), коэффициент в законе Генри $A = 7 \cdot 10^{-5}$ (дин см)/г; характерные коэффициенты: кинематической вязкости $\nu_* = \nu(T_*) = 36$ см^2/с, поверхностного натяжения $\sigma_* = \sigma(T_*) = 280$ дин/см, диффузии $D_* = 0.41 \cdot 10^{-4}$ см^2/с, теплопроводности $\kappa_* = 5.5$ кал/(см с К), теплоотдачи $\beta = 611$ кал/(см^2 с К). Характерное время определяется как $t_* = \dfrac{r_*}{v_*}$, характерное значение коэффициента температуропроводности вычисляется из соотношения $\chi_* = \dfrac{\kappa_*}{\rho_* c_1}$. В безразмерных переменных функции ν, D, σ, χ, A приобретают вид:

$$\nu = 0.18 \cdot 10^{-5} \cdot \exp\left(\frac{13.23}{T}\right), \qquad D = 1.195T - 0.195,$$

$$\sigma = 1.299 - 0.299T, \qquad \chi = 0.636 + 227 \cdot 10^{-6} T, \qquad A = \frac{0.002}{T}.$$

Показатель n в законе Генри выбран равным 0.5.

Численное исследование процесса проводилось таким образом, чтобы выявить влияние внешних и внутренних факторов на динамику оболочки и диффузионные процессы в ней. Предполагается, что начальное состояние системы "газ — жидкость" характеризуется наличием достаточно большого пузырька: $R_{10} = 0.02$ см, $R_{20} = 0.05$ см. Начальная температура жидкости полагается постоянной и равна 1171.1 К. Концентрация газа в жидком слое расределена по параболическому закону согласно формуле $C_0(r) = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$, где коэффициенты α, β и γ представляют собой константы, зависящие от концентрации газа на границах области R_{10} и R_{20}. Сферическая оболочка, содержащая газ, помещается в разреженную атмосферу того же газа, нагреваемую до определенной температуры согласно следующему закону:

$$\begin{cases} T_{vn} = T_{vn1} + \dfrac{T_{vn2} - T_{vn1}}{t_2 - t_1}(t - t_1), & t_1 \le t \le t_2 \\ T_{vn} = T_{vn2}, & t > t_2, \end{cases}$$

где $t_1 = 0$ с, $t_2 = 0.3$ с.

Проведено сравнение результатов, полученных с использованием полной модели и результатов задачи, решенной без учета диффузии газа, т.е. в тепловом приближении. На рисунках 4.2, 4.3 изображена зависимость изменения внутреннего радиуса оболочки со временем под влиянием различных внешних параметров системы. В случае, когда математическое моделирование процесса осуществлялось с учетом как тепловых, так и диффузионных процессов, интенсивность динамики оболочки была выше, а установившийся режим достигается позднее, чем в случае рассмотрения тепловой постановки задачи. Так, например, в случае, когда внешнее давление P_{vn} принимает значение, равное 0.1 атм, внутренний радиус сферического слоя R_1 при использовании полной постановки задачи достигает значений, близких к 0.09 см, в то время, как в случае применения в качестве математической модели задачи в тепловом приближении, данный показатель не превышает 0.06 см (см. рисунок 4.2, сплошная и штрихпунктирная линии). Данная тенденция наблюдается как при бо́льшем значении внешнего давления ($P_{vn} = 0.3$ атм, см. рисунок 4.2, линии мелким крупным штрихом), так и при различных значениях количества газа в пузырьке в начальный момент времени (рисунок 4.3, сплошная и штрихпунктирная линиии, линии мелким и крупным штрихом).

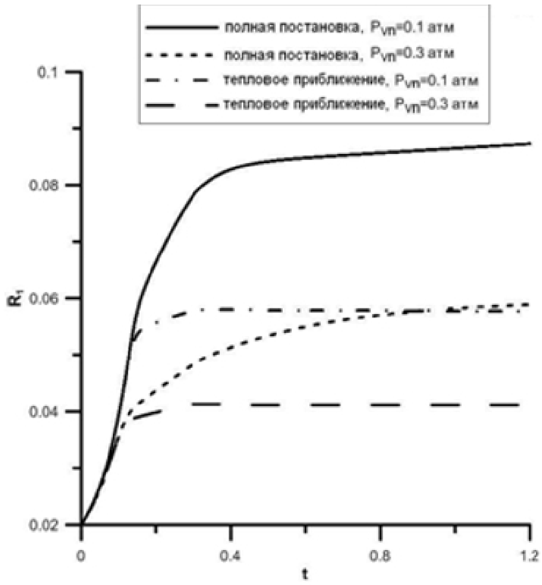


Рис. 4.2. Изменение внутреннего радиуса оболочки с течением времени при различных значениях внешнего давления ($\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3): сплошная линия — задача в полной постановке, $P_{vn} = 0.3$ атм; мелкий пунктир — задача в полной постановке, $P_{vn} = 0.1$ атм; штрихпунктирная линия — задача в тепловом приближении, $P_{vn} = 0.3$ атм; крупный пунктир — задача в тепловом приближении, $P_{vn} = 0.1$ атм.

Исследовано влияние внешнего давления и количества газа в пузырьке в начальный момент времени на динамику сферического слоя. Увеличение плотности газа (рисунок 4.3), как и снижение внешнего давления (рисунок 4.2) способствуют более интенсивному расширению сферического слоя. Так, в случае, если в качестве математической модели процесса формирования сферического слоя использовалась задача в полной постановке, а ко-

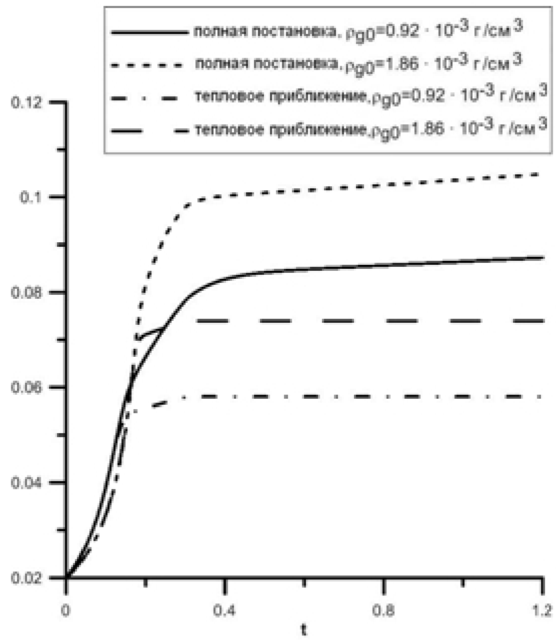
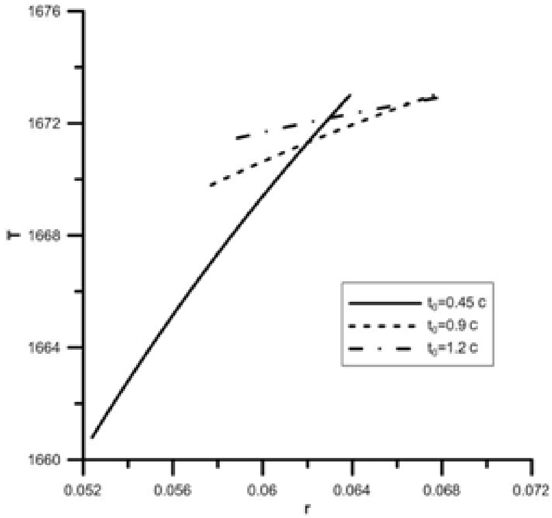


Рис. 4.3. Изменение внутреннего радиуса оболочки с течением времени при различных значениях количества газа в пузырьке в начальный момент времени ($P_{vn} = 0.1$ атм): сплошная линия — задача в полной постановке, $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; мелкий пунктир — задача в полной постановке, $\rho_0^g = 1.86 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; штрихпунктирная линия — задача в тепловом приближении, $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; крупный пунктир — задача в тепловом приближении, $\rho_0^g = 1.86 \cdot 10^{-3}$ г/см^3.

