

На правах рукописи

Осипцов Андрей Александрович

**МОДЕЛИ МЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД
ДЛЯ ТЕХНОЛОГИИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2017

Оглавление

Введение	7
1 Проблемы механики многофазных сред в технологии гидроразрыва пласта: анализ литературы	16
1.1 Постановка многомасштабной задачи о гидроразрыве пласта	16
1.2 Течение суспензий в трещине гидроразрыва	20
1.2.1 Инерционная миграция частиц	28
1.2.2 Неустойчивость на поверхности раздела чистой жидкости и суспензии	33
1.3 Замыкающие соотношения моделей	36
1.3.1 Гравитационное осаждение частиц	37
1.3.2 Реология суспензий: влияние неньютоновских эффектов	39
1.3.3 Реология суспензий: влияние частиц	40
1.4 Перечень нерешенных проблем	41
2 Построение многоконтинуальной модели для течения суспензии в трещине гидроразрыва пласта	43
2.1 Вывод уравнений движения из законов сохранения в рамках двухконтинуального подхода	43
2.1.1 Постановка задачи	43
2.1.2 Вывод асимптотических уравнений в приближении тонкого слоя	47
2.1.3 Результаты численных расчетов для модельных примеров течения суспензии в ячейке Хеле-Шоу	49

2.2	Эффекты вязкопластичности	52
2.2.1	Уравнения движения	54
2.2.2	Приближение тонкого слоя	57
2.2.3	Численная реализация модели течения с пределом текучести	63
2.3	Валидация относительно лабораторных данных	67
2.3.1	Гравитационная конвекция	67
2.3.2	Неустойчивость Сэфмана-Тейлора при вытеснении ньютоновских жидкостей	69
2.3.3	Неустойчивое вытеснение жидкостей Бингама	75
2.3.4	Перенос и осаждение частиц с образованием осадка на дне трещины	81
2.4	Результаты по вытеснению бингамовских жидкостей и обсуждение	82
2.5	Основные результаты Главы 2	87
3	Миграция частиц при течении суспензии в трещине	91
3.1	Боковая сила на одиночную частицу, оседающую в горизонтальном течении в трещине	94
3.1.1	Постановка задачи об осаждении одиночной частицы при течении в трещине	97
3.1.2	Решение во внутренней области на масштабе радиуса частицы	100
3.1.3	Решение во внешней области на озеновском масштабе	102
3.1.4	Вычисление коэффициента боковой силы	105
3.2	Миграция частиц в начальном участке канала	109
3.2.1	Постановка задачи	111
3.2.2	Уравнения двухфазного пограничного слоя	117
3.2.3	Уравнения в области перекрытия пограничных слоев	121

3.2.4	Условия сращивания асимптотических разложений в соседних областях	124
3.2.5	Полный лагранжев метод для расчета числовой плотности частиц вдоль траекторий	126
3.2.6	Результаты численных расчетов профиля числовой плотности частиц и обсуждение	130
3.2.7	Сравнение с известными теоретическими исследованиями	139
3.3	Миграция в суспензии осаждающихся частиц в трещине . .	143
3.3.1	Постановка задачи	143
3.3.2	Применение полного лагранжева метода для расчета параметров среды частиц	151
3.3.3	Результаты расчетов поперечного профиля числовой плотности частиц	153
3.3.4	Течение в окрестности средней линии канала	159
3.4	Влияние боковой миграции на транспорт частиц в трещине .	162
3.4.1	Постановка задачи о течении суспензии в трещине с неоднородным поперечным профилем концентрации частиц	164
3.4.2	Выход асимптотических уравнений в приближении тонкого канала	167
3.4.3	Результаты численных расчетов поля концентрации частиц в трещине	173
3.5	Основные результаты Главы 3	177
4	Фильтрация в трещине, заполненной гранулированным материалом	182
4.1	Многоконтинуальная модель фильтрации суспензии неколлоидных частиц в плотной упаковке частиц проппанта . . .	183
4.1.1	Постановка задачи о фильтрации суспензии	187

4.1.2	Результаты численных расчетов профилей концентрации и скорости частиц, проницаемости и пористости среды	192
4.1.3	Верификация численных расчетов на аналитическом решении	194
4.1.4	Сравнение с лабораторными данными	195
4.1.5	Обсуждение	198
4.2	Моделирование течения в проппантной пачке методом решеточного уравнения Больцмана	200
4.2.1	Постановка задачи о прямом численном моделировании течения в поровом пространстве	200
4.2.2	Результаты численных расчетов коэффициента проницаемости	205
4.2.3	Сравнение с экспериментом и обсуждение	212
4.3	Основные результаты Главы 4	216
5	Нестационарные газожидкостные течения в скважине после гидроразрыва пласта	219
5.1	Вывод модели дрейфа из законов сохранения	221
5.1.1	Постановка задачи о многофазном течении в скважине	221
5.1.2	Вывод асимптотических уравнений в приближении длинного канала	226
5.1.3	Уравнение сохранения импульса смеси в терминах модели дрейфа	229
5.2	Одномерная многожидкостная модель, не зависящая от режима течения	230
5.2.1	Формулировка модели на основе графа	233
5.2.2	Замыкающие соотношения модели течения в скважине	236
5.2.3	Численная реализация многожидкостной модели . . .	242
5.2.4	Верификация и валидация	245

5.3	Вопросы гиперболичности многожидкостной модели	250
5.3.1	Постановка задачи об исследовании гиперболичности многожидкостной модели	252
5.3.2	Модель с учетом градиента уровня жидкости	254
5.3.3	Модель с учетом сил давления на интерфейсе	256
5.4	Основные результаты Главы 5	259
Список обозначений		262
Заключение		266
Литература		269

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена построению и исследованию семейства моделей многофазных течений, которые формируются на различных стадиях применения технологии гидроразрыва пласта (далее ГРП) для увеличения нефтеотдачи. Технология ГРП основана на закачке жидкости в скважину при больших давлениях для создания трещин в нефтегазоносной пористой среде. После того, как трещины созданы, вслед за чистой жидкостью в скважину закачивается суспензия с примесью твердых частиц. Частицы расклинивающего агента, закачиваемые в трещину, как правило, производятся из твердых материалов (керамика) и в нефтегазовой литературе называются проппантом. После окончания работы по ГРП трещины, заполненные плотно упакованными частицами проппанта, создают высокопроводящие каналы для транспорта углеводородов из глубин пласта по направлению к скважине. Ежегодно в Российской Федерации проводится бурение нескольких тысяч нефтяных и газовых скважин, при этом более чем половина из вновь пробуренных скважин проходит стимуляцию добычи с помощью технологии ГРП.

На сегодняшний день работы по гидроразрыву проектируются и планируются при помощи симуляторов на основе математических моделей, описывающих сопряженные процессы роста трещины и многофазного течения внутри трещины. Предсказанная с помощью таких симуляторов геометрия трещин затем используется в симуляторах пластовых течений для предсказания добычи углеводородов (сопряженное течение в пласте, трещине и скважине) и оценки интегрального эффекта увеличения нефтеотдачи.

Существующие модели многофазных течений, внедренные в симуляторы гидроразрыва, зачастую избыточно упрощены и основаны на эвристически постулированных одномерных моделях эффективной среды, не учитывающих ряд важных физических факторов, в частности, таких как: двухскоростные эффекты межфазного проскальзывания, предел текучести суспензии, поперечная миграция частиц на масштабе ширины трещины, влияние несферичности частиц проппанта на фильтрацию углеводородов в плотной упаковке гранулированного материала в закрытой трещине, газожидкостные снарядные режимы течения в скважине при запуске скважины после применения технологии ГРП. В результате, применение технологии ГРП зачастую заканчивается выходом на нештатный режим работы и преждевременной остановкой из-за нежелательных явлений, не предусмотренных при дизайне и проектировании с помощью симулятора.

Отдельно стоит отметить, что в последние несколько лет в силу необходимости развития отечественных технологий гидроразрыва пласта, в том числе – для стимуляции добычи на скважинах в нетрадиционных коллекторах (сланцевых формациях, таких как бажен), возрос интерес к разработке и использованию отечественных симуляторов. Таким образом, имеется существенная необходимость в развитии моделей для количественного описания процессов, сопровождающих ГРП, в том числе – многофазных течений в трещине ГРП. Указанные модели будут востребованы при создании отечественных симуляторов для проектирования работ по гидроразрыву пласта.

Более подробное обоснование актуальности данной работы представлено в литературном обзоре в Главе 1 настоящей диссертации.

Цели работы. Целью настоящей работы является построение и исследование многомасштабных гидродинамических моделей многофазных течений на всех стадиях технологии гидроразрыва пласта, применяемой в нефтегазовой индустрии для повышения добычи на нефтяных и газовых скважинах.

Научная новизна. Новые результаты, выносимые на защиту.

Основным результатом диссертации является построение семейства многоkontинуальных моделей, позволяющих описывать многофазные течения на различных стадиях технологии ГРП, включая закачку суспензии в скважину, течение суспензии по трещине, поперечную миграцию и осаждение частиц в трещине, фильтрацию углеводородов в закрытой трещине по направлению к скважине и газожидкостные течения в скважине после ГРП при старте добычи. Указанное семейство включает в себя следующие модели:

1. Новая квазидвумерная двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва, построенная с учетом гравитационного осаждения отдельных частиц и гравитационной конвекции суспензии в целом, неньютоновских свойств суспензии (предела текучести), последовательной закачки нескольких различных жидкостей и суспензий в трещину с развитием неустойчивости на интерфейсе.
2. Многомасштабная модель миграции частиц при течении разреженной суспензии в трещине гидроразрыва, включающая формулу для боковой силы на одиночную частицу, осаждающуюся в течении жидкости в трещине, модель миграции частиц в начальном участке плоского канала на стадии формирования профиля Пуазейля и модель миграции осаждающихся частиц в развитом течении Пуазейля в плоском канале. Обобщение квазидвумерной модели течения суспензии в трещине с учетом неоднородного поперечного профиля концентрации частиц, формирующегося за счет миграции частиц от стенок канала.
3. Трехконтинуальная модель фильтрации суспензии в пористой среде с учетом осаждения (захвата) частиц в порах и мобилизации частиц, приводящих к повреждению либо восстановлению проницаемости и пористости.

4. Новая зависимость безразмерной проницаемости от пористости для упаковки несферических частиц проппанта, полученная на основании трехмерных расчетов течения вязкой несжимаемой жидкости в поровом пространстве с помощью метода решеточных уравнений Больцмана. Указанная зависимость позволяет описывать имеющиеся экспериментальные данные в широком диапазоне определяющих параметров.
5. Комбинированная квазидномерная модель для многофазных газожидкостных течений в длинных скважинах и трубопроводах, основанная на совместном применении многоконтинуального подхода и упрощенной модели дрейфа при различных условиях замыкания, а также анализ гиперболичности полученных моделей.

На основании численного и асимптотического исследования ряда течений показано, что построенные модели позволяют качественно и количественно описывать процессы транспорта суспензии в трещине ГРП, фильтрацию углеводородов в закрытой трещине, заполненной гранулированным материалом, и газожидкостные течения в скважине после ГРП. В частности, построенные модели позволяют описывать гравитационное осаждение частиц с формированием осадка на дне трещины, гравитационную конвекцию и оплыивание фронта суспензии в чистой жидкости, развитие неустойчивости Сэфмана-Тэйлора на границе раздела жидкостей различной реологии (в том числе, с пределом текучести), поперечную миграцию частиц за счет комбинированного эффекта осаждения, сдвигового характера течения несущей фазы и влияния стенок; фильтрацию суспензии в упаковке гранулированного материала с захватом и мобилизацией неколлоидных частиц (что приводит к повреждению и восстановлению проницаемости и пористости); газожидкостные течения в скважинах, в том числе – с образованием снарядного режима течения. Проведена валидация и верификация каждой модели из семейства относительно лабораторных данных и имеющихся численных или аналитических решений других авторов.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации на основе единого многоконтинуального подхода механики многофазных сред и последовательного применения асимптотических методов построены новые гидродинамические модели, которые применимы для описания широкого класса нестационарных многофазных течений в узких каналах и длинных трубах. Результаты и методы, предложенные в диссертации, активно используются в различных научно-исследовательских работах (о чем свидетельствуют ссылки на труды автора), а также в курсах лекций и практических занятиях, проводимых в Сколковском институте науки и технологий.

Полученные результаты были использованы при создании нескольких новых вариантов технологии гидроразрыва пласта и развитии коммерческих симуляторов компании Шлюмберже. Построенные модели транспорта проппанта (расклинивающего агента) в трещине ГРП могут быть использованы при создании отечественных симуляторов роста трещины ГРП. Такие симуляторы будут использоваться вертикально-интегрированными нефтяными компаниями и нефтесервисными компаниями для дизайна и планирования технологии ГРП. На основе построенных моделей и проведенных параметрических расчетов автором предложен ряд изобретений, на которые получено 6 патентов в РФ и США.

Апробация работы Постановки задач и основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях:

- EUROMECH Fluid Mechanics Conference (Manchester, UK, 2008; Rome, Italy, 2012; Copenhagen, Denmark, 2014);
- Ломоносовские чтения (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2009);
- Конференция “Современные проблемы аэрогидродинамики” (Буревестник МГУ, Сочи, 2009, 2014, 2016);
- International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (Greece, Kos, 2012, 2013);
- ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (Houston, Texas, USA, 2012);

- 7th International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow (A Coruna, Spain, 2013);
- SPE Annual Technical Conference and Exhibition (New Orleans, USA, 2013; Abu Dhabi, U.A.E., 2016);
- Международная конференция “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность” (Звенигород, 2014, 2016);
- 14th European Conference on Mathematics of Oil Recovery (Italy, 2014);
- 19th International Conference on Hydrotransport (USA, 2014);
- V международная научно-техническая конференция “Проблемы и опыт разработки трудноизвлекаемых запасов” (Санкт-Петербургский горный университет, 2016);
- X научно-практическая конференция “Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений” (Уфа, 2017);
- Двадцать первая Школа-семинар молодых ученых и специалистов по тепломассообмену под рук-вом акад. РАН А.И. Леонтьева (СПбПУ, Санкт-Петербург, 2017);
- EAGE Conference & Exhibition (Paris, France, 2017);
- International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2017);
- Всероссийская конференция с международным участием “Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва”, посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017).

Результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах:

- Семинар департамента прикладной математики и теоретической физики Кембриджского университета, Великобритания под руководством Prof. T. Pedley, FRS (DAMTP, Cambridge University, UK, 2007);
- Семинары научно-исследовательского центра компании Шлюмберже в г. Кембридж, Великобритания, под рук-вом Prof. J.R.A. Pearson, FRS,

2007-2014; а также семинары научных центров компаний в Москве, 2005-2016, и Бостоне, США, 2014;

– Семинары инженерно-технологических центров компании Шлюмберже (Новосибирск 2007, 2014, Париж, Франция, 2012, 2014, Хьюстон, Шугар-Лэнд, Солт-Лейк-Сити, Рошарон, США, 2011, 2012, 2014, Абингдон, Великобритания, 2014);

– Семинар лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005-2016.

– Объединенный научный семинар Сколковского института науки и технологий, 2015, 2017.

– Семинар Уфимского научно-исследовательского центра компании Роснефть (РН-УфаНИПИнефть) под руководством д.ф.-м.н., проф. В.А. Байкова, 2016.

– Семинар Научно-технического центра компании Газпромнефть в Санкт-Петербурге под руководством д.ф.-м.н. А.А. Яковлева, 2015-2017.

– Семинар НОЦ “Газпромнефть-Политех” СПбПУ им. Петра Великого под руководством д.ф.-м.н., чл. корр. РАН А.М. Кривцова, 2017.

– Объединённый научный семинар лаборатории дифференциальных уравнений Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН и лаборатории нелинейных процессов в гидродинамических системах НГУ под руководством д.ф.-м.н., проф. А.П. Чупахина, Новосибирск, 2017.

– Семинар по прикладной механике сплошных сред, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 2017.

Публикации. По основным результатам докторской работы опубликовано около 50 печатных трудов, в том числе: 24 статьи в журналах из перечня ВАК и рецензируемых англоязычных изданиях, индексируемых в системах Scopus и Web of Science, а также получено 6 патентов.

Личный вклад автора и достоверность полученных результатов. В докторской приведены результаты, полученные лично автором или при его непосредственном участии. Автору принадлежат все постановки

задач. Автор участвовал в реализации численных методов решения уравнений и проведении расчетов, обсуждении и интерпретации результатов, и подготовке публикаций по результатам работы. Автором выполнена обработка результатов и подготовлены графические и табличные материалы, представленные в диссертации. Глава 2 написана на основе работ в соавторстве с С.А. Борониным, который участвовал в численном внедрении разностных схем и расчетах транспорта пропанта. Раздел 3.1 написан на основании совместной работы с Е.С. Асмоловым, который участвовал в выводе асимптотических уравнений и расчете подъемной силы. Раздел 3.2 написан на основе совместной работы с Е.С. Асмоловым, который участвовал в выводе поправки для боковой подъемной силы. Раздел 3.3 написан на основе совместной работы с Е.С. Асмоловым и Н.А. Лебедевой, которые участвовали в расчете полей числовой плотности частиц. Раздел 4.1 написан на основе совместной работы с К.И. Толмачевой и С.А. Борониным, которые участвовали в численных расчетах и сравнении с экспериментами. Раздел 5.1 написан на основе совместной работы, в которой К.Ф. Синьков участвовал в выводе асимптотических уравнений, а П.Е. Спесивцев – в обсуждении. Раздел 5.2 написан на основании совместной работы, в которой А.Б. Старостин и Б.И. Краснопольский участвовали в численной реализации модели и интерпретации результатов. Раздел 5.3 написан на основе совместной работы, в которой В.Д. Жибаевов участвовал в численных расчетах собственных значений характеристического уравнения, а Н.А. Лебедева и К.Ф. Синьков – в обсуждении. Все положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью и не-противоречивостью построенных многоконтинуальных моделей механики многофазных сред, сравнением результатов каждой главы диссертации с экспериментальными данными, совпадением результатов исследования в частных случаях с известными решениями других авторов, тщательным контролем аппроксимации, устойчивости и сходимости численных схем и,

где это возможно, сравнением численных и аналитических решений.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных обозначений и списка литературы. Работа содержит 310 страниц, 59 рисунков, 24 таблицы и список литературы из 371 наименований.

Глава 1

Проблемы механики многофазных сред в технологии гидроразрыва пласта: анализ литературы

1.1 Постановка многомасштабной задачи о гидроразрыве пласта

Одной из основных и наиболее эффективных технологий повышения добычи на нефтяных и газовых скважинах является технология гидравлического разрыва нефтегазоносного пласта. Технология гидравлического разрыва пласта (далее ГРП) основана на закачке жидкости с твердыми частицами под большим давлением (несколько сотен атмосфер) через скважину для создания трещин в пористой среде, которые заполняются частицами. После остановки закачки трещины, заполненные плотно упакованным гранулированным материалом, создают каналы высокой проницаемости для транспортировки углеводородов из глубин пласта к скважине и на поверхность. Скважины могут быть как вертикальными, тогда формируется одна вертикальная трещина, состоящая из двух в общем случае симметричных крыльев, так и окологоризонтальными с несколькими кластерами перфораций, обеспечивающих доступ из скважины к породе (так называемый многостадийный гидроразрыв пласта, как правило используемый в низко-

проницаемых породах). В последнем случае формируется несколько трансверсальных трещин.

Распространение трещины гидроразрыва пласта - это сопряженная задача механики деформируемого твердого тела (инициация и распространение трещины) и механики многофазных сред (течение суспензии по скважине и в трещине, а также газожидкостные течения из пласта по системе трещин в скважину после ГРП). Геомеханические аспекты ГРП нашли отражение в подробных обзорах (см., например, [61] и недавний обзор [79]), которые описывают историю развития этого направления от классических моделей (см. работы С.А. Христиановича, Ю.П. Желтова и Г.И. Баренблатта [190, 191]) до современных усложненных подходов, реализация которых стала возможной с существенным развитием вычислительной техники.

Основной целью данного обзора является критический анализ текущего состояния моделей многофазной гидродинамики для технологии ГРП. Ниже будут рассмотрены модели многофазных течений в скважинах и трещинах, которые используются в симуляторах ГРП (начиная с основополагающих работ, в частности, В.М. Енгова [192, 193] и J.R.A. Pearson [148]). Отдельное внимание будет уделено разрыву между развитием технологии и текущим состоянием моделирования процессов при ГРП. Моделирование, как правило, отстает от фактических технологий, используемых на скважинах, примерно на десять лет. При моделировании гидроразрыва, как правило, делается акцент на геомеханических аспектах распространения трещины, в то время как гидродинамике уделяется гораздо меньше внимания, и используются весьма упрощенные модели для описания переноса частиц проппанта (расклинивающего агента) в скважине и трещине. В то же время, новые технологии гидроразрыва, введенные в последнее десятилетие для стимуляции добычи нефти и газа из сланцевых пород, основаны на использовании реологически сложных жидкостей с примесью твердых частиц и, иногда, полимерных волокон для предотвращения осаждения частиц.

Жидкости гидроразрыва производятся, как правило, на водной основе с добавками для модификации реологии и улучшения транспортных свойств по скважине (снижение трения за счет разжижения при сдвиге) и по трещине (формирование предела текучести для предотвращения осаждения частиц). Реология несущей фазы, как правило, является неньютоновской. Она зачастую характеризуется вязко-упруго-пластическим поведением за счет добавок полимеров в водный раствор [63]. Свойство разжижения при сдвиге (*shear thinning*) помогает снизить перепад давления при закачке в скважину. С другой стороны, за счет отложенного по времени кросс-линкования полимерных молекул смесь приобретает свойство предела текучести перед прохождением перфорационных отверстий из скважины в трещину. Такой химический состав смеси позволяет обеспечить свойство предела текучести для суспензии, что предотвращает нежелательное накопление частиц в скважине и позволяет избежать осаждения частиц на дно трещины. Полимерные волокна [91] также используются в качестве добавок в смеси гидроразрывной жидкости с частицами проппанта для поддержания стабильности суспензии и предотвращения нежелательного осаждения частиц. Предел текучести смеси может формироваться как за счет кросс-линкования полимерных молекул, так и за счет присутствия волокон (файберов). Закачка попеременно порций суспензии и чистой жидкости (*alternate-slug pumping*) с целью создания высокопроводящих трещин гидроразрыва в настоящее время является довольно распространенной практикой [94, 144]. Улучшенная проводимость трещины достигается за счет каналов между порциями суспензии, которые расклинивают трещину идерживают ее в открытом состоянии. В то же время, пока отсутствует систематическое моделирование размывания порций суспензии (“слагов”) при их транспорте вниз по скважине, прохождении перфораций и при движении по трещине. Наконец, расслоение суспензии в процессе осаждения в закрывающейся трещине после остановки закачки было внедрено в технологию ГРП совсем недавно [151, 119], и оно также пока не нашло

отражения в моделях, используемых в симуляторах гидроразрыва.

Существует насущная необходимость в проведении многомасштабного моделирования процессов, происходящих при гидроразрыве пласта. Перечисленные ниже явления демонстрируют иерархию масштабов (в порядке возрастания масштаба длины):

- Масштаб радиуса частицы: осаждение одиночных частиц, боковая миграция одиночных частиц в разреженной суспензии, сальтация и мобилизация одиночных частиц на поверхности плотно упакованного слоя осажденных частиц;
- Ширина трещины: инерционная миграция частиц в разреженной суспензии и миграция частиц в результате сдвига в концентрированной суспензии, формирование неоднородного профиля концентрации частиц поперек канала;
- Диаметр скважины: дисперсия слагов суспензии, формирование гидродинамических слагов (снарядного режима течения);
- Диаметр перфораций: дисперсия слагов суспензии, деградация спищего геля и вторичное кросс-линкование;
- Длина/высота трещины: перенос и осаждение частиц, формирование плотно упакованного слоя частиц на дне трещины, ресуспензирование, перенос частиц в сети трещин, дюнный транспорт;
- Длина скважины: дисперсия слагов суспензии вдоль скважины.

Наше видение необходимых исследований в рамках дисциплины “механика многофазных сред” в гидроразрыве пласта состоит в следующем: построение иерархии моделей в соответствии с иерархией масштабов; определение связей между моделями, созданными на различных масштабах длины (upscaling), где подмодели на меньших масштабах входят в более

крупномасштабные модели в качестве замыкающих соотношений; развитие самосогласованной программы экспериментов для калибровки подмоделей и валидации крупномасштабной схемы моделирования; наконец, в идеальном случае построенные модели, после их верификации, валидации и внедрения в симуляторы, следует тестировать на реальных работах в полевых условиях. Ключевые базовые понятия и терминологию, относящиеся к технологии гидроразрыва пласта, можно найти в [84].

Фокус настоящей работы сосредоточен на явлениях переноса, относящихся к многофазным течениям во время гидроразрыва пласта на стадии закачки суспензии в скважину, размещении частиц расклинивающего агента в трещине, а также на стадии очистки и обратного течения из системы трещин к “простимулированной” скважине. Таким образом, мы разбиваем все исследования по механике многофазных сред для технологии ГРП на три существенно различные группы в терминах режима течения и геометрии: медленные двумерные стоксовые течения в трещинах, одномерные инерционные течения при высоких числах Re во время закачки суспензии в скважину и, отдельно, многофазные течения во время очистки системы трещин и скважины. Тщательно подобранные замыкающие соотношения крайне важны для завершения формулировки модели. В завершение обзора литературы будут перечислены проблемы, на решение которых направлена настоящая диссертация.

1.2 Течение суспензий в трещине гидроразрыва

Корректное предсказание транспорта проппанта в трещине ГРП – это одно из ключевых требований при разработке и планировании успешных работ по гидроразрыву. Дизайн работ основан на моделировании. Успех здесь предполагает, что работа по ГРП осуществлена согласно плану, разработанному с помощью симулятора, то есть модель должна быть адекватна реальному физическому процессу. В противном случае, при закачке могут

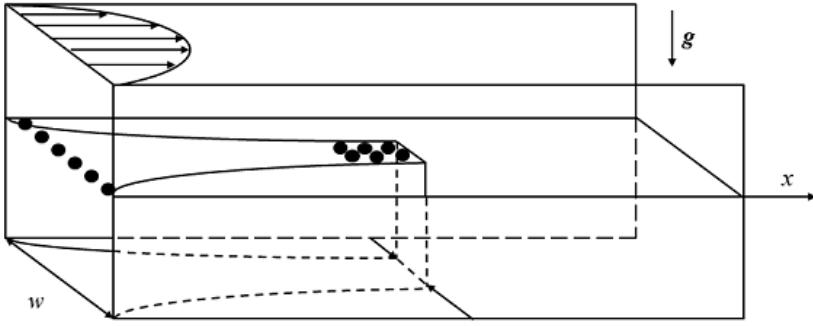


Рис. 1.1: Схема течения суспензии в вертикальной трещине.

происходить неожиданные события. Если модели не ухватывают некоторые важные эффекты, такие как неконтролируемый рост трещины в высоту, это может приводить к прорыву в верхние или нижние слои пласта, раннему запиранию частиц проппанта на перфорациях, в прискважинной зоне или в кончике трещины (TSO, tip screenout) и нежелательному осаждение частиц в прискважинной зоне. Существует несколько коммерческих симуляторов ГРП, которые позволяют моделировать транспорт проппанта в открытых трещинах гидроразрыва во время закачки. Модели переноса проппанта отличаются размерностью (одномерные или двумерные), конфигурацией течения и набором учитываемых физических эффектов.

Большинство коммерческих симуляторов ГРП, применяемых нефтесервисными компаниями для дизайна гидроразрыва, используют модели, основанные на упрощенных одномерных подходах. Упрощенные модели позволяют обеспечить их стабильное внедрение в общий численный алгоритм моделирования роста трещины для покрытия широкого диапазона возможных режимов. Такие модели наследуются в расчетных ядрах симуляторов с 1980х гг, кода симуляторы первого поколения в силу вычислительных ограничений того времени использовали крайне упрощенные (по сути, нульмерные) модели, основанные на интегральных законах сохранения (см., например, [77, 78, 57]).

Параметр	Единицы	Диапазон значений
Геометрия трещины		
Полудлина, L	м	100 – 300
Высота, H	м	20 – 50
Ширина, w	мм	1 – 10
Свойства жидкостей		
Индекс течения, n	безразм.	0.5 – 1
Коэффиц. консистенции, K	Па · с ⁿ	10 ⁻³ – 2
Предел текучести, τ_m	Па	0 – 15
Коэффиц. мол. диффузии, λ_m	м ² /с	10 ⁻⁹
Время релаксации, t_r	с	5
Свойства частиц		
Диаметр частиц, $2a$	м	10 ⁻⁴ –2 · 10 ⁻³
Плотность материала частиц, ρ_p^0	кг/м ³	2.65 · 10 ³
Объемная доля частиц, C_p	безразм.	0 – 0.4
Условия закачки		
Расход на поверхности, Q	м ³ /мин	0.6 – 6
Расход на поверхности, Q	барр./мин	4 – 40
Скорость, U	м/с	0.2 – 20

Таблица 1.1: Диапазон размерных параметров, типичный для технологии гидроразрыва пласта.

В 1990х, с развитием вычислительных мощностей персональных компьютеров и численных методов, появились модели Pseudo3D (P3D) для роста трещины, сопряженные с 1D моделями переноса частиц [155]. Эта модель транспорта проппанта была затем расширена в 2D для иллюстрации размещения частиц в трещине, тогда как для моделирования роста трещины по-прежнему использовалась осредненная по высоте одномерная модель переноса частиц [171]. Не так хорошо известен, но тем не менее заслуживает внимания симулятор Planar3D [172, 98], который был развит в первой половине 2000х гг. Planar3D использует полностью 2D модель транспорта проппанта с учетом осаждения частиц и гравитационной конвекции, формирования плотной упаковки осажденных частиц, бриджинга (расклинивания) частиц в трещине и вблизи кончика трещины (TSO).

Наконец, в поздние 2000-е гг. получили массовое развитие технологии многостадийного гидроразрыва пласта в окологоризонтальных скважинах для стимуляции добычи нефти и газа из нетрадиционных коллекторов, что потребовало создания нового поколения симуляторов роста сети трещин. Примеры таких симуляторов включают: Unconventional Fracture Model (UFM) [180], который позволяет исследовать рост сети трещин в пористой среде с предварительно заданными трещинами (которые ориентированы произвольно и необязательно связаны между собой), Wiremesh model [186], которая позволяет рост сети трещин на пред-заданной сети связанных естественных трещин; модель DFN (Discrete Fracture Network), которая внедрена в развитие модели, впервые представленной в [124, 125], и позволяет моделировать появление множественных трещин в сланцах и метановых залежах (СВМ) на основе модели дискретной сети трещин.

В дополнение к работе, которую ведут сервисные компании по созданию симуляторов, в 2010х гг. некоторые национальные вертикально интегрированные нефтяные компании начали развивать собственное программное обеспечение для моделирования роста трещин со сложной функциональностью (например, модели P3D и Planar3D с двумерной моделью транспорта проппанта в [53]).

Существует также семейство исследовательских симуляторов ГРП из академической среды и корпоративных исследовательских центров, которые основаны на более перспективных двумерных подходах к моделированию транспорта частиц в трещине. Приведенный ниже список симуляторов не является полностью исчерпывающим, но в то же время достаточно репрезентативен для иллюстрации вариативности существующих кодов: сопряженный симулятор UTFRAC-3D от University of Texas at Austin [164], Spatially Heterogenous Aperture Code (SHAC) [127, 128] (покрывающий течения жидкости Хершеля-Балкли в трещине переменного раскрытия), симулятор CFRAC [169, 170] (позволяет одновременное моделирование распространения/закрытия трещины и транспорт частиц также в

модели дискретной сети трещин) и симулятор роста сети трещин в сланцах, основанный на модели пересечения основной трещины гидроразрыва с пред-заданной естественной трещиной [68]. Несцепленный с моделью роста трещины симулятор транспорта частиц в трещине, основанный на новой двухконтинуальной модели течения суспензии, представлен в [5, 12, 15, 19]. Прямое численное моделирование транспорта проппанта с использованием сопряженного подхода CFD-FEM можно найти в [188, 189]. Интегрированные симуляторы многофазных течений в скважине, трещине и пласте также находятся в разработке [122].

Ключевые предположения типичной модели транспорта проппанта в трещине ГРП сформулированы ниже. Течение моделируется в рамках эвристического одномерного подхода либо в рамках двумерной модели тонкого слоя (так называемое приближение теории смазки или длинноволновое приближение) для уравнений Навье-Стокса в одиночной трещине ГРП или сети трещин (на данный момент для сети трещин используется только квазиодномерные модели транспорта проппанта, которые в лучшем случае учитывают трехслойную структуру в вертикальном направлении: чистая жидкость, суспензия и плотная упаковка осажденных частиц [180]). Трещина аппроксимируется узким каналом с плавно меняющейся шириной (как в пространстве, так и во времени) и проницаемыми стенками (учитывается отток жидкости, leak-off). Осреднение по ширине трещины производится в предположении, что профиль концентрации частиц по ширине трещины является однородным (миграцией пренебрегается), а профиль скорости описывается законом Пуазейля. Жидкость несущей фазы: степенная реология, различные жидкости в графике закачки (вязкоупругостью и пре-делом текучести пренебрегается). Частицы: взвешенные частицы сферической формы одинакового радиуса, возможен учет осаждения индивидуальных частиц и перехода к плотной упаковке/бриджинг/, несколько типов проппанта. Гравитационная конвекция (“оплыивание” тяжелой жидкости в легкой) учитывается только в двумерных моделях (см., например, [172, 98]).

Динамика закрытия трещины после окончания закачки с учетом эффектов пластиичности и вдавливания проппанта в стенки трещины учитывается только в исследовательских кодах (например, [128]).

Заметим, что все модели транспорта частиц, упомянутые выше, основаны на так называемом приближении “эффективной среды” вслед за основополагающими работами [50] и [148], где суспензия рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость с плотностью и вязкостью, зависящими явно от объемной доли частиц. Модель сформулирована в терминах среднеобъемной скорости суспензии (которая совпадает со среднемассовой скоростью только в случаях, когда частицы не движутся относительно жидкости либо объемная доля частиц мала). Описание указанной модели течения суспензии в трещине ГРП можно также найти в [87]. Вывод модели транспорта проппанта из законов сохранения в рамках многоконтинуального подхода был предложен в статье автора [5] и включен в настоящую работу.

Типичная модель транспорта проппанта, как правило, сводится к эллиптическому уравнению для давления (типа уравнения Пуассона) [84, 103], которое в упрощенном случае ньютоновской жидкости записывается в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{w^3}{12\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \right] + Q - \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}$$

Здесь w – ширина трещины, Q – распределенный приток в трещину (как правило, он локализован на границе), а слагаемое с коэффициентом C_L – распределенный сток за счет утечек через проницаемые стенки трещины по модели Картера, остальные обозначения стандартные. Коэффициент $w^2/12$ часто называется в литературе гидравлической проводимостью открытой трещины ГРП (коэффициент $w^2/12\mu$ часто называют мобильностью жидкости, по-англ. - mobility или fluidity [130]). На основании полученного поля давления скорость суспензии восстанавливается с помощью выражения на основе закона Пуазейля (в осредненной по ширине форме – типа Дарси), а концентрация проппанта находится из решения гиперболических урав-

No.	Параметр	Выражение	Диапазон значений
1	$Bu = Re/Fr^2$	$\rho_0^0 gw/\mu_0^0 \dot{\gamma}_0$	$10^{-3} - 10^4$
2	Bn	$\tau_{p,0}/\mu_0 \dot{\gamma}_0$	$0 - 100$
3	ζ_i	ρ_i/ρ_0	$0.5 - 1$
4	M_i	μ_i/μ_0	$10^{-3} - 1$
5	τ_i	τ_i/τ_0	$1 - 10$
6	ε	w/L	$10^{-6} - 10^{-4}$
7	R	L/H	$1 - 10$
8	Re	$\rho_0 UL/\mu_0$	$1 - 10^4$
9	Re_p	$\rho_0 v_s a/\mu_0$	$1 - 10^2$
10	St/Fr^2	$mg/6\pi a \mu_0$	$10^{-8}-10^{-2}$
11	De	t_r/t_s	$0 - 2$
12	We	$t_r \dot{\gamma}$	$0 - 10$

Таблица 1.2: Диапазоны значений безразмерных параметров для течения в трещине ГРП на основе значений размерных параметров из Таб. 1.1.

нений переноса (закон сохранения массы). Типичные значения размерных параметров течения внутри трещины ГРП представлены в Таб. 1.1. Список безразмерных параметров с диапазоном их значений приведен в Таб. 1.2.

Здесь число Деборы $De = t_r/t_s$ есть отношение характерного времени релаксации среды t_r к характерному времени деформации t_s , число Вейсенберга $We = t_r \dot{\gamma}$ – это произведение времени релаксации t_r и средней скорости сдвига $\dot{\gamma}$, где средняя скорость сдвига дается формулой:

$$\dot{\gamma} = \frac{U}{w}$$

В литературе, в целом, общепризнано, что обеспечение динамического подобия между лабораторным экспериментом по транспорту проппанта в трещине ГРП и реальной работой по ГРП в полях практически невозможно (см. [177]). Этот вывод легко сделать из анализа на основании Таб. 1.2. Однако можно рассматривать некоторое подмножество безразмерных параметров, описывающих конкретный феномен, так чтобы обеспечить подобие по этим параметрам. Например, в работе автора [15] проведена валидация моделирования относительно экспериментов по гравитационной конвекции

(Bu, ζ_i) и отдельно на экспериментах по неустойчивости Сэфмана-Тейлора в жидкости с пределом текучести (Bn, M_i) .

Утечки жидкости через проницаемые стенки трещины (leak-off) – это очень важный фактор, который влияет на транспорт проппанта на нескольких масштабах длины: от общего интегрального закона сохранения массы до миграции частиц на масштабе ширины трещины. Для моделирования утечек наиболее широко используется так называемая формула Картера, которая получена как аналитическое решение задачи о течении жидкости в полубесконечной области пористой среды [70, 84] (как указано недавно в [63], первая ссылка на этот результат была дана в [107]):

$$v_L = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_0}}$$

Обзор классических моделей утечек приведен в [163]. В то же время, модель Картера неприменима, например, около кончика трещины и в областях, где частицы плотно упакованы.

Существующие модели транспорта проппанта, внедренные в симуляторы ГРП, можно улучшать по следующим трем направлениям: (i) моделирование движения суспензии на основе законов сохранения в рамках многоконтинуального подхода; (ii) набор покрываемых физических явлений: двухскоростные (двухконтинуальные) эффекты, поперечная миграция частиц, влияние поперечной миграции на транспорт, перенос частиц в дюнах на дне трещин при гидроразрыве в сланцах с формированием разветвленной сети трещин; влияние предела текучести суспензий; (iii) оптимизация численных схем, улучшение вычислительной производительности, ускорение линейных “сольверов” и нелинейных алгоритмов решения уравнения для давления (например, с помощью многосеточных алгоритмов), возможность разрешать мелкомасштабные эффекты, что требует мелких подробных сеток, улучшение численных схем для уравнения переноса концентрации частиц.

1.2.1 Инерционная миграция частиц

Нет проскальзывания	<p>Нейтрально плавучие частицы в течении Пуазейля</p> <p>Эксперимент $r_{eq} = 0.62R$ (Segre&Silbergberg, 1962)</p> <p>$\mathbf{F}_L = \pi a^3 \rho_f [\mathbf{V}_p \times \Omega_p]$ (Rubinow&Keller, 1961)</p> <p>$\mathbf{F}_L = \rho_f U^2 a^4 c_L(r/R), \text{Re}_c \rightarrow 0, R_{eq} = 0.6R$ (Ho-Leal, 1974, Vasseur-Cox, 1976)</p> <p>$\text{Re}_c < 100 : \mathbf{F}_L = \rho_f \dot{\gamma}^2 a^4 c_L^{SH}$ (Schonberg-Hinch, 1989)</p> <p>Плоский канал: $100 < \text{Re}_c < 3000 : \mathbf{F}_L = \rho_f \dot{\gamma}^2 a^4 c_L(r/l, \text{Re}_c)$ (Asmolov, 1999)</p> <p>Круглая труба: $1 < \text{Re}_c < 2000 : \mathbf{F}_L \sim \rho_f \dot{\gamma}^2 a^4 c_L$ (Matas, Morris, Guazzeli, 2009)</p>		
	<p>Линейный профиль скорости</p> <p>Квадратичный профиль скорости</p>		
Проскальзывание	Неогр. поток	<p>$\mathbf{v}_s \in (\mathbf{v}_f, \dot{\gamma})$ (Рис. 1.2a):</p> <p>Сильный сдвиг: $\mathbf{F}_L = 6.46 \mu_f a^2 v_s (\dot{\gamma}/\nu)^{1/2}$ (Saffman, 1965)</p> <p>Произвольный сдвиг:</p> <p>$\mathbf{F}_L = \mu_f a^2 v_s (\dot{\gamma}/\nu)^{1/2} c_L (\text{Re}_p/\text{Re}_G^{1/2})$ (Asmolov, 1990, McLaughlin, 1991)</p>	<p>$\mathbf{v}_s \in (\mathbf{v}_f, \dot{\gamma})$ (Рис. 1.2a):</p> <p>$\mathbf{F}_L \sim \mu_f a^2 v_s (\dot{\gamma}/\nu)^{1/2}$ (Asmolov, 1999)</p>
	Течение вблизи стенки	<p>$\mathbf{v}_s \in (\mathbf{v}_f, \dot{\gamma})$ (Рис. 1.2a):</p> <p>$\mathbf{F}_L = \mu_f a^2 v_s (\dot{\gamma}/\nu)^{1/2} c_L (\text{Re}_p/\text{Re}_G^{1/2}, d/L_{Sa})$ (Asmolov, 1990, McLaughlin, 1991-93)</p> <p>$\mathbf{v}_s \perp (\mathbf{v}_f, \dot{\gamma})$ (Рис. 1.2b):</p> <p>$\mathbf{F}_L = 6\pi \rho_f V_s^2 a^2 c_L (d/l, V_s, \text{Re}_c)$ Результат настоящей диссертации (Asmolov&Osipsov, 2008)</p>	<p>$\mathbf{v}_s \in (\mathbf{v}_f, \dot{\gamma})$ (Рис. 1.2a):</p> <p>$F_L = \pi V \left[\frac{9}{16} v + \frac{3}{16} \frac{d}{l_p} (22 - 105 \frac{d}{l_p} \text{Re}_c^{1/2}) \right]$</p> <p>$\text{Re}_c \rightarrow 0$ (Cox& Hsu, 1977)</p> <p>$\mathbf{F}_L \sim \mu_f a^2 v_s (\dot{\gamma}/\nu)^{1/2}$</p> <p>$\text{Re}_c < 100$ (Hogg, 1994)</p> <p>$\text{Re}_c > 100$ (Asmolov, 1999)</p>

Таблица 1.3: Механизмы миграции одиночных частиц при течении разреженной ньютоновской суспензии в канале.

В существующих моделях транспорта проппанта в трещине ГРП пред-

полагается, что поперечный профиль концентрации частиц однородный и эффектами миграции частиц пренебрегается. В то же время, существуют экспериментальные подтверждения тому, что частицы мигрируют к центральной линии при течении суспензий в каналах (см., например, эксперименты в [177]), что приводит к увеличению средней скорости переноса частиц вдоль трещины и скорости осаждения суспензии [179, 12]. Физические процессы, которые дают вклад в механизмы миграции, достаточно сложны, включая линейный или квадратичный характер профиля скорости на масштабе частиц, скоростное проскальзывание частиц по отношению к жидкости, влияние стенок, эффекты неньютоновской реологии.

Миграция частиц в разреженной суспензии. В разреженной суспензии (что типично для гидроразрыва в сланцах) миграция частиц в суспензии происходит, в первую очередь, за счет эффектов на масштабе одиночной частицы в заданном поле скорости. Следует различать четыре различных эффекта: (i) плавучесть частиц (как правило, отрицательная и приводящая к осаждению); (ii) инерция частиц (приводящая к проскальзыванию частиц относительно жидкости, что характерно, например, для течения в начальном участке канала, где вырабатывается профиль Пуазейля); (iii) взаимодействие частицы со стенкой; и (iv) малая, но ненулевая инерция жидкости.

Даже в наиболее простом случае одиночной частицы, находящейся в сдвиговом течении вязкой жидкости в канале, феномен боковой миграции частицы является достаточно сложным, что зачастую приводит к путанице в нефтегазовой литературе, поэтому мы считаем необходимым потратить некоторое время на прояснение этих эффектов. В Таб. 1.3 приведена систематизация имеющихся в литературе результатов для определения боковой (подъемной) силы на одиночную частицу для различных конфигураций течения. Боковая сила определяется как $\mathbf{F}_L = 6\pi\mu av_L$, где v_L – скорость боковой миграции. Фактически боковая сила – это сила Стокса, действующая на частицу за счет формирования боковой компоненты скорости жидкости.

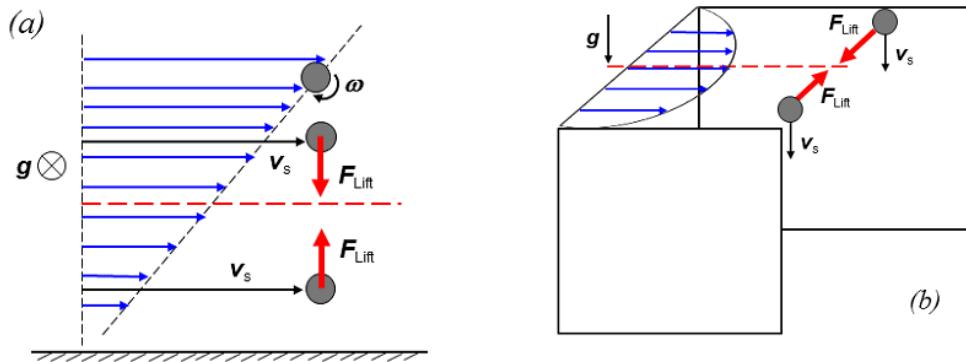


Рис. 1.2: Боковая сила на частицу в случае, когда скорость лежит в плоскости профиля скорости жидкости и его градиента [159, 2] (a) или по нормали к плоскости поля скорости [3] (b). Нейтрально плавучая частица, вращающаяся в сдвиговом поле скорости также показана [162, 108] (a).

кости, которая возникает из-за возмущения в поле скорости несущей фазы, вносимого частицей (последняя, как правило, вращается в сдвиговом потоке и иногда движется относительно жидкости). Рассматривая транспорт частицы проппанта в течении Пуазейля в канале, можно выделить два случая: (i) нейтрально плавучая частица, движущаяся без проскальзывания в основном течении и вращающаяся за счет сдвигового характера течения; (ii) тяжелая частица, движущаяся с некоторым проскальзыванием относительно жидкости (скорость проскальзывания может лежать в одной плоскости со скоростью жидкости и ее градиентом, когда частицы обгоняют поток или отстают, а при осаждении частиц в горизонтальном течении в канале, проскальзывание может быть направлено по нормали к указанной плоскости).

Случай (i) нейтрально плавучих частиц хорошо изучен - наблюдения датируются еще временами Пуазейля, который изучал эритроциты крови, собирающиеся на некотором расстоянии от стенок больших кровеносных сосудов [150]. Позднее в работах [162] было продемонстрировано, что нейтрально плавучие частицы собираются на положении равновесия 0.62 от

радиуса круглой трубы (так называемый “пинч-эффект”). Существует целая серия теоретических работ по вычислению боковой подъемной силе на частицу в канальном течении, в которых постепенно расширяется область применимости анализа в терминах Re_c - от чисел порядка единицы [108] до больших значений [55]. Последние результаты в данной области получены в [115] для миграции нейтрально плавучих частиц в трубах при больших числах Re_c , где было дано сравнение численных расчетов с экспериментами и теоретическими результатами [55]. Результаты [55] были обобщены на течения при больших числах Рейнольдса в [118].

Для специального случая малой частицы, движущейся с проскальзыванием по отношению к линейному сдвиговому потоку (в плоскости скорости и ее градиента, см. Рис. 1.2а), аналитическое выражение для боковой силы было впервые получено в [159]. Миграция частицы, движущейся с проскальзыванием в сдвиговом потоке, происходит за счет малой инерции жидкости. В этом смысле “инерционная боковая подъемная сила” формируется за счет инерции жидкости, а не частицы. При нулевых числах Re_c в течении Пуазейля миграция будет отсутствовать. В терминах относительной величины боковых сил подъемная сила в присутствие межфазного проскальзывания (сила Сэфмана) больше по порядку величины, чем боковая сила на нейтрально плавучую частицу в сдвиговом потоке. Таким образом, как только появляется скоростное проскальзывание, вклад вращения частицы становится пренебрежимо малым. Частицы, движущиеся быстрее жидкости в течении Пуазейля, будут мигрировать в сторону стенок канала. Отстающие частицы мигрируют к центральной линии канала. Учет влияния стенок может приводить к эффекту отталкивания частиц на малых расстояниях от стенки.

Сила Сэфмана была затем использована в многочисленных теоретических работах. Как правило, рассматривались конфигурации течения, когда проскальзывание частицы лежит в плоскости скорости жидкости и ее градиента (Рис. 1.2а). В то же время, для технологии ГРП наибольший инте-

рес представляет другая конфигурация, когда скорость проскальзывания частицы направлена по нормали к плоскости скорости жидкости и ее градиента (Рис. 1.1 и 1.2б). Таким образом, требуется построить обобщение силы Сэфмана [159], с учетом трех конкретных эффектов: влияния стени, оседания частицы по направлению силы тяжести и локального сдвига скорости в течении Пуазейля.

Определение указанной боковой силы позволит изучить миграцию среды частиц в трещине с целью нахождения неоднородного профиля концентрации проппанта поперек трещины, который влияет на горизонтальный перенос и вертикальное осаждение проппанта. Следует отметить, что в работах [103, 179] представлена двумерная, осредненная по ширине трещины, модель транспорта проппанта в рамках приближения эффективной жидкости [148] в предположении, что все частицы мигрировали на срединную плотность трещины (формируя зону повышенной концентрации в ядре течения в центре канала). Однако, ключевой механизм миграции частиц в указанной работе был связан с вязкоупругостью несущей фазы на основе экспериментов по миграции частиц при течении вязкоупругой жидкости в трубе [177].

Из анализа рассмотренных работ можно сделать вывод, что все существующие модели транспорта проппанта получены осреднением параметров течения поперек трещины в предположении, что поперечный профиль концентрации частиц является однородным (за исключением наших и совсем недавних работ [12, 130, 81]). Таким образом, боковой миграцией частиц в трещине обычно пренебрегается. Данное предположение выполняется только в случае, если несущая фаза – это сильно кросс-линкованный полимерный гель с пределом текучести, так что все поперечное сечение занято псевдозатвердевшим ядром с проскальзыванием вблизи стенок (в данной конфигурации частицы вмороожены в псевдозатвердевшее ядро течения и потому не мигрируют). Пренебрежение поперечной миграцией частиц может приводить к недооценке глубины проникновения частиц и ско-

ности осаждения суспензии, что повлияет на оценку продуктивной площади трещины, заполненной проппантом после закрытия. Существующие симуляторы имеют тенденцию недооценивать длину и переоценивать высоту области, занятой частицами, так как при миграции частиц к центру средняя скорость транспортировки частиц возрастает, а также увеличивается скорость осаждения суспензии в целом.

Подводя итоги данного раздела, подчеркнем, что результаты по миграции нейтрально плавучих частиц нельзя напрямую применять для анализа транспорта проппанта. Есть фундаментальное отличие между результатами для боковой силы на тяжелую частицу, которая переносится и осаждается в течении в трещине [3, 12, 179], и для боковой силы на нейтрально плавучую частицу при течении в трубе [55, 115, 118]: боковая подъемная сила при наличии межфазного проскальзывания больше по порядку величины и предсказывает другое положение равновесия частиц, а именно – только на срединной плоскости канала. Более подробный обзор результатов по боковой силе на частицу, полученных к середине 2000х, можно найти в [116].

1.2.2 Неустойчивость на поверхности раздела чистой жидкости и суспензии

Во время закачки проппанта в снарядном режиме отдельными порциями в трещину ГРП, когда порции суспензии чередуются с порциями чистой жидкости, происходит вытеснение сильновязкой суспензии с помощью маловязкой жидкости в узком канале с плоскими стенками, что приводит к развитию неустойчивости Сэфмана-Тейлора на интерфейсе между жидкостями [158]. Эта неустойчивость может быть как нежелательной, когда она происходит в неконтролируемом режиме, так и оказаться полезной для оптимизации проводимости трещины ГРП, например, когда она приводит к формированию высокопроводящих каналов в трещине [15]. Эта неустой-

чивость может быть использована также для оптимизации продвижения суспензии с помощью чистой жидкости в конце операции по ГРП [19] или для размещения барьеров для роста трещины ГРП с целью контроля роста трещины в высоту [44].

Обычно высокопроводящие каналы в трещине ГРП, заполненной проппантом, достигаются путем закачки проппанта в снарядном режиме порциями поочередно с порциями чистой жидкости. Альтернативная методология достижения таких высокопроводящих каналов в трещине может быть основана на использовании неустойчивости Сэфмана-Тейлора и подходящем выборе жидкостей и суспензий для последовательности закачки (см. Рис. 1.3 для иллюстрации). При вытеснении проппанта из скважины в трещину на завершающей стадии ГРП (так называемой “перепродавке”), пальцеобразование помогает предотвратить закрытие трещины в прискальной зоне и гидравлическое отключение трещины от скважины [19].

Другой пример использования неустойчивости Сэфмана-Тейлора, достойный упоминания, это размещение барьера для контроля роста трещины в высоту на основе управляемой неустойчивости на поверхности раздела жидкостей [44]. Метод размещения барьера на верхней и нижней границах трещины в основном основан на проникновении “пальца” чистой маловязкой жидкости в порцию высоковязкой суспензии по механизму неустойчивости Сэфмана-Тейлора. Таким образом порция суспензии разбивается на две, оттесняя барьеры из суспензии к верхней и нижней границе трещины. Эти порции суспензии, достигая верхнего и нижнего края трещины, приводят к “расклиниванию” частицами проппанта в кончике трещины, что приводит к остановке роста трещины по механизму tip screen-out (TSO), таким образом останавливая нежелательный рост трещины в высоту.

Одним из характерных элементов развития первичной неустойчивости Сэфмана-Тейлора при вытеснении суспензии с помощью чистой жидкости в трещине ГРП является развитие вторичной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на боковой поверхности пальца чистой жидкости, что было

исследовано в работах [136, 139].

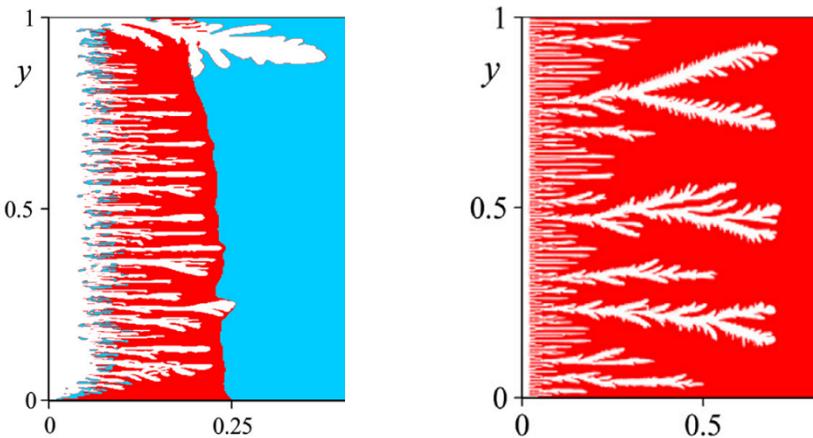


Рис. 1.3: Пальцевидная неустойчивость при последовательном вытеснении трех жидкостей (сuspензия с пределом текучести показана красным, линейный гель – синим, вода – белым) (*слева*); фрактальные распределения пальцевидной неустойчивости при вытеснении супензии с пределом текучести водой (*справа*) [15].

Пальцеобразование в результате вытеснения жидкости в трещине достаточно широко освещено в литературе, но лишь в редких случаях численные результаты проходят валидацию относительно лабораторных данных (как показано в [15, 19]). Развитие предиктивной модели возможно только на основании сравнения модели с экспериментальными данными, так как длина и ширина пальцев зависят не только от физических эффектов, заложенных при формулировке математической модели (таких как диссиpативные механизмы, отсекающие коротковолновую неустойчивость, например, поверхностное натяжение), но и деталей численной реализации.

Наглядный пример детальных лабораторных данных представлен в [167], где 89% раствор глицерина вытесняется водой. Результирующие распределения могут быть использованы для валидации двумерных исследовательских кодов, но пока они были использованы лишь для замыкания одномерных моделей длины смешения.

1.3 Замыкающие соотношения моделей

Набор факторов, влияющих на замыкающие соотношения для моделей транспорта проппанта, включают: полимерные добавки для снижения сопротивления в гидоразрывной жидкости с целью уменьшения перепада давления при прокачке геля по скважинам, расход закачки, который определяет режим течения (от ламинарного до турбулентного), полидисперсность суспензии частиц проппанта, несферичность частиц проппанта и добавки волокон (файберов) в суспензии для предотвращения осаждения частиц. Эти факторы влияют как на реологию суспензии в целом, так и на скорость продольного транспорта и вертикального осаждения частиц.

Следующие эффекты заслуживают отдельного внимания: динамическое расклинивание и мобилизация частиц за счет локальной дегидрации (за счет утечек) и формирование плотной упаковки на дне трещины (за счет осаждения), влияние осаждения/сегрегации/расслоения; осаждение с формированием кластеров и агломераций твердых частиц; детальный учет реологии гранулированных материалов [69, 130, 131]; эффекты вязкоупругости гидоразрывных жидкостей.

Вязкость суспензий на основе полимерных жидкостей также может зависеть от температуры [84], однако аспекты переноса тепла выходят за рамки настоящей работы. Детали возможных зависимостей вязкости от температуры, в том числе аномальной зависимости, можно найти в [181, 182].

С целью уменьшения нежелательных эффектов осаждения частиц в прискважинной зоне в гидоразрывную жидкость для стабилизации суспензии иногда добавляются файберы (волокна) [94]. Использование волокон уже привело к прорывному развитию технологий более эффективного размещения проппанта в трещинах ГРП [91, 119].

Эффекты				
Сложность	Инерция $Re_p \sim 1$	Ньютонаовская реология	Стесненное осаждение $C_p \sim 1$	Влияние стенок $v_s/v_{St} = g(h)$
	$Re_p \ll 1$	Ньютонаовская $v_{St}^0 = (\rho_p - \rho_f)gD^2/18\mu_f$ $C_D = 24/Re_p$	$v_s = v_{St} (1 - C_p/C_{max}^j)^\alpha$ $\alpha = 5.5$ [143], $j = 0$ [154], 1[5]	$\alpha = 4.7 + 19.5h, h = d/w$ $g(h) = 1 - 0.65h + O[h^3]$ [143]
		Степенная $v_{St} = (\rho_p - \rho_f)gD^{n+1}/3^{n-1}18K$		Больше данных в Табл. 1.5
		Вязко-упругость $v_{St} = v_{St}^0 (1 - 0.18(Re_p We)^{0.19})^{-1/2}$ [49]		
	$2 < Re_p < 500$	$C_D = 30/Re_p^{0.625}$	$\alpha = 3.5$ [143]	$\alpha = 4.45Re_p^{-0.1}$ [143]
	$Re_p > 500$	$C_D = 0.44$	$\alpha = 2$ [143]	$g(h) = (1 - (h/2))^{3/2}$ [143]

Таблица 1.4: Различные эффекты, влияющие на осаждение частиц.

1.3.1 Гравитационное осаждение частиц

Осаждение частиц – это наиболее исследованный раздел многофазных течений в приложении к технологии ГРП, и этому есть две причины. Во-первых, относительно легко поставить эксперимент по осаждению частиц в статических условиях (осаждение в покоящейся жидкости). Во-вторых, теоретически можно легко получить аналитическое выражение для скорости осаждения частиц в рамках предположения о стационарном движении одиночной сферической частицы в ньютонаовской неподвижной жидкости при малых числах Рейнольдса частицы (стоково течение: $Re_p \rightarrow 0$). В этом случае движение происходит при балансе нескольких сил: силы Стокса, силы тяжести и силы Архимеда. Из условия равенства этих сил на частицу можно получить выражение для скорости осаждения одиночной частицы, которое в литературе иногда называют скоростью Стокса. Обзор по осаждению частиц в ньютонаовских жидкостях можно найти в [51]. Таблица 1.4 демонстрирует базовые факторы, влияющие на скорость осаждения частиц. Здесь мы лишь слегка затрагиваем тему влияния вязкоупругости несущей фазы на осаждение частиц. В литературе существуют наборы разрозненных корреляций и попытки предложить унифицированных подход [165, 166], однако в научном сообществе пока не достигнуто единства мнений по поводу учета вязкоупругости на осаждение проппнта.

Как показано в Табл. 1.4, имеется четыре фактора, существенно влияю-

щих на скорость осаждения частиц: инерция жидкости ($Re_p \sim 1$), неньютоновская реология несущей фазы, конечность объемной концентрации частиц и наличие стенок. Влияние инерции несущей фазы на осаждение, по-видимому, важно в первую очередь в приложении к ГРП в сланцах (такие работы, как правило, проводятся с маловязкими жидкостями при малой объемной доле частиц), где число Рейнольдса частиц может быть конечным Re_p (обзор по поправкам на конечность числа Рейнольдса частицы можно найти в [143]). Скорость осаждения частиц может быть известным образом обобщена на случай степенной реологии жидкости (см. Таб. 1.4). В случае реологии Хершеля-Балкли в центре канала формируется ядро псевдозатвердевания (где частицы вмороожены в жидкость и не осаждаются), а вблизи стенок появляются сдвиговые слои, где осаждение подчиняется закону для степенной жидкости. В литературе имеются отдельные попытки исследовать эффекты вязкоупругости. Некоторые из этих попыток приводят к контр-интуитивным выводам, например: скорость осаждения частиц увеличивается с увеличением их объемной доли (что объясняется увеличением скорости сдвига при приближении частиц друг к другу) и уменьшается с увеличением скорости сдвига [66].

Тенденция группы частиц к агломерации и самоорганизации была исследована в [117], [123]. Другой эффект, приводящий к увеличению общей скорости осаждения суспензий – эффект Бойкотта – также был теоретически исследован, но пока не внедрен в коммерческие симуляторы [145].

Эффект конечной объемной доли частиц на осаждение в концентрированных суспензиях, известный как стесненное осаждение (hindered settling), учитывается с помощью поправочного коэффициента $F(C_p) = v_s(C_p)/v_{St}$. Различные замыкающие соотношения для эффекта стесненного осаждения показаны в Таб. 1.5. Проблема с оригинальной формулой Richardson-Zaki и ее обобщениями состоит в том, что скорость осаждения согласно этой формуле не стремится к нулю при осаждении частиц и приближении к плотной упаковке на дне трещины (при $C_p \rightarrow C_{max}$), и в расчетах части-

Формула для $F(C_p) = \mathbf{v}_s / \mathbf{v}_{St}$	Источник
$1 - 6.55C_p$	Batchelor [64]
$(1 - C_p)^2 / 10^{1.82C_p}$	[73]
$\alpha = 4.65$	Richardons-Zaki [154]
$(1 - C_p)^\alpha$	$\alpha = 4.5$ [102]
	$\alpha = 5.1$ [97]
	$\alpha = 5.5$ [143]
$(1 - C_p/C_{max})^\alpha$	$\alpha = 5$ Транспорт проппанта [5, 12]

Таблица 1.5: Различные замыкающие соотношения для поправки к скорости осаждения за счет эффекта стесненного осаждения в концентрированной суспензии при $Re_p \rightarrow 0$.

цы “проваливаются” сквозь дно трещины. Для того, чтобы преодолеть это несоответствие реальности, была введена поправка в форме $(1 - C_p/C_{max})^\alpha$, которая была успешно использована при расчетах транспорта проппанта [179] (валидация этой формулы относительно экспериментальных данных проведена в настоящей работе и представлена в Главе 2 [12]).

1.3.2 Реология суспензий: влияние неньютоновских эффектов

Гидроразрывная жидкость это, как правило, водный раствор полимера [63], что объясняет ее сильно неньютоновскую реологию. Как правило, несущая фаза считается “текучей жидкостью” в смысле механики сплошной среды, то есть предполагается, что тензор вязких напряжений зависит от компонент тензора скоростей деформации и не зависит от собственно деформаций:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(e_{ij}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$$

Можно сделать дальнейшие упрощения [153]:

- Для ньютоновской жидкости: $\boldsymbol{\tau} = \mu_0 \mathbf{e}$
- Для обобщенной ньютоновской жидкости: $\boldsymbol{\tau} = \mu(|\mathbf{e}|)\mathbf{e}$. В этом классе - бингамовская жидкость, степенная жидкость и жидкость Хершеля-Балкли.

Формула для $\mu_s(C_p)/\mu_f$	Область применимость, C_p	Источник
$1 + 2.5C_p$	$C_p < 0.05$	Einstein [85]
$1 + 2.5C_p + 7.6C_p^2$	$C_p < 0.2$	Batchelor [65]
$(1 - 3.5C_p)^{-2.5}$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Roscoe [156]
$(1 + 1.25C_p/(1 - C_p/C_{max}))^2$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Ferrini [90]
$1 + 2.5C_p + 10C_p^2 + 0.0019 \exp(20C_p)$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Thomes [173], [160]
$1.125(C_p/C_{max})^{1/3}/(1 - (C_p/C_{max})^{1/3})$	$0 \leq C_p \leq C_{max}$	Frankel & Acrivos [89]
$\beta = -2.5C_{max}$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Krieger [111]
$\beta = -2.5$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Nicodemo [142],[113]
$\left(1 - \frac{C_p}{C_{max}}\right)^\beta$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Maron [140]
$\beta = -2$	$0 \leq C_p < C_{max}$	
$\beta = -1.5$	$0 \leq C_p < C_{max} = 0.64$	Barree & Conway [58]
$\beta = -1.82$	$0.01 < C_p < C_{max}$	Krieger [112]
$\beta = -1.89$	$0 \leq C_p < C_{max}$	Scott [161]

Таблица 1.6: Различные замыкающие соотношения для реологии суспензий: от разреженных суспензий до концентрированных.

В настоящий момент во всех коммерческих симуляторах (см., например, [180, 186, 53, 68, 122] и др.) учитывается лишь степенная реология гидро-разрывной жидкости. Предел текучести внедрен пока только в исследовательские коды (например, SHAC [128]), поскольку учет предела текучести в модели приводит к сложностям при численных расчетах, увеличивает время расчета, и такую модель довольно сложно тестировать. В настоящей диссертации в модели среды будет учтен предел текучести и проведена валидация модели относительно имеющихся лабораторных данных.

1.3.3 Реология суспензий: влияние частиц

Сравнение различных замыкающих соотношений для вязкости суспензий представлено в [174] (см. Таб. 1.6).

Для специального случая суспензии частиц на основе гидро-разрывной жидкости было показано [58], что $\beta = -1.5$ (Таб. 1.6). В то же время, двухмерные модели переноса и осаждения проппанта [103, 179] использовали значение $\beta = -1.82$ [112]. Для случая неильтоновской (степенной) гидро-

разрывной жидкости лабораторные эксперименты с растворами полимера и нейтрально плавучими частицами представлены в [84]. Результаты экспериментов показали, что показатель степени (индекс течения) n не зависит от объемной концентрации частиц, в то время как коэффициент консистенции K зависит от объемной доли по формуле, близкой к выражениям для вязкости ньютоновских суспензий:

$$K = K_f \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}}\right)^{5n_f/2},$$

где K_f – значение коэффициента консистенции жидкости.

1.4 Перечень нерешенных проблем

Итак, выше было отмечено, что дизайн работ по ГРП проводится с помощью симуляторов, которые основаны на моделях механики многофазных сред применительно к течениям, которые формируются на различных стадиях выполнения работы по гидроразрыву. Перечислим кратко эти стадии: на стадии закачки – течение суспензии в скважине и транспорт суспензии в вертикальной трещине ГРП, созданной в породе, и на стадии очистки трещины от гидроразрывной жидкости – многофазная фильтрация в закрытой трещине ГРП, заполненной плотно упакованными частицами проппанта, и газожидкостное течение в скважине от перфораций (в местах соединения с трещинами ГРП) к поверхности.

Из приведенного выше обзора литературы следует, что, пожалуй, только первая стадия (стационарная закачка эффективно однофазной суспензии в скважину) хорошо описывается известными гидравлическими моделями, а используемые в имеющихся симуляторах ГРП модели транспорта проппанта в трещине ГРП на стадии закачки и модели очистки системы “скважина–трещина” требуют улучшения и развития по следующим направлениям:

- вывод модели течения суспензии в трещине гидроразрыва из законов сохранения в рамках многоконтинуального подхода, что позволит по-

строить самосогласованную модель, очертить границы ее применимости и выяснить предел применимости эвристически постулированных моделей эффективной среды, которые до сих пор применялись в симуляторах;

– построение многомасштабной модели миграции частиц проппанта по-перек трещины гидроразрыва, начиная с вычисления боковой силы на одиночную частицу, которая переносится и осаждается в трещине, затем по-строение модели миграции частиц под действием данной боковой силы и, наконец, построение осредненной двумерной модели транспорта и осажде-ния суспензии в трещине с учетом неоднородного поперечного профиля концентрации частиц, сформированного в результате миграции.

Кроме того, для совершенствования симуляторов ГРП в настоящее вре-мя представляется важным развитие таких направлений, как (соответству-ющие обзоры литературы даны в начале Глав 4 и 5):

– изучение фильтрации в пористой среде из плотно упакованных частиц проппанта в закрытой трещине гидроразрыва во время очистки, гидроди-намического тестирования скважин (ГДИС) и вывода скважины с треши-ной ГРП на стационарную добычу, что требует построения многоконтину-альной модели фильтрации суспензии и поиска замыкающих соотношений для проницаемости плотной упаковки частиц проппанта как функции по-ристости;

– построение самосогласованных моделей газожидкостного течения в скважинах после ГРП, обеспечивающих корректность математических по-становок задач (гиперболичность).

Достижение перечисленных выше целей позволяет построить семейство многомасштабных моделей механики многофазных сред, покрывающее все стадии применения технологии гидроразрыва пласта. На решение перечис-ленных выше проблем и направлена настоящая диссертация.

Данный литературный обзор, а также результаты, полученные в дис-сертации, опубликованы автором в [21].

Глава 2

Построение многоконтинуальной модели для течения суспензии в трещине гидроразрыва пласта

2.1 Вывод уравнений движения из законов сохранения в рамках двухконтинуального подхода

2.1.1 Постановка задачи

Целью настоящего раздела является построение асимптотической двухконтинуальной модели течения суспензии в вертикальной трещине гидроразрыва с учетом конечной объемной доли частиц и рассогласования скоростей фаз. Изучение данного явления представляет интерес в связи с необходимостью построения математических моделей для внедрения в коммерческие программные комплексы, которые используются при численном моделировании течения суспензии в трещине в приложении к технологии гидроразрыва нефтеносного пласта [84]. Как отмечалось в обзоре, существующие модели переноса частиц в трещине [148, 179, 103, 145] были постулированы в рамках приближения эффективной жидкости, где суспензия считается вязкой *несжимаемой* жидкостью с плотностью и вязкостью, зависящими от объемной концентрации частиц.

Рассматривается трехмерное нестационарное ламинарное течение суспензии в трещине гидроразрыва пласта, движущееся в вертикальном направлении вдоль оси трещины. Течение считается однородным и изотропным, а суспензия — вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью и вязкостью, зависящими от объемной концентрации частиц.

пензии в вертикальной трещине гидроразрыва в поле силы тяжести \mathbf{g} . Несущая фаза - вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость плотности ρ_f^0 и вязкости μ_0 . Дисперсная среда состоит из одинаковых неколлоидных сферических частиц радиуса a с плотностью материала ρ_p^0 и массой одиночной частицы m . Трещина считается вертикальным каналом переменной ширины w . Вводится система координат $Oxyz$, с осями x и y , направленными по горизонтали и вертикали, и осью z , направленной перпендикулярно срединной плоскости трещины. Единичные орты системы координат обозначены $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Суспензия рассматривается как комбинация двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов: среды частиц и несущей фазы. Среда частиц характеризуется объемной концентрацией C_p , числовой концентрацией n_p , плотностью $\rho_p = C_p \rho_p^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_p . Несущая фаза описывается осредненной плотностью $\rho_f = (1 - C_p) \rho_f^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_f .

В рамках двухконтинуального подхода [195], общие дифференциальные уравнения законов сохранения массы и импульса для каждой фазы в раз мерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla(\rho_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_f \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} = -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_f \mathbf{g} - n_p \mathbf{F}_p \quad (2.2)$$

$$\rho_p \frac{d_p \mathbf{v}_p}{dt} = -\nabla p_p + \nabla_j \tau_p^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_p \mathbf{g} + n_p \mathbf{F}_p \quad (2.3)$$

$$\frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \nabla) \mathbf{v}_f, \quad \frac{d_p \mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \nabla) \mathbf{v}_p$$

Начальные и граничные условия. Трещина аппроксимируется каналом прямоугольной формы, у которого толщина – заданная функция пространственных координат и времени $w(t, x, y)$. В начальный момент времени предполагается, что трещина заполнена покоящейся чистой жидкостью, а концентрация частиц равна нулю. Рассматриваются граничные условия двух типов: случай I – реалистичный пример закачки суспензии в приска жинную область трещины гидроразрыва, которая ограничена сверху и сни

зу краями трещины, слева – вертикальной линией симметрии трещины, а справа – условной границей расчетной области, через которую жидкость или супензия может свободно протекать. Случай II – модельный пример гравитационной конвекции в закрытой ячейке Хеле-Шоу.