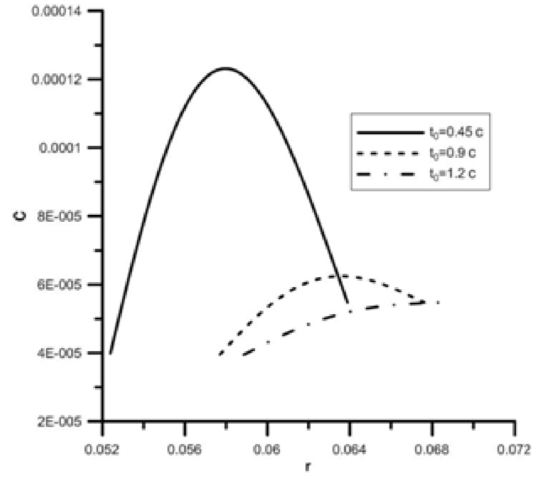
личество газа в пузырьке в начальный момент времени полагалось равным $0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, при $P_{vn} = 0.3$ атм (рисунок 4.2, сплошная линия) параметр R_1 достигает значений в полтора раза меньших, чем при $P_{vn} = 0.1$ атм (рисунок 4.2, линия мелким штрихом). Кроме того, отметим, что в случае бо́льшего значения внешнего давления стабилизация процесса расширения газового пузырька наступает позже. Схожая картина динамики процесса наблюдается и в случае рассмотрения задачи в тепловом приближении (см. рисунок 4.2, штрихпунктирная линия и линия крупным штрихом). В случае увеличения начальной массы газа в пузырьке ρ_0^g до $1.86 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 при $P_{vn} = 0.1$ атм в задаче в полной постановке (см. рисунок 4.3, линия мелким штрихом) наблюдается увеличение интенсивности динамики сферической оболочки в сравнении со случаем, когда $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 (рисунок 4.3, сплошная линия), внутренний радиус оболочки R_1 достигает значения 0.1 см. Если задача рассматривается без учета диффузионных процессов, интенсивность динамики оболочки снижается, однако характер зависимости относительно количества газа в пузырьке в начальный момент времени остается прежним (см. рисунок 4.3, штрихпунктирная линия и линия крупным штрихом). Отметим также, что была рассмотрена ситуация, когда внешнее давление и давление внутри газового пузырька полагались равными друг другу. В данном случае наблюдалось снижение интенсивности расширения жидкой оболочки, однако общая тенденция (стабилизация процесса) сохранялась.

На рисунке 4.4 представлено изменение распределения температуры и концентрации газа в жидкости со временем для фиксированных значений плотности газа в пузырьке в начальный момент времени и давления внешней среды. С течением времени перепад температуры и концентрации газа в слое снижается, средняя температура при этом возрастает, а среднее значение концентрации газа в жидкости уменьшается. Так, например, в момент времени $t = 0.45$ с перепад температур превышает 12 K, тогда как при $t = 1.2$ с данный значение данного параметра менее 2 K (см. рисунок 4.4а, сплошная и штрихпунктирная линии). Отметим также, что для функции концентрации газа наблюдается также смещение максимума значений к внешней границе жидкого слоя (рисунок 4.4б).

Исследовано влияние диффузионных процессов на формирование жидкого сферического слоя. В случае, когда математическое моделирование осуществляется без учета тепловых процессов (см. пункт 4.4), интенсивность динамики оболочки значительно снижается, установившийся режим достигается позднее, чем в случаях рассмотрения задачи в полной постановке или ее тепловом приближении. Рисунок 4.5 демонстрирует зависимость



а



б

Рис. 4.4. Изменение а — распределения температуры и б — концентрации газа в жидком слое в различные моменты времени, $P_{vn} = 0.3$ атм, $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3: сплошная линия — $t = 0.45$ с; мелкий пунктир — $t = 0.9$ с; штрихпунктирная линия — $t = 1.2$ с.

интенсивности формирования сферического слоя от внешнего температурного режима. В случае, когда температура внешней среды остается постоянной, наблюдается достаточно плавная стабилизация процесса. Если через некоторое время происходит достаточно быстрый нагрев внешней среды (например, с $T_{vn} = 1171.1$ K до $T_{vn} = 1250$ K за 0.3 с, см. 4.5, линия мелким штрихом), максимальное значение внутреннего радиуса жидкой оболочки достигается раньше, чем при $T_{vn} = const$.

На рисунках 4.7 и 4.6 представлено изменение функции $R_1(t)$ при различных значениях плотности газа в пузырьке в начальный момент времени и внешнего давления. Внешняя атмосфера нагрета до определенной температуры $= 1171$ K, остающейся постоянной во время протекания процесса; давление P_{vn} также не изменяется и принимает значение, равное 0.03 атм. При б*о*льших значениях начальной плотности газа в пузырьке, как и в случае меньших значений внешнего давления процесс расширения сферического слоя протекает более интенсивно. Во всех случаях наблюдается выход газа из пузырька.

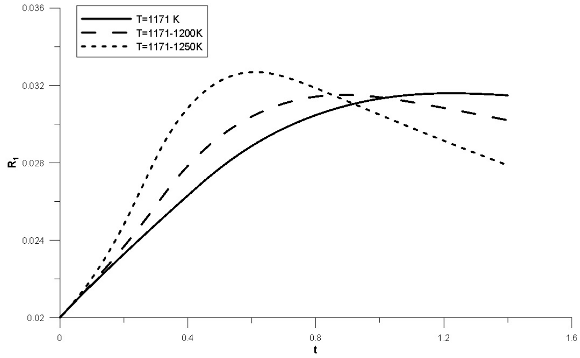


Рис. 4.5. Изменение внутреннего радиуса оболочки с течением времени при различных внешних температурных режимах в квазиизотермическом случае: сплошная линия — постоянная температура ($T = 1171.1$ K); крупный пунктир — нагрев T_{vn} от 1171.1 K до 1200 K; мелкий пунктир — нагрев T_{vn} от 1171.1 K до 1250 K.

Таким образом, исследована математическая модель динамики сферически симметричного слоя вязкой несжимаемой жидкости, заключающего в себя газовый пузырек в условиях кратковременной невесомости. Задача рассматривалась в полной, учитывающей диффузионные и тепловые процессы, и квазиизотермической постановках. Для решения задачи разработан и протестирован численный алгоритм. Проведены численные эксперименты по формированию микробаллона жидкого стекла, содержащего пузырек углекислого газа. Представлено сравнение численных результатов, полученных в случае решения задачи в полной, тепловой и квазиизотермической постановках. Показано, что наиболее интенсивная динамика сферического слоя наблюдается при решении задачи в полной постановке. Исследовано влияние давления вне сферической оболочки и начальной плотности газа в пузырьке на изменения радиуса жидкого слоя. Установлено, что увеличение плотности газа или снижение внешнего давления способствует более интенсивному расширению сферического слоя.

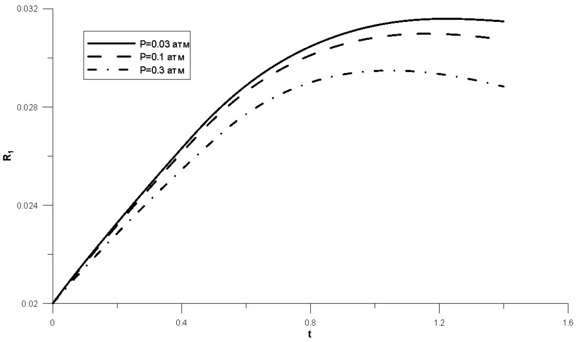


Рис. 4.6. Изменение внутреннего радиуса оболочки с течением времени при различных значениях внешнего давления в квазиизотермическом случае: сплошная линия — $P_{vn} = 0.03$ атм; крупный пунктир — $P_{vn} = 0.1$ атм; мелкий пунктир — $P_{vn} = 0.3$ атм.

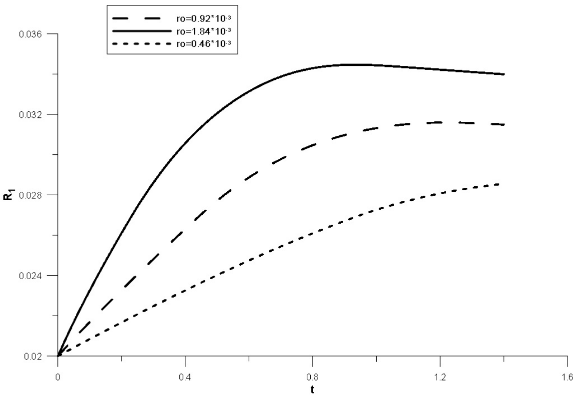


Рис. 4.7. Изменение внутреннего радиуса оболочки с течением времени при различных значениях количества газа в пузырьке в начальный момент времени в квазиизотермическом случае: сплошная линия — $\rho_0^g = 1.84 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; крупный пунктир — $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; мелкий пунктир — $\rho_0^g = 0.92 \cdot 10^{-3}$ г/см^3.

Заключение

В качестве основных научных результатов можно выделить следующие:

1. Построены новые точные решения уравнений конвекции для описания течений в двухслойной системе с учетом испарения на термокапиллярной границе и эффектов Соре и Дюфура в газопаровом слое. Выделены типы течений (чисто термокапиллярное, смешанное и пуазейлевское) и их подклассы. Исследована зависимость характера течения от выбора условий для концентрации пара и физических параметров задачи. Изучено влияние продольных градиентов температуры и расхода газа на возникновение возвратных течений вблизи границы раздела. Проведено сравнение аналитических и экспериментальных результатов влияния тепловой нагрузки, толщины жидкого слоя и расхода газа на интенсивность испарения. Получены качественные и количественные совпадения результатов.
2. Построены математические модели течения тонкого слоя жидкости по наклонной подложке с учетом испарения, капиллярных, термокапиллярных и гравитационных сил, дополнительных касательных напряжений. Получены эволюционные уравнения, определяющие положение свободной границы, построен алгоритм численного исследования процесса стекания жидкого слоя при использовании моделей, основанных на уравнениях Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска. Выявлено влияние сил плавучести, гравитационных сил, угла наклона подложки и учет дополнительного слагаемого в энергетическом условии на границе раздела на качественную и количественную картину течения.
3. Построена трехмерная математическая модель динамики свободного слоя вязкой несжимаемой жидкости и распределения тепла в нем на основе точных решений уравнений Навье—Стокса. Предложен алго-

ритм численного решения задачи о растекании жидкого слоя под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений. Разработана схема численного нахождения распределения температуры в "центральной" части слоя (параллелепипеде). Численно исследовано влияние термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений на характер течения в исследуемой области в трехмерном случае.

4. Исследована математическая модель динамики сферически симметричного слоя жидкости, содержащего расстворенный газ и газовый пузырек. Построены алгоритмы численного расчета задач. Представлено сравнение численных результатов, полученных в случае решения задачи в полной, тепловой и квазиизотермической постановках. Исследовано влияние давления вне сферической оболочки и начальной плотности газа в пузырьке на изменения радиуса жидкого слоя.

Литература

1. Андреев, В.К. Инвариантные решения уравнений темокапиллярного движения / В.К. Андреев, В.В. Пухначев // Сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. № 14(5). С. 3-23.
2. Андреев, В.К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей / В.К. Андреев. Новосибирск: Наука, 1992. 136 с.
3. Андреев, В.К. О движении плоского слоя жидкости со свободной границей под действием эффекта Соре / В.К. Андреев, А.Е. Картошкина // Вестник Красноярского гос. ун-та. Физ.-мат. науки. 2004. № 1. С. 182-189.
4. Андреев, В.К. Движение жидкой пленки и газового потока в микроканале с испарением / В.К. Андреев, В.В. Кузнецов // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. № 5. С. 17-28
5. Андреев, В.К. Современные математические модели конвекции / В.К. Андреев [и др.]. М.: Наука, 2008. 368 с.
6. Андреев, В.К.. Устойчивость неизотермических жидкостей / В.К. Андреев, В.Б. Бекежанова. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. 356 с.
7. Андреев, В.К. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях / В.К. Андреев, Н.Л. Собачкина. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. 188 с.
8. Аншиц, А.Г. Скорость детонации эмульсионных взрывчатых веществ с ценосферами / А.Г. Аншиц [и др.] // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41. № 5. С. 119-127.
9. Бекежанова, В.Б. Конвективная неустойчивость течения Марангони-Пуазейля при наличии продольного градиента температуры / В.Б. Бе-

кежанова // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 92-100.

10. Бекежанова, В.Б. Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела / В.Б. Бекежанова, О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, И.А. Шефер // Известия РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 23-35.

11. Бекежанова, В.Б. Задачи испарительной конвекции (обзор) / В.Б. Бекежанова, О.Н. Гончарова // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып.2. С. 219-260.

12. Бирих, Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости / Р.В. Бирих // Прикладная механика и техническая физика. 1966. № 3. С. 69-72.

13. Бирих, Р. В. Термокапиллярная неустойчивость в двухслойной системе с деформируемой границей раздела / Р. В. Бирих, С. В. Бушуева // Известия РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 13–20.

14. Бытев, В.О. Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами / В.О. Бытев // Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 3. С. 82-88.

15. Воеводин, А.Ф. Численное решение задачи о качестве воды в открытом русловом потоке / А.Ф. Воеводин, А.С. Овчарова // Водные ресурсы. 1977. № 4. С. 172-178.

16. Воеводин, А.Ф. Численное моделирование переноса тепла в свободном слое жидкости при наличии термокапиллярных сил и дополнительныъ касательных напряжений / А.Ф. Воеводин, О.Н. Гончарова, О.А. Кондратенко // Известия АлтГУ. 2013. № 1/1(77). С. 16-21.

17. Гебхард, Б. Свободноконвективные течения. Тепло- и массообмен. Б. Гебхард [и др.]. В 2-х книгах. М.: Мир, 1991. 678 с.

18. Гершуни, Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972. 392 с.

19. Гончарова, О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости / О.Н. Гончарова // Гидродинамика быстропротекающих процессов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1987. Вып. 82. С. 66-79.
20. Гончарова, О.Н. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости / О.Н. Гончарова, В.В. Пухначев // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. Новосибирск: Вычисл. центр, Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1990. Т. 4(21). № 5. С. 83-96.
21. Гончарова, О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов / О.Н. Гончарова // Вычислительные методы прикладной гидродинамики. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1993. Вып. 106. С. 36-48.
22. Гончарова, О.Н. Деформация вязкого теплопроводного слоя в условиях дополнительных касательных напряжений / О.Н. Гончарова, О.А. Кондратенко // Известия АлтГУ. 2011. № 1/2(69). С. 23-31.
23. Гончарова, О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе / О.Н. Гончарова // Известия АлтГУ. 2012. № 73(1/2). С. 12-18.
24. Гончарова, О.Н. Численное моделирование переноса тепла в свободном слое жидкости на основе точных решений уравнений Навье-Стокса / О.Н. Гончарова, О.А. Кондратенко // Известия АлтГУ. 2013. № 1/1(77). С. 24-30.
25. Гончарова, О.Н. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений. Часть I / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2013. № 1/1(77). С. 31-33.
26. Гончарова, О.Н. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений. Часть II / О.Н.

Гончарова, Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2013. № 1/2(77). С. 22-27.

27. Гончарова, О.Н. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов // Известия АлтГУ. 2014. №. 1/1(81). С. 47-52.

28. Гончарова, О.Н. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 68-79.

29. Гончарова, О.Н. Математическая модель течений тонкого слоя жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2014. № 1/2(81). С. 21-25.

30. Гончарова, О.Н. Построение математической модели течений в тонком слое жидкости на основе классических уравнений конвекции и обобщенных условий на границе раздела / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2015. № 1/1(85). С. 70-74.

31. Гончарова, О.Н. Моделирование двухслойных течений жидкостии газа с учетом испарения / Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 5. С. 655-661.

32. Гончарова, О.Н. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газ с учетом испарения / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, Ю.В. Люлин, О.А. Кабов // Теплофизика высоких температур. 2017. № 55(6). С. 720-732.

33. Гроот, С.Р. Термодинамика необратимых процессов / С.Р. Гроот. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. 281 с.

34. Де Гроот, С. Неравновесная термодинамика / С. Де Гроот, П. Мазур. М.: Мир, 1964. 456 с.
35. Джозеф, Д. Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. М.: Мир, 1981. 639 с.
36. Закурдаева, А.В. Численное исследование влияния давления внешней среды на динамику жидкой сферической оболочки / А.В. Закурдаева, Е.В. Резанова // Омский научный вестник. 2015. № 3(143). С. 312-315.
37. Зюзина, Н.А. Точные решения с центрированными волнами в модели пленочных течений, учитывающей тепломассоперенос на межфазной поверхности / Н.А. Зюзина , В.В. Остапенко // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2018. Т. 18. Вып. 1. С. 64–72.
38. Кабов, О.А. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа / О.А. Кабов, Ю.О. Кабова, В.В. Кузнецов // Доклады Академии Наук. 2012. Т. 446(5). С. 522-526.
39. Карпов, Е.В. Деформирование и разрушение сферопласта в условиях малоциклового нагружения при различных температурах / Е.В. Карпов // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 1. С. 197-204.
40. Кирдяшкин, А.Г. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла / А.Г. Кирдяшкин, В.И. Полежаев, А.И. Федюшкин // Прикладная механика и теоретическая физика. 1983. № 6. С. 122–128.
41. Копбосынов, Б.К. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости / Б.К. Копбосынов, В.В. Пухначев // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости: сб. научн. тр. Сведловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 116-125.
42. Краткий справочник физико-химических величин / Под ред. Равделя А.А., Пономаревой А.М. СПб.: Специальная литература, 1998. 232 с.