Для случая I закачки супензии в прискваженную область трещины гидроразрыва граничные условия в размерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \mathbf{v}_f &= \mathbf{v}_{f0}(t, y, z), \quad C_p = C_0(t, y, z), & (2.4) \\ y = 0, H : \quad \mathbf{v}_f &= \mathbf{v}_p = 0 \\ z = \pm \frac{w}{2} : \quad u_f &= v_f = 0, \quad w_f = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \pm v_l, \quad w_p = 0; \\ x = L : \quad \frac{\partial u_f}{\partial x} &= 0, \quad v_f = 0, \quad \frac{\partial u_p}{\partial x} = 0, \quad v_p = 0 \end{aligned}$$

Здесь на левой границе на входе в трещину задается скорость жидкости \mathbf{v}_{f0} (эта скорость отлична от нуля только на ограниченном интервале левой границы, который соответствует перфорационным отверстиям). Также на левой границе задана концентрация частиц C_0 . На боковых стенках трещины заданы условия прилипания для касательных компонент скорости жидкости, ненулевая нормальная скорость жидкости v_l , учитывающая возможный отток жидкости, и условие отсутствия оттока частиц. На верхней и нижней границах трещины задано условие прилипания жидкости. На правой границе рассматриваемой области течения, через которую жидкость или супензия может свободно протекать, задается так называемое “мягкое” граничное условие: скорость жидкости горизонтальна и не зависит от продольной координаты. Предполагается, что правая граница находится достаточно далеко от области закачки на левой границе. На данном этапе, при формулировке граничных условий предполагается, что тензор напряжений ненулевой в обеих фазах, а, следовательно, течение каждой фазы описывается параболическими уравнениями, которые требуют задания начальных условий и граничных условий по всему периметру рассматриваемой области течения. При дальнейшем выводе асимптотических уравнений

тип системы может измениться (в частности, система уравнений для среды частиц может стать гиперболической), и тогда часть граничных условий потребуется отбросить.

Для случая II гравитационной конвекции в закрытой ячейке Хеле-Шоу в начальный момент во всей области задается распределение концентрации частиц, а также скорости частиц и жидкости. В качестве граничных условий заданы условия прилипания.

При дальнейшем упрощении уравнений (2.1)–(2.3) предполагается, что при гравитационном осаждении супензии хаотическая скорость частиц мала, поэтому можно пренебречь тензором напряжений в среде частиц: $p_p = 0$, $\tau_p^{ij} = 0$ [194]. Вследствие конечности объемной доли частиц и рассогласования скоростей фаз осредненные плотности среды частиц, несущей фазы и супензии переменны, и среднемассовые скорости фаз и смеси являются дивергентными (т.е. супензия является “сжимаемой” средой). Будем считать, что тензор напряжений для несущей фазы можно принять как для вязкой сжимаемой жидкости с переменной вязкостью, зависящей от объемной концентрации частиц [194]:

$$\tau_f^{ij} = 2\mu_0\mu(C_p) \left(e^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\nabla\mathbf{v}_f \right), \quad \mu(0) = 1$$

$$\mu(C_p) = \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}} \right)^{-1.89}, \quad C_{max} = 0.65$$

Зависимость вязкости от объемной доли частиц определяется формулой Скотта [173], пригодной в достаточно широком диапазоне параметров. В выражении для межфазной силы учитывается сила Стокса с поправкой на конечную объемную долю частиц $f(C_p)$, а также сила Архимеда:

$$\mathbf{F}_p = 6\pi a\mu_0(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \frac{1}{f(C_p)} - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_f^0 \mathbf{g}$$

2.1.2 Вывод асимптотических уравнений в приближении тонкого слоя

В безразмерных переменных с использованием характерных масштабов скорости U , длины (высоты) L и ширины d трещины из (2.1)-(2.3) можно получить следующие уравнения:

$$\nabla [(1 - C_p)\mathbf{v}_f + C_p\mathbf{v}_p] = 0, \quad \frac{\partial C_p}{\partial t} + \nabla(C_p\mathbf{v}_p) = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}\text{Re} \left[(1 - C_p)\frac{d_f\mathbf{v}_f}{dt} + \zeta_p C_p \frac{d_p\mathbf{v}_p}{dt} \right] = \\ -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i - \text{Bu}_0 [1 + C_p(\zeta_p - 1)] \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon\text{St} \frac{d_p\mathbf{v}_p}{dt} = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \frac{1}{f(C_p)} - \frac{\text{St}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{\zeta_p - 1}{\zeta_p} \right) \mathbf{e}_3 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon = \frac{d}{L}, \quad \text{St} = \frac{mU}{6\pi a \mu_0 d}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gd}},$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_f^0 U d}{\mu_0}, \quad \zeta_p = \frac{\rho_p^0}{\rho_f^0}, \quad \text{Bu}_0 = \frac{\text{Re}}{\varepsilon^2 \text{Fr}^2}, \quad \text{Bu} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2}$$

В первом уравнении (2.5) выражение в скобках – среднеобъемная скорость суспензии, являющаяся бездивергентной в силу несжимаемости материалов фаз. Используется приближение тонкого слоя и рассматривается следующий асимптотический предел:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \nabla w \ll 1, \quad \varepsilon\text{Re} \ll 1, \quad \text{St} \sim 1, \quad \text{Fr} \sim 1, \quad \text{Re} \sim 1, \quad \zeta_p \sim 1 \quad (2.8)$$

Вводятся новые функции, осредненные поперек трещины:

$$H(t, x, y) = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} h(t, x, y, z) dz$$

Как и в существующих моделях, в данном разделе предполагается, что профиль концентрации частиц поперек трещины является однородным. Из (2.5)-(2.7) в асимптотическом пределе (2.8) получаются следующие двумер-

ные осредненные уравнения:

$$\frac{\partial wC_p}{\partial t} + \nabla(wC_p\mathbf{v}_p) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \left[\frac{w^3}{12\mu(C_p)} (\nabla p + Bu [1 + C_p(\zeta_p - 1)] \mathbf{e}_2) - wC_p\mathbf{v}_s \right] - 2v_l \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_f = -\frac{w^2}{12\mu(C_p)} (\nabla p + Bu [1 + C_p(\zeta_p - 1)] \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_s \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_s = -\frac{St}{Fr^2} \left(\frac{\zeta_p - 1}{\zeta_p} \right) f(C_p) \mathbf{e}_2, \quad f(C_p) = \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}} \right)^\alpha.$$

Для решения уравнения (2.9) задаются начальные и краевые условия для концентрации (2.4):

$$t = 0 : C_p = 0, (x, y) \in [0, L/H] \times [0, 1]; \quad x = 0 : C_p = C_0, y \in [y_1, y_2]$$

Границные условия для уравнения (2.10) следуют из (2.4). Так как осредненное по толщине трещины движение среды частиц описывается гиперболическим уравнением переноса концентрации на фоне заданного поля скорости, часть граничных условий для среды частиц отброшено. Для эллиптического уравнения для давления (2.10) ставится задача смешанными граничными условиями:

$$x = 0 : \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu(C_p)}{w^2}, \quad y \in [y_1, y_2]; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, y_1], [y_2, 1]$$

$$x = L/H : \frac{\partial p}{\partial y} = -Bu; \quad y = 0, 1 : \frac{\partial p}{\partial y} = -Bu(1 + C_p|_{y=0,1}(\zeta_p - 1))$$

При вычислении скорости стесненного осаждения частиц используется известная эмпирическая формула, которая учитывает уменьшение скорости осаждения включений при увеличении их объемной доли. Существующие модели эффективной жидкости содержат предположение, что локальная *среднеобъемная* скорость суспензии в трещине описывается законом Пуазейля, тогда как в данной работе в рамках двухконтинуального подхода на основе законов сохранения показано, что формулой Пуазейля следует описывать *среднемассовую* скорость несущей фазы (2.11). Кроме того, в

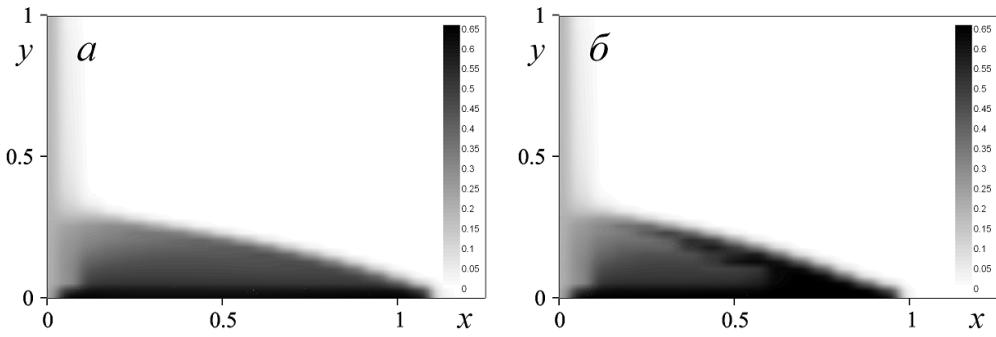


Рис. 2.1: Распределения концентрации частиц в трещине эллиптического сечения в момент $t = 0.5$, полученные в рамках односкоростной (а) и двухконтинуальной (б) моделей при $\text{Bu} = 3260$.

ранних моделях выражение для скорости частиц (2.11), вместо среднемассовой скорости жидкой фазы, содержало среднеобъемную скорость суспензии. Как следствие, в отличие от существующих моделей, полученная двухконтинуальная модель в правой части уравнения для давления (2.10) содержит дополнительное слагаемое $-\nabla(wC_p\mathbf{V}_s)$, учитывающее двухскоростные эффекты.

2.1.3 Результаты численных расчетов для модельных примеров течения суспензии в ячейке Хеле-Шоу

Для оценки влияния двухскоростных эффектов на перенос и оседание частиц в трещине гидроразрыва было проведено численное решение системы уравнений (2.9)–(2.10) на равномерной прямоугольной сетке. Решение эллиптического уравнения (2.10) построено конечно-разностным методом с погрешностью аппроксимации второго порядка. Получающаяся в результате конечно-разностной аппроксимации система линейных уравнений с пятидиагональной матрицей решена методом сопряженных градиентов. Для решения уравнения переноса (2.9) использована TVD схема с погрешностью аппроксимации второго порядка по пространству и первого порядка

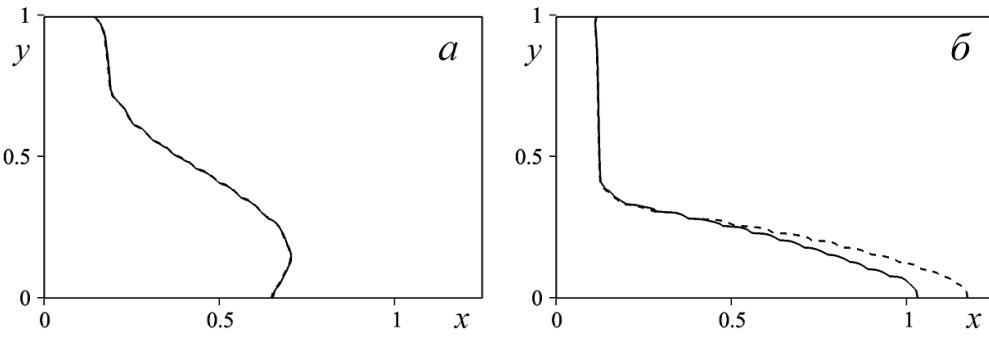


Рис. 2.2: Положение фронта концентрации частиц в трещине эллиптического сечения в момент $t = 0.5$ для $Bu = 326$ (а) и $Bu = 3260$ (б). Результаты получены при использовании односкоростной (пунктир) и двухскоростной (сплошная линия) моделей.

по времени [215]. Расчеты проводились при соотношении сторон расчетной области $L/H=5$ для двух типов трещин: с прямоугольным или эллиптическим вертикальным поперечным сечением при $v_l = 0$, $\alpha = 5$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $a/d = 1/6$, $\zeta_p = 3$, $C_0 = 0.2$. Для проверки достоверности результатов проводилась серия расчетов на сгущающихся сетках. Итоговые расчеты были проведены на сетке, обеспечивающей необходимую точность вычислений.

На основании численных расчетов было проведено параметрическое исследование. На Рис. 2.1 представлены характерные распределения концентрации частиц через некоторое время после начала закачки суспензии в трещину, полученные в рамках модели эффективной жидкости и двухконтинуальной модели, предложенной в настоящей работе. Для расчетов по модели эффективной жидкости использовались уравнения (2.9)-(2.10) без дополнительных членов за счет двухконтинуальных эффектов. Показано, что отношение дополнительного слагаемого к числу плавучести Bu в (2.10) пропорционально $\xi = (a/d)^2(\zeta_p - 1)$. При фиксированном ξ увеличение Bu приводит к увеличению влияния двухскоростных эффектов на распределение концентрации частиц в трещине (Рис. 2.2). При $Bu > 10^3$ различие между расчетами по модели эффективной жидкости и по двухконтинуаль-

ной модели достигает 15% и более (Рис. 2.2, б). Было также проведено пробное численное исследование влияния двухконтинуальных эффектов на распространение трещины гидроразрыва с помощью доступного коммерческого программного комплекса для расчета ГРП. В результате было установлено, что в диапазоне параметров, типичном для стандартных условий ГРП, двухконтинуальные эффекты, учтенные в предложенной модели движения сусpenзии по трещине, оказывают небольшое влияние на закон роста трещины. Однако, в дальнейшем требуется провести более детальное исследование данной сопряженной задачи.

Результаты данного раздела опубликованы в [5].

2.2 Эффекты вязкопластиности

Как детально обсуждалось в Главе 1, смесь гидроразрывной жидкости (кросс-линкованный полимерный гель) с частицами проппанта и волокнами (файберами) обладает выраженным свойством наличия предела текучести. Как правило, такой класс жидкостей описывается моделью Бингама (линейная реология в области сдвига) либо полной моделью Хершеля-Балкли (степенная реология и предел текучести). В данном разделе мы представим обобщение модели течения в трещине гидроразрыва с учетом предела текучести смеси. Заметим, что все существующие коммерческие симуляторы гидроразрыва пласта учитывают лишь степенную реологию без предела текучести, учет которого, как будет показано ниже, представляет существенные математические и вычислительные трудности.

Течения чистой жидкости с пределом текучести (без примеси твердых частиц) в узком канале (кольцевой зазор затрубного пространства при цементаже скважин) широко исследовались в литературе, как теоретически [196, 197, 201, 198], так и экспериментально [199, 200]. В меньшей степени эта задача рассматривалась в геометрии плоского канала [202, 203], которую можно использовать в приложении к гидроразрыву пласта. В частности, в [202] было получено одномерное аналитическое решение для течения бингамовской жидкости в трещине. Течения двух бингамовских жидкостей под действием сил плавучести в наклонном плоском канале были рассмотрены в [203] в приложении к цементированию скважин. В общем случае, при численном решении уравнения вязкопластического течения возникает известная проблема регуляризации, которая детально обсуждалась в [206]. Теория тонкого слоя для 2D течения в канале с плавно изменяющейся толщиной была предложена в [205]. В указанной работе детально рассмотрена история парадокса теории смазочного слоя (the lubrication paradox) в приложении к бингамовской жидкости, который состоит в неразрешимой дилемме о существовании либо отсутствии области, где скорость сдвига в

точности равняется нулю. Асимптотическое решение для течения Пуазейля было получено с помощью методов возмущений для случая, когда ширина канала мала. В приложении к гидроразрывным течениям в [205] было получено решение для описания течения в горизонтальном сечении вертикальной трещины. В [207] приближение тонкого слоя было использовано для того, чтобы развить общую модель 2D течения в канале для жидкости типа Бингама, которая ведет себя как линейно-упругое тело ниже предела сдвига.

Большое количество статей посвящено изучению неустойчивости Сэфмана-Тейлора (С-Т) при вытеснении чистых жидкостей в узком плоском канале или кольцевом зазоре, начиная с оригинальной работы [158]. При вытеснении сильновязкой жидкости маловязкой жидкостью в узком зазоре между двумя поверхностями развивается неустойчивость, которая в нелинейной фазе развития возмущений проявляется в форме пальцевидного искривления изначально плоского интерфейса. Скорость роста малых возмущений на интерфейсе между несмешивающимися жидкостями неограниченно растет при уменьшении длины волны. В присутствии некоторого механизма “отсечения” коротковолновых возмущений (как вариант, наличие некого диссипативного механизма, подавляющего коротковолновую неустойчивость) существует наиболее быстро растущее возмущение с конечной длиной волны. Подробный обзор литературы по С-Т неустойчивости при вытеснении как смешивающихся, так и несмешивающихся ньютоновских жидкостей в ячейке Хеле-Шоу или в пористой среде представлен в [208]. Исследование [74] посвящено изучению линейной неустойчивости на фронте двух бингамовских жидкостей при вытеснении в ячейке Хеле-Шоу. Показано, что дисперсионное соотношение близко по форме уравнению для случая ньютоновской жидкости, но включает явно предел текучести. Даже при очень малой скорости закачки, у коротковолновых возмущений отмечается высокая скорость роста. Небольшие конечно-амплитудные возмущения (“пальцы”), которые остаются позади в начале вытеснения, имеют

тенденцию останавливаться и не нарастать (the shield effect).

Как следует из этого краткого обзора и детального анализа источников, упомянутых в Главе 1, ни в одной из публикаций не было проведено исследования вытеснения с учетом такой комбинации эффектов, которые сопутствуют вытеснению нескольких суспензий с пределом текучести в вертикальном плоском канале в приложении к гидроразрыву. Для того чтобы начать устранять этот пробел в имеющихся исследованиях, предлагается построить двумерную, осредненную по ширине канала, модель течения бингамовских жидкостей в узком канале (ячейке Хеле-Шоу). Данное исследование позволит описать ряд эффектов, таких как гравитационное оплывание фронта (конвекция) в комбинации с вязкой пальцевидной неустойчивостью (С-Т), течение среды при превышении предела текучести и застывание в случае, когда порог текучести не превзойден. Разрабатываемая модель применима для описания течений чистой бингамовской жидкости без частиц либо суспензии на основе бингамовской жидкости, в которой осаждением индивидуальных частиц можно пренебречь. Типичные параметры многофазного течения неньютоновских жидкостей в трещине гидроразрыва можно найти в Таблице 1.1.

2.2.1 Уравнения движения

Рассматривается изотермическое нестационарное вытеснение несжимаемых бингамовских жидкостей в вертикальной трещине гидроразрыва, которая аппроксимируется плоским каналом (ячейкой Хеле-Шоу) с переменной по пространству шириной. Предполагается, что поверхностным натяжением на интерфейсе между жидкостями можно пренебречь, поскольку жидкости являются смешивающимися, но в то же время на рассматриваемых масштабах времени толщиной зоны смешения можно пренебречь. Это соответствует пределу больших значений капиллярного числа и числа Пекле. В приложениях к гидроразрыву и цементированию трещин используемые

жидкости, как правило, являются водными растворами, поэтому предположение малой смешиваемости и малых капиллярных чисел справедливо.

Ниже представим последовательный вывод уравнений тонкого слоя из законов сохранения массы и импульса, следуя методу малых возмущений в механике жидкости, как это было сделано в предыдущем разделе 2.1. Данная модель строится для последующего сопряжения с моделью механики деформируемого твердого тела, описывающей рост трещины. Таким образом, будем предполагать, что раскрытие трещины является заданной функцией пространственных координат и времени (которая в сопряженном симуляторе гидроразрыва может быть получена из решения соответствующей задачи геомеханики). Стенки канала считаются проницаемыми, так что учитываются утечки жидкости сквозь стенки (leakoff). Система координат введена следующим образом: ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат находится на срединной плоскости канала, так что координаты стенок задаются как $z = \pm w/2$, где $w(x, y, t)$ – раскрытие трещины.

Рассмотрим объем многофазной смеси $V(r)$ в окрестности некоторой точки r . Предположим, что имеются три различных жидкости, которые характеризуются индексами 0, 1, и 2. Объемы этих жидкостей, соответственно, есть V_0, V_1, V_2 . В объеме V , занятом смесью, введем относительный объем i -ой жидкости как $\theta_i = V_i/V_f$, $i = 0, 1, 2$. В пределе $V(r) \rightarrow 0$, $\theta_i \rightarrow C_i$, и мы получаем определения объемных долей каждой жидкости C_i (вариант - трейсеры или маркеры жидкостей, принимающие значение 1 в точках, занятых жидкостью, и 0 там, где данной жидкости нет). Для объемных концентраций жидкостей выполнено следующее соотношение:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (2.12)$$

Среднеобъемные плотности жидкостей ρ_i ($i = 0, 1, 2$) и смеси ρ_m заданы формулами:

$$\rho_i = C_i \rho_i^0, \quad \rho_m = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2, \quad (2.13)$$

где ρ_i^0 – плотность материала i -ой жидкости.

Уравнения закона сохранения массы для жидкостей записаны в терминах *среднемассовой* скорости жидкости \mathbf{v} . О важности формулировки законов сохранения в терминах среднемассовой, а не среднеобъемной скорости отмечалось в предыдущем разделе и работе автора [5].

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \operatorname{div} (C_i \mathbf{v}) = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) могут быть объединены для того, чтобы получить бездивергентность среднеобъемной скорости жидкости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

Уравнения закона сохранения импульса для течения жидкости в узком канале записываются следующим образом:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i + \rho_f \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad (2.16)$$

где τ_{ij} – тензор вязких напряжений.

Для того, чтобы замкнуть систему определяющих уравнений, требуется задать выражение для тензора вязких напряжений τ_{ij} .

Границные условия для системы (2.14)–(2.16) формулируются следующим образом:

$$x = 0 : \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0(y, z, t), \quad C_i = C_{i0}(y, z, t), \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.17)$$

$$z = \pm \frac{w(x, y, t)}{2} : \quad u = v = 0, \quad w = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \pm v_l \quad (2.18)$$

Здесь, v_l – среднемассовая скорость утечек жидкости через проницаемые стенки трещины. Для простоты предполагается, что трещина симметрична относительно срединной плоскости. Также считается, что смесь гидроизрывной жидкости с частицами проппанта и волокон можно в первом приближении описать эффективной однородной средой, реология которой описывается моделью Бингама (проскальзыванием твердых примесей от-

носительно несущей жидкости в этом разделе пренебрегается):

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(e_{ij}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 2(\mu_m + \tau_y \dot{\gamma}^{-1}) \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v}_f \right), \quad \tau_m > \tau_y \\ e_{ij} = 0, \quad \tau_m < \tau_y \\ \tau_m = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ls}\tau_{ls}}, \quad \dot{\gamma} = 2\sqrt{\frac{1}{2}e_{ls}e_{ls}} \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь, $\mu_m(C_i)$ и $\tau_y(C_i)$ – вязкость и предел текучести смеси, τ_m – второй инвариант тензора вязких напряжений τ_{ij} , τ_y – предел текучести смеси и $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига (удвоенный второй инвариант тензора скоростей деформаций e_{ij}).

2.2.2 Приближение тонкого слоя

В дальнейшем мы выведем асимптотические уравнения для многофазного течения в вертикальной трещине гидроразрыва, предполагая, что длина и высота области течения существенно превосходят ее ширину. Далее будем следовать методологии вывода осредненных по ширине трещины уравнений многофазного течения, представленной в разделе 2.1, [5]. Как уже отмечалось выше, в отличие от [5], примем в качестве упрощающего допущения, что частицы в жидкости не осаждаются в силу конечного предела текучести жидкости гидроразрыва. Введем следующие безразмерные переменные (размерные переменные обозначены штрихом там, где потребуется отличать их от аналогичных безразмерных переменных):

$$\begin{aligned} x' &= Lx, \quad y' = Ly, \quad z' = Lz, \quad \mathbf{v}'_f = U\mathbf{v}_f, \\ t' &= \frac{L}{U}t, \quad \rho'_i = \rho_0^0 \rho_i, \quad (\tau_{ij})' = \frac{\mu_0^0 U}{L} \tau_{ij}, \\ \nabla' &= \frac{1}{L} \nabla, \quad w' = Lw, \quad v'_l = Uv_l, \\ p' &= \frac{\rho_0^0 U^2}{\operatorname{Re}} p, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_0^0 U d}{\mu_0^0}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь, L – характерный масштаб длины канала (его длина), U – характерный масштаб скорости закачки, d – характерный масштаб ширины, ρ_0^0 – плотность материала жидкости '0', μ_0^0 – коэффициент вязкости в области плато для жидкости с индексом '0' (кажущаяся вязкость при типичной скорости сдвига), Re – число Рейнольдса канала.

Безразмерные плотности несущей фазы, дисперской фазы и смеси даются формулами:

$$\rho_m = C_0 + \zeta_1 C_1 + \zeta_2 C_2, \quad \zeta_i = \frac{\rho_i^0}{\rho_0^0}, \quad i = 1, 2 \quad (2.22)$$

В безразмерной форме уравнение закона сохранения импульса смеси (2.16) переписывается в виде:

$$\varepsilon^{-1} \text{Re} \rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i - \text{Bu}_0 \rho_m \mathbf{e}_2, \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 2(\mu_m + \text{Bn} \tau_y \dot{\gamma}^{-1}) \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), & \tau_m > \text{Bn} \tau_y \\ e_{ij} = 0, & \tau_m < \text{Bn} \tau_y \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{Bu}_0 = \frac{\rho_0^0 g L^2}{\mu_0 U}, \quad \text{Bn} = \frac{\tau_y^0 d}{U \mu_0}, \quad \varepsilon = \frac{d}{L}.$$

Здесь Bu_0 – число плавучести, посчитанное по длине канала L , Bn – число Бингама, посчитанное на основании характерного предела текучести τ_y^0 (предел текучести жидкости '0'). Заметим, что в выражении (2.24) пластическая вязкость μ_m и предел текучести τ_y смеси являются функциями трейсеров жидкости C_i .

Предполагаем, что канал является узким, так что его ширина является медленно меняющейся функцией пространственных координат. При этом другие безразмерные параметры имеют порядок единицы, что покрывает наиболее общий случай течения в трещине гидроразрыва. Таким образом, мы рассматриваем следующий асимптотический предел:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \nabla w \ll 1, \quad \text{Bn} \sim 1, \quad \text{Re} \sim 1, \quad \zeta_i \sim 1. \quad (2.25)$$

Вводятся следующие переменные, растянутые вдоль оси z (обозначены

индексом 1):

$$z = \varepsilon z_1, \quad w = \varepsilon w_1, \quad v_l = \varepsilon v_l, \quad w_f = \varepsilon w_f, \quad p = \varepsilon^{-2} p_1 \quad (2.26)$$

Только четыре компоненты тензора скоростей деформаций и тензора вязких напряжений имеют порядок единицы, тогда как другие имеют порядок ε :

$$(e_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nabla_3 u \\ 0 & 0 & \nabla_3 v \\ \nabla_3 u & \nabla_3 v & 0 \end{pmatrix} + (O_{1,ij}(\varepsilon)), \quad (2.27)$$

$$(\tau_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 \end{pmatrix} + (O_{2,ij}(\varepsilon)), \quad (2.28)$$

Здесь все компоненты тензоров $O_{1,ij}$ и $O_{2,ij}$ имеют порядок ε или меньше. Удерживая слагаемые порядка единицы, перепишем скорость сдвига $\dot{\gamma}$ и тензор вязких напряжений τ_m как вторые инварианты соответствующих тензоров:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}, \quad \tau_m = \sqrt{(\tau_{13})^2 + (\tau_{23})^2} \quad (2.29)$$

Используя (2.25)–(2.28) для того, чтобы переформулировать уравнения (2.23), (2.24), получаем, с точностью до членов высшего порядка по ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + Bu\rho_m = \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ Bu &= \frac{\rho_0^0 gd^2}{\mu_0 U}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Предполагается, что распределение трейсеров жидкостей по ширине канала является однородным, поэтому плотность смеси жидкостей является функцией только от x и y : $\rho_m = \rho_m(x, y)$. Первое и второе уравнения системы (2.30) могут быть проинтегрированы по z для получения следующих

соотношений:

$$\begin{aligned}\tau_{13} &= zl_x, \quad \tau_{23} = zl_y, \quad \tau_m = |z| |\nabla p_f|, \\ l_x &= \frac{\partial p}{\partial x}, \quad l_y = \frac{\partial p}{\partial y} + \text{Bn} \rho_m, \quad |\nabla p| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Соотношения (2.31) показывают, что компоненты тензора вязких напряжений τ_m зависят линейно от координаты z при течении в канале под действием продольного градиента давления. Координата $z_y < w/2$, полученная путем приравнивания предела текучести τ_y и вязких напряжений τ_m , определяет пластическую область $|z| < z_y$, где среда движется как твердое тело без деформаций и с нулевой скоростью деформаций ($e_{ij} = 0$): $z_y = \text{Bn} \tau_y / |\nabla p|$. Заметим, что течение полностью останавливается, если $z_y \geq w/2$, и тогда ненулевой поток будет обеспечиваться при выполнении условия $|\nabla p| > \text{Bn} \tau_y / w$. Выражения для компонент скорости u и v в терминах градиента давления могут быть получены с учетом условия симметрии относительно срединной плоскости трещины:

$$u = \frac{w^2 l_x}{8\mu_m} \left(\left[\frac{z}{w/2} \right]^2 - 1 - \frac{4\text{Bn}\tau_y}{w|\nabla p|} \left[\frac{|z|}{w/2} - 1 \right] \right), \tag{2.32}$$

$$v = \frac{w^2 l_y}{8\mu_m} \left(\left[\frac{z}{w/2} \right]^2 - 1 - \frac{4\text{Bn}\tau_y}{w|\nabla p|} \left[\frac{|z|}{w/2} - 1 \right] \right). \tag{2.33}$$

Заметим, что выражения для компонент скорости (2.32), (2.33) нелинейно зависят от компонент градиента давления l_x , l_y в отличие от случая течения ньютоновской жидкости ($\text{Bn} = 0$), где нелинейные члены отсутствуют. Профиль скорости течения бингамовской жидкости в узком канале схематично представлен на Рис. 2.3.

Далее производится осреднение поперек канала с целью сведения исходной системы уравнений к системе двумерных уравнений в терминах осредненных переменных:

$$\langle f \rangle(x, y, t) = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} f(x, y, z, t) dz \tag{2.34}$$

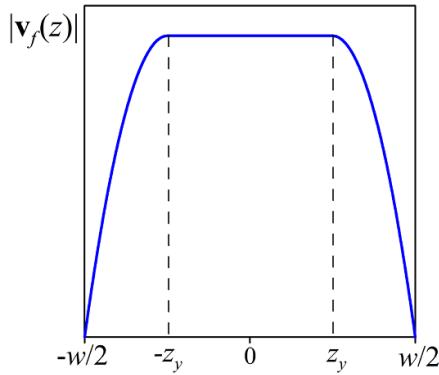


Рис. 2.3: Профиль скорости при течении бингамовской жидкости в плоском канале.

Уравнения (2.14), (2.15), (2.32) и (2.33) осредняются с помощью (2.34) и условий прилипания на стенах (2.18) (здесь и ниже индекс ‘ f ’ у давления p опущен для краткости):

$$\frac{\partial w C_i}{\partial t} + \operatorname{div}(w C_i \langle \mathbf{v} \rangle) = -2C_i v_l, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.35)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{w^3}{12\mu_m} [\Phi(\vartheta) (\nabla p + \text{Bu} \rho_m \mathbf{e}_2)]\right) = \frac{\partial w}{\partial t} + 2v_l, \quad (2.36)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{w^2}{12\mu_m} [\Phi(\vartheta) (\nabla p + \text{Bu} \rho_m \mathbf{e}_2)], \quad (2.37)$$

$$\Phi(\vartheta) = 1 - 3\vartheta + 4\vartheta^3, \quad \vartheta = \frac{\text{Bn} \tau_m}{w |\nabla p|} \quad (2.38)$$

Заметим, что в (2.35)–(2.38) дифференциальные операторы ‘ div ’ и ‘ ∇ ’ действуют в плоскости (x, y) , так как было проведено осреднение в направлении z . Система полученных осредненных уравнений включает в себя гиперболические уравнения переноса для трейсеров (объемных долей) жидкости (2.35) и квазилинейное эллиптическое уравнение для давления (2.36). В случае течения ньютоновской жидкости в узком канале с плоскими стенками (ячейке Хеле-Шоу) $\Phi(\vartheta) = 1$ и существует известная аналогия с течением в пористой среде (закон Дарси для скорости жидкости) [158].

Согласно обезразмериванию (2.21), область течения представляет собой $(x, y) \in [0, 1] \times [0, H/L]$, где H – высота трещины (ячейки Хеле-Шоу), и

предполагается, что $H \sim L$, так что по всей высоте трещины применимо приближение тонкого слоя.

Для гиперболических уравнений (2.35) задаются граничные условия на значения концентрации (трейсеры) жидкостей во входном сечении и начальное распределение жидкостей:

$$x = 0 : C_i^{in} = C_i(y, t), i = 0, 1, 2; \quad (2.39)$$

$$t = 0 : C_{i0}(x, y), i = 0, 1, 2 \quad (2.40)$$

Эллиптическое уравнение для давления (2.36) требует задания граничных условий первого или второго рода. На верхней и нижней границах ставятся условия непротекания для жидкостей; на входной границе задана скорость жидкости, и предполагается, что скорость на выходной границе имеет только горизонтальную компоненту (вариант “мягкого” граничного условия). Соответствующие граничные условия для давления формулируются ниже:

$$x = 0 : \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu_m}{\Phi(\vartheta)w^2}, \quad (2.41)$$

$$x = 1 : \frac{\partial p}{\partial y} = -Bu\rho_m(1, y) \Leftrightarrow \\ p(1, y) = -Bu \int_0^y \rho_m(1, s)ds \quad (2.42)$$

$$y = 0, y = h : \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (2.43)$$

Здесь $h = H/L$ – соотношение длины и высоты канала.

Конечность предела текучести смеси приводит к некоторым усложнениям в постановке задачи по сравнению со случаем течения ньютоновской жидкости: уравнение для давления (2.36) является нелинейным, и граничное условие на входе является неявным, так как правая часть уравнения (2.41) включает поправку к коэффициенту мобильности жидкости $\Phi(\vartheta)$, где ϑ зависит от локального градиента давления ∇p .

Параметр	Диапазон значений
Число плавучести Bu	$10^{-3} - 10^4$
Число Бингама Bn	$0 - 1.5$
Отношение плотностей ζ_i	$0.5 - 1$
Отношение вязостей M	$10^{-3} - 1$
Отношение ширины к длине трещины ε	$10^{-6} - 10^{-4}$
Число Рейнольдса Re	$1 - 10^4$

Таблица 2.1: Диапазон безразмерных параметров для рассматриваемого класса течений.

Диапазоны безразмерных параметров, относящихся к многофазным течениям в трещине гидроразрыва, основаны на данных из Таб. 2.2.2. Приближение тонкого слоя применимо для течений в трещине ГРП за исключением окрестности скважины в случае так называемой технологии гидроразрыва с использованием slickwater (дословно, с помощью маловязкой гидроразрывной жидкости) при больших скоростях закачки.

2.2.3 Численная реализация модели течения с пределом текучести

Уравнения (2.35, 2.36) решаются численно конечно-разностным методом на разнесенной однородной прямоугольной сетке Ω_{NM} :

$$\Omega_{NM} = \{(x_i, y_j, t^n), x_i = ih_x, y_j = jh_y, t^n = t^{n-1} + \Delta t_n\}, \quad (2.44)$$

$$h_x = 1/N, h_y = H/(LM), i = 0...N, j = 0...M, n > 0$$

Здесь N и M – номера сегментов сетки в направлениях координат x и y , а h_x и h_y – соответствующие шаги сетки и $\Delta t_n > 0$ – шаги по времени. Концентрации и давление определяются в узлах сетки $C_{\omega,ij}^n = C_{\omega}(x_i, y_j, t^n)$, $p_{ij}^n = p(x_i, y_j, t^n)$, тогда как горизонтальные и вертикальные компоненты скорости определяются в центрах соответствующих ячеек: $u_{ij}^n = u(x_{i+1/2}, y_j, t^n)$, $v_{ij}^n = v(x_i, y_{j+1/2}, t^n)$, где $x_{i+1/2} = (i + 1/2)h_x$ и $y_{j+1/2} = (j + 1/2)h_y$.

Рассмотрим дискретизацию определяющих уравнений (2.35), (2.36) на сетке (2.44). Уравнения переноса аппроксимируются с помощью явной TVD-схемы второго порядка с ограничением потоков, с использованием ограничителя потоков типа superbee [216]. Эллиптическое уравнение для давления дискретизируется с помощью стандартного 5-точечного шаблона типа “крест” с использованием центральных разностей. Поправка к коэффициенту мобильности жидкости за счет бингамовской реологии $\Phi(\vartheta)$ зависит явно от величины ϑ , обратной градиенту давления ∇p . Градиент давления аппроксимируется на большем шаблоне, покрывающем пять точек в каждом направлении для лучшей сходимости численного алгоритма в целом.

Численное решение уравнений (2.35)–(2.36) проводилось с помощью следующей полуявной схемы. На каждом шаге по времени:

1. Обновляются значения параметров жидкостей (плотность, вязкость, предел текучести) в соответствии с распределением объемных долей жидкостей в области течения;
2. Решается нелинейное уравнение (2.36) с использованием итерационного алгоритма (метод простых итераций), который состоит из следующих шагов:
 - i Проведение дискретизации уравнения (2.36), в котором нелинейный коэффициент $\Phi(\vartheta)$ вычисляется явно на предыдущей итерации (или на предыдущем шаге по времени, если это первая итерация);
 - ii Решение системы линейных уравнений на давление вариантом (реализовано несколько алгоритмов решения линейной системы);
 - iii Продолжение шагов i, ii до тех пор, пока не достигается сходимость. Условие сходимости формулируется в терминах нормы вектора, составленного из поточечных разностей давления на текущей и предыдущей итерациях, отнесенной к норме вектора, со-

ставленного из поточечных значений давления на предыдущей итерации:

$$\max_{i,j} \frac{|p_{i,j}^s - p_{i,j}^{s-1}|}{|p_{i,j}^{s-1}|} < \varepsilon_1, \quad \frac{\|p_{i,j}^s - p_{i,j}^{s-1}\|}{\|p_{i,j}^{s-1}\|} < \varepsilon_2 \quad (2.45)$$

$$\|p_{i,j}^s\| = \sqrt{\sum_{i,j} (p_{i,j}^s)^2}$$

Здесь s – номер итерации; малые параметры ε_1 и ε_2 определяют точность решения. В случае пальцевидной неустойчивости в бингамовских жидкостях в присутствие большого контраста вязкостей, для увеличения радиуса сходимости алгоритма используется метод последовательной нижней релаксации, который состоит в взвешивании давления $p_{i,j}^s$ (полученного на данной итерации путем повторения шагов i-iii) и давления с предыдущей итерации $p_{i,j}^{s-1}$ с параметром релаксации ω :

$$\tilde{p}_{i,j}^s = p_{i,j}^{s-1} + \omega (p_{i,j}^s - p_{i,j}^{s-1}), \quad 0 < \omega < 1 \quad (2.46)$$

Так как метод последовательной нижней релаксации, как правило, замедляет сходимость, то он применяется только в том случае, если исходный итерационный алгоритм i-iii не сходится за заданное число итераций.

3. Расчет скорости на основе поля давления, полученного на шаге 2, и граничных условий (2.41)-(2.43);
4. Решение уравнений переноса для трейсеров жидкостей (2.35) с помощью явной схемы TVD, описанной выше.

Шаги 1-4 повторяются на каждом шаге по времени до тех пор, пока не достигается установленное время расчета.

Некоторые моменты численной реализации заслуживают более детального обсуждения. Выражение для скорости (2.37) и уравнение для давления (2.36) включают выражение для бингамовской поправки к мобильностии жидкости $\Phi(\vartheta)$, которая стремится к нулю при $\vartheta \rightarrow 0.5$, или когда

локальный градиент давления падает до порогового значения предела текучести $|\nabla p| \rightarrow B\eta\tau_y/w$ (происходит “затвердевание” жидкости). Течение локально останавливается, и численный алгоритм, описанный выше, расходится, так как происходит вырождение дискретизированного уравнения для давления [206]. Данная проблема решается путем введения регуляризации для бингамовской поправки к мобильности жидкости $\Phi_\varepsilon(\vartheta)$, так что $\Phi(0.5) = \varepsilon$, и $\|\Phi(\vartheta) - \Phi_\varepsilon(\vartheta)\| \sim \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ – любая подходящая норма. Параметр ε выбирается малым ($\varepsilon \sim 10^{-3}$) для поддержания требуемой точности расчетов и корректного описания течения вблизи зон псевдозатвердевания [206].

Описанный выше алгоритм позволяет найти решение системы уравнений напрямую. Используемый метод отслеживания границы раздела фаз с введением трейсеров (объемных концентраций) для жидкостей по сути является методом Volume-of-Fluid (VOF), который был, в частности, протестирован автором на задаче об автоколебаниях плоского фонтана в поле силы тяжести [1], и на основании сравнения с известными экспериментами был сделан вывод об эффективности указанного метода даже в случае сильно нестационарных движений межфазной поверхности.

Несмотря на то, что уравнения переноса для концентрации жидкостей решаются с помощью схемы TVD высокого разрешения, которая минимизирует численную диффузию на интерфейсе между жидкостями, тем не менее формируется узкая зона смешения жидкостей вблизи интерфейса. Ширина этой зоны искусственного смешения полностью контролируется дискретизацией и может быть минимизирована с любой наперед заданной точностью. В то же время, для обеспечения непрерывности гидродинамических параметров в этой зоне малой но ненулевой ширины, вводится выражение для вязкости смеси жидкостей μ_m как функция трейсеров (объ-

емных концентраций) жидкости:

$$\begin{aligned}\mu_m^\gamma(C_0, C_1, C_2) &= C_0 + C_1 M_1^\gamma + C_2 M_2^\gamma, \quad \gamma \neq 0; \\ M_i &= \frac{\mu_i^0}{\mu_0^0}, \quad i = 1, 2\end{aligned}\tag{2.47}$$

Теперь можно сформулировать полный набор безразмерных параметров, описывающих многофазное течение в трещине:

$$\zeta_{1,2}, \quad M_{1,2}, \quad \text{Bu}, \quad \text{Bn}.\tag{2.48}$$

Набор параметров (2.48) следует дополнить параметрами из начальных и граничных условий (2.39)–(2.43).

2.3 Валидация относительно лабораторных данных

В данном разделе будет представлено сравнение результатов численных расчетов (полученных на основе описанных выше моделей и их численной реализации) с экспериментами по гравитационной конвекции (оплыванию) и пальцевой неустойчивости в ячейке Хеле-Шоу.

2.3.1 Гравитационная конвекция

Была проведена серия численных расчетов для сравнения модели с экспериментами по гравитационной конвекции (оплыванию) в ячейке Хеле-Шоу, левая половина которой в начальный момент заполнена тяжелым маслом, а правая – воздухом [15]. Такой тестовый случай в литературе иногда называют задачей о прорыве дамбы (dam break problem), и он входит в стандартный набор задач для тестирования и верификации пакетов CFD. Ячейка Хеле-Шоу имеет размеры $0.15m \times 0.1m \times 1.5 \cdot 10^{-3}m$ ($L \times H \times W$). В начальный момент ячейка была поставлена вертикально на меньшую из двух сторон и наполовину заполнена маслом, а затем быстро повернута на 90° . Плотность масла равна 1070 kg/m^3 , а вязкость при комнатной температуре $0.59 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Соответствующие безразмерные параметры имеют

значения: $Bu = 1$, $\zeta = 9.35 \cdot 10^{-4}$, $M = 3.1 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Bn = 0$. Промежуточные положения интерфейса между маслом и воздухом показаны на Рис. 2.4 (белая линия). Положения интерфейса, полученные в расчетах соответствующей задачи с помощью описанной выше модели, показаны на Рис. 2.4 (красная линия). В расчетах использовалась сетка 257×257 . Получено хорошее соответствие модели и эксперимента. Некоторое расхождение имеет место, по видимому, в первую очередь из-за условий эксперимента в начальный момент.

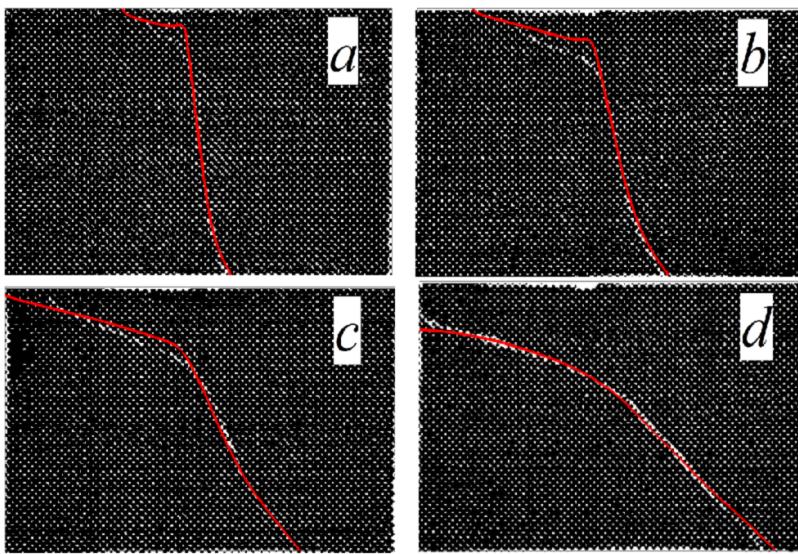


Рис. 2.4: Расчет тестового случая о прорыве дамбы (масло и воздух в ячейке Хеле-Шоу) и сравнение с экспериментом. Положения фронта при $t = 0.85$ (a), 1.7 (b), 3.4 (c), 6.8 (d). Положения фронта в эксперименте показано белой линией, а численный расчет – красной. $\zeta = 9.35 \cdot 10^{-4}$, $M = 3.1 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Bu = 1$, $Bn = 0$.

Данный тестовый случай имеет непосредственное отношение к течениям суспензии в трещине гидроразрыва. При последовательной закачке чистой жидкости (так называемая “подушка” (pad)) для раскрытия трещины, а затем суспензии, формируется конфигурация, идентичная рассмотренной в данном тестовом эксперименте. Часть трещины заполнена тяжелой суспензией, а другая часть - чистой жидкостью, и они разделены изначально вертикальным интерфейсом, который затем начинает деформироваться

в силу гравитационного оплывания. Эффект гравитационной конвекции учитывается в уравнении для давления в слагаемом с коэффициентом Bu . Также эффекты гравитационной конвекции важны при использовании технологии неравномерной закачки проппанта в трещину в тот момент, когда трещина заполнена и закачка остановлена, но трещина еще не закрылась, что создает условия для развития конвекции и перераспределения проппанта в трещине.

2.3.2 Неустойчивость Сэфмана-Тейлора при вытеснении ньютоновских жидкостей

Следующий физический эффект, который является весьма значимым для нефтесервисных приложений, это неустойчивость Сэфмана-Тейлора (С-Т) при вытеснении жидкостей с различными вязкостями в трещине гидроразрыва (ячейке Хеле-Шоу). Неустойчивость развивается, когда вязкая жидкость вытесняется с помощью менее вязкой в пористой среде или ячейке Хеле-Шоу. Малое возмущение на интерфейсе растет со временем и превращается в “палец”. Согласно линейной теории устойчивости, в отсутствие поверхностного натяжения (или любого другого диссипативного механизма, например - молекулярной диффузии, который бы подавлял коротковолновые возмущения), скорость нарастания возмущений растет неограниченно при уменьшении длины волны возмущения [158, 208]. Было показано, что в рассматриваемой постановке любое начальное возмущение развивается в “палец” с шириной $\sim Ca w/H$, где Ca – капиллярное число и w/H – отношение ширины трещины к ее высоте [209]. Так как предложенная в настоящей работе модель не учитывает ни капиллярных эффектов, ни молекулярной диффузии, то единственный механизм, который может подавлять коротковолновую неустойчивость это численная диффузия, связанная с дискретизацией исходных уравнений.

Моделирование развития неустойчивости Сэфмана-Тейлора на интер-

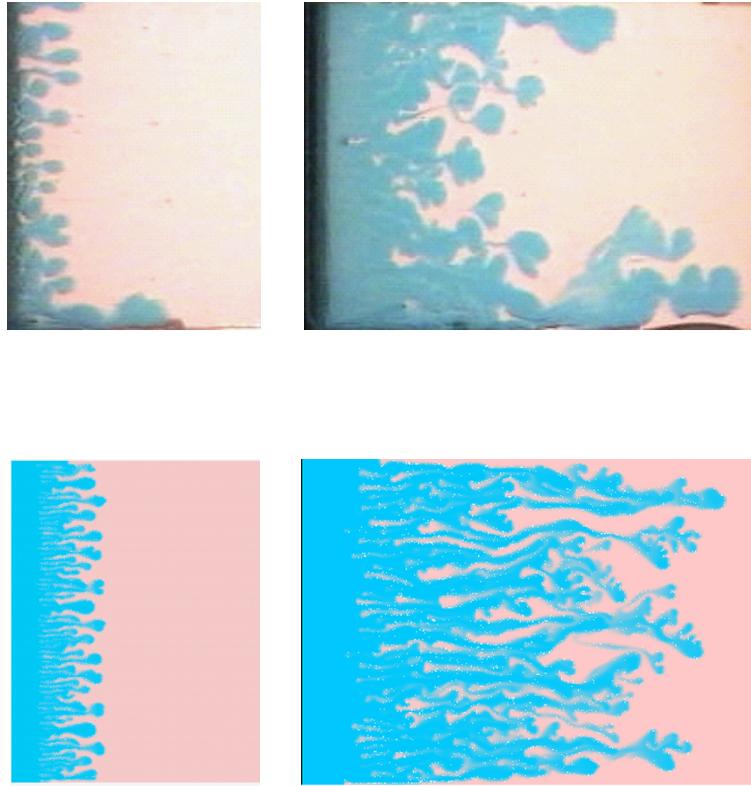


Рис. 2.5: Вытеснение в ячейке Хеле-Шоу при отношении вязкостей $M = 84$. Фотографии экспериментов [210, 211] показаны в верхнем ряду, а результаты расчетов на сетке 513×257 ($L \times H$), соответственно, в нижнем. Левая и правая колонки относятся к временем 0.4с и 1.6с. Безразмерные параметры: $Bu = 2.8 \cdot 10^{-4}$, $\zeta = 1$, $M = 84$, $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-3}$, $Bn = 0$.

фейсе между двумя жидкостями при вытеснении в ячейке Хеле-Шоу прошло валидацию относительно экспериментальных данных, представленных в [210] (Рис. 2.5, 2.6). В экспериментах водный раствор глицерина (жидкость 0) вытесняется с помощью подкрашенной воды (жидкость 1) в ячейке Хеле-Шоу размеров $0.2 \times 0.1 \times 1.2 \cdot 10^{-3}$ м ($L \times H \times W$). Эксперименты проводились в условиях микрогравитации, влияние силы тяжести было сведено к минимуму, однако исключено не полностью (это проявляется в виде гравитационного оплывания фронта, что можно видеть на левой верхней фотографии эксперимента на Рис. 2.5). Безразмерные параметры имеют значения: $Bu = 2.8 \cdot 10^{-4}$, $\zeta = 1$, $M = 1/9$ and $1/84$, $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-3}$. Скорость

закачки равна $5 \cdot 10^{-2}$ м/с.

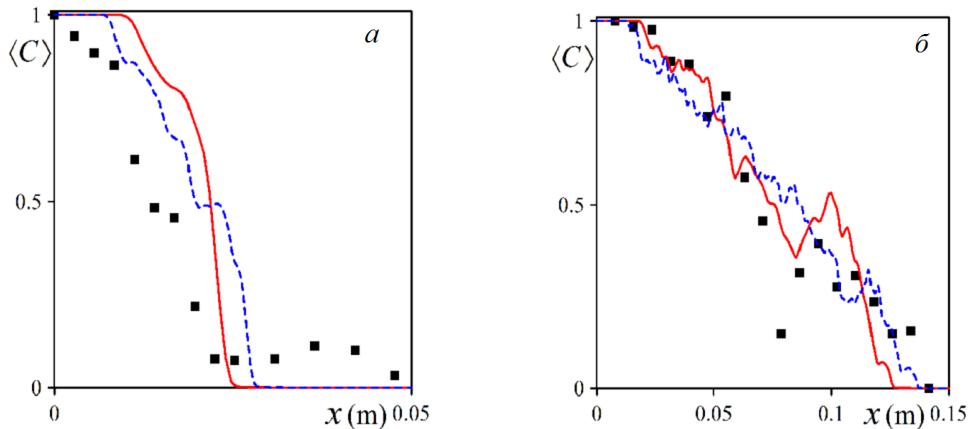


Рис. 2.6: Сравнение осредненных по высоте профилей концентрации (трейсера) вытесняющей жидкости в ячейке Хеле-Шое при отношении вязкостей $M = 84$ (a, b). Результаты получены на сетках 257×129 (сплошная линия) и 513×257 (прерывистая линия), а экспериментальные данные показаны точками [210]; $t = 0.1$ (a) and $t = 0.4$ (b).

Анализируя фронты вытеснения, показанные на Рис. 2.5, и соответствующие осредненные по высоте профили концентрации (Рис. 2.6), можно отметить, что полученная в расчетах скорость нарастания возмущений на ранних стадиях вытеснения меньше, чем в эксперименте. На более поздних стадиях развития неустойчивости наблюдается лучшее соответствие между расчетами и экспериментами в терминах ширины зоны смешения (Рис. 2.6). Скорость роста “пальцев” увеличивается и средняя ширины пальцев уменьшается с уменьшением шага сетки (с увеличением числа ячеек сетки) в силу уменьшения численной диффузии на интерфейсе. Для отношения вязкостей $M = 9$ наилучшее соответствие в общей картине неустойчивости получено для сетки 513×257 , тогда как для отношения вязкостей $M = 84$ наилучшее согласие достигается на сетке 257×129 . В эксперименте с отношением вязкостей $M = 84$ форма пальцев подвержена влиянию поверхностного натяжения в гораздо большей степени, чем в случае $M = 9$ (см.

толстые круглые пальцы на Рис. 2.5): это вызвано большей концентрацией глицерина в растворе, вытесняемом водой. Так как двумерная модель не учитывает влияние поверхностного натяжения и диффузии на развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора, подавление коротковолновой неустойчивости в окрестности интерфейса может быть воспроизведено в расчетах только с помощью соответствующего подбора размера ячеек сетки.

Хотя упрощенная двумерная модель не может воспроизвести в точности картину пальцевой неустойчивости, она может воспроизвести качественную картину развития неустойчивости. В частности, модель показывает увеличение глубины проникновения возмущений интерфейса в вытесняемую жидкость (и увеличение зоны смешения) с увеличением отношения вязкостей, что согласуется с экспериментальными данными [210].

Теперь обсудим более детально вопросы, относящиеся к моделированию развития неустойчивости Сэфмана-Тейлора.

Во-первых, требуются начальные возмущения интерфейса. В расчетах задавалось возмущение скорости закачки во входном сечении ячейки Хеле-Шоу в форме $\varepsilon_0 \sin(\sqrt{2}j)$, где j - это номер узла сетки и $\varepsilon_0 \sim 10^{-2}$ – амплитуда. Заметим, что в расчетах, показанных на Рис. 2.5, начальная ширина пальцев существенно меньше ширины слота (канала) (порядка 0.166 мм по сравнению с шириной слота 1.2 мм). В процессе развития неустойчивости, малые пальцы смыкаются и характерная ширина пальцев увеличивается до величин порядка ширины канала (около 1.5 мм), что находится в согласии с экспериментами [210]. Следует отметить, что осредненная по толщине слота модель не может претендовать на правильное воспроизведение роста очень малых пальцев, поэтому в расчетах размер ячеек сетки может быть ограничен снизу, исходя из оценки порядка аппроксимации схемы и относительной толщины слота.

Во-вторых, возникновение неустойчивости на интерфейсе между жидкостями требует верификации. Для проверки были проведены расчеты в обратной конфигурации, когда менее вязкая жидкость вытесняется с по-

мощью более вязкой жидкости. Согласно линейной теории устойчивости, интерфейс должен оставаться плоским и неустойчивость не должна развиваться. Были проведены численные расчеты вытеснения воды с помощью водного раствора глицерина. Начальное возмущение интерфейса было задано так же, как и в расчетах, представленных на Рис. 2.5. В расчетах возмущения не нарастили и интерфейс оставался плоским. Таким образом, неустойчивость, которую улавливает данный численный алгоритм, не является искусственной или каким-либо образом связанной с численной схемой, что позволяет говорить о подтверждении возможности моделировать неустойчивость Сэфмана-Тейлора с помощью данной модели, внедренной в исследовательский код. Заметим, что моделирование неустойчивости Сэфмана-Тейлора требует точного решения уравнения для давления (2.43). Было показано, что интерфейс при устойчивом вытеснении остается плоским только в случае, если точность многосеточного метода остается ниже 10^{-8} , а иначе развивается ложная (нефизичная) неустойчивость. Однаковая точность была задана во всех расчетах неустойчивости Сэфмана-Тейлора для того, чтобы обеспечить физический смысл наблюдаемой в расчетах неустойчивости.

Замечание о коротковолновой неустойчивости. В литературе хорошо известно [210, 211, 136, 138], что при развитии неустойчивости Сэфмана-Тейлора в отсутствие диссипативных механизмов (например, поверхностное натяжение, молекулярная диффузия, и др.) наиболее быстрорастущими являются коротковолновые возмущения. В настоящей модели не учитывается ни один из диссипативных механизмов, так как при использовании технологии гидроразрыва на интерфейсе между чистой жидкостью и суспензией отсутствует поверхностное натяжение, а молекулярной диффузией можно пренебречь. При численной реализации модели появляется численная диффузия на интерфейсе, которая контролируется и минимизируется с помощью схемы TVD с ограничением потоков. Величина численной диффузии контролируется размером шага сетки по пространству.

Эксп. N	Жидкость	n	K	U	μ_0	Bi	Bn
1-1	(i)	1	10^{-3}	$2.7 \cdot 10^{-2}$	1.41	4.63	0.875
1-2	(i)	1	10^{-3}	0.108	0.970	1.68	0.317
2-1	(ii)	0.535	0.218	$1.1 \cdot 10^{-2}$	2.035	9.06	1.71
3-1	(iii)	0.45	2.78	$1.1 \cdot 10^{-2}$	2.035	9.06	1.71
3-2	(iii)	0.45	2.78	0.108	0.97	1.68	0.317

Таблица 2.2: Параметры течения для экспериментов по вытеснению жидкостей Бингама в ячейке Хеле-Шоу: индекс течения n , коэффициент консистенции K в единицах Па·с ^{n} , скорость закачки U в м/с, кажущаяся вязкость μ_0 жидкости Бингама в Па·с (2.49), число плавучести (Bi) и число Бингама (Bn). Жидкость (i) – вода, (ii) – линейный полимерный гель, и (iii) – кросс-линкованный полимерный гель.

Численная диффузия подавляет коротковолновую неустойчивость и задает конечный (ненулевой) характерный размер наиболее быстрорастущих пальцев. Напомним также, что двумерная модель получена осреднением по сечению плоского канала переменной ширины $w(x, y, t)$ и характерной ширины d , и, следовательно, от модели не стоит ожидать способности описывать эффекты на масштабах, меньших d . Таким образом, данная модель не используется для описания мелкомасштабной неустойчивости, а, скорее, предложена для описания развития неустойчивости на нелинейной стадии. Мы исходим из того, что рост пальцев на линейной стадии происходит относительно быстро, а после выхода развития пальцев на нелинейную стадию описание корректно, что подтверждается сравнением с экспериментами. Это рассуждение можно продолжить и отметить, что с точки зрения первого дифференциального приближения для численной схемы расчета гиперболических уравнений для трейсеров жидкости численная диффузия соответствует слагаемым с малым коэффициентом и второй производной по пространству от концентрации, которые соответствуют молекулярной диффузии в физической модели.

2.3.3 Неустойчивое вытеснение жидкостей Бингама

В этом подразделе проведено сравнение расчетов неустойчивости Сэфмана-Тейлора при вытеснении жидкостей с пределом текучести в сравнении с экспериментами по вытеснению бингамовской суспензии в слоте (ячейке Хеле-Шоу). Параметры эксперимента таковы: прямоугольная ячейка Хеле-Шоу имеет размеры $0.2 \times 0.15 \times 3 \cdot 10^{-3}$ (м) ($L \times H \times W$), входное и выходное отверстия ширины 10^{-2} м расположены в середине вертикальных сечений. Реология бингамовской суспензии (жидкость 0), заполняющей ячейку в начальный момент времени, наилучшим образом аппроксимируется моделью Хершеля-Балкли с пределом текучести $\tau_y = 11.1$ Па, индексом течения $n = 0.732$ и коэффициентом консистенции $K = 2.535$ Па·с ^{n} .

Сравнение численных расчетов проводилось с доступными лабораторными данными по закачке различных жидкостей в ячейку Хеле-Шоу, изначально заполненную жидкостью 0: (i) вода (с вязкостью 10^{-3} Па·с); (ii) линейный гель (водный раствор полимера со степенной реологией, характеризуемой индексом течения $n = 0.535$ и коэффициентом консистенции $K = 0.218$ Па·с ^{n}); (iii) кросс-линкованный гель (степенная жидкость с $n = 0.45$ и $K = 2.78$ Па·с ^{n}). Плотность жидкости 0 в два раза больше, чем плотность жидкостей (i)-(iii). Параметры течения в эксперименте представлены в Таблице 2.2, в которой безразмерные параметры Vi и Vn рассчитываются на основе скорости закачки U и кажущейся вязкости μ_0 жидкости 0 по формулам:

$$\mu_0 = K\dot{\gamma}^{n-1}, \quad \dot{\gamma} = \frac{U}{d} \quad (2.49)$$

Здесь $\dot{\gamma}$ – характерная скорость сдвига течения. В расчетах учитывалось разжижение жидкостей при сдвиге согласно степенной реологической модели, что описывается зависимостью μ_m от локальной скорости сдвига $\dot{\gamma}$, аналогичной формуле (2.49), в которой скорость U заменена на абсолютное значение локальной скорости течения, осредненной поперек трещины $|\mathbf{v}|$.

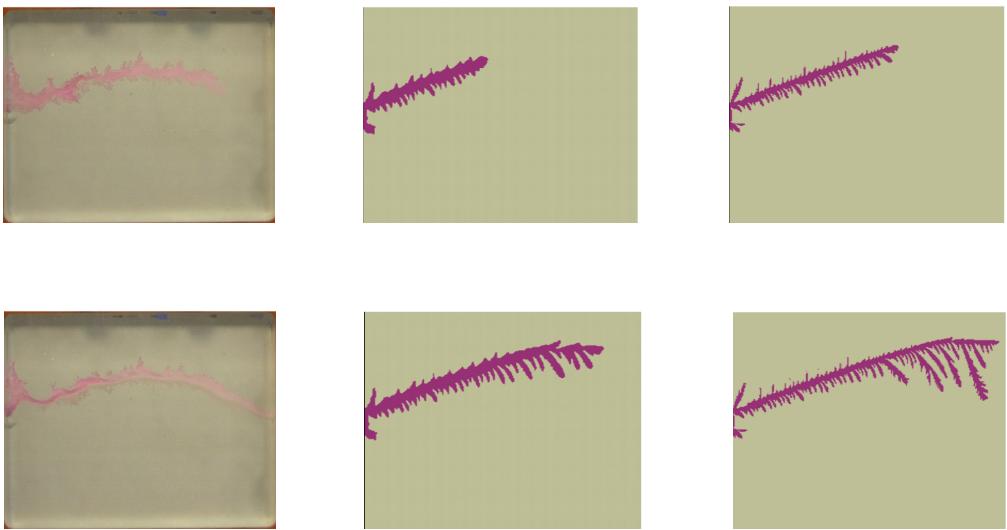


Рис. 2.7: Фотографии эксперимента (левая колонка) по закачке воды в ячейку Хелешоу, заполненную суспензией с пределом текучести в безразмерное время $t = 0.55$ (верхний ряд) и 1.1 (нижний ряд) (4с и 8с , соответственно). Результаты расчетов на сетках 257×257 и 513×513 показаны в средней и правой колонках, соответственно. Безразмерные параметры: $Bu = 4.63$ и $Bn = 0.875$, скорость закачки $2.7 \cdot 10^{-2}$ м/с, отношение вязкостей $7.05 \cdot 10^{-4}$.

Результаты расчетов можно сравнить с экспериментами по трем различным группам параметров. Во-первых, можно сравнивать качественную картину “пальцев” и их форму. Во-вторых, можно сравнивать время прорыва, за которое первая частица вытесняющей жидкости достигает противоположного края ячейки. И, наконец, в-третьих, можно сравнивать поточечно осредненные по высоте продольные профили концентрации (трейсеры) вытесняющей жидкости.

В эксперименте 1-1 кажущаяся вязкость вытесняющей жидкости принимает наименьшие значения из рассматриваемого набора данных ($\zeta = 7.05 \cdot 10^{-4}$). Вода создает канал напротив входного отверстия (Рис. 2.7), а вторичные пальцы имеют относительно малый размер. Время прорыва существенно переоценено в расчетах, и оно убывает с увеличением разрешения сетки (Таб. 2.3). В то время как форма канала предсказана довольно хорошо, расхождение между расчетами и экспериментом вызвано,

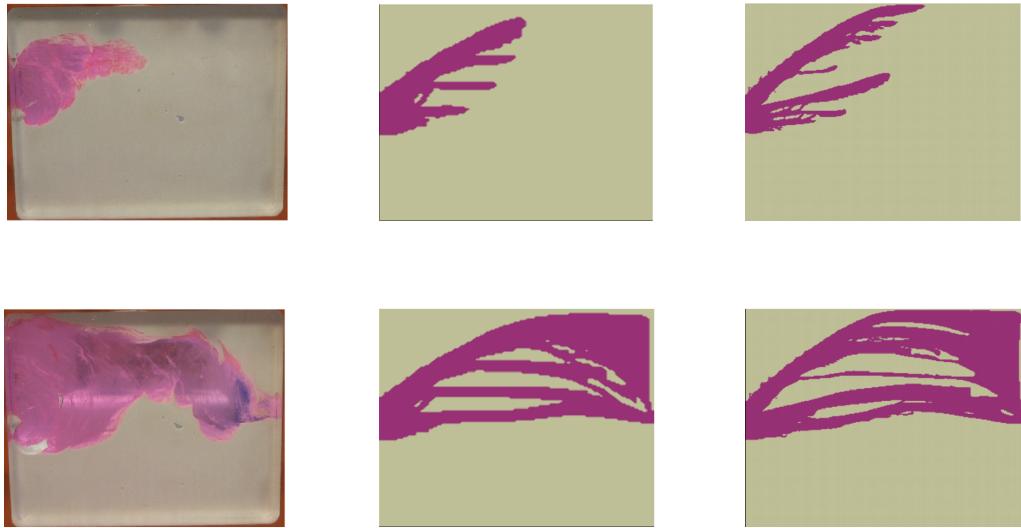


Рис. 2.8: Фотография эксперимента (левая колонка) по закачке геля в ячейку Хеле-Шоу, заполненную жидкостью с пределом текучести в безразмерные моменты времени $t = 1.65$ (верхний ряд) и 6.6 (нижний ряд) (30 с и 120 с, соответственно). Расчеты на сетках 129×129 и 257×257 показаны в средней и правой колонках, соответственно. Безразмерные параметры: $Bu = 9.06$ и $Bn = 1.71$, скорость закачки $1.1 \cdot 10^{-2}$ м/с, отношение вязкостей 0.68.

в основном, двумя факторами: (i) развитием пристеночных слоев жидкости 0 в эксперименте и (ii) развитием вторичных пальцев (особенно, вблизи выходного сечения), что приводит к увеличению осредненного по высоте профиля вытесняющей воды в эксперименте (см. Рис. 2.9). Оба фактора приводят к уменьшению скорости воды в расчетах, что проявляется в завышении времени прорыва по результатам расчетов.

С увеличением расхода канал воды становится более широким и ветвистым. Согласие между моделированием и экспериментом улучшается, несмотря на визуальную разницу в форме водного канала. Рассчитанный и осредненный по высоте профиль концентрации воды показан на Рис. 2.9. Заметим, что на обеих фотографиях водные каналы не являются полностью прозрачными, что свидетельствует о тонких слоях невытесненной суспензии на стенках ячейки Хеле-Шоу, что не учтено в осредненной по ширине канала модели (2.35), (2.36). Тем не менее, моделирование и экспе-

№	Время прорыва (сек)		Сетка
	Лаб. данные	Расчет	
1-1	4.7	10	257×257
		8.7	513×513
1-2	2.4	3.8	257×257
		2.9	513×513
2-1	23	24	129×129
		24	257×257
3-1	57	67	129×129
		55	257×257
3-2	11	9	129×129
		8.1	257×257

Таблица 2.3: Время прорыва жидкости (в секундах) для экспериментов и расчетов неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, заполненной жидкостью с пределом текучести (см. Таб. 2.2).

римент демонстрируют единую тенденцию: увеличение скорости закачки приводит к увеличению скорости нарастания вторичных пальцев.

Закачка линейного геля в эксперименте 2-1 приводит к формированию более широкого канала, состоящего из вытесняющей жидкости, по сравнению с экспериментом 1-2, где вода закачивалась с близкой скоростью. Также, канал из геля оказался практически прозрачным, что означает вытеснение жидкости с пределом текучести по всей ширине слота. Расчеты на сетке 129×129 находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, в то время как увеличение разрешения сетки приводит к появлению множества вторичных пальцев (по-видимому, это следствие отсутствия механизма отсечения коротковолновой неустойчивости в расчетах на слишком подробной сетке). Наблюдается хорошее соответствие результатов для времени прорыва (Таблица 2.3), в пределах относительной погрешности 5%, и также для осредненных по вертикали профилей концентрации. Можно отметить определенное расхождение между результатами расчетов для распределения жидкостей в слоте и фотографиями эксперимента 3-1

по закачке геля (Рис. 2.8), даже учитывая тот факт, что время прорыва совпадает с разумной точностью. На обеих сетках расчеты показывают избыточный рост пальцев и качественно иную форму канала, заполненного гелем. В эксперименте канал, заполненный гелем, имеет наибольшую ширину вблизи входного сечения, в то время как в расчетах гель полностью вытесняет жидкость 0 (с пределом текучести) из верхней половины слота в окрестности выходного сечения. Мы склонны относить это различие, также видимое на осредненных по вертикали профилях концентрации на Рис. 2.10 *b*, к необходимости более точного моделирования эффекта разжижения при сдвиге для жидкости степенной реологии, что в данной работе моделируется с помощью зависимости вязкости от локальной скорости сдвига в рамках уравнений (2.35), (2.36). В то же время, согласие между расчетами и экспериментом 3-2 гораздо лучше как для формы канала, так и для профиля концентрации и времени прорыва (Таб. 2.3). Увеличение скорости закачки геля приводит к увеличению ширины канала, и данная тенденция воспроизведена в экспериментах. Для этого случая расчеты на обеих сетках дают близкие результаты для геометрии канала, в то время как лучшее согласие для времени прорыва получено на сетке 129×129 .

Суммируя вышеизложенное, можно заключить, что численные расчеты описывают гравитационное оплыивание вполне удовлетворительно. Что касается неустойчивости Сэфмана-Тейлора, приложение модели, осредненной по ширине трещины, ограничено диапазоном малых поверхностных напряжений и малой молекулярной диффузии на интерфейсе между жидкостями. По сравнению с экспериментами, численные расчеты, как правило, дают избыточный рост возмущений. Данное рассогласование может быть минимизировано (но не полностью исключено) путем подбора соответствующего числа ячеек сетки, так что размер возмущений (пальцев) на нелинейной стадии может быть адекватно воспроизведен. Хотя количественная картина развития неустойчивости С-Т не может быть в точности воспроизведена в рамках модели (2.35), (2.36), качественное поведение и

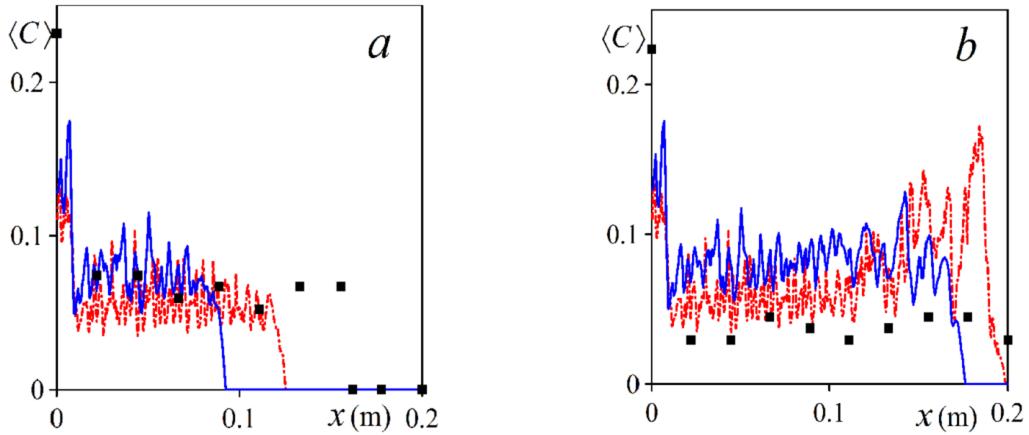


Рис. 2.9: Осредненные по высоте канала профили концентрации закачиваемой жидкости (воды), соответствующие фотографиям и графикам на Рис. 2.7 (*a*, *b*) – меньшая скорость закачки. Экспериментальные данные показаны квадратными точками, расчеты на сетках 257×257 и 513×513 – непрерывными и прерывистыми линиями, соответственно.

Эволюция возмущений при развитии неустойчивости С-Т воспроизводится вполне корректно. При вытеснении ньютоновских жидкостей, с увеличением отношения вязкостей наблюдается рост длины проникновения возмущений, а с увеличением отношения вязкости вытесняющей жидкости к вязкости вытесняемой жидкости ширина канала проникновения увеличивается.

Следует отметить, что еще одно ограничение модели состоит в том, что она не может воспроизвести развитие пристеночных слоев статичной вытесняемой бингамовской жидкости, что приводит к существенному различию картин пальцевидной неустойчивости, осредненных по высоте профилей концентрации жидкостей, и времени прорыва вытесняющей жидкости. В экспериментах, рассмотренных в данном разделе, этот эффект максимален при вытеснении водой бингамовской жидкости, в то время как при вытеснении с помощью более вязких жидкостей этот эффект менее значим.