43. Кузнецов, В.В. Тепломассообмен на поверхности раздела жидкость—пар / В.В. Кузнецов // Известия РАН. МЖГ. 2011. № 5. С. 97-107.

44. Куперштох, А.Л. Метод решенточного уравнения Больцмана в задачах электрогидродинамики / А.Л. Куперштох, Д.А. Медведев // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО РАН. 2001. Вып. 118. С. 117-121.

45. Кускова, Т.В. Численное исследование конвекции неизотермической вязкой жидкости, содержащей пузырь, в условиях пониженной гравитации / Т.В. Кускова, В.И. Полежаев // В кн. Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1974. Вып. 23. С. 54-75.

46. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Т. VI Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.

47. Люлин, Ю.В. Конвективная конденсация пара и испарение обдуваемого газом слоя жидкости в стесненных условиях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 Люлин Юрий Вячеславович. Новосибирск, 2016. 168 с.

48. Люлин, Ю.В. Измерение массовой скорости испарения в горизонтальном слое жидкости, частично открытом в движущийся газ / Ю.В. Люлин, О.А. Кабов // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. № 17. С. 88-94.

49. Люлин, Ю.В. Измерение скорости испарения с локальной поверхности слоя жидкости под действием потока газа / Ю.В. Люлин [и др.] // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 14. С. 1-7.

50. Мазурин, О.В. Свойства стекол и стеклообразующих расплавов / О.В. Мазурин, М.В. Стрельцина, Т.П. Швайко-Швайковская. Ленинград.: Наука, 1973. 443 с.

51. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. М.: Наука, 1977. 456 с.

52. Марчук, И.В. Конденсация пара на неизотермических криволинейных ребрах / И.В. Марчук, А.В. Глущук, О.А. Кабов // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32.(9). С. 42-49.
53. Мациев, Л.Ф. Испарение капли в сильно перегретой бинарной смеси / Л.Ф. Мациев, А.Л. Стасенко // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1987. №1. С. 112–118.
54. Мациев, Л.Ф. Испарение капли в «горячей» двухкомпонентной струе с учетом термодиффузии и перекрестного эффекта / Л.Ф. Мациев, Т.Н. Рябинина, А.Л. Стасенко // Моделирование в механике. 1987. Т. 1(18). № 6. С. 106 – 114.
55. Мосеенков, В.Б. Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабосжимаемой жидкости / В.Б. Мосеенков. Киев: Институт математики НАН Украины, 1998. 280 с.
56. Остроумов, Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи / Г.А. Остроумов. Москва-Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 256 с.
57. Пригожин, И. Химическая термодинамика / И. Пригожин., Р. Дефэй. Новосибирск: Наука, 1966. 502 с.
58. Путилов, К.А. Курс физики. Том 1. / К.А. Путилов. М.: Физматлит, 1963. 560 с.
59. Пухначев, В.В. Модели деформации и разрыва жидкого слоя под действием термокапиллярных сил / В.В. Пухначев // Сб. науч. трудов междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения". Новосибирск, 2007. С. 616–619. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/invconf/vekua07/docs/vekua.pdf.
60. Пухначев, В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения / В.В. Пухначев // Симметрия и дифференциальные урав-

нения: тр. междунар. конф. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2000. С. 180-183.

61. Пухначев, В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха / В.В. Пухначев // Известия АлтГУ. 2011. № 1/2(69). С. 62-69.
62. Пухначева, Т.П. Численное решение задачи о деформировании вязкого слоя термокапиллярными силами / Т.П. Пухначева // Симметрия и дифференциальные уравнения: тр. междунар. конф. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2000. С. 183-186.
63. Резанова, Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки / Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2013. № 1/2(77). С. 42-47.
64. Резанова, Е.В. Математическое моделирование двухслойных течений с учетом эффектов Соре и Дюфура на примере точных решений / Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2014. № 1/2(81). С. 57-61.
65. Резанова, Е.В. Численное исследование течения тонкого слоя жидкости с испарением / Е.В. Резанова // Известия АлтГУ. 2016. № 1(89). С. 168-172.
66. Резанова, Е.В. О влиянии тепловой нагрузки на характеристики течения с испарением / Е.В. Резанова, И.А. Шефер // Сиб. журн. индустриальной математики. 2017. № 2(70). С. 83-92.
67. Родионова, А.В. Исследование устойчивости двухслойного течения жидкости / А.В. Родионова, Е.В. Резанова // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 4. С. 16-25.
68. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. М.: Мир, 1980. 618 с.
69. И.И. Рыжков Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость / И.И. Рыжков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. 200 с.

70. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. М.: Наука, 1978. 592 с.
71. Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. М.: Наука, 1982. 272 с.
72. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. / Л.И. Седов. М.: Наука, 1970. 568 с.
73. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. Том 2 / Д.В. Сивухин. М.: Физматлит, 1963. 591 с.
74. Тарунин, Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
75. Умов, Н.А. Избранные сочинения / Н.А. Умов. М.: Гостехиздат, 1950. 575 с.
76. Шлиомис, М.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением / М.И. Шлиомис, В.И. Якушин // Ученые записки Пермского госуниверситета, серия Гидродинамика: сб. науч. тр. 1972. № 4. С. 129-140.
77. Юдович, В.И. Избранные труды. Т. I-III / В.И. Юдович. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. 312 с.
78. Bekezhanova, V.B. Stability of exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface / V.B. Bekezhanova, O.N. Goncharova // Fluid Dynamics Research. 2016. V. 48. Issue 6. P. 61408.
79. Bekezhanova, V. B. Analysis of an Exact Solution of Problem of the Evaporative Convection (Review). Part I. Plane Case / V.B. Bekezhanova, O.N. Goncharova, I.A. Shefer // J. of Siberian Federal Univ. Math. and Phys. 2018. № 11(2). P. 178–190.
80. Bekezhanova, V.B. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations / V.B. Bekezhanova, O.N. Goncharova // Int. J. of Thermal Sciences. 2018. V. 130. P. 323–332.

81. Bekezhanova, V.B. Influence of internal energy variations of the interface on the stability of film flow / V.B. Bekezhanova, O.A. Kabov // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2016. V. 4. Issue 2-3 P. 133–156.
82. Boussinesq, J.V. Theorie Analytique de la Chaleur / J.V. Boussinesq. Paris: Gauthier–Villars, 1903. 625 p.
83. Colinet, P. Nonlinear dynamics of surface-tension-driven instabilities / P. Colinet, J.C. Legros, M.G. Velarde. Berlin: Wiley-VCH, 2001. 512 p.
84. Das, K.S. Surface thermal capacity and its effects on the boundary conditions at fluid-fluid interfaces / K. S. Das, C. A. Ward // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 065303-1 – 065303-4.
85. Gatapova E.Ya., Kabov O.A Shear-driven flows of locally heated liquid films / E.Ya. Gatapova, O.A. Kabov // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2008. V. 51. Issues 19-20. P. 4797-4810.
86. Gatapova, E.Ya. Evaporating shear-driven liquid film flow in minichannel with local heat source / E.Ya. Gatapova [et al.] // Journal of Engineering Thermophysics. V. 13, № 2, P. 179–197.
87. Ghezzehei, T.A. Modeling coupled evaporation and seepage in ventilated cavities / T.A. Ghezzehei. [et al.]. // Vadose Zone J. 2004. № 3. P. 806–818.
88. Glushchuk, A.V. Experimental Study of Film Condensation of FC-72 Vapour on Disk-Shaped Fin / A.V. Glushchuk, I.V. Marchuk, O.A. Kabov // Microgravity Sci. Technol. 2011. V. 23. Issue 1. P. 65–74.
89. Goncharova, O.N. Modeling of two-layer fluid flows with evaporation at the interface in the presence of the anomalous thermocapillary effect / O.N. Goncharova, E.V. Rezanova // J. of Siberian Federal Univ. Math. and Phys. 2016. № 9(1). P. 48-59.
90. Goncharova, O.N. Solutions of special type describing the three dimensional thermocapillary flows with an interface / O.N. Goncharova, V.V. Pukhnachov, O.A. Kabov // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2012. V. 54. № 5. P. 715-725.

91. Goncharova, O.N. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow / O.N. Goncharova, O.A. Kabov // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2010. V. 53. Issues 13-14. P. 2795-2807.

92. Goncharova, O.N. Deformation of a viscous heat conducting free liquid layer by the thermocapillary forces and tangential stresses: Analytical and numerical modeling / O.N. Goncharova, O.A. Kabov // Microgravity Sci. Technol. 2010. V. 22. Issue 3. P. 407-414.

93. Goncharova, O.N. Thermocapillary convection in a free liquid layer in the presence of an adjacent gas flow / O.N. Goncharova, Yu.O. Kabova, O.A. Kabov // J. Computational Thermal Sci. 2011. № 3(5). P. 389-396.

94. Goncharova, O.N. Modeling of the convective fuid fows with evaporation in the two-layer systems / O.N. Goncharova, M. Hennenberg, E.V. Rezanova, O.A. Kabov // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. V. 1. № 3. P. 317-338.

95. Goncharova, O.N. Mathematical modelling of the evaporating liquid films on the basis of the generalized interface conditions / O.N. Goncharova, E.V. Rezanova // MATEC Web of Conferences. 2016. № 84. 00013.

96. Haut, B. Surface-tension-driven instability of a liquid layer evaporating into an inert gas / B. Haut, P. Colinet // J. of Colloid and Interface Science. 2005. № 285. P. 296-305.

97. Iorio, C.S. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow / C.S. Iorio, O.N. Goncharova, O.A. Kabov // Microgravity Sci. Technol. 2009. V. 21. № 1. P. 313-320.

98. Iorio, C.S. Heat and mass transfer control by evaporative thermal pattering of thin liquid layer / C.S. Iorio, O.N. Goncharova, O.A. Kabov // Computational Thermal Sci. 2011. V. 3. № 4. P. 333-342.

99. Iorio, C.S. Thermal patterns in evaporating liquid / C.S. Iorio, O.A. Kabov, J.C. Legros // Microgravity Sci. Technol. 2007. V. 19. Issue 3-4. P. 27-29.
100. Kabov, O.A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films / O.A. Kabov [et al.] // Experimental Thermal and Fluid Science. 2011. V. 35. № 5. P. 825-831.
101. Kabova, Yu. Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a microchannel / Yu. Kabova [et al.] // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2014. V. 68. P. 527-541.
102. Kabov, O.A. Steady steam condensation on an extended surface with suction of condensate / O.A. Kabov [et al.] // Journal of Engineering Thermophysics. 2003. V. 12(1). P 1-24.
103. Klentzman, J. The effects of evaporation on fingering instabilities / J. Klentzman, V.S. Ajaev // Phys. of Fluids. 2009. № 21. P. 122101-1 - 122101-9.
104. Kreta, A. Effect of temperature on the convection flow within the liquid evaporation into the gas flow / A. Kreta, Y. Lyulin, O. Kabov // Journal of Physics: Conf. Series. 2016. V 754. 032011.
105. Kuznetsov, V.V. Interfacial balance equa-tions for diffusion evaporation and exact solution for weightless drop / V.V. Kuznetsov, M.V. Bartashevich, O.A. Kabov // Microgravity Sci. Technol. 2012. V. 24. P. 17-31.
106. Lyubimova, T.P. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 1, Effect of aspect ratio and Prandtl number / T.P. Lyubimova [et al.] // J. Fluid Mech. 2009. V. 635. P. 275-295.
107. Lyulin, Yu.V. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress / Yu.V. Lyulin, O.A. Kabov // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2014. V. 70. P. 599-609.

108. Lyulin, Yu.V. Modeling of liquid and gas flows in the horizontal layer with evaporation / Yu.V. Lyulin, E.V. Rezanova // EPJ Web of Conferences. 2017. № 159. 00039.

109. Machrafi, H. Evaporation rates and Benard-Marangoni supercriticality levels for liquid layers under an inert gas flow / H. Machrafi [et al.] // Microgravity Sci. Technol. 2013. V. 25. Issue 4. P. 251-265.

110. Marchuk, I.V. Theoretical and Experimental Study of Convective Condensation inside Circular Tube / I.V. Marchuk, Yu.V. Lyulin, O.A. Kabov // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. V. 1(2). P. 153-171.

111. Margerit, J. Interfacial nonequilibrium and Benard-Marangoni instability of a liquid-vapor system / J. Margerit [et al.] // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 041601-1 – 041601-14.

112. Medvedev, D.A. Modeling of electrohydrodenamic flows and micro-bubbles generation in dielectric liquid by lattice Boltzmann equation method / D.A. Medvedev, A.L. Kupershtokh // Proc. of 14th International conference on dielectric liquids. Austria, Giraz, 2002. P. 45-48.

113. Miladinova, S. The effect of non-uniformly heating on long-wave instabilities of evaporating falling films / S. Miladinova // Proc. 6th Workshop on Transport Phenomena in Two-Phase Flow. Bulgaria, Bourgas, 2001. P. 121-128.

114. Miladinova, S. Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films / S. Miladinova [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. 2002. V. 453. P. 153-175.

115. Nakoryakov, V.E. Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition / V.E. Nakoryakov, V.V. Ostapenko, M.V. Bartashevich // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 89. P. 846–855.

116. Napolitano, L.G. Plane marangoni-poiseuille flow two immiscible fluids / L.G. Napolitano // Acta Astronaut. 1980. № 7. P. 461–478.

117. Nepomnyaschy, A.A. Interfacial phenomena and convection / A.A. Nepomnyaschy, P. Colinet, M.G. Velarde. Boca Raton London New York Washington D.C.: Chapman and Hall/CRC, 2002. 384 p.

118. Nepomnyashchy, A.A. Convective flows in a two-layer system with a temperature gradient along the interface / A.A. Nepomnyashchy, I.B. Simanovskii // Phys. of Fluids. 2006. V. 18. P. 032105-1 - 032105-7.

119. Oberbeck, A. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen / A. Oberbeck // Ann. Phys. Chem. 1879. V. 7, № 6. P. 271-292.

120. Oron, A. Long-scale evolution of thin liquid films / A. Oron, S.H. Davis, S.G. Bankoff // Reviews of Modern Physics. 1997. V. 69(3). P. 931-980.

121. Pukhnachov, V.V. On a problem of a viscous strip deformation with a free boundary C.R. / V.V. Pukhnachov // C. R. Acad. Sci. Paris. 1999. T. 328. Serie 1. P. 357-362.

122. Pukhnachov, V.V. Model of a viscous layer deformation by the thermocapillary forces / V.V. Pukhnachov // Preprint № 50. Leipzig: Max-Planck-Institut fuer die Mathematik in den Naturwissenschaften, 2000. 20 p.

123. Rezanova, E.V. Numerical investigation of the liquid film flows with evaporation at thermocapillary interface / E.V. Rezanova // MATEC Web of Conferences. 2016. № 84. 00032.

124. Rezanova, E.V. The liquid film flow with evaporation: numerical modelling / E.V. Rezanova // MATEC Web of Conferences. 2016. № 72. 01095.

125. Rezanova, E.V. The influence of gas diffusion on the dunamics of a spherical layer of viscous incompressible liquid and heat and mass transfer in it / E.V. Rezanova, A.V. Zakurdaeva // MATEC Web of Conferences. 2016. № 72. 01130.

126. Rezanova, E.V. Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries / E.V. Rezanova // EPJ Web of Conferences. 2017. № 159. 00047.
127. Rezanova, E.V. Heat transfer in a free liquid layer under action of additional tangential stresses: numerical modeling / E.V. Rezanova // Journal of Physics: Conference Series. 2016. № 754. 062008.
128. Ryzhkov, I.I. On thermal diffusion separation in binary mixtures with variable transport coefficients / I.I. Ryzhkov , I.V. Stepanova // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 86. P. 268–276.
129. Saenz, P.J. Linear and nonlinear stability of hydrothermal waves in planar liquid layers driven by thermocapillarity / P.J. Saenz [et al.] // Phys. of Fluids. 2013. V. 25(9). 094101.
130. Saenz, P.J. On phase change in marangoni-driven flows and its effects on the hydrothermal-wave instabilities / P.J. Saenz [et al.] // Phys. of Fluids. 2013. V. 26(2). 024114.
131. Scheid, B. Onset of thermal ripples at the interface of an evaporating liquid under a flow of inert gas / B. Scheid [et al.] // Exp. Fluids. 2012. V. 52. P. 1107–1119.
132. Shklyaev, O. Stability of an evaporating thin liquid film / O. Shklyaev, E. Fried // J. Fluid Mech. 2007. V. 584. P. 157-183.
133. Zyuzina, N. Numerical simulation of the drop spreading on a horizontal plane / N. Zyuzina, V. Ostapenko // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. № 894. P. 012035.