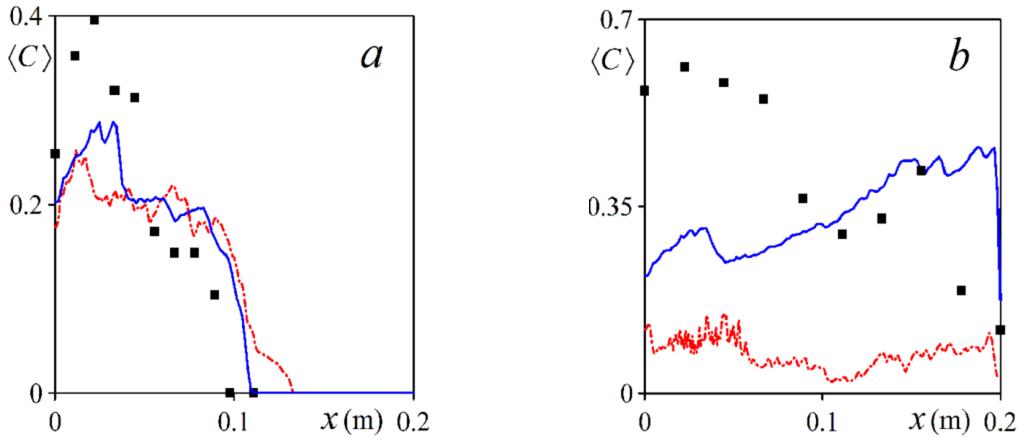


Рис. 2.10: Осредненные по высоте профили концентрации вытесняющей жидкости (воды), соответствующие фотографиям эксперимента и результатам расчета на Рис. 2.8 (a, b). Экспериментальные данные – квадратные точки, расчета на сетках 129×129 и 257×257 показаны сплошной и прерывистой линиями, соответственно.

2.3.4 Перенос и осаждение частиц с образованием осадка на дне трещины

В качестве иллюстрации корректности работы схемы был проведен расчет переноса и осаждения частиц при равномерном поперечном распределении частиц $z_0 = 1$ в канале с плоскими стенками размером 1.5 м на 16 см, шириной 5 мм. На входе задана постоянная скорость 9.63 см/с, объемная доля частиц 2%. Частицы радиуса 0.075 мм с плотностью материала 2600 кг/м³. Безразмерные параметры для данного случая равны $Bi = 848$, $\zeta_p = 2.6$. Данные параметры соответствуют эксперименту по осаждению частиц, проведенному в плоском канале лабораторных размеров в Новосибирском технологическом центре Шлюмберже. На Рис. 2.11 показаны результаты численных расчетов двумерной системы уравнений (3.91)–(3.95) в сравнении с результатами эксперимента, а также с аналитической формулой для высоты осадка в момент времени 186 с. Рисунок 2.11 демонстрирует хорошее соответствие между численными расчетами, аналитической

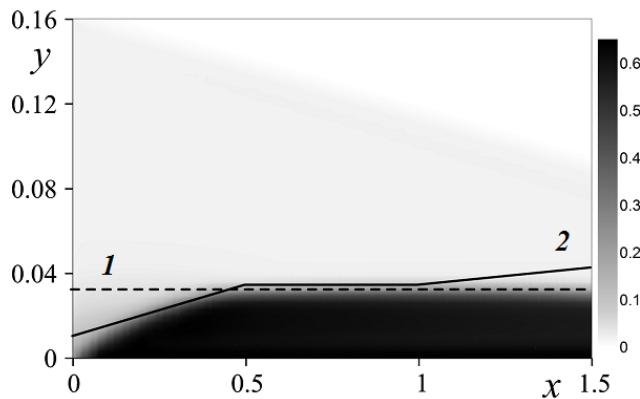


Рис. 2.11: Распределение концентрации частиц в лабораторной трещине с размерами 0.16×1.5 м, полученное численно: 1 – аналитическое решение для высоты осадка, 2 – эксперимент. Справа показана шкала концентрации частиц в численном решении.

теорией и экспериментом. Небольшое расхождение с экспериментом вблизи выходного сечения обусловлено различием в граничных условиях, так как в эксперименте было небольшое препятствие на дне канала в выходном сечении, которое привело к накоплению частиц и увеличению высоты осадка. Формула для роста осадка получена из закона сохранения массы для частиц в квазидномерном приближении при предположениях, что высота не зависит от продольной координаты и объемная доля частиц над слоем осадка в точности равна концентрации во входном сечении

$$H = t \frac{2a^2(\rho_p - \rho_f)g}{9\mu_0} \frac{C_p}{C_{max}} \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}}\right)^{\alpha-1}, \quad \alpha = 5, \quad C_{max} = 0.65$$

2.4 Результаты по вытеснению бингамовских жидкостей и обсуждение

С использованием модели, изложенной в разделах 2.1-2.2, было проведено параметрическое исследование последовательной закачки нескольких жидкостей в ячейку Хеле-Шоу. Целью исследования было определение оптимального сценария закачки, который бы приводил к формированию

пальцев вытесняющей жидкости в вытесняемой бингамовской жидкости. Технологическое приложение данного сценария состоит в формировании так называемой системы поддерживающих островов суспензии гидроразрывной жидкости с проппантом в трещине гидроразрыва. После закрытия трещины эти острова не дают трещине полностью сомкнуться, а промежутки между ними (бывшие пальцы вытесняющей жидкости) создают высокопроводящие каналы для углеводородов из глубин пласта к трещине. Такая конфигурация может возникать в трещине в результате по-переменной закачки порций (слагов) чистой жидкости и порций суспензии (alternate-slug fracturing). Пример – технологии HiWAY Channel Fracturing Technique [94]. Ниже предпринята попытка смоделировать получение высокопроводящих каналов в трещине как результат развития неустойчивости Сэфмана-Тейлора.

Целью параметрического исследования, таким образом, является определение конкретной последовательности закачки жидкостей, которая приводит к формированию каналов в вытесняемой жидкости с пределом текучести (суспензии кросс-линкованной гидроразрывной жидкости с проппантом). В данном исследовании рассматривается последовательная закачка трех жидкостей в модельную трещину (ячейку Хеле-Шоу) размеров $70m \times 70m$, скорость закачки $4.76 \cdot 10^{-2} m/s$, остальные параметры: $M_1 = 1.43$, $M_2 = 8.72 \cdot 10^{-4}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 8.57 \cdot 10^{-5}$, $Bu = 12.9$, $Bn = 1.43$. Моделируется следующая последовательность закачки:

$$\text{Fluid 0 (0.102) - Fluid 1 (0.02) - Fluid 2 (0.115)}, \quad (2.50)$$

где безразмерная длительность закачки показана в скобках. Плоский канал в начальный момент времени заполнен жидкостью 1. Жидкость 0 имеет реологию Бингама, жидкости 1 и 2 – ньютоновские с плотностью в два раза меньшей, чем жидкость 0; вязкость жидкости 0 на три порядка больше, чем вязкость жидкостей 1 и 2. На Рис. 2.12 распределение жидкостей восстановлено по следующему правилу: цвет в каждом узле показывает

присутствие жидкости с максимальным значением концентрации в данном узле сетки. В базовой конфигурации два эффекта влияют на процесс вытеснения: гравитационная конвекция (оплывание) и развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора. Обнаружено, что в отсутствие развития пальцевой неустойчивости не формируются зоны движения бингамовской жидкости, в которых не превзойден предел текучести (так называемые области псевдозатвердевания): жидкость 0 подвержена сдвигу во всей области течения, и острова бингамовской жидкости ведут себя как ньютоновская жидкость заданной пластической вязкости. Эффекты конечного предела текучести становятся важными в случае, когда развивается неустойчивость Сэфмана-Тейлора. При проникновении “пальцев” маловязкой жидкости в область, занятую бингамовской жидкостью, скорость последней уменьшается, что приводит к уменьшению локального градиента давления. Как следствие, поправка к мобильности жидкости уменьшается и бингамовская жидкость переходит в псевдозатвердое состояние, что только усиливает рост пальцев вытесняющей жидкости в сторону области, занятой бингамовской жидкостью..

Также обнаружено, что после того как закачка остановлена, псевдозатвердевание бингамовской жидкости существенно уменьшает гравитационное оплывание. Ниже мы попробуем отделить влияние гравитационного оплывания и псевдозатвердевания на развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора. Рассмотрим распределение жидкостей в плоском канале в результате последовательной закачки согласно следующей схеме: закачивается ньютоновская жидкость 2 в плоский канал, заполненный бингамовской жидкостью 0 в отсутствие гравитационного оплывания (плотности жидкостей равны: $Bu = 25.8$ и $\zeta = 1$). В Таб. 2.4 представлена статистика распределения длины пальцев, отнесенной к ширине канала. Показано, что в отсутствие гравитационного оплывания увеличение числа Бингама приводит к увеличению эффекта взаимного влияния пальцев друг на друга (shielding effect of fingers): длинные пальцы имеют тенденцию оттеснять ма-

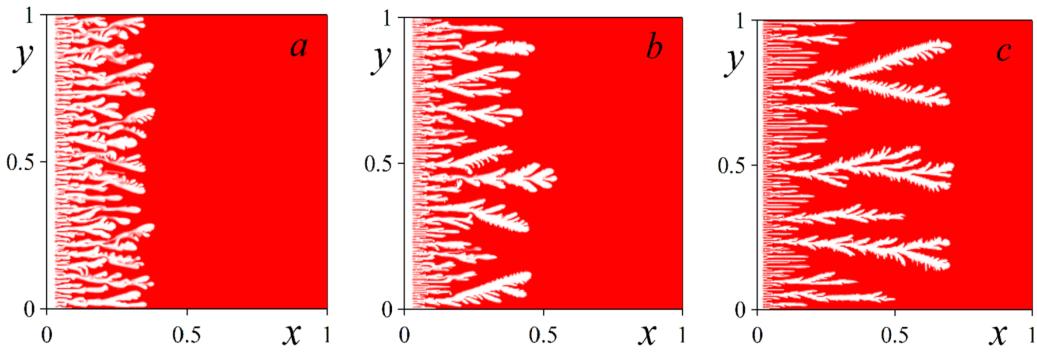


Рис. 2.12: Распределение жидкостей при закачке ньютоновской жидкости (жидкость 2) в плоский канал, заполненный бингамовской жидкостью (жидкость 0) при $Bn = 0.36$ (a), $Bn = 1.43$ (b) и $Bn = 5.72$ (c). Плотности жидкостей заданы равными, чтобы предотвратить гравитационную конвекцию. Сетка 513×513 ($L \times H$), безразмерное время 0.203.

Параметр \ Bn	0.36	1.43	5.72
$M_f(l)$	0.133	0.184	0.238
$D_f(l)$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$
$L_f(l)$	0.2	0.25	0.69

Таблица 2.4: Статистика по длинам пальцев l в численных расчетах по развитию неустойчивости Сэфмана-Тейлора в жидкостях с пределом текучести *в отсутствие* гравитационного оплывания (Рис. 2.12): средняя длина пальцев $M_f(l)$, среднеквадратичное отклонение длины пальцев $D_f(l)$ и длина проникновения $L_f(l)$.

ленькие пальцы, которые в результате останавливаются. В результате, в силу развития неустойчивости зона смешения становится шире. С увеличением числа Бингама, число пальцев уменьшается. Это наблюдение находится в согласии с результатами исследования [74], где рассматривалась неустойчивость Сэфмана-Тейлора для жидкостей с пределом текучести в ячейке Хеле-Шоу в линейной постановке и подобный эффект взаимного влияния пальцев был установлен.

И наконец, было также изучено влияние предела текучести на развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора в присутствии силы тяжести. Результаты

Параметр \ Вн	0.36	1.43	5.72
$M_f(l)$	0.08	0.086	0.103
$D_f(l)$	$7 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
$L_f(l)$	0.23	0.27	0.36

Таблица 2.5: Статистика по длинам пальцев l в численных расчетах по развитию неустойчивости Сэфмана-Тейлора в жидкостях с пределом текучести с учетом гравитационного оплывания (Рис. 2.13): средняя длина пальцев $M_f(l)$, среднеквадратичное отклонение длины пальцев $D_f(l)$, и длина проникновения $L_f(l)$. Только те пальцы рассматриваются, которые пересекают “остров” бингамовской жидкости, в то время как наиболее длинные пальцы в верхней части расчетной области не включаются в рассмотрение.

ты расчетов для последовательности закачки (2.50) для различных значений предела текучести жидкости 0 (безразмерные параметры $Bn = 0.36$ и $Bn = 5.72$) представлены на Рис. 2.13. Конфигурация начальных возмущений в расчетах с учетом (Рис. 2.13) и без учета силы тяжести (Рис. 2.12) была задана одинаковой, однако результирующие распределения пальцев сильно отличаются. В отсутствие гравитационного оплывания формируется большое количество пальцев, распределенных по всей высоте канала. В случае учета силы тяжести, когда более легкая ньютонаовская жидкость вытесняет более тяжелую бингамовскую жидкость, пальцы развиваются по другому закону: большая порция вытесняющей жидкости прорывается в верхней части канала, в то время как более мелкие пальцы развиваются по всей высоте канала. Кроме того, в отсутствие гравитационного оплывания, формируется большое количество вторичных пальцев, так что структура пальцев оказывается существенно более ветвистой, чем в случае большого контраста плотностей. В соответствии со статистикой распределения длины пальцев (Таблица 2.5) средняя длина пальцев и длина проникновения пальцев растут с увеличением числа Бингама. Мы приходим к заключению, что гравитационное оплывание приводит к некоторому подавлению неустойчивости Сэфмана-Тейлора.

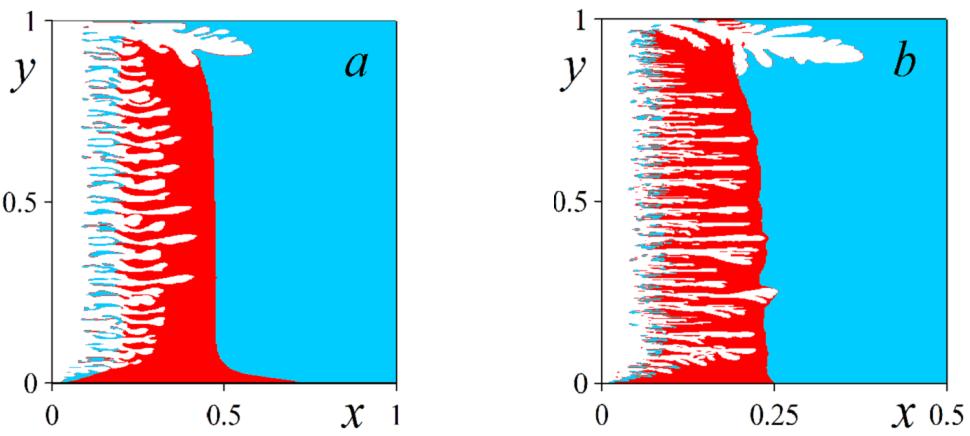


Рис. 2.13: Распределение жидкостей в плоском канале в результате закачки (2.50) с различными значениями предела текучести жидкости 0, что соответствует значениям параметров $Bn = 0.36$ (a) и $Bn = 5.72$ (b). Разрешение сетки – 513×513 .

2.5 Основные результаты Главы 2

1. Построена квазидвумерная двухконтинуальная модель течения суспензии в тонкой вертикальной трещине гидроразрыва. По сравнению с существующими в литературе моделями, полученными в приближении эффективной жидкости, двухконтинуальные уравнения включают дополнительный дифференциальный член, содержащий объемную долю и скорость осаждения частиц. Проведен ряд численных расчетов для оценки влияния дополнительного слагаемого на перенос и оседание частиц. Показано, что различия между моделью течения суспензии, построенной ранее на основе эвристического односкоростного подхода, и двухконтинуальной моделью, предложенной в данной работе на основе законов сохранения механики многофазных сред, являются существенными для описания переноса програнта, однако (по результатам предварительного исследования сопряженной задачи) они оказывают малое влияние на закон роста трещины гидроразрыва. В дальнейшем представляют интерес учет полидисперсности суспензии и взаимодействия частиц между собой, сравнение предложенной

модели с экспериментом, а также более детальное исследование сопряженной задачи о росте трещины гидроразрыва и о транспорте частиц в рамках двухскоростной модели течения суспензии, предложенной в данной работе.

Результаты раздела опубликованы в [33, 5, 41].

2. Проведено обобщение модели вытеснения нескольких жидкостей в трещине гидроразрыва на случай жидкостей бингамовской реологии с пределом текучести. Модель учитывает эффекты развития неустойчивости Сэфмана-Тейлора на интерфейсе между жидкостями и эффекты гравитационной конвекции, а также формирование областей псевдозатвердевания бингамовской жидкости там, где не превзойден предел текучести. Численная реализация построенной модели проведена с помощью многосеточного метода для решения нелинейного эллиптического уравнения для давления и схемы повышенного порядка точности (TVD) с ограничением потоков для гиперболических уравнений переноса объемных долей жидкостей. Для моделирования методом сквозного счета в областях псевдозатвердевания бингамовской жидкости использовалась процедура регуляризации.

Модель и ее численная реализация прошли валидацию на 4 различных наборах экспериментальных данных: (i) гравитационное оплыивание тяжелой жидкости в легкой (тестовая задача о прорыве вертикальной перегородки, разделяющей жидкости разной плотности в ячейке Хеле-Шоу); (ii) неустойчивость Сэфмана-Тейлора на интерфейсе между ньютоновскими жидкостями (вода и водный раствор глицерина) в ячейке Хеле-Шоу в условиях малой силы тяжести; (iii) перенос и осаждение частиц при течении суспензии в вертикальной ячейке Хеле-Шоу с осаждением частиц и образованием осадка на дне канала; и (iv) развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора на интерфейсе между ньютоновской и бингамовской жидкостями при вытеснении в вертикальной ячейке Хеле-Шоу.

Получено хорошее согласие между моделированием и экспериментом для гравитационного оплыивания, а также для задачи о формировании осадка (где, помимо моделирования и эксперимента, проведено сравнение

с аналитической формулой для эволюции высоты осадка со временем). В то же время, численное моделирование развития пальцевидной неустойчивости показало избыточный рост пальцев для большинства рассмотренных случаев. Несмотря на то, что осредненная по ширине модель вытеснения жидкостей выведена с учетом целого набора упрощающих предположений, она все же позволяет описать ключевые качественные особенности развития неустойчивости Сэфмана-Тейлора: увеличение длины проникновения пальцев с увеличением отношения вязкости в ньютоновских жидкостях, а также увеличение ширины канала вытесняющей жидкости, прорывающееся внутрь вязкопластичной жидкости с пределом текучести при уменьшении отношения вязкостей жидкостей. Разрешение сетки может быть подобрано для лучшего воспроизведения масштаба ширины пальцев на нелинейной стадии, который, при фиксированном отношении вязкостей, в реальных течениях должен зависеть от капиллярного числа и диффузионного числа Пекле.

В рамках параметрического исследования закачки последовательности нескольких жидкостей был проведен анализ влияния бингамовской реологии на вытеснение жидкостей и развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора. Показано, что в отсутствие неустойчивости на интерфейсе зоны псевдозатвердевания не формируются и, следовательно, бингамовская жидкость ведет себя как ньютоновская. При наличии пальцевидной неустойчивости на интерфейсе, в области, занятой бингамовской жидкостью, появляются зоны псевдозатвердевания. Предел текучести подавляет гравитационное опливание на границе между тяжелой и легкой жидкостями, поэтому скорость опливания бингамовской жидкости всегда меньше, чем для ньютоновской жидкости с теми же параметрами в отсутствие предела текучести. Увеличение числа Бингама приводит к увеличению эффекта взаимного влияния пальцев: малые пальцы вытесняющей жидкости имеют тенденцию к остановке, так что длина проникновения пальцев и их средняя длина увеличиваются. Расчеты показали, что в случае, когда оба эффекта

(гравитационное оплывание и неустойчивость Сэфмана-Тейлора) учтены, гравитационная конвекция подавляет неустойчивость на интерфейсе.

Модель течения в ячейке Хеле-Шоу, построенная в настоящем разделе, внедренная в виде исследовательского кода и прошедшая валидацию на лабораторных данных, может быть использована для описания вытеснения бингамовских суспензий в случае, если осаждением частиц можно пренебречь (небольшой контраст плотностей частиц и несущей жидкости либо относительно большой предел текучести, так что большинство частиц сосредоточено в псевдотвердом ядре течения).

Результаты данного раздела опубликованы в [9, 36, 15, 39, 19, 40, 24, 27]. На основе результатов моделирования, представленных в настоящей главе, было получено 6 патентов на изобретения [42]-[48].

Глава 3

Миграция частиц при течении супензии в трещине

При моделировании течения супензии в трещине можно выделить три существенно различных характерных масштаба длины: размер частицы, ширина трещины и длина (высота) трещины. В предыдущей главе квазидвумерные модели получены на самом большом масштабе длины путем осреднения параметров течения поперек трещины с учетом известного профиля концентрации частиц. Практически во всех предыдущих работах миграцией частиц поперек трещины пренебрегалось и профиль концентрации предполагался однородным.

В то же время, поперечная миграция частиц при течении супензии в узком канале может быть очень существенным явлением, обусловленным различными механизмами в зависимости от порядка величины объемной доли частиц. На масштабе порядка радиуса частицы возникает задача об определении боковой силы на частицу, осаждающуюся в горизонтальном течении Пуазейля через канал с вертикальными плоскими стенками (раздел 3.1). Данная задача является базовой в проблеме моделирования эффектов поперечной миграции частиц при транспорте супензий в трещине гидроразрыва. После определения боковой силы может быть поставлена плоская задача о поперечной миграции частиц и нахождении профиля концентрации поперек трещины (разделы 3.2 и 3.2), который затем может быть использо-

ван при осреднении асимптотических уравнений и построении двумерной осредненной модели переноса и осаждения частиц в трещине на масштабе длины и высоты трещины (раздел 3.4).

Так как минимальное главное напряжение в пласте, как правило, направлено горизонтально, трещина гидроразрыва находится в вертикальной плоскости и хорошо аппроксимируется моделью плоского канала, то есть моделью ячейки Хеле-Шоу.

Предметом исследования в данной главе является инерционная миграция осаждающихся неброуновских частиц при горизонтальном течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле-Шоу [217].

Как упоминалось в обзоре литературы (Глава 1), общая задача о построении модели переноса и осаждения частиц в ячейке Хеле-Шоу решалась в ряде работ, в частности, в [103, 145]. В приближении тонкого слоя были получены двумерные уравнения переноса частиц, осредненные поперек канала. В большинстве работ при осреднении предполагалось, что поперечный профиль концентрации частиц является равномерным. В [103] был также рассмотрен предельный случай, когда в результате миграции частиц к центру канала на средней плоскости канала образуется слой плотно упакованных частиц. Было показано, что в этом случае закон переноса и осаждения частиц в ячейке существенно отличается от случая равномерного профиля концентрации частиц. В литературе, однако, пока отсутствуют осредненные модели переноса частиц в ячейке Хеле-Шоу, которые бы учитывали неравномерный поперечный профиль концентрации, формирующийся в результате миграции частиц. При построении такой модели требуется рассматривать течение в ячейке Хеле-Шоу на трех существенно различных характерных масштабах длины: радиус частицы, ширина ячейки и длина (высота) ячейки. Таким образом, общая задача распадается на три подзадачи: а) задача о боковой силе на частицу на масштабе радиуса частицы, б) задача о поперечной миграции частиц в горизонтальном сечении ячейки под действием боковой силы, найденной в результате решения

задачи а), и в) задача о переносе и осаждении частиц на масштабе длины (высоты) ячейки.

Как отмечалось в обзоре первой главы, задача а) по определению боковой силы на частицу в сдвиговых потоках вязкой жидкости исследовалась во многих публикациях. Однако ранее подробно не исследовалась конфигурация, важная для приложений к течению в трещине гидроразрыва, а именно: оседание частицы (т.е. относительная скорость частицы) направлено перпендикулярно плоскости вектора скорости несущей фазы и его градиента.

Сравнительно меньшее число работ посвящено решению задачи б) о континуальном моделировании инерционной миграции частиц при течении суспензии в каналах. Обзор работ по двухконтинуальному описанию течений разреженных дисперсных сред в пограничном слое в приложении к течениям запыленного газа можно найти в [218, 219]. Задача о миграции частиц под действием классической силы Сэфмана исследовалась в рамках лагранжева подхода в случае течения запыленного газа в канале [223], а также в рамках эйлерова подхода в случае течения разреженной суспензии в пограничном слое [224]. Было показано, что поперечный профиль числовой концентрации частиц содержит неинтегрируемую особенность на стенке канала, которая была впервые обнаружена в задаче о течении запыленного газа в пограничном слое с учетом только силы Стокса [221]. В работе [224] было высказано предположение, что сингулярность в профиле концентрации частиц на стенке канала не разрешается с учетом силы Сэфмана, и было предложено рассмотреть модель суспензии с учетом конечной объемной доли частиц. Однако, как будет показано ниже (см. [2]), в задаче о миграции частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке канала неинтегрируемая особенность в поле концентрации частиц может быть разрешена с учетом поправки к силе Сэфмана за счет присутствия стенок.

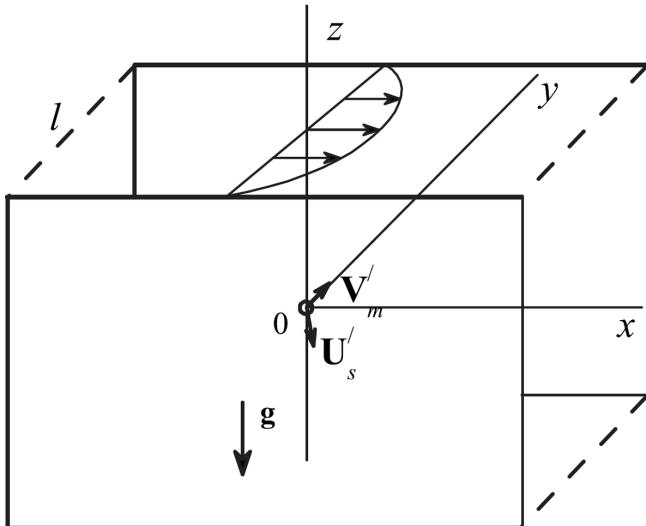


Рис. 3.1: Перенос и осаждение частицы при течении Пуазейля через канал с вертикальными плоскими стенками.

3.1 Боковая сила на одиночную частицу, оседающую в горизонтальном течении в трещине

Как обсуждалось в Главе 1, миграция одиночной частицы при малых числах Рейнольдса в сдвиговых течениях ньютоновской жидкости рассматривалась во многих теоретических исследованиях. В данном разделе мы будем рассматривать случай, в котором частица осаждается при горизонтальном течении жидкости через плоский канал с вертикальными стенками (Рис. 1.1). В такой конфигурации задача о поиске боковой силы на осаждающуюся частицу в сдвиговом потоке ранее не рассматривалась.

Миграция одиночной частицы, движущейся с ненулевой скоростью проскальзывания по отношению к основному течению, вызвано малой инерционностью жидкости. Когда число Рейнольдса частицы мало $\text{Re}_s = aU'_s/\nu \ll 1$, то инерционные члены в уравнениях Навье-Стокса малы по сравнению с вязкими членами на масштабе длины порядка радиуса частицы a от центра частицы (внутренняя область). Здесь U'_s – размерный масштаб скорости проскальзывания (скорость центра частицы относительно невозму-

щенной скорости жидкости в этой точке), ν – кинематическая вязкость жидкости, штрих использован в этом разделе для обозначения размерных переменных. В первом приближении по R_s , возмущенное течение во внутренней области описывается уравнениями Стокса. Однако, порядок величины инерционных членов падает с расстоянием медленнее, чем порядок величины вязких членов. Эти слагаемые имеют одинаковый порядок величины на значительных расстояниях от сферы (во внешней области). Для возмущенного течения масштаб длины внешней зоны дается озеновской длиной $L^{Os} = a/\text{Re}_s = \nu/U'_s \gg a$.

Теоретические исследования миграции частиц из-за эффектов инерции жидкости, как правило, основаны на решении уравнений Навье-Стокса с помощью методов возмущений. В работе [75] рассматривалась миграция не нейтрально плавучей частицы при ее движении в линейном сдвиговом потоке на расстояниях от стенки d много больших, чем радиус частицы: $a \ll d \ll L^{Os}$. Боковая сила была выражена с помощью функции Грина. Боковая сила была получена также для линейного и параболического профилей скорости [104, 184, 76]. Регулярные разложения применялись и в случае, когда $d \sim a$.

Для неограниченного сдвигового потока был предложен в [159] другой масштаб длины во внешней области $L^{Sa} = (\nu/G)^{1/2}$, основанный на масштабе скорости сдвига G . В указанной работе было показано, что влияние частицы во внешней области эквивалентно точечной силе, приложенной к жидкости в центре сферы. Уравнения типа Озенна, описывающие возмущенное течение во внешней области, решались с помощью преобразования Фурье. Частица производит возмущение течение во внешней области, которое приводит к формированию малой боковой поправки к равномерному полю скорости во внутренней области. Скорость миграции в направлении сдвига рассчитывалась для частицы, движущейся параллельно линиям тока неограниченного течения, в приближении сильного сдвига, когда два малых числа Рейнольдса, посчитанных по скорости проскальзывания и

скорости сдвига, связаны соотношением:

$$\text{Re}_s \ll \text{Re}_p^{1/2} = a(G/\nu)^{1/2} \ll 1. \quad (3.1)$$

Это неравенство означает, что линейное сдвиговое течение доминирует над однородным течением во внешней области. В случае, когда сфера движется в произвольном направлении в сдвиговом потоке, другие компоненты скорости миграции были также найдены для случая течения сильного сдвига [101]. Боковая сила равна нулю в неограниченном линейном сдвиговом потоке, когда скорость проскальзывания перпендикулярна плоскости, в которой лежат скорость жидкости и градиент скорости, что соответствует конфигурации осаждения частицы в трещине с той разницей, что в трещине есть стенки. В работах [56, 120] было снято ограничение Сэфмана (3.1) на относительную величину двух чисел Рейнольдса и был рассмотрен общий случай произвольного соотношения чисел Рейнольдса. Было получено выражение для скорости миграции частицы, которая движется параллельно линиям тока в неограниченном сдвиговом потоке, в терминах параметра проскальзывания: $\chi = \text{Re}_s/\text{Re}_p^{1/2}$. Скорость миграции достигает максимума в пределе сильного сдвига, когда $\chi \ll 1$, и очень мала, порядка $\chi^{-5} \ln \chi$, в противоположном пределе слабого сдвига $\chi \gg 1$.

В работах [106, 55] рассматривалась инерционная миграция не нейтрально плавучих частиц, осаждающейся в течении в вертикальном канале. В этом случае, миграция происходит за счет следующих двух эффектов: озеновской инерционной миграции и влияния стенки. Коэффициент боковой силы и равновесные положения частицы были рассчитаны как функции параметра проскальзывания и числа Рейнольдса канала $\text{Re}_c = U'_m l / \nu$, где l и U'_m – ширина канала и максимальная скорость. Когда число Re_c велико, влияние стенок значительно только в тонких слоях вблизи стенок с шириной порядка $l\text{Re}_c^{-1/2}$ [55]. В ядре течения, за исключением пристеночных слоев, влияние стенок пренебрежимо мало, и поле возмущений во внешней области может рассматриваться как неограниченное. Влияние кривизны

профиля скорости на боковую силу оказывается значительным.

Целью данного раздела является расчет скорости миграции не нейтрально плавучей частицы, осаждающейся в горизонтальном течении вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, ограниченном вертикальными плоскими непроницаемыми стенками. Можно было бы ожидать, что влияние стенок при больших Re_c будет важно только в тонких пристеночных слоях. В ядре течения боковая сила ожидается малой в рассматриваемой конфигурации, так как она равна нулю в неограниченном потоке. Однако, будет показано, что локальный максимум скорости миграции достигается на расстояниях порядка $Re_c^{-1/3}$ от срединной линии канала за счет комбинированного эффекта проскальзывания, линейного сдвига, и кривизны невозмущенного профиля скорости. Коэффициент боковой силы имеет одинаковый порядок величины по всей ширине канала. Это означает, что используемое обезразмеривание для боковой силы применимо во всей области течения поперек канала, как вблизи стенок, так и в ядре течения.

3.1.1 Постановка задачи об осаждении одиночной частицы при течении в трещине

Рассматривается движение твердой сферической частицы, осаждающейся под действием силы тяжести в стационарном горизонтальном течении вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через вертикальный канал с плоскими непроницаемыми стенками. Схема течения и система координат показаны на Рис. 3.1. Начало декартовой системы координат находится в центре сферической частицы и движется со скоростью частицы \mathbf{U}'_p . В данной системе отсчета частица покойится. Скорость жидкости по отношению к частице имеет в общем случае компоненты по координатам x и z : U'_{sx} и U'_{sz} . Радиус частицы a мал по сравнению с шириной канала l . Число Рейнольдса частицы и масштаб длины внешней области, основанный на

средней скорости сдвига $G_{av} = U'_m/l$, даются формулами:

$$\text{Re}_p = U'_m a^2 / \nu l, \quad L = a \text{Re}_p^{-1/2} = (\nu l / U'_m)^{1/2} = l \text{Re}_c - 1/2.$$

Для решения уравнений, описывающих возмущенное течение, будем использовать метод срациаемых асимптотических разложений, используя малый параметр

$$\varepsilon = R_p^{1/2} = a (U'_m / \nu l)^{1/2} \ll 1.$$

Отношение размера частицы к ширине канала и число Рейнольдса частицы, посчитанное по скорости проскальзывания и локальной скорости сдвига, также являются малыми параметрами:

$$a/l = (\text{Re}_p / \text{Re}_c)^{1/2} = \varepsilon \text{Re}_c^{-1/2} \ll 1, \quad \text{Re}_s \sim \varepsilon \ll 1.$$

Другие безразмерные группы, такие как $U_{sx} = U'_{sx}/U_m$, $U_s = U'_{zx}/U_m$, d/l и Re_c имеют порядок единицы, где d – расстояние частицы до ближайшей стенки. В рассматриваемом случае возмущения поля скорости за счет проскальзывания имеют больший порядок величины, чем возмущения за счет сдвига и вращения частицы, когда $|U_s| \gg \varepsilon^2$ [106].

Асимптотический анализ будет проведен аналогично методу, использованному в работе [55] при исследовании инерционной миграции частицы в вертикальном канале, когда скорость проскальзывания параллельна невозмущенному течению. Новизна данной постановки задачи в том, что скорость проскальзывания частицы перпендикулярна плоскости, в которой лежит скорость жидкости и ее градиент. Другими словами, в выбранной системе координат, связанной с движущейся частицей, скорость невозмущенного течения имеет две компоненты:

$$\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{e}_x + v'_z \mathbf{e}_z,$$

$$v'_x = U'_{sx} + U'_m \left(\gamma \frac{y'}{l} - 4 \frac{y'^2}{l^2} \right),$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z – единичные векторы x - и y -координат, соответственно, и $\gamma = 4 - 8d/l$ – безразмерная скорость сдвига в центре частицы. В первом

приближении по ε частица движется параллельно стенкам канала и ее скорость миграции, направленная по нормали к стенкам, мала по сравнению со скоростью проскальзывания. Поэтому задача может рассматриваться как квазистационарная.

Вводятся безразмерные переменные по формулам:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'/a, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'/U'_m, \quad \boldsymbol{\Omega}_p = \boldsymbol{\Omega}'_p l/U'_m, \quad \mathbf{F}_p = \mathbf{F}'_p/\mu a U'_m,$$

где \mathbf{u} – возмущение скорости жидкости, а $\boldsymbol{\Omega}_p$ и \mathbf{F}_p – безразмерные угловая скорость и сила на частицу, соответственно. Невозмущенное поле скорости в безразмерных переменных определяется формулой:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'/U'_m = \left(U_{sx} + \varepsilon \gamma y \text{Re}_c^{-1/2} - 4\varepsilon^2 y^2 \text{Re}_c^{-1} \right) \mathbf{e}_x + U_{sz} \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

В рассматриваемом случае, как отмечалось выше, частица осаждается под действием гравитации в горизонтальном невозмущенном течении, так что скорость проскальзывания перпендикулярна скорости жидкости и ее градиенту. В этом случае x -компоненты силы на частицу равна нулю. Из формулы Факсена следует, что соответствующая скорость проскальзывания имеет порядок величины U_{sx} , и ей, с точностью до малых более высокого порядка, можно пренебречь.

Безразмерные уравнения Навье-Стокса для возмущенного течения могут быть записаны в форме:

$$\varepsilon \text{Re}_c^{1/2} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Границные условия заданы следующим образом. На поверхности частицы и на стенах канала ставится условие прилипания, и предполагается, что возмущение скорости затухает вдали от частицы:

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad & \mathbf{u} = -\mathbf{v} + \varepsilon \text{Re}_c^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} = \\ & = -U_{sz} \mathbf{e}_z + \varepsilon \text{Re}_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma y \mathbf{e}_x) + 4\varepsilon^2 y^2 \text{Re}_c^{-1} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} : \quad & y = -\varepsilon^{-1} \text{Re}_c^{1/2} d/l, \quad \varepsilon^{-1} \text{Re}_c^{1/2} (1 - d/l) \\ \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0} : \quad & r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.2 Решение во внутренней области на масштабе радиуса частицы

Будем искать безразмерные возмущенные поля скорости и давления в виде асимптотических рядов по ε :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + o(\varepsilon), \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + o(\varepsilon)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (3.3) и (3.4) и оставляя только главные члены, получаем:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_0 - \nabla p_0 = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_0 - U_{sz} \mathbf{e}_z \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{0} : \quad r \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Стоит отметить, что граничное условие (3.7) включает только скорость проскальзывания. Слагаемые со скоростью сдвига и угловой скоростью имеют порядок величины ε , а слагаемое за счет кривизны профиля скорости имеет порядок ε^2 . Поэтому этими членам можно пренебречь в первом приближении. Решение уравнений (3.5)–(3.8) дается известным решением Стокса:

$$\mathbf{u}_0 = -U_{sz} \left[\mathbf{e}_z \left(\frac{3}{4r} + \frac{1}{4r^3} \right) + \frac{3z\mathbf{r}}{4r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

Это осесимметричное решение дает силу сопротивления сферы по формуле Стокса $\mathbf{F}_p = 6\pi U_{sz} \mathbf{e}_z$ и не приводит к возникновению боковой силы или момента. Поле скорости затухает с расстоянием по закону $1/r$:

$$\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow \infty,$$

$$\mathbf{u}^S = -\frac{3}{4}U_{sz} \left(\frac{\mathbf{e}_z}{r} + \frac{z\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

Поле скорости \mathbf{u}^S соответствует течению вязкой жидкости по действием точечной силы:

$$\mathbf{F}_f = F_f \mathbf{e}_z = -\mathbf{F}_p = -6\pi U_{sz} \mathbf{e}_z$$

Объединяя слагаемые одного порядка по ε в асимптотических уравнениях (3.3) и (3.4), с учетом (3.2) получаем следующие уравнения для решения в первом приближении во внутренней области:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \nabla p = \text{Re}_c^{1/2} [(\mathbf{u}_0 + U_{sz} \mathbf{e}_z) \cdot \nabla] \mathbf{u}_0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_1 = \text{Re}_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma y \mathbf{e}_x) \quad (3.11)$$

Даже в приближении первого порядка по ε кривизна невозмущенного профиля скорости не входит в уравнения для внутренней области. Так как уравнения (3.9)–(3.11) линейны, решение можно искать в виде суперпозиции трех решений [55]:

$$\mathbf{u}_1 = \text{Re}_c^{1/2} \mathbf{u}^{PP} + \mathbf{u}^{nb} + \mathbf{w} \quad (3.12)$$

Границные условия для трех слагаемых имеют вид:

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}^{PP} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{nb} = \text{Re}_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - y \gamma \mathbf{e}_x), \quad \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Первое слагаемое в (3.12) является решением неоднородных уравнений (3.9)–(3.10) для невозмущенного течения [152]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{PP} = & \frac{3}{32} U_{sz}^2 \left[\left(2 - \frac{3}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + \right. \\ & \left. + \left(4 - \frac{3}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{2}{r^4} \right) \left(\frac{z^2 \mathbf{r}}{r^3} - \frac{z \mathbf{e}_z}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

Два других слагаемых в (3.12) удовлетворяют уравнениям Стокса (3.5)–(3.6). Слагаемое \mathbf{u}^{nb} является решением для нейтрально плавучей частицы в неограниченном линейном сдвиговом потоке. Оно учитывает эффект вращения частицы в сдвиговом потоке. Последнее слагаемое $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ является решением уравнений (3.5)–(3.6), которое стремится к однородному полю скорости \mathbf{w}_∞ на бесконечности. Решение в первом приближении \mathbf{u}_1 не стремится к нулю с увеличением расстояния от частицы r , и граничное условие

на бесконечности следует заменить условием сращивания с внешним разложением. Внешний предел внутреннего разложения имеет вид:

$$\mathbf{u}_1|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{u}^{PP}(\mathbf{r}/r) + \mathbf{w}_\infty \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u}_\infty^{PP} = \mathbf{u}^{PP}|_{r \rightarrow \infty} = \frac{3}{16} U_{sz}^2 \left[\left(1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + 2 \left(\frac{z^2 \mathbf{r}}{r^3} - \frac{z \mathbf{e}_z}{r} \right) \right]$$

В силу симметрии первые два слагаемых в выражении (3.12) не дают вклад в скорость миграции. Поэтому миграция вызвана трансверсальной компонентой скорости \mathbf{w}_∞ , которая может быть найдена путем сращивания с внешним решением. Скорость миграции безынерционной частицы дается формулой $V_m = \varepsilon w_{y\infty}$.

3.1.3 Решение во внешней области на озеновском масштабе

Растянутые координаты во внешней области вводятся по формулам $\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \varepsilon \mathbf{r} = \mathbf{r}'/L$. Скорость и давление во внешней области могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{U} + o(\varepsilon), \quad \mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z), \quad p = \varepsilon^2 P + o(\varepsilon^2)$$

Так как возмущения малы по сравнению с невозмущенным течением во внешней области, инерционные члены в уравнениях Навье Стокса (3.3) могут быть линеаризованы:

$$\varepsilon \text{Re}_c^{1/2} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \varepsilon^2 [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V}] + O(\varepsilon^3)$$

Здесь компоненты скорости невозмущенного течения записаны в терминах координат во внешней области:

$$\mathbf{V} = (V_x, 0, V_{sz}), \quad V_x = \gamma Y - 4 \text{Re}_c^{-1/2} Y^2, \quad V_{sz} = U_{sz} \text{Re}_c^{1/2} \quad (3.14)$$

Параметр проскальзывания V_{sz} характеризует относительную величину скорости проскальзывания частицы по сравнению со слагаемым за счет линейного сдвига в невозмущенной скорости жидкости. Таким образом, этот

параметр аналогичен отношению чисел Рейнольдса $\chi = \text{Re}_s/R^{1/2}$, который используется при изучении миграции частиц в линейных сдвиговых потоках [56]. Предел сильного сдвига соответствует случаю $\varepsilon^2 \ll V_{sz} \ll 1$.

Условие срашивания с внутренней областью может быть выполнено путем добавления точечной силы \mathbf{F}_f в уравнение закона сохранения импульсов [159]. Поэтому уравнения движения во внешней области сводятся к линейным уравнениям типа Озенна:

$$V_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + V_{sz} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial Z} + \frac{dV_x}{dY} U_y \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -6\pi U_{sx} \delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_z \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

$$\mathbf{U} = 0 : \quad Y = -\text{Re}_c^{1/2} d/l, \quad \text{Re}_c^{1/2} (1 - d/l),$$

$$\mathbf{U} = 0 : \quad R \rightarrow \infty$$

Для решения уравнений во внешней области используется двумерное преобразование Фурье. Ниже приведены формулы, по которым вводятся Фурье-образы полей скорости \mathbf{U}^* и давления P^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^*(k_x, Y, k_z) \\ P^*(k_x, Y, k_z) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \\ P \end{array} \right\} \exp [-i(k_x X + k_z Z)] dX dZ.$$

Поля скорости и давления восстанавливаются с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \\ P \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^* \\ P^* \end{array} \right\} \exp [i(k_x X + k_z Z)] dk_x dk_z. \quad (3.16)$$

Уравнения типа Озенна (3.15) могут быть переписаны в терминах Фурье-образов:

$$(ik_x V_x + ik_z V_z) \mathbf{U}^* + \frac{dV_x}{dY} U_y^* \mathbf{e}_x + \nabla^* P^* - \Delta^* \mathbf{U}^* = -\frac{3}{2\pi} U_{sz} \delta(Y) \mathbf{e}_z \quad (3.17)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{U}^* = 0$$

$$\nabla^* = \left(ik_x, \frac{d}{dY}, ik_z \right), \quad \Delta^* = \frac{d^2}{dY^2} - k^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2.$$

$$\mathbf{U}^* = 0 : \quad Z = -\text{Re}_c^{-1/2} d/l, \text{Re}_c^{1/2} (1 - d/l).$$

Таким образом, получена система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений по отношению к координате Y . Умножая уравнение (3.17) в проекции на ось x на ik_x , а в проекции на z – на ik_z , складывая полученные уравнения и используя уравнение неразрывности, можно получить выражение для P^* в форме:

$$P^* = \frac{1}{k^2} \left[(\Delta^* - ik_x V_x - ik_z V_z) \frac{dU_y^*}{dY} + ik_x \frac{dV_x}{dY} U_y^* + \frac{3}{2\pi} ik_z U_{sz} \delta(Y) \right].$$

Дифференцируя последнее уравнение по Y , подставляя полученное выражение в уравнение закона сохранения импульса в проекции на ось y , можно получить единственное обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа скорости миграции:

$$\begin{aligned} [\Delta^* - (ik_x V_x + ik_z V_z) \Delta^* - ik_x 8 \text{Re}_c^{-1/2}] U_y^* &= -\frac{3}{2\pi} ik_z U_{sz} \frac{d\delta(Y)}{dY} \quad (3.18) \\ U_y^* = \frac{dU_y^*}{dY} &= 0 : \quad Y = -\text{Re}_c^{1/2} d/l, \text{Re}_c^{1/2} (1 - d/l) \end{aligned}$$

Слагаемое в правой части уравнения (3.18) эквивалентно условию скачка для второй производной в начале системы координат:

$$\left[\frac{d^2 U_y^*}{dY^2} \right] = -\frac{3}{2\pi} ik_z U_{sz},$$

где $[f] = f(+0) - f(-0)$ – величина скачка. Функция U_y^* и ее первая и третья производные непрерывны в начале координат, что можно показать путем интегрирования уравнения (3.18) последовательно четыре раза в интервале $(-\Delta Y, \Delta Y)$, $\Delta Y \rightarrow 0$, и решая линейную систему относительно $[d^{(i)} U_y^* / dY^{(i)}]$ при $i = 0, 1, 2, 3$.

Условие сращивания внешнего решения с внутренней областью требует, чтобы внешний предел двучленного внутреннего разложения $\mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1$ был равен внешнему решению в начале координат. В результате для внешнего предела слагаемого первого порядка из (3.13) получаем:

$$\mathbf{u}_1|_{r \rightarrow \infty} = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^S)|_{R \rightarrow 0},$$

где \mathbf{U}^S – скорость Стокслета, записанная в терминах внешних координат,

$$\mathbf{U}^S = -\frac{3}{4} U_{sz} \left(\frac{\mathbf{e}_z}{R} + \frac{Z\mathbf{R}}{R^3} \right),$$

которое срашивается с внешним пределом \mathbf{u}_0 .

Малые расстояния R соответствуют большим значениям k , и условие срашивания означает, что численное решение (3.18) должно быть равно двумерному преобразованию Фурье от стокслета при больших числах Фурье,

$$U_y^* = U_y^{S*} [1 + O(k^{-1})], \quad k \gg 1,$$

где U_y^{S*} находится по формуле

$$U_y^{S*} = \frac{3}{8\pi} \frac{ik_x}{k} U_{sz} Y \exp(-k|Y|)$$

Скорость миграции V_m безынерционной частицы выражается в терминах преобразования Фурье поперечной скорости в начале координат по формуле [159]:

$$V_m = \varepsilon \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (U_y^* - U_y^{S*}) \Bigg|_{Y \rightarrow 0} dk_x dk_z \right]. \quad (3.19)$$

Таким образом, задача сведена к численному нахождению $U_y^*(k_x, 0, k_z)$ из уравнения (3.18).

3.1.4 Вычисление коэффициента боковой силы

Коэффициент боковой силы найден численно как функция трех безразмерных параметров: положения частицы поперек канала d/l , параметра проскальзывания V_{sz} и числа Рейнольдса канала Re_c . Для иллюстрации рассмотрены широкие диапазоны изменения параметров, имеющие отношения к технологии гидроразрыва пласта: $0.001 \leq V_{sz} \leq 4$ и $0.1 \leq \operatorname{Re}_c \leq 1000$. Результаты сравнивались с решением для малой сферической частицы, осаждающейся между параллельными стенками в покоящейся жидкости, которое было получено в [184] для случая, когда расстояние до стенки много

больше радиуса частицы, но все еще меньше, чем масштаб длины внешней области, то есть стенка лежит во внутренней области. В этом случае скорость миграции имеет вид:

$$V_m^{VC} = \text{Re}_s U_{sz} c_m^{VC}$$

Коэффициент подъемной силы $c_m^{VC}(d/l)$ как функция поперечной координаты может быть аппроксимирован полиномом:

$$c_m^{VC} = -0.3125\xi - 0.0996\xi^3 - 116.3\xi^7 + 403.7\xi^9 - 518\xi^{11},$$

$$\xi = d/l - 1/2$$

Поперечная сила (и, как следствие, скорость) направлена от стенок к центру канала. Максимум коэффициента боковой силы достигается на стенке: $c_m^{VC}(d/l \rightarrow 0) = 3/32$. Положение равновесия, где боковая сила обращается в ноль, достигается на средней линии канала $d/l = 1/2$.

В рассматриваемом случае, когда частица осаждается в горизонтальном течении в канале с вертикальными плоскими стенками, применимо следующее обезразмеривание для коэффициента боковой силы:

$$V'_m = \frac{U'_{sz} a}{\nu} c_m(d/l, V_{sz}, \text{Re}_c) \quad (3.20)$$

Квадратичная зависимость скорости миграции от скорости проскальзывания отличается от линейной, полученной в случае, когда скорость проскальзывания параллельна невозмущенному потоку [55]. Коэффициент боковой силы $c_m(d/l, V_{sz}, \text{Re}_c)$ показан на Рис. 3.2 как функция поперечной координаты для различных значений параметров V_{sz} и Re_c по сравнению с $c_m^{VC}(d/l)$. В силу симметрии, кривые показаны только для половины ширины канала.

Коэффициент боковой силы положителен для всех значений безразмеренных определяющих параметров, то есть частица всегда мигрирует от стенок к центральной линии. Вблизи стенок коэффициент боковой силы совпадает с результатом работы [184]: $c_m(d/l \rightarrow 0, V_{sz}, \text{Re}_c) = 3/32$. Скорость

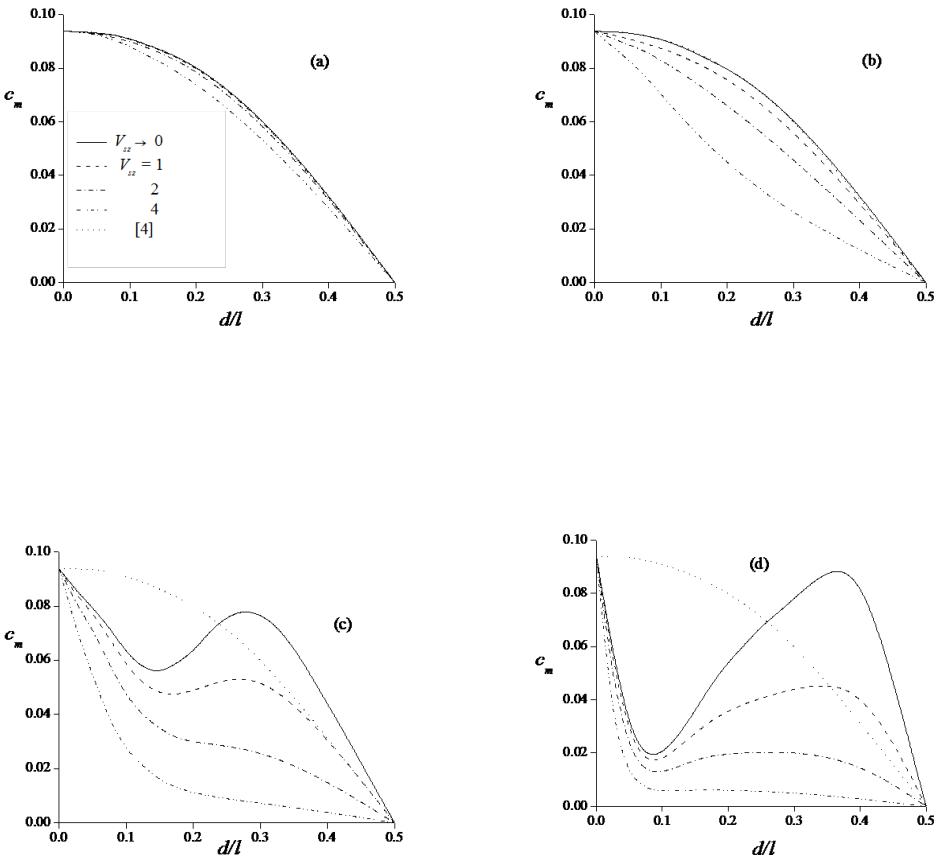


Рис. 3.2: Коэффициент боковой силы как функция координаты частицы поперек канала в сравнении с результатом для коэффициента боковой силы на частицу, осаждающуюся в покоящейся жидкости [184]: (a) $\text{Re}_c = 1$, (b) $\text{Re}_c = 10$, (c) $\text{Re}_c = 100$, и (d) $\text{Re}_c = 1000$.

миграции, рассчитанная для малых, но ненулевых значений параметра проскальзывания, $0.001 \leq V_{sz} \leq 0.1$, и обезразмеренная по формуле (3.20), стремится к единой зависимости (сплошные кривые на Рис.3.2) в пределе $V_{sz} \rightarrow 0$ (предел сильного сдвига). При $\text{Re}_c < 1$ невозмущенное течение влияет на миграцию частицы лишь незначительно. Можно видеть из Рис. 3.2, a, что коэффициент боковой силы, рассчитанный для малых значений параметра проскальзывания $0.001 \leq V_{sz} \leq 0.1$, имеет близкие значения к результату для миграции частицы, осаждающейся в неподвижной жидкости [184]. При больших Re_c влияние стенок проявляется только в тонких

слоях вблизи стенок на расстояниях порядка масштаба длины во внешней области $L = l\text{Re}_c^{-1/2}$.

Можно было бы ожидать, что скорость миграции будет мала при $\text{Re}_c \gg 1$ в ядре течения, где эффект стенок пренебрежимо мал, так как он равен нулю в неограниченном течении [101]. Однако это верно только при $V_{sz} \geq 1$. При меньших значениях параметра проскальзывания и числа Рейнольдса c_m принимает конечные значения в ядре течения и имеет дополнительный максимум вблизи оси канала (см. Рис. 3.2, *c* и *d*). Появление дополнительного максимума нельзя объяснить только лишь влиянием стенки, которое уменьшается при удалении от стенки; также, скорость сдвига мала вблизи оси канала. Однако кривизна профиля скорости конечна, и появляется дополнительный масштаб длины во внешней области, связанный с кривизной профиля скорости: $L^c = l\text{Re}_c^{-1/3}$.

Результаты этого раздела опубликованы в [3].

3.2 Миграция частиц в начальном участке канала

В данном разделе рассматривается миграция частиц в начальном участке трещины гидроразрыва, где происходит формирование профиля скорости Пуазейля и частицы в силу инерции движутся быстрее жидкости. По сравнению с исследованиями боковой силы на одиночную частицу в различных конфигурациях (см. раздел 3.1), задаче об изучении эволюции профиля концентрации частиц под действием боковой силы в рамках двухконтинуального подхода (когда жидкость и взвешенные частицы рассматриваются как два взаимопроникающих континуума) посвящено существенно меньше работ.

Как уже отмечалось, обзоры по двухконтинуальному моделированию формирования профиля концентрации частиц в пограничном слое при течении суспензий можно найти в [218] и [219]. Типичной особенностью такого рода течений является возникновение пересекающихся траекторий частиц, что при эйлеровом описании приводит к сингулярности в поле концентрации частиц. Двухконтинуальная модель течения газа с частицами в пограничном слое на плоской пластине была построена и исследована в [221] для случая, когда учитывается только сила Стокса в межфазном обмене импульсом. В [222] было показано, что поперечный профиль числовой плотности частиц содержит неинтегрируемую особенность на стенке, то есть числовая плотность частиц растет неограниченно при приближении к стенке и интеграл от числовой концентрации расходится при приближении к стенке. В данном случае при возникновении неинтегрируемой особенности среднее расстояние между частицами перестает быть большим по сравнению с радиусом частицы, и, таким образом, нарушаются предположения среды невзаимодействующих частиц. В то же время, в случае, когда особенность числовой плотности частиц интегрируема, среднее расстояние между частицами, как правило, остается большим по сравнению с радиусом частицы и континуальное приближение разреженной суспен-

зии по-прежнему применимо. Это важное соображение будет существенно использоваться в настоящем разделе при анализе профиля числовой плотности частиц поперек трещины.

Миграция частиц под действием классической силы Сэфмана была исследована для течения запыленного газа в канале с помощью полного лагранжева метода [223] и для течения в пограничном слое с помощью эйлерова подхода [224]. Важная особенность течения разреженных суспензий – это возможное пересечение траекторий частиц и формирование “складок” в среде частиц [227]. При образовании складок в среде частиц в одной эйлеровой точке пространства присутствуют две или более лагранжевых траектории среды частиц. Такие конфигурации могут возникать под действием инерции частиц и неоднородной подъемной силы, имеющей положения равновесия. Для решения подобных задач, в которых имеет место формирование складок в среде частиц и пересечение траекторий, был предложен полный лагранжев метод [220], позволяющий решать уравнения движения частиц вдоль траекторий и находить концентрацию из уравнения неразрывности в лагранжевой форме. Различить складки среды частиц можно лишь в лагранжевых переменных. Край области с пересекающимися траекториями может быть легко найден из условия, что якобиан перехода между эйлеровыми и лагранжевыми переменными равен нулю, то есть якобиан меняет знак при переходе через границу складки. В работе [228] было проведено сравнение эйлерова и лагранжева подхода для моделирования течений разреженной суспензии при наличии пересечения траекторий и было показано, что лагранжев метод является предпочтительным, так как в рамках эйлерова подхода задача некорректно поставлена в области пересечения траекторий.

Целью настоящего раздела является построение асимптотической модели инерционной миграции твердых неколлоидных сферических частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке канала, где формируется профиль Пузейля. Используется двухконтинуальный подход для

моделирования течений супензий, в рамках которого каждая фаза, жидкость и частицы, описывается как отдельный континуум. Существенной новой компонентой модели является корректное выражение для боковой силы Сэфмана с поправкой на присутствие стенки и ненулевой параметр проскальзывания, которая была предложена в [226]. Будет показано, что именно учет боковой силы с корректной поправкой позволяет получить профиль числовой концентрации частиц с *интегрируемой* особенностью в точке пересечения траекторий на некотором расстоянии от стенки, где боковая сила меняет знак. Для расчета концентрации частиц используется полный лагранжев метод [220].

3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается двумерное стационарное течение разреженной супензии неколлоидных твердых частиц в начальном участке плоского канала (или круглой трубы). Несущая фаза - вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость. Частицы - твердые сферы постоянного радиуса. Отношение плотностей материала частиц и жидкости имеет порядок единицы либо много больше единицы. Характерная длина релаксации скоростей для стоксовой частицы имеет порядок ширины канала. Объемная концентрация частиц мала, а частицы достаточно инерционны, так что хаотическим движением и межчастичными взаимодействиями можно пренебречь. Стенки канала твердые, непроницаемые и гладкие. Число Рейнольдса канала, посчитанное по характерной скорости, ширине, вязкости и плотности жидкости предполагается большим, но докритическим, так что течение можно считать ламинарным. Гравитацией можно пренебречь, так как рассматривается начальный участок канала, где относительная скорость проскальзывания частиц в горизонтальном направлении за счет инерции считается много большей, чем вертикальная скорость осаждения за счет гравитации (в развитом течении Пуазейля, когда продольная релаксация скоростей завершена, ми-

грация будет происходить за счет осаждения под действием силы тяжести, см. раздел 3.3). На входной границе канала задаются однородный профиль концентрации частиц и однородные одинаковые профили скорости частиц и жидкости (проскальзывание частиц равно нулю). В начальном участке канала формируются пограничные слои и профиль скорости выходит на профиль Пуазейля с развитием течения по продольной координате, отсчитываемой от входного сечения. Целью данного раздела является построение асимптотической модели инерционной миграции частиц и изучение эволюции поперечного профиля концентрации в начальном участке канала, где формируется профиль скорости Пуазейля.

Течение разреженной суспензии рассматривается в рамках двухконтинуального подхода [195], где две фазы, жидкость и частицы, рассматриваются как два взаимопроникающих и взаимодействующих континуума. Суспензия считается разреженной, так что объемная доля частиц мала $C_p \ll 1$. Несущая фаза характеризуется плотностью ρ и скоростью $\mathbf{v} = (u, v)$. Частицы имеют радиус a и плотность вещества ρ_s^0 . Среда частиц характеризуется полем скорости $\mathbf{v}_s = (u_s, v_s)$ и осредненной плотностью среды $\rho_s = m n_s$, где m – масса одной частицы, а n_s - числовая плотность частиц. Так как суспензия разреженная (объемная доля частиц пренебрежимо мала), то изменением плотности ρ и вязкости μ несущей фазы за счет присутствия частиц пренебрегается. Предполагается, что отношение плотности материала частиц и жидкости $\zeta = \rho_s^0 / \rho$ имеет порядок единицы либо существенно больше единицы. Дополнительно предполагается, что относительная массовая доля частиц $\alpha_m = \rho_s^\infty / \rho = C_p^\infty \zeta \rightarrow 0$ (это предположение является естественным для разреженной суспензии, но не всегда выполняется для запыленного газа). Ниже будет показано, что в этом случае обратным влиянием частиц на жидкость можно пренебречь, и течение суспензии описывается так называемой моделью без обратного влияния, когда вначале может быть рассчитано поле скорости несущей фазы, а затем на заданном поле скорости могут быть рассчитаны параметры среды частиц с

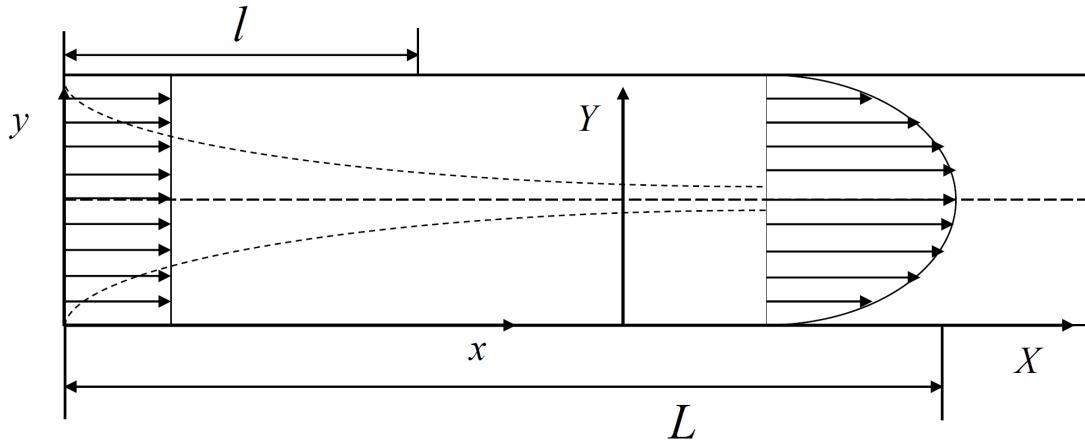


Рис. 3.3: Схема течения в начальном участке трещины гидроразрыва (показано горизонтальное сечение вертикальной трещины), где устанавливается профиль Пуазейля скорости несущей фазы. Стрелками показана скорость жидкости, штриховые линии – пограничные слои на стенках канала.

помощью полного лагранжева метода.

Из предположения о разреженности суспензии следует, что броуновским движением частиц и межчастичными взаимодействиями можно пренебречь. Эти предположения позволяют существенно упростить систему определяющих уравнений и, в частности, записать межфазный обмен импульсом на основе сил, действующих на одиночную частицу, а также пренебречь тензором напряжений в среде частиц. Вводится декартова система координат Oxy , связанная с входным сечением канала, где ось x направлена вдоль канала, а ось y – по нормали к стенке. Уравнения двухжидкостной модели для течения разреженной суспензии записываются в размерном виде [195]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (3.21)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} - n_s \mathbf{f}_s, \quad m(\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = \mathbf{f}_s$$

Здесь \mathbf{f}_s – это полная гидродинамическая сила со стороны жидкости на

одну частицу, а слагаемое $-n_s \mathbf{f}_s$ в правой части уравнений Навье-Стокса для несущей фазы – это обратное влияние частиц на жидкость. В межфазном обмене импульсом учитываются сила Стокса, боковая подъемная сила Сэфмана с поправкой на влияние стенки и конечность параметра проскальзывания, сила Архимеда и *нестационарная* сила присоединенных масс:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{F}_{Drag} + \mathbf{F}_{Lift} + \mathbf{F}_{Arch} + \mathbf{F}_{vm},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Drag} &= 6\pi\mu a(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)D, \quad \mathbf{F}_{Arch} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ \mathbf{F}_{vm} &= \frac{2}{3}\pi a^3 \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) \\ D &= 1 + \frac{1}{6}\text{Re}_s^{2/3}, \quad \text{Re}_G = \frac{4\rho a}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{Re}_s = \frac{2a|\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|\rho}{\mu} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь поправка к силе Стокса на конечность числа Рейнольдса частицы принята по формуле Шиллера-Наумана (также известная как формула Клячко), которая применима в диапазоне $0 < \text{Re}_s < 10^3$ [229]. В выражении для нестационарной силы присоединенных масс полная производная берется вдоль линий тока жидкости. Как обсуждалось выше, силой тяжести в начальном участке пренебрегается, так как по предположению скорость проскальзывания в продольном направлении существенно превышает скорость осаждения в вертикальном направлении под действием силы тяжести. Боковая сила Сэфмана записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Lift} &= c_l(\chi, Y_p) \mathbf{F}_{Saff}, \quad (3.23) \\ \mathbf{F}_{Saff} &= 6.46a^2 \sqrt{\mu\rho} \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y, \\ \chi &= (u_s - u) \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2} = \pm \frac{\text{Re}_s}{\text{Re}_G^{1/2}}, \quad Y_p = \frac{y}{L_{Saff}} = y \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь параметр χ принимает положительные значения, когда частицы обгоняют жидкость, и отрицательные в противоположном случае, когда

частицы отстают. Ниже будет показано, что миграция существенна в при-стеночных пограничных слоях, где на масштабе частицы профиль скорости можно считать линейным [223], поэтому можно использовать результаты для боковой силы в линейном сдвиговом потоке [56]. В рассматриваемом случае частицы в силу инерции обгоняют жидкость внутри пограничного слоя, где жидкость резко замедляется в силу условия прилипания на стенках по сравнению с равномерным профилем скорости, заданным на входном сечении канала, поэтому $\chi \geq 0$. Для коэффициента боковой силы как функции параметра скольжения предложена следующая аппроксимация численных значений для течений в присутствии стенки:

$$c_l = c_l^\infty(\chi) (1 - n(\chi) \exp[-m(\chi)Y_p]),$$

$$n = 1 + \frac{1.77\chi}{c_l^\infty}, \quad m = 0.453 + 0.139\chi^{1.93}$$

Аппроксимация численных результатов для неограниченного течения дается формулой [226]:

$$c_l^\infty = (1 + 0.581\chi^2 - 0.439|\chi|^3 + 0.203\chi^4)^{-1}$$

Эта формула хорошо согласуется с численными расчетами [56]. При $Y_p \rightarrow \infty$ (когда расстояние от частицы до стенки существенно превосходит характерный масштаб длины Сэфмана L_{Saff}), поправка к силе Сэфмана имеет положительный знак и стремится к c_l^∞ . В пределе $Y_p \rightarrow 0$ (расстояние до стенки мало по сравнению с L_{Saff} , но все еще велико по сравнению с радиусом частицы a), коэффициент боковой силы c_l стремится к значению $c_l = -1.77\chi$, полученному в [76]. Таким образом, боковая сила меняет знак на некотором расстоянии от стенки, так что частицы отталкиваются от стенки вблизи нее и притягиваются к стенке на больших расстояниях. Так как боковая сила пропорциональна скорости проскальзывания частиц, сила отлична от нуля только до тех пор, пока релаксация скоростей фаз не завершена под действием силы Стокса. Таким образом, частицы могут

не полностью аккумулироваться на линии равновесия (где боковая сила равна нулю) до тех пор, пока релаксация скоростей не завершилась.

Во входном сечении канала ($x = 0$) заданы следующие условия: скорости частиц и жидкости равны, профиль скорости жидкости (а значит, и частиц) однородный, и числовая концентрация частиц постоянна по сечению канала:

$$x = 0 : \quad u = u_s = U, \quad v = v_s = 0, \quad \rho_s = \rho_s^\infty; \quad (3.24)$$

$$y = 0, 2d : \quad u = v = 0$$

Здесь U – скорость жидкости и частиц во входном сечении канала, и d – полуширина канала. Уравнения движения среды частиц являются гиперболическими, где характеристики – траектории частиц, поэтому граничные условия для среды частиц ставятся только на входном сечении, где траектории начинаются. В дальнейшем будем предполагать, что число Рейнольдса канала многое больше единицы:

$$\text{Re} = \frac{\rho U d}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} \ll 1$$

В силу того, что профиль скорости во входном сечении канала однородный и число Рейнольдса канала велико, на стенках формируются подграницевые слои. Данная постановка задачи учитывает следующие существенно новые эффекты, по сравнению с более ранними исследованиями миграции частиц в пограничном слое (например, [223]): эффекты за счет силы Архимеда и полной нестационарной силы присоединенных масс для частиц с отношением плотности к плотности жидкости порядка единицы, влияние стенки и конечности параметра проскальзывания на коэффициент боковой силы, что приводит к формированию линии равновесия на некотором расстоянии от стенки и в конечном счете позволяет разрешить неинтегрируемую особенность в профиле числовой концентрации частиц, которая присутствовала во всех более ранних решениях данной задачи о миграции частиц при течении разреженной суспензии в пограничном слое [221, 222, 223]).

Будем рассматривать течение на двух существенно различных масштабах длины (Рис. 3.3): (i) на характерном масштабе длины релаксации скоростей фаз (стоксова длина релаксации) $l = mU/6\pi a\mu$ и (ii) на характерной длине перекрытия пограничных слоев и формирования профиля Пуазейля $L = d^2 U \rho / \mu$. Масштаб релаксации скоростей фаз определяет область с тонкими пограничными слоями на стенках канала. Внутри пограничного слоя скорость жидкости резко падает за счет условия прилипания на стенке. Частицы, имевшие изначально скорость равную скорости жидкости, движутся быстрее жидкости в силу инерции до тех пор, пока проскальзывание не уменьшится до нуля под действием силы Стокса и релаксация скоростей завершится. В ядре течения скорости жидкости и частиц и концентрация частиц однородны и скорость проскальзывания равна нулю. Масштаб длины L определяет область, в которой ширина пограничного слоя достигает полуширины канала, пограничные слои смыкаются и профиль скорости несущей фазы выходит на профиль Пуазейля (Рис. 3.3). Для приложений характерны параметры, при которых длина релаксации Стокса и полуширина канала имеют одинаковый порядок величины: $\lambda l/d \sim 1$. Характерная длина смыкания пограничных слоев $L \gg l$, так как $L/l = \lambda/\varepsilon \gg 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

С помощью метода сращиваемых разложений [230] построим решение задачи в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2.2 Уравнения двухфазного пограничного слоя

В данном разделе выведем безразмерные уравнения пограничного слоя на масштабе длины l (Рис. 3.3), который для сферической частицы дается формулой:

$$l = \frac{2\rho_s U a^2}{9\mu}$$

Безразмерные переменные вводятся по формулам:

$$\begin{aligned} x' &= lx, \quad y' = ly, \quad u' = Uu, \quad v' = Uv, \quad p' = \rho U^2 p \\ u'_s &= Uu_s, \quad v'_s = Uv_s, \quad \rho'_s = \rho_s^\infty \rho_s, \quad n'_s = n_s^\infty n_s. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Размерные переменные обозначены штрихом там, где их нужно отличать от аналогичных безразмерных переменных. Течение предполагается симметричным относительно оси канала, поэтому будем рассматривать область между осью канала и одной из стенок. Профиль Пуазейля является выпуклым с одним локальным максимумом на оси канала, поэтому во всей рассматриваемой области скорость сдвига положительна $\partial u / \partial y > 0$ и принимает нулевое значение только на центральной линии канала. В безразмерных переменных плотность среды частиц в точности равна числовой концентрации $\rho_s = n_s$. Подставляя (3.25) в уравнения (3.21) – (3.24), получаем систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (3.26) \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \varepsilon \lambda \Delta \mathbf{v} - \alpha_m n_s \mathbf{f}_s, \\ (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s &= \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} \left[D(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \kappa c_l \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} (u - u_s) \mathbf{e}_y \right] + \\ &\quad + \frac{3}{2\zeta + 1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\ \varepsilon &= \frac{\mu}{\rho U d}, \quad \lambda = \frac{d}{l}, \quad \kappa = \frac{6.46}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s^0}}. \end{aligned}$$

В безразмерном виде граничные условия (3.24) записываются в виде:

$$x = 0 : \quad u = u_s = \rho_s = 1, \quad v = v_s = 0; \quad y = 0, 2\lambda : \quad u = v = 0 \quad (3.27)$$

Суммируя предположения, сделанные ранее, мы рассматриваем следующий асимптотический предел в терминах определяющих безразмерных параметров:

$$\varepsilon = 1/\operatorname{Re} \rightarrow 0, \quad \lambda = d/l \sim 1, \quad \zeta = \rho_s^0 / \rho \sim 1, \quad C \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{Re}_s \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re}_G \rightarrow 0, \quad \chi = \operatorname{Re}_s / \operatorname{Re}_G^{1/2} \sim 1.$$

Другие безразмерные группы, входящие в уравнения, могут быть выражены через эти параметры. Принимая во внимание, что массовая доля частиц мала $\alpha_m \rightarrow$, обратным влиянием частиц на течение несущей фазы можно пренебречь в правой части уравнений Навье-Стокса (3.26). Задача о построении асимптотического решения уравнений (3.26)–(3.27) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ аналогична задаче о двухфазном пограничном слое. Разделим всю область течения на две подобласти: внешнюю область (ядро течения) и внутреннюю область (тонкий пограничный слой на стенке). Внешнее решение есть невозмущенный однородный поток, как следует из граничных условий во входном сечении канала: $u = u_s = \rho_s = 1$, $v = v_s = 0$, $p = \text{const}$. Ищем внутреннее решение в форме асимптотических разложений по малому параметру $\varepsilon\lambda$, оставляя только главные члены:

$$y = (\varepsilon\lambda)^{1/2}\eta, \quad u = u_2(x, \eta), \quad v = (\varepsilon\lambda)^{1/2}v_2(x, \eta), \quad p = p_2(x, \eta) \quad (3.28)$$

$$u_s = u_{s2}(x, \eta), \quad v_s = (\varepsilon\lambda)^{1/2}v_{s2}(x, \eta), \quad \rho_s = \rho_{s2}(x, \eta)$$

Здесь и далее в этом разделе индекс с номером относится к соответствующей асимптотической области, показанной на Рис. 3.3.