Приложение 1

Коэффициенты, определяющие зависимость массы испаряющейся жидкости от продольного градиента температуры на границе раздела сред и толщины жидкого слоя (формула (1.66))

$$f_9^2 = -\frac{11}{20160}\frac{h^2}{2}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{(\widetilde{a}_2^1)^2}{\chi_1},$$

$$f_8^2 = \frac{7}{2880}\frac{h^2}{2}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1} - \frac{3}{4032}\frac{h^3}{3}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{(\widetilde{a}_2^1)^2}{\chi_1},$$

$$f_7^2 = \frac{7}{144}\frac{h^2}{2}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{144}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{h^3}{3}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{\chi_1}(6\widetilde{a}_2^1 - 1) +$$
$$+\frac{1}{1008}\frac{h^4}{12}F_1\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{(\widetilde{a}_2^1)^2}{\chi_1},$$

$$f_6^2 = \frac{g}{\nu_2}\Big(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big)^2\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1}F_1\Big[-\frac{4}{45}\frac{h^5}{30}(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + \frac{1}{60}\frac{h^4}{8}(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] -$$
$$-F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{90}\frac{h^3}{6}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{\chi_1} - F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{60}\frac{h^2}{2}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1} - \frac{1}{144}\frac{h^4}{12}F_1\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1},$$

$$f_5^2 = F_1\frac{g}{\nu_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{40}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1}\Big[\frac{h^6}{240}(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + \frac{h^5}{72}(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] +$$
$$+\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{24}\frac{h^2}{2}\widetilde{a}_2^1(\kappa_2 - \delta\kappa_2\alpha)\Big[C_*\varepsilon\Big(3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120} + \widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big) + \frac{h^5}{120}3\widetilde{E}_2 + \frac{h^4}{24}\widetilde{E}_1\Big] -$$
$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{12}\Big(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big)^2\frac{1}{\chi_1}F_1\Big[\frac{h^5}{60}(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) - \frac{3h^4}{16}(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] +$$
$$+F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{24}\frac{1}{\chi_1}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^3}{6}2\widetilde{a}_2^1 + \frac{h^2}{2}\Big] + \frac{1}{120}\frac{h^4}{12}F_1\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{\chi_1},$$

$$f_4^2 = -F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{24}\frac{1}{\chi_1}\Big[\frac{7h^6}{240}(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + \frac{h^5}{24}(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] +$$

$$+\Big(3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}+\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\frac{h^2}{2}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{24}\Big[\kappa_1 hB_3\widetilde{a}_2^1+(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)(\widetilde{a}_2^1 hB_4-4C_*\varepsilon)\Big]+$$

$$+\Big[\frac{h^5}{120}3\widetilde{E}_2+\frac{h^4}{24}\widetilde{E}_1\Big]\frac{h^2}{2}\frac{1}{24}\frac{g\beta_1}{\nu_1}[\widetilde{a}_2^1\kappa_1 h-4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{24}\Big(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big)^2 2\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1}F_1\Big[\frac{h^5}{30}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)-\frac{h^4}{8}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]-$$

$$-F_1\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{\chi_1}\Big[\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{h^3}{36}+\frac{h^4}{144}\widetilde{a}_2^1\Big]+$$

$$+\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{6}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1}F_1\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{\chi_1}F_1\Big[\frac{h^6}{160}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{48}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big],$$

$$f_3^2=\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)[\kappa_1 hB_3+hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)]\frac{h^2}{2}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\frac{1}{6}-$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{1}{6}\frac{g\beta_1}{\nu_1}\kappa_1 h\Big[\frac{h^5}{120}3\widetilde{E}_2+\frac{h^4}{24}\widetilde{E}_1\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{2}{3}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{\chi_1}F_1\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]+$$

$$+\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^5}{30}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^4}{8}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^4}{24}2\widetilde{E}_2-\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_1-$$

$$-C_*\varepsilon\Big(-2\widetilde{B}_2\frac{h^4}{24}-\widetilde{B}_1\frac{h^3}{6}\Big)\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^6}{160}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{48}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+$$

$$+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1-C_*\varepsilon\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big]+F_1\frac{1}{6}\frac{h^4}{12}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{\chi_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(C_*\varepsilon F_2-F_3)(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)+\frac{h^4}{12}C_*\varepsilon(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)F_2,$$

$$f_2^2=\frac{h^2}{2}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}C_*\varepsilon(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)-$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^5}{120}3\widetilde{E}_2+\frac{h^4}{24}\widetilde{E}_1\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{1}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^5}{120}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^4}{24}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]\frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]+$$

$$+\frac{h^3}{3}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^4}{24}2\widetilde{E}_2-\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_1-C_*\varepsilon\Big(-\frac{h^4}{24}2\widetilde{B}_2-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_1\Big)\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+$$

$$+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1-C_*\varepsilon\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\frac{h^6}{160}(\beta_2\widetilde{a}_2^2-\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{48}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]\Big[\kappa_1h\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1\Big)+$$

$$+(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3)\Big(-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2-\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3)F_2-\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\kappa_1hF_3+$$

$$+\frac{h^3}{3}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(C_*\varepsilon F_2-F_3)(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha),$$

$$f_1^2=\kappa_1hB_3\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\Big[\frac{h^2}{2}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}+\frac{g}{\nu_2}\frac{h^5}{120}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{h^4}{8}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)-\frac{g}{\nu_2}\frac{h^5}{24}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\beta_2\widetilde{a}_2^1+\gamma\widetilde{b}_2)\Big]+$$

$$+\frac{h^2}{2}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)+$$

$$+\frac{g}{\nu_2}hB_4\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^5}{120}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^4}{24}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)+$$

$$+\frac{g}{\nu_2}C_*\varepsilon\Big[\frac{h^6}{120}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{24}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\Big[hB_4\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^5}{24}(\beta_2\widetilde{a}_2^1+\gamma\widetilde{b}_2)+$$

$$+\frac{h^4}{6}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]+C_*\varepsilon\Big[\frac{h^6}{48}(\beta_2\widetilde{a}_2^1+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{12}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]\Big]-$$

$$+\frac{g}{\nu_2}\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^4}{24}2\widetilde{E}_2-\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_1-$$

$$-C_*\varepsilon\Big(-2\widetilde{B}_2\frac{h^4}{24}-\widetilde{B}_1\frac{h^3}{6}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{h^3}{6}\frac{\sigma_T}{\rho_1\nu_1}\Big[(\kappa_1 hB_3+\kappa_2 hB_4)\Big(-\frac{h^4}{24}2\widetilde{B}_2-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_1\Big)+\kappa_1 h\Big(\frac{h^4}{120}\widetilde{E}_2+\frac{h^3}{24}\widetilde{E}_1\Big)\Big]-$$

$$-\frac{g}{\nu_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]\Big[\kappa_1 h\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1\Big)+$$

$$+(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1 hB_3)\Big(-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2-\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big]+$$

$$+\frac{h^3}{3}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}[(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1 hB_3)F_2-\kappa_1 hF_3]-\frac{h^4}{12}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)F_3,$$

$$f_0^2=\kappa_1 hB_3\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\frac{g}{\nu_2}\Big[-\frac{h^6}{80}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)-\frac{h^5}{24}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]+$$

$$+\frac{g}{\nu_2}hB_4\Big[\frac{7h^6}{240}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^5}{8}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big](\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big(-3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}-\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{g}{\nu_2}\Big)^2\frac{h^2}{2}\Big[\frac{h^5}{120}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^4}{24}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]\Big[\frac{h^7}{360}(\beta_2\widetilde{a}_2^2+\gamma\widetilde{b}_2)+\frac{h^6}{144}(\beta_2+\gamma\widetilde{b}_1)\Big]+$$

$$+\frac{h^4}{12}(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1 hB_3)F_2-\frac{h^4}{12}\kappa_1 hF_3,$$

$$f_6^1=\frac{1}{60}F_1\Big(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big)^2\frac{Q}{\rho_2}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1},$$

$$f_5^1=-\frac{1}{24}F_1\Big(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big)^2\frac{Q}{\rho_2}\frac{1}{\chi_1}+\frac{7}{120}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{Q}{\rho_2}h\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1},$$

$$f_4^1=-\frac{5}{24}F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{Q}{\rho_2}h\frac{1}{\chi_1}+F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{24}h^2\frac{Q}{\rho_2}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1},$$

$$f_3^1=-F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{h^2}{6}\frac{Q}{\rho_2}\frac{1}{\chi_1}-F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{6}\frac{h}{2}\frac{Q}{\rho_2}\frac{\widetilde{a}_2^1}{\chi_1}+$$

$$+\frac{h}{2}\frac{Q}{\rho_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^3}{6}2\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1-C_*\varepsilon\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2-\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big],$$

$$f_2^1=-\frac{Q}{\rho_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\Big[\frac{h}{2}\Big[\kappa_1 h\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1\Big)+$$

$$+(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1 hB_3)\Big(-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2-\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)+$$

$$+\frac{h^2}{2}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big[\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1-C_*\varepsilon\Big(\frac{13h^3}{60}\widetilde{B}_2+\frac{7h^2}{12}\widetilde{B}_1\Big)\Big]\Big],$$

$$f_1^1=\frac{Q}{\rho_2}\Big(3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}+\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\Big[\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\kappa_1hB_3+(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)hB_4)+h(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big]-$$

$$-\frac{Q}{\rho_2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{h}{2}\Big[\kappa_1h\Big(\frac{h^3}{6}\widetilde{E}_2+\frac{h^2}{2}\widetilde{E}_1\Big)+(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3)\Big(-\frac{h^3}{6}\widetilde{B}_2-\frac{h^2}{2}\widetilde{B}_1\Big)\Big],$$

$$f_0^1=\Big(3\widetilde{B}_2\frac{h^5}{120}+\widetilde{B}_1\frac{h^4}{24}\Big)\Big[\kappa_1h^2B_3Q+\frac{Q}{\rho_2}h^2B_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big],$$

$$f_3^0=-\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)[C_*\varepsilon\vartheta^++(C_*-C_*\varepsilon T_0)],$$

$$f_2^0=F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\vartheta^--$$

$$-\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3)\vartheta^+-\frac{h^3}{3}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}C_*\varepsilon(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\vartheta^+-$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(C_*-C_*\varepsilon T_0)\Big[\frac{1}{2}\kappa_1h+(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big],$$

$$f_1^0=F_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\frac{h^3}{3}\vartheta^--\frac{h^3}{6}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(hB_4(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3)\vartheta^+-$$

$$-\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}(C_*-C_*\varepsilon T_0)\Big[\frac{h^3}{3}\kappa_1h+\frac{h^2}{2}(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)\Big],$$

$$f_0^0=\frac{h^3}{3}F_1\vartheta^--\frac{h^4}{12}\Big[\kappa_1h(C_*-C_*\varepsilon T_0)+\vartheta^+[(C_*\varepsilon+hB_4)(\kappa_2-\delta\kappa_2\alpha)-\kappa_1hB_3),$$

$$f_3=\frac{h^3}{4}[C_*\varepsilon(\lambda D\rho_2+\delta\kappa_2)+\lambda D\rho_2\alpha+\kappa_2],$$

$$f_2=\frac{h^4}{4}\kappa_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}+\frac{h^4}{3}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}[C_*\varepsilon(\lambda D\rho_2+\delta\kappa_2)+\lambda D\rho_2\alpha+\kappa_2],$$

$$f_1 = \frac{h^5}{3}\kappa_1\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1} + \frac{h^5}{12}[C_*\varepsilon(\lambda D\rho_2 + \delta\kappa_2) + \lambda D\rho_2\alpha + \kappa_2],$$

$$f_0 = \frac{h^6}{12}\kappa_1.$$

Здесь $\widetilde{a}_2^1 = \dfrac{a_2^1}{A}$, $\widetilde{a}_2^2 = \dfrac{a_2^2}{A}$, $\widetilde{b}_1 = \dfrac{b_1}{A}$, $\widetilde{b}_2 = \dfrac{b_2}{A}$, $\widetilde{B}_1 = \dfrac{B_1}{A}$, $\widetilde{B}_2 = \dfrac{B_2}{A}$. Параметры F_i имеют вид

$$F_1 = -\kappa_1(C_*\varepsilon h + hB_3) + (\kappa_2 - \delta\kappa_2\alpha)hB_4,$$

$$F_2 = \frac{h^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\widetilde{B}_2(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + \frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big[\widetilde{B}_1(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + 4\widetilde{B}_2(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] +$$

$$+ \frac{h^5}{120}\frac{g}{\nu_2}\widetilde{B}_1(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1),$$

$$F_3 = \frac{h^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}\widetilde{E}_2(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + \frac{h^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big[\widetilde{E}_1(\beta_2\widetilde{a}_2^2 + \gamma\widetilde{b}_2) + 4\widetilde{E}_2(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1)\Big] +$$

$$+ \frac{h^5}{120}\frac{g}{\nu_2}\widetilde{E}_1(\beta_2 + \gamma\widetilde{b}_1).$$

Коэффициенты f_9^1, f_8^1, f_7^1, f_9^0, f_8^0, f_7^0, f_6^0, f_5^0 и f_4^0 равны 0.

Приложение 2

Аналитические результаты по исследованию влияния эффекта Соре на градиенты температуры и концентрации

	Условие нулевой концентрации пара с учетом эффекта Соре	Условие нулевого потока пара с учетом эффекта Соре	Условие нулевой концентрации пара без учета эффекта Соре	Условие нулевого потока пара без учета эффекта Соре
A	задан	задан	0	задан
A_1	$A_1 = A(1 + \frac{l}{h}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{C_*\varepsilon}{\alpha}(\alpha\delta - 1))$	задан	задан	задан
A_2	$A_2 = A(1 + \frac{C_*\varepsilon}{\alpha})$	$A_2 = A + (A - A_1)\frac{h}{l}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\frac{1}{1-\alpha\delta}$	$A_2 = -A_1\frac{h}{l}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$	$A_2 = A + (A - A_1)\frac{h}{l}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$
b_1	$b_1 = C_*\varepsilon A$	$b_1 = C_*\varepsilon A$	0	$b_1 = C_*\varepsilon A$
b_2	$b_2 = -\frac{C_*\varepsilon A}{h}$	$b_2 = -\alpha a_2^2$	0	0

Приложение 3

Физико-химические параметры задачи

Параметр		Азот	HFE-7100	Воздух	Этанол
ρ	кг/м^3	1.2	$1.4 \cdot 10^3$	1.35	$0.79 \cdot 10^3$
ν	м^2/с	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
β	$1/K$	$3.37 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.66 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
σ_T	Н/(м К)	-	-1.5^{-5}	-	-0.8^{-5}
D	м^2/с	-	$2 \cdot 10^{-5}$	-	$1.02 \cdot 10^{-5}$
λ	Вт с/кг	-	$1.11 \cdot 10^5$	-	$0.907 \cdot 10^6$
κ	Вт/(м К)	0.0251	0.07	0.026	0.154
χ	м^2/с	$0.3 \cdot 10^{-4}$	$0.4 \cdot 10^{-7}$	$0.214 \cdot 10^{-4}$	$0.89 \cdot 10^{-7}$
C_* (при $T_2 = 20^o C$)		-	0.7	-	0.1
ε	1/К	-	0.039	-	0.059

Приложение 4

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (см. (2.58))

Коэффициенты $a_n^k, b_n^k, c_n^k,\ d_n^k, e_n^k, f_n^k$ вычисляются согласно соотношения:

$$a_n^k = \frac{\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_3)_n^k}{2\Delta x^3}, \quad b_n^k = \frac{-4\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} + \frac{\tau(A_3)_n^k}{\Delta x^3} + \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2},$$

$$c_n^k = 1 + \frac{6\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2} + (A_1)_n^k \tau,$$

$$e_n^k = \frac{-4\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_3)_n^k}{\Delta x^3} + \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2},$$

$$f_n^k = \frac{\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} + \frac{\tau(A_3)_n^k}{2\Delta x^3}, \qquad d_n^k = h^k - \tau D_n^k,$$