Подставляя эти формулы в (3.26) и удерживая только главные члены, получаем (индекс 2 для простоты опущен):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial \eta} = 0, \quad (3.29)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0,$$

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial \eta} = F_{sx} = \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} D_0(u - u_s) + \frac{3}{2\zeta + 1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial \eta} = F_{s\eta},$$

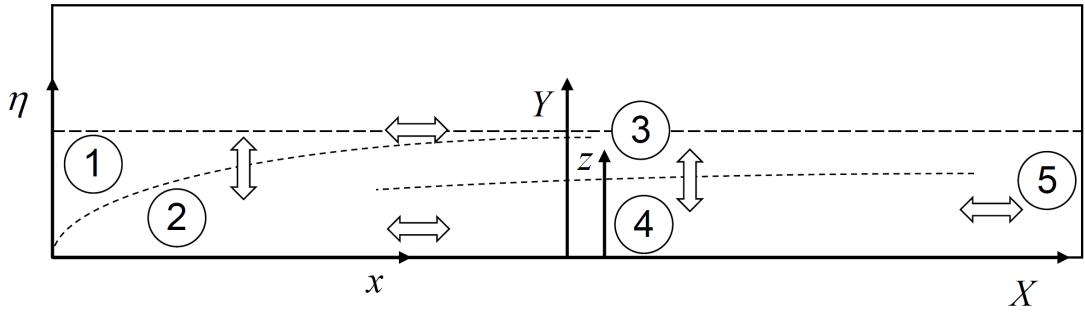


Рис. 3.4: Асимптотические области при течении в начальном участке канала: 1 – входной участок, 2 – пограничный слой, 3 – область перекрытия пограничных слоев, 4 – нижний подслой, 5 – дальняя область полностью развитого течения Пуазейля вниз по потоку. Символ \Leftrightarrow обозначает асимптотическое сращивание решений в прилегающих областях.

$$\begin{aligned}
 F_{s\eta} &= \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} \left[D_0(v - v_s) + \kappa_0 c_l \sqrt{\frac{\partial u}{\partial \eta}} (u - u_s) \right] + \frac{3}{2\zeta + 1} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \\
 c_l(\chi, x, \eta) &= c_l^\infty \left[1 - n \exp \left(-m_1(\chi) \frac{\eta}{x^{1/4}} \right) \right], \\
 m_1 &= m \frac{\sqrt{\varphi''(0)}}{(\varepsilon \lambda)^{1/4}}, \quad \chi = \frac{|u - u_s|}{(\varepsilon \lambda)^{1/4}}, \\
 \kappa_0 &= \frac{6.46}{12\sqrt[4]{18}\pi} Re_{s0}^{3/2} \left(\frac{\rho_s^0}{\rho} \right)^{1/4}, \quad D_0 = 1 + \frac{1}{6} Re_{s0}^{3/2} (u - u_s)^{3/2}, \quad Re_{s0} = \frac{2aU\rho}{\mu}.
 \end{aligned}$$

Здесь последние слагаемые в правой части уравнений закона сохранения импульса для среды частиц соответствуют силам присоединенных масс и Архимеда. В пределе сильного сдвига ($\chi \ll 1$) и при отношении плотностей фаз значительно большем единицы ($\zeta \gg 1$), слагаемые за счет сил присоединенных масс и Архимеда пренебрежимо малы, поправка к силе Сэфмана стремится к единице ($c_l \rightarrow 1$) и уравнения переходят в известную систему уравнений запыленного газа [219]. Дополнительно, φ – функция Блазиуса из известного решения о пограничном слое на плоской пластине

[231]. Внешнее течение однородно, поэтому продольный градиент давления равен нулю. Границные условия (3.27) принимают вид:

$$x = 0 : \quad u_s = \rho_s = 1, \quad v_s = 0; \quad (3.30)$$

$$\eta = 0 : u = v = 0; \quad \eta \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow 1.$$

3.2.3 Уравнения в области перекрытия пограничных слоев

В этом разделе рассмотрим уравнения движения на масштабе длины перекрытия пограничных слоев $L = d^2 U \rho / \mu$ (Рис. 3.3). Безразмерные переменные введены по формулам:

$$x' = Lx, \quad y' = dY, \quad u' = U u_3, \quad v' = (d/L) U v_3, \quad p' = \rho U^2 p_3, \quad (3.31)$$

$$u'_s = U_{s3}, \quad v'_s = (d/L) U v_{s3}, \quad \rho'_3 = \rho_s^\infty \rho_{s3}, \quad n'_s = n_s^\infty n_s.$$

Подставляя эти формулы в (3.21)–(3.24), получим:

$$\frac{\partial u_3}{\partial X} + \frac{\partial v_3}{\partial Y} = 0, \quad u_{s3} \frac{\partial \rho_{s3}}{\partial X} + v_{s3} \frac{\partial \rho_{s3}}{\partial Y} = 0, \quad (3.32)$$

$$u_3 \frac{\partial u_3}{\partial X} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial Y} = -\frac{dp_3}{dX} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial Y^2},$$

$$\frac{dp_3}{dY} = 0, \quad u_3 - u_{s3} = 0, \quad v_3 - v_{s3} = 0.$$

Из (3.32) находим, что скорости несущей фазы и частиц равны в этой области и, таким образом, релаксация скоростей завершена. Границные условия на входе в область слева находятся из условия срашивания решения с однородным течением вверх по потоку при фиксированном Y и $X \rightarrow 0$. Уравнение неразрывности среды частиц может быть переписано в виде полной (материальной) производной от числовой концентрации частиц вдоль линий тока несущей фазы:

$$\frac{d\rho_{s3}}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = u_3, \quad \frac{dY}{dt} = v_3.$$

Из этих соотношений с учетом (3.32) получаем, что концентрация частиц постоянна вдоль линий тока жидкости: $\rho_{s3} = 1$. Уравнения движения

(3.32) совпадают с постановкой задачи о течении вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в начальном участке плоского канала. Известно приближенное решение данной задачи [231]. Постоянная концентрация частиц поперек канала не является равномерно пригодной асимптотикой решения уравнений (3.32), так как вблизи стенки формируется тонкий подслой, где числовая концентрация частиц отличается от единицы из-за инерционной миграции частиц, имеющей место выше по потоку внутри пограничного слоя. Данный подслой асимптотически тоньше чем полуширина канала.

В общем случае, вся область течения может быть разбита на пять асимптотических областей (Рис. 3.4): 1 – область однородного течения, где параметры имеют те же значения, что во входном сечении канала (однородные профили скорости и концентрации частиц и отсутствие межфазного проскальзывания), 2 – пограничный слой на стенке канала, где имеется сдвиговое течение, частицы обгоняют жидкость в силу инерции, скорость проскальзывания конечна по сравнению со скоростью жидкости и, как следствие, частицы мигрируют под действием боковой силы Сэфмана с поправкой, что приводит к формированию неоднородного поперечного профиля концентрации частиц, 3 – область перекрытия пограничных слоев, где профиль скорости несущей фазы выходит на профиль Пуазейля, проскальзывание частиц исчезает и профиль концентрации частиц однороден, 4 – нижний подслой, в котором профиль скорости линейный, поперечный профиль концентрации частиц неоднороден и унаследован из области пограничного слоя, расположенной вверх по потоку, 5 – дальняя область полностью развитого течения Пуазейля вниз по потоку ($X \gg 1$), где все гидродинамические параметры фаз не зависят от продольной координаты, профиль скорости жидкости описывается законом Пуазейля, а профиль концентрации частиц неоднороден по всему поперечному сечению канала.

Теперь получим уравнения движения в нижнем подслое (область 4, Рис.

3.4). Введем новые растянутые переменные по формулам:

$$\begin{aligned} y &= (\varepsilon/\lambda)^{1/4}z, \quad u_3 = (\varepsilon/\lambda)^{1/4}u_4(X, z), \quad v_3 = (\varepsilon/\lambda)^{1/4}v_4(X, z), \quad (3.33) \\ u_{s3} &= (\varepsilon/\lambda)^{1/4}u_{s4}(X, z), \quad v_{s3} = (\varepsilon/\lambda)^{1/4}v_{s4}(X, Z), \quad \rho_{s3} = \rho_{s4}(X, z) \end{aligned}$$

Степени главных членов асимптотических разложений по малому параметру выбраны из условий сращивания решений в соседних асимптотических областях. Траектории частиц ведут себя как $X^{1/4}$ в нижнем подслое в соответствии со степенью в асимптотическом разложении. Подставляя (3.33) в (3.32) и удерживая только главные члены, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_4}{\partial X} + \frac{\partial v_4}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial p_4}{\partial z} = 0 \quad (3.34) \\ u_4 \frac{\partial \rho_{s4}}{\partial X} + v_4 \frac{\partial \rho_{s4}}{\partial z} &= 0, \quad u_4 = u_{s4}, \quad v_4 = v_{s4}, \\ z = 0 : \quad u_4 = v_4 &= 0; \quad z \rightarrow \infty : \quad u_4 = u_3|_{Y=0}. \end{aligned}$$

Решением уравнений (3.34) является $u_4 = G(X)z$, $v_4 = G'(X)z^2/2$, и ρ_{s4} постоянна вдоль линий тока несущей фазы. Таким образом, профиль скорости жидкости линейный, проскальзывание частиц равно нулю, а поэтому боковая сила на частицу также равна нулю в соответствии с формулой (3.23), и значения концентрации частиц на входе в нижний подслой переносятся без изменений вдоль линий тока. Поперечный профиль концентрации в данной области претерпевает растяжение, так как линии тока жидкости расходятся. Условие асимптотического сращивания решений для скорости u_4 в нижнем подслое (область 4, Рис. 3.4) и скорости u_4 в области перекрытия пограничных слоев (область 3, Рис. 3.4) записывается в виде:

$$\left. \frac{\partial u_4}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = \left. \frac{\partial u_3}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow 0}.$$

Отсюда находим функцию $G(X)$:

$$G(X) = \left. \frac{\partial u_3}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow 0}.$$

3.2.4 Условия сращивания асимптотических разложений в соседних областях

В нижнем подслое концентрация частиц переносится вдоль линий тока несущей фазы, которые задаются функцией тока $\psi = z\sqrt{G(X)} = \text{const}$. Таким образом концентрацию можно считать зависящей только от функции тока $\rho_{s4} = \rho_{s4}(\psi)$. Эта зависимость должна быть определена из условия асимптотического сращивания с решением в пограничном слое (3.29)–(3.30), выраженным в терминах функции тока. Так как было показано, что профиль концентрации неоднороден только в нижнем подслое, где профиль скорости линейный, то и выше по потоку в пограничном слое миграция происходит в пристеночном слое, где профиль скорости линейный. Поэтому мы утверждали выше, что не требуется поправки к боковой силе за счет кривизны профиля скорости.

Теперь представим условия сращивания решений между областями 2 и 5 через подслой 4 (Рис. 3.4). После сращивания решений в прилегающих областях, мы исключим область 4 и получим условие сращивания напрямую между зонами 2 и 5. Начнем с условия сращивания между областями 2 и 4. Условие сращивания состоит в равенстве асимптотик решений в области перекрытия [230]. Асимптотика функции $G(X)$ при $X \rightarrow 0$ имеет вид [231]:

$$G(X) = \frac{\varphi''(0)}{\sqrt{X}}.$$

С учетом этой формулы запишем уравнение для линий тока $\psi = z\sqrt{G(X)} = \text{const}$ в пределе $X \rightarrow 0$ как

$$\psi = \frac{z\sqrt{\varphi''(0)}}{X^{1/4}}, \quad X \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

Выше показано, что $\psi \sim \sqrt{G(X)}$ и $G(X) \sim 1/\sqrt{X}$, откуда появляется степень 1/4 в (3.35). Перепишем теперь выражение для функции тока в терминах внутренних переменных x и η в области 2 (Рис. 3.4). Из формул для масштабов обезразмеривания переменных в пограничном слое (3.28) и

в нижнем подслое (3.31, 3.33), находим:

$$\psi = \frac{\eta}{x^{1/4}} = \frac{z}{X^{1/4}}.$$

Здесь ψ – обозначение для функции тока во внутренних переменных в области 2. Уравнение (3.35) предполагает, что удобно проводить сращивание решений для концентрации частиц в переменных (x, ψ) и (X, ψ) при фиксированных значениях функции тока ψ (область 2, Рис. 3.4) и ψ (область 4) при $x \rightarrow \infty$ и $X \rightarrow 0$, соответственно. Продольные координаты связаны соотношением $X = x\varepsilon/\lambda$. Таким образом, условие сращивания можно представить в виде:

$$\rho_{s4}(\psi)|_{X \rightarrow 0} = \rho_{s2}(x, \psi)|_{x \rightarrow \infty}, \quad \psi = \psi \sqrt{\varphi''(0)} \quad (3.36)$$

Введем обозначение

$$\rho_{s2}^{\lim}(\psi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{s2}(x, \psi)$$

для асимптотического профиля концентрации частиц, который должен быть определен из уравнений (3.29)–(3.30) в переменных (x, ψ) . Условие сращивания (3.36) дает концентрацию частиц на входе в нижний подслой.

Затем, в соответствии с (3.34) значение концентрации частиц переносится без изменения вдоль линий тока несущей фазы через область 4 (Рис. 3.4), что позволяет определить концентрацию в области перекрытия с зоной 5 при $X \rightarrow \infty$ из условий сращивания с зоной 2 при $X \rightarrow 0$ (3.36). При $X \rightarrow \infty$ имеем $G(X) = 3$ [231]. Следовательно, уравнение линий тока принимает вид $\psi = z\sqrt{3} = \text{const}$ при $X \rightarrow \infty$. В дальней области 5 вниз по потоку профиль Пуазейля полностью установился по продольной координате и линии тока суть параллельные прямые вдоль оси канала ($z = \text{const}$). Отсюда, с учетом соотношения между координатами z и Y (3.33), следует, что решения в областях 4 и 5 следует асимптотически сращивать при фиксированных ψ и Y :

$$\rho_{s4}(\psi)|_{X \rightarrow 0} = \rho_{s5}(Y), \quad Y\sqrt{3} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

И наконец, исключая переменные промежуточной области 4 из (3.36), находим условие срашивания решений в пограничном слое (область 2, Рис. 3.4) и в дальней области 5 вниз по потоку:

$$\rho_{s5}(Y) = \rho_{s2}^{\lim}(\psi), \quad Y = \psi \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{1/4} \left(\frac{\varphi''(0)}{3} \right)^{1/2} \quad (3.37)$$

Таким образом, с помощью метода срашиваемых асимптотических разложений задача о поиске поперечного профиля концентрации частиц в развитом течении Пуазейля сведена к поиску асимптотики решения задачи о двухфазном пограничном слое (3.29)–(3.30) при больших значениях продольной координаты ($x \rightarrow \infty$). Найдем теперь связь между асимптотикой решения при больших x в пограничном слое в области 2 (Рис. 3.4) с асимптотикой решения вниз по потоку в области 5 полностью установленного течения. Уравнение (3.37) может быть переписано в виде:

$$\rho_{s5}(Y) = \rho_{s2}^{\lim}(\psi), \quad Y = \psi \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{1/4} \left(\frac{\varphi''(0)}{q} \right)^{1/2}, \quad (3.38)$$

где $q = 3$ для течения в плоском канале и $q = 4$ для течения в круглой трубе. Это уравнение позволяет получить поперечный профиль концентрации частиц в дальней области вниз по потоку 5 при любых λ и ε при фиксированных κ_0 и ζ путем преобразования координат.

3.2.5 Полный лагранжев метод для расчета числовой плотности частиц вдоль траекторий

В этом разделе будет описан метод решения уравнений двухфазного пограничного слоя (3.29)–(3.30) (область 2, Рис. 3.4). Проблема поиска поля скорости несущей фазы отделена от проблемы определения полей концентрации и скорости частиц (модель без обратного влияния). Поле скорости несущей фазы определяется известным решением Блазиуса для пограничного слоя на плоской пластине [231]. Как только поле скорости несущей фазы определено, можно найти поле скорости и концентрации среды частиц.

Для этого используется полный лагранжев метод [220], который основан на интегрировании уравнений движения дисперсной фазы вдоль траекторий частиц. При этом концентрация частиц находится из уравнения неразрывности в лагранжевой форме. Поля параметров находятся с наперед заданной точностью путем повторения этой процедуры на сетке дискретных траекторий частиц с заданной плотностью. Полный лагранжев метод предоставляет преимущество по сравнению с эйлеровым подходом в случае, если траектории частиц пересекаются и образуются складки в среде частиц. В таком случае в рамках эйлерова подхода образуются сингулярности в поле концентрации частиц на линиях пересечения траекторий частиц. В дополнение, лагранжев метод позволяет существенно ускорить расчеты, иногда ускорение составляет порядки величин расчетного времени за счет сведения системы УРЧП к системе ОДУ вдоль траекторий частиц.

Ниже будет описан полный лагранжев метод. Введем новые лагранжевые переменные (x_0, η_0, τ) , где x_0 и η_0 – начальные значения координат частицы, а τ – время движения вдоль траектории. В лагранжевой форме законы сохранения массы и импульса среды частиц записываются так:

$$\rho_{s0} = \rho_s |J|, \quad (3.39)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = u_s, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = v_s, \quad \frac{du_s}{d\tau} = F_{sx}, \quad \frac{dv_s}{d\tau} = F_{s\eta}. \quad (3.40)$$

Здесь ρ_{s0} – плотность (концентрация) среды частиц при $\tau = 0$, ρ_s – плотность среды частиц в актуальный момент времени τ и J – якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым координатам. Под производной по τ в данном случае понимается частная производная при фиксированных x_0, η_0 . В начальный момент времени τ_0 элемент сплошной среды частиц является прямоугольником площади $dx_0 d\eta_0$, а в момент τ этот элемент

растягивается, деформируется и принимает площадь $|J|dx_0d\eta_0$, где [220]

$$\begin{aligned} J &= J_{xx}J_{\eta\eta} - J_{x\eta}J_{\eta x}, \\ J_{xx} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{\tau,\eta_0}, \quad J_{x\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_0} \right)_{\tau,x_0}, \\ J_{\eta x} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_0} \right)_{\tau,\eta_0}, \quad J_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} \right)_{\tau,x_0}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В этих формулах для компонент матрицы Якоби индексами обозначены переменные, которые остаются постоянными при взятии частных производных. При пересечении траекторий якобиан обнуляется, а затем меняет знак, но площадь лагранжева элемента сохраняется, поэтому используется абсолютное значение якобиана.

Основная идея полного лагранжева метода состоит в определении поля скорости среды частиц из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.40) вдоль траекторий частиц, предполагая, что поле скорости несущей фазы уже известно. Затем, после вычисления компонент матрицы Якоби (3.41) плотность среды частиц ρ_s находится алгебраически из уравнения (3.39). Процедура нахождения компонент матрицы Якоби состоит в следующем. Уравнение неразрывности среды частиц в эйлеровой форме (3.29) позволяет ввести функцию тока по формулам:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \rho_s u_s, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho_s v_s. \quad (3.42)$$

В лагранжевых переменных функция тока $\psi = \psi(\tau, \eta_0)$. Так как течения рассматриваемого класса являются стационарными, то функция тока зависит только от η_0 , $\psi = \psi(\eta_0)$, и мы можем найти обыкновенную производную от ψ по η :

$$\frac{d\psi}{d\eta_0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_0} \right)_{\tau,x_0} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} \right)_{\tau,x_0} = \rho_{s0} u_{s0}.$$

С учетом формул (3.39), (3.41), и (3.42), данное уравнение можно переписать в виде:

$$\rho_s \left| \frac{u_s}{u_{s0}} J_{\eta\eta} - \frac{v_s}{u_{s0}} J_{x\eta} \right| = \rho_{s0}. \quad (3.43)$$

Сравнивая уравнения (3.43) и уравнение неразрывности в лагранжевой форме (3.39), находим две компоненты матрицы Якоби:

$$J_{xx} = \frac{\partial u_s}{\partial u_{s0}}, \quad J_{\eta x} = \frac{v_x}{u_{s0}}.$$

Для двух других компонент $J_{x\eta}$ и $J_{\eta\eta}$, из (3.40) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений путем дифференцирования по η обеих частей уравнения (3.40). Для упрощения будем считать, что параметр проскальзывания χ задан в области, где происходит миграция частиц.

Вводим новые переменные:

$$e = \frac{\partial x}{\partial \eta_0}, \quad g = \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}, \quad f = \frac{\partial u_s}{\partial \eta_0}, \quad h = \frac{\partial v_s}{\partial \eta_0}.$$

В этих переменных система (3.40) вместе с выражениями для дополнительных переменных записывается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= u_s, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = v_s, \quad \frac{du_s}{d\tau} = F_{sx}, \quad \frac{dv_s}{d\tau} = F_{s\eta}, \quad \frac{de}{d\tau} = f, \quad \frac{dg}{d\tau} = h, \quad (3.44) \\ \frac{df}{d\tau} &= \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} \left(1 + \frac{5}{18} \text{Re}_{s0}^{2/3} (u - u_s)^{2/3} \right) F + \\ &\quad + \frac{3}{2\zeta + 1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} e + \frac{\partial u}{\partial \eta} g \right) \frac{\partial u}{\partial x} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} g \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} e + \frac{\partial v}{\partial \eta} g \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} e + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} g \right) \right], \\ \frac{dh}{d\tau} &= \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} \left[D_0 G + \frac{\text{Re}_{s0}^{2/3} (v - v_s)}{9(u - u_s)^{1/3}} F + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_0 c_l \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^{-1/2} \left(\frac{H}{2}(u - u_s) + F \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^{1/2} (u - u_s) \left(\frac{n(\chi)m_1(\chi)}{x^{1/4}} \exp \left[-m_1(\chi) \frac{\eta}{x^{1/4}} \right] \right) \left(g - \frac{1}{4x} e \right) \right] + \\ &\quad + \frac{3}{2\zeta + 1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} e + \frac{\partial u}{\partial \eta} g \right) \frac{\partial v}{\partial x} + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} g \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} e + \frac{\partial v}{\partial \eta} g \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} e + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} g \right) \right]. \\ F &= \frac{\partial u}{\partial x} e + \frac{\partial u}{\partial \eta} g - f, \quad G = \frac{\partial v}{\partial x} e + \frac{\partial v}{\partial \eta} g - h, \quad H = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} e + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} g. \end{aligned}$$

Таким образом, получена замкнутая система из 8 обыкновенных дифференциальных уравнений (3.44) вдоль траекторий частиц для следующих переменных: координаты частиц x и η и скорости частиц u_s и v_s , две компоненты матрицы Якоби $\partial x / \partial \eta_0$ и $\partial \eta / \partial \eta_0$ и две дополнительных переменных: $\partial u_s / \partial \eta_0$ и $\partial v_s / \partial \eta_0$. Эта система решается численно с начальными условиями, а концентрация частиц ρ_s затем находится алгебраически вдоль траекторий по явной формуле (3.43).

Определим теперь начальные условия для всех переменных. Начальные условия для координат и компонент скорости уже заданы при формулировке уравнений пограничного слоя (3.30). Дифференцируя эти уравнения по η_0 , находим все необходимые начальные условия для компонент матрицы Якоби и вспомогательных переменных. В рассматриваемом случае во входном сечении канала задан равномерный однородный поток без проскальзывания частиц относительно жидкости, что позволяет существенно упростить нахождение начальных условий. В терминах новых переменных, начальные условия для системы (3.44) записываются в виде:

$$\tau = 0 : \quad x = 0, \eta = \eta_0, \quad u_s = 1, v_s = 0, \quad (3.45)$$

$$e = 0, \quad f = 0, \quad g = 1, \quad h = 0. \quad (3.46)$$

3.2.6 Результаты численных расчетов профиля числовой плотности частиц и обсуждение

Задача Коши (3.44)-(3.45) может быть решена после того, как поле скорости несущей фазы найдено из известного решения задачи Блазиуса [231], которая представляет собой начально-краевую задачу для ОДУ третьего порядка. Задача Блазиуса решалась с помощью варианта метода стрельбы. Неизвестное начальное условие для второй производной функции Блазиуса найдено равным $\varphi''(0) = 0.332057$. Компоненты скорости несущей фазы, а также их первая и вторая производные по координатам выражаются через функцию Блазиуса и ее первую и вторую производные, которые находятся

явно из решения задачи Блазиуса. Таким образом, для нахождения правых частей в (3.44) численное дифференцирование не требуется. Задача Коши для ОДУ решалась методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Концентрация частиц находилась явно из уравнения (3.43). Ниже представлены результаты численных расчетов.

В численных расчетах предполагалось, что определяющие размерные параметры принадлежат следующим интервалам: $a \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ м, $\mu \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ Па с для жидкости или $\mu = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Па с для газа, $\rho = 10^3$ кг/м³ для жидкости или $\rho = 1.2$ кг/м³ для газа, $\rho_s^0 \in [10^3, 4 \cdot 10^3]$ кг/м³, $U \in [0.1, 10]$ м/с. Отсюда, безразмерные определяющие параметры находятся в диапазонах $\kappa_0 \in [0.02, 44]$, $\zeta \in [1, 3000]$.

В первую очередь представим результаты расчета траекторий частиц и поперечного профиля концентрации частиц для случая, когда отношение плотностей фаз существенно больше единицы $\zeta = \rho_s^0/\rho \gg 1$ (запыленный газ), а затем представим результаты для $\zeta \sim 1$ (сuspензии). В случае запыленного газа силами присоединенных масс и Архимеда можно пренебречь в (3.44). В расчетах ниже параметр проскальзывания был принят равным постоянной величине для упрощения, так что $m_1 = 0.5$ и $n = 2.7$.

Заметим, что система (3.44) записана с учетом малого но ненулевого числа Рейнольдса частиц Re_{s0} с учетом поправки к силе Стокса в форме Шиллера-Наумана (вариант - поправка Клячко). В расчетах влияние этой поправки к силе Стокса было изучено и показано, что есть лишь очень небольшой количественный эффект данной поправки. По этой причине все последующие результаты представлены для классической силы Стокса.

На Рис. 3.21 представлены траектории частиц, полученные численно для $\kappa_0 = 5$ и 10 . Случай $\kappa_0 = 5, \zeta \gg 1$ соответствует, например, таким размерным параметрам (случай запыленного газа): $a = 10^{-4}$ м, $\mu = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Па с, $\rho = 1.2$ кг/м³, $\rho_s^0 = 2.5 \cdot 10^3$ кг/м³, $U = 1.9$ м/с. Аналогично, для заданных параметров газа и частиц размерная скорость U , соответствующая другим значениям κ_0 , может быть восстановлена из формулы (3.29).

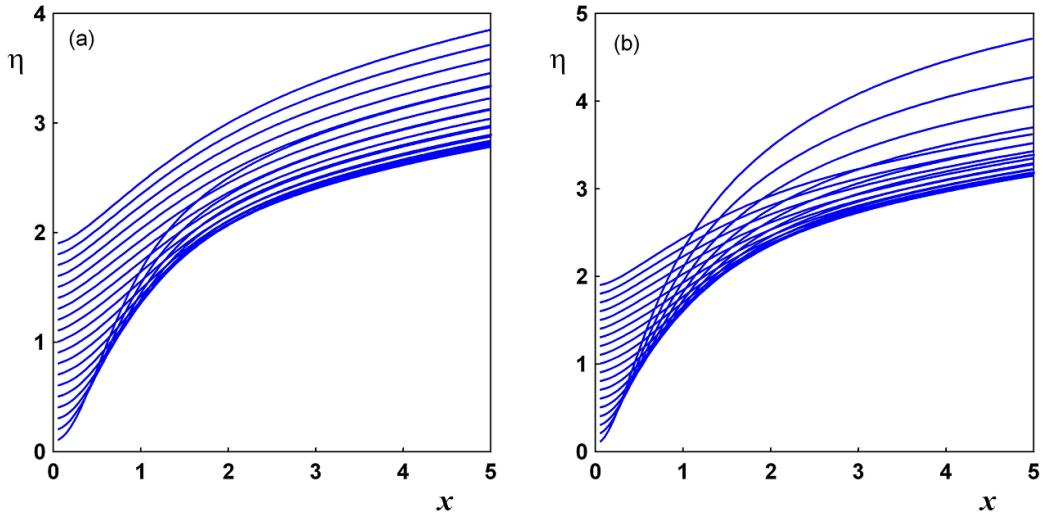


Рис. 3.5: Траектории частиц в пограничном слое с учетом боковой силы Сэфмана с поправкой, $\zeta \gg 1$ (запыленный газ), $\kappa_0 = 5$ (a) and 10 (b).

Рисунок 2.11 демонстрирует формирование слоев чистой жидкости без частиц вблизи стенок канала, что подтверждается численными результатами для поперечного профиля концентрации частиц, представленными на Рис. 3.22. Частицы, изначально двигавшиеся по траекториям вблизи стени, отталкиваются от стени под действием боковой силы. Траектории частиц пересекаются и в среде частиц формируется складка. На краю складки концентрация стремится к бесконечности, поэтому эйлерово описание неприменимо в данном случае, так как требуется решать отдельно уравнения внутри каждой складки со свободной границей, положение которой неизвестно заранее.

На Рис. 3.6, *a* показан профиль концентрации частиц с учетом силы Стокса и дополнительно с учетом классической силы Сэфмана, который совпадает с известным решением о двухфазном пограничном слое [219]. Профиль концентрации частиц, полученный с учетом силы Стокса, содержит неинтегрируемую особенность на стенке [223]. Неинтегрируемая осо-

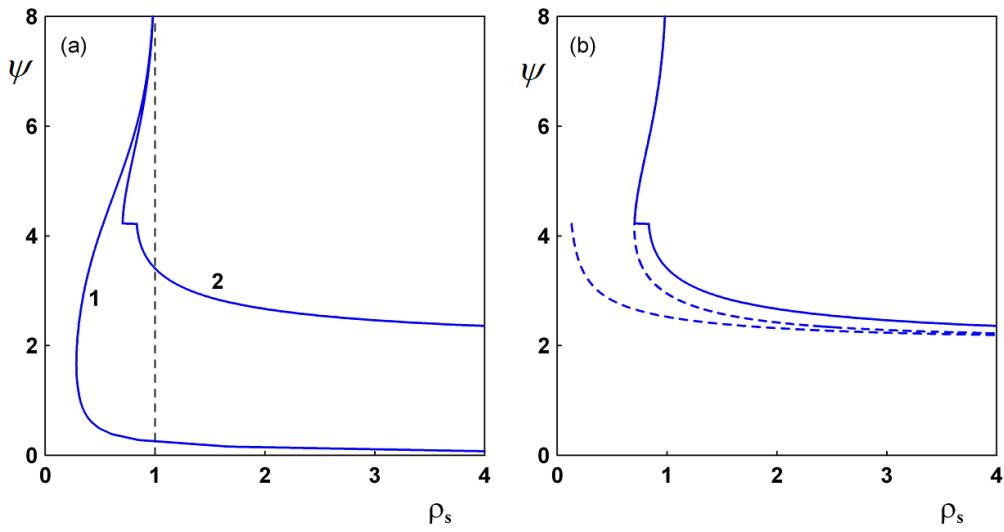


Рис. 3.6: Дальние асимптотики поперечного профиля концентрации частиц ρ_s в зависимости от значения функции тока ψ в пограничном слое, $\kappa_0 = 20$, $\zeta \gg 1$ (запыленный газ); (a) – боковая сила принята в классической форме Сэфмана без поправки (кривая 1) или с поправкой на влияние стенки и конечность параметра проскальзывания (кривая 2); (b) – полный профиль концентрации (сплошная линия) и профили концентрации в каждой части складки по отдельности (штриховая линия) с учетом боковой силы с поправкой.

бенность означает, что модель не является равномерно пригодной вблизи стенки и требуется учесть дополнительные эффекты. В то же время предложенная в настоящей работе модель с поправкой к боковой силе позволяет описать процесс формирования двухслойной складки в среде частиц под действием боковой силы, направленной от стенки. Профиль концентрации показывает наличие слоя чистой жидкости без частиц вблизи стенки (кривая 2) и формирование складки в среде частиц выше линии, на которой боковая сила меняет знак. Рис. 3.6, b показывает профиль концентрации в каждом слое складки по отдельности, а также суммарный профиль концентрации с учетом наложения двух слоев складки. Штриховая линия, которая внезапно оканчивается, представляет профиль концентрации в том

слое, который изначально была ближе к стенке и затем под действием боковой силы был “отвернут” от стенки, и произошло наложение двух слоев среды частиц. Асимптота и скачок в полном профиле концентрации (Рис. 3.6, *b*) соответствуют нижнему и верхнему краям складки, соответственно. Поправочный коэффициент к боковой силе c_l зависит от поперечной координаты, имеет положительный знак вблизи стенки и меняет знак на отрицательный на некотором расстоянии от стенки (эта линия является асимптотой для полного профиля концентрации частиц на Рис. 3.6, *b*). Частицы мигрируют от стенки в сторону линии, на которой боковая сила принимает нулевое значение, однако в силу инерции частицы проходят мимо этой линии и полностью не успевают на ней аккумулироваться до тех пор, пока релаксация скоростей фаз полностью не завершается под действием силы Стокса.

Так как уравнения пограничного слоя на стенке плоского канала и на стенке круглой трубы совпадают с точностью до коэффициентов Ламе цилиндрической системы координат в уравнении неразрывности, все представленные выше рассуждения также качественно справедливы и для течения в круглой трубе. Таким образом, результаты можно интерпретировать следующим образом: инерционная миграция частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке плоского канала (круглой трубы) приводит к аккумуляции частиц на двух параллельных плоскостях (кольце), с неоднородным распределением концентрации частиц между плоскостями (внутри кольца) и слоями без частиц вблизи стенок. Влияние параметра κ_0 , характеризующего величину боковой силы и интенсивность миграции на профиль числовой концентрации частиц, показано на Рис. 3.23. Можно видеть, что чем больше κ_0 , тем шире складка в среде частиц. С увеличением инерции частиц, увеличивается глубина их проникновения в область над линией равновесия, на которой боковая сила обращается в ноль.

На Рис. 3.8 представлен профиль концентрации частиц для случая, когда отношение плотностей фаз имеет порядок единицы $\zeta \sim 1$, что соот-

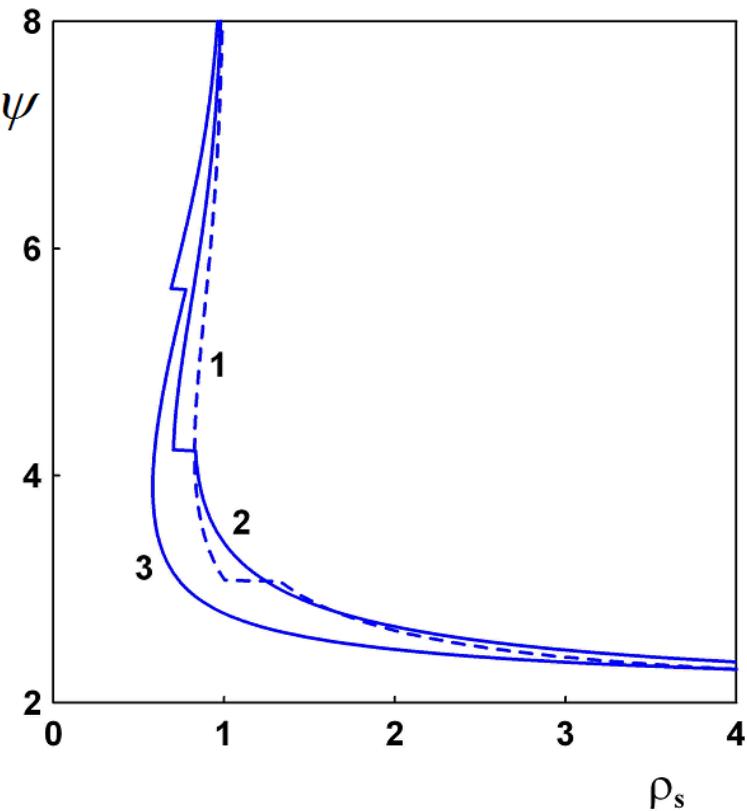


Рис. 3.7: Асимптотика вниз по потоку для профиля концентрации ρ_s в зависимости от значения функции тока ψ в пограничном слое, $\zeta \gg 1$ (запыленный газ), $\kappa_0 = 10, 20$, и 40 (кривые 1-3).

ветствует течениям суспензии (в отличие от случая запыленного газа, рассмотренного выше). По сравнению со случаем запыленного газа в профиле концентрации появляется дополнительная неоднородность, а именно, дополнительный локальный максимум концентрации внутри складки среды частиц. Отметим, что положение линии равновесия, на которой боковая сила обращается в ноль, не зависит от отношения плотностей фаз ζ . Из профилей концентраций в двух слоях складки видно, что локальный максимум образуется в том слое, который изначально был ближе к стенке, и где, следовательно, рассогласование скоростей фаз и ускорение жидкости было больше.

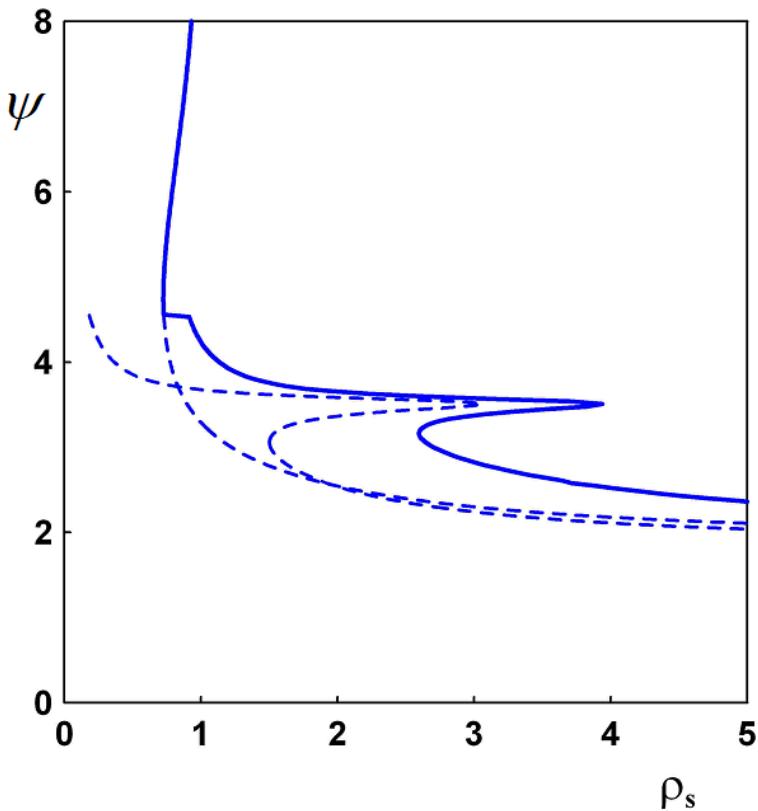


Рис. 3.8: Асимптотика вниз по потоку для профиля концентрации частиц ρ_s в зависимости от значения функции тока ψ в пограничном слое, $\zeta \sim 1$ (сuspензия), $\kappa_0 = 20$. Профиль концентрации в каждом слое складки (штриховая линия) и полный суммарный профиль концентрации (сплошная линия).

В данном случае траектории частиц, показанные на Рис. 3.9, существенно отличаются от случая запыленного газа (Рис. 3.5). Причина состоит в том, что в случае $\zeta \sim 1$ в уравнениях закона сохранения импульса появляется дополнительные слагаемые за счет сил Архимеда и присоединенных масс (см. уравнения (3.29)). Данное слагаемое пропорционально ускорению жидкости. В проекции на ось η данное ускорение отрицательно в пограничном слое, так как линии тока ведут себя как $x^{1/4}$. Таким образом, это слагаемое можно рассматривать как дополнительную боковую силу, направленную в сторону стенки. Чем меньше значение ζ , тем больше величина этого слагаемого и, следовательно, тем более выраженной является

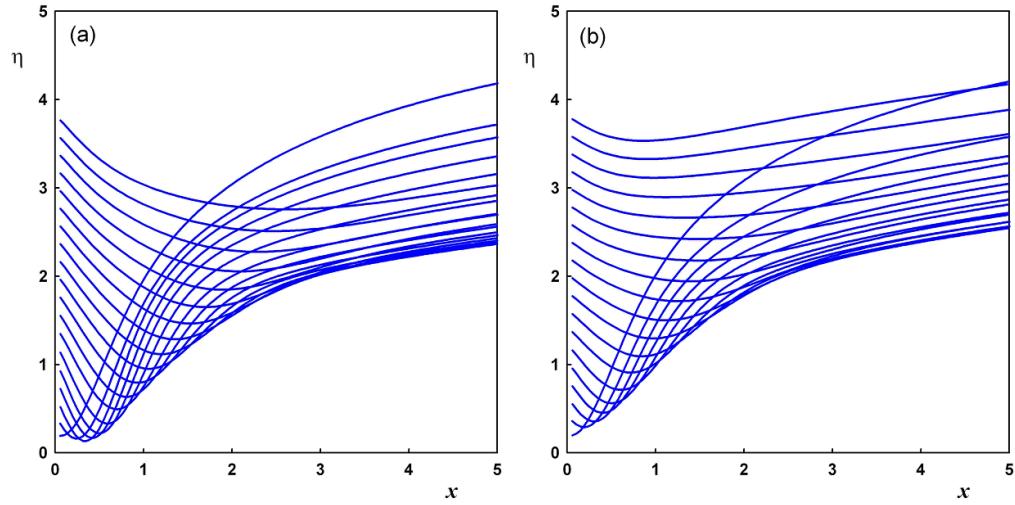


Рис. 3.9: Траектории частиц в пограничном слое при $\kappa_0 = 20$ и $\zeta = 3$ (a) и $\zeta = 5$ (b).

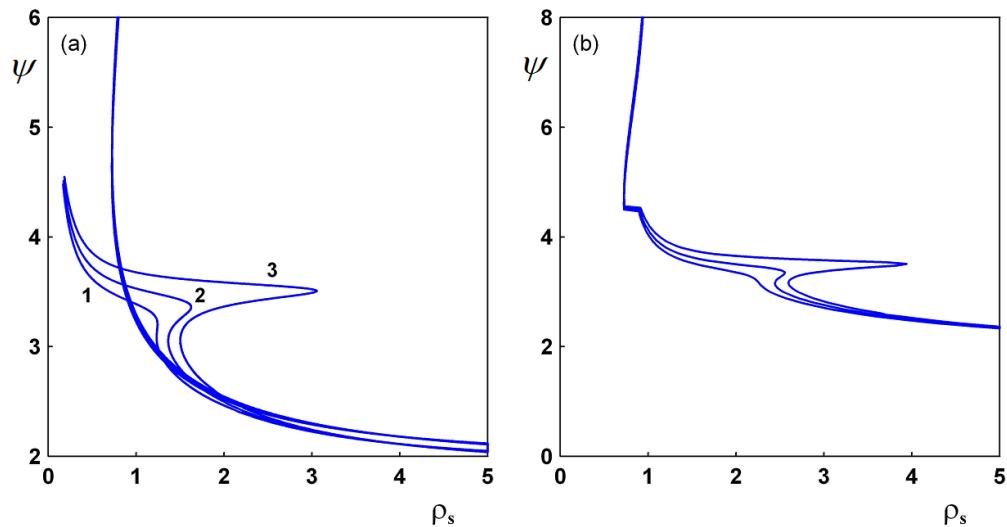


Рис. 3.10: Асимптотики профиля концентрации ρ_s в зависимости от значения функции тока ψ в пограничном слое, $\kappa_0 = 20$ и $\zeta = 5, 4.5$, и 4 – кривые 1-3. Профили в каждом слое складки (a) и суммарный профиль (b).

миграция к стенке в начальном участке (этот дополнительный эффект отсутствует в случае запыленного газа, Рис. 3.5). С увеличением отношения

плотностей ζ на Рис. 3.9, картина траекторий частиц стремится к аналогичной картине для случая запыленного газа (Рис. 3.5). Влияние отношения плотностей фаз на профиль концентрации частиц показано на Рис. 3.10. В случае запыленного газа, когда $\zeta \gg 1$, профиль концентрации стремится к соответствующему результату, показанному на Рис. 3.6. Однако, с уменьшением отношения плотностей в сторону 1 (случай нейтрально плавучих частиц), при достаточно больших κ_0 дополнительный внутренний локальный максимум концентрации увеличивается (см. Рис. 3.11,(a)). В случае течения в трубе формируется так называемое внутреннее кольцо, на котором дополнительно аккумулируются частицы, что качественно воспроизводит экспериментальные результаты по миграции нейтрально плавучих частиц в круглой трубе [115]. Заметим, что экспериментальное исследование [115] было направлено на изучение миграции нейтрально плавучих частиц под действием силы за счет вращения частицы в сдвиговом потоке [55], однако в начальном участке в силу неидеальности условий эксперимента могло иметь место продольное проскальзывание частиц, приводящее к миграции за счет силы Сэфмана с поправкой на присутствие стенки и сил Архимеда и присоединенных масс, что и приводит к формированию дополнительного максимума.

Предложенная модель позволяет количественно оценить ширину слоя чистой жидкости без частиц вблизи стенок в области 5 (Рис. 3.4). Толщина этого слоя может быть получена из формулы для боковой силы Сэфмана с поправкой (3.29) из условия что боковая сила обращается в ноль на линии равновесия, отделяющей слой чистой жидкости от двухслойной складки среды частиц:

$$\psi_{sing} = \frac{\ln n(\chi)}{m_1(\chi)}.$$

Здесь χ – это среднее значение параметра проскальзывания. В расчетах предполагалось, что параметр проскальзывания задан постоянным, что позволяет получить оценку для ширины слоя чистой жидкости без частиц

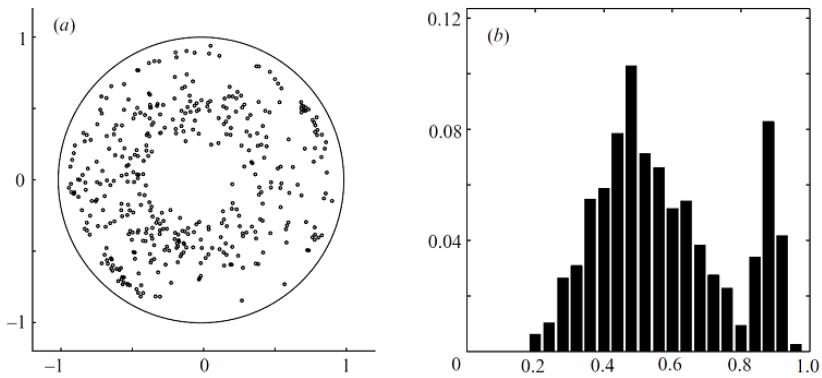


Рис. 3.11: Экспериментально измеренное распределение частиц при миграции в течении суспензии нейтрально плавучих частиц в круглой трубе при $Re = 1000$ [115]. Можно видеть формирование дополнительного локального максимума концентрации частиц на внутреннем кольце (ср. Рис. 3.10).

у стенок. Подставляя это выражение в формулу (3.37), получаем ширину пристеночного слоя чистой жидкости, отнесенную к полуширине канала ($q = 3$) или радиусу трубы ($q = 4$):

$$Y_{sing} = \frac{\ln n(\chi)}{m_1(\chi)} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{1/4} \left(\frac{\varphi''(0)}{q} \right)^{1/2} \quad (3.47)$$

3.2.7 Сравнение с известными теоретическими исследованиями

В более ранних работах, относящихся к двухфазному пограничному слою, учитывались только сила Стокса [221] и сила Сэфмана в классической форме [223], что приводило к неинтегрируемой особенности в поперечном профиле концентрации частиц на стенке [222, 224] или возникновению локальных зон накопления частиц на стенке [223]. В настоящей работе построена модель с учетом поправки к боковой силе Сэфмана на присутствие стенки и конечность параметра проскальзывания, и получен профиль концентрации частиц с пристеночным слоем чистой жидкости без частиц. Особенность в профиле концентрации теперь имеет место не на стенке, как в ранних работах, а на границе “сuspension-чистая жидкость” внутри области течения

(Рис. 3.6–3.8).

Выведем теперь асимптотику для концентрации частиц вблизи особенности. Рассмотрим тонкий слой над линией, на которой концентрация обращается в бесконечность. Нормальная компонента вектора скорости жидкости v в этом слое конечна, в то время как нормальная компонента скорости частиц v_s мала в этом слое и обращается в ноль на линии особенности. Введем новые растянутые переменные внутри рассматриваемого слоя:

$$\eta - \eta_{sing} = \delta\eta_1, \quad v_s = \sqrt{\delta}v_{s1}$$

Здесь δ – малый параметр, v_{s1} и η_1 – поперечная скорость и новая нормальная координата, отсчитываемая от линии особенности, соответственно. Подставляя эти выражения в уравнения (3.29) и оставляя только главные члены, получим:

$$v_{s1} \frac{\partial v_{s1}}{\partial \eta_1} - v = 0, \quad \frac{\partial \rho_s v_{s1}}{\partial \eta_1} = 0.$$

Степени в асимптотическом разложении решения во внутренних переменных по δ выбраны из условия, что результирующая система асимптотических уравнений непротиворечива и наименее вырождена [230]. Из этих уравнений, находим асимптотику для концентрации частиц вблизи особенности:

$$v_{s1} \sim \sqrt{\eta_1}, \quad \rho_s \sim 1/\sqrt{\eta_1}, \quad \eta_1 \rightarrow 0 \quad (3.48)$$

Таким образом, приходим к выводу, что особенность в профиле числовой плотности частиц является *интегрируемой*. Отсюда, согласно явным формулам, связывающим среднее расстояние между частицами и параметры особенности в профиле концентрации частиц, делаем вывод, что среднее расстояние в окрестности особенности по-прежнему существенно превышает размер частиц. Следовательно, несмотря на то, что числовая плотность частиц неограниченно возрастает при приближении к границе складки в среде частиц, среднее межчастичное расстояние остается много

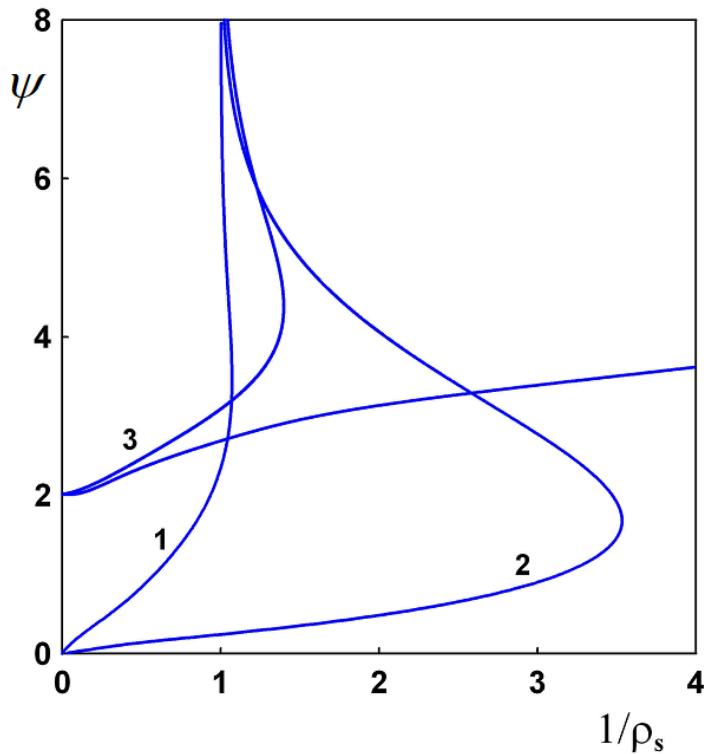


Рис. 3.12: Асимптотики профиля концентрации $1/\rho_s$ в зависимости от значения функции тока ψ в пограничном слое, $\kappa_0 = 20$ и $\zeta \gg 1$. Кривые 1-3: только сила Стокса (1), дополнительно сила Сэфмана в классической форме (2) или с поправкой на присутствие стенки и конечность параметра проскальзывания (настоящая работа, кривая 3).

больше радиуса частиц и двухконтинуальное приближение остается применимым [232].

В работе [232] была исследована интегрируемость особенности в профиле концентрации частиц при течении запыленного газа около затупленного тела при наличии отражения частиц от поверхности тела. Было показано, что на огибающей области, занятой траекториями частиц, концентрация также ведет себя $\sim 1/\sqrt{\eta}$ (3.48). Можно сделать общее утверждение, что особенность в поле числовой плотности среды частиц является интегри-

руемой, если она находится внутри области течения, где трансверсальная скорость несущей фазы отлична от нуля. И этот вывод не зависит от природы физического явления, которое приводит к формированию складки в среде частиц, будь то боковая подъемная сила Сэфмана или отражение частиц от твердой стенки.

Асимптотика (3.48) подтверждается численными расчетами. На Рис. 3.12, показана величина, равная обратной концентрации частиц, для случая запыленного газа ($\zeta \gg 1$), что позволяет провести сравнение с более ранними работами. Показаны результаты с учетом (i) только силы Стокса (кривая 1), (ii) дополнительно с учетом силы Сэфмана в классической форме (кривая 2) и (iii) результат настоящей работы с учетом силы Сэфмана с поправкой (кривая 3). Можно видеть, что кривые 1 и 2 имеют линейную асимптотику ($1/\rho_s \sim \eta$, $\eta \rightarrow 0$) в окрестности точки особенности ($\eta = 0$), в то время как кривая 3 имеет асимптотику $\sim \sqrt{\eta}$ вблизи особенности.

Отметим также, что уже после выхода в свет работ автора по данной теме в 2008 г. вышли работы по исследованию миграции частиц в пограничном слое у вертикальной плоской пластины с учетом силы тяжести, действующей на частицы, в приложении к течениям запыленного газа ($\zeta \ll 1$) и было представлено соответствующее сравнение с экспериментами [225]. Были рассмотрены случаи, когда частицы выпадают на стенку либо движутся от стенки в сторону ядра потока, в зависимости от определяющих параметров.

Итак, в настоящей работе продемонстрировано, что можно построить самосогласованную модель двухфазного пограничного слоя и получить непротиворечивый результат для профиля концентрации частиц в рамках приближения разреженной суспензии и двухконтинуального подхода путем учета поправки к боковой силе, учитывающей присутствие твердой стенки и конечность параметра проскальзывания.

Результаты этого раздела опубликованы в [2, 30].

3.3 Миграция в суспензии осаждающихся частиц в трещине

В настоящем разделе рассматривается задача о поперечной миграции осаждающихся частиц под действием инерционной боковой силы (разд. 3.1 [3]) при течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле-Шоу. Целью работы является построение асимптотической двухконтинуальной модели миграции частиц, а также изучение эволюции поперечного профиля концентрации частиц вдоль канала. Найденный поперечный профиль концентрации может затем быть использован для замыкания двумерных осредненных моделей переноса частиц в вертикальных плоских каналах [103]. Течение рассматривается вдали от начального участка канала, где можно считать установившимся профиль Пуазейля для скорости несущей фазы. Решение будет асимптотически срашиваться с решением задачи о миграции частиц в начальном участке канала, которое было найдено в разделе 3.2 [2] при отсутствии силы тяжести. Для расчета эволюции поля концентрации частиц вдоль канала будет использоваться полный лагранжев метод [220], который может применяться в случаях пересечения траекторий частиц и формирования сингулярностей в поле числовой концентрации частиц, когда эйлеровы методы уже не позволяют получить корректное решение [224].

3.3.1 Постановка задачи

Рассматривается стационарное ламинарное течение разреженной суспензии в вертикальном плоском канале ширины $2d$ с непроницаемыми стенками в поле силы тяжести (Рис. 3.13). Несущей фазой является вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость с вязкостью μ и плотностью ρ . Дисперсная фаза состоит из одинаковых неброуновских сферических частиц радиуса a и массы m с плотностью материала ρ_s . Движение суспензии рассматривается в рамках модели двух взаимопроникающих континуумов [218].

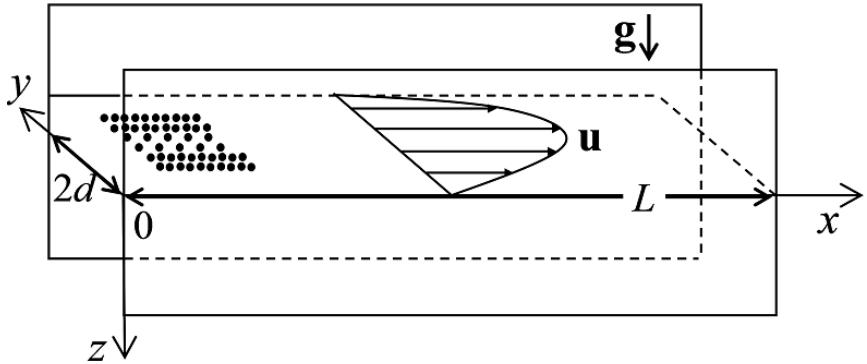


Рис. 3.13: Схема течения и система координат.

Предполагается, что объемная концентрация частиц ϕ мала, а отношение материалов плотностей фаз $\zeta = \rho_s / \rho$ имеет порядок единицы, так что массовая концентрация частиц мала: $\alpha_m = C_p \zeta \ll 1$. При данных предположениях можно не учитывать влияние частиц на течение несущей фазы, а тензор напряжений в среде частиц считать пренебрежимо малым [218].

Вводится декартова система координат с началом на стенке канала. Ось x направлена горизонтально вдоль течения, ось y – поперек канала, а ось z – вертикально вниз (Рис. 3.13). Течение происходит под действием постоянного горизонтального градиента давления, не зависящего от пространственных координат. Будем рассматривать течение вне начального участка канала, где можно считать, что профиль скорости несущей фазы $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$ уже не зависит от продольной координаты x и описывается законом Пуазейля:

$$u^* = U_m \left(\frac{2y^*}{d} - \frac{y^{*2}}{d^2} \right), \quad v^* = 0, \quad w^* = 0 \quad (3.49)$$

При $x = 0$ заданы следующие условия. Профиль числовой концентрации частиц поперек канала известен из условия сращивания с решением в начальном участке канала $n_s^* = f^*(y^*)$ [2]. Относительная скорость частиц в горизонтальном направлении равна нулю, а в вертикальном направлении постоянна. Ниже будет показано, что при таких граничных условиях поле гидродинамических параметров среды частиц не зависит от вертикальной координаты z . Таким образом, рассматривается двумерное течение в го-

ризонтальном сечении ячейки Хеле-Шоу. Так как течение симметрично относительно средней линии канала, будем рассматривать область между одной из стенок и средней линией канала.

На частицу действуют сила тяжести, сила Стокса \mathbf{F}_{St} , сила Архимеда \mathbf{F}_A , сила присоединенных масс \mathbf{F}_{am} [229], а также инерционная боковая сила \mathbf{F}_l :

$$m \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{St} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{am} + \mathbf{F}_l$$

$$\mathbf{F}_{St} = 6\pi a\mu(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*), \quad \mathbf{F}_A = \rho\tau_s \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} - \mathbf{g} \right), \quad \mathbf{F}_{am} = \rho \frac{\tau_s}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} \right)$$

Здесь $\mathbf{v}_s^* = (u_s^*, v_s^*, w_s^*)$ – поле скорости дисперсной фазы, τ_s – объем одной частицы, $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ – ускорение силы тяжести.

Так как ускорение жидкости в течении Пуазейля равно нулю $d\mathbf{v}^*/dt^* = 0$, силы Архимеда и присоединенных масс принимают вид:

$$\mathbf{F}_A = -\rho\tau_s\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_{am} = -\rho \frac{\tau_s}{2} \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*}$$

Инерционная боковая сила \mathbf{F}_l , вызывающая поперечную миграцию, обусловлена рассогласованием скоростей фаз и сдвиговым характером течения несущей фазы. Выражение для этой силы зависит от направления относительной скорости частицы по отношению к скорости жидкости. В рассматриваемой постановке вертикальное осаждение частиц приводит к возникновению силы \mathbf{F}_{lz} . Выражение для поперечной силы \mathbf{F}_{lz} на частицу, осаждающуюся в горизонтальном течении Пуазейля через вертикальный плоский канал, было найдено в разд.3.1 [3]:

$$\mathbf{F}_{lz} = \rho w_s^{*2} a^2 c_{lz}(y, w_{s0}, \text{Re}) \mathbf{e}_z, \quad \text{Re} = \frac{\rho d U_m}{\mu}, \quad w_{s0} = \frac{w_s^*}{U_m}, \quad y = \frac{y}{d}$$

Здесь Re – число Рейнольдса канала, w_{s0} – безразмерная скорость осаждения частицы, y – безразмерная поперечная координата, \mathbf{j} – единичный вектор оси y . Данное выражение было получено для малых, но конечных чисел Рейнольдса частиц Re_G и Re_s , вычисленных по характерному гради-

енту скорости несущей фазы $G = U_m/d$ и скорости осаждения w_s^* :

$$\text{Re}_G = \frac{a^2 G \rho}{\mu} = \text{Re} \frac{a^2}{d^2} \ll 1, \quad \text{Re}_s = \frac{a w_s^* \rho}{\mu} = w_{s0} \text{Re} \frac{a}{d} \ll 1 \quad (3.50)$$

$$\chi = \frac{\text{Re}_s}{\sqrt{\text{Re}_G}} \sim 1$$

Сила \mathbf{F}_{lz} направлена перпендикулярно стенкам к центру канала. Коэффициент силы c_{lz} достигает максимума на стенках канала и обращается в нуль на оси канала (Рис. 3.14) [3]. При числе Рейнольдса Re порядка единицы и меньше зависимость коэффициента c_{lz} от координаты y является монотонной. При увеличении Re зависимость $c_{lz}(y)$ становится немонотонной. Появляются локальные максимум и минимум боковой силы (Рис. 3.14, кривая 3). Такая немонотонность имеет место при малых значениях безразмерной скорости осаждения w_{s0} и исчезает с увеличением w_{s0} . В данной работе будем рассматривать три характерные зависимости $c_{lz}(y)$ [3]: монотонно убывающая, монотонная и быстро убывающая вблизи стенки, немонотонная (Рис. 3.14).

Боковая сила \mathbf{F}_{lz} вызывает миграцию частиц от стенок к центру канала, что приводит к рассогласованию скоростей фаз в продольном направлении. Таким образом, помимо боковой силы \mathbf{F}_{lz} , вызванной рассогласованием скоростей фаз в направлении z , появляется боковая сила \mathbf{F}_{lx} за счет рассогласования скоростей в направлении x :

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_{lz} + \mathbf{F}_{lx} \quad (3.51)$$

Вектора сил \mathbf{F}_{lx} и \mathbf{F}_{lz} параллельны оси y . Компонента поперечной силы \mathbf{F}_{lx} была рассчитана в рамках предположений (3.50) для одиночной частицы в течении Пуазейля [106, 55]:

$$\mathbf{F}_{lx} = c_{lx} a^2 \sqrt{\mu \rho \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|} (u^* - u_s^*) \text{sign} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \mathbf{j}$$

В случае движения частицы в неограниченном линейном сдвиговом потоке данное выражение для инерционной боковой силы было получено

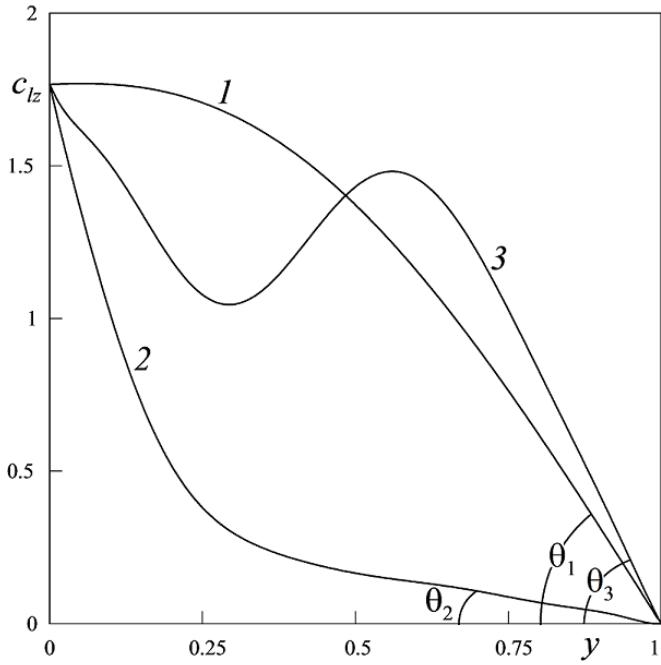


Рис. 3.14: Коэффициент боковой силы c_{l_z} для $\text{Re} = 1$ (1), $\text{Re} = 100$, $w_{s0} = 0.4$ (2) и $\text{Re} = 100$, $a/d \ll w_{s0} \ll 1$ (3).

при условии сильного сдвига $\chi \ll 1$, причем коэффициент силы равен $c_{lx} = 6.46$ (сила Сэфмана) [159]. С учетом сделанных предположений уравнения неразрывности и движения для среды частиц можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{div}(n_s^* \mathbf{v}_s^*) = 0, \quad m \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} = 6\pi a \mu (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*) + \tau_s (\rho_s - \rho) \mathbf{g} - \rho \frac{\tau_s}{2} \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt^*} + (3.52) \\ + c_{lx} a^2 \sqrt{\mu \rho \frac{\partial u^*}{\partial y^*}} (u^* - u_s^*) \mathbf{j} + \rho w_s^{*2} a^2 c_{l_z}(y, w_{s0}, \text{Re}) \mathbf{j} \end{aligned}$$

Рассматриваемое течение по предположению является стационарным, поэтому можно считать, что частицы осаждаются без ускорения, и решение уравнения движения (3.52) в проекции на ось z дает известную формулу

Стокса для скорости осаждения:

$$w_s^* = \frac{2a^2(\rho_s - \rho)g}{9\mu} \quad (3.53)$$

Таким образом, параметры дисперсной фазы не зависят от координаты z и рассматриваемое течение является плоским. Введем безразмерные переменные по формулам:

$$\begin{aligned} x^* &= Lx, \quad y^* = dy, \quad u_s^* = U_m u_s, \quad v_s^* = V v_s, \quad w_s^* = U_m w_{s0} \\ t^* &= Lt/U_m, \quad n_s^* = n_0 n_s, \quad (u^* - u_s^*) = U_x(u - u_s) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь L – характерный продольный масштаб длины, на котором происходит миграция частиц поперек канала; V – характерная скорость поперечной миграции частиц; U_x – характерный масштаб рассогласования скоростей фаз в продольном направлении; n_0 – характерная величина числовой концентрации частиц. Величины V и L находятся из следующих соотношений:

$$6\pi a\mu V = \rho w_s^{*2} a^2, \quad L/U_m = d/V \quad (3.55)$$

Первое равенство найдено из условия, что вызванная осаждением боковая сила имеет такой же порядок величины, как и поперечная компонента силы сопротивления частицы (раздел 3.1, [3]). Так как $\text{Re}_s \ll 1$, силу сопротивления можно записать по формуле Стокса, где в качестве относительной скорости частицы следует подставить скорость миграции. Второе соотношение следует из уравнения неразрывности (3.52). На выбранном масштабе длины L частицы мигрируют в поперечном направлении на расстояние порядка полуширины канала d , а их поперечная скорость меняется на величину порядка V .

Масштаб продольного рассогласования скоростей фаз U_x находится из уравнения движения (3.52) в проекции на ось x при условии, что в безразмерных переменных все члены в этом уравнении имеют один порядок величины, то есть ускорение частиц по порядку величины сравнимо с силой

Стокса:

$$U_x = \frac{mU_m^2}{6\pi a \mu L} \quad (3.56)$$

Подставляя формулы (3.54) в (3.52) и принимая во внимание (3.49), (3.55) и (3.56), получаем уравнения движения частиц в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(n_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial(n_s v_s)}{\partial y} &= 0, \quad \frac{du_s}{dt} = \beta(2y - y^2 - u_s) \\ \frac{dv_s}{dt} &= \beta \left(-v_s + c_{lx}(y, w_{s0}, \text{Re}) + \kappa \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} (u - u_s) \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Здесь β – параметр инерционности частиц, пропорциональный отношению продольного масштаба задачи L к длине релаксации стоксовой частицы $l = mU_m/6\pi a \mu$:

$$\beta = \frac{2L}{(2 + \eta)l} = \frac{54\pi}{(2 + \eta)(a/d)^3 w_{s0}^2 \text{Re}^2}$$

Безразмерный параметр κ определяется по формуле

$$\kappa = \frac{c_{lx}(2 + \eta)}{54\pi} \text{Re}^{3/2} \frac{a^3}{d^3}$$

Используя условие $c_{lx} \sim 1$ и принимая во внимание первое неравенство из (3.50), получаем, что $\kappa \ll 1$. Таким образом, на рассматриваемом масштабе длины можно пренебречь боковой силой \mathbf{F}_{lx} , вызванной продольным рассогласованием скоростей фаз.

Границные условия при $x = 0$ в безразмерных переменных имеют вид:

$$x = 0 : \quad u_s = u = 2y - y^2, \quad v_s = v = 0, \quad n_s = f(y) \quad (3.58)$$

Исследуем эволюцию однородного и неоднородного профилей концентрации частиц:

$$\text{I. } f(y) = 1, \quad \text{II. } f(y) = \begin{cases} 0, & y < \varepsilon \\ \sqrt{\frac{\delta - \varepsilon}{y - \varepsilon}}, & \varepsilon \leq y \leq \delta \\ 1, & \delta < y \leq 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Здесь $y = 0$ на стенке и $y = 1$ на средней линии канала. Профиль II содержит область постоянной концентрации вблизи средней линии канала, свободную от частиц пристеночную область ширины ε и промежуточную область ширины $(\delta - \varepsilon)$, где концентрация неоднородна и возрастает от единицы до бесконечности (Рис. 3.15 в, кривая $x = 0$). Такая зависимость аппроксимирует поперечный профиль числовой концентрации, который формируется в начальном участке канала в результате миграции частиц под действием инерционной боковой силы за счет продольного рассогласования скоростей фаз (см. разд. 3.2, [2]). Из этой же работы следуют оценки для параметров: $\varepsilon \approx 0.1$, $\delta \approx 4\varepsilon$. В [2] использовалось выражение для силы \mathbf{F}_{lx} с учетом влияния стенки и конечности отношения χ [56]. Результирующий профиль числовой концентрации поперек канала содержит свободные от частиц пристеночные слои. Профиль между слоями в ядре течения является неоднородным с особенностями концентрации на границах слоев. Эти особенности в профиле концентрации являются интегрируемыми (разд. 3.2, [2]).

Уравнения (3.57) с граничными условиями (3.58) образуют замкнутую систему для описания среды частиц. Система содержит три безразмерных параметра β , Re и w_{s0} , причем параметры Re и w_{s0} входят только как аргументы функции $c_{lz}(y, w_{s0}, Re)$.

В предельных случаях сильно инерционных ($\beta \rightarrow 0$) и безынерционных ($\beta \rightarrow \infty$) частиц из (3.57), (3.58) получаем аналитические решения

$$\begin{aligned} \beta \rightarrow \infty : \quad & u_s(x, y) = 2y - y^2, \quad v_s(x, y) = c_{lz}(y, w_{s0}, Re) \\ \beta \rightarrow 0 : \quad & u_s(x, y) = 2y - y^2, \quad v_s(x, y) = 0, \quad n_s(x, y) = f(y) \end{aligned} \quad (3.60)$$

В общем случае для решения уравнений (3.57) с граничными условиями (3.58) используется полный лагранжев метод [220], который позволяет вычислить параметры дисперсной фазы, включая числовую концентрацию, вдоль выбранных траекторий движения частиц.

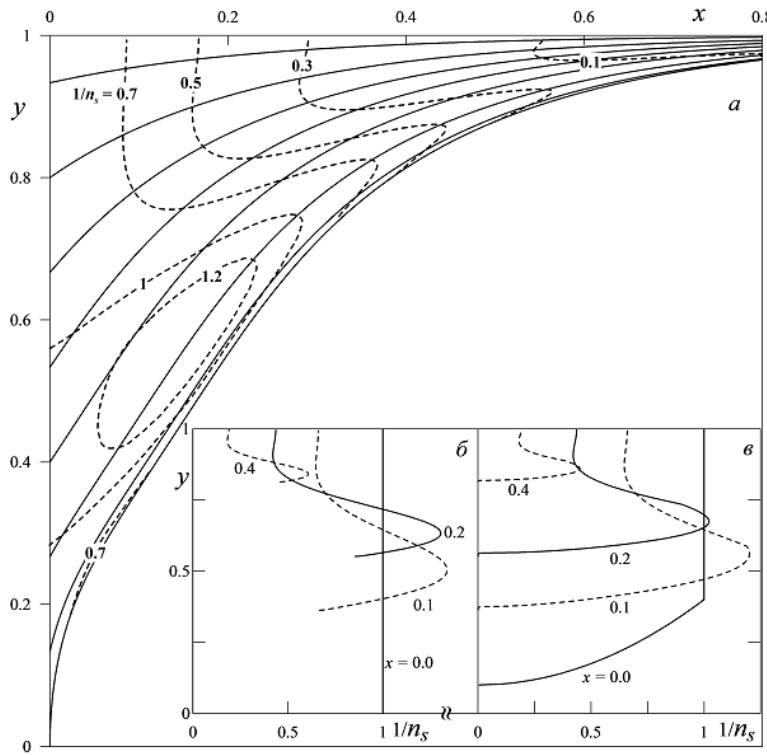


Рис. 3.15: Траектории частиц (сплошные линии) и изолинии $1/n_s$ (штриховые линии с числами) для однородного начального профиля n_s (a); распределения $1/n_s$ для однородного (б) и неоднородного (в) начального профиля n_s при $\beta \rightarrow \infty$, $Re = 100$, $a/d \ll w_{s0} \ll 1$.

3.3.2 Применение полного лагранжева метода для расчета параметров среды частиц

Запишем уравнения (3.57) в лагранжевых переменных (x_0, y_0, t) , где x_0 , y_0 – фиксированные координаты начала траектории частицы, а $t \geq 0$ – безразмерное время движения частицы вдоль траектории:

$$\begin{aligned} n_s |J| &= f(y_0), \quad |J| = \left| \frac{\partial x_s}{\partial x_0} \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - \frac{\partial y_s}{\partial x_0} \frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right| \quad (3.61) \\ \frac{dx_s}{dt} &= u_s, \quad \frac{du_s}{dt} = \beta(2y_s - y_s^2 - u_s) \\ \frac{dy_s}{dt} &= v_s, \quad \frac{dv_s}{dt} = \beta(-v_s + c_{lz}(y_s, w_{s0}, Re)) \end{aligned}$$

Здесь $|J|$ – модуль якобиана перехода от эйлеровых координат (x, y) к

лагранжевым (x_0, y_0) . Так как течение является стационарным, то две из четырех компонент якобиана выражаются через компоненты скорости [220]:

$$|J| = \left| \frac{u_s}{u_0} \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - \frac{v_s}{u_0} \frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right| \quad (3.62)$$

Здесь $u_0 = (2y_0 - y_0^2)$ – начальная продольная скорость частицы. Дополнительные уравнения для нахождения производных $\partial y_s / \partial y_0$ и $\partial x_s / \partial y_0$ получаются путем дифференцирования уравнений движения частиц по лагранжевой координате y_0 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial u_s}{\partial y_0}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y_0} \right) = \beta \left(2(1 - y_s) \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - \frac{\partial u_s}{\partial y_0} \right) \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial v_s}{\partial y_0}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_s}{\partial y_0} \right) = \beta \left(-\frac{\partial v_s}{\partial y_0} + \frac{\partial c_{lz}(y_s, w_{s0}, \text{Re})}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right) \quad (3.64)$$

Начальные условия при $t = 0$ находятся из (3.58)

$$x_s = 0, \quad y_s = y_0, \quad u_s = 2y_0 - y_0^2, \quad v_s = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = 1, \quad \frac{\partial u_s}{\partial y_0} = 2 - 2y_0, \quad \frac{\partial v_s}{\partial y_0} = 0 \quad (3.66)$$

При $\beta \rightarrow \infty$ поле скоростей дисперсной фазы известно (3.60), поэтому уравнения упрощаются:

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s = 2y_s - y_s^2, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s = c_{lz}(y_s, w_{s0}, \text{Re}) \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y_0} \right) &= \frac{\partial u_s}{\partial y_0} = 2(1 - y_s) \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right) &= \frac{\partial v_s}{\partial y_0} = \frac{\partial c_{lz}(y_s, w_{s0}, \text{Re})}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \end{aligned}$$

Начальные условия для (3.65) имеют вид:

$$x_s = 0, \quad y_s = y_0, \quad \frac{\partial x_s}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = 1 \quad (3.68)$$

Уравнения (3.61)–(3.63) с начальными условиями (3.65) для конечных β и уравнения (3.62), (3.67) с условиями (3.68) для $\beta \rightarrow \infty$ составляют замкнутые системы обыкновенных дифференциальных уравнений на выбранной траектории частицы. Данные системы решались для различных траекторий частиц методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Траектории частиц создают лагранжеву сетку, которая покрывает всю

область движения частиц. Количество траекторий определяется требуемой степенью подробности лагранжевой сетки, на которой ищется решение для среды частиц. Для вычисления значений коэффициента боковой силы c_{lz} и его производной $\partial c_{lz} / \partial y$ использовались многочлены, аппроксимирующие кривые на Рис. 3.14 из работ [184, 3]

$$\xi = y/2 - 0.5$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.3125\xi + 0.0996\xi^3 - 14.34\xi^5 + 116.3\xi^7 - 403.7\xi^9 + 518\xi^{11}) \quad (3.69)$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.03925\xi - 0.1373\xi^3 + 2.724\xi^5 - 41.46\xi^7 + 342.4\xi^9 - 693.8\xi^{11}) \quad (3.70)$$

$$c_{lz} = -6\pi(0.4399\xi + 1.742\xi^3 - 118.7\xi^5 + 1116\xi^7 - 4014\xi^9 + 5086\xi^{11}) \quad (3.71)$$

Выражение (3.69) получено в работе [184] для $Re \ll 1$ и с хорошей точностью совпадает с результатами из [3] для $Re = 1$ (Рис. 3.14, кривая 1). Многочлены (3.70) и (3.71) аппроксимируют данные из [3] при $Re = 100$ для $w_{s0} = 0.4$ и $a/d \ll w_{s0} \ll 1$, соответственно (Рис. 3.14, кривые 2 и 3, соответственно). Неравенство $a/d \ll w_{s0} \ll 1$ означает, что скорость осаждения мала, но не равна нулю, т.е. частицы не являются нейтрально плавучими.

3.3.3 Результаты расчетов поперечного профиля числовой плотности частиц

В зависимости от параметра β реализуются несколько качественно различных режимов течения.

Рассмотрим сначала асимптотический случай, когда $\beta \rightarrow \infty$, а скорость осаждения мала, но не равна нулю: $a/d \ll w_{s0} \ll 1$. В этом случае поле скоростей дисперсной фазы имеет вид (3.60). Такой режим соответствует движению безынерционных частиц. В расчетах для аппроксимации ко-

эффициента боковой силы $c_{lz}(y)$ используется немонотонная зависимость (3.71) (Рис. 3.14, кривая 3). Расчеты показали, что частицы, двигаясь вниз по течению, мигрируют к центру канала без пересечений траекторий (Рис. 3.14, a). Как видно из (3.60), скорость дисперсной фазы в эйлеровых координатах $\mathbf{v}_s = (2y - y^2, c_{lz}(y))$ не меняется вниз по течению и зависит только от координаты y . Вдоль отдельной траектории частицы скорость не постоянна. По мере приближения к центру канала компонента u_s увеличивается, а компонента v_s уменьшается до нуля.

Профиль числовой концентрации значительно меняется вниз по течению (Рис. 3.15, a-в). Числовая концентрация возрастает с увеличением x . В случае однородного граничного профиля n_s в поле чисевой концентрации не возникает особенностей, и значение n_s конечно при конечных x (Рис. 3.15, a-б). Неоднородный начальный профиль концентрации с неограниченным значением на предельной траектории, стартовавшей при $y_0 = \varepsilon$, порождает область высокой плотности числа частиц в окрестности этой траектории во всем течении (Рис. 3.15, в). На самой предельной траектории числовая плотность бесконечна. Из-за немонотонности боковой силы в течении дисперсной фазы возникает ограниченная область пониженной концентрации частиц, где $n_s < 1$ (Рис. 3.15, a).

В случае конечных значений β возможны два различных режима миграции, когда траектории частиц пересекают либо не пересекают центральную ось канала. Существует критическое значение параметра инерционности β_c , соответствующее смене режимов миграции. В случае больших, но конечных значений параметра инерционности $\beta_c < \beta < \infty$ (малоинерционные частицы) реализуется режим, при котором частицы монотонно накапливаются вблизи средней линии канала и не пресекают ее. На Рис. 3.16 показана типичная картина течения для монотонной, быстро убывающей зависимости $c_{lz}(y)$ (3.70) (Рис. 3.14, кривая 2). При таких параметрах возможны пересечения траекторий частиц. Таким образом, в среде частиц формируется “складка”, то есть область течения, где параметры дисперсной фазы

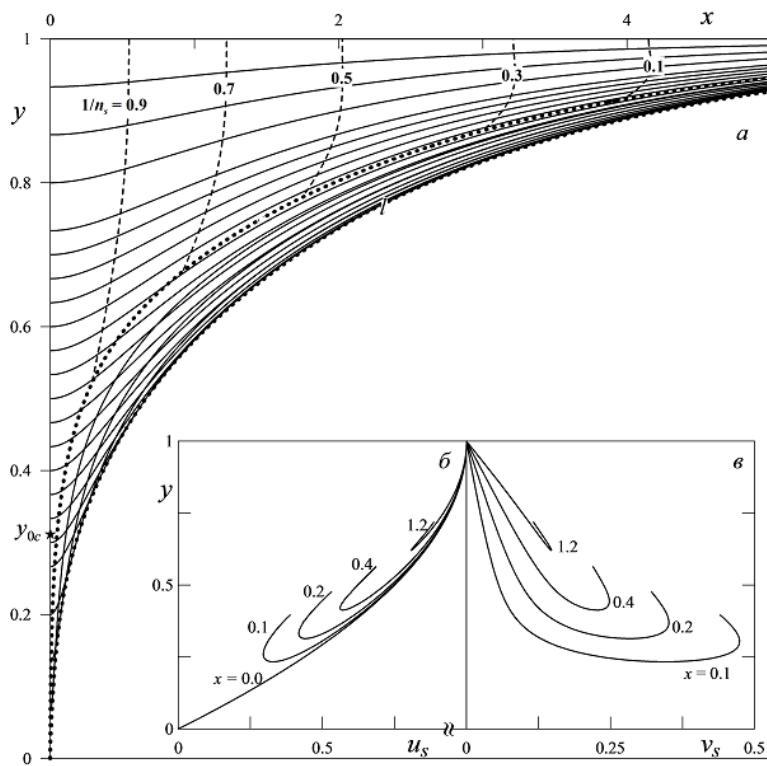


Рис. 3.16: Траектории частиц (сплошные линии), границы “складок” в среде частиц (пунктир), изолинии $1/n_s$ (штриховые линии с числами) для однородного начального профиля n_s (a); профили скорости частиц (β , ϑ) при $\beta = 3 > \beta_c$, $Re = 100$, $w_{s0} = 0.4$.

двузначны. Сверху эта область ограничена траекторией, стартовавшей с наименьшего значения y_0 , а снизу – огибающей траекторий частиц l (пунктирные линии на Рис. 3.15, a).

Существует критическое значение начальной координаты y_{0c} такое, что траектории с началом в точках $y_0 < y_{0c}$ пересекаются с траекториями с началом в $y > y_0$ и формируют “складку”. В то же время, траектории с началом в $y_0 > y_{0c}$ не пересекаются с траекториями, стартующими в точках $y > y_0$. Следовательно, если ширина пристеночного слоя чистой жидкости (без частиц) меньше y_{0c} , траектории частиц пересекаются и возникает “складка”. В случае, если ширина пристеночного слоя чистой жидкости больше y_{0c} , то “складка” не возникает. С увеличением β от β_c до бесконеч-

ности значение y_{0c} падает (Рис. 3.17) и ширина слоя частиц, формирующего “складку”, уменьшается. Это приводит к уменьшению ширины “складки” вплоть до ее исчезновения при $\beta \rightarrow \infty$.

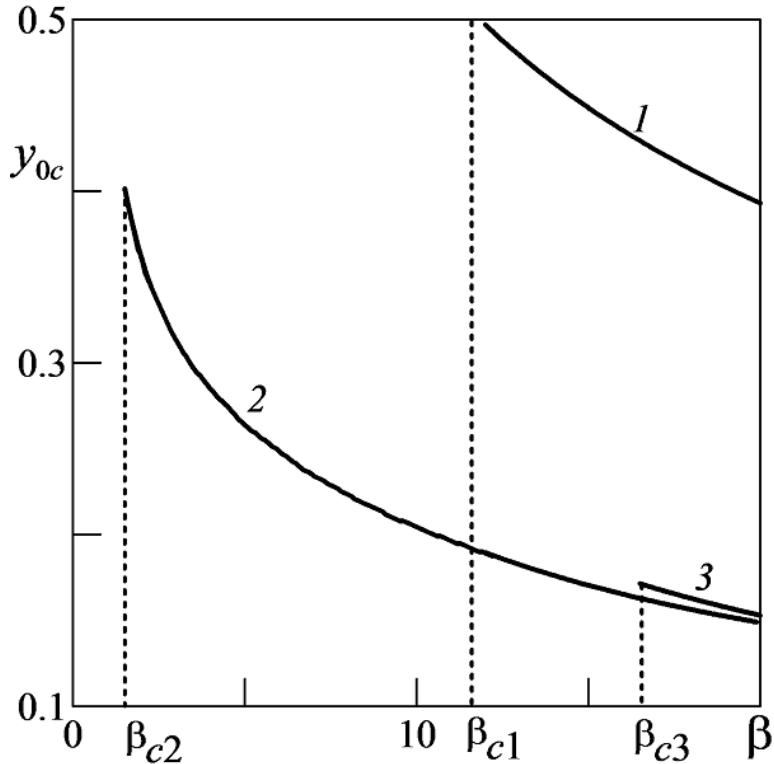


Рис. 3.17: Зависимости y_{0c} от β и критические значения β_c для $Re = 1$ (1), $Re = 100$, $w_{s0} = 0.4$ (2) и $Re = 100$, $a/d \ll w_{s0} \ll 1$ (3).

Так же, как и в случае безынерционных частиц, для малоинерционных частиц скорость u_s увеличивается по мере приближения к центру (Рис. 3.16, б). Компонента v_s равна нулю в начальном сечении. Вниз по потоку v_s сначала возрастает под действием боковой силы, а затем снова убывает по мере приближения частицы к центру канала (Рис. 3.16, б).

Концентрация дисперсной примеси увеличивается вниз по потоку (Рис. 3.16, а; Рис. 3.18, а, б) и обращается в бесконечность на каустике l (Рис. 3.18, а, б). Расчеты показали, что каустика l стремится к началу координат O . На линии l якобиан J обращается в нуль, а $n_s \rightarrow \infty$. Это противоречит

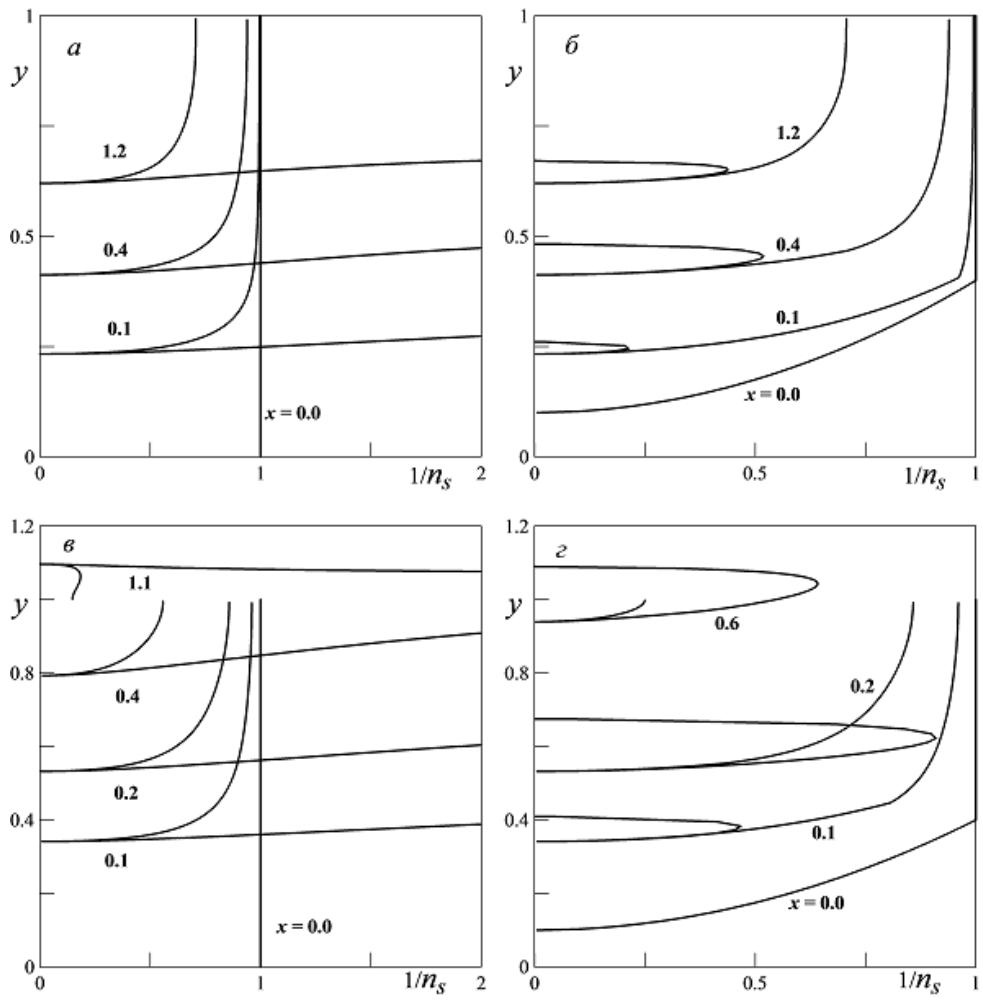


Рис. 3.18: Профили $1/n_s$ для однородного (a, δ) и неоднородного (β, γ) начального профиля n_s при $Re = 100$, $w_{s0} = 0.4$ (a, δ) и $Re = 1$ (β, γ) при $\beta = 3$.

начальному условию $n_s(0, y) = 1$. Таким образом, O является особой точкой. В вычислениях предполагалось, что из точки O траектории частицы не стартуют, но они могут начинаться из любой ее малой окрестности.

В случае однородного начального распределения частиц $f(y) = 1$ концентрация в “складке” существенно уменьшается по мере удаления от l (Рис. 3.18, a). Для неоднородного граничного профиля $f(y)$ (3.59) на верхней границе “складки” концентрация бесконечна (Рис. 3.18, δ). Эта син-

гулярность наследуется из граничного условия и распространяется вдоль предельной траектории.

Движение достаточно инерционных частиц при $0 < \beta < \beta_c$ для монотонно убывающей зависимости $c_{lz}(y)$ (3.69) (Рис. 3.18, кривая 1) показано на Рис. 3.19. Частицы по мере движения также аккумулируются на центральной линии, но при этом многократно пересекают ее. В дисперсном континууме формируются многочисленные “складки”, ограниченные предельной траекторией и каустиками. В случае однородного начального распределения частиц числовая концентрация обращается в бесконечность на каустиках, а для неоднородного начального распределения – еще и на предельной траектории (Рис. 3.18, *в*, *г*).

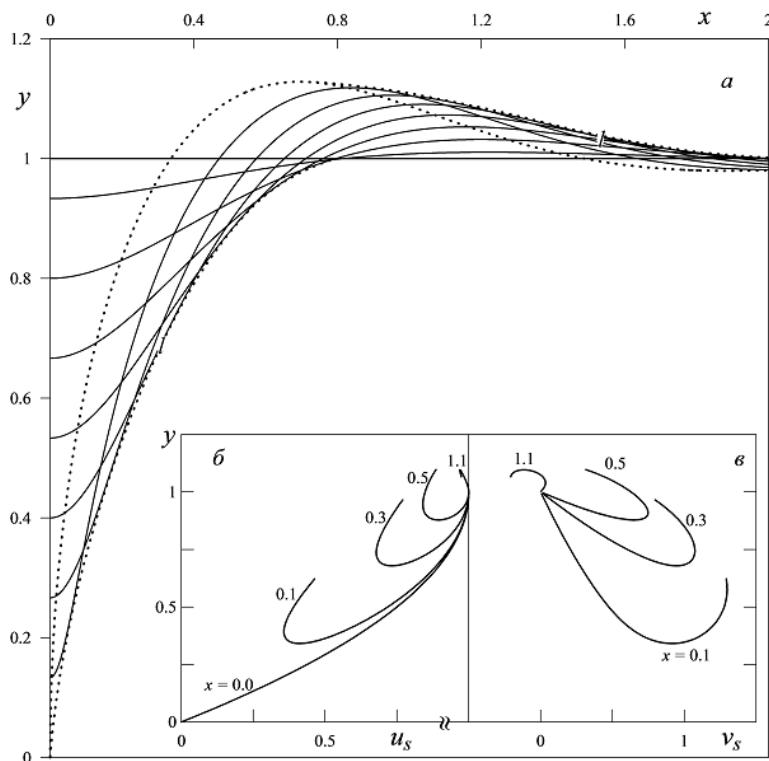


Рис. 3.19: Траектории частиц (сплошные линии), границы “складок” в среде частиц (пунктир) (*a*); профили скорости дисперсной фазы (*б*, *в*) при $\beta = 3 < \beta_c$, $Re = 1$.

В приведенных выше результатах численных расчетов получено, что

числовая концентрация частиц n_s неограниченно возрастает на границах одной или нескольких “складок”. Помимо этого, дополнительная особенность в поле концентрации частиц наследуется из неоднородного начального профиля концентрации.

Как мы упоминали выше, в работах [2, 232] было показано, что если на линии накопления частиц, где $n_s \rightarrow \infty$, составляющая скорости несущей фазы по нормали к этой линии не равна нулю, то функция n_s ведет себя как обратный корень из расстояния до особой линии. Следовательно, особенность в поле числовой концентрации является интегрируемой. Было показано [222], что в случае, когда особенность в поле числовой концентрации среди частиц является интегрируемой, среднее расстояние между частицами существенно превышает радиус частиц в окрестности особенности. Следовательно, приближение разреженной суспензии остается применимым во всей области течения, включая окрестность особенности. В полученных решениях границы складок и предельные траектории, на которых концентрация обращается в бесконечность, наклонены к потоку несущей фазы. Поэтому, согласно изложенному выше, особенности в поле числовой концентрации интегрируемы. Следовательно, для полученных выше решений приближение разреженной суспензии остается применимым во всей области течения.

3.3.4 Течение в окрестности средней линии канала

В окрестности центра канала $c_{lz}(y)$ ведет себя как линейная функция (разд. 3.1, [3]):

$$c_{lz}(y, w_{s0}, \text{Re}) = c(1 - y) + \dots, \quad y \rightarrow 1, \quad c = \left. \frac{\partial c_{lz}(y, w_{s0}, \text{Re})}{\partial y} \right|_{y=1} \quad (3.72)$$

Здесь $c = \tan \theta$, где θ – угол наклона графика функции $c_{lz}(y)$ к оси y в окрестности средней линии канала (Рис. 3.14). При $\text{Re} \gg 1$ коэффициент c зависит только от комбинации $w_{s0}\text{Re}^{2/3}$, тогда как в общем случае $c =$

$c(w_{s0}, \text{Re})$ [3]. Из представлений (3.69)–(3.71) легко найти значения c для рассматриваемых вариантов зависимости $c_{lz}(y)$.

Анализируя Рис. 3.16, б-в, можно заметить, что для малоинерционных частиц при $\beta_c < \beta < \infty$ компоненты скорости u_s и v_s при больших x ведут себя, как квадратичная и линейная функции соответственно:

$$u_s = 1 - a(1 - y)^2, \quad v_s = k(1 - y), \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 1 \quad (3.73)$$

Подставляя (3.72), (3.73) в уравнения движения частиц в эйлеровой форме (3.57), где $\kappa = 0$, получаем:

$$k = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - c\beta}, \quad a = \frac{\beta}{\beta - k}$$

Выражение для коэффициента k существует только при $\beta \geq 4c = 4\tg\theta$. Следовательно, критическое значение параметра инерционности, разделяющее режимы миграции частиц с пересечением и без пересечения центральной линии, имеет вид: $\beta_c = 4\tg\theta$. Значения β_c для рассмотренных вариантов зависимости $c_{lz}(y)$ отмечены на Рис. 3.17.

Из Рис. 3.18, а-б видно, что при приближении к центру канала функция n_s не зависит от y и стремится к постоянному значению: $n_s = n_c(x)$ при $y \rightarrow 1$. Тогда из уравнения неразрывности (3.57) для достаточно больших значений x , таких что справедливо (3.73), получаем

$$n_s \sim e^{kx}, \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 1 \quad (3.74)$$

Далее проанализируем уравнения движения частиц в лагранжевой форме (3.61)–(3.65). Вычислим параметры дисперсной фазы на средней линии канала в лагранжевых координатах. Вдоль траектории, совпадающей с осью канала, где $u_s = 1$, $v_s = 0$, $c_{lz} = 0$, из (3.61)–(3.65) получаем

$$x_s = t, \quad y_s = 1, \quad n_s = |J|^{-1} = \left| \frac{\partial y_s}{\partial y_0} \right|^{-1}$$

$$\beta > 4c : \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad n_s \sim e^{-\lambda_2 t} = e^{-\lambda_2 x}, \quad t \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\beta < 4c : \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = e^{-\beta t/2} (\cos \omega t + \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega t), n_s \sim e^{\beta t/2} = e^{\beta x/2}, t \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta/2 \pm \sqrt{\beta^2/4 - c\beta}, \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \omega = \sqrt{c\beta - \beta^2/4}$$

Асимптотика n_s при больших t совпадает с (3.74), так как $k = -\lambda_2$. Аналогично из (3.62), (3.67), (3.68) можно показать, что на оси канала при $\beta \rightarrow \infty$

$$n_s \sim e^{cx}, x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1$$

Итак, на оси канала числовая концентрация всегда конечна при конечных значениях x .

Рассмотрим течение в окрестности оси канала при $y \rightarrow 1$, когда справедливо представление (3.72). В этом случае для лагранжевой координаты $y_s(t)$ имеется обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y}_s + \beta \dot{y}_s + \beta c y_s = \beta c, y_s(0) = y_0, \dot{y}_s(0) = 0$$

В зависимости от значения β возможны различные решения:

$$\begin{aligned} \beta > 4c : y_s &= 1 - \frac{1 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \\ \beta = 4c : y_s &= 1 - (1 - y_0)(1 + 2ct)e^{-2ct} \\ \beta < 4c : y_s &= 1 - (1 - y_0)e^{-\beta t/2} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

Как видно из решения, при $4c \leq \beta < \infty$ частицы стремятся к центральной линии, не пересекая ее, а при $\beta < 4c$ частицы осциллируют вблизи центральной линии, многократно пересекая ее. Данный вывод подтверждает найденные на основании численных расчетов возможные режимы миграции частиц, а также полученное ранее значение $\beta_c = 4c$.

Результаты этого раздела опубликованы в [4, 31, 32].

3.4 Влияние боковой миграции на транспорт частиц в трещине

В данном разделе рассматривается влияние поперечной миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва на масштабе длины и высоты трещины. Считается, что профиль концентрации частиц поперек трещины является квазистационарным и неоднородным, сформировавшимся в результате миграции под действием боковой силы.

В случае разреженной суспензии поперечное движение частиц вызывается инерционной боковой силой, которая возникает в силу инерции жидкости, рассогласования скоростей фаз (осаждения частиц), и локального сдвигового характера течения [3]. В разделе 3.1 [3] получено выражение для инерционной боковой силы, которая действует на осаждающуюся частицу в горизонтальном течении вязкой жидкости через канал с вертикальными плоскими стенками. В разделе 3.2 [2] рассмотрена задача об инерционной миграции частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке плоского канала (круглой трубы) без учета осаждения. Показано, что частицы мигрируют на две плоскости (кольцо), находящиеся на определенном расстоянии от стенок канала (трубы). При этом, образуются свободные от частиц слои вблизи стенок. Миграция частиц при течении суспензии в плоском канале с учетом силы [3] исследована в разделе 3.3 [4]. Установлено, что под действием данной силы частицы мигрируют от стенок по направлению к средней плоскости канала, оставляя слои чистой жидкости около стенок. В случае концентрированной суспензии миграция носит диффузионный характер и обусловлена сдвиговым характером течения и поперечным градиентом концентрации частиц [52], при этом формируется неоднородный симметричный поперечный профиль концентрации с максимумом на оси канала.

Для нефтесервисных приложений интересны оба механизма миграции, так как диапазон изменения объемной доли частиц содержит как разре-

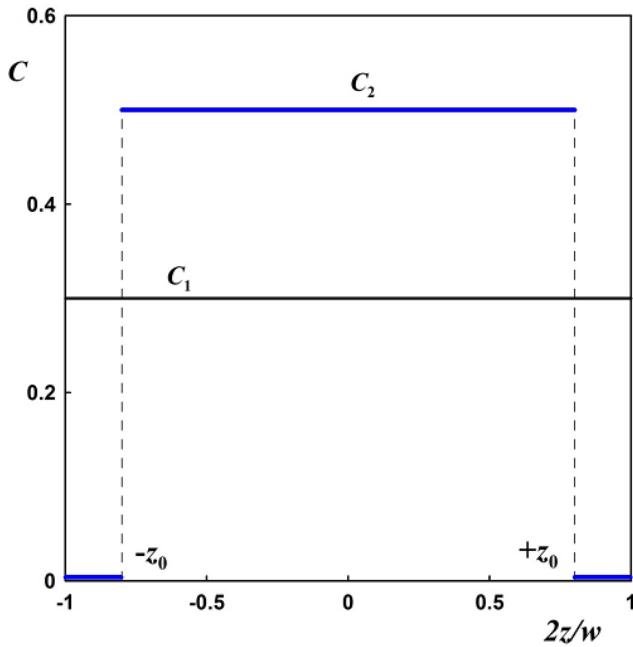


Рис. 3.20: Однородное (C_1) и неоднородное (C_2) распределения концентрации частиц поперек трещины.

женные суспензии (гидроразрыв в малопроницаемых породах, например, при добыче сланцевого газа), так и концентрированные (стандартный гидроразрыв, например, в песчаниках). Характерной особенностью миграции частиц при течении суспензии в канале, вне зависимости от порядка величины объемной доли частиц, является формирование пристеночных слоев разреженной суспензии (или чистой жидкости, если начальная концентрация была мала) и ядра течения с повышенной концентрацией частиц. В целом, поперечный профиль объемной доли частиц может быть аппроксимирован кусочно-постоянной зависимостью (Рис. 3.20), и данный факт существенно используется в настоящей работе.

Учитывая необходимость в развитии моделей транспорта частиц в трещине для ответа на вызовы новых технологий (в частности, гидроразрыв в сланцах), в настоящем разделе рассматривается обобщение двумерных

осредненных асимптотических уравнений течения супензии в трещине[5] на случай течения с выраженной поперечной миграцией частиц. Двумерная система уравнений будет получена путем осреднения поперек трещины с учетом заданного неоднородного профиля концентрации частиц, который формируется в результате поперечной миграции. В то время как задача об определении собственно поперечного профиля концентрации частиц в результате миграции была рассмотрена в предыдущих разделах, здесь будет изучено влияние эффектов миграции на макромасштабный перенос, гравитационную конвекцию и осаждение супензии в трещине на основе предполагаемого заданного неоднородного поперечного профиля концентрации частиц.

3.4.1 Постановка задачи о течении супензии в трещине с неоднородным поперечным профилем концентрации частиц

Постановка задачи, детально описываемая ниже, повторяет постановку задачи о течении супензии в трещине, рассмотренную в Главе 2 (разд. 2.1), с существенной разницей: теперь допускается, что профиль концентрации частиц поперек трещины неоднороден в результате развития миграции частиц. Итак, рассматривается трехмерное нестационарное изотермическое ламинарное течение супензии в вертикальной трещине гидроразрыва в поле силы тяжести \mathbf{g} . Несущая фаза - вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ_f^0 . Дисперсная среда состоит из одинаковых неколлоидных сферических частиц радиуса a с плотностью материала ρ_p^0 и массой одиночной частицы m . Трещина считается вертикальным каналом переменной ширины w с гладкими стенками. Вводится система координат $Oxyz$ с осями x и y , направленными по горизонтали и вертикали, и с осью z , направленной перпендикулярно срединной плоскости трещины (Рис. 1.1). Единичные орты системы координат обозначены $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Супензия рассматривается как комбинация двух взаимопроникающих и взаимодействующих контину-

умов: среды частиц и несущей фазы. Среда частиц характеризуется объемной концентрацией C_p , числовой плотностью n_p , плотностью $\rho_p = C_p \rho_p^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_p . Несущая фаза описывается осредненной плотностью $\rho_f = (1 - C_p) \rho_f^0$ и среднемассовой скоростью \mathbf{v}_f . Компоненты скоростей фаз в проекции на оси координат будем обозначать $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

В рамках двухконтинуального подхода [195], дифференциальные уравнения законов сохранения массы и импульса для каждой фазы записываются в размерной форме:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla(\rho_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (3.75)$$

$$\rho_f \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} = -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_f \mathbf{g} - n_p \mathbf{F}_p \quad (3.76)$$

$$\rho_p \frac{d_p \mathbf{v}_p}{dt} = -\nabla p_p + \nabla_j \tau_p^{ij} \mathbf{e}_i + \rho_p \mathbf{g} + n_p \mathbf{F}_p \quad (3.77)$$

$$\frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \nabla) \mathbf{v}_f, \quad \frac{d_p \mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \nabla) \mathbf{v}_p$$

Границные условия в размерной форме имеют вид

$$x = 0 : \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0}(t, y, z), \quad C_p = C_0(t, y, z) \quad (3.78)$$

$$z = \pm \frac{w}{2} : \quad u_f = v_f = 0, \quad w_f = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \pm w_l, \quad w_p = 0$$

На входе в трещину задается скорость жидкости \mathbf{v}_{f0} и концентрация частиц C_0 . Так как трещина находится в объемлющей пористой среде, на стенках трещины задана нормальная скорость жидкости w_l , учитывающая отток жидкости сквозь проницаемые стенки трещины. Также, задается условие отсутствия оттока частиц, поскольку по предположению размер частиц больше, чем размер пор.

В приложениях несущая фаза является водным раствором полимера, который разжижается при сдвиге, поэтому в качестве реологической модели для суспензии в целом, как правило, используется степенная модель с пределом текучести (модель Хершеля-Балкли [63]) либо упрощенно принимается модель линейно-вязкой жидкости. В настоящем разделе будем считать, что несущая фаза является ньютоновской жидкостью вязкости

μ_0 , а полученная ниже модель может быть легко обобщена на случай более сложной реологии по аналогии с известными моделями, следуя, например, [98].

Введем среднеобъемную и среднемассовую скорости суспензии, \mathbf{v}_v и \mathbf{v}_m :

$$\mathbf{v}_v = (1 - C_p)\mathbf{v}_f + C_p\mathbf{v}_p, \quad \mathbf{v}_m = \frac{(1 - C_p)\rho_f^0\mathbf{v}_f + C_p\rho_p^0\mathbf{v}_p}{(1 - C_p)\rho_f^0 + C_p\rho_p^0} \quad (3.79)$$

В известных моделях течение суспензии описывается в терминах среднеобъемной скорости смеси, для которой принимается закон Пуазейля. Это допустимо лишь в случае, когда скорости частиц и жидкости одинаковы. Тогда среднемассовая и среднеобъемная скорости суспензии совпадают и равны скорости фаз. При этом течение смеси можно рассматривать как движение эффективной среды и описывать уравнениями Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с плотностью и вязкостью, зависящими от объемной доли частиц. В результате для течения в плоском канале можно получить решение для скорости суспензии в виде закона Пуазейля.

В общем случае вследствие конечности объемной доли частиц и рассогласования скоростей фаз (осаждения частиц) среднемассовая и среднеобъемная скорости суспензии не совпадают друг с другом и отличаются от скорости каждой фазы. Тогда закон Пуазейля для среднеобъемной скорости суспензии не следует из закона сохранения импульса, и таким образом, является необоснованным предположением. Представляется возможным утверждать, что при рассогласовании скоростей фаз течение смеси уже нельзя описать как движение некоторой эффективной среды, а следует рассматривать движение каждой фазы по отдельности в рамках континуального приближения, записывая уравнения законов сохранения массы и импульса для каждой фазы в терминах среднемассовых скоростей фаз и учитывая обмен массой и импульсом между фазами – см. (3.75).

Более того, при рассогласовании скоростей фаз плотности среды частиц, несущей фазы, и суспензии переменны, а следовательно, среднемассовые скорости фаз являются дивергентными. Таким образом, среда частиц и

осредненная несущая фаза являются сжимаемыми. Поэтому будем считать, что тензор напряжений для несущей фазы можно принять как для вязкой сжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от объемной концентрации частиц [194]

$$\begin{aligned}\tau_f^{ij} &= 2\mu_0\mu(C_p) \left(e^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\nabla\mathbf{v}_f \right), \quad \mu(0) = 1 \\ \mu(C_p) &= \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}} \right)^{-\beta}, \quad C_{max} = 0.65, \quad \beta = 1.89\end{aligned}\quad (3.80)$$

Зависимость вязкости от объемной доли частиц определяется формулой Скотта [173, 161]. Предполагается, что при гравитационном осаждении хаотическая скорость частиц мала, поэтому можно пренебречь тензором напряжений в среде частиц: $p_p = 0$, $\tau_p^{ij} = 0$ [194].

В выражении для межфазной силы учитывается сила Стокса с поправкой на конечную объемную долю частиц $f(C_p)$, а также сила Архимеда

$$\mathbf{F}_p = 6\pi a\mu_0(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \frac{1}{f(C_p)} - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_f^0 \mathbf{g} \quad (3.81)$$

Как показано в [213], силами присоединенных масс, Бассе-Буссинеска и нестационарной частью силы Архимеда на частицу можно пренебречь в приближении безынерционного осаждения, когда масштаб релаксации скоростей фаз много меньше масштаба задачи. Выполнение этого условия обосновано ниже при выводе уравнений в безразмерных переменных.

3.4.2 Вывод асимптотических уравнений в приближении тонкого канала

Введем безразмерные переменные (размерные переменные обозначены штрихом, где это нужно, чтобы отличить их от безразмерных переменных)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= L\mathbf{x}, \quad \mathbf{v}'_f = U\mathbf{v}_f, \quad \mathbf{v}'_p = U\mathbf{v}_p, \quad t' = \frac{L}{U}t, \quad \rho'_f = \rho_f^0 \rho_f \\ \rho'_p &= \rho_f^0 \rho_p, \quad \tau'^{ij'} = \frac{\mu_0 U}{L} \tau^{ij}, \quad p' = \frac{\mu_0 U}{L} p, \quad w' = Lw, \quad w'_l = Uw_l\end{aligned}\quad (3.82)$$

Здесь L – характерный масштаб длины, U – характерный масштаб скорости. В безразмерных переменных из (3.75)-(3.77) получены следующие уравнения

$$\begin{aligned} \nabla [(1 - C_p)\mathbf{v}_f + C_p\mathbf{v}_p] &= 0, \quad \frac{\partial C_p}{\partial t} + \nabla(C_p\mathbf{v}_p) = 0 \\ \varepsilon^{-1}\text{Re} \left[(1 - C_p)\frac{d_f\mathbf{v}_f}{dt} + \zeta C_p \frac{d_p\mathbf{v}_p}{dt} \right] &= \\ -\nabla p_f + \nabla_j \tau_f^{ij} \mathbf{e}_i - \text{Bu}_0 [1 + C_p(\zeta - 1)] \mathbf{e}_2 & \\ \varepsilon \text{St} \frac{d_p\mathbf{v}_p}{dt} &= (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \frac{1}{f(C_p)} - \frac{\text{St}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta} \right) \mathbf{e}_3 \\ \varepsilon = \frac{d}{L}, \quad \text{St} = \frac{mU}{6\pi a\mu_0 d}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gd}} & \\ \text{Re} = \frac{\rho_f^0 U d}{\mu_0}, \quad \zeta = \frac{\rho_p^0}{\rho_f^0}, \quad \text{Bu}_0 = \frac{\text{Re}}{\varepsilon^2 \text{Fr}^2} & \end{aligned} \quad (3.83)$$

Здесь d – характерный масштаб ширины трещины. В первом уравнении (3.83) выражение в скобках – среднеобъемная скорость супензии \mathbf{v}_v (3.79). На основании того, что \mathbf{v}_v бездивергентна, в ряде предыдущих работ был сделан (в общем случае неверный) вывод о том, что течение супензии можно описывать в рамках уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, записанного в терминах среднеобъемной скорости \mathbf{v}_v . Как указано выше, это верно лишь в случае, когда частицы не движутся относительно жидкости либо их объемная доля пренебрежимо мала.

Считается, что ширина трещины w медленно меняется в пространстве. Используется приближение тонкого слоя

$$\varepsilon \ll 1, \quad \nabla w \ll 1, \quad \varepsilon \text{Re} \ll 1, \quad \text{St} \sim 1, \quad \text{Fr} \sim 1, \quad \text{Re} \sim 1, \quad \zeta \sim 1 \quad (3.84)$$

В частности, отсюда следует, что характерный масштаб релаксации скоростей фаз много меньше характерного масштаба задачи ($\varepsilon \text{St} \ll 1$), что, следуя [213], позволило пренебречь силами Бассе-Буссинеска, присоединенных масс и нестационарной частью силы Архимеда на частицу в выражении для межфазного обмена импульсом (3.81).

Введем новые растянутые переменные, которые в приближении тонкого слоя имеют порядок единицы

$$z = \varepsilon z^0, \quad w = \varepsilon w^0, \quad w_l = \varepsilon w_l^0, \quad w_f = \varepsilon w_f^0, \quad p = \varepsilon^{-2} p^0 \quad (3.85)$$

Для простоты индекс 0 ниже опущен. Асимптотический порядок давления найден из условия, что результирующие асимптотические уравнения будут наименее вырожденными и непротиворечивыми [230]. В рассматриваемом случае это означает, что градиент давления имеет тот же порядок величины, что и вязкие члены. Подставляя разложения (3.85) в уравнения (3.83), в асимптотическом пределе (3.84) получаем, что уравнения неразрывности не меняют вид, а уравнения импульса записываются в форме

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_f}{\partial z} \right) \right], \quad \frac{\partial p_f}{\partial z} = 0 \quad (3.86) \\ 0 &= -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_f}{\partial z} \right) \right] - Bu(1 + C_p(\zeta - 1)) \\ \mathbf{v}_p &= \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_s = -\frac{St}{Fr^2 f(C_p)} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta} \right) \mathbf{e}_2, \quad Bu = \frac{Re}{Fr^2} = \frac{\rho_f^0 g d^2}{\mu_0 U} \end{aligned}$$

Отметим, что сам процесс поперечной миграции частиц не рассматривается в данном разделе, а был изучен выше в разделах 3.1–3.3. При выводе осредненных уравнений мы будем использовать неоднородный поперечный профиль объемной концентрации частиц, который уже сформировался в результате миграции. Решение для поперечного профиля концентрации, полученное в [4] для течения осаждающейся разреженной суспензии в вертикальной трещине, может быть аппроксимировано кусочно-постоянной зависимостью (Рис. 3.20). Таким образом, в результате миграции частицы образуют ядро с повышенной концентрацией в центре канала, оставляя свободные слои вблизи стенок.

Решение уравнений (3.86) с учетом поперечного профиля концентрации, представленного на Рис. 3.20, имеет следующий вид. В интервале $z \in [-z_0, z_0]$ имеем формулы

$$u_f = -\frac{w^2}{8} \left[\frac{1}{\mu(C_p)} \left(z_0^2 - \left(\frac{z}{w/2} \right)^2 \right) + 1 - z_0^2 \right] \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.87)$$

$$v_f = -\frac{w^2}{8} \left[\left(\frac{1}{\mu(C_p)} \left(z_0^2 - \left(\frac{z}{w/2} \right)^2 \right) + 1 - z_0^2 \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \text{Bu} \left(\frac{1 + C_p(\zeta - 1)}{\mu(C_p)} \left(z_0^2 - \left(\frac{z}{w/2} \right)^2 \right) + 1 - z_0^2 \right) \right]$$

В интервале $z \in [-1, -z_0] \cup [z_0, 1]$ получаем

$$u_f = -\frac{w^2}{8} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{z}{w/2} \right)^2 \right)$$

$$v_f = -\frac{w^2}{8} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Bu} \right) \left(1 - \left(\frac{z}{w/2} \right)^2 \right)$$

Заметим, что при выводе этих формул мы использовали условие $\mu(0) = 1$. Вводятся новые функции, осредненные поперек трещины, по общей формуле

$$F(t, x, y) = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} f(t, x, y, z) dz$$

Из (3.83) с учетом (3.87) получаются следующие двумерные осредненные уравнения для случая однородного профиля концентрации

$$\frac{\partial wC_p}{\partial t} + \nabla(wC_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} =$$

$$\nabla \left[\frac{w^3}{12\mu(C_p)} (\nabla p + \text{Bu} [1 + C_p(\zeta - 1)] \mathbf{e}_2) - wC_p \mathbf{v}_s \right] - 2v_l(1 - C_p) \quad (3.89)$$

$$\mathbf{v}_f = -\frac{w^2}{12\mu(C_p)} (\nabla p + \text{Bu} [1 + C_p(\zeta - 1)] \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_s \quad (3.90)$$

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\text{St}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta} \right) f(C_p) \mathbf{e}_2, \quad f(C_p) = \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}} \right)^5, \quad \text{Bu} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2}$$

Выражение для скорости осаждения принято в полуэмпирической форме [98], учитывающей эффект стесненного осаждения в концентрированных суспензиях. Скорость осаждения стремится к 0 при объемной доле

частиц, стремящейся к объемной доле плотной упаковки, что позволяет моделировать формирование осадка из плотно упакованных частиц методом сквозного счета.

С учетом неоднородного профиля концентрации получаем

$$\frac{\partial w z_0 C_p}{\partial t} + \operatorname{div}(w z_0 C_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(w \mathbf{v}_f + h z_0 C_p \mathbf{v}_s) = -2v_l(1 - C_p) \quad (3.92)$$

$$\mathbf{v}_f = -\frac{w^2}{12} \left(K \nabla p + \text{Bu} \left[1 + z_0^3 \left(\frac{1 + C_p(\zeta - 1)}{\mu(C_p)} - 1 \right) \right] \mathbf{e}_2 \right) \quad (3.93)$$

$$K = 1 + z_0^3 \left(\frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right) \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & -\frac{w^2}{8z_0} \left(\nabla p \left[z_0(1 - z_0^2) + \frac{2z_0^3}{3\mu(C_p)} \right] + \right. \\ & \left. + \text{Bu} \left[\frac{1 + C_p(\zeta - 1)}{\mu(C_p)} \frac{2z_0^3}{3} + z_0(1 - z_0^2) \right] \mathbf{e}_2 \right) + \mathbf{v}_s \end{aligned} \quad (3.95)$$

Для решения уравнения (3.88) задаются начальные и краевые условия для концентрации (3.78)

$$t = 0 : C_p = 0, (x, y) \in [0, L/H] \times [0, 1]; \quad x = 0 : C_p = C_0, y \in [y_1, y_2] \quad (3.96)$$

Границные условия для уравнения (3.89) следуют из (3.78)

$$\begin{aligned} x = 0 : \frac{\partial p}{\partial x} = & -\frac{12\mu(C_p)}{w^2}, \quad y \in [y_1, y_2]; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, y_1], [y_2, 1] \\ x = L/H : \frac{\partial p}{\partial y} = & -\text{Bu}; \quad y = 0, \quad 1 : \frac{\partial p}{\partial y} = -\text{Bu}(1 + C_p|_{y=0,1}(\zeta - 1)) \end{aligned}$$

Для начала рассмотрим одномерное течение суспензии с эффектами миграции в трещине в пренебрежении осаждением, когда зависимостью величин от вертикальной координаты y можно пренебречь и исследовать зависимость от координаты вдоль трещины x и времени t . Скорость частиц и жидкости имеет только горизонтальную компоненту, отличную от нуля. Как отмечено выше, предполагается, что в результате миграции поперек течения частицы сформировали ядро относительной ширины z_0 со свободными от частиц слоями около стенок трещины. Связь между скоростью

частиц и скоростью жидкости дается соотношениями

$$\mathbf{v}_p = C_0(z_0, C_p) \mathbf{v}_f$$

$$C_0(z_0, C_p) = \frac{3}{2} \left[1 + z_0^2 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right) \right] \left[1 + z_0^3 \left(\frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right) \right]^{-1}$$

Найдем значение концентрации частиц C_2 в ядре течения по значению начальной средней концентрации по всей ширине трещины C_1 . Запишем закон сохранения массы

$$\int_{-1/2}^{1/2} \rho_p(C_1) \mathbf{v}_p(C_1) dz = \int_{-z_0/2}^{z_0/2} \rho_p(C_2(z_0)) \mathbf{v}_p(C_2(z_0)) dz \quad (3.97)$$

Во входном сечении, где концентрация распределена равномерно, осредненная скорость частиц равна средней скорости несущей фазы. В выходном сечении, где профиль концентрации неравномерный, средняя скорость частиц связана со средней скоростью жидкости по формуле (3.95). Заметим, что в рассматриваемом случае профиль концентрации меняется вдоль канала, а следовательно будет меняться коэффициент в зависимости скорости от градиента давления. Из условия постоянства расхода вдоль канала для несжимаемого стационарного течения локальный продольный градиент давления будет также изменяться. Найдем связь между градиентом давления в начальном и конечном сечениях, приняв индексы 1 и 2 для обозначения сечений, соответственно:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{1 - C_1}{(1 - C_2)\mu(C_1)} \left[1 + z_0^3 \left(\frac{1}{\mu(C_2)} - 1 \right) \right]^{-1}$$

С учетом этого соотношения, закон сохранения массы (3.97) приводит к уравнению на C_2 как функцию z_0 с зависимостью от параметра начальная концентрация C_1 (равномерно распределенная поперек трещины)

$$\frac{C_1}{1 - C_1} = C_0(C_2, z_0) \frac{C_2}{1 - C_2}$$

Дифференцирование этого алгебраического уравнения по z_0 приводит к задаче Коши для ОДУ на функцию $C_p(z_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dC_p}{dz_0} &= \left[-\frac{3A}{2B} + \frac{Ab_1 - Ba_1}{B^2} \right] \left[F + \frac{z_0 C (Ab_2 - Ba_2)}{(1-C)B^2} \right]^{-1} & (3.98) \\ a_1 &= 2z_0 \frac{2}{3\mu(C_p) - 1}, \quad a_2 = z_0^2 \frac{2\mu'(C_p)}{3\mu^2(C_p)} \\ b_1 &= 3z_0^2 \left(\frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right), \quad b_2 = z_0^3 \frac{\mu'(C_p)}{\mu^2(C_p)} \\ A &= 1 + z_0^2 \left(\frac{2}{3\mu(C_p)} - 1 \right), \quad B = 1 + z_0^3 \left(\frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right) \\ F &= z_0 \frac{3A}{2B} \left(\frac{1}{1-C_p} + \frac{C}{(1-C_p)^2} \right) \\ z_0 &= 1 : \quad C_p = C_1 \end{aligned}$$

3.4.3 Результаты численных расчетов поля концентрации частиц в трещине

Задача Коши (3.98) решалась методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Результаты расчетов для различных значений начальной концентрации, равномерно распределенной поперек трещины, приведены на Рис. 3.21, *a*. Каждая кривая на этом графике демонстрирует эволюцию концентрации в ядре течения за счет поперечной миграции частиц при течении суспензии вдоль канала (Рис. 3.20, *a*). Напомним, что результаты получены в предположении, что в каждом поперечном сечении профиль концентрации описывается кусочно постоянной зависимостью, проиллюстрированной на Рис. 3.20, *б*. При этом расстояние вдоль трещины - это параметр, изменяющийся вдоль кривой на графике, а интенсивность поперечной миграции характеризуется дополнительно зависимостью $z_0(x)$.

На Рис. 3.21, *б* представлены результаты расчета зависимости продольного градиента давления $\partial p / \partial x$ от ширины ядра течения, заполненного частицами, z_0 с параметром начальная концентрация C_1 . В зависимости от C_1 , функция $\partial p / \partial x(z_0)$ может быть как монотонно возрастающей для

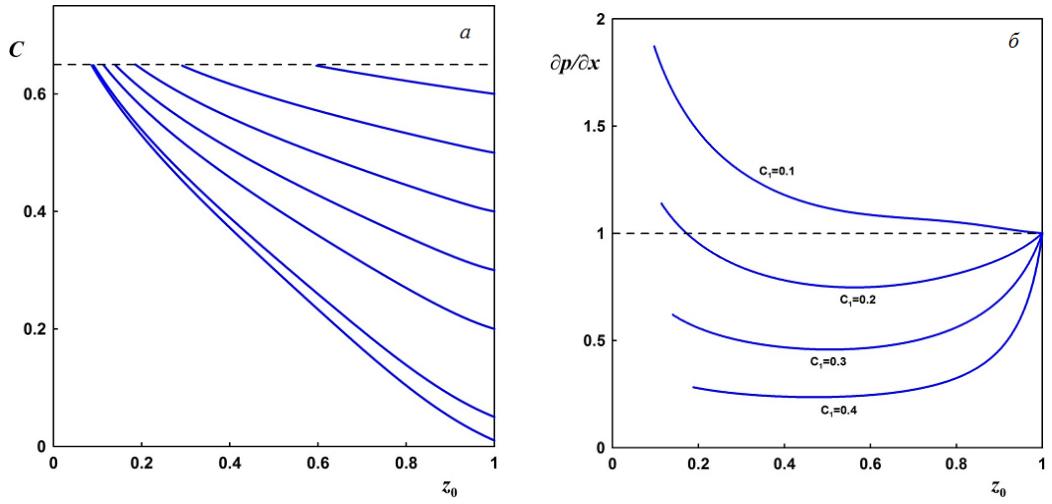


Рис. 3.21: Зависимость концентрации частиц C_p в ядре течения от ширины ядра z_0 при различных начальных значениях концентрации, равномерно распределенной поперек трещины (а). Зависимость продольного градиента давления от ширины ядра течения z_0 при различных значениях начальной концентрации (б).

малых значений C_1 , так и немонотонной при увеличении параметра C_1 . Данный эффект объясняется конкурирующим влиянием следующих двух механизмов. При возникновении свободных от частиц слоев вблизи стенок трещины расхода, необходимый для обеспечения постоянного по длине трещины расхода, уменьшается. В то же время, вязкость в ядре течения, заполненном частицами, увеличивается с уменьшением ширины ядра z_0 и с увеличением концентрации частиц. В зависимости от относительной величины этих двух эффектов, продольный градиент может как убывать, так и возрастать с уменьшением ширины ядра течения z_0 .

Для оценки влияния миграции частиц и двухскоростных эффектов на перенос и оседание частиц в трещине гидроразрыва проведено численное решение двумерной системы уравнений (3.91)–(3.95) на равномерной прямоугольной сетке. Решение эллиптического уравнения (3.92) проведено конечно-разностным методом с погрешностью аппроксимации второго

порядка. Получающаяся система линейных уравнений с пятидиагональной матрицей решена методом сопряженных градиентов с предобуславливателем ILU(2)[214], где ILU(2) это вариант неполного разложения на верхне- и нижнетреугольную матрицы (incomplete LU factorization). Для решения уравнения переноса (3.91) использована явная TVD схема с ограничением потоков[216] с погрешностью аппроксимации второго порядка по пространству и первого порядка по времени [215]. Данный метод основан на комбинации схемы второго порядка Лакса-Вендроффа в областях вдали от разрывов и схемы Эйлера первого порядка в окрестности разрывов. Это позволяет избежать осцилляций вблизи разрыва, характерных для схемы Лакса-Вендроффа, а также получить решение со вторым порядком точности везде вне разрывов. В качестве ограничителя потоков использовался вариант Superbee [216], который оптимально подходит для течений с резкими фронтами концентрации и дает наименьшую погрешность выполнения интегрального закона сохранения массы (порядка 1% на сетке 300x600 после 10^3 шагов по времени).

На Рис. 3.22, *a* представлены результаты расчета одномерной задачи о переносе частиц в трещине с учетом эффекта миграции

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} + \frac{\partial C_0(z_0, C_p)C_p}{\partial x} = 0$$

Данное уравнение решалось численно на равномерной сетке по явной схеме улучшенного разрешения с ограничением потоков [216]. Из графика видно, что миграция частиц приводит к увеличению глубины проникновения частиц в трещину на фиксированном интервале времени. Также формируется зона плавного изменения концентрации от 0 до начального значения в окрестности переднего фронта, в отличие от резкого фронта частиц при отсутствии миграции $z_0 = 1$. Возникновение переходной зоны обусловлено нелинейным характером уравнения переноса. Можно усмотреть аналогию с задачей Баклея-Леверетта, где насыщенность фильтрующихся жидкостей меняется плавно в окрестности фронтов в силу нелинейной зависимости

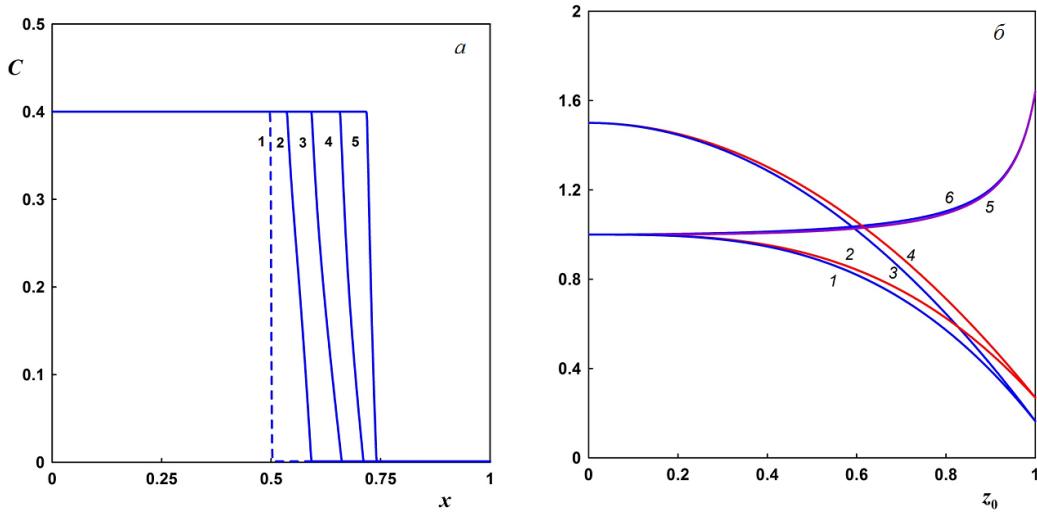


Рис. 3.22: Положение фронта концентрации частиц в трещине в один и тот же момент времени, полученное в одномерном приближении для разных значений ширины ядра течения z_0 : 1-5 – $z_0 = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ (а). Зависимость коэффициентов в уравнениях переноса частиц от ширины ядра течения z_0 , при фиксированном значении концентрации в ядре течения $C_p = 0.4$ (б): 1 – K , 2 – ρ_m , 3 – K_p , 4 – ρ_{mp} , 5 – ρ_m/K , 6 – ρ_{mp}/K_p (б).

относительных проницаемостей от насыщенности.

На Рис. 3.22, б представлены зависимости коэффициентов в выражениях для скорости частиц и несущей фазы (3.93)-(3.95) от параметра z_0

$$K = 1 + z_0^3 \left(\frac{1}{\mu(C_p)} - 1 \right), \quad \rho_m = 1 + z_0^3 \left(\frac{(1 + C_p(\zeta - 1))}{\mu(C_p)} - 1 \right)$$

$$K_p = \frac{3}{2} \left(1 + z_0^2 \left(\frac{2}{3\mu(C_p)} - 1 \right) \right), \quad \rho_{mp} = \frac{3}{2} \left(1 + z_0^2 \left(\frac{2(1 + C_p(\zeta - 1))}{3\mu(C_p)} - 1 \right) \right)$$

Из графика видно, что относительная величина слагаемого, описывающего эффект гравитационной конвекции (кривые 5 и 6), уменьшается при уменьшении ширины ядра течения z_0 . На Рис. 3.23 представлены результаты расчетов двумерной системы уравнений с учетом эффекта миграции, подтверждающие данный вывод: гравитационная конвекция, проявляющаяся в оплывании переднего фронта суспензии, уменьшается с уменьшением z_0 . Данные расчеты соответствуют фиксированной концентрации ча-

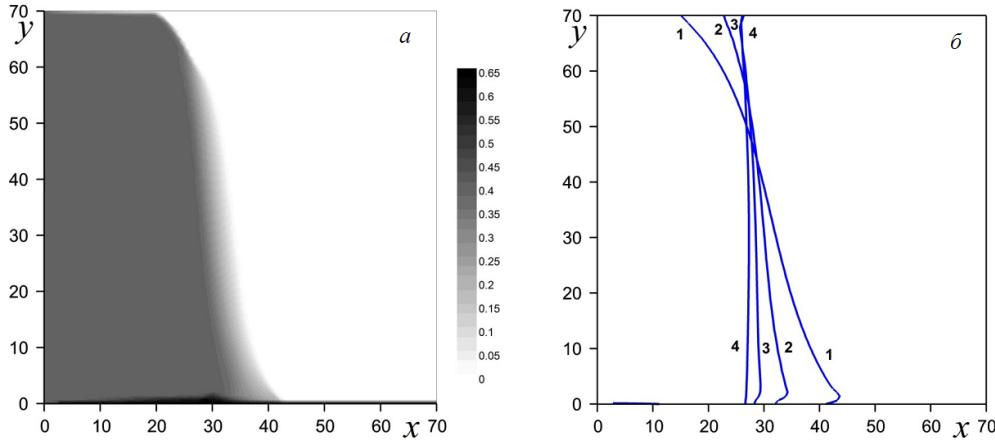


Рис. 3.23: Распределение концентрации частиц в трещине при $z_0 = 0.8$ (а) и положения фронта концентрации в зависимости от ширины ядра течения z_0 (б). Размеры трещины 70×70 м, $C_p = 0.4$, $t = 60$ с.

стиц во входном сечении. Можно рассмотреть альтернативную постановку задачи о течении в трещине с учетом эволюции профиля концентрации частиц вследствие миграции к центру. В таком течении изначально равномерно распределенная концентрация частиц увеличивается в ядре течения с уменьшением ширины ядра (как было показано выше на Рис. 3.21, а). Проведены расчеты с учетом данного эффекта, и получены результаты, аналогичные представленным на Рис. 3.23: миграция частиц к центру канала подавляет опливание переднего фронта.

3.5 Основные результаты Главы 3

1. Исследована инерционная миграция малой сферической частицы, осаждающейся под действием силы тяжести в горизонтальном течении ньютоновской жидкости через канал с вертикальными плоскими стенками. С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений получено ре-

шение уравнений Оззена для возмущенного течения во внешней области на масштабе длины порядка ширины канала и решение уравнений Стокса для течений во внутренней области на масштабе радиуса частицы. Задача сведена к ОДУ 4-го порядка для двумерного преобразования Фурье от поперечной скорости частицы. Скорость миграции и коэффициент боковой силы вычислены как функции трех безразмерных параметров: расстояния до ближайшей стенки d/l , числа Рейнольдса канала Re_c и параметра проскальзывания V_{sz} . Показано, что боковая сила всегда направлена от стенок к центру канала, она достигает максимума на стенках и падает до нуля на оси симметрии канала. Результаты этого раздела опубликованы в [3].

2. В рамках двухконтинуального подхода построена асимптотическая модель инерционной миграции твердых неколлоидных сферических частиц в течении разреженной суспензии в начальном участке плоского канала и круглой трубы. В межфазном обмене импульсом учитывается сила сопротивления Стокса, сила присоединенных масс, сила Архимеда, а также инерционная боковая сила с поправочным коэффициентом за счет присутствия стенки и конечности параметра проскальзывания. Решение строится методом сращиваемых асимптотических разложений в пределе больших чисел Рейнольдса течения в канале, отношение плотности частиц к плотности жидкости порядка единицы (суспензии) либо существенно больше единицы (запыленный газ), а длина релаксации скоростей частиц имеет порядок величины, сравнимый с шириной канала. Проблема поиска поперечного профиля концентрации частиц в области, где профиль скорости Пуазейля установился, сведена к решению уравнений двухфазного пограничного слоя, развивающегося на стенке канала. Полный лагранжев метод используется для расчета полей концентрации частиц. Задача расчета параметров дисперской фазы сведена к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль траекторий частиц для координат и скоростей частиц, а также компонент Якобиана перехода между эйлеровыми и лагранжевыми координатами. Уравнения решаются

численно с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Концентрация затем рассчитывается алгебраически вдоль траекторий из уравнения неразрывности в лагранжевой форме. Метод позволяет рассчитывать концентрацию частиц даже в случаях пересечения траекторий и формирования складок в среде частиц.

Траектории частиц и эволюция поперечного профиля концентрации частиц изучены для случаев, когда отношение плотностей частиц и жидкости порядка единицы (сусpenзия) и много больше единицы (запыленный газ). В случае запыленного газа силами присоединенных масс и Архимеда можно пренебречь. В обоих случаях - запыленного газа и сусpenзии - показано, что траектории частиц пересекаются и формируется складка в среде частиц, с образованием пристеночного слоя чистой жидкости без частиц около стенки. Обнаружено, что профиль концентрации частиц содержит сингулярность на границе складки между частицами и чистой жидкостью. Показано аналитически и подтверждено численно, что численная концентрация частиц имеет асимптотику единицы на корень из трансверсальной координаты, отсчитываемой от точки сингулярности. Поэтому, особенность числовой плотности является интегрируемой и приближение разреженной сусpenзии применимо, так как в случае интегрируемой сингулярности среднее расстояние между частицами остается много больше радиуса частиц. Этот результат является существенным развитием по сравнению с более ранними работами по двухфазному пограничному слою, которые учитывали либо силу Стокса либо дополнительно классическую силу Сэфмана, что приводило к появлению зоны накопления частиц на стенке. Заметим, что неинтегрируемая сингулярность на стенке разрешена в рамках модели разреженной сусpenзии с учетом силы Сэфмана с поправкой на присутствие стенки и конечность параметра проскальзывания.

В случае, когда отношение плотностей частиц и жидкости имеет порядок единицы, все четыре силы в межфазном взаимодействии одинаково важны. Продемонстрировано численно, что формируется дополнительный

внутренний локальный максимум концентрации частиц на некотором расстоянии от линии накопления частиц, который отсутствует в случае запыленного газа. Значение концентрации на внутреннем максимуме увеличивается с уменьшением отношения плотностей в сторону случая нейтрально плавучих частиц. Особенность в профиле концентрации частиц остается интегрируемой вне зависимости от порядка величины отношения плотностей. Таким образом, инерционная миграция частиц при течении разреженной суспензии в начальном участке плоского канала (круглой трубы) приводит к аккумуляции частиц на двух плоскостях (кольце) на некотором расстоянии от стенок, с формированием пристеночных слоев без частиц. Эти численные результаты находятся в качественном согласии с результатами ряда экспериментов по миграции нейтрально плавучих частиц, где был обнаружен эффект появления дополнительного внутреннего локального максимума.

Результаты этого раздела опубликованы в [2, 30].

3. Построена двухконтинуальная модель инерционной миграции осаждающихся неброуновских частиц при горизонтальном ламинарном течении разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле-Шоу. В межфазном обмене импульсом учтены силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс, а также инерционная боковая сила, возникающая за счет осаждения частиц и сдвигового характера течения жидкости. Задача о миграции частиц сведена к рассмотрению двумерного стационарного течения в горизонтальном сечении ячейки. Эволюция гидродинамических параметров среды частиц исследована численно с помощью полного лагранжева метода. Под действием инерционной боковой силы частицы мигрируют к средней линии канала. Вблизи стенок формируются свободные от частиц слои, расширяющиеся вниз по потоку. На основании численных расчетов выявлены различные режимы миграции частиц в зависимости от параметра инерционности частиц. Безынерционные частицы движутся без пересечения траекторий. В случае малоинерционных частиц в дисперсном

континууме возникают две “складки”, граничащие с пристеночными слоями чистой жидкости. В случае сильноинерционных частиц формируются множественные “складки” в дисперсном континууме и траектории частиц многократно пересекают среднюю линию канала.

Аналитически получено выражение для критического значения параметра инерционности, при котором происходит смена режимов миграции. Данное критическое значение зависит только от тангенса угла наклона зависимости боковой силы от поперечной координаты в окрестности средней линии канала. Установлено, что на огибающих траекторий частиц числовая концентрация неограниченно возрастает. Показано, что данные особенности являются интегрируемыми, а следовательно, модель разреженной суспензии применима во всей области течения. Найденный в данной работе поперечный профиль концентрации может быть использован для замыкания макромасштабных моделей переноса частиц в ячейке Хеле-Шоу.

Результаты этого раздела опубликованы в [4, 31, 32].

4. Построена двухконтинуальная модель течения суспензии в вертикальной трещине гидроразрыва с учетом неоднородного поперечного профиля концентрации частиц, формирующегося за счет миграции частиц к центральной плоскости трещины. По сравнению с существующими в литературе моделями, не учитывающими эффекты миграции, полученные осредненные поперек трещины двумерные уравнения содержат модифицированные коэффициенты, явно зависящие от ширины ядра течения, занятого частицами. Проведен ряд численных расчетов в рамках одномерной и двумерной постановок для оценки влияния миграции на перенос и оседание частиц. Показано, что при миграции частиц к центру их концентрация в ядре течения возрастает. С увеличением интенсивности поперечной миграции глубина проникновения частиц в трещину увеличивается по сравнению со случаем равномерного распределения, в то время как эффект гравитационной конвекции (оплывания) в окрестности переднего фронта уменьшается.

Результаты этого раздела опубликованы в [12].

Глава 4

Фильтрация в трещине, заполненной гранулированным материалом

В разделе 4.1 в рамках трехконтинуального подхода построена новая модель фильтрации суспензии в пористой среде с учетом образования плотной упаковки осажденных частиц с конечными проницаемостью и пористостью. Выделяются три континуума: несущая жидкость, взвешенные и осажденные частицы. Для одномерного нестационарного течения суспензии получена система уравнений относительно концентраций взвешенных и осажденных частиц, скорости суспензии и давления. Рассмотрено два случая течения в пористой среде (плоский и радиальный), а также два типа граничных условий на входной границе порового образца (задана скорость или давление). Численное решение полученной системы уравнений проведено при помощи конечно-разностного метода. В простейшем случае фильтрации с постоянными пористостью, вязкостью и проницаемостью показано совпадение с аналитическим решением. Проведено сравнение с классическими моделями фильтрации, а также с пятью наборами экспериментальных данных по загрязнению пористого образца. Показано, что новая модель описывает профиль концентрации осажденных частиц лучше, чем классическая модель, вблизи входной границы, где наблюдается значительное осаждение частиц.

Целью раздела 4.2 является изучение течения в среде плотно упакован-

ных несферических частиц с помощью численного моделирования и лабораторных экспериментов для оценки проводимости трещины гидроразрыва, закрывшейся на проппант. Численные расчеты стационарного трехмерного течения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через плотную упаковку частиц проведены с помощью решеточного уравнения Больцмана в режиме фильтрации Дарси. С целью кросс-верификации проведено также сравнение расчетов с моделированием течения в рамках уравнений Навье-Стокса с помощью конечно-объемного метода. Упаковки частиц сгенерированы численно с помощью метода последовательного осаждения. Расчеты проводились для частиц сферической, эллиптической и цилиндрической формы, а также для смешанных упаковок сфер с цилиндрами при различных объемных концентрациях. Показано, что среди всех исследованных типов проппанта цилиндрические частицы дают максимальную проницаемость упаковки даже под действием сдавливающих напряжений. Зависимость численных результатов для безразмерной проницаемости (отнесенной к квадрату радиуса эквивалентной сферы) от пористости хорошо аппроксимируется степенным законом: $K/R_v^2 = 0.204\phi^{4.58}$ в широком диапазоне пористости: $0.3 \leq \phi \leq 0.7$. Эти формулы находятся в хорошем соответствии с экспериментальными измерениями (включая упаковки цилиндрических частиц) и известными лабораторными данными, доступными в диапазоне $0.3 \leq \phi \leq 0.5$. Сравнение с другими корреляциями также представлено.

4.1 Многоконтинуальная модель фильтрации суспензии неколлоидных частиц в плотной упаковке частиц проппанта

Целью раздела является развитие модели фильтрации суспензии в пористой среде с учетом осаждения, мобилизации частиц и конечной проница-

емости упаковки осажденных частиц. Течение суспензии рассматривается в рамках трехконтинуального подхода [195]. Рассмотрено два случая одномерного движения: плоский и радиальный (осесимметричный). Сформулированная модель может быть использована для описания фильтрации бурого раствора в пласте при бурении скважины, для описания очистки прискважинной зоны при тестировании скважины и для описания очистки трещины гидроразрыва, заполненной проппантом. В первом случае в скважину закачивается буровой раствор, который захватывает твердые частицы породы, образовавшиеся при бурении, и под действием перепада давления формирует движение суспензии вертикально вверх. Поскольку скважину окружает пористая среда, буровой раствор проникает в прискважинную зону и снижает проницаемость пористой среды (Рис. 4.1, а). В процессе очистки прискважинной зоны формируется течение суспензии в пласте в направлении к скважине, происходит мобилизация ранее осажденных частиц и неполное восстановление проницаемости породы. При очистке трещины гидроразрыва происходит вытеснение гидроразрывной жидкости пластовым флюидом (горизонтальное движение, направленное к скважине) и мобилизация осажденных частиц.

Рассмотрим известные в литературе модели фильтрации суспензии в пористой среде. В [233] основой теории является разделение пористой среды на две области: область, где твердые частицы суспензии могут только осаждаться на пористой поверхности, и область, в которой частицы могут только закупоривать поры. На основании экспериментальных выводов построена математическая модель фильтрации суспензии через пористую среду с малой объемной долей взвешенных частиц. Получены формулы для определения скоростей осаждения и мобилизации частиц, найдено равновесное значение доли осажденных частиц.

В [234] формулируется математическая модель фильтрации суспензии с учетом осаждения частиц. Феноменологическое выражение для скорости осаждения частиц определяется как функция скорости потока и концентра-

ций взвешенных и осажденных частиц. Численные расчеты, проведенные в рамках предложенной модели, подтверждаются экспериментальными данными по распределению концентрации осажденных частиц в пористом образце. Построена модель обратного потока жидкости через загрязненную пористую среду. Для описания захвата частиц предложена зависимость скорости эрозии от параметров потока.

В [235] рассматриваются различные силы, действующие на осажденные частицы в пористой среде. Максимальная концентрация осажденных частиц зависит от числа эрозии, которое монотонно возрастает с увеличением скорости потока. Найдено аналитическое решение для задачи фильтрации суспензии с постоянной скоростью. На фронте эрозии получено значение критического времени и концентрации взвешенных частиц как функции концентрации осажденных частиц, времени и координаты.

В [236] построена математическая модель фильтрации суспензии в пористой среде с учетом конечной пористости осажденных частиц. Построенная модель содержит три свободных параметра (два параметра, отвечающих за осаждение частиц, и показатель степени в формуле для проницаемости породы). При моделировании обратного течения чистой жидкости с целью восстановления проницаемости было предложено два варианта начальных условий: (1) все ранее осажденные частицы остаются неподвижными, и во время обратной прокачки осаждение продолжается; (2) все ранее осажденные частицы мобилизуются, осаждение начинается с началом обратной прокачки. Численные результаты ни в одном из этих двух предельных случаев не описывают экспериментальные данные. Введена критическая скорость, начиная с которой происходит мобилизация частиц, что позволило получить соответствие с экспериментальными данными.

В [237] рассматривается задача о фильтрации малоконцентрированной суспензии в пористой среде с учетом конечной пористости осажденных частиц. Пренебрегается проводимостью каналов между осажденными частицами, а также членами второго порядка малости, связанными с объемом

жидкости между осажденными частицами. Описываются процессы кольмации и мобилизации. При постоянной по времени концентрации найден расход жидкости. При постоянном расходе суспензии найден перепад давления вдоль образца.

В [238] рассмотрена совместная задача многокомпонентной фильтрации внутри породы и образования внешней корки. Взвешенные частицы имеют различные диаметры и разделены на соответствующие фазы. Математическая модель построена при малой объемной концентрации взвешенных частиц. Введена степенная зависимость коэффициента кольмации от скорости фильтрации. Для описания обратной прокачки вводится коэффициент эрозии, отвечающий за процент мобилизации осажденных частиц в поток. Задача решена аналитически при помощи метода характеристик и преобразований Лапласа. Предложена формула для нахождения диаметра поровых каналов. Сформулирован критерий начала образования внешней корки. Построенная многокомпонентная модель с высокой точностью описывает эксперимент по очистке порового образца.

В [239] сформулирована модель фильтрации суспензии в пористой среде при постоянной пористости породы. Процессы захвата и осаждения частиц описаны двумя моделями, которые построены на основе механизмов единственного и многократного захвата частиц. Для первого случая при постоянном коэффициенте кольмации методом характеристик получено аналитическое решение для распределения профилей концентрации взвешенных и осажденных частиц. Найдена средняя глубина проникновения суспензии внутрь породы, равная обратному коэффициенту кольмации. При коэффициенте кольмации, отличном от постоянного, предложен алгоритм поиска аналитического решения. Для задачи многократного захвата при наличии скачка концентрации взвешенных частиц найдено значение концентрации на фронте разрыва. Представлено несколько примеров редуктирования модели многократного захвата к модели единичного захвата.

В [240] построена стохастическая модель фильтрации суспензии в пори-

стой среде. Частицы суспензии и поры имеют распределение по размерам. Частицы с радиусом, меньшим радиуса поры, проникают вглубь порового образца. Частицы с большим радиусом осаждаются на скелете порового образца. Получено аналитическое решение в случае пористой среды с одинаковыми радиусами пор и в случае пористой среды с малым различием в размерах пор. Модели течений в пористых средах с близкими по размерам порами могут быть сформулированы относительно осредненных концентраций частиц независимо для мелких, средних и крупных включений. Скорость захвата частиц в осредненной модели пропорциональна потоку жидкости через недоступные поры, в то время как в известных моделях эта скорость пропорциональна всему потоку жидкости.

В настоящем разделе предлагается построить более общую, по сравнению с классическими, модель фильтрации суспензии в пористой среде. Новым элементом модели является учет фильтрации чистой жидкости через плотную упаковку осажденных частиц. Ожидается, что указанный эффект окажет существенное влияние на фильтрацию суспензии в окрестности входного сечения, где концентрация осажденных частиц максимальна.

4.1.1 Постановка задачи о фильтрации суспензии

Течение суспензии описывается в рамках трехконтинуального подхода: взвешенные частицы (твердые частицы, движущиеся вместе с потоком суспензии), осажденные частицы (твердые частицы, осажденные на скелете пористой среды) и несущая фаза (вязкая ньютоновская несжимаемая жидкость). Взвешенные частицы суспензии характеризуются плотностью фазы ρ_p^{mob} и среднемассовой скоростью U_p^{mob} ; фаза осажденных частиц характеризуется плотностью ρ_p^{sed} ; несущая фаза характеризуется среднемассовой скоростью U_f и плотностью ρ_f . Материал частиц характеризуется постоянной плотностью ρ_p^0 , а жидкость - плотностью ρ_f^0 . Многоконтинуальное описание суспензии применимо при условии наличия иерархии линейных

масштабов: диаметр частиц много меньше характерного диаметра поровых каналов, но много больше длины свободного пробега молекул жидкости [195]. Крупными поровыми каналами будем называть поровое пространство, состоящее из всего порового объема, за исключением осажденных частиц и просветов между ними. Мелкими поровыми каналами будем называть пространство между осажденными частицами (Рис. 4.1, б).

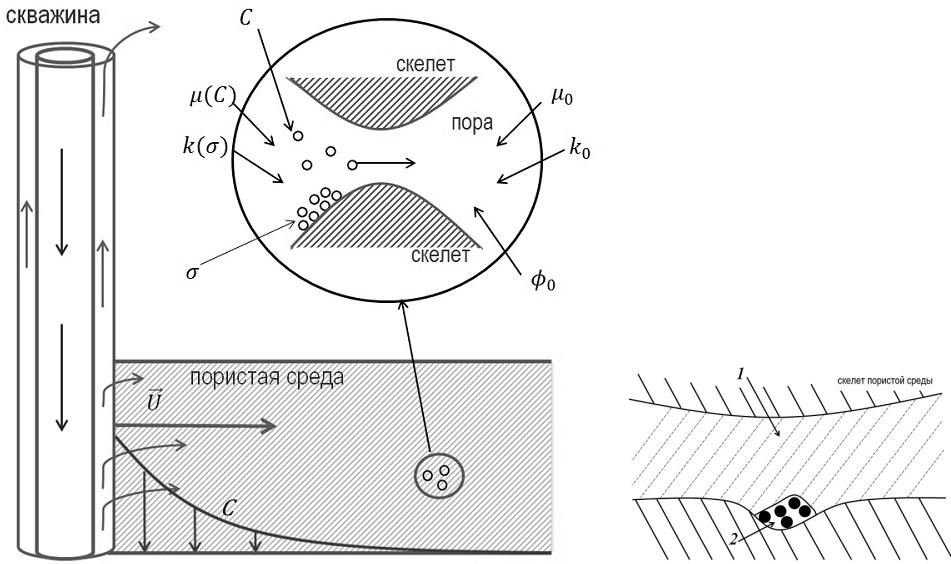


Рис. 4.1: Схема течения бурового раствора в скважине и в околоскважинной зоне (а); схема порового пространства (б): крупные поровые каналы (1) и мелкие поровые каналы (2).

Плотности фаз частиц связаны с пористостью породы и концентрацией включений следующими соотношениями [233]:

$$\rho_p^{mob} = \rho_p^0 C_p \phi_c, \quad \rho_p^{sed} = \sigma \rho_p^0, \quad \rho_f = \rho_f^0 (\phi_t - C_p \phi_c),$$

$$\phi_t = \phi_0 - \sigma, \quad \phi_c = \phi_0 - \sigma / C_{max}, \quad (4.1)$$

где C_p - объемная концентрация взвешенных частиц в объеме, доступном для течения суспензии (в объеме крупных поровых каналов), σ - объемная концентрация осажденных частиц в полном объеме пористой среды, C_{max} - максимальная концентрация твердых частиц (плотная упаковка),

ϕ_t - пористость среды, образованная скелетом и осажденными частицами (крупные и мелкие каналы), ϕ_c - пористость среды, образованная крупными поровыми каналами; ϕ_0 - начальная пористость среды.

Запишем закон сохранения массы для частиц и жидкости [241]:

$$\frac{\partial \rho_p^{mob}}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_p^{mob} U_p^{mob} r^j)}{\partial r} = -q_s, \quad \frac{\partial \rho_p^{sed}}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_p^{sed} U_p^{sed} r^j)}{\partial r} = q_s, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_f U_f r^j)}{\partial r} = 0.$$

Здесь $j = 0$ в плоском течении и $j = 1$ в радиальном, q_s - интенсивность осаждения и мобилизации частиц на поровом скелете, определяемая следующим соотношением [234]:

$$q_s = \rho_p^{mob} U_p^{mob} \lambda - \rho_p^0 \alpha_{mob} \sigma \delta(U_s - U_{crit}), \quad (4.3)$$

$$\delta(U_s - U_{crit}) = \begin{cases} U_s - U_{crit}, & U_s > U_{crit} \\ 0, & U_s < U_{crit} \end{cases}.$$

Здесь λ - коэффициент кольматации (осаждения) [242], α_{mob} - коэффициент мобилизации осажденных частиц, U_s - скорость фильтрации суспензии в крупных и мелких поровых каналах, U_{crit} - критическая скорость суспензии, при превышении которой происходит мобилизация осажденных частиц.

В крупных поровых каналах с проницаемостью $k(\sigma)$ движется суспензия с вязкостью $\mu(C_p)$. В мелких поровых каналах с проницаемостью $k_s(\sigma)$ движется чистая жидкость с постоянной вязкостью μ_0 . Законы сохранения импульса (законы Дарси) для несущей фазы, взвешенных частиц и суспензии в целом получаются осреднением по объему крупных и мелких поровых каналов:

$$U = - \frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad U_s = - \left[\frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} + \frac{k_s(\sigma)}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.4)$$

$$U_f^{filtr} = - \left[(1 - C_p) \frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} + \frac{k_s(\sigma)}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad U_p = - C_p \frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$U_f^{filtr} = U_f(\phi_t - C_p \phi_c).$$

Здесь U - скорость фильтрации суспензии в крупных поровых каналах, U_f^{filtr} - скорость фильтрации жидкости в крупных и мелких каналах порового пространства, $U_p = U_p^{mob} C_p \phi_c$ - среднеобъемная скорость взвешенных частиц в крупных поровых каналах, p - давление.

Используем выражение для вязкости суспензии в крупных поровых каналах в виде [161]:

$$\mu(C_p) = \mu_0 \left(1 - \frac{C_p}{C_{max}} \right)^{-1.89}. \quad (4.5)$$

В [236] предлагается ввести следующее соотношение между проницаемостью породы в крупных поровых каналах и объемной долей осажденных частиц:

$$k(\sigma) = k_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}} \right)^3. \quad (4.6)$$

Проницаемость породы в мелких поровых каналах:

$$k_s = k_{s0} \left(\frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}} \right)^3, \quad k_{s0} = \frac{(1 - C_{max})^3 d^2}{180 C_{max}^3}. \quad (4.7)$$

Здесь k_{s0} - проницаемость мелких поровых каналов при полной закупорке порового пространства ($\sigma = \phi_0 C_{max}$), определяемая из уравнения Козени-Кармана [243]; d - диаметр частиц суспензии.

Используя введенные выше определения среднеобъемных скоростей и соотношения (4.1), (4.3), (4.4), уравнения (4.2) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(C_p \phi_c)}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(C_p U r^j)}{\partial r} &= -U C_p \lambda + \alpha_{mob} \sigma \delta(U_s - U_{crit}), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= U C_p \lambda - \alpha_{mob} \sigma \delta(U_s - U_{crit}), \\ \frac{\partial(U_s r^j)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В классических моделях не учитывается тот факт, что осажденные частицы образуют пористую среду с меньшей проницаемостью, чем проницаемость исходного образца. Фильтрация чистой жидкости через эту пористую среду также не учитывается.

Далее приведем классическую модель фильтрации суспензии внутри крупных поровых каналов без проникновения в пространство между осажденными частицами ($\phi_c = \phi_t = \phi_0 - \sigma, U = U_s, k_s = 0$) [236, 244, 233, 247, 239]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(C_p\phi_c)}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(C_pUr^j)}{\partial r} &= -C_pU\lambda(\sigma) + \alpha_{mob}\sigma\delta(U - U_{crit}), \\ \frac{\partial\sigma}{\partial t} &= C_pU\lambda(\sigma) - \alpha_{mob}\sigma\delta(U - U_{crit}), \\ \frac{\partial(Ur^j)}{\partial r} &= 0, \quad U = -\frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} \frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Эксперименты по загрязнению пористых образцов [245] показали, что улучшить предсказания модели (4.9) можно путем введения зависимости:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta_{colm}\sigma). \quad (4.10)$$

Здесь λ_0 - начальный коэффициент кольматации. Таким образом, модель (4.9) содержит два свободных параметра λ_0 и β_{colm} .

При постоянной пористости ($\phi_c = \phi_t = \phi_0$) имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \phi_0 \frac{\partial C_p}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(C_pUr^j)}{\partial r} &= -C_pU\lambda(\sigma) + \alpha_{mob}\sigma\delta(U - U_{crit}), \\ \frac{\partial\sigma}{\partial t} &= C_pU\lambda(\sigma) - \alpha_{mob}\sigma\delta(U - U_{crit}), \\ \frac{\partial(Ur^j)}{\partial r} &= 0, \quad U = -\frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} \frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Данная модель не учитывает изменение размеров поровых каналов и применима лишь в случае малой объемной доли осажденных частиц.

Рассмотрим два варианта граничных условий: на входной и выходной границе порового образца задано давление (а): $r = r_0 : p = p_0, C_p = C_0$; $r = L : p = 0$. На входной границе задана скорость фильтрации суспензии, на выходной - давление (б): $r = r_0 : U_s = U_0, C_p = C_0; r = L : p = 0$.

Начальные условия при $t = t_0$: $\phi = \phi_0, \sigma = 0$.

Введем безразмерные переменные r^*, t^*, U^*, Λ :

$$r = Lr^*, \quad t = t^*L/U_0, \quad U = U_0U^*, \quad \lambda = \Lambda/L.$$

Здесь U_0 - скорость на входной границе образца. Тогда безразмерные системы уравнений, приведенные выше, будут иметь тот же вид, что и размерные, но в правых частях уравнений переноса будет стоять безразмерный коэффициент кольматации Λ . Соотношение (4.10) в безразмерных переменных имеет вид (далее опустим индекс *):

$$\Lambda = \Lambda_0(1 + \beta_{colm}\sigma).$$

Здесь $\Lambda_0 = \lambda_0L$ - безразмерный начальный коэффициент кольматации.

4.1.2 Результаты численных расчетов профилей концентрации и скорости частиц, проницаемости и пористости среды

Подстановкой второго уравнения (4.4) в третье уравнение (4.8) получим уравнение относительно давления p (или относительно функции f):

$$f = r^j \left[\frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} + \frac{k_s}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0. \quad (4.12)$$

Введем равномерную по пространству разнесенную сетку. Аппроксимируем функцию f в центрах ячеек, а второе уравнение (4.12) - в узлах сетки. Полученное разностное уравнение второго порядка относительно давления решено методом прогонки. Аппроксимация гиперболического уравнения переноса взвешенных частиц (первое уравнение (4.8)) проведена противопоточной схемой первого порядка точности по времени и по пространству. Известно, что решение уравнения переноса, построенное с использованием рассматриваемой схемы, устойчиво при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви [246]. Уравнение для концентрации осажденных частиц решено методом Эйлера с первым порядком точности.

Сформулируем полный алгоритм численного решения системы (4.4)–(4.8), (4.10), остальные сформулированные системы уравнений решаются аналогично. На каждом шаге по времени вычисляются следующие параметры:

- 1) Давление p из уравнений (4.12);
- 2) Скорость суспензии U из уравнений (4.4);
- 3) Концентрация осажденных частиц из уравнения (4.8);
- 4) Пористости ϕ_t и ϕ_c из соотношений (4.1);
- 5) Коэффициент кольматации λ из соотношения (4.10);
- 6) Концентрация взвешенных частиц C_p из уравнения (4.8);
- 7) Вязкость μ и проницаемости k и k_s из соотношений (4.5), (4.6), (4.7).

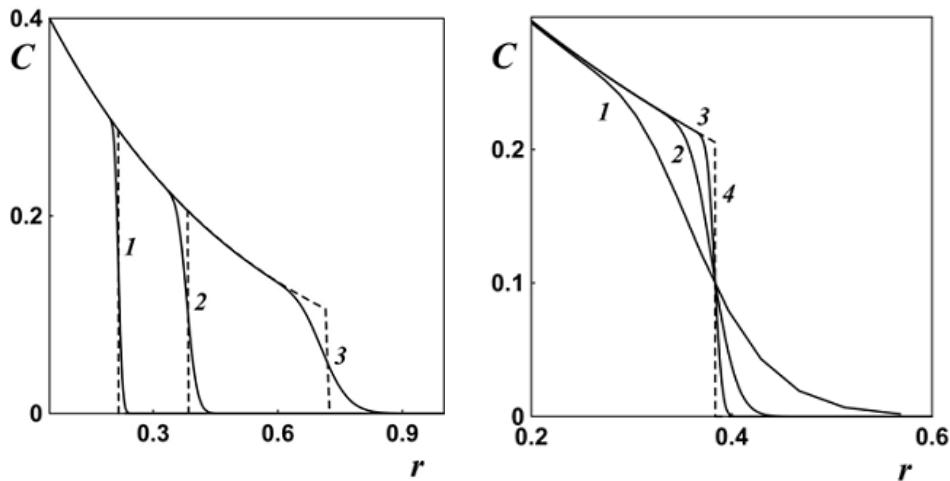


Рис. 4.2: Профиль объемной концентрации взвешенных частиц в различные моменты времени (а). Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t = 0.05, 0.08, 0.1$, пунктирная линия – аналитическое решение. Сеточная сходимость (б): кривые 1–3 соответствуют числу узлов $10^2, 10^3$ и 10^4 соответственно, 4 – аналитическое решение. Плоское течение, обратная сетка, модель (4.11), $\lambda = 2, C_0 = 0.4, \varphi_0 = 0.4, U_0 = 1$.

Данный алгоритм применяется для каждого шага по времени до тех пор, пока момент времени t не достигнет некоторого наперед заданного

t_{max} . Специфика фильтрации суспензии такова, что большинство частиц осаждается вблизи входной границы ($r = r_0$), следовательно вблизи этой границы будет наблюдаться резкое падение проницаемости. Для описания подобного явления удобно использовать неравномерную сетку со сгущением вблизи входной границы. Неравномерная сетка введена при помощи замены переменных $g(r)$ двух типов: $r = e^g$ (экспоненциальная сетка) и $r = 1/g$ (обратная сетка), где g - новая координата. Используя замену $g(r)$, перепишем уравнения системы (4.4), (4.8) в виде:

$$\frac{\partial(C_p\phi_c)}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(C_pUr^j)}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial r} = -C_pU\lambda, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = C_pU\lambda,$$

$$\frac{\partial(U_s r^j)}{\partial g} = 0, \quad U_s = -\left[\frac{k(\sigma)}{\mu(C_p)} + \frac{k_s}{\mu_0}\right] \frac{\partial p}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Алгоритм численного решения полученной системы аналогичен алгоритму 1)-7), приведенному выше.

4.1.3 Верификация численных расчетов на аналитическом решении

Для системы уравнений (4.11) при $U_s < U_{crit}$ и при постоянном коэффициенте кольматации известно аналитическое решение, полученное методом характеристик [247]. Вводится переменная $\eta = \eta(t, r)$, которая является константой вдоль каждой характеристической кривой. В плоском случае имеем:

$$\eta = t - \phi_0(r - r_0).$$

В переменных (η, r) уравнения переноса (4.8) примут вид:

$$\frac{\partial C_p}{\partial r} = -C_p\Lambda, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} = C_p\Lambda. \quad (4.13)$$

Решение уравнений (4.13) имеет следующий вид:

$$C_p(\eta, r) = \begin{cases} C_0 \exp\{\Lambda(r_0 - r)\}, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\sigma(\eta, r) = \begin{cases} C_0 \Lambda \exp\{\Lambda(r_0 - r)\} \eta, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases}$$

Граничные условия в новых переменных:

$$C_p(\eta, r_0) = \begin{cases} C_0, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases}$$

Было проведено сравнение численной схемы для системы (4.11) с аналитическим решением (4.14). Получено хорошее соответствие как профиля объемной концентрации, так и скорости проникновения суспензии вглубь породы (Рис. 4.2, *a*); при увеличении числа узлов сетки наблюдается сходимость к аналитическому решению (Рис. 4.2, *b*).

4.1.4 Сравнение с лабораторными данными

Валидация модели фильтрации суспензии в пористой среде проведена на основе экспериментов [248] и [236].

Целью данной валидации является сравнение новой модели (4.8) и классической модели (4.9) при наличии одного свободного параметра Λ_0 ($\beta_{colm} = 0$).

В [248] был проведен ряд экспериментов по загрязнению пористых образцов: эксперименты GB13, BT21, BT28 и CG14. Имеются все параметры, характеризующие суспензии и образцы, а также экспериментальные данные о распределении объемной доли осажденных частиц вдоль пористого образца.

Безразмерный коэффициент кольматации Λ для моделей (4.8) и (4.9) был найден минимизацией среднеквадратичного отклонения распределения осажденных частиц вдоль образца.

Утверждается, что новая модель лучше описывает профиль концентрации осажденных частиц в окрестности входного сечения. Описание профи-

ля концентрации вблизи входной границы имеет большое значение, потому что именно там происходит значительное осаждение частиц и резкое падение проницаемости пористого образца.

В рамках новой и классической моделей получены следующие минимальные среднеквадратичные отклонения: для эксперимента GB13 - 0.688 и 0.816 соответственно, BT28 - 0.213 и 0.75, CG14 - 0.265 и 0.95. Новая модель значительно лучше, чем классическая, описывает профиль концентрации осажденных частиц вблизи входной границы (Рис. 4.3, Рис. 4.4, а).

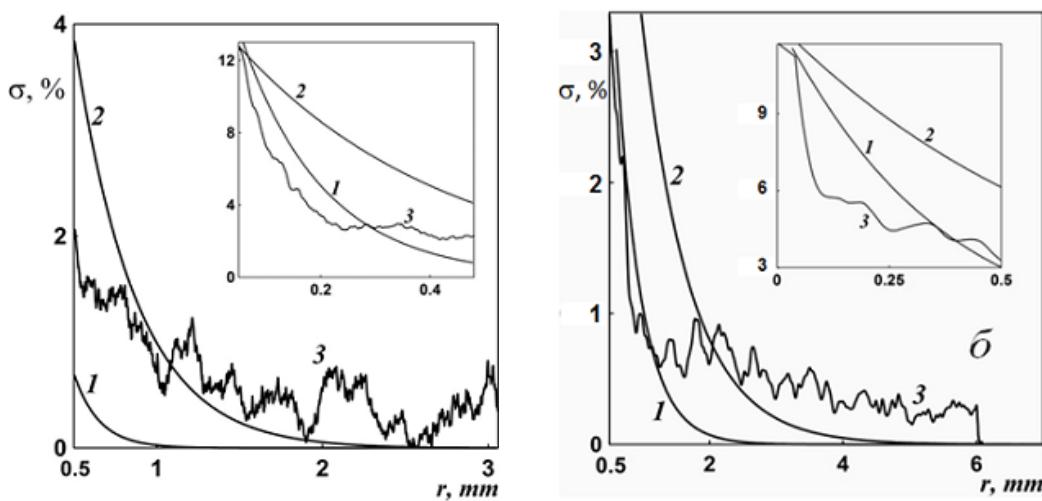


Рис. 4.3: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 – расчеты в рамках модели (4.8) при $\Lambda = 198$, 2 – в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 78$, 3 – экспериментальные данные GB13 (а); 1 – в рамках модели (4.8) при $\Lambda = 15.045$, 2 – в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 9.86$, 3 – экспериментальные данные BT28 (б).

Преимущество новой модели можно объяснить большим значением концентрации осажденных частиц на входной границе: новая модель тем больше отличается от классической, чем большее различие между пористостями ϕ_t и ϕ_c , и следовательно, чем больше объем мелких поровых каналов и концентрация осажденных частиц.

При значениях концентрации осажденных частиц в разы меньших, чем максимально возможное (соответствующее полной закупорке пор), численные расчеты в рамках моделей (4.8) и (4.9) совпадают.

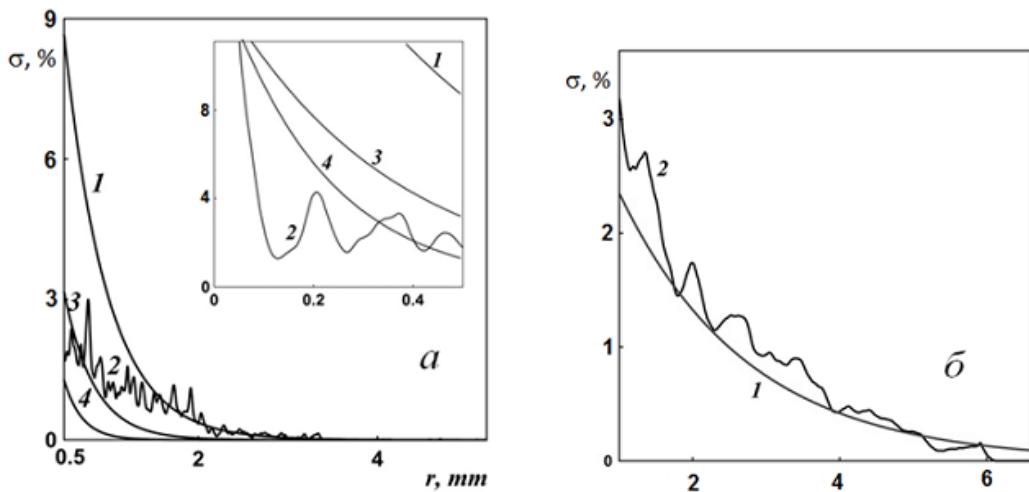


Рис. 4.4: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 – расчеты в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 12.6$, 2 – экспериментальные данные CG14, 3 – в рамках модели (4.8) при $\Lambda = 18.015$, 4 – в рамках модели (4.8) при $\Lambda = 30.025$ (а); 1 – в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 3.3$, 2 – экспериментальные данные BT21 (б).

В эксперименте BT21 неизвестно поведение профиля концентрации осажденных частиц вблизи входной границы. Максимальное возможное значение концентрации при полной закупорке пор составляет 15.2%, максимальное известное в данном эксперименте – 3%. При коэффициенте кольматации Λ , соответствующем минимальной среднеквадратичной ошибке 0.18, моделирование в рамках новой и классической моделей, совпадают в силу малой объемной доли осажденных частиц (Рис. 4.4, б).

В рамках модели (4.9) хорошее соответствие с экспериментальными данными достигается только при наличии двух свободных параметров Λ_0 и β_{colm} . Неизвестные были найдены методом градиентного спуска с дробным шагом [249]. Получено совпадение экспериментального профиля концентрации осажденных частиц и численного моделирования по всей длине пористого образца (Рис. 4.5). Минимальные среднеквадратичные отклонения составляют: для эксперимента GB13 - 0.113, BT28 - 0.117, CG14 - 0.196.

В [236] также был проведен эксперимент по загрязнению пористого образца. Было использовано два вида измерения профиля концентрации осажденных частиц: томография и спектроскопия. В результате численных

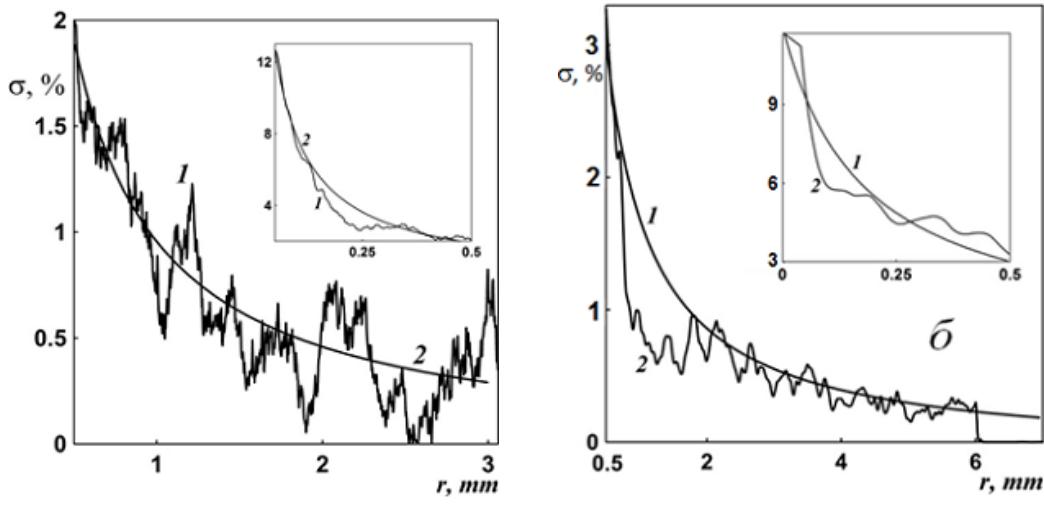


Рис. 4.5: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 – экспериментальные данные GB13, 2 – расчеты в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 3.36$ и $\beta_{colm} = 850$ (а); 1 – в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 0.6$ и $\beta_{colm} = 447$, 2 – экспериментальные данные BT28 (б).

расчетов получено, что новая модель (4.8) хорошо описывает экспериментальные данные спектроскопии, в то время как классическая модель хорошо описывает результаты измерения томографии (Рис. 4.6).

4.1.5 Обсуждение

Для построенных выше моделей фильтрации суспензии в пористой среде были проведены параметрические исследования.

Проведено сравнение профилей концентрации взвешенных и осажденных частиц, полученных численно в рамках классической (4.9) и новой (4.8) моделей. Получено, что в рамках новой модели (4.8) наблюдается повышение концентрации взвешенных частиц (по сравнению с профилями концентраций в рамках существующей модели) (Рис. 4.7, а). В силу того, что объем крупных поровых каналов в модели (4.8) меньше, чем в модели (4.9), концентрация взвешенных частиц C_p возрастает. Как следствие, концентрация осажденных частиц также возрастает, потому что скорость осаждения частиц пропорциональна концентрации взвешенных частиц. В

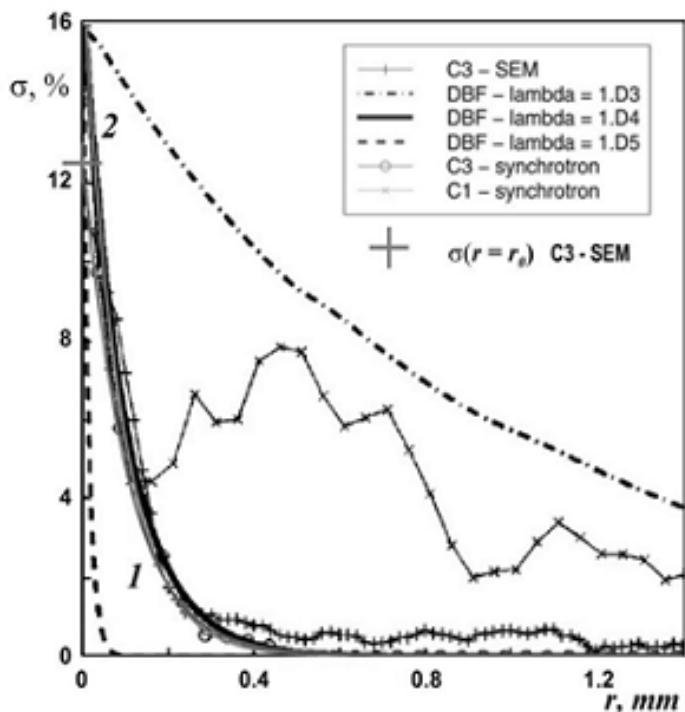


Рис. 4.6: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 – численные расчеты в рамках модели (4.8) при $\Lambda = 300$, 2 – в рамках модели (4.9) при $\Lambda = 300$.

рамках модели (4.8) наблюдается совпадение профилей концентрации взвешенных частиц в различные моменты времени при различных глубинах проникновения супензии (Рис. 4.7, б).

Данная работа включает в себя первый этап исследования процесса фильтрации супензии в пористой среде, результатом которого является уменьшение количества свободных параметров с двух до одного. В дальнейшем планируется определить зависимость коэффициента кольматации от параметров потока и, тем самым, вообще исключить свободные параметры из модели.

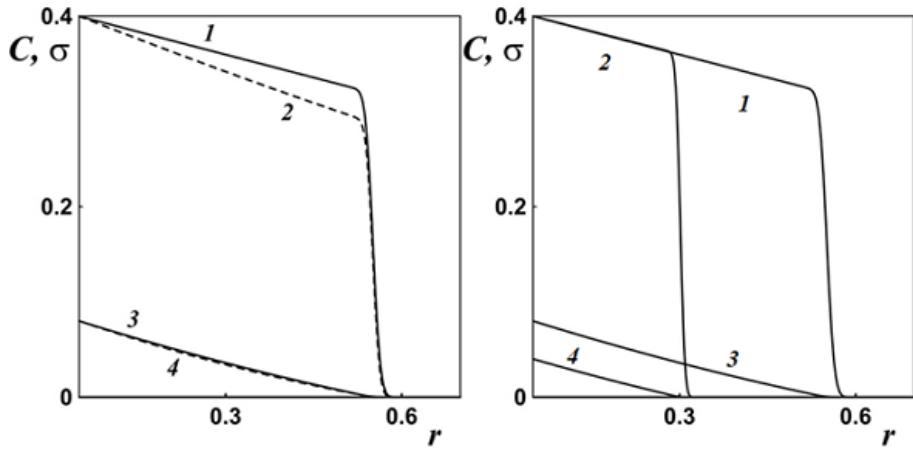


Рис. 4.7: Профили концентрации взвешенных и осажденных частиц. Кривые 1 и 2 – концентрации взвешенных частиц, полученные в рамках моделей (4.8) и (4.9) соответственно, 3 и 4 – концентрации осажденных частиц в рамках моделей (4.8) и (4.9) соответственно (а). Профили концентрации в рамках модели (4.8) и различные моменты времени (а); кривые 1 и 2 – концентрации взвешенных частиц при $t = 0.1$ и 0.2 соответственно; 3 и 4 – концентрации осажденных частиц при $t = 0.1$ и 0.2 соответственно. (б) $\lambda = 1$, $C_0 = 0.4$, $\varphi_0 = 0.4$, $U_0 = 1$.

4.2 Моделирование течения в проппантной пачке методом решеточного уравнения Больцмана

4.2.1 Постановка задачи о прямом численном моделировании течения в поровом пространстве

Свойства гидродинамической проводимости гранулированных материалов исследовались во многих работах [253, 254]. Учитывая современное развитие технологии гидроразрыва пласта, заметим, что одним из ключевых улучшений технологии стало использование нетрадиционного проппанта цилиндрической формы совместно с закачкой суспензии пульсами попеременно с порциями чистой жидкости [255]. Как указано в работах [256, 257, 258, 259], с момента внедрения цилиндрический проппант продемонстрировал свойства увеличенной проницаемости проппантной пачки и снижение частоты нештатной работы по гидроразрыву пласта (так называемые СТОПы вследствие “скринаута” или, другими словами, неже-

лательного запирания частиц в трещине в окрестности скважины). Когда цилиндрический проппант используется на завершающей стадии работ по гидроразрыву, вследствие своей специфической формы [255] он увеличивает прискваженную проводимость трещин и предотвращает вынос частиц из трещины во время добычи. Таким образом, детальное исследование проницаемости смешанной упаковки цилиндрических и сферических частиц представляет большой интерес для оценки проводимости трещины гидроразрыва.

Во многих нефтегазовых приложениях пластовые жидкости движутся через плотную упаковку частиц, поэтому имеется существенный интерес к изучению такого рода течений для выяснения связи между микроструктурой порового пространства и макроскопическими транспортными свойствами. Ранние теоретические исследования были ограничены детерминированными (упорядоченными) упаковками частиц [260]. С развитием вычислительной физики, стало возможным генерировать численно случайные упаковки частиц. Среди известных алгоритмов можно выделить методы последовательного осаждения частиц и метод Монте-Карло. В методе последовательного осаждения, как подсказывает название, частицы добавляются в упаковки последовательно, одна за одной, в соответствии с некоторым правилом или процедурой. Обычно упаковка формируется, начиная с нижнего уровня, и растет вверх. Например, в алгоритме Беннета [262], следующая сферическая частица располагается на самой нижней позиции из возможных. В баллистическом алгоритме [263, 264], частицы располагаются случайно над верхним уровнем упаковки, а затем получают возможность осаждаться под действием силы тяжести и взаимодействовать друг с другом и с верхним уровнем до установления механического равновесия. Сравнение нескольких методов последовательного осаждения приведено в [265]. В семействе методов Монте-Карло все частицы вводятся одновременно в заданном объеме на случайных позициях. Затем частицы движутся и взаимодействуют друг с другом в соответствии с алгоритмом Монте-Карло

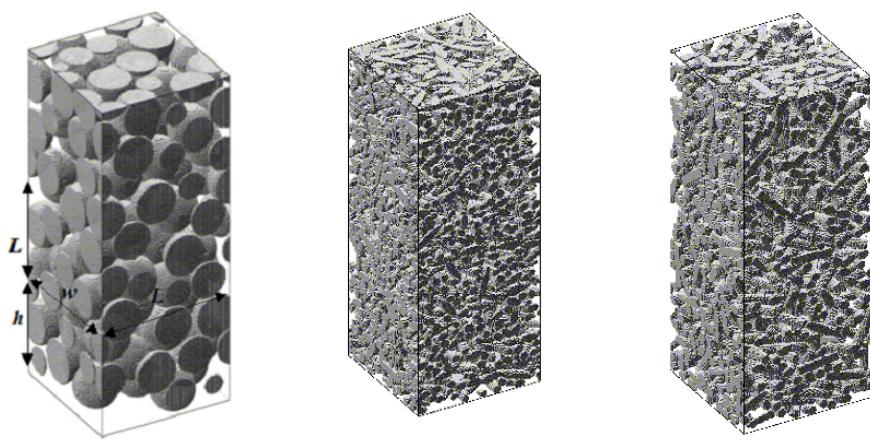


Рис. 4.8: Пространственно периодические упаковки частиц в форме сфер (a), эллипсоидов (b), и цилиндров (c). Соотношение размеров удлиненных частиц равно $l_{max}/l_{min} = 5$. Пористость равна 0.42, 0.60, и 0.65, соответственно.

[268].

Заметим, что геометрические свойства и ориентация частиц зависят от метода создания цифровой упаковки. Для сравнения можно обратиться к работам [264], [266]–[269]. Фактически, большинство алгоритмов были разработаны для того, чтобы описать физические процессы формирования упаковки частиц. Метод последовательного осаждения частиц показал хорошие возможности по воспроизведению осадочных пород [271]. Адаптация метода Монте-Карло была использована для моделирования сегрегации частиц [272]. Примеры других алгоритмов создания случайных упаковок частиц можно найти в [273]–[276]. Заслуживает внимания обзор по плотным упаковкам сферических частиц [178].

Вывод транспортных свойств случайных упаковок частиц обычно проводится путем осреднения процессов, происходящих на малом масштабе пор. Для того, чтобы получить поле скоростей и давления, обычно решаются уравнения Навье-Стокса для течения вязкой несжимаемой жидкости с использованием конечно-объемных или конечно-разностных методов [269, 277], либо метода решеточного уравнения Больцмана (LBM) [276, 278, 279, 283], либо метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH) [282, 281, 280]. Методы поровых каналов (pore network modelling) также хорошо себя зарекомендовали, они были ранее успешно использованы для расчета макроско-

тических транспортных свойств для случайных упаковок частиц [286, 287, 284]. В [285] проведено сравнение результатов расчетов на масштабе пор, полученных с помощью метода решеточного уравнения Больцмана (LBM) и метода поровых каналов, с экспериментами с использованием ядерного магнитного резонанса (NMR).

На практике параметры, полученные численно или экспериментально для каждой конкретной упаковки, имеют ограниченную область применения. Поэтому были приложены заметные усилия для вывода общих соотношений между различными макроскопическими транспортными свойствами среды плотно упакованных частиц [261]. Для пористой среды известны эмпирические либо полуэмпирические соотношения для проницаемости как функции пористости и гидравлического радиуса [260]. Однако предсказательная сила существующих корреляций ограничена определенным диапазоном пористости и типом пористой среды. Универсальный закон для зависимости проницаемости от пористости для полидисперсных упаковок сферических частиц был предложен в [288] в форме: $K \sim (\phi - \phi_c)^n$, с показателем степени $n \sim 4$. Данное соотношение включает критическую пористость ϕ_c . Этот результат находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Чисто степенной закон был получен в [269] для аппроксимации данных для упаковок сфер, эллипсоидов, цилиндров и параллелипедов: $K/R_v^2 = 0.117\phi^{4.57}$ в диапазоне по пористости $0.4 \leq \phi \leq 0.75$. В недавних исследованиях течения жидкости через случайные упаковки, например, в работе [270] проведено сравнение расчетов LBM для течений при малых числах Re через упаковку сфер с формулой Козени-Кармана и было показано хорошее совпадение при значении константы пропорциональности $k = 4.17$, хотя для этого соотношения не было проведено сравнение с экспериментом.

В настоящей работе рассматривается трехмерное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости через случайную смешанную упаковку нескольких типов частиц (сфера, эллипсоиды и цилиндры). Ставится за-

дача определения соотношений для проницаемости, которые будут следовать из численного моделирования на масштабе поровых каналов и будут валидированы относительно лабораторных экспериментов (тесты проводимости проппантной пачки). Задача решается путем создания цифровых упаковок частиц, расчета течения в этих упаковках на масштабах пор в режимах малых (Дарси) и конечных (Форхгаймер) чисел Рейнольдса. Создание цифровых упаковок частиц было проведено в сотрудничестве с научной группой проф. Адлера (National Centre of Scientific Research, France) [292]. Для расчета течения в порах было использовано два метода: метод решеточного уравнения Больцмана, разработанный проф. Ю. Ким [278], и конечно-объемный метод численного решения уравнений Навье-Стокса [293]. Использованная реализация метода решеточного уравнения Больцмана прошла существенную оптимизацию по скорости расчета, однако она применима лишь для расчета уравнений Стокса ($Re = 0$). Поэтому для моделирования течения в инерционном режиме был дополнительно использован исследовательский код на основе конечно-объемного метода решения уравнений Навье-Стокса. Были проведены систематические расчеты для описания эффекта формы частиц, размера и состава смеси на проницаемость упаковки гранулированного материала. Результаты сравнивались с экспериментальными данными, в частности, с результатами экспериментов, проведенных А. Матвеевым в Новосибирском технологическом центре Шлюмберже.

Проведенные исследования показали, что могут быть построены универсальные соотношения для проницаемости путем введения эквивалентного радиуса частицы как характерного масштаба длины для обезразмеривания. Показано, что проницаемость аппроксимируется степенной функцией в широком диапазоне изменения пористости. Цилиндрические частицы дают наибольшую проницаемость и, таким образом, являются предпочтительным материалом в качестве проппанта для гидроразрыва пласта как в режиме фильтрации Дарси, так и в инерционном режиме.

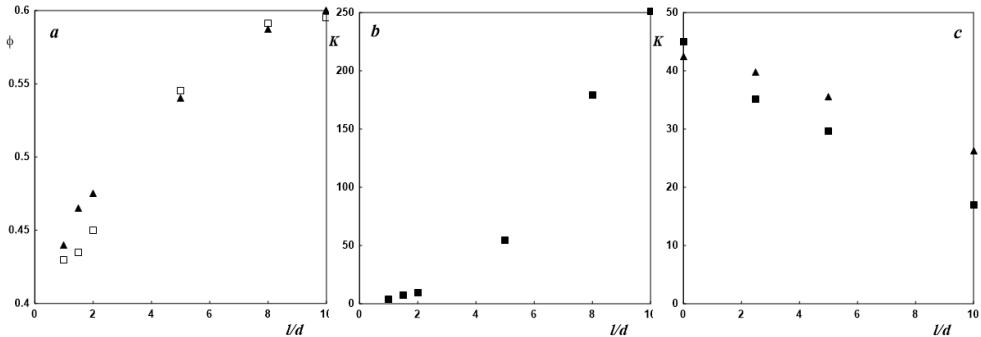


Рис. 4.9: Зависимость пористости упаковки от соотношения размеров цилиндра. Пространственно-периодическая упаковка частиц (треугольники) и упаковка частиц, заключенная между стенок (квадраты) (a). Зависимость размерной проницаемости упаковки цилиндрических частиц от соотношения размеров цилиндра (b). Зависимость размерной проницаемости смешанной упаковки частиц (сфера+цилиндры) от объемной доли сферических частиц. Радиус сфер равен радиусу цилиндра либо в два раза превосходит ($R_s = R_c$ (треугольники) и $R_s = 2R_c$ (квадраты)) (c). Масштаб проницаемости на графиках 100 D .

4.2.2 Результаты численных расчетов коэффициента проницаемости

В данном разделе представлены результаты серии численных расчетов течения в упаковке частиц методом LBM. Рассмотрены три типа частиц: сферы (наиболее часто используемые в качестве частиц проппанта в полях при гидроразрыве пласта), эллипсоиды и цилиндры. Смешанные упаковки также рассматривались. Исследовалось медленное течение при малых числа Рейнольдса, когда зависимость скорости фильтрации от градиента давления может быть аппроксимирована законом Дарси,

$$\mathbf{V} = \frac{K}{\mu} \nabla p, \quad (4.15)$$

где μ – вязкость жидкости, V – скорость фильтрации, p – давление жидкости, K – проницаемость.

Упаковки проппанта создавались с использованием метода последовательного осаждения [269]: частицы осаждались в сосуде прямоугольного сечения $w \times L$, где w – ширина трещины (Рис. 4.8). Высота H в несколько раз превосходит L , поэтому можно выделить подмножество $w \times L \times L$

с нижней границей на высоте h от нижней грани оригинальной упаковки. Длина упаковки L выбрана равной $6.4l_{max}$, где l_{max} – максимальная полуось удлиненной частицы. Соотношение размеров удлиненных частиц $l_{max}/l_{min} = 5$. Обсуждение оптимальной длины для упаковки L было представлено в [269]. Упаковки были построены в непрерывном пространстве, а затем дискретизированы (разбиты) на элементарные ячейки. Таким образом, дискретизированный образец представляет собой последовательность из 0 и 1, где 0 соответствует твердому веществу и 1 – пористому пространству.

Образцы являются периодическими в продольном направлении, в то время как в поперечном направлении они либо периодические, либо ограничены стенками (частицы не обрезаются стенками). В вертикальном направлении упаковки не являются периодическими и достраиваются специальным образом (4 дополнительных слоя частиц добавлены с помощью метода, описанного в [294]). Образец упаковки, заключенный между стенками, где $1.6 \leq w/l_{max} \leq 6.4$, соответствует упаковке проппанта в относительно узкой трещине гидроразрыва (0.5-3 мм), что соответствует работам по ГРП в сланцевых формациях при больших расходах закачиваемой жидкости, когда формируется протяженная сеть узких трещин. В [308] было показано, что влияние пристеночного слоя на градиент давления пренебрежимо мало, когда отношение ширины упаковки к диаметру частицы больше 10. Детальное рассмотрение влияния стенки на проницаемость образцов упаковок со стенками выходит за рамки настоящей работы. Во втором случае ($w/l_{max} \gg 1$) упаковка является пространственно-периодической на некотором масштабе длины L , который является асимптотически промежуточным между размером частиц и шириной трещины $l_{max} \ll L \ll w$. Этот случай соответствует традиционному ГРП (например, в песчаниках), где трещины ГРП является относительно широкими (1-3 см), что удовлетворяет приближению $w/l_{max} \gg 1$.

С использованием метода решеточного уравнения Больцмана для од-

нофазных течений в пористой среде [278] была проведена серия численных расчетов и получены тензоры проницаемости для различных упаковок проппанта. Метод решеточного уравнения Больцмана – это численный алгоритм, основанный на решении уравнения Больцмана с линеаризованным интегралом столкновений для одночастичной функции распределения для фиктивной среды частиц на решетке (отсюда “решеточное”) на некотором мезо-масштабе (промежуточном между континуальным и свободномолекулярным). Гидродинамические параметры на макромасштабе затем восстанавливаются по результатам расчета функции распределения. Этот метод по своей сути принципиально отличается от континуальных методов, основанных на дискретизации и последующем решении уравнений Навье-Стокса. Таким образом, базовая идея метода состоит в построении упрощенных кинетических моделей для учета существенных физических эффектов микроскопических процессов, так чтобы осредненные полевые переменные на макромасштабе удовлетворяли уравнениям Навье-Стокса (Стокса).

Классическое решеточное уравнение Больцмана было выведено эмпирически [295, 296]. Базовая идея метода заимствована из теории клеточных автоматов. Эта идея предполагает, что рассматриваемое физическое пространство заполнено регулярной решеткой, населенной дискретными фиктивными частицами. Эти частицы не имеют ничего общего ни с молекулами жидкости, ни с жидкими частицами. Масштаб длины, на котором рассматриваются псевдочастицы, является промежуточным между длиной свободного пробега молекул и макроскопическим масштабом, на котором выполняется гипотеза сплошности. Частицы перемещаются с одного узла решетки на другой с дискретными скоростями и соударяются друг с другом в узлах решетки. Геометрия решетки (набор возможных направлений скоростей частиц) должна удовлетворять определенным требованиям симметрии, которые диктуются условиями инвариантности тензора напряжений по отношению к вращению на макромасштабе. Движение и столкновения

фиктивных частиц описываются в терминах одночастичной функции распределения, которая находится из дискретизованного уравнения Больцмана, в котором интеграл столкновения линеаризован в соответствии с аппроксимацией Бхатнагара-Гросса-Крука. Гидродинамические параметры затем восстанавливаются как соответствующие моменты функции распределения вероятностей. Дальнейшие детали метода решеточного уравнения Больцмана можно найти в [278, 295, 296].

В наших расчетах рассматривается трехмерное стационарное течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через плотную упаковку частиц. Касательно граничных условий, в случае пространственно-периодических упаковок задаются периодические граничные условия на всех границах образца, в то время как в случае упаковки между стенок задаются условия прилипания на непроницаемых стенках. Вариант решеточного уравнения Больцмана, использованный в настоящей работе, имеет второй порядок точности, а граничные условия аппроксимированы с первым порядком точности, поэтому численная схема в целом имеет первый порядок. Серия численных расчетов была проведена для получения тензоров проницаемости различных случайных упаковок проппанта. Мы рассматривали отдельно случай пространственно-периодической упаковки и случай упаковки частиц, расположенной между двумя непроницаемыми стенками.

Результаты численных расчетов (Таб. 4.2.2–4.2.2) демонстрируют, что упаковка цилиндрических частиц дает наибольшую пористость и проницаемость. Все тензоры проницаемости, полученные в расчетах, являются изотропными, так что значение скалярной проницаемости образца было получено как среднее арифметическое от трех значений на главной диагонали тензора. Ниже представлены тензоры проницаемости для упаковок сфер, эллипсоидов и цилиндров с соотношением размеров, равным 5.

Исследование эффекта влияния соотношения размеров частиц показало, что пористость и проницаемость упаковки увеличиваются монотонно с увеличением соотношения размеров (см. Рис. 4.9). В случае, когда упаков-

1.89	0.01	-0.15
0.01	1.77	0.10
-0.15	0.10	1.83

Таблица 4.1: Тензор проницаемости $\mathbf{K}/100D$ для упаковки сфер ($\phi = 0.4157$).

21.52	-0.82	0.41
-0.82	22.05	0.23
0.40	0.22	18.90

Таблица 4.2: Тензор проницаемости $\mathbf{K}/100D$ для упаковки эллипсоидов ($\phi = 0.60$).

ка размещается между непроницаемыми стенками, результаты показывают существенное влияние пристеночного слоя на проницаемость, когда отношение ширины трещины к максимальной длине частиц меньше 3.2. Влияние стенки проявляется в значительном увеличении проницаемости упаковки в целом. Случай смешанной упаковки был также рассмотрен. Было показано, что проницаемость упаковки, состоящей из сфер и цилиндров, увеличивается с увеличением объемной доли цилиндрических частиц. Однако, при фиксированной объемной доле сфер проницаемость будет выше, чем в случае одинаковых радиусов, когда радиус сфер в два раза больше радиуса цилиндра (Рис. 4.9).

Все численные результаты для проницаемости пространственно-периодических упаковок представлены в безразмерных переменных как функция пористости на Рис. 4.10. Проницаемость отнесена к квадрату радиуса эквивалентной сферы R_v , которая определяется как сфера с объемом, равным объему частицы. Эта зависимость хорошо аппроксимируется степенным законом с помощью метода наименьших квадратов в логарифмическом масштабе (коэффициент детерминации, или мера определенности, есть $R^2 = 0.97$):

41.09	-0.54	-0.07
-0.53	42.34	0.41
-0.05	0.41	43.52

Таблица 4.3: Тензор проницаемости $\mathbf{K}/100D$ для упаковки цилиндров ($\phi = 0.65$).

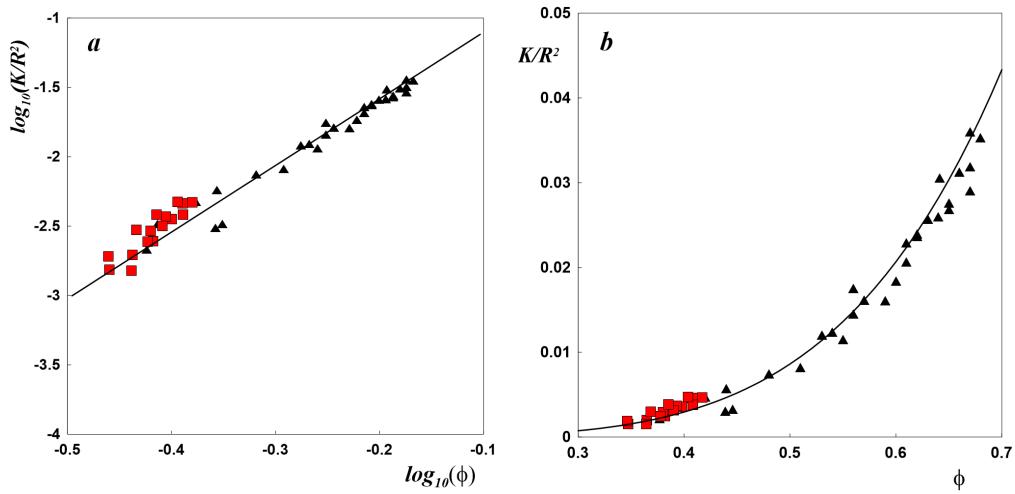


Рис. 4.10: Сравнение степенной аппроксимации для зависимости проницаемости от пористости для пространственно-периодических упаковок с лабораторными данными для реальных проппантов в логарифмическом (a) и обычном (b) масштабах. Треугольники – численные результаты, полученные с помощью решеточного уравнения Больцмана, красные квадраты – экспериментальные данные, сплошная кривая – степенная аппроксимация (4.16).

$$K/R_v^2 = 0.204\phi^{4.58} \quad (4.16)$$

Это соотношение выведено в широком диапазоне значений пористости $0.3 \leq \phi \leq 0.7$; упаковки частиц между непроницаемыми стенками не были включены в этот закон. Для сферических частиц эквивалентный радиус R_v – это собственно радиус сферы. Для эллипсоидов эквивалентный радиус задается формулой $R_v = l_{min}^{2/3} l_{max}^{1/3}$. Для цилиндров эквивалентный радиус определяется как $R_v = (3/2)^{1/3} l_{min}^{2/3} l_{max}^{1/3}$. В случае, когда упаковка частиц формируется из различных частиц, объем эквивалентной сферы считается равным сумме объемов частиц различных типов с весами в виде их объемных долей в смеси. Для смеси сфер с цилиндрами эквивалентный радиус определяется из соотношения:

$$\frac{4}{3}\pi R_v^3 = (1 - f_s)2a\pi R_c^2 + f_s \frac{4}{3}\pi R_s^3 \quad (4.17)$$

Здесь, a это соотношение размеров цилиндра, R_s – радиус сферы и R_c – радиус цилиндра. В общем случае, когда упаковка формируется из нескольки-

ких типов частиц, эквивалентный радиус может быть найден по формуле:

$$R_v = \left(\sum_{i=1}^n R_{vi}^3 c_i \right)^{1/3}, \quad (4.18)$$

где n – число типов проппанта, R_{vi} – эквивалентный радиус i -го типа проппанта и c_i – объемная доля i -го типа проппанта. Заметим, что обезразмеренные результаты для смешанных упаковок и образцов, сжатых под действием сдавливающих напряжений, также хорошо описываются данным степенным законом (4.16) (Рис. 4.10). С использованием данной степенной зависимости можно определить проницаемость как функцию сдавливающих напряжений в случае, когда зависимость пористости упаковки от сдавливающих напряжений известна. Было проведено сравнение степенной зависимости (4.16) с известными экспериментальными данными лаборатории для реальных проппантов [298]–[301] для различных упаковок проппанта (см. Рис. 4.10). Распределение по размерам: 12/18, 16/20, 16/30, и 20/40. Здесь первое и последнее число в спецификации означают диапазон просеивания в терминах количества ячеек сита на квадратный дюйм. Диапазон по пористости от 0.35 до 0.45. Для каждого типа проппанта мы использовали четыре значения проницаемости и пористости, соответствующих значениям сдавливающих напряжений 2, 4, 6, и 8 Kpsi, соответственно. Как следует из графика, имеется хорошее согласие между степенной аппроксимацией и экспериментальными данными.

Ниже будет проведено *количественное* сравнение степенной зависимости (4.16) с результатами экспериментов и известными лабораторными данными по реальным проппантам. Также проводилось сравнение с результатами численных расчетов с помощью конечно-объемного метода решения уравнений Навье-Стокса, которые получил И. Кудинов.

4.2.3 Сравнение с экспериментом и обсуждение

Проведено сравнение полученных численных результатов с экспериментами по измерению проницаемости упаковок частиц. Эксперименты проводились А. Матвеевым в Новосибирском технологическом центре компании Шлюмберже. Эксперименты по прокачке жидкости проводились в так называемой ячейке для измерения проводимости, которая состоит из пресса с автоматизированным гидравлическим приводом и стальной ячейки (соответствующей стандарту API) с прямоугольным сечением $6.45 \times 10^{-2} m^2$ ($10 in^2$).

Было получено, в частности, что проницаемость уменьшается быстро как функция сдавливающих напряжений выше значений 34.5 MPa (5000 psi). Основная причина такой зависимости – это разрушение частиц проппанта под действием сдавливающих напряжений, что приводит к увеличению извилистости порового пространства (tortuosity). Измерения пористости показывают, что значения пористости, замеренной во время эксперимента по прокачке жидкости в ячейке для измерения проводимости, и пористость, измеренная независимо на сухом образце под действием сдавливающих напряжений, отличаются примерно на 16% при сдавливающих напряжениях 6.9 MPa (1000 psi). Различие предопределено условиями измерений (водонасыщенный образец против сухого образца) и погрешностями эксперимента. Во время эксперимента по измерению проводимости упаковка проппанта полностью смочена водой, что существенно влияет на процесс разрушения проппанта под действием напряжений. В смоченном образце проппант разрушается меньше, чем в сухом. Эффект вдавливания частиц также следует учитывать. Стоит заметить, что ошибка в измерении пористости уменьшается с увеличением сдавливающих напряжений.

Выше были представлены результаты численных расчетов с помощью метода решеточного уравнения Больцмана для течения в режиме Дарси через плотные упаковки несферических частиц. Результаты расчетов, как

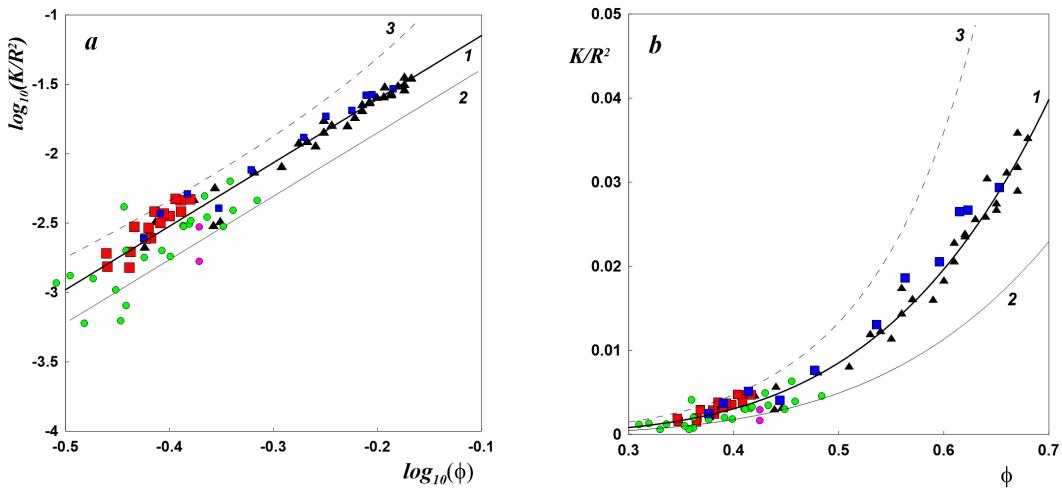


Рис. 4.11: Безразмерная проницаемость как функция пористости в логарифмическом (a) и обычном (b) масштабах. Сплошная линия 1: степенная аппроксимация $K/R_v^2 = 0.204\phi^{4.58}$ (4.16), сплошная линия 2: степенная аппроксимация $K/R_v^2 = 0.117\phi^{4.57}$ [269], прерывистая линия 3 – формула Козени-Кармана при $C_{CK} = 4.17$ [270]. Черные треугольники – результаты расчетов течения в режиме фильтрации Дарси методом решеточного уравнения Больцмана, светло-голубые квадраты – конечно-объемный метод решения уравнений Навье-Стокса в инерционном режиме, зеленые кружки – лабораторные тесты, красные квадратики – лабораторные данные по реальным проппантам, пурпурные кружки – упаковка цилиндрических частиц под действием сдавливающих напряжений, смоделированная по линейной модели взаимодействия частиц и модели Херца-Миндлина (последний дает меньшую проницаемость).

указано, хорошо аппроксимируются степенным соотношением (4.16). Ниже будет проведено сравнение этой степенной зависимости с результатами экспериментов, которые прошли обезразмеривание с помощью формулы (4.17) для эквивалентного радиуса частицы. Сравнение численных и экспериментальных результатов с аналитической формулой представлено на Рис. 4.11. Рисунок 4.11 показывает, что имеет место качественное согласие между экспериментальными данными и степенной аппроксимацией численных результатов (4.16).

На Рис. 4.11 представлено сравнение с экспериментальными измерениями (А. Матвеев, SNTС) и численными расчетами течения в инерционном режиме с помощью конечно-объемного метода (И. Кудинов, SMR). Экспериментальные и численные точки несколько разнесены по диапазону по-

ристости, которая варьируется от 0.2 до 0.47 для лабораторных данных и превышает значение 0.37 для численных результатов, что дает небольшой интервал перекрытия. Важно упомянуть, что пористость цифровых образцов плотных упаковок частиц больше, чем пористость реальных упаковок, использованных в экспериментах. При численных расчетах не моделировались процессы сжатия образца под действием сдавливающих напряжений и последующее разрушение частиц, сопровождающееся падением пористости.

Рисунок 4.11, *a* показывает определенный разброс значений лабораторных данных для проницаемости упаковок цилиндрических частиц даже при близких значениях пористости (зеленые кружки). Этот эффект не является новым и обсуждался, в частности, в работе [308], где был отнесен к различным ориентациям цилиндрических частиц в различных случайных реализациях упаковки. Цилиндры и другие удлиненные частицы могут ориентироваться под различными углами по отношению к основной оси течения, что приводит к различным значениям перепада давления при одинаковой пористости. Сфера являются симметричными относительно поворота вокруг любой оси, проходящей через центр масс, поэтому структура упаковки сферических частиц не меняется при их вращении. Это утверждение подтверждается лабораторными данными по проницаемости сферического проппанта на Рис. 4.11, *a* (and *b*) – точки расположены гораздо ближе друг к другу с меньшим разбросом. По-видимому, в случае несферических удлиненных частиц требуется введение дополнительного параметра, который бы характеризовал микроструктуру порового пространства внутри плотной упаковки. Таким параметром может быть извилистость (*tortuosity*), связность, динамическая смоченная поверхность или сила сопротивления формы. Эти величины довольно трудно формально определить и затем измерить в лаборатории, однако можно ожидать, что концепция цифрового керна со временем позволит предложить подходящий характеристический параметр, который можно было бы находить путем

анализа цифровых изображений реальных упаковок частиц, полученных путем рентгеновской микротомографии [309].

Для сравнения на Рис. 4.11 также показаны известные в литературе корреляции для проницаемости как функции пористости: степенная зависимость $K/R_v^2 = 0.117\phi^{4.57}$ [269] и формула Козени-Кармана (4.19) [310] с константой $C_{CK} = 4.17$ (значение получено в работе[270] путем аппроксимации результатов расчетов с помощью метода решеточного уравнения Больцмана (LBM) для течения через монодисперсную упаковку сферических частиц). Эти формулы отклоняются от формулы (4.16), так как все они были получены для упаковок сферических частиц, и в особенности формула Козени-Кармана (4.19) [269] использует выражение для удельной площади поверхности $S = 3/R_v$, применимое для сферических частиц.

$$K/R_v^2 = \frac{1}{9C_{CK}} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (4.19)$$

Рисунок 4.11 иллюстрирует тот факт, что формула (4.16) дает очень хорошую аппроксимацию полученных численных результатов ($R^2 = 0.97$, MRE=10%, and NRMSE=0.2%) и удовлетворительное соответствие с лабораторными данными: для лабораторных данных по реальным проппантам, MRE=18% и NRMSE=24%, и для результатов экспериментов, представленных в данной работе выше, MRE=31% и NRMSE=37%. Для сравнения результаты применения формулы $K/R_v^2 = 0.117\phi^{4.57}$ [269] таковы: для лаб. данных MRE=49% и NRMSE=57%, и для результатов экспериментов, представленных в данной работе выше, MRE=49% и NRMSE=60%. Формула Козени-Кармана с константой $C_{CK} = 4.17$ [270] дает: для лаб. данных MRE=36% и NRMSE=46%, и для результатов экспериментов, представленных в данной работе выше, MRE=36% и NRMSE=44%. Средняя относительная ошибка (mean relative error, MRE) и нормированное среднеквадратичное отклонение (normalized root-mean-square deviation, NRMSE) определены формулами:

$$MRE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{|\hat{y}_i|}, \quad NRMSE = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

где \hat{y}_i и y_i – модель и данные для проницаемости, соответственно, и \bar{y} – арифметическое среднее.

4.3 Основные результаты Главы 4

1. Построена одномерная модель фильтрации суспензии в пористой среде с учетом осаждения и мобилизации частиц. По сравнению с известными в литературе моделями, учтены эффекты конечной пористости и проницаемости упаковки осажденных частиц. Для случая постоянной пористости проведено сравнение полученных численно распределений концентрации осажденных и взвешенных частиц с аналитическим решением. Показана сеточная сходимость численного решения к аналитическому. Проведено сравнение численных расчетов, полученных при использовании различных моделей, с имеющимися экспериментальными данными по закачке суспензии в пористую среду. Новая модель фильтрации всего с одним свободным параметром хорошо описывает экспериментальные данные вблизи входной границы пористого образца, в то время как существующая модель дает хорошее совпадение только при наличии двух свободных параметров.

Результаты раздела опубликованы в [16, 26].

2. Трехмерное стационарное течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через смешанные плотные упаковки сферических и удлиненных частиц исследовано численно, и проведено сравнение результатов с экспериментами. Для численных расчетов использовался вариант метода решеточного уравнения Больцмана для решения уравнений Стокса в безинерционном режиме течения (фильтрация Дарси). Этот метод и результаты были кросс-верифицированы относительно расчетов течения с помощью варианта конечно-объемного метода решения уравнений Навье-Стокса в инерци-

онном режиме. Макроскопические параметры течения, а именно проницаемость, систематически исследованы для упаковок частиц различной формы, для смесей частиц при различных объемных долях компонент и для различных соотношений размеров удлиненных частиц. Численные расчеты проведены для нестесненных пространственно-периодических упаковок частиц, а также выполнены дополнительные расчеты для упаковок частиц между стенками и под действием сдавливающих напряжений. Сравнение с лабораторными данными, полученными для различных значений сдавливающих напряжений (от 1000 psi до 7000 psi), показало, что упаковка цилиндрических частиц дает наибольшую проницаемость по сравнению с чистыми упаковками сферических или эллиптических частиц. Получены следующие количественные результаты. Проницаемость пространственно-периодических смешанных упаковок частиц, отнесенная к квадрату эквивалентного радиуса частиц, аппроксимирована степенной зависимостью $K/R_v^2 = 0.204\phi^{4.58}$ в диапазоне значений пористости $0.3 \leq \phi \leq 0.7$. Показано, что это соотношение находится в хорошем качественном и количественном согласии с лабораторными измерениями для смешанных упаковок и с известными экспериментальными данными (доступными в диапазоне $0.3 \leq \phi \leq 0.5$). С помощью количественной меры сравнения (средняя относительная погрешность и нормированное среднеквадратичное отклонение) показано, что предложенная в настоящей работе формула дает лучшее соответствие с лабораторными данными, чем известные корреляции, например - степенная аппроксимация $K/R_v^2 = 0.117\phi^{4.57}$ [269] и формула Козени-Кармана с константой $C_{CK} = 4.17$ [270].

Несмотря на то, что используемая в настоящей работе численная модель цифровых упаковок проппанта не учитывает разрушение частиц под действием сдавливающих напряжений, погрешность за счет данного предположения невелика. Потенциально, полученные безразмерные формулы могут быть использованы для оценки проводимости трещины гидроразрыва пласта, где в качестве входных параметров используется эквивалентный

радиус частиц и пористость плотной упаковки частиц (данные параметры могут быть получены в лабораторных условиях при сдавливающих напряжениях, близких к полевым условиям). Следует подчеркнуть, что целью настоящего раздела было не уточнить корреляции проницаемости и пористости в традиционном диапазоне пористости, а получить аппроксимацию в более широком диапазоне, включая удлиненные цилиндрические частицы, которые формируют упаковки с пористостью до $\phi = 0.7$. Следует отметить, что более универсальные аппроксимации в более широком диапазоне по пористости могут оказаться несколько менее точными в более узком традиционном диапазоне пористости для стандартных околосферических частиц проппанта.

Результаты раздела опубликованы в [20, 23].

Глава 5

Нестационарные газожидкостные течения в скважине после гидоразрыва пласта

Интерес к моделированию многофазных течений в трубах обусловлен индустриальными приложениями, в частности, необходимостью контролировать системы охлаждения ядерных реакторов, а также транспортировку жидкостей и газов в нефтяных и газовых скважинах и трубопроводах. В нефтегазовой индустрии широкое распространение получила так называемая модель дрейфа. В изотермической постановке модель основана на упрощенном описании многофазного течения в рамках одного уравнения закона сохранения импульса смеси в целом, записанного в терминах среднеобъемной скорости смеси, законов сохранения массы для фаз, а также алгебраических соотношений, связывающих скорости фаз и скорость смеси через скорости дрейфа фаз. Модель дрейфа для течения в трубопроводе была впервые предложена в литературе в 1960х годах [312, 313]. Одномерные модели, построенные на основе данного подхода для течений в длинных трубах, широко внедрены в коммерческие симуляторы многофазных течений для нефтегазовых приложений, например, PIPESIM, ECLIPSE (Schlumberger) и др. Варианты модели дрейфа также используются при описании течения суспензии из осаждающихся частиц, где скопления частиц

рость частиц связана со среднеобъемной скоростью суспензии через алгебраическое соотношение с учетом скорости осаждения. Например, в [314] модель дрейфа была построена для двумерной гравитационной конвекции суспензии в сосуде с наклонными стенками. В [5] и [12] асимптотическая модель течения суспензии в трещине гидроразрыва была выведена из полных законов сохранения, записанных в рамках многожидкостного подхода. Было показано, что в диапазоне параметров, представляющем интерес для нефтесервисных приложений, модель дрейфа применима для течения осаждающейся суспензии в трещине гидроразрыва.

В то же время, с конца 1960x годов началась разработка так называемой многожидкостной модели [315] для многофазных течений в трубах и скважинах, которая построена в рамках многоконтинуального подхода, где совместное течение фаз описывается уравнениями законов сохранения массы и импульса для каждой фазы [316, 317]. Модели на основе многожидкостного подхода внедрены в коммерческие симуляторы, например, в OLGA (SPT Group, Schlumberger), LedaFlow (Kongsberg) и MAST (TEA Sistemi).

С точки зрения фундаментальных исследований, представляет интерес вопрос о связи между полной многожидкостной моделью и упрощенной моделью дрейфа, а также о границах применимости последней. Проблема в такой постановке ранее не рассматривалась в литературе.

Целью данной работы является строгий вывод модели дрейфа из законов сохранения, записанных в рамках двухжидкостного подхода для каждой фазы и определение границы применимости модели дрейфа в терминах определяющих безразмерных параметров. При выводе асимптотических уравнений многофазного течения в трубе и обосновании применимости модели дрейфа мы будем следовать методологии, изложенной в [12].

5.1 Вывод модели дрейфа из законов сохранения

5.1.1 Постановка задачи о многофазном течении в скважине

Рассматривается нестационарное осесимметричное изотермическое течение газожидкостной смеси в длинной трубе круглого сечения с переменным углом наклона к горизонту. Жидкость является непрерывной несущей фазой. Газ является сжимаемой дисперсной фазой и представлен в виде мелких сферических пузырьков одинакового диаметра, взвешенных в несжимаемой жидкости. Учитывается неоднородный профиль объемной концентрации пузырьков, сформировавшийся в результате миграции, однако сам процесс поперечной миграции по сечению трубы и слияние пузырьков не рассматриваются. Разность давлений внутри пузырьков и в жидкости, обусловленная поверхностным натяжением, не учитывается. Считается, что размеры пузырька много меньше пространственных масштабов изменения поля скорости жидкости и число Рейнольдса обтекания пузырька мало.

Двухфазное течение рассматривается на основе модели двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов [195]. Течение описывается законами сохранения массы и импульса в дифференциальной форме, записанными для каждого континуума.

Законы сохранения массы и импульса в дифференциальной форме для газа и жидкости имеют вид [195]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (5.1)$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \alpha_i \rho_i \mathbf{g} + n_b \mathbf{F}_{ij} \quad (5.2)$$

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla),$$

где индексы $i, j = g, l$, $i \neq j$ обозначают газ и жидкость, α_i , ρ_i и \mathbf{v}_i – объемные доли, плотности и скорости фаз, p_i и $\boldsymbol{\tau}_i$ – давления и тензоры вязких напряжений в каждой из фаз, \mathbf{g} – ускорение силы тяжести. Обмен импульсом между фазами описывается слагаемыми $n_b \mathbf{F}_{ij}$, где $\mathbf{F}_{gl} \equiv \mathbf{F}$ – сила,

действующая на отдельный пузырек со стороны жидкости, $\mathbf{F}_{lg} = -\mathbf{F}_{gl}$, а n_b – числовая плотность дисперсной фазы.

Для простоты дальнейшие выкладки проведены для вертикальной трубы, хотя результаты могут быть обобщены на случай наклонной трубы, за исключением течений в окологоризонтальных трубах.

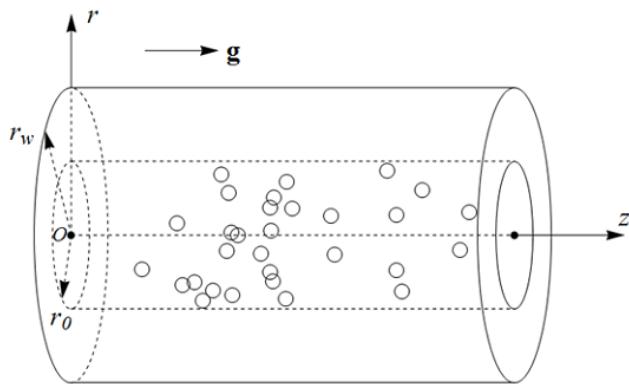


Рис. 5.1: Схема течения дисперсной газо-жидкостной смеси в круглой трубе.

Предполагается, что хаотическим движением пузырьков можно пренебречь и отклонение скорости пузырьков от среднемассовой скорости дисперсной фазы \mathbf{v}_g мало, тогда давлением и тензором вязких напряжений в дисперсной фазе можно пренебречь [5]. Наличие дисперсной примеси влияет на тензор напряжений в несущей фазе. В первую очередь, дисперсная примесь оказывает влияние на величину сдвиговой вязкости жидкой фазы [318]. С другой стороны, пузыри сжимаемого газа движутся со скоростью, отличной от скорости жидкости, и их объемная доля переменна, поэтому условие $\nabla \mathbf{v}_l = 0$ не выполняется. В этом смысле осредненная жидккая фаза, в отличие от жидкости как материала, является сжимаемой, так как ее плотность не является постоянной. Таким образом, тензор вязких напряжений в жидкой фазе записывается как для вязкой сжимаемой жидкости с коэффициентами сдвиговой μ и объемной λ вязкости, зависящими от объ-

емной доли газа

$$\boldsymbol{\tau}_l = 2\mu(\alpha_g) \left(\mathbf{e}_l - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v}_l \mathbf{I} \right) + \lambda(\alpha_g) \nabla \mathbf{v}_l \mathbf{I}, \quad (5.3)$$

где \mathbf{e}_l – тензор скоростей деформации, \mathbf{I} - единичный тензор. Определение зависимостей $\mu(\alpha_g)$ и $\lambda(\alpha_g)$ представляет отдельную задачу [319], которая обычно решается для нейтрально плавучих частиц, без учета межфазного проскальзывания. В дальнейшем считается, что $\mu(0) = \mu_0$, где μ_0 – вязкость чистой жидкости, и $\lambda(\alpha_g) \nabla \mathbf{v}_l \rightarrow 0$ при $\alpha_g \rightarrow 0$.

Радиус пузырьков ограничен предельным значением a_c , при котором поверхность пузырька теряет устойчивость и происходит дробление на более мелкие пузырьки [320]

$$a \leq a_c \simeq \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma}{\rho_l g} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-3} \text{ м}$$

где γ – поверхностное натяжение на границе газ-жидкость. В принятых предположениях на отдельный пузырек со стороны жидкости действуют силы Стокса \mathbf{F}_{St} , Архимеда \mathbf{F}_A , присоединенных масс \mathbf{F}_{am} и Бассе-Буссинеска \mathbf{F}_{BB} . В неочищенных жидкостях влияние поверхностно-активных веществ приводит к тому, что в жидкости вблизи поверхности пузырьков формируется тонкий высоковязкий слой, и в результате мелкие пузырьки движутся как твердые частицы [320]. Тогда выражения для сил могут быть приняты в виде [321]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{St} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{am} + \mathbf{F}_{BB} \\ \mathbf{F}_{St} &= 6\pi\mu a (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g), \quad \mathbf{F}_A = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_l \left(\frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} - \mathbf{g} \right) \\ \mathbf{F}_{am} &= \frac{2}{3}\pi a^3 \rho_l \frac{d_g}{dt} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g), \quad \mathbf{F}_{BB} = 6a^2 \sqrt{\pi\rho_l\mu} \int_0^t \frac{d_g}{d\tau} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \end{aligned}$$

Безразмерные переменные вводятся следующим образом (размерные переменные обозначены звездочкой), где требуется отличить их от аналогич-

ных безразмерных переменных)

$$(x^*, y^*, z^*) = L \cdot (x, y, z), \nabla^* = \frac{1}{L} \nabla$$

$$\mathbf{v}_i^* = U \mathbf{v}_i, t^* = \frac{L}{U} t, \rho_i^* = \rho_i^0 \rho_i, \zeta = \frac{\rho_l^0}{\rho_g^0}$$

$$p_l^* = \rho_l^0 U^2 p, \mu^* = \mu_0 \mu, \lambda^* = \lambda_0 \lambda, \xi = \frac{\lambda_0}{\mu_0}, \boldsymbol{\tau}_l^* = \frac{\mu_0 U}{L} \boldsymbol{\tau}_l$$

Здесь L – характерный линейный масштаб в продольном направлении, U – характерный масштаб скорости, ρ_i^0 – характерные плотности материалов фаз, λ_0 – характерная величина объемной вязкости эмульсии и $\mu(0) = 1$.

В безразмерной форме с учетом равенства $\alpha_g = 4\pi a^3 n_b / 3$ уравнение (5.60) для газа принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{St} \rho_g \frac{d_g \mathbf{v}_g}{dt} &= \mu (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) + \frac{\text{St}}{\text{Fr}^2} (\rho_g - \zeta \rho_l) \mathbf{e}_z + \\ &+ \varepsilon \text{St} \zeta \left(\rho_l \frac{d_g \mathbf{v}_l}{dt} + \frac{1}{2} \rho_l \frac{d_g}{dt} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) \right) + \\ &+ \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\varepsilon \text{St} \zeta} \sqrt{\pi \rho_l \mu} \int_0^t \frac{d_g}{d\tau} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$\text{St} = \frac{mU}{6\pi\mu_0 R r_w}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gr_w}}, \quad \varepsilon = \frac{r_w}{L}, \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g^0$$

Здесь St – число Стокса, Fr – число Фруда, r_w – характерный радиус трубы, ε – отношение поперечного размера к продольному, m – масса пузырька.

Сложением уравнений закона сохранения импульса (5.60) для жидкости и газа можно получить

$$\varepsilon \text{Re} \left(\frac{1}{\zeta} \alpha_g \rho_g \frac{d_g \mathbf{v}_g}{dt} + \alpha_l \rho_l \frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} \right) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{1}{\zeta} \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l \right) \mathbf{e}_z + \varepsilon^2 \nabla \boldsymbol{\tau}_l - \varepsilon \text{Re} \nabla p, \quad (5.5)$$

где $\text{Re} = \rho_l^0 U r_w / \mu_0$ – число Рейнольдса.

Уравнения неразрывности (5.59) в безразмерных переменных имеют тот же вид, что и исходные размерные уравнения.

В литературе известна система уравнений модели дрейфа, которая, в частности, внедрена как модель скважинного течения в симулятор пласто-

вых течений ECLIPSE (Schlumberger) [322, 323]

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial z} (A\alpha_i \rho_i v_i) = 0 \quad (5.6)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_m g \cos \theta + \frac{2f \rho_m v_m |v_m|}{d} \quad (5.7)$$

$$v_g = C_0 v_m + v_d \quad (5.8)$$

Здесь A – площадь сечения скважины, $v_m = \alpha_g v_g + \alpha_l v_l$ – среднеобъемная скорость смеси, $\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l$ – плотность смеси, $f = f(\alpha_g, v_m, p)$ – коэффициент трения, d – диаметр трубы, θ – угол между осью трубы и вертикалью.

В приложениях часто используется квазистационарный вариант модели дрейфа, в котором производной скорости по времени в уравнении сохранения импульса смеси пренебрегается и общий перепад давления выражается как сумма членов, отвечающих силе тяжести (гравитации), трению и ускорению [322]. Такая модель в литературе называется моделью без волн давления, так как она не учитывает распространение быстрых волн давления, а описывает распространение возмущений со скоростью массопереноса. В отличие от квазистационарной формулировки, мы удерживаем производную скорости по времени в уравнении закона сохранения импульса для учета нестационарных эффектов.

Соотношение (5.8) [312], где $C_0 = C_0(\alpha_g, v_m, p)$ – параметр профиля, учитывающий распределения объемной доли газа и скоростей по сечению трубы, $v_d = v_d(\alpha_g, v_m, p)$ – скорость дрейфа, в литературе называется соотношением модели дрейфа.

Также в литературе известна формулировка модели дрейфа [324] с уравнением закона сохранения импульса смеси, записанным в виде суммы двух уравнений сохранения импульса для каждой фазы (такая форма следует из законов сохранения в рамках многоконтинуального подхода):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_l \rho_l v_l) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_g \rho_g v_g^2 + \alpha_l \rho_l v_l^2 + p) = Q_l + Q_g, \quad (5.9)$$

где Q_i – источниковые члены для каждой из фаз, и соотношением модели

дрейфа в виде

$$v_g - v_l = \Phi(\alpha_g, v_g, p) \quad (5.10)$$

В соответствии с целью данной работы ниже приведен вывод уравнений (5.6)-(5.8) из исходной многожидкостной модели (5.59)-(5.60), определены границы применимости этой модели и проведено сравнение с границами применимости модели (5.9).

5.1.2 Вывод асимптотических уравнений в приближении длинного канала

Асимптотические уравнения выводятся в приближении длинного канала:

$$\varepsilon \ll 1,$$

аналогичном приближениям пограничного слоя, тонкого канала для течения в трещинах [5] и тонкого слоя (lubrication approximation) для течения пленок [325].

Алгебраическая связь между скоростями фаз. Дополнительно предполагается, что

$$\varepsilon St\zeta \ll 1, \quad \zeta \gg 1, \quad \frac{St}{Fr^2}\zeta \sim 1$$

Основное предположение $\varepsilon St\zeta \ll 1$ обеспечивает выполнение условия $\varepsilon St \ll 1$, что равносильно требованию безынерционного межфазного проскальзывания или релаксации скорости пузырька к скорости потока на длинах, много меньших характерного масштаба длины в продольном направлении. Как следует из (5.4), в рамках данного предположения можно пренебречь силой присоединенных масс, нестационарной частью силы Архимеда и силой Бассе-Буссинеска. Аналогичный результат был получен для гравитационной конвекции суспензий в [326]. Тогда уравнение (5.4) может быть приведено к виду

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_s = -\frac{St}{Fr^2}\zeta \frac{\rho_l}{\mu} \mathbf{e}_z \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) учитывает неоднородное по сечению распределение дисперсной фазы через зависимость вязкости от объемной доли газа.

Асимптотические уравнения в приближении длинного канала. Для получения осредненных по сечению трубы уравнений модели дрейфа безразмерные уравнения будут выписаны покомпонентно в цилиндрических координатах. Растворенная радиальная координата и соответствующие ей компоненты скорости газа и жидкости v_{ir} вводятся следующим образом

$$r^* = \varepsilon r, \quad v_{ir}^* = \varepsilon v_{ir}$$

Уравнения неразрывности в новых переменных имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \alpha_i \rho_i v_{ir}) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i v_{iz}) = 0 \quad (5.12)$$

Дополнительно накладываются следующие ограничения

$$\varepsilon \text{Re} \sim 1, \quad \varepsilon \xi_0 \ll 1$$

Удерживая главные члены, с учетом (5.3) можно получить:
из r -компоненты уравнения (5.5)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5.13)$$

из z -компоненты уравнения (5.5)

$$\begin{aligned} & \varepsilon \text{Re} \left(\alpha_l \rho_l \left(\frac{\partial v_{lz}}{\partial t} + v_{lr} \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} + v_{lz} \frac{\partial v_{lz}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\zeta} \alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial v_{gz}}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial v_{gz}}{\partial r} + v_{gz} \frac{\partial v_{gz}}{\partial z} \right) \right) = \\ & = -\varepsilon \text{Re} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(\alpha_l \rho_l + \frac{1}{\zeta} \alpha_g \rho_g \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Осреднение по поперечному сечению. Осредненные асимптотические уравнения получены интегрированием по радиусу трубы. Среднее значение величины $F(t, r, z)$ по сечению находится по формуле

$$\langle F \rangle = \frac{1}{A} \int_0^{r_w} 2\pi r dr \cdot F(t, r, z),$$

где $A = \pi r_w^2$ – площадь сечения трубы.

Интегрированием уравнений неразрывности (5.12) по радиусу с учетом зависимости радиуса трубы от координаты z , условия прилипания на стенках трубы и уравнения (5.13) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t} A \rho_i \langle \alpha_i \rangle + \frac{\partial}{\partial z} A \rho_i \langle \alpha_i \rangle \bar{v}_{iz} = 0, \quad (5.15)$$

где $\bar{v}_{iz} = \langle \alpha_i v_{iz} \rangle / \langle \alpha_i \rangle$.

С учетом осредненных уравнений неразрывности (5.15) и условия прилипания на стенке трубы интегрирование и тождественные преобразования уравнения (5.14) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{Re} \left(\langle \alpha_l \rangle \rho_l \left(\frac{\partial \bar{v}_{lz}}{\partial t} + \bar{v}_{lz} \frac{\partial \bar{v}_{lz}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\zeta} \langle \alpha_g \rangle \rho_g \left(\frac{\partial \bar{v}_{gz}}{\partial t} + \bar{v}_{gz} \frac{\partial \bar{v}_{gz}}{\partial z} \right) \right) = \\ = -\varepsilon \operatorname{Re} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}^2} \left(\langle \alpha_l \rangle \rho_l + \frac{1}{\zeta} \langle \alpha_g \rangle \rho_g \right) + \frac{1}{A} r \mu \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} \Big|_{r=r_w} - \quad (5.16) \\ - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} A \left(\rho_l \langle \alpha_l v'_{lz} \rangle + \frac{1}{\zeta} \rho_g \langle \alpha_g v'_{gz} \rangle \right) \end{aligned}$$

Здесь $v'_{iz} = v_{iz} - \bar{v}_{iz}$ – отклонение скорости от среднего по сечению значения.

Последнее слагаемое в (5.16) аналогично тензору напряжений Рейнольдса, который возникает при осреднении уравнений турбулентного движения жидкости. При этом величина отклонения скорости от среднего значения по сечению аналогична пульсационной составляющей скорости при описании турбулентного течения. Поскольку влияние поправки к средней скорости на осредненное движение оказывается аналогичным влиянию турбулентной вязкости, последние два слагаемых в (5.16) могут быть объединены в одно, описывающее как трение на стенках трубы, так и отклонения скорости от среднего. Замыкающие соотношения для коэффициента трения калибруются в экспериментах [322] и учитывают оба эффекта, хотя явно это в инженерной литературе обычно не указывается.

При осреднении алгебраического соотношения (5.11) следует привести его к виду замыкающего соотношения модели дрейфа (5.8).

Используя (5.11), можно получить

$$\bar{v}_{gz} = \frac{\langle \alpha_g (\alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz}) \rangle}{\langle \alpha_g \rangle \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle} \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle + \frac{\langle \alpha_g \alpha_l v_s \rangle}{\langle \alpha_g \rangle} \quad (5.17)$$

После введения обозначений

$$v_m = \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle, \quad C_0 = \frac{\langle \alpha_g (\alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz}) \rangle}{\langle \alpha_g \rangle \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle}, \quad v_d = \frac{\langle \alpha_g \alpha_l v_s \rangle}{\langle \alpha_g \rangle} \quad (5.18)$$

уравнение (5.17) приводится к виду

$$\bar{v}_{gz} = C_0 v_m + v_d, \quad (5.19)$$

где $v_m = \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle = \langle \alpha_g v_{gz} \rangle + \langle \alpha_l v_{lz} \rangle = \langle \alpha_g \rangle \bar{v}_{gz} + \langle \alpha_l \rangle \bar{v}_{lz}$.

5.1.3 Уравнение сохранения импульса смеси в терминах модели дрейфа

Цель этого подраздела состоит в том, чтобы выяснить, при каких предположениях уравнение (5.16) может быть сведено к единственному уравнению закона сохранения импульса смеси в модели дрейфа, которое формулируется в неконсервативной форме и в терминах среднеобъемной скорости.

Установлено, что уравнение (5.16) равносильно (5.7) только в случаях:

- малой объемной доли дисперсной фазы $\alpha \ll 1$;
- отсутствия межфазного проскальзывания $|C_0 - 1| \ll 1$, $\zeta \text{St}/\text{Fr}^2 \ll 1$;
- безынерционных течений $\varepsilon \text{Re} \ll 1$.

Проведенный анализ показывает [13], что модель дрейфа [322, 323] в виде (5.6) - (5.8) для данной конфигурации течения строго следует из законов сохранения в ограниченном наборе только что перечисленных предельных случаев и является, по существу, моделью эффективной жидкости. Замыкающие соотношения, опубликованные в литературе, получены калибровкой относительно большого набора экспериментальных данных [322, 323] для определяющих параметров, удовлетворяющих хотя бы одному из трех

указанных выше условий. В то же время, из проведенного анализа следует, что модель дрейфа[324] в виде (5.6), (5.9), (5.10) является более общей, так как она следует из законов сохранения без каких-либо дополнительных предположений, кроме требования безынерционного межфазного проскальзывания $\varepsilon St \ll 1$.

5.2 Одномерная многожидкостная модель, не зависящая от режима течения

Точное и вычислительно надежное моделирование нестационарных газожидкостных течений в скважинах и длинных трубопроводах в нефтегазовой индустрии требуется для дизайна, выполнения и контроля нескольких технологий, в том числе запуска, очистки и вывода на стационарную добывчу скважин после применения технологии гидроразрыва пласта.

Как было отмечено в предыдущем разделе, существует два основных и наиболее распространенных подхода к моделированию многофазных течений в скважинах в одномерном приближении: упрощенная модель дрейфа [312, 323, 331] и полная многожидкостная модель [335, 336, 339, 340].

В многожидкостной модели каждая фаза – это отдельный континуум, который описывается с помощью отдельного уравнения закона сохранения импульса. В [335, 336, 337], многожидкостная модель была предложена для задач охлаждения. В работе [316] было рассмотрено моделирование смеси воды, нефти и газа в приложении к транспорту углеводородов в длинных трубопроводах. Трехжидкостная модель была предложена для случая, когда требуется рассмотрение совместного движения нескольких несмешивающихся жидкостей или требуется рассмотрение непрерывных и дисперсных полей. В окологоризонтальных скважинах и трубопроводах смесь может расслаиваться в силу действия гравитации. Было ранее показано, что проскальзывание между нефтью и водой является существенным и может вызывать переход из стратифицированного режима течения в снарядный

(так называемый пробковый режим, или slug flow) [341]. Авторами также были предложены критерии определения режима течения нефти, газа и воды и соответствующие замыкающие соотношения для трения. В [316, 332] было предложено уравнение закона сохранения импульса для дополнительной дисперсной фазы (капель). В результате, стало возможным корректное предсказание перепада давления и других параметров для дисперсно-кольцевого режима течения. В [340] была предложена модель на основе четырехжидкостного подхода: газ, жидкость, капли и пузырьки. Модель содержит наиболее современные замыкающие соотношения для коэффициентов трения и межфазного обмена массой, полученные путем калибровки в эксперименте.

Многожидкостные модели первого поколения использовали замыкающие соотношения, которые не были универсальными, и их требовалось подбирать под конкретный режим течения [335, 336, 337, 316]. Замыкания были получены в экспериментах. Картинны режимов течения для течения углеводородов и смесей воды и воздуха были исследованы, например, в [316, 338]. В [333] авторами были предложены критерии перехода между режимами течения. Критерии были основаны на условиях потери устойчивости двухфазных течений, они прошли валидацию относительно карт режимов течения из [338]. Начиная с [341], возникло следующее поколение многожидкостных моделей, которые не зависят от режима течения. Дальнейшее расширение этой модели, предложенное в [340], включает полевое описание для дисперсных фаз (пузырьки и капли) для учета переходов между снарядным режимом и дисперсным или дисперсно-кольцевым режимом. Модель покрывает переходы между всеми известными режимами течения.

К настоящему времени наиболее сложная формулировка многожидкостной модели реализована для трех жидкостей: газ, нефть, вода (в рамках трех уравнений закона сохранений импульса для каждой жидкости) и произвольного числа компонент (что соответствует произвольному количеству

рассчитываемых уравнений законов сохранения массы, или переноса для концентраций компонент) в симуляторе OLGA [316]. В приложениях количество жидкостей может превышать три. Более того, каждая жидкость может быть представлена непрерывной (слой) и дисперсной фазой (капли или пузырьки). Модель требует замыкающих соотношений для коэффициентов трения со стенками и между слоями и для межфазного обмена массой. Анализ гиперболичности результирующих уравнений очень важен для обеспечения корректности постановки начально-краевой задачи и устойчивости ее последующего решения.

В данной работе предложена модель, которая покрывает произвольное число фаз и основана на комбинации многожидкостного подхода и модели дрейфа. Будем использовать представление сложной структуры смеси в виде графа. Схема SIMPLE использована для численного решения уравнений. Численный метод в качестве входной информации использует граф, задающий структуру смеси, поэтому потенциально модель может описывать смесь любой сложности, и ограничением выступает наличие необходимых замыкающих соотношений.

В первую очередь определим основные понятия. В многожидкостном подходе под жидкостью будем понимать смесь, которая описывается отдельным уравнением закона сохранения импульса. Жидкость – это смесь компонент, которые могут принадлежать к различным фазам. Под фазой будем понимать состояние вещества (газ, жидкость, твердое тело). Будем рассматривать нестационарное изотермическое многофазное течение в скважине произвольного угла наклона к горизонтали. Смесь содержит некоторое количество сжимаемых фаз, таких как газы и жидкости. Каждая фаза может быть представлена как в непрерывной форме (слой), так и в дисперсном виде (пузырьки или капли).

5.2.1 Формулировка модели на основе графа

Обобщенная одномерная модель для течения K жидкостей в рамках много жидкостного подхода формулируется в терминах величин, осредненных по сечению скважины. Законы сохранения массы для жидкостей записываются в виде:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k A}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k A}{\partial x} = J_k. \quad (5.20)$$

Уравнения законов сохранения импульса имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k A}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k^2 A}{\partial x} = -\alpha_k A \frac{\partial p}{\partial x} + F_k A - \Phi_k + I_k. \quad (5.21)$$

Здесь A – поперечное сечение скважины. Неизвестные величины – это давление p , объемные доли α_k и скорости u_k . Давление p – осредненное по сечению термодинамическое давление, которое одинаково во всех фазах. Плотности ρ_k – это заданные функции давления p . Обмен массой между фазами J_k также учитывается. I_k – это обмен импульсом за счет обмена массой между фазами J_k . F_k – объемные силы, и Φ_k – это силы трения.

Свойства смеси, такие как объемная доля и осредненная плотность и скорость, могут быть найдены из соотношений:

$$\alpha_M = \sum_{k=1}^K \alpha_k, \quad (5.22)$$

$$\alpha_M \rho_M = \sum_{k=1}^K \alpha_k \rho_k, \quad (5.23)$$

$$\alpha_M \rho_M u_M = \sum_{k=1}^K \alpha_k \rho_k u_k. \quad (5.24)$$

Для замыкания системы уравнений (5.20)-(5.24) следует принять во внимание соотношение на сумму объемных долей:

$$\alpha_M = 1 \quad (5.25)$$

и задать уравнения состояния:

$$\rho_k = \rho_k(p). \quad (5.26)$$

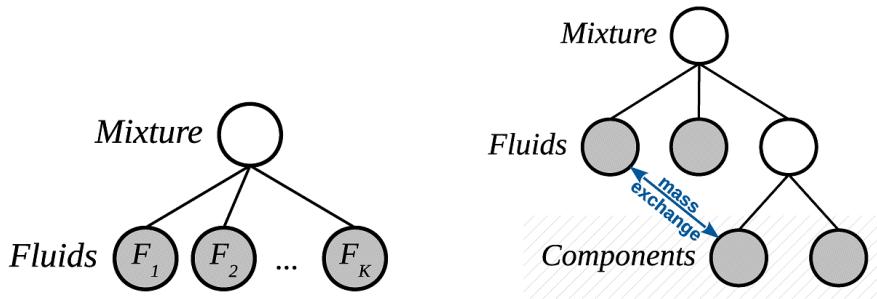


Рис. 5.2: Структура различных многожидкостных моделей в виде дерева (графа). Терминальные узлы показаны серым цветом.

Многожидкостная модель для K жидкостей (5.20)-(5.26) может быть представлена в виде простого дерева с единственным начальным узлом (корнем) и K вершинами (Рис. 5.2, a). Уравнения закона сохранения массы (5.20), импульса (5.21) и уравнения состояния (5.26) записываются для каждого конечного узла этого графа. Ребра графа представляют собой соотношения между объемными долями, плотностями и скоростями смеси и ее компонент, которые описываются соотношениями (5.22)-(5.24). Модель (5.20)-(5.26) содержит $3S + 1$ неизвестных величин и уравнений, где $S = K + 1$ – число вершин графа.

Формально, многожидкостная модель может быть сформулирована для произвольного числа жидкостей. Однако на практике фактическое число различных жидкостей в симуляторах многофазных течений в скважинах не превосходит трех (см., например, [316]), что обусловлено ограниченными данными по замыкающим соотношениям для коэффициентов трения Φ_k в (5.21). Эти слагаемые должны учитывать вклад каждой из жидкостей, что при увеличении числа жидкостей требует проведения дополнительных дорогостоящих экспериментов для калибровки замыкающих соотношений.

В то же время, к настоящему моменту имеется набор корреляций для скорости проскальзывания между различными жидкостями (газ-нефть, вода-нефть), что позволяет перейти от полной многожидкостной модели к модели дрейфа для описания относительного движения данных фаз. Это может

быть сделано путем комбинирования многожидкостного подхода на верхних уровнях графа и использования модели дрейфа на нижних уровнях. Предположим, что жидкость – это смесь нескольких компонент, которые являются сжимаемыми и могут обмениваться массой и импульсом. Относительное движение компонент может быть описано с помощью модели дрейфа:

$$u_{c_1} - u_{c_2} = v_{c_1 c_2}(p, \alpha_{c_1}, \alpha_{c_2}, u_m) \quad (5.27)$$

Здесь индексы c_1 и c_2 нумеруют компоненты в жидкости m . Это условие подкреплено уравнением закона сохранения массы (5.20), которое формулируется для каждого конечного узла графа. С учетом соотношений (5.22)-(5.24), можно найти скорости всех компонент.

Это расширение многожидкостной модели может также быть представлено в виде графа. Если жидкость состоит дополнительно из нескольких компонент, то у графа будет дополнительный уровень, описывающий эти компоненты. Пример трехжидкостной модели, где одна из жидкостей состоит из двух компонент, представлен на Рис. 5.2.b. Ребра графа представляют соотношения между объемными долями, плотностями и скоростями (5.22)-(5.24). Вершины графа на третьем уровне, соответствующие компонентам, ассоциируются с уравнениями закона сохранения массы (5.20), уравнениями состояния (5.26) и выражениями для скорости проскальзывания фаз (5.27). Модель может быть расширена на случай композиционного состава компонент (уравнения (5.22)-(5.24)).

Таким образом, предлагается расширение многожидкостной модели (5.20)-(5.27) для общего случая произвольного количества фаз и компонент. Для формулировки уравнений строится граф, схематично отображающий структуру смеси. Определим S как общее количество вершин графа, K как число узлов второго уровня, соответствующее числу жидкостей в смеси, N как число крайних (терминальных) вершин графа, которое равно числу фаз, и L как число нетерминальных вершин. Модель включает следующие урав-

нения: соотношение на объемные доли жидкостей (5.25) и L уравнений для объемных долей компонент (5.22), N уравнений законов сохранения массы (5.20), L осредненных соотношений для плотности (5.23), N уравнений состояния (5.26), K уравнений законов сохранения импульса (5.21), L соотношений для скоростей (5.24) и $S - L - K$ выражений для скорости проскальзывания (5.27). Общее число уравнений равно $3S + 1$, что соответствует числу неизвестных величин.

5.2.2 Замыкающие соотношения модели течения в скважине

Для замыкания модели (5.20)-(5.27) используется набор соотношений для межфазного обмена массой J_k , импульсом I_k , для разности скоростей фаз v_{ij} , коэффициентов трения Φ_k и объемных сил F_k . В данном разделе представлены типичные примеры замыкающих соотношений.

Коэффициенты трения и объемные силы. Для каждой жидкости объемные силы включают силу тяжести, градиент уровня жидкости и слагаемое с давлением на интерфейсе:

$$F_k = -\alpha_k \rho_k g \left(\sin \theta + \cos \theta \frac{\partial h_L}{\partial x} \right) - P_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}. \quad (5.28)$$

Здесь θ – угол наклона трубы (против часовой стрелки от горизонтали), g – ускорение силы тяжести, h_L – высота уровня жидкости в стратифицированном течении, P_I – давление на интерфейсе. Для описания стратифицированного режима течения используется слагаемое с градиентом уровня жидкости за счет гидростатического перепада давления поперек окологоризонтальной скважины. Это слагаемое учитывает гидростатический перепад давления и позволяет получить корректное распределение давления в случае, когда скорость равна нулю. Включение этого слагаемого доставляет условную гиперболичность модели. Для того, чтобы обеспечить безусловную гиперболичность системы уравнений двухжидкостной модели, в модель добавляется синтетическое слагаемое с давлением на ин-

терфейсе P_I . Более детальное рассмотрение вопроса гиперболичности многожидкостной модели будет дано в разделе 5.3 (см. также [336]).

Для двухфазных газожидкостных течений используются следующие выражения для коэффициентов трения со стенками и межфазного трения:

$$\Phi_G = \frac{\rho_G u_G |u_G|}{2} f_G S_G + \frac{\rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|}{2} f_I S_I, \quad (5.29)$$

$$\Phi_L = \frac{\rho_L u_L |u_L|}{2} f_L S_L - \frac{\rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|}{2} f_I S_I. \quad (5.30)$$

Здесь f_I, f_G, f_L – коэффициенты трения и S_I, S_G, S_L – длины контакта фаз с поверхностью. Второе слагаемое в уравнениях (5.29) и (5.30) – это трение на интерфейсе между жидкостями. Следует подчеркнуть, что уравнение закона сохранения импульса (5.21) с коэффициентами трения (5.29) и (5.30) может вырождаться в случае, если в какой либо области присутствует только одна жидкость из двух и объемная доля второй жидкости в точности равна нулю. Это хорошо известный вопрос, который возникает при применении многожидкостной модели для численного моделирования снарядного режима течения (см [336, 342, 334, 343, 344]).

Модель дрейфа. Модель дрейфа включает в себя замыкающие соотношения для скорости проскальзывания (5.27). Легкие и тяжелые компоненты в смеси различаются с помощью индексов L and H соответственно. Замыкающие соотношения модели дрейфа могут быть записаны в форме [353, 345]:

$$u_L = C_0 v_m + V_D, \quad (5.31)$$

Здесь C_0 – параметр профиля, v_m – среднеобъемная скорость смеси m и V_D – скорость дрейфа. В целом, параметры C_0 и V_D могут быть получены аналитически или из эксперимента. Форма этих выражений может варьироваться в зависимости от характера течения, вида компонент в смеси, угла наклона трубы и т.д. Параметр профиля учитывает тот факт, что дисперсная фаза (пузырьки газа) распределена по сечению трубы неравномерно. Как правило, C_0 варьируется в диапазоне от 1.0 до 1.2. Скорость дрейфа

пропорциональна скорости Стокса с поправочным коэффициентом, который меняется в диапазоне от 0 до 2. Корреляции для скорости дрейфа в смеси воды и нефти, используемые в настоящей работе, были предложены в [353] на основе обработки экспериментальных данных по течениям в вертикальных и наклонных трубах.

Замыкающее соотношение (5.31) сформулировано в терминах среднебъемной скорости, тогда как настоящая модель сформулирована в терминах среднемассовой скорости. С использованием определения скорости $\alpha_m v_m = \alpha_L u_L + \alpha_H u_H$ и с учетом условий (5.22), (5.23) и (5.24) можно получить выражение для скорости проскальзывания (5.27) в виде:

$$u_L - u_H = \frac{\alpha_m^2 \rho_m (u_m(C_0 - 1) + V_D)}{\alpha_H (\alpha_m \rho_H - C_0 \alpha_L (\rho_H - \rho_L))}. \quad (5.32)$$

С другой стороны, скорости для легких и тяжелых компонент могут быть выражены в терминах среднемассовой скорости:

$$u_L = C_L u_m + \frac{b_D}{\alpha_L \rho_L} V_D, \quad (5.33)$$

$$u_H = C_H u_m - \frac{b_D}{\alpha_H \rho_H} V_D, \quad (5.34)$$

где:

$$C_L = \frac{C_0 \alpha_m \rho_m}{C}, \quad (5.35)$$

$$C_H = \frac{(\alpha_m - C_0 \alpha_L) \alpha_m \rho_m}{\alpha_H C}, \quad (5.36)$$

$$b_D = \frac{\alpha_L \alpha_m \rho_L \rho_H}{C}, \quad (5.37)$$

$$C = \alpha_m \rho_H - C_0 \alpha_L (\rho_H - \rho_L). \quad (5.38)$$

Уравнения (5.33)-(5.34) дают явные соотношения для компонент скорости через скорость смеси, которые используются затем в расчетах. В предельном случае отсутствия проскальзывания между компонентами (то есть при $C_0 = 1$ и $V_D = 0$ в (5.31)), уравнения (5.33)-(5.34) сводятся к виду $u_L = u_m$ и $u_H = u_m$ соответственно. В случае, когда в смеси более двух компонент,

компоненты можно рекурсивно разбивать на пары, как это было предложено в [345].

Модель дегазации. Как правило, нефть содержит растворенный газ, который выделяется в виде пузырьков при понижении давления ниже некоторого уровня (так называемая точка образования пузырьков, bubble point). Для описания дегазации удобно вводить величины в зависимости от давления. Среди величин отметим коэффициент изменения объема для нефти и газа, $B_O(p)$ и $B_G(p)$ и содержание газа в нефти (gas-oil ratio), $R_S(p)$. Коэффициент изменения объема характеризует отношение объема фазы к объему при стандартном давлении. Содержание газа в нефти (gas-oil ratio) – это отношение объема газа, который выделяется из нефти, к объему нефти при стандартных условиях. Соотношения на эти величины называют моделью черной нефти (Black Oil model) (см. например [361]):

$$\rho_N = \frac{\rho_G^{std}}{B_G}, \quad (5.39)$$

$$\rho_O = \frac{\rho_O^{std}}{B_O} + \frac{\rho_G^{std} R_S}{B_O}. \quad (5.40)$$

Здесь ρ_O^{std} и ρ_G^{std} – плотности нефти и газа при стандартных условиях. Эти уравнения можно представить в форме:

$$\rho_i = \rho_{i1} + \rho_{i2}, \quad (5.41)$$

где ρ_{i1} соответствует первому слагаемому в (5.39) и (5.40), тогда как ρ_{i2} соответствует растворенному газу в (5.40). Второе слагаемое, ρ_{i2} , будет отлично от нуля в фазах с растворенным газом (то есть газонасыщенная нефть и все материнские узлы соответствующего графа). Во всех остальных случаях $\rho_{i2} = 0$. В данной работе R_S выбрана кусочно-линейной функцией, характеризуемой точкой образования пузырьков P_S и максимальным содержанием газа R_{S0} :

$$R_S(p) = \begin{cases} R_{S0} p / P_S, & p < P_S; \\ R_{S0}, & p \geq P_S. \end{cases} \quad (5.42)$$

Следующие уравнения закона сохранения массы выполняются для нефти в целом и для живой нефти с растворенным газом:

$$\frac{\partial \alpha_O \rho_{O1} A}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_O \rho_{O1} u_O A}{\partial x} = J_O, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial (\alpha_O \rho_O + \alpha_N \rho_N) A}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_O \rho_O u_O + \alpha_N \rho_N u_N) A}{\partial x} = J_O + J_N. \quad (5.44)$$

В присутствие обмена массой вследствие дегазации плотности в уравнениях закона сохранения массы (5.20) следует рассматривать как ρ_{k1} , в то время как уравнения закона сохранения импульса (5.21) следует формулировать в терминах полных плотностей жидкостей ρ_k . Соотношения (5.23) удовлетворяются для обеих сумм плотностей. Уравнения закона сохранения массы (5.44) можно переформулировать в форме (5.20) для газа путем подстановки уравнения (5.43), с притоком за счет обмена массой:

$$J_{GR} = -\frac{\partial \alpha_O \rho_{O2} A}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_O \rho_{O2} u_O A}{\partial x}. \quad (5.45)$$

Данная форма уравнения закона сохранения массы с притоком массы (5.45) сохраняет неизменной общую стандартную формулировку уравнений закона сохранения массы, которая является ключевой для внедрения унифицированной вычислительной процедуры на основе графа. Такой переток массы приводит к дополнительному сопряжению между уравнениями закона сохранения массы.

Модель черной нефти задает равновесную дегазацию (см. Рис. 5.2.b) и растворения газа в случае отрицательных значений J_{GR} . Растворение может приводить к полному исчезновению газа, и тогда модель черной нефти перестает быть применимой. Более сложные модели и неравновесный обмен массой (дегазация) могут потребоваться чтобы учесть отклонение от модели черной нефти (см. также [346, 347]).

Осредненное слагаемое за счет обмена массой в уравнении закона сохранения импульса является произведением слагаемого за счет обмена массой и скорости на интерфейсе. Так как дегазация происходит на поверхности пузырька, скорость на интерфейсе равна скорости жидкости. Растворение

газа происходит также на поверхности раздела фаз; в силу сложности процесса примем, что скорость равна скорости смеси. Тогда слагаемое за счет обмена импульсом может быть выражено в виде:

$$I_{GR} = \max(0, J_{GR})u_O + \min(0, J_{GR})\frac{\alpha_O \rho_O u_O + \alpha_N \rho_N u_N}{\alpha_O \rho_O + \alpha_N \rho_N}. \quad (5.46)$$

Отношение слагаемого за счет обмена массой к скорости смеси можно оценить как

$$\frac{J_{GR}}{\frac{\partial \alpha \rho A}{\partial x}} \approx \frac{\rho_G^{std}}{\rho_O^{std}} R_{S0}, \quad (5.47)$$

Отношение слагаемого за счет обмена импульсом к градиенту скорости смеси выражается как

$$\frac{I_{GR}}{A \frac{\partial p}{\partial x}} \approx \frac{2\rho_G^{std}}{\rho_O^{std}} \frac{R_{S0}}{Eu}, \quad (5.48)$$

$$Eu = \frac{2\delta P}{\rho_O^{std} U^2}. \quad (5.49)$$

Здесь Eu – число Эйлера, посчитанное по характерному перепаду давления δP и характерной скорости U . Так как $Eu \gg 1$ и $\rho_G^{std} R_S \approx \rho_O^{std}$, обменом импульсом можно пренебречь, тогда как обмен массой следует учитывать в большинстве случаев при использовании модели черной нефти.

Сформулированные модели дегазации и растворения газа представляют пример модели обмена массой между компонентами в многофазном течении в трубопроводе или скважине. Однако для моделирования различных течений с обменом массой между дисперсной и непрерывной фазами (капли или пузырьки) могут потребоваться более сложные замыкающие соотношения, для которых предлагаемая модель на основе графа является базовой инфраструктурой для численного моделирования. Редуцированные модели такого типа представлены, например, в [316] для трехжидкостного течения.

5.2.3 Численная реализация многожидкостной модели

Существует определенное разнообразие численных схем для многофазных течений в трубопроводах, варьирующихся в зависимости от специфики рассматриваемых процессов. Выделяются три основных направления: явные схемы Годунова, полуяявные методы для уравнений, связанных через давление (Semi-Implicit Methods for Pressure-Linked Equations, SIMPLE) и полностью неявные итерационные методы Ньютона-Рафсона. Настоящая работа сфокусирована на внедрении обобщенной версии метода SIMPLE для работы с моделью на основе графа.

Метод SIMPLE был изначально предложен для однофазных течений [348]. Метод принадлежит к группе схем, в которых каждая переменная находится из соответствующего уравнения (стадия предиктор). Так как определяющие уравнения являются нелинейными и сопряженными, итерационная процедура на каждом шаге по времени может потребоваться для удовлетворения всех уравнений (стадия корректор). Набор методов для различного количества стадий предиктор и корректор известен в литературе. Обзор наиболее удобных модификаций методов для многофазных течений можно найти, например, в [349].

Два типа методов можно выделить в зависимости от принципа построения схемы корректор. Первая группа методов, так называемые схемы с сохранением массы (Mass Conservation-Based Algorithms, MCBA), предполагает что уравнение для поправок к скорости и давлению формулируется на основе общего закона сохранения массы смеси [348]. Объемные доли не входят в уравнение для поправок и рассчитываются на стадии корректор. Второе семейство методов, так называемые схемы с сохранением объема (Geometry Conservation-Based Algorithms, GCBA) [350], предполагают построение уравнения для поправок к скорости и давлению на основе уравнения на объемные доли фаз (сумма объемных долей равна единице). Уравнение для поправки давления в подходе GCBA выводится как раз из этого

ограничения на объемные доли фаз. Обзоры методов на основе МСВА и GCBA можно найти в [351] и [352], соответственно.

Оба подхода можно адаптировать для численного внедрения модели на основе графа. Основное внимание далее будет уделено внедрению схемы GCBA, так как она оказывается предпочтительной для течений с дегазацией.

Схема с сохранением объема, GCBA. В рамках подхода GCBA решение на следующем шаге по времени начинается с нахождения предварительного поля скорости u_k^* путем решения уравнения закона сохранения импульса (5.21) для каждой жидкости в вершинах графа. После получения скоростей жидкостей можно восстановить предварительные значения скорости смеси и компонент. Скорость смеси находится из соотношения (5.24). Скорости компонент можно найти, идя вниз по графу и используя замыкающие соотношения модели дрейфа (5.33) и (5.34).

Расчет предварительных значений объемных долей α_i^* начинается с решения уравнения закона сохранения массы (5.20) для конечных (терминальных) вершин графа. Затем, с использованием соотношения на объемные доли (5.22), можно восстановить объемные доли в некрайних вершинах графа. Если предварительное значение объемной доли α_M^* близко к единице (5.25), то полученные скорости и объемные доли удовлетворяют закону сохранения массы и не требуют коррекции. В противном случае, требуется стадия корректор.

Процедура коррекции основана на следующем принципе. Все переменные представляются в виде:

$$p^{n+1} = p^* + p', \rho_i^{n+1} = \rho_i^* + \rho'_i, \alpha_i^{n+1} = \alpha_i^* + \alpha'_i, u_i^{n+1} = u_i^* + u'_i. \quad (5.50)$$

Подставляя эти выражения в (5.21), можно получить поправки к скоростям в виде:

$$u'_k = u'_k(p'). \quad (5.51)$$

Дополнительно поправки к скоростям для всех компонент находятся из соотношений модели дрейфа (5.33)-(5.34):

$$u'_L = C_L u'_m, \quad (5.52)$$

$$u'_H = C_H u'_m. \quad (5.53)$$

Уравнение на поправку к давлению в подходе GCBA строится из условия $\alpha_M^{n+1} = \alpha_M^* + \alpha'_M = 1$. Тогда, α'_M следует выразить как функцию поправки давления. На основе выражений (5.22) поправка к объемной доли смеси определяется как сумма поправок к объемным долям компонент:

$$\alpha'_M = \sum_{i=1}^N \alpha'_i = 1 - \alpha_M^*. \quad (5.54)$$

Для завершения процедуры поправка к объемной доли смеси должна быть выражена через поправку к давлению на основе закона сохранения массы:

$$\alpha'_i = \alpha'_i(\rho'_i(p'), u'_i(p')). \quad (5.55)$$

В итоге поправки к плотности находятся из уравнения состояния (5.26):

$$\rho'_i = C_i^\rho p', \quad (5.56)$$

где $C_i^\rho(p) = \partial \rho_i / \partial p$ – коэффициент сжимаемости.

Поправки к скорости начинаются с жидкостей и затем, с использованием (5.52)-(5.53), могут быть распространены на все компоненты в графе. Поправки к объемной доле начинаются с терминальных узлов графа и затем рассчитываются для узлов вверх по графу. Поправки к плотности фаз начинают рассчитываться для терминальных узлов графа на основе уравнения состояния (5.26) и нового подправленного поля давлений. От терминальных узлов информация распространяется вверх по графу с учетом новых значений объемных долей компонент.

В заключение, схема с сохранением объема GCBA для модели на основе графа сводится к следующему набору шагов:

1. Нахождение предварительного поля скорости u_k^* для жидкостей; расчет скоростей компонент по модели дрейфа.
2. Расчет уравнений закона сохранения массы для терминальных вершин графа с целью нахождения предварительных значений объемных долей; восстановление значений для всех фаз.
3. Проверка дисбалансов всех уравнений; если они меньше заданных значений то переход на шаг 7, иначе переход на шаг 4.
4. Расчет уравнения для поправки давления, нахождение поправки давления p' .
5. Поправки к скоростям объемным долям и давлению.
6. Поправка в полям плотности с использованием нового распределения давления.
7. Проверка критериев сходимости; продолжение итераций по нелинейности с шага 1, если сходимость не наступила.

Используемый метод явного выделения границы раздела жидкости и газа при снарядном режиме течения по сути является аналогом метода Volume-of-Fluid (VOF) [1].

5.2.4 Верификация и валидация

Данный раздел содержит результаты верификации модели на примере расчетов поверхностных волн в окологоризонтальной скважине.

Модель описывает хорошо известный феномен возникновения поверхностных волн на поверхности раздела фаз при расслоенном газожидкостном течении в окологоризонтальной скважине в результате развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Рассматривается течение воздуха и воды. Используется двухжидкостная модель, угол наклона скважины $\theta = -5^\circ$, диаметр $D = 0.051\text{ m}$ и длина $L = 30\text{ m}$. Заданные объемные доли во

Таблица 5.1: Параметры PVT таблиц для фаз при референсном значении $P^{std} = 10^5 Pa$.

Жидкость	Воздух / Газ	Нефть	Вода
Вязкость, $\mu \times 10^3, Pa \cdot s$	0.017	0.74	1
Референсная плотность, $\rho^{std}, kg/m^3$	1.22	800	1000
Содержание газа в нефти, R_{S0}	0	800	0
Давление образования пузырьков, $P_S \times 10^{-5}, Pa$	—	100	—
Коэффициент изменения объема, B	$\frac{P^{std}}{p}$	$\frac{1}{1+C^\rho(p-P^{std})}$	$\frac{1}{1+C^\rho(p-P^{std})}$
Сжимаемость, $\times 10^5, Pa^{-1}$	—	10^{-4}	10^{-4}

входном сечении имеют волновое возмущение (триггер развития неустойчивости – это привнесенное нестационарное возмущение свободной поверхности в данном случае) $\alpha_k = \alpha_{k0} \pm 0.005 \sin(2\pi t/T)$, $T = 2 s$, $\alpha_{W0} = 0.5311$, $\alpha_{G0} = 0.4689$. Скорости на входе постоянны и равны $u_k = q_{k0}/\alpha_{k0}$ с расходами $q_{G0} = q_{W0} = 1 m/s$. Давление на выходном сечении трубы задано постоянным $10^5 Pa$. Плотности и вязкости жидкостей показаны в Таб. 5.1.

Указанные условия соответствуют стационарному однородному решению, которое возмущается на входной границе путем задания периодических волн малой амплитуды на свободной поверхности. Профили растущих волн демонстрируют сходимость по сетке и хорошее соответствие с аналитическим решением в терминах коэффициента нарастания для заданной длины волны, как показано в Таб. 5.2. Моделирование развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на интерфейсе возможно при разрешении сетки $h \sim D/5$. Профили растущих волн на различных сетках показаны на Рис. 5.3. Результаты показывают сходимость по сетке. Для экстраполированной длины волны $L = 4.9 m$ аналитическое значение коэффициента нарастания получено с помощью линейной теории устойчивости. Свойства

волн в неустойчивом стратифицированном течении оценивались на основе дисперсионного соотношения (см. [333]). Хорошее соответствие между численными и теоретическими данными позволяет говорить о том, что модель прошла верификацию для данного класса течений.

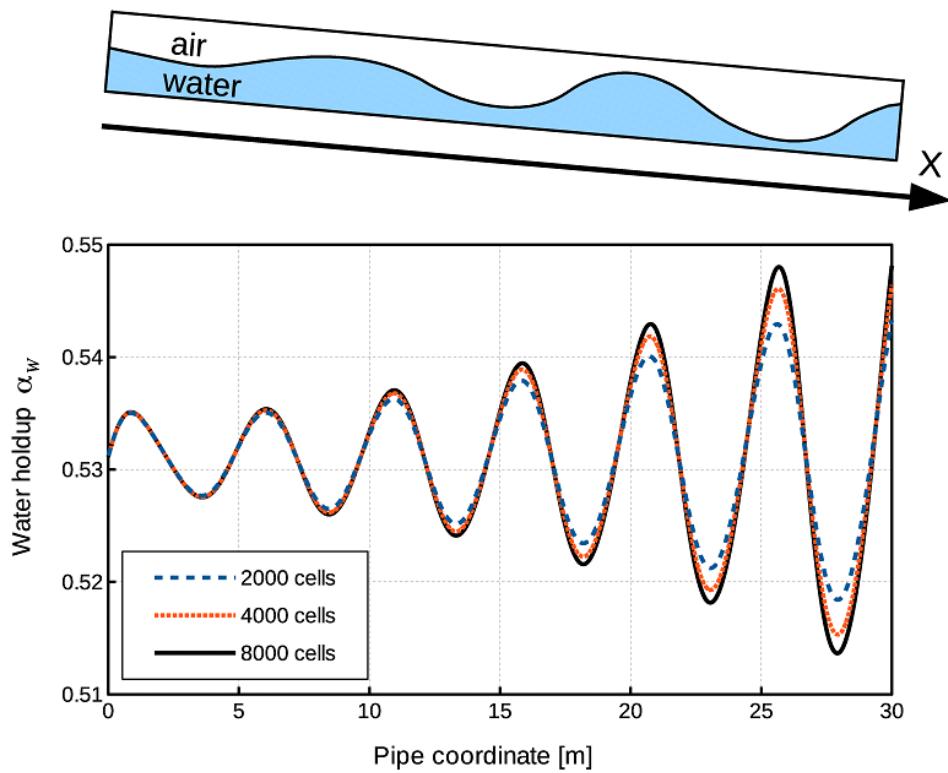


Рис. 5.3: Профиль объемной доли жидкости вдоль скважины при $t = 30\text{ s}$.

Численные схемы MCBA и GCBA можно сравнить, например, в терминах общего числа нелинейных итераций, которые требуются для проведения расчета в рамках заданного интервала физического времени процесса. Для сетки из $N = 1000$ ячеек и постоянного шага по времени $\tau = 10^{-2}\text{ s}$ (что дает локальное число Куранта $C \sim 1$), рассчитывался интервал по времени 30 секунд. В качестве критерии сходимости нелинейных итера-

Таблица 5.2: Сходимость по сетке для задачи о поверхностных волнах в расслоенном двухфазном течении.

Размер сетки	2000	4000	8000	16000	Теория
Длина волны, m	4.888	4.894	4.897	4.899	4.9
Коэффициент нарастания, m^{-1}	0.054	0.062	0.067	0.068	0.067

ций рассматриваются дисбалансы уравнений. Максимальный дисбаланс 10^{-4} задается для уравнения закона сохранения массы и импульса и 10^{-6} – для соотношения на объемные доли. Данные значения дисбалансов гарантируют совпадение решений для всех рассмотренных схем.

Число нелинейных итераций как функция времени расчета (число шагов по времени) представлено на Рис. 5.4. Была также рассмотрена возможность отбросить одно из уравнений закона сохранения массы в MCBA. Оба варианта – опустить уравнение закона сохранения массы для газа или для жидкости – были рассмотрены. Для рассмотренного диапазона параметров схема MCBA демонстрирует почти линейную зависимость от числа итераций, то есть постоянное количество итераций на шаге по времени. Схема MCBA с решением уравнения закона сохранения массы демонстрирует порядка 1% большее число итераций, чем та же схема с решением уравнения закона сохранения массы для жидкости. И наконец, схема GCBA дает число итераций на 30% меньшее, чем обе схемы MCBA. В то время как изначально GCBA требует больше итераций на шаге по времени, после нескольких начальных шагов по времени число итераций начинает уменьшаться, и скорость сходимости существенно превышает соответствующую скорость сходимости для схемы MCBA.

Следует заметить, что разница между рассмотренными схемами зависит от конкретного случая и может существенно превосходить указанные значения. Например, рассмотрен следующий случай: горизонтальная труба с диаметром $D = 0.1 m$, скорость на входе $u_G = 20 m/s$, $u_W = 0.7 m/s$ и объемная доля воды на входе $\alpha_W = 0.3 + 0.001 \sin(2\pi t)$. В этом случае

для сетки $N = 250$ ячеек и фиксированного шага по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-4} s$ общее число итераций отличается в два раза при решении уравнения закона сохранения массы для жидкости и в три раза при решении уравнения закона сохранения массы для газа.

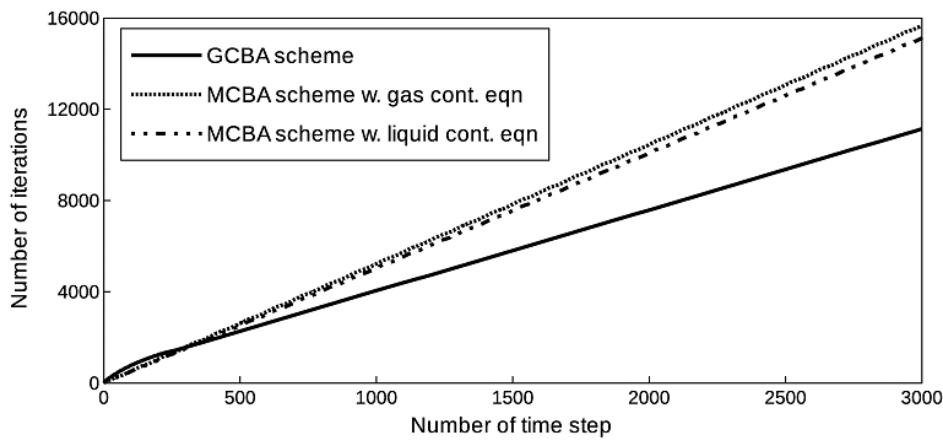


Рис. 5.4: Число нелинейных итераций от времени для схем GCBA и MCBA на примере расслоенного течения газа и жидкости.

Результаты для схемы MCBA, представленные выше, получены для алгоритма без нормализации объемных долей (т.е. без нормировки объемных долей, когда одно из уравнений закона сохранения массы игнорируется и заменяется условием на объемные доли фаз). Схема с нормировкой объемных долей, для критериев сходимости в терминах дисбалансов уравнений, становится неприменимой. Относительная норма невязок демонстрирует сходимость на масштабе 10^{-12} , что сравнимо с машинной точностью, но эти распределения переменных не удовлетворяют критериям дисбалансов уравнений. В то время как схема MCBA, в которой опущено одно из уравнений закона сохранения массы, дает линейную скорость сходимости для дисбалансов уравнений, схема с нормализацией объемных долей дает линейную скорость сходимости только до какого-то уровня, а затем дисбалан-

сы начинают стагнировать. Численные эксперименты показали, что даже если на начальных шагах по времени уровень стагнации дисбалансов ниже приемлемого уровня, дисбалансы имеют тенденцию к нарастанию со временем.

5.3 Вопросы гиперболичности многожидкостной модели

Несмотря на десятилетия исследований, проблема потери гиперболичности многожидкостной модели остается нерешенной [355]. Частым предположением для её замыкания является удобное с практической точки зрения условие равенства давлений в фазах. Однако такое упрощение существенно ограничивает область гиперболичности модели [356, 195, 354]. Известны работы, в которых предлагаются различные модификации классической двухжидкостной модели с одним давлением, позволяющие сделать систему уравнений гиперболической для как можно более широкого диапазона определяющих параметров (см., например, [357, 358, 355, 359] и цитируемую в них литературу). Тем не менее, до сих пор отсутствует общепринятая формулировка системы определяющих уравнений для двухжидкостной модели.

Свойства системы уравнений модели дрейфа исследовались многими авторами (см., например, [360, 362, 363, 364]). Характеристическое уравнение системы имеет третий порядок, может быть выписано явно и формально разрешено. Однако результирующие выражения для корней непригодны для интерпретации, и простой достаточно общий критерий гиперболичности неизвестен. Для исследования обычно привлекаются дополнительные предположения, и анализируется система в упрощенном виде.

Настоящий раздел посвящен развитию моделей газожидкостных течений в трубопроводах и разработке методов исследования гиперболичности этих моделей. Целью является установление условий гиперболичности си-

стем определяющих уравнений в широком диапазоне определяющих параметров, характерных для различных газожидкостных течений.

В первой части описывается класс моделируемых течений и приводится соответствующая система уравнений. Ставится задача поиска корней характеристического уравнения системы. Во второй части в рамках двухконтинуального подхода рассматриваются две модификации классической двухжидкостной модели, позволяющие расширить ее область гиперболичности: учет градиента уровня жидкой фазы и учет межфазных сил давления. На основе аналитических и численных исследований в пространстве определяющих параметров устанавливаются границы областей, где модели сохраняют гиперболичность. Третья часть посвящена характеристическому анализу систем уравнений модели дрейфа в двух формулировках, отличающихся формой уравнения закона сохранения импульса смеси. Делаются выводы о знакопределенности собственных значений, позволяющие определить количество приходящих и исходящих характеристик на границах вычислительной области и определить корректную постановку начально-краевой задачи [365].

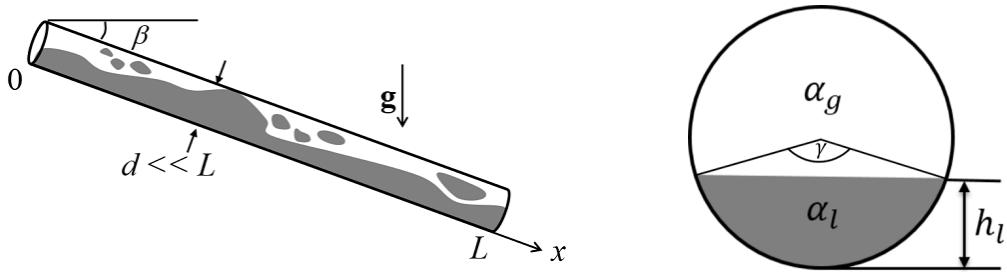


Рис. 5.5: Схема двухфазного течения в трубопроводе (a); схема двухфазного расслоенного течения в поперечном сечении (б).

5.3.1 Постановка задачи об исследовании гиперболичности многофазикдостной модели

Рассматривается нестационарное газожидкостное течение в трубе произвольного наклона с диаметром много меньшим продольного размера: $d \ll L$ (Рис. 5.5, *a*). При моделировании такого рода течений вместо полных уравнений для каждой фазы и отслеживания межфазной границы обычно используются одномерные нестационарные уравнения законов сохранения для эффективных параметров течения, полученных осреднением по поперечному сечению трубы. Уравнения законов сохранения могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{C}, \quad (5.57)$$

где $\mathbf{U}(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))^T$ — вектор неизвестных параметров задачи, $\mathbf{A}(\mathbf{U}(x, t), x, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{U}(x, t), x, t)$ — матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{C}(\mathbf{U}(x, t), x, t)$ — вектор правых частей системы уравнений. Компонентами вектора \mathbf{U} обычно являются скорости, плотности и объемные доли фаз, а также давление. Часто используется предположение о равенстве давлений в фазах, что позволяет сократить число неизвестных. Такого рода система, в частности, лежит в основе двух широко распространенных моделей газожидкостных трубных течений: модели дрейфа и многофазикдостной модели, которые исследуются в данной работе. В случае невырожденной матрицы \mathbf{A} система (5.57) может быть сведена к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{C}}. \quad (5.58)$$

Согласно [246] система (5.58) называется гиперболической, если существует несингулярная матрица $\boldsymbol{\Omega}$, диагонализирующая $\tilde{\mathbf{B}}$, так что

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n],$$

и все собственные значения λ_k матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ действительны. Если все собственные значения различны, система называется строго гиперболической.

Для численного решения (5.57) требуется дополнительно сформулировать достаточное число начальных и граничных условий, отвечающих типу уравнений. Начально-краевая задача, сформулированная для гиперболической системы, может оказаться некорректной, если уравнения меняют тип. Поэтому важной задачей при развитии моделей многофазных течений является установление условий, при которых система определяющих уравнений сохраняет гиперболичность.

На первом этапе проверки гиперболичности требуется найти корни характеристического уравнения и убедиться в том, что они вещественные. Если корни различаются, то система строго гиперболическая, и тип уравнений установлен. В случае кратных корней нужно искать собственные векторы и, в зависимости от их свойств, определять тип начально-краевой задачи[365]. В то же время, не всегда возможно выписать корни в явном виде, поэтому в настоящей работе помимо аналитического исследования применяются также численные методы установления гиперболичности системы в широком диапазоне определяющих параметров.

В рамках многоконтинуального подхода осредненные по сечению трубы одномерные нестационарные уравнения сохранения массы и импульса для каждой из фаз, дополненные соотношением на объемные доли и уравнениями состояния фаз, имеют вид [354]:

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = l, g \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i^2)}{\partial x} = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_i \rho_i g \sin \theta + F_i^p + F_i^\tau, \quad (5.60)$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad (5.61)$$

$$\rho_i = \rho_i(p). \quad (5.62)$$

Здесь x — координата вдоль трубы; t — время; индексы l, g относятся к жидкой и газовой фазам соответственно; α_i, ρ_i, u_i — осредненные значения объёмных долей, плотностей и скоростей фаз; p — осредненное давление, которое предполагается одинаковым в обеих фазах; g — ускорение силы

тяжести; θ — угол наклона трубы к горизонтали, F_i^p — силы межфазного взаимодействия за счёт давления (далее, межфазные силы давления) для i -й фазы, F_i^τ — силы трения, включающие в себя силы межфазного трения и трения о стенку. Во многих инженерных моделях для замыкания системы предполагается, что $F_i^p = 0$, а F_i^τ — это алгебраические функции параметров α_i , ρ_i , u_i , аппроксимирующие экспериментальные измерения трения (см. например, [354, 340, 366] и др.). В рамках сформулированных предположений система вида (5.59)-(5.62) оказывается негиперболической [356, 365, 195].

Стоит отметить, что активно развивается класс безусловно гиперболических моделей, построенных в предположении о различных давлениях в фазах [367, 368, 369]. Однако, эти модели содержат большее число уравнений и требуют дополнительных замыкающих соотношений, поэтому пока не используются для создания промышленных симуляторов газожидкостных трубных течений.

В настоящей работе рассматриваются две модификации исходной системы (5.59)-(5.62), позволяющие сделать классическую модель условно гиперболической: учет градиента уровня жидкой фазы [366] и учет межфазных сил давления [357].

5.3.2 Модель с учетом градиента уровня жидкости

В окологоризонтальных течениях, когда легкая газовая фаза движется слоем поверх тяжелой жидкой фазы (см. Рис. 5.5, б), необходимо учитывать дополнительный градиент давления, связанный с наличием градиента уровня жидкости h_l . Согласно уравнениям теории тонкого слоя [370] поперечное распределение давления в жидком слое будет определяться соотношением:

$$\frac{\partial p_l}{\partial y} = -\rho_l g \sin \theta.$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия на интерфейсе $p_l|_{y=h_l} = p$,

получим: $p_l = p + (h_l - y)\rho_l g \sin \beta$. В результате, если считать жидкость несжимаемой или слабосжимаемой, в правой части уравнения на импульс для жидкой фазы (5.60) появится дополнительное слагаемое [366]:

$$-\alpha_l \rho_l g \sin \theta \frac{\partial h_l}{\partial x}.$$

В предположении несжимаемости обеих фаз характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$(\alpha_l \rho_g + \alpha_g \rho_l) \lambda^2 - 2(\alpha_l \rho_g u_g + \alpha_g \rho_l u_l) \lambda + \alpha_l \rho_g u_g^2 + \alpha_g \rho_l u_l^2 - \alpha_l \alpha_g \rho_l g \sin \theta \frac{dh_l}{d\alpha_l} = 0.$$

Из условия неотрицательности дискриминанта получаем условие гиперболичности системы:

$$u_s \leq \phi \sqrt{\left(\alpha_l + \frac{\alpha_g}{\zeta} \right) \frac{d\tilde{h}_l}{d\alpha_l} \sin \theta}, \quad (5.63)$$

$$u_s = \frac{|u_l - u_g|}{c_g}, \quad \phi = \frac{1}{Fr} = \frac{\sqrt{gd}}{c_g}, \quad \zeta = \frac{\rho_g}{\rho_l}.$$

Здесь $\frac{d\tilde{h}_l}{d\alpha_l} = \frac{d\tilde{h}_l}{d\gamma} \frac{d\gamma}{d\alpha_l}$ – производная безразмерного уровня жидкости $\tilde{h}_l = h_l/d$ (см. Рис. 5.5, б), которая может быть определена по значению объемной доли α_l из следующих геометрических соотношений:

$$h_l = R - R \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha_l = \frac{\gamma - \sin \gamma}{2\pi}.$$

Из уравнения (5.63) видно, что с увеличением угла наклона трубы область гиперболичности сужается. На Рис. 5.6 представлены границы области гиперболичности, определяемые неравенством (5.63) для течения типа нефть-газ (таб. 5.3.2). Для течения типа вода-воздух качественно области гиперболичности будут аналогичны. Отметим, что $\lim_{\alpha_l \rightarrow 0} \frac{d\tilde{h}_l}{d\alpha_l} = \lim_{\alpha_l \rightarrow 1} \frac{d\tilde{h}_l}{d\alpha_l} = \infty$, а для промежуточных значений α_l производная $\frac{d\tilde{h}_l}{d\alpha_l}$ конечна. Видно, что система остается гиперболической во всём диапазоне значений объемной доли α_g только для достаточно малых скоростей проскальзывания u_s . Наибольшую из них далее будем обозначать u_s^{max} .

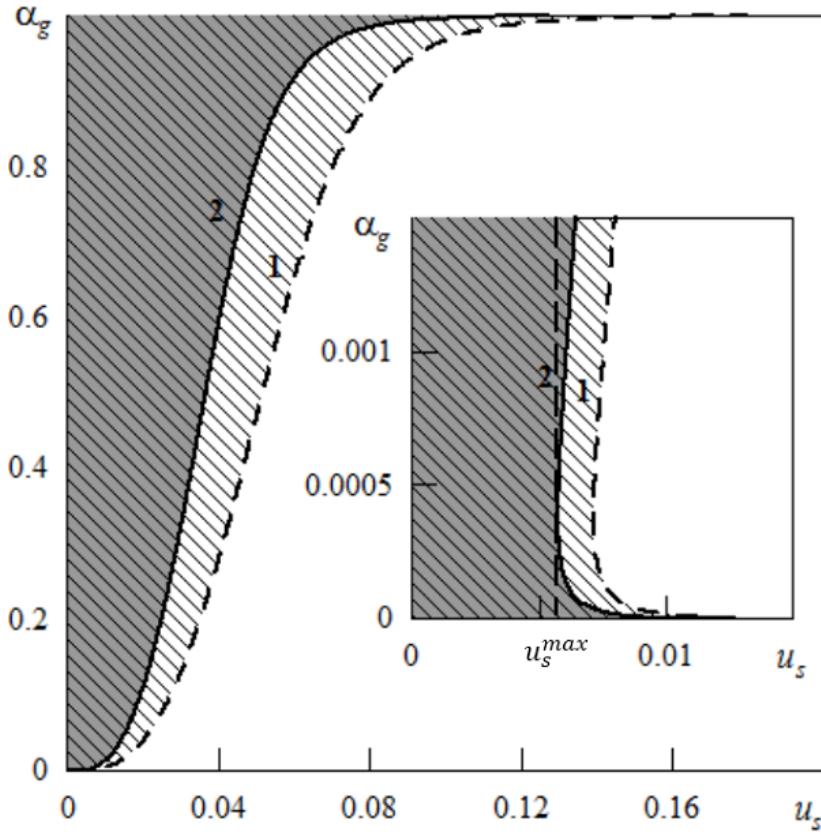


Рис. 5.6: Области гипербolicности системы (5.57) с учетом градиента уровня жидкости для течения типа нефть-газ (таб. 1) для $\phi = 614.3$ ($d = 0.1$ м) и $\theta = 0^\circ$ (область 1), $\theta = 60^\circ$ (область 2). Серым цветом показаны области гипербolicности.

5.3.3 Модель с учетом сил давления на интерфейсе

Рассмотрим модификацию модели (5.59)-(5.62), предложенную в работе [357] и учитывающую межфазную силу давления в виде: $F_i^p = -(p - p^*) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x}$, где p^* – давление на интерфейсе, отличающееся от давления p . Если предположить, что $p^* = const$, то для несжимаемых сред в оригинальной работе [357] было показано, что условие гипербolicности примет вид:

$$p_I = p - p^* \geq \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\alpha_l \rho_g + \alpha_g \rho_l} (u_l - u_g)^2.$$

Случай сжимаемых сред был исследован намного позже в работе [358], где были установлены условия гипербolicности для некоторых специальных

Тип течения	ρ_l , кг/м ³	ρ_g , кг/м ³	c_l , м/с	c_g , м/с	ζ	K	χ_{opt}	$u_s^m ax$
Вода-воздух	1000	1.23	1500	331	0.00123	0.22	2.08	0.72
Нефть-газ	900	0.7	1470	430	0.00078	0.29	2.07	0.72

Таблица 5.3: Характерные значения параметров для двух типов газожидкостных течений.

видов замыкания для p_I .

Рассмотрим общий случай сжимаемых сред и предположим, что

$$p_I = \chi \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\alpha_l \rho_g + \alpha_g \rho_l} (u_l - u_g)^2, \quad (5.64)$$

где χ – константа, которая будет подбираться так, чтобы система определяющих уравнений была гиперболической в наибольшем возможном диапазоне параметров.

С учетом (5.64) характеристическое уравнение для системы (5.59)-(5.62) в безразмерной форме будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & (\alpha_g + \zeta(1 - \alpha_g)K^2) (u_l - \lambda)^2 (u_g - \lambda)^2 - \\ & - \left(\frac{\alpha_g^2 \chi \zeta (1 - \alpha_g) u_s^2}{(1 - \alpha_g) \zeta + \alpha_g} + \zeta(1 - \alpha_g) \right) (u_g - \lambda)^2 - \\ & - \left(\frac{K^2 (1 - \alpha_g)^2 \chi \zeta \alpha_g u_s^2}{(1 - \alpha_g) \zeta + \alpha_g} + \alpha_g \right) (u_l - \lambda)^2 + \frac{\alpha_g \chi \zeta (1 - \alpha_g) u_s^2}{(1 - \alpha_g) \zeta + \alpha_g} = 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Здесь $K = c_g/c_l$, а λ , u_l , u_g отнесены к скорости c_g .

Рассмотрим важный частный случай, когда плотность газовой фазы считается пренебрежимо малой по сравнению с плотностью жидкой фазы $\zeta \rightarrow 0$. В этом случае характеристическое уравнение существенно упрощается и можно явно найти его корни:

$$\lambda_{1,2} = u_l, \lambda_{3,4} = u_g \pm 1.$$

В общем случае задача сводится к поиску числа действительных корней характеристического уравнения 4-ой степени с переменными коэффициентами. Для этого применялась численная реализация алгоритма Джэнкинса-Трауба (Jenkins-Traub) [371]. В широком диапазоне значений параметров

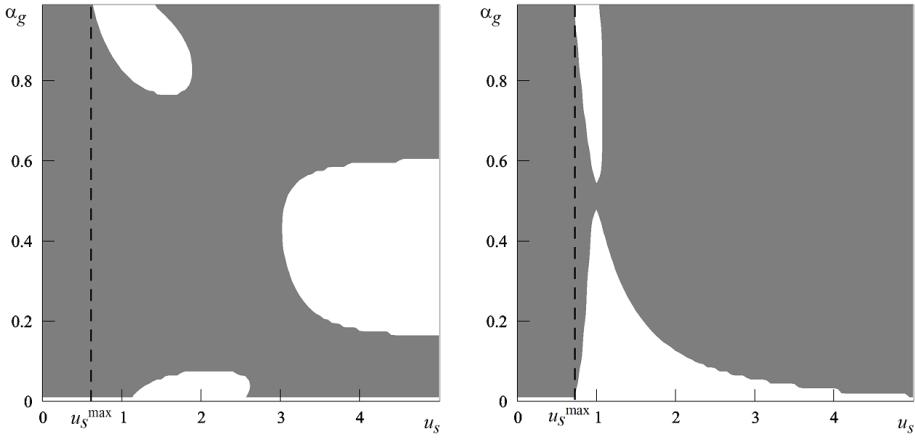


Рис. 5.7: Вид области гипербolicности для $\zeta = 0.6$, $K = 0.6$, $\chi = 1.6$ (а) и параметров течения типа нефть-газ из таб. 5.3.2 (б). Серым цветом показаны области гипербolicности.

задачи (объемных долей, скоростей, плотностей), характерных для различных течений (в том числе для смесей типа нефть-газ и вода-воздух, таб. 1), было исследовано число действительных корней характеристического уравнения. Возможные варианты области гипербolicности представлены на Рис. 5.7. В результате варьирования определяющих безразмерных параметров ζ и K были найдены оптимальные значения χ_{opt} , для которых система уравнений является гипербolicкой во всем диапазоне значений объемных долей $\alpha_g \in (0, 1)$ и в максимально возможном диапазоне скорости проскальзывания $u_s < u_s^{max} = \max_{\chi} |u_l - u_g|/c_g$ (см. Рис. 5.7). В случае, когда одна из объемных долей равна нулю, матрица \mathbf{A} становится вырожденной, и определение гипербolicности для системы (5.57) не применимо.

На Рис. 5.8 и в таб. (5.3.2) представлены вычисленные значения χ_{opt} и u_s^{max} в зависимости от безразмерных параметров ζ и K . Видно, что для малых ζ влияние параметра K на χ_{opt} и u_s^{max} мало. Это объясняется тем, что в уравнение (5.65) параметр K входит только как произведение ζK^2 . Также получено, что для заданных ζ при увеличении K ($K \rightarrow 0$ соответствует случаю несжимаемой жидкости) параметры χ_{opt} и u_s^{max} растут до некоторого значения, а затем выходят на величину близкую к постоянной.

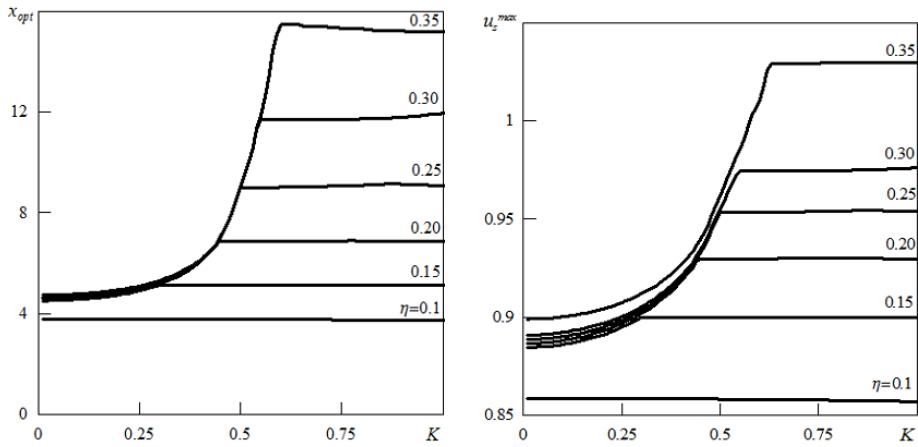


Рис. 5.8: Зависимости $\chi_{opt}(K)$ (а) и $u_s^{max}(K)$ (б) для различных значений ζ .

5.4 Основные результаты Главы 5

1. Представлен вывод асимптотических уравнений модели дрейфа для течения разреженной газожидкостной дисперсной смеси в круглой трубе в приближении длинного канала как предел полных уравнений законов сохранения, записанных для каждой фазы в многоконтинуальном приближении. Определены ключевые предположения, при которых модель дрейфа, содержащая алгебраическое соотношение для скоростей фаз и одно уравнение сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости, строго следует из законов сохранения. Для вывода соотношения дрейфа для скоростей фаз, когда одна из фаз является дисперсной, а другая непрерывной, следует лишь предположить, что масштаб задачи много больше масштаба релаксации скоростей фаз. Для вывода единственного уравнения сохранения импульса смеси следует дополнительно предположить, что объемная доля дисперсной фазы мала, либо проскальзыванием фаз можно пренебречь, либо справедливо предположение о безынерционном режиме течения, когда ускорением смеси в целом можно пренебречь.

В то же время показано, что известная модель дрейфа, в которой единственное уравнение закона сохранения импульса смеси записано в виде суммы уравнений сохранения импульса фаз, следует из законов сохранения

лишь при наложении условия, что масштаб задачи много больше масштаба релаксации скоростей фаз, и таким образом является более общей.

2. Предложена общая модель многофазного течения в скважине, основанная на комбинации многоконтинуального подхода и модели дрейфа. Гибкая формулировка модели позволяет моделировать течения с произвольным количеством фаз и компонент с учетом обмена массой и импульсом между фазами. Ограничением является достаточное количество необходимых замыкающих соотношений, откалиброванных относительно лабораторных данных. Структура модели формализована в виде графа. Различные уровни графа соответствуют несмешивающимся фазам в каждой жидкости. Верхний уровень графа представляет собой смесь. Жидкости (флюиды) расположенные на втором уровне графа, описываются отдельными уравнениями законов сохранения импульса, в то время как компоненты, расположенные на нижних уровнях графа, описываются моделью дрейфа, основанной на предположении о безынерционном проскальзывании фаз. Ребра графа представляют соотношения между смесью, жидкостями, компонентами. Модель является обобщением известных многожидкостных моделей и моделей дрейфа, которые, таким образом, оказываются частными случаями предложенной модели.

3. Проведен анализ гиперболичности многожидкостной модели и предложено замыкание, обеспечивающее гиперболичность в диапазоне параметров, характерном для рассматриваемых приложений. Рассмотрены две модификации классической двухжидкостной модели, описывающей нестационарное двухфазное течение в длинном трубопроводе: модель с учётом градиента уровня жидкой фазы и модель с учётом межфазных сил давления. В модели с учетом градиента уровня жидкой фазы в случае несжимаемых сред аналитически найдено безразмерное условие, обеспечивающее исходной системе уравнений гиперболичность. Для течения типа нефть-газ для различных углов наклона построены графики с областями гиперболичности системы в пространстве определяющих параметров течения.

Показано, что данная модификация классической двухжидкостной модели является гиперболической лишь в узком диапазоне значений определяющих параметров. Проведен безразмерный характеристический анализ модели с учётом межфазных сил давления. В случае сжимаемых сред предложено замыкающее соотношение для давления на интерфейсе. Для поиска числа действительных корней характеристического уравнения применена численная реализация алгоритма Дженкинса-Трауба. В широком диапазоне значений параметров задачи, характерных для различных течений (в том числе нефтегазовых), построены области вещественных корней характеристического уравнения. Получена таблица, где для заданного типа течения приведены оптимальное замыкающее соотношение и максимальная скорость проскальзывания, вплоть до которой характеристическое уравнение имеет только действительные корни и система остается гиперболической.

Результаты главы опубликованы в [13, 1, 17, 18], [6]–[11], [10]–[14], [17].

Список обозначений

В диссертации использован следующий общий список обозначений (а далее приведен список частных обозначений по главам):

Символ	Определение
a	радиус частиц
α	показатель степени в поправке к скорости осаждения
β	показатель степени в выражении для вязкости суспензий
b	коэффициент бриджинга
B_n	число Бингама
B_u	число плавучести
$\dot{\gamma}$	скорость сдвига
Ca	капиллярное число
C_D	коэффициент сопротивления сферы
C_L	коэффициент утечек через стенки трещины
C_{max}	максимальная концентрация плотной упаковки частиц
C_p	объемная доля частиц
δ	характерный размер шероховатости на стенках трещины
d	характерная ширина трещины
D	диаметр скважины
De	число Деборы
ϵ	тензор скоростей деформаций
ε	малый параметр, отношение ширины к длине трещины
ε_p	коэффициент диффузии частиц
f_{se}	коэффициент трения суспензии
ϕ	пористость
I	безразмерное число вязкости в теории гранулированных сред
K, K_f	коэффициент консистенции суспензии/жидкости
K_p	проницаемость упаковки проппанта
K_c, K_μ	коэффициенты модели диффузационного потока

Таблица 5.4: Общий список обозначений.

Символ	Определение
λ_m	молекулярная диффузия
μ	динамическая вязкость
ν	кинематическая вязкость
M	отношение вязостей
N_1, N_2	нормальные напряжения
n	индекс течения (показатель степени в степенной реологической модели)
p, p_{ij}	давление, тензор напряжений
R	отношение высоты к длине трещины
Re, Re_c	число Рейнольдса канала
Re_p	число Рейнольдса частицы
σ_n	сдавливающие напряжения
St	число Стокса
τ	сдвиговое напряжение
τ_m	второй инвариант тензора вязких напряжений
τ_y	предел текучести
t_r	время релаксации среды
t_s	время релаксации частиц
θ	угол наклона скважины к горизонту
ψ	функция тока в пограничном слое
v_L	скорость утечек
U	линейная скорость (характерный масштаб)
\mathbf{v}	вектор скорости
w	ширина трещины
We	число Вейссенберга
ζ_p	отношение плотностей материалов частиц и жидкости

Таблица 5.5: Общий список обозначений (продолжение).

Индекс	Определение
L, l	относящийся к утечкам (leak-off)
p	относящийся к частицам (particles)
s	относящийся к осаждению (sedimentation)
St	описываемый законом Стокса

Таблица 5.6: Список обозначений индексов.

Символ	Определение
α	коэффициент релаксации в численной схеме
ε_0	амплитуда возмущения в расчетах неустойчивости
M_f	средняя длина пальцев при развитии неустойчивости Сэфмана-Тейлора
D_f	среднеквадратичное отклонение длины пальцев
L_f	длина проникновения пальцев
s	номер итерации схемы решения нелинейного уравнения Пуассона
ω	параметр релаксации численного алгоритма

Таблица 5.7: Дополнительный частный список обозначений в Главах 1 и 2.

Символ	Определение
α_m	массовая концентрация частиц
β	параметр инерционности частиц
χ	параметр проскальзывания частиц
γ	безразмерная скорость сдвига в центре частицы
ε	в разд. 3.1: малый параметр (корень из числа Re частицы)
G	характерный масштаб скорости сдвига
φ	функция Блазиуса
J	якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным
K	проводимость открытой трещины с поправкой на миграцию частиц
κ	коэффициент при боковой силе Сэфмана
L^c	масштаб длины (внешн. об.), основанный на кривизне профиля скорости
L^{Os}	озееновский масштаб длины во внутренней области
L^{Sa}	сэфмановский масштаб длины во внешней области
n, m	зависимые от χ коэффициенты в выражении для боковой силы
η	растянутая поперечная координата в пограничном слое
τ_s	объем одиночной частицы
ξ	вспомогательная переменная (поперечная координата)
Ω	угловая скорость вращения частицы
w_s	скорость осаждения частиц
z_0	ширина ядра течения, занятого частицами

Таблица 5.8: Дополнительный частный список обозначений в Главе 3.

Символ	Определение
α_{mob}	коэффициент мобилизации частиц
β_{colm}	второй свободный параметр в двухпараметрической модели кольматации
k, k_s	проницаемость крупных и мелких поровых каналов
λ, Λ	размерный и безразмерный коэффициент кольматации
R_v	эквивалентный радиус частицы
ϕ_0	начальная пористость среды
ϕ_t	полная пористость (крупные и мелкие каналы)
ϕ_c	пористость с учетом только крупных поровых каналов
σ	объемная концентрация осажденных частиц

Таблица 5.9: Дополнительный частный список обозначений в Главе 4.

Символ	Определение
A	площадь поперечного сечения скважины
α_g, α_l	объемная доля газа и жидкости
B_O, B_G	коэффициент изменения объема нефти и газа
C_0	параметр профиля в модели дрейфа
c_g, c_l	скорости звука в газе и жидкости
Eu	число Эйлера
γ	поверхностное натяжение
I_k и J_k	обмен импульсом и массой между фазами
λ	объемная вязкость эмульсии
λ_i	собственные числа
r_w	радиус трубы (скважины)
R_s	содержание газа в нефти
v_d	скорость дрейфа

Таблица 5.10: Дополнительный частный список обозначений в Главе 5.

Заключение

На основе выполненных автором исследований в работе сформулированы и обоснованы научные положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение в механике многофазных сред, связанное с развитием моделей многофазных течений применительно к описанию различных стадий технологии гидроразрыва, используемой для интенсификации добычи углеводородов.

Основные результаты и выводы работы: построено семейство многоконтинуальных моделей для описания многофазных течений на всех стадиях технологии гидроразрыва пласта, включая течение суспензии по трещине, поперечную миграцию и осаждение частиц в трещине, фильтрацию углеводородов в закрытой трещине по направлению к скважине и газожидкостные течения в скважине при старте добычи. В том числе:

1. Построена новая квазидвумерная двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине с учетом двухскоростных эффектов. Проведено обобщение модели на случай течения суспензии с пределом текучести. Модель позволяет описывать следующие процессы: течение суспензии с гравитационным осаждением отдельных частиц, рост осадка частиц на дне трещины, гравитационную конвекцию суспензии в целом, развитие неустойчивости Сэфмана-Тейлора на интерфейсе между жидкостями или суспензиями различной реологии. Проведена валидация относительно четырех различных наборов экспериментальных данных в ячейках Хеле-Шоу: (i) гравитационное оплыивание, (ii) неустойчивость фронта при вытеснении раствора глицерина водой, (iii) вытеснение

вязкопластической жидкости водой и гелями и (iv) осаждение частиц с ростом осадка на дне трещины.

2. Построена многомасштабная модель миграции частиц при течении разреженной суспензии в трещине гидроразрыва, включающая вывод формулы для боковой силы на одиночную частицу, миграцию частиц в начальном участке плоского канала на стадии формирования профиля Пуазейля, и миграцию осаждающихся частиц в развитом течении Пуазейля в плоском канале. С помощью полного лагранжева метода впервые получено самосогласованное решение уравнений двухфазного пограничного слоя с учетом боковой силы Сэфмана на частицу с поправкой на влияние стенки. Решения для профиля числовой плотности содержат локальные максимумы, которые являются обобщением эффекта Сегре-Зильберберга на случай инерционных частиц. Выведены осредненные 2D уравнения модели транспорта суспензии в трещине с учетом неоднородного поперечного профиля концентрации частиц, формирующегося за счет поперечной миграции частиц. Таким образом, проведено обобщение двухконтинуальной модели течения суспензии в трещине с учетом эффектов поперечной миграции частиц.
3. В приложении к течениям углеводородов в упаковке гранулированного материала в закрытой трещине при добыче построена трехконтинуальная модель фильтрации суспензии в пористой среде с учетом осаждения (захвата) и мобилизации частиц в порах, что приводит к повреждению и восстановлению проницаемости и пористости.
4. Для замыкания модели фильтрации суспензии впервые в широком диапазоне пористости получена степенная зависимость безразмерной проницаемости от пористости на основе серии расчетов 3D течения вязкой несжимаемой жидкости в упаковке несферических частиц методом решеточного уравнения Больцмана. Данная зависимость прошла верификацию относительно расчетов уравнений Навье-Стокса в

инерционном режиме фильтрации с помощью другого численного метода и валидацию на значительном наборе лабораторных данных.

5. Построена комбинированная модель для многофазных газожидкостных течений в длинных скважинах и трубопроводах, основанная на совместном применении полного многоконтинуального подхода и упрощенной модели дрейфа. Проведен анализ гиперболичности двухжидкостной модели и предложено замыкание, гарантирующее гиперболичность модели в диапазоне параметров, существенном для приложений.

Литература

Статьи в журналах из перечня ВАК, а также в изданиях на английском языке, индексируемых в системах Scopus и Web of Science:

- [1] Осипцов А.А. Автоколебания плоского фонтана при отсутствии начального затопления // Вестник Московского университета, Сер. 1. Математика. Механика. 2005. Т. 60. №2. С. 59-62.
- [2] Osipov A.A., Asmolov E.S. Asymptotic model of the inertial migration of particles in a dilute suspension flow through the entry region of a channel // Phys. Fluids, 2008. V. 20, N1–2, 123301, P. 1-15.
- [3] Asmolov E.S., Osipov A.A. The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // Phys. Fluids, 2009. V. 21, 063301, P. 1-9.
- [4] Асмолов Е.С., Лебедева Н.А., Осипцов А.А. Инерционная миграция осаждающихся частиц при течении суспензии в ячейке Хеле-Шоу // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 3. С. 85-101.
- [5] Боронин С.А., Осипцов А.А. Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 6. С. 758-761.
- [6] Krasnopol'sky B.I., Starostin A.B., and Osipov A.A., Multi-fluid pipe flow model for analysis of wellbore dynamics // AIP Conference Proceedings, 2012. V. 1479, Issue 1, P. 99-103. DOI: 10.1063/1.4756072.

- [7] Starostin A.B., Osiptsov A.A. and Krasnopol'sky B.I., Modelling multiphase flows in a wellbore using multi-fluid approach // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition Proceedings (IMECE), 2012. V. 7, P. 2429-2435. DOI: 10.1115/IMECE2012-86253.
- [8] Spesivtsev P.E., Sinkov K.F., and Osiptsov A.A., Comparison of drift-flux and multi-fluid approaches to modeling of multiphase flow in oil and gas wells // WIT Transactions on Engineering Sciences, 2013. V. 79, P. 89-99. DOI: 10.2495/MPF130081.
- [9] Boronin S.A., Osiptsov A.A., and Desroches J., Flows of particle-laden Bingham fluids in a Hele-Shaw cell // WIT Transactions on Engineering Sciences, 2013. V. 79, P.135–146. DOI: 10.2495/MPF130121.
- [10] Theuveny B., Mikhailov D., Osiptsov, A. A., et al., Integrated approach to simulation of near-wellbore and wellbore cleanup // Proceedings - SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2013. V. 7, P. 5100-5127. SPE paper 166509-MS. DOI: 10.2118/166509-MS.
- [11] Krasnopol'sky B.I., Starostin A.B., Spesivtsev P.E., Shaposhnikov D., and Osiptsov, A.A., Combined multi-fluid and drift-flux approaches for analysis of pipe flows // AIP Conference Proceedings, V. 1558, 2013, P. 240-244. DOI: 10.1063/1.4825465.
- [12] Боронин С.А., Осицлов А.А. Влияние миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 2. С. 80-94.
- [13] Осицлов А.А., Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е. Обоснование модели дрейфа для двухфазных течений в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 5. С. 60-73.

- [14] Sinkov K. F., Spesivtsev P. E., Osipov A. A. Simulation of particles transport in multiphase pipe flow for cleanup of oil and gas wells // Proceedings – 19th International Conference on Hydrotransport. Colorado, USA, 24 - 26, September 2014. — BHR Group Limited. — P. 5–16.
- [15] Boronin S.A., Osipov A.A. and Desroches J. Displacement of yield-stress fluids in a fracture // Int. J. Multiphase Flow, 2015. V. 76, P. 47–63.
- [16] Боронин С.А., Осипцов А.А., Толмачева К.И. Многоконтинуальная модель фильтрации суспензии в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 50-62.
- [17] Жибаев В.Д., Лебедева Н.А., Осипцов А.А., Синьков К.Ф. О гиперболичности одномерных моделей нестационарного двухфазного течения в трубопроводе // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 1. С. 55-68.
- [18] Krasnopol'sky B.I., Starostin A.B., and Osipov A. A. Unified graph-based multi-fluid model for gas-liquid pipeline flows // Computers & Mathematics with Applications Journal, 2016. V. 72(5), P. 1244-1262.
- [19] Osipov A.A., et al., Insights on overflushing strategies from a novel modeling approach to displacement of yield-stress fluids in a fracture // Proceedings - SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2016. P. 1-18. DOI: 10.2118/181454-MS.
- [20] Osipov A.A. Hydraulic fracture conductivity: effects of non-spherical proppant from lattice-Boltzmann simulations and lab tests // Advances in Water Resources, 2017, V. 104, pp. 293-303. DOI: 10.1016/j.advwatres.2017.04.003.
- [21] Osipov A.A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review // Journal of Petroleum Science & Engineering, 2017 (published online May 22). DOI: 10.1016/j.petrol.2017.05.019.

- [22] Tolmacheva K.I., Boronin S.A., Osipov A.A. Multi-fluid model for suspension filtration in porous media: effects of particle trapping and mobilization // WIT Transactions on Engineering Science, 2017 (accepted, to appear).
- [23] Osipov A.A., A new permeability-porosity correlation for granular packs of non-spherical particles, from LBM simulations and lab tests // Proceedings – 79th EAGE Conference & Exhibition. 2017, June 11-15, Paris France. European Association of Geoscientists and Engineers. P. 1-4. DOI: 10.3997/2214-4609.201701436.
- [24] Osipov A.A., Boronin S.A., Desroches J. Modeling of the displacement of yield-stress suspensions in a hydraulic fracture // Proceedings – 79th EAGE Conference & Exhibition. 2017, June 11-15, Paris France. European Association of Geoscientists and Engineers. P. 1-4. DOI: 10.3997/2214-4609.201701325.

Статьи в трудах конференций:

- [25] Spesivtsev P.E., Sinkov K.F., and Osipov A.A., The Hyperbolic Nature of a System of Equations Describing Three-Phase Flows in Wellbores // In 14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery 2014, ECMOR 2014; Catania; Italy; 8-11 September, 2014. Article number A20.
- [26] Осипцов А.А., Толмачева К.И., Боронин С.А., Ситников А.Н., Яковлев А.А., Белозеров Б.В., Галеев Р.Р., Моделирование фильтрации супензий в пористой среде в окрестности нагнетательных скважин // Тезисы докладов Юбилейной конференции Национального комитета РАН по тепло- и массообмену “Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена” и XXI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под рук-вом акад. РАН А.И. Леонтьева “Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках” (22–26 мая

2017 г., Санкт-Петербург, Россия): В 2 т. Т. 1. С. 255-256. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. – 306 С.

- [27] Osipov A.A. On the multi-fluid approach to multiphase flow modeling in hydraulic fracturing applications // In *XLV International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*, June 22-26, St. Petersburg, Russia.
- [28] Boronin S.A., Osipov A.A., Desroches J. Flow of viscoplastic suspensions in a hydraulic fracture: implications to overflush // In *XLV International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*, June 22-26, St. Petersburg, Russia.
- [29] Tolmacheva K.I., Boronin S.A., Osipov A.A., Galeev R.R., Belozerov B.V., Yakovlev A.A., Sitnikov A.N. Multi-fluid modelling of suspension filtration in the near-wellbore zone of injection wells // In *XLV International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*, June 22-26, St. Petersburg, Russia.

Тезисы конференций:

- [30] Osipov A.A., Asmolov E.S., Evolution of the particle concentration profile in a dilute suspension flow through the entry region of a channel // Book of Abstr. EUROMECH Fluid Mechanics Conf., Manchester, UK, September 14-18, 2008, p. 252.
- [31] Lebedeva N.A., Osipov A.A., Asmolov E.S., Horizontal flow of a dilute suspension through a vertical slot with porous walls // In Book of Abstr. Conf. Lomonosov readings, Lomonosov Moscow State University, April 14-16, 2009.
- [32] Lebedeva N.A., Osipov A.A., Asmolov E.S., Inertial migration of settling particles in a horizontal suspension flow through a vertical plane channel //

In Book of Abstr. Conf. Contemporary problems of gas and wave dynamics, Lomonosov Moscow State University, April 21-23, 2009. p. 60.

- [33] Osipov A.A., Boronin S. A., Two-continua model of suspension flow through a vertical slot // Book of Abstr. EUROMECH Fluid Mechanics Conf., Bad Reichenhall, Germany, September 13-16, 2010, S5-44.
- [34] Osipov A.A., Starostin A.B., Krasnopol'sky B.I., Development of a multi-fluid model for multiphase flows in oil and gas wells during cleanup // 9th EFMC, Italy, Rome, September 9-13, 2012.
- [35] Spesivtsev P.E., Sinkov K.F., Osipov A.A., Modeling of Wellbore Phase Segregation During Shut-in Using the Drift-Flux Model // In Book of Abstr., the 8th International Conference on Multiphase Flow, ICMF 2013, Jeju, Korea, May 26 - 31, 2013.
- [36] Boronin S.A., Osipov A.A., and Desroches J., Displacement of Bingham Suspensions in a Slot // In Book of Abstracts, Euromech Fluid Mechanics Conference 10. Technical University of Copenhagen, Denmark. 14-18 September 2014. P. 144.
- [37] Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А. Моделирование пробкового режима двухфазного течения, вызванного геометрией трубопровода // Сборник тезисов конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». — г. Звенигород, МО: 2014. — 25 февраля – 4 марта. — С. 222–225.
- [38] Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А. Развитие модели течения суспензии в трубопроводах с учетом образования осадка // XVII школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики». — г. Сочи, пансионат «Буревестник» МГУ им. М. В. Ломоносова: 2014. — 20 – 30 августа. — С. 100–101.

- [39] Зилонова Е.М., Осипцов А.А., Боронин С.А. Взаимодействие эффектов пальцевидной неустойчивости и гравитационной конвекции при вытеснении жидкостей с пределом текучести в ячейке Хеле-Шоу // Сборник тезисов конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». — г. Звенигород, МО: 14-25 февраля, 2016.
- [40] Осипцов А.А., Зилонова Е.М., Боронин С.А, Развитие моделей вытеснения суспензий в трещинах гидроразрыва с учетом плотной упаковки частиц и их мобилизации // Тезисы конференции "Современные проблемы гидроаэромеханики Пансионат Буревестник МГУ, 20-30 августа, 2016. С. 27.
- [41] Осипцов А.А. Моделирование транспорта частиц в скважинах и трещинах // Сборник тезисов, V международная научно-техническая конференция "Проблемы и опыт разработки трудноизвлекаемых запасов нефтегазоконденсатных месторождений Санкт-Петербургский Горный Университет, 22-24 ноября, 2016.

Патенты:

- [42] Боронин С.А., Осипцов А.А. Способ гидроразрыва малопроницаемого подземного пласта // Патент РФ N 2 402 679 от 14.10.2008.
- [43] Коротеев Д.А., Осипцов А.А., Способ гидроразрыва пласта // Патент РФ N 2 464 417 от 21.12.2010.
- [44] Osipcov A. A., Medvedev O. O., Willberg D. Hydraulic fracture height growth control // Патентная заявка 20110272159 США. – 2011. (U.S. Patent Application No. 12/998,866.)

- [45] Osipov A.A. and Boronin S.A., Method for hydraulically fracturing a low permeability subsurface formation // US patent 8,327,940 granted on 11.12.2012.
- [46] Осипцов А.А., Старостин А.Б. Способ повышения точности измерений расхода многофазной смеси // Патент РФ N 2 554 686 от 18.10.2013.
- [47] Osipov A.A., D. Koroteev D.A., Method of a formation hydraulic fracturing // US Patent 8,967,251 granted on 03 March 2015.
- [48] Кучук Ф.Д., Тевени Б., Осипцов А.А., Бутула К., Способ ориентирования трещин гидравлического разрыва в подземном пласте, вскрытом горизонтальными стволами // Патент РФ N 2 591 999 от 21.04.2015.

Список использованной литературы:

- [49] Acharya A.R. Particle transport in viscous and viscoelastic fracturing fluids // SPE Production Engineering, 1986. V. 1(02), P. 104-110.
- [50] Acrivos A., Herbolzheimer E. Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 435-457.
- [51] Davis R.H., Acrivos A. Sedimentation of noncolloidal particles at low Reynolds numbers // Annual Review of Fluid Mechanics. 1985. V. 17(1). P. 91-118.
- [52] Leighton D., Acrivos A. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions // Journal of Fluid Mechanics. 1987. V. 181. P. 415-439.
- [53] Aksakov A.V., Borshchuk O.S., et al. Corporate fracturing simulator: from a mathematical model to the software development // Oil Industry. 2016. V. 11. P. 35-40.

- [54] Asgian M.I., Cundall P.A., Brady B.H.G. The mechanical stability of propped hydraulic fractures: a numerical study // Journal of Petroleum Technology. 1995. V. 47(03). P. 203-208.
- [55] Asmolov E.S. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 1999. V. 381. P. 63-87.
- [56] Asmolov E.S. Dynamics of a spherical particle in a laminar boundary layer // Fluid Dynamics. 1990. V. 25(6). P. 886-890.
- [57] Barree R.D. A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media // In SPE Reservoir Simulation Symposium. 1983. Paper SPE 12273.
- [58] Barree R.D., Conway M.W. Experimental and numerical modeling of convective proppant transport // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. 1994. Paper SPE 28564.
- [59] Barree R.D., Mukherjee H. Determination of pressure dependent leakoff and its effect on fracture geometry // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. 1996. Paper SPE 36424.
- [60] Bautista F., Soltero J.F.A., Perez-Lopez J.H., Puig J.E., Manero O. On the shear banding flow of elongated micellar solutions // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000. V. 94(1). P. 57-66.
- [61] Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // Int. J. of Rock Mech. and Mining Sci. 2007. V. 44(1). P. 739-757.
- [62] Bai M., Green S., Suarez-Rivera R. Effect of leakoff variation on fracturing efficiency for tight shale gas reservoirs // In Alaska Rocks 2005, The 40th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS). American Rock Mechanics Association. 2005. Paper ARMA-05-697.

- [63] Barbati A. C., Desroches J., Robisson A., McKinley G. H. Complex Fluids and Hydraulic Fracturing // Annual review of chemical and biomolecular engineering. 2016. V. 7. V. 415-453.
- [64] Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // Journal of fluid mechanics. 1972. V. 52(02). P. 245-268.
- [65] Batchelor G.K. The effect of Brownian motion on bulk stress in a suspension of spherical particles // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. P. 97-117.
- [66] Bazilevskii A.V., Koroteev D.A., Rozhkov A.N., Skobeleva A.A. Sedimentation of particles in shear flows of viscoelastic fluids // Fluid Dynamics. 2010. V. 45(4). P. 626-637.
- [67] Bazilevsky A.V., Kalinichenko V.A., Plyashkevich V.A., Badazhkov D.V., Rozhkov A.N. Sedimentation of particles in shear flows of fluids with fibers // Rheologica Acta. 2016. V. 55(1). P. 11-22.
- [68] Bochkarev A., Budennyy S., Nikitin R., Mitrushki D. Pseudo-3D Hydraulic Fracture Model with Complex Mechanism of Proppant Transport and Tip Screen Out // In ECMOR XV-15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. 2016. DOI: 10.3997/2214-4609.201601775.
- [69] Boyer F., Guazzelli E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology // Physical Review Letters. 2011. V. 107(18). P. 188301.
- [70] Carter R.D. Derivation of the General Equation for Estimating the Extent of the Fractured Area // Appendix I of Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension, Drilling and Production Practice, G.C. Howard and C.R. Fast, New York, New York, USA, American Petroleum Institute. 1957. P. 261–269.
- [71] Cassar C., Nicolas M., Pouliquen O. Submarine granular flows down inclined planes // Physics of Fluids. 2005. V. 17(10). P. 103301.

- [72] Chekhonin E., Levonyan K. Hydraulic fracture propagation in highly permeable formations, with applications to tip screenout // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2012. V. 50. P. 19-28.
- [73] Clifton R.J., Wang J.J. Multiple fluids, proppant transport, and thermal effects in three-dimensional simulation of hydraulic fracturing // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. 1988. Paper SPE 18198.
- [74] Coussot P. Saffman-Taylor instability in yield-stress fluids // J. Fluid Mech. 1999. V. 380. P. 363-376.
- [75] Cox R. G., Brenner H. The lateral migration of solid particles in Poiseuille flow. I. Theory. // Chem. Eng. Sci. 1968. V. 23. P. 147–173.
- [76] Cox R.G., Hsu S.K., The lateral migration of solid particles in a laminar flow near a plane // International Journal of Multiphase Flow. 1977. V. 3(3). P. 201-222.
- [77] Crockett A.R., Okusu N.M., Cleary M.P. A complete integrated model for design and real-time analysis of hydraulic fracturing operations // In SPE California Regional Meeting. 1986. Paper SPE 15069.
- [78] Cleary M.P., Barr D.T., Willis R.M. Enhancement of real-time hydraulic fracturing models with full 3-D simulation // In SPE Gas Technology Symposium. 1988. Paper SPE 17713.
- [79] Detournay E. Mechanics of hydraulic fractures // Annual Review of Fluid Mechanics. 2016. V. 48. P. 311-339.
- [80] Dogon D., Golombok M. Wellbore to fracture proppant-placement-fluid rheology // Journal of Unconventional Oil and Gas Resources. 2016. V. 14. P. 12-21.
- [81] Dontsov E.V., Peirce A.P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. 2014. V. 760. P. 567-590.

- [82] Dontsov E.V., Peirce A.P. A new technique for proppant schedule design // *Hydraul. Fract. J.* 2014. V. 1(3). P. 1-8.
- [83] Dontsov E.V., Peirce A.P. Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in KGD and P3D models // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 63. P. 206-218.
- [84] Economides M.J., Nolte K.G. *Reservoir Stimulation*. Third Edition. Wiley, 2000.
- [85] Einstein A. A new method of determining molecular dimensions // *Annu. Phys.* 1906. V. 19. P. 289-306.
- [86] Engels J.N., Martinez E., Fredd C.N., Boney C.L., Holms B.A. A Mechanical Methodology of Improved Proppant Transport in Lowviscosity Fluids: Application of a Fiber-assisted Transport Technique in East Texas // In *SPE Eastern Regional Meeting*. 2004. Paper SPE 91434.
- [87] Ентов В.М., Гливенко Е.В. Механика сплошной среды и её применение в газонефтедобыче. // М., «Недра», 2008. 208 с.
- [88] Eskin D., Miller M.J. A model of non-Newtonian slurry flow in a fracture // *Powder Technology*. 2008. V. 182(2). P. 313-322.
- [89] Frankel N.A., Acrivos A. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres // *Chemical Engineering Science*. 1967. V. 22(6). P. 847-853.
- [90] Ferrini F., Ercolani D., Cindio B.D., Nicodemo L., Nicolais L., Ranaudo S. Shear viscosity of settling suspensions // *Rheol. Acta*. 1979. V. 18(2). P. 289-296.
- [91] Bivins C.H., Boney C., Fredd C., Lassek J., Sullivan P., Engels J., Fielder E.O., Gorham T., Judd T., Mogollon A.E.S., Tabor L. New fibers for hydraulic fracturing // *Science*. 2002. V. 83(2). P. 660-686.

- [92] Gadala-Maria F., Acrivos A. Shearinduced structure in a concentrated suspension of solid spheres // J. Rheol. 1980. V. 24(6). P. 799–814
- [93] Gidaspow D. Multiphase flow and fluidization: continuum and kinetic theory descriptions. Academic press. 1994.
- [94] Gillard M.R., Medvedev O.O., Hosein P.R., Medvedev A., Penacorada F., Huteau E. A New Approach to Generating Fracture Conductivity // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. 2010. SPE 135034.
- [95] Goel N., Shah S.N. Experimental investigation of proppant flowback phenomena using a large scale fracturing simulator // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1999. Paper SPE 56880.
- [96] Gruesbeck C., Collins R.E. Particle transport through perforations // Society of Petroleum Engineers Journal. 1982. V. 22(06). P. 857-865.
- [97] Garside J., Al-Dibouni M.R. Velocity-voidage relationships for fluidization and sedimentation in solid-liquid systems // Industrial & engineering chemistry process design and development. 1977. V. 16(2). P. 206-214.
- [98] Gu H., Siebrits E. On the numerical solution of hyperbolic proppant transport problems // In Proceedings of the 10-th international conference on hyperbolic problems: theory, numerics and applications, Osaka, Japan, September 13–17, 2004.
- [99] Gu, H. and Desroches, J., 2003, January. New pump schedule generator for hydraulic fracturing treatment design. In SPE Latin American and Caribbean petroleum engineering conference. Society of Petroleum Engineers.
- [100] Guo J., Ma J., Zhao Z., Gao Y. Effect of fiber on the rheological property of fracturing fluid // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2015. V. 23. P. 356-362.

- [101] Harper E. Y., Chang I-D. Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 209.
- [102] Hawksley P.G.W. The effect of concentration on the settling of suspensions and flow through porous media // In: Some Aspects of Fluid Flow. London, Edward Arnold. 1951. P. 114-135.
- [103] Hammond P.S. Settling and slumping in a Newtonian slurry, and implications for proppant placement during hydraulic fracturing of gas wells // Chem. Eng. Sci. 1995. V. 50(20). P. 3247.
- [104] Ho B.P., Leal L.G. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows // Journal of fluid mechanics. 1974. V. 65(02). P. 365-400.
- [105] Ho B.P., Leal L.G. Migration of rigid spheres in a two-dimensional unidirectional shear flow of a second-order fluid // Journal of Fluid Mechanics. 1976. V. 76(04). P. 783-799.
- [106] Hogg A.J. The inertial migration of non-neutrally buoyant spherical particles in two-dimensional shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1994. V. 272. P. 285-318.
- [107] Howard G.C., Fast C.R. Hydraulic Fracturing, Vol. 2, Monograph (Society of Petroleum Engineers of AIME), Henry L. Doherty Series. New York: Soc. Pet. Eng. 1970.
- [108] Schonberg J.A., Hinch E.J. Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow // Journal of Fluid Mechanics. 1989. V. 203. P. 517-524.
- [109] Hu H.H., Joseph D.D., Crochet M.J. Direct simulation of fluid particle motions // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1992. V. 3(5). P. 285-306.
- [110] Klinkenberg L.J. The permeability of porous media to liquids and gases // Presented at Drill. Prod. Pract., 1941. Jan. 1, New York.

- [111] Krieger I.M., Dougherty T.J. A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres // Trans. Soc. Rheol. 1959. V. 3. P. 137–152.
- [112] Krieger I.M. Rheology of monodisperse lattices // Adv. Colloid Interface Sci. 1972. V. 3. P. 111-136.
- [113] Landel R.F., Moser B.G., Bauman A. Rheology of Concentrated Suspensions: Effect of a Surfactant // In Proceeding of the Fourth International Congress of Rheology, Providence, Rhode Island, USA, 1963(Pt. 2). P. 663-692.
- [114] Mack M.G., Warpinski N.R. Mechanics of Hydraulic Fracturing // In Economides M.J. and Nolte, K.G. (eds.), Reservoir Stimulation, Chichester: Wiley. 2000.
- [115] Matas J.P., Morris J.F., Guazzelli E. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow // Journal of Fluid Mechanics. 2004. V. 515. P. 171-195.
- [116] Matas J.P., Morris J.F., Guazzelli E. Lateral forces on a sphere // Oil & gas science and technology. 2004. V. 59(1). P. 59-70.
- [117] Matas J.P., Glezer V., Guazzelli E., Morris J.F. Trains of particles in finite-Reynolds-number pipe flow // Physics of Fluids. 2004. V. 16(11). P. 4192-4195.
- [118] Matas J.P., Morris J.F., Guazzelli E. Lateral force on a rigid sphere in large-inertia laminar pipe flow // Journal of Fluid Mechanics. 2009. V. 621. P. 59-67.
- [119] Miller M.J. Schlumberger Technology Corporation. Well Treatment // U.S. Patent Application 14/016,571. 2013.
- [120] McLaughlin J. B. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows // J. Fluid Mech. 1991. V. 224. P. 261–274.

- [121] McLaughlin J.B. The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1993. V. 246. P. 249-265.
- [122] McClure M.W., Kang C.A. A Three-Dimensional Reservoir, Wellbore, and Hydraulic Fracturing Simulator that is Compositional and Thermal, Tracks Proppant and Water Solute Transport, Includes Non-Darcy and Non-Newtonian Flow, and Handles Fracture Closure // In SPE Reservoir Simulation Conference. Society of Petroleum Engineers. 2017. Paper SPE 182593.
- [123] Metzger B., Nicolas M., Guazzelli E. Falling clouds of particles in viscous fluids // Journal of Fluid Mechanics. 2007. V. 580. P. 283-301.
- [124] Meyer B.R. Three-Dimensional Hydraulic Fracturing Simulation on Personal Computers: Theory and Comparison Studies, paper SPE 19329, Oct., 1989.
- [125] Meyer B.R., Cooper G.D., Nelson S.G. Real-time 3-D hydraulic fracturing simulation: theory and field case studies // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. Paper SPE 20658. 1990.
- [126] Milton-Tayler D., Stephenson C., Asgian M.I. Factors affecting the stability of proppant in propped fractures: results of a laboratory study // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1992. Paper SPE 24821.
- [127] Morris J.P., Schlumberger Technology Corporation. Method for performing a stimulation operation with proppant placement at a wellsite // U.S. Patent Application 14/460,654. 2014.
- [128] Morris J.P., Chochua G.G., Bogdan A.V. An efficient non-Newtonian fluid flow simulator for variable aperture fractures // The Canadian Journal of Chemical Engineering. 2015. V. 93(11). P. 1902-1915.

- [129] Nott P.R., Brady J.F. Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 275. P. 157-159.
- [130] Lecampion B., Garagash D.I. Confined flow of suspensions modelled by a frictional rheology // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. V. 759. P. 197-235.
- [131] Oh S., Song Y.Q., Garagash D.I., Lecampion B., Desroches J. Pressure-driven suspension flow near jamming // *Physical review letters*. 2015. V. 114(8). P. 088301.
- [132] Lebedeva N.A., Asmolov E.S. Migration of settling particles in a horizontal viscous flow through a vertical slot with porous walls // *Int. J. of Multiphase Flow*. 2011. V. 37(5). P. 453–461.
- [133] Liapidevskii, V.Y. and Tikhonov, V., 2016, June. Lagrangian approach to modeling unsteady gas-liquid flow in a well. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 722, No. 1, p. 012026). IOP Publishing.
- [134] Chesnokov, A. and Liapidevskii, V., 2017. Viscosity-stratified flow in a Hele-Shaw cell. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 89, pp.168-176.
- [135] Ляпидевский В.Ю., Тихонов В.С. Уравнения модуляций для снарядного режима течения в вертикальном канале // *Доклады РАН. Механика*. 2017 Т. 472. N4. С. 407-411.
- [136] Logvinov O.A., Ivashnyov O.E., Smirnov N.N. Evaluation of viscous fingers width in Hele-Shaw flows // *Acta Astronautica*. 2010. V. 67(1). P. 53-59.
- [137] Logvinov O.A. Stability of the lateral surface of viscous fingers formed when a fluid is displaced from a Hele-Shaw cell // *Moscow University Mechanics Bulletin*. V. 66(2). P. 25-31.
- [138] Logvinov O.A. Averaged equations in a Hele-Shaw cell: Hierarchy of models // *Acta Astronautica*. 2016. V. 123. P. 103-108.

- [139] Logvinov O.A., Malashin A.A. Generalized Navier–Stokes–Darcy model // European Journal of Mechanics-B/Fluids. 2017. V. 63. P. 100-105.
- [140] Maron S.H., Pierce P.E. Application of Ree-Eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles // Journal of colloid science. 1956. V. 11(1). P. 80-95.
- [141] McGeary R.K. Mechanical packing of spherical particles // J. Am. Ceram. Soc. 1961. V. 44(10). P. 513–522.
- [142] Nicodemo L., Nicolais L., Landel R.F. Shear rate dependent viscosity of suspensions in Newtonian and non-Newtonian liquids // Chemical Engineering Science. 1974. V. 29(3). P. 729-735.
- [143] Novotny E.J. Proppant transport // In SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1977. Paper SPE 6813.
- [144] Medvedev A.V., Kraemer C.C., Pena A.A., Panga M.K.R. On the mechanisms of channel fracturing // In SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Society of Petroleum Engineers. 2013. Paper SPE 163836.
- [145] McCaffery S. J., Elliott L., Ingham D. B. Enhanced Sedimentation In Inclined Fracture Channels // Topics in Engineering. 1997. V. 32. CD ROM ISBN 1-85312-546-6.
- [146] Nevskii Yu. A., Osipov A. N. Modeling gravitational convection in suspensions // Technical Physics Letters. 2009. V. 35. Issue 4. P. 340-343.
- [147] Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 65-81.
- [148] Pearson J. R. A. On suspension transport in a fracture: framework for a global model // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1994. V. 54. P. 503-513.

- [149] Phillips R.J., Armstrong R.C., Brown R.A., Graham A.L., Abbott J.R. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1992. V. 4(1). P. 30-40.
- [150] Poiseuille J. Observations of blood flow // Ann Sci Nat STrie. 1836. V. 5(2).
- [151] Potapenko D.I., Brown J.E., Lafferty T. Schlumberger Technology Corporation. Well treatment // U.S. Patent Application 14/891,172. 2014.
- [152] Proudman I., Pearson J.R.A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1957. V. 2(03). P. 237-262.
- [153] Larson R.G. The structure and rheology of complex fluids (Vol. 150). New York: Oxford university press. 1999.
- [154] Richardson J.F., and Zaki W.N. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow // Chemical Engineering Science. 1954. V. 3(2). P. 65-73.
- [155] Romero J., Mack M.G., Elbel J.L. Theoretical model and numerical investigation of near-wellbore effects in hydraulic fracturing // In SPE annual technical conference and exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1995. Paper SPE 30506.
- [156] Roscoe R. The viscosity of suspensions of rigid spheres // Brit. J. Appl. Phys. 1952. V. 3. P. 267.
- [157] Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // Journal of Fluid Mechanics. 1961. V. 11(03). P. 447-459.

- [158] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1958. V. 245. N1242. P. 312-329.
- [159] Saffman P.G.T. The lift on a small sphere in a slow shear flow // Journal of fluid mechanics. 1965. V. 22(02). P. 385-400. Saffman P. G. 1968 Corrigendum // J. Fluid Mech. V. 31. P. 624.
- [160] Schook C.A., Roco M.C. Slurry Flow. Butterworth-Heinemann, Oxford. 1991.
- [161] Scott K.J. Hindered settling of a suspension of spheres: Critical evaluation of equations relating settling rate to mean particle diameter and suspension concentration. Council for Scientific and Industrial Research. 1984.
- [162] Segre G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow Part 2. Experimental results and interpretation // Journal of Fluid Mechanics. 1962. V. 14(01). P. 136-157.
- [163] Settari A. General model of fluid flow (leakoff) from fractures induced in injection operations // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1988. Paper SPE 18197.
- [164] Gadde P.B., Liu Y., Norman J., Bonnecaze R., Sharma M.M. Modeling proppant settling in water-fracs // In SPE annual technical conference and exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004.
- [165] Malhotra S., Sharma M.M. A General Correlation for Proppant Settling in VES Fluids // In SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Society of Petroleum Engineers. 2011. Paper SPE 139581.
- [166] Malhotra S., Sharma M.M. Settling of spherical particles in unbounded and confined surfactant-based shear thinning viscoelastic fluids: An

experimental study // Chemical engineering science. 2012. V. 84. P. 646-655.

- [167] Malhotra S., Lehman E.R., Sharma M.M. Proppant placement using alternate-slug fracturing // SPE Journal. 2014. V. 19(05). P. 974-985.
- [168] Blyton C. A. J., Sharma M. M. Particle transport of non-dilute suspensions in branched slots // Int. J. of Multiphase Flow. 2017. Submitted for review.
- [169] McClure M., Babazadeh M., Shiozawa S., Huang J. Fully coupled hydromechanical simulation of hydraulic fracturing in three-dimensional discrete fracture networks // In SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Society of Petroleum Engineers. 2015. Paper SPE 173354.
- [170] Shiozawa S., McClure M. Simulation of proppant transport with gravitational settling and fracture closure in a three-dimensional hydraulic fracturing simulator // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2016. V. 138. P. 298-314.
- [171] Siebrits E., Gu H., Desroches J. An improved pseudo-3D hydraulic fracturing simulator for multiple layered materials // Computer Methods and Advances in Geomechanics. 2001. P. 1341-1345.
- [172] Siebrits E., Peirce A.P. An efficient multi-layer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002. V. 53(3). P. 691-717.
- [173] Thomas D.G. Transport characteristics of suspension: VIII. A note on the viscosity of Newtonian suspensions of uniform spherical particles// Journal of Colloid Science. 1965. V. 20(3). P. 267-277.
- [174] Stickel J.J., Powell R.L. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. V. 37. P. 129-149.

- [175] Suarez-Rivera R., Behrmann L.A., Green S., Burghardt J., Stanchits S., Edelman E., Surdi A. Defining three regions of hydraulic fracture connectivity, in unconventional reservoirs, help designing completions with improved long-term productivity // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2013. Paper SPE 166505.
- [176] Taylor G.I. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe // Pr. R. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 223(1155). P. 446-468.
- [177] Tehrani M.A. An experimental study of particle migration in pipe flow of viscoelastic fluids // Journal of Rheology. 1996. V. 40(6). P. 1057-1077.
- [178] Torquato S., Truskett T.M., Debenedetti P.G. Is random close packing of spheres well defined? // Physical review letters. 2000. V. 84(10). P. 2064.
- [179] Unwin A.T., Hammond P.S. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // In SPE Western Regional Meeting. Society of Petroleum Engineers. 1995. Paper SPE 29649.
- [180] Weng X., Kresse O., Chuprakov D., Cohen C.E., Prioul R., Ganguly U. Applying complex fracture model and integrated workflow in unconventional reservoirs // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2014. V. 124, P. 468-483.
- [181] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // Doklady Physics. 2004. V. 49. N5. P. 328-331.
- [182] Urmancheev S.F., Kireev V.N., Khizbulina S.F. Numerical simulation of thermoreversible polymer gel filtration // International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering. 2009. V. 3(10). P. 1342-1344.
- [183] Van der Vlis A.C., Haafkens R., Schipper B.A., Visser W. Criteria for proppant placement and fracture conductivity // In Fall Meeting of the

Society of Petroleum Engineers of AIME. Society of Petroleum Engineers. 1975.

- [184] Vasseur P., Cox R.G. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1976. V. 78(02). P. 385-413.
- [185] Williams B.B. Fluid loss from hydraulically induced fractures // Journal of Petroleum Technology. 1970. V. 22(07). P. 882-888.
- [186] Xu W., Thiercelin M.J., Ganguly U., Weng X., Gu H., Onda H., Sun J., Le Calvez J. Wiremesh: a novel shale fracturing simulator // In International Oil and Gas Conference and Exhibition in China. Society of Petroleum Engineers. 2010. Paper SPE 132218.
- [187] Xu W. Modeling Gas Transport in Shale Reservoir-Conservation Laws Revisited // In SPE/AAPG/SEG Unconventional Resources Technology Conference. Society of Petroleum Engineers. 2014. Paper SPE 1924016.
- [188] Zhang G., Gutierrez M., Li M. A coupled CFD-DEM approach to model particle-fluid mixture transport between two parallel plates to improve understanding of proppant micromechanics in hydraulic fractures // Powder Technology. 2017. V. 308. P. 235-248.
- [189] Zhang G., Gutierrez M., Li M. Numerical simulation of transport and placement of multi-sized proppants in a hydraulic fracture in vertical wells // Granular Matter. 2017. V. 19(2). P. 32.
- [190] Желтов Ю.П., Христианович С.А. О механике гидравлического разрыва нефтеносного пласта//Изв. АН СССР, ОТН.— 1955.— № 5.— С. 3–41.
- [191] Христианович, С.А., Желтов, Ю.П., Баренблatt, Г.И., О механизме гидравлического разрыва пласта // Нефтяное хозяйство, 1957. N1, С. 44-53.

- [192] Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкостей и газа. – Москва: Недра, 1972. – 288 с.
- [193] Ентов В.М., Гливенко Е.В. Механика сплошной среды и её применение в газонефтедобыче. // М., «Недра», 2008. 208 с.
- [194] Боронин С.А. Исследование устойчивости течения суспензии в плоском канале с учетом конечной объемной доли частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2008. N 6. С. 40–53.
- [195] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М: Наука, 1987.
- [196] Walton I. C., Bittleston S. H. The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 39-60.
- [197] Bittleston S.H., Hassager O. Flow of viscoplastic fluids in a rotating concentric annulus // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1992. V. 42. P. 19–36.
- [198] Bittleston S.H., Ferguson J., Frigaard I.A. Mud removal and cement placement during primary cementing of an oil well. Laminar non-Newtonian displacements in an eccentric annular Hele-Shaw cell // Journal of Engineering Mathematics. 2002. V. 43(2-4). P. 229-253.
- [199] Tehrani A., Ferguson J., Bittleston S.H. Laminar Displacement in Annuli: A Combined Experimental and Theoretical Study // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 4-7 October 1992, Washington, D.C. Paper SPE 24569.
- [200] Tehrani M. A., Bittleston S. H., Long P. J. G. Flow instabilities during annular displacement of one non-Newtonian fluid by another // Experiments in Fluids. 1993. V. 14(4). P. 246-256.
- [201] Allouche M., Frigaard I. A., Sona G. Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel // J. Fluid Mech. 2000. V. 424. P. 243–277.

- [202] Amadei B., Savage W.Z. An analytical solution for transient flow of Bingham viscoplastic materials in rock fractures // Int. J. of Rock Mech. & Mining Sci. 2001. V. 38. P. 285–296.
- [203] Frigaard I. A. Stratified exchange flows of two Bingham fluids in an inclined slot // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1998. V. 78. P. 61–87.
- [204] Frigaard I. A., Howison S. D., Sobey I. J. On the stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid // J. Fluid Mech. 2010. V. 263. P. 133–150.
- [205] Frigaard I. A., Ryan D. P. Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2004. V. 123. P. 67–83.
- [206] Frigaard I. A., Nouar C. On the usage of viscosity regularization methods for visco-plastic fluid flow computation // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2005. V. 127. P. 1–26.
- [207] Fusi L., Farina A., Rosso F. Flow of a Bingham-like fluid in a finite channel of varying width: A two-scale approach // J. of Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. V. 177–178. P. 76–88.
- [208] Homsy G. M. Viscous fingering in porous media // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 271–311.
- [209] McLean J. W., Saffman P. G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 455–469.
- [210] Smirnov N. N., Nikitin V. F., Maximenko A., Thiercelin M., Legros J. C. Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media // Phys. Fluids. 2005. V. 17. P. 084102.
- [211] Smirnov N.N., Nikitin V.F., Dushin V.R., Maximenko A., Thiercelin M., Legros J.C. Instability in displacement of viscous fluids from porous specimens // Acta Astronautica. 2007. V. 61(7). P. 637-643.

- [212] Jeffrey R.C., Pearson J.R.A. Particle motion in laminar vertical tube flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 721–735.
- [213] Невский Ю.А., Осипцов А.Н. О роли нестационарных и “наследственных” сил в задачах гравитационной конвекции суспензий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. и механика. 2008. № 4. С. 37–40.
- [214] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd Edition, SIAM. 2003, 523 p.
- [215] Hirsch C. Numerical computation of external and internal flows. Vol. 2: Computational methods for inviscid and viscous flows, John Wiley and Son, Ltd. New York. 2000.
- [216] LeVeque R. High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow // SIAM J. Numer. Anal. 1996. V. 33. № 2. P. 627–665.
- [217] Ламб Г. Гидродинамика. М.: 1947. С. 728–729.
- [218] Marble F.E., Dynamics of dusty gases // Annual Review of Fluid Mechanics, 1970. V. 2(1), pp. 397-446.
- [219] Osiptsov A.N. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Applied Mechanics Reviews, 1997. V. 50, pp. 357-370.
- [220] Osiptsov A.N. Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274(1). P. 377-386.
- [221] Осипцов А.Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. АН СССР, МЖГ. 1980. № 4. С. 48-54.
- [222] Осипцов А. Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 46–52.

- [223] Осипцов А.Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. N 6. C. 80-87
- [224] Foster M.R., Duck P.W., Hewitt R.E. Boundary layers in a dilute particle suspension // Proc. R. Soc. A. 2006. V. 462. P. 136 – 168.
- [225] Рыбдылова О.Д. Поперечная миграция и фокусировка инерционной примеси в сдвиговых потоках : Диссертация кандидата наук / Рыбдылова О.Д.— Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2012.— С. 123.
- [226] Асмолов Е.С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. N 1. С. 66–73.
- [227] Зельдович Я., Мышкис А., Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М: Наука, 1972.
- [228] D.P. Healy and J.B. Young, Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows // Proc. R. Soc. 2005. A 461, 2197.
- [229] Michaelides E.E., Hydrodynamic force and heat/mass transfer from particles, bubbles, and drops – the Freeman scholar lecture // J. Fluids Eng. 2003. V. 125, P. 209.
- [230] Ван-Дайк М.. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [231] Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- [232] Чернышенко С.И. О среднем расстоянии между частицами в запыленном газе при наличии особенностей “размазанной” плотности среды частиц // Вестн. МГУ. Сер. матем. и механ. 1984. N 1. С. 69 – 70.

- [233] Gruesbeck C., Collins R.E. Entrainment and deposition of fine particles in porous media // SPE Journal. 1982. N 8430. P. 847-856.
- [234] Bailey L., Boek E.S., Jaques S.D.M., Boassen T., Selle O.M., Argillier J.-F., Longeron D.G. Particulate Invasion From Drilling Fluids // SPE Journal. 2000. V. 5(4). P. 412-419.
- [235] Fallah H., Sheydai S., Drilling Operation and Formation Damage // Open Journal of Fluid Dynamics. 2013. V. 3. P. 38-43.
- [236] Boek E.S., Hall C., Tardy P. M. J. Deep bed filtration modelling of formation damage due to particulate invasion from drilling fluids // Transport in Porous Media. 2012. V. 91(2). P. 479-508.
- [237] Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Издательство академии наук СССР, 1961. 213 с.
- [238] Suri A., Sharma M. Strategies for Sizing Particles in Drilling and Completion Fluids. SPE Journal. 2004. V. 1(1). P.13-23.
- [239] Guedes R.G., Al-Abduwani F., Bedrikovetsky P., Currie P.K. Deep-Bed Filtration Under Multiple Particle-Capture Mechanisms // SPE Journal. 2009. V. 14(3). P. 477-487.
- [240] Santos A., Bedrikovetsky P. A Stochastic Model for Particulate Suspension Flow in Porous Media // Transport in Porous Media. 2006. V. 62. P. 23-53.
- [241] Седов Л.И. Механика сплошной. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [242] Михайлов Н.Н. Изменение физических свойств горных пород в околоскважинных зонах. М.: Недра, 1987. 152 с.
- [243] Van Der Hoef M. A., Beetstra R., Kuipers J. A. M. Lattice-Boltzmann simulations of low-Reynolds-number flow past mono- and bidisperse arrays

of spheres: results for the permeability and drag force // Journal of Fluid Mechanics. 2005. V. 528. P. 233- 254.

[244] Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P. Flow of Suspensions through Porous Media // Industrial and engineering chemistry. 1970. V. 62(5). P. 9-34.

[245] Heertjes P. M., Lerk C.F. The functioning of deep bed filters // Trans. Inst. Chem. Eng. 1967. V. 45. P. 124-145.

[246] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.

[247] Civan F. Reservoir Formation Damage. Gulf Professional Publishing. Elsevier Inc. 2007. 1135 c.

[248] Михайлов Д.Н., Рыжиков Н.И., Шако В.В. Комплексный экспериментальный подход к определению параметров зоны кольматации продуктивных пластов // Вестник ЦКР Роснедра. 2014. N. 1. С. 7-11.

[249] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. 640 с.

[250] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

[251] Dewan, Chenevert A model for filtration of Water-base Mud during drilling // Petrophysics. 2001.V. 42(3). P. 237-250.

[252] Чижонков Е.В. Лекции по курсу “Численные методы”. М.: Механико-математический факультет МГУ, 2006. 168 с.

[253] Coelho D., Thovert J.F., Adler P.M. Geometrical and transport properties of random packings of spheres and aspherical particles // Physical Review E. 1997. V. 55(2) P. 1959.

- [254] Mourzenko V., Thovert J.F., Vizika O., Adler P.M. Geometrical and transport properties of random packings of polydisperse spheres // Physical Review E. V. 77(6). P. 066306.
- [255] McDaniel G.A., Abbott J., Mueller F.A., Anwar A.M., Pavlova S., Nevvonen O., Parias T., Alary J. Changing the shape of fracturing: new proppant improves fracture conductivity // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2010. SPE paper 135360.
- [256] Abdelhamid M. S., Maarouf M., Kamal Y., Shaaban A., Mathur A., Yosry M., Kraemer C. Field Development Study: Channel Fracturing Technique Combined with Rod-Shaped Proppant Improves Production, Eliminates Proppant Flowback Issues and Screen-outs in the Western Desert, Egypt // In North Africa Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2013. SPE paper 164753.
- [257] Kayumov R., Klyubin A., Konchenko A., Yudin A., Khalzov A., Firsov V., Nikulshin E., Kaluder Z., Situdikov S. Channel Fracturing Enhanced by Unconventional Proppant Increases Effectiveness of Hydraulic Fracturing in Devonian Formations of Russia's Oilfields // In IPTC 2014: International Petroleum Technology Conference. 2014.
- [258] Klyubin A., Konchenko A., Parkhonyuk S., Pavlova S., Situdikov D., Ivanov A. A New Approach to Improve Fracturing in Mature Reservoirs, Case study // In SPE European Formation Damage Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2015. SPE paper 174243.
- [259] Zulhendra D.A.A.S., Nilesawa J., Emmanuel I., Tsangueu B., Makmun A. Pilot of Rod-Shaped Proppant Application to Enhance and Sustain Production from Fracturing in a Tight Formation in Beta Field // In IPA 2016 – 40th Annual Convention & Exhibition Proceedings, May 2016. Paper IPA16-519-E.

- [260] Bear J. Dynamics of fluids in porous media. Courier Corporation. 2013.
- [261] Dullien F.A. Porous media: fluid transport and pore structure. Academic press. 2012.
- [262] Bennett H. Serially deposited amorphous aggregates of hard spheres // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. P. 2727-2734.
- [263] Visscher W.M., Bolsterli M. Random packing of equal and unequal spheres in two and three dimensions // Nature. 1972. V. 239. P. 504-507.
- [264] Coelho D. Generation, geometrie et proprietes de transport de milieux granulaires, PhD thesis, Universite de Poitiers, 1996.
- [265] Jullien R., Pavlovitch A., Meakin P. Random packings of spheres built with sequential models // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. 4103-4113.
- [266] Buchalter B.J., Bradley R.M. Orientational order in random packings of ellipses // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 3046-3056.
- [267] Buchalter B.J., Bradley R.M. Orientational order in amorphous packings of ellipsoids // Europhys. Lett. 1994. V. 26. P. 159-164.
- [268] Reyes S.C., Iglesia E. Monte Carlo simulations of structural properties of packed beds // Chemical engineering science. 1991. V. 46(4). P. 1089-1099.
- [269] Coelho D., Thovert J.F., Adler P.M. Geometrical and transport properties of random packings of spheres and aspherical particles // Phys. Rev. E55. 1997. Iss. 2. P. 1959-1978.
- [270] Rong L.W., Dong K.J., Yu A.B. Lattice-Boltzmann simulation of fluid flow through packed beds of uniform spheres: Effect of porosity // Chemical Engineering Science. 2013. V. 99. P. 44-58.

- [271] Oren P.-E., Bakke S. Process based reconstruction of sandstones and prediction of transport properties // Trans. Porous Media. 2002. V. 46, P. 311-343.
- [272] Rosato A., Strandburg K.J., Prinz F., Swendsen R.H. Why the brazil nuts are on top: size segregation of particulate matter by shaking // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1038-1040.
- [273] Jodrey W.S., Tory E.M. Computer simulation of close random packing of equal spheres // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 2347-2351.
- [274] Tacher L., Perrochet P., Parriaux A. Generation of granular media // Trans. Porous Media. 1997. V. 26. P. 99-107.
- [275] Pilotti M. Generation of realistic porous media by grains sedimentation // Trans. Porous Media. 1998. V. 33. P. 257-278.
- [276] Maier R.S., Kroll D.M., Kutsovsky Y. E., Davis H. T., Bernard R.S. Simulation of flow through bead packs using lattice Boltmann method // Phys. Fluids. 1998. V. 10. N1. P. 60-74.
- [277] Magnico P. Hydrodynamic and transport properties of packed beds in small tube-to-sphere diameter ratio: pore scale simulation using an Eulerian and a Lagrangian approach // Chem. Eng. Sci. 2003. V. 58. P. 5005-5024.
- [278] Keehm Y. Computational rock physics: transport properties in porous media and applications, PhD thesis, Stanford University, 2003.
- [279] Jin G., Patzek T.W., Silin D.B. Direct prediction of the absolute permeability of unconsolidated and consolidated reservoir rock // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004. SPE paper 90084.

- [280] Zhu Y., Fox P.J., Morris J.P. A pore-scale numerical model for flow through porous media // International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. V. 23(9). P. 881-904.
- [281] Tartakovsky A.M., Meakin P. Pore scale modeling of immiscible and miscible fluid flows using smoothed particle hydrodynamics // Advances in Water Resources. V. 29(10). P. 1464-1478.
- [282] Liu M.B., Liu G.R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments // Archives of computational methods in engineering. 2010. V. 17(1). P. 25-76.
- [283] Boek E.S. Pore scale simulation of flow in porous media using lattice-Boltzmann computer simulations // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2010. Paper SPE 135506.
- [284] Hammond P.S., Unsal E. A dynamic pore network model for oil displacement by wettability-altering surfactant solution // Transport in porous media. 2012. V. 92(3). P. 789-817.
- [285] Hussain R., Mitchell J., Hammond P.S., Sederman A.J., and Johns M.L. Monitoring water transport in sandstone using flow propagators: A quantitative comparison of nuclear magnetic resonance measurement with lattice Boltzmann and pore network simulations // Advances in Water Resources. 2013. V. 60. P. 64-74.
- [286] Yale D., Network modelling of flow, storage and deformation in porous rocks, PhD thesis, Stanford University, 1984.
- [287] Lopez X., Valvatne P.H., Blunt M.J. Predictive network modeling of single-phase non-Newtonian flow in porous media // J. Colloid Interface Sci. 2003. P. 256-265.

- [288] Martys N.S., Torquato S., Bentz D.P. Universal scaling of fluid permeability for sphere packings // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 403-408.
- [289] Geertsma J. Estimating the coefficient of inertial resistance in fluid flow through porous media // Society of Petroleum Engineers Journal, V. 14(05), P. 445-450. SPE paper 4706.
- [290] Olson K.E., Haidar S., Milton-Tayler D., Olsen E. Multiphase non-Darcy pressure drop in hydraulic fracturing // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004. SPE paper N 90406.
- [291] Lopez-Hernandez H.D., Valko P.P., Pham T.T. Optimum fracture treatment design minimizes the impact of non-Darcy flow effects // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004. SPE paper N 90195.
- [292] Adler P.M. 2006. Private communication.
- [293] Демьянов Александр Юрьевич. Основы метода функционала плотности в гидродинамике / Демьянов А.Ю., Динариев Олег Юрьевич , Евсеев Николай Вячеславович ; Технол. компания Шлюмберже, Моск. науч.-исслед. центр Шлюмберже. - М. : Физматлит, 2009. - 311 с.
- [294] Boney C.L., Miller M.J., Lo S.-W. Schlumberger Technology Corporation. Conductive proppant and method of hydraulic fracturing using the same // US Patent 6725930 B2. 2004.
- [295] Chen S., Doolen G.D. Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 329-364.
- [296] Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // Int. J. Multiphase Flow. 2003. V. 29. P. 117-169.

- [297] Garagash I.A. Numerical modeling of a hydraulic fracture in dilatant weak rocks and evolution of proppant porosity // In Book of Abstracts: 10th Hydraulic Fracturing Summit, 15-18 July 2010, Limassol, Cyprus.
- [298] Baseline fracture conductivity determination of 12/18 CarboProp (China), FracTech Ltd report N 8099_R, 2005.
- [299] Baseline fracture conductivity determination of 16/20 CarboProp (China), FracTech Ltd report N 8099_S, 2005.
- [300] Baseline fracture conductivity determination of 16/30 CarboProp (China), FracTech Ltd report N 8099_T, 2005.
- [301] Baseline fracture conductivity determination of 20/40 CarboProp (USA), FracTech Ltd report N 8099_V, 2005.
- [302] Jin L., Penny G.S. A study of two-phase, non-Darcy gas flow through proppant packs // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1998. SPE paper 49248.
- [303] Li D., Engler T.W., Literature review on correlations of the non-Darcy coefficient // In SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference. Society of Petroleum Engineers. 2001. SPE paper 70015.
- [304] Fractech report N PEA 74 2005.
- [305] Darin S.R., Huitt J.L. Effect of partial monolayer of propping agent on fracture flow capacity // Trans., AIME. 1960. V. 219. P. 31.
- [306] Brannon H.D, Malone M.R., Rickards A.R., Wood W.D., Edgeman J.R., Bryant J.L. Maximazing fracture conductivity with proppant partial monolayers: theoretical curiosity or highly productive reality? // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004. SPE paper 90698.

- [307] Freeman E.R., Anschutz D.A., Rickards A.R., Callanan M.J. Modified API/ISO Crush Tests With a Liquid-Saturated Proppant Under Pressure Incorporating Temperature, Time, and Cyclic Loading: What Does It Tell Us? // In SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Society of Petroleum Engineers. 2009. SPE paper 118929.
- [308] Nemec D., Levec J. Flow through packed bed reactors: 1. Single-phase flow // Chemical Engineering Science. 2005. V. 60(24). P. 6947-6957.
- [309] Blunt M.J., Bijeljic B., Dong H., Gharbi O., Iglauer S., Mostaghimi P., Paluszny A., Pentland C. Pore-scale imaging and modelling // Advances in Water Resources. 2013. V. 51. P. 197-216.
- [310] Carman P.C. Fluid flow through granular beds // Transactions-Institution of Chemical Engineers. 1937. V. 15. P. 150-166.
- [311] Lopez-Hernandez H.D., Valko P., Pham T.T. Optimum fracture treatment design minimizes the impact of non-Darcy flow effects // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2004. SPE paper 90195.
- [312] Zuber N., Findlay J.A. Average volumetric concentration in two-phase flow systems // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1965. V. 87. № 4. P. 453–468.
- [313] Ishii M. One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes // Argonne National Lab. Rep., ANL 77-47, 1977.
- [314] Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 65–81.
- [315] Wallis G.B. One-dimensional two-phase flow. N. Y.: McGraw-Hill, 1969. 408 p.

- [316] Bendiksen K., Maines D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: Theory and application // SPE production Engineering. 1991. V. 6. P. 171–180.
- [317] Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S. Flow regime independent, high resolution multi-field modelling of near-horizontal gas-liquid flows in pipelines // Int. J. Multiphase Flow. 2009. V. 35. № 1. P. 34–46.
- [318] Llewellyn E. W., Mader H. M., Wilson S. D. R. The rheology of a bubbly liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2002. V. 458. P. 987–1016.
- [319] Brady J.F., Khair A.S., Swaroop M. On the bulk viscosity of suspensions // J. Fluid Mech. 2006. V. 554. P. 109–123
- [320] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [321] Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 883–889.
- [322] Hasan A.R., Kabir C.S. Fluid flow and heat transfer in wellbores. Richardson, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2002. 181 p.
- [323] Shi H., Holmes J.A., Durlofsky L.J., Aziz K., Diaz L.R., Alkaya B., Oddie G. Drift-flux modeling of two-phase flow in wellbores // SPE Journal. 2005. V. 10. № 1. P. 24–33.
- [324] Evje S., Flåtten T. On the wave structure of two-phase models // SIAM J. Appl. Math. 2007. V. 67. № 2. P. 487–511.
- [325] Осипцов А.А. Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // Изв. РАН. МЖГ. 2003. №6. С. 24–31.
- [326] Невский Ю.А., Осипцов А.Н., Моделирование гравитационной ковекции суспензий // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 7. С. 98–105.

- [327] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. N. Y.: L.: Acad. Press, 1964. = Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
- [328] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publ., 1980. 197 p.
- [329] Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М. Гидродинамика в бурении. М.:Недра, 1985. 196 с.
- [330] De Henau V., Raithby G.D. A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines // Int. J. Multiphase Flow. 1995. V. 21. № 3. P. 365–379.
- [331] Munkejord S.T., Evje S., Flatten T. The multistage centered scheme approach applied to a drift-flux two-phase flow model // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2006. V. 52(6). P. 679-705.
- [332] Alipchenkov V. M., Nigmatulin R. I., Soloviev S. L., Stonik O. G., Zaichik L. I., Zeigarnik Y. A. A three-fluid model of two-phase dispersed-annular flow // International journal of heat and mass transfer. 2004. V. 47. N24. P. 5323-5338.
- [333] Barnea D., Taitel Y. Interfacial and structural stability of separated flow // International journal of multiphase flow. 1994. V. 20. P. 387-414.
- [334] Bestion D. The phase appearance and disappearance in the CATHARE code // Trends in Numerical and Physical Modeling for Industrial Multiphase Flows, Cargese. 2000.
- [335] Bestion D. The physical closure laws in the CATHARE code // Nuclear Engineering and Design. 1990. V. 124(3). P. 229-245.
- [336] Tiselj I., Petelin S. Modelling of two-phase flow with second-order accurate scheme // Journal of Computational Physics. 1997. V. 136(2). P. 503-521.

- [337] Toumi I., Kumbaro A. An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model // Journal of Computational Physics. 1996. V. 124(2). P. 286-300.
- [338] Shoham O. Flow Pattern Transition and Characterization in Gas-Liquid Two-Phase Flow in Inclined Pipes. 1982. PhD thesis.
- [339] Issa R.I., Kempf M.H.W. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model // International journal of multiphase flow. 2003. V. 29(1). P. 69-95.
- [340] Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S. Flow regime independent, high resolution multi-field modelling of near-horizontal gas–liquid flows in pipelines // International Journal of Multiphase Flow. 2009. V. 35(1). P. 34-46.
- [341] Bonizzi M., Issa R.I. On the simulation of three-phase slug flow