где $n = 3, ..., N-1$. Для коэффициентов первого и последнего уравнениий системы (2.58) выполняются равенства

$$b_2^k = \frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2}, c_2^k = 1 - \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_3^k \tau}{2\Delta x^3} + \frac{2A_2^k \tau}{\Delta x^2} - \tau A_1^k,$$

$$e_2^k = \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2},$$

$$f_2^k = -\frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3}, \quad d_2^k = D^k \tau + h_2^k,$$

$$a_N^k = -\frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3}, \quad b_N^k = \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2},$$

$$c_N^k = 1 - \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{2\Delta x^3} + \frac{2A_2^k \tau}{\Delta x^2} - \tau A_1^k,$$

$$e_N^k = \frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2}, \quad d_N^k = D^k \tau + h_N^k.$$

Приложение 5

Метод прогонки решения систем разностных уравнений (см. (3.29))

Рассмотрим подробнее первое уравнение схемы (3.29):

$$\frac{T^{k+1/3}_{n,l,m}-T^{k}_{n,l,m}}{\Delta t}=\frac{1}{RePr}\frac{T^{k+1/3}_{n,l,m+1}-2T^{k+1/3}_{n,l,m}+T^{k+1/3}_{n,l,m-1}}{\Delta z^2}+$$

$$+\frac{1}{RePr}\frac{T^{k}_{n+1,l,m}-2T^{k}_{n,l,m}+T^{k}_{n-1,l,m}}{\Delta x^2}+\frac{1}{RePr}\frac{T^{k}_{n,l+1,m}-2T^{k}_{n,l,m}+T^{k}_{n,l-1,m}}{\Delta y^2}-$$

$$-u^{k+1}_{n,m}\frac{T^{k}_{n+1,l,m}-T^{k}_{n-1,l,m}}{2\Delta x}-v^{k+1}_{l,m}\frac{T^{k}_{n,l+1,m}-T^{k}_{n,l-1,m}}{2\Delta y}-w^{k+1}_{m}\frac{T^{k}_{n,l,m+1}-T^{k}_{n,l,m-1}}{2\Delta z}.$$

Коэффициенты соотуветствующей системы линейных алгебраических уравнений примут вид:

$$a_{n,l,m}=\frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta z^2},\quad b_{n,l,m}=1+\frac{2}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta z^2},\quad c_{n,l,m}=\frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta z^2},$$

$$d_{n,l,m}=T^{k}_{n,l,m}+\frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T^{k}_{n+1,l,m}-2T^{k}_{n,l,m}+T^{k}_{n-1,l,m})+$$

$$\frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}(T^{k}_{n,l+1,m}-2T^{k}_{n,l,m}+T^{k}_{n,l-1,m})-u^{k+1}_{n,m}\frac{\Delta t}{2\Delta x}(T^{k}_{n+1,l,m}-T^{k}_{n-1,l,m})-$$

$$-v^{k+1}_{l,m}\frac{\Delta t}{2\Delta y}(T^{k}_{n,l+1,m}-T^{k}_{n,l-1,m})-w^{k+1}_{m}\frac{\Delta t}{2\Delta z}(T^{k}_{n,l,m+1}-T^{k}_{n,l,m-1}).$$

С учетом условия (3.15), задающего температуру на свободных границах слоя жидкости $\pm\overline{Z}$, а также в предположении, что на границе $z=0$ выполняется соотношение $T_z=0$, система линейных алгебраических уравнений для первого временного подслоя может быть решена методом прогонки. Полагаем, что

$$T_{n,l,m}=\alpha_{n,l,m}T_{n,l,m+1}+\beta_{n,l,m}.$$

Рассмотрим случай $m=2$. Имеем:

$$-a_{n,l,2}T_{n,l,1}+b_{n,l,2}T_{n,l,2}-c_{n,l,2}T_{n,l,3}=d_{n,l,2}.$$

Отсюда, а также предыдущего представления $T_{n,l,m}$ следует, что

$$\alpha_{n,l,2} = \frac{c_{n,l,2}}{b_{n,l,2} - a_{n,l,2}}, \qquad \beta_{n,l,2} = \frac{d_{n,l,2}}{b_{n,l,2} - a_{n,l,2}}.$$

В общем случае рекуррентные коэффициенты $\alpha_{n,l,m}$ и $\beta_{n,l,m}$ имеют вид

$$\alpha_{n,l,m} = \frac{c_{n,l,m}}{b_{n,l,m} - a_{n,l,m}\alpha_{n,l,m-1}}, \qquad \beta_{n,l,m} = \frac{d_{n,l,m} + a_{n,l,m}\beta_{n,l,m-1}}{b_{n,l,m} - a_{n,l,m}\alpha_{n,l,m-1}}.$$

Таким образом, могут быть получены все коэффициенты $\alpha_{n,l,m}$, $\beta_{n,l,m}$ ($m = 2, ..., \overline{M}$). Для $m = \overline{M}$ выполняется следующее соотношение:

$$T_{n,l,\overline{M}} = \alpha_{n,l,\overline{M}} T_{n,l,\overline{M}+1} + \beta_{n,l,\overline{M}}.$$

Ввиду того, что $T_{n,l,\overline{M}+1}$ известно исходя из условия (3.15), все значения $T_{n,l,m}$ ($m = 2, ..., \overline{M}$) могут быть найдены. Заметим также, что в силу условия $T_z = 0$ на границе $z = 0$ выполняется равенство: $T_{n,l,1} = T_{n,l,2}$. Таким образом, известны все значения функции температуры в узлах сетки на временном подслое $t^{k+1/3}$.

Аналогичным образом рассмотрим вторую часть численной схемы (3.29):

$$\frac{T^{k+2/3}_{n,l,m} - T^{k+1/3}_{n,l,m}}{\Delta t} = \frac{1}{RePr}\frac{T^{k+2/3}_{n+1,l,m} - 2T^{k+2/3}_{n,l,m} + T^{k+2/3}_{n-1,l,m}}{\Delta x^2} -$$
$$- \frac{1}{RePr}\frac{T^{k}_{n+1,l,m} - 2T^{k}_{n,l,m} + T^{k}_{n-1,l,m}}{\Delta x^2}.$$

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений на соответствующем временном подслое примут вид

$$a_{n,l,m} = \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad b_{n,l,m} = 1 + \frac{2}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad c_{n,l,m} = \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

$$d_{n,l,m} = T^{k+1/3}_{n,l,m} - \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T^{k}_{n+1,l,m} - 2T^{k}_{n,l,m} + T^{k}_{n-1,l,m}).$$

Как и для первого случая, значения распределения температуры в узловых точках сетки определяются с помощью метода прогонки, аналогичного приведенному выше, с учетом того, что на границе $x = \pm\overline{N}$ будет задано одно из условий (3.25)-(3.27). В случае, когда на границах $x = \pm N$ и $y = \pm L$ выполняются "мягкие" условия типа (3.25), значение температуры на шаге $\overline{N}+1$ будет определено следующим образом:

$$T_{\overline{N}+1,l,m} = \frac{\beta_{\overline{N},l,m} - \widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha} - \alpha_{\overline{N},l,m}},$$

где $\widetilde{\alpha} = \dfrac{c_{\overline{N},l,m} - a_{\overline{N},l,m}}{b_{\overline{N},l,m} - 2a_{\overline{N},l,m}}$, $\widetilde{\beta} = \dfrac{d_{\overline{N},l,m}}{b_{\overline{N},l,m} - 2a_{\overline{N},l,m}}$.

Третья часть схемы (3.29) после замены дифференциальных операторов конечными разностями принимает вид

$$\frac{T^{k+1}_{n,l,m} - T^{k+2/3}_{n,l,m}}{\Delta t} = \frac{1}{RePr}\frac{T^{k+1}_{n,l+1,m} - 2T^{k+1}_{n,l,m} + T^{k+1}_{n,l-1,m}}{\Delta y^2} -$$

$$-\frac{1}{RePr}\frac{T^{k}_{n,l+1,m} - 2T^{k}_{n,l,m} + T^{k}_{n,l-1,m}}{\Delta y^2}.$$

Коэффициенты соотуветствующей системы линейных алгебраических уравнений примут вид:

$$a_{n,l,m} = \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \quad b_{n,l,m} = 1 + \frac{2}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \quad c_{n,l,m} = \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$d_{n,l,m} = T^{k+2/3}_{n,l,m} - \frac{1}{RePr}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}(T^{k}_{n,l+1,m} - 2T^{k}_{n,l,m} + T^{k}_{n,l-1,m}).$$

В данном случае система линейных алгебраических уравнений будет решена методом прогонки, аналогичным предыдущему случаю с учетом соответствующих условий (3.25)-(3.27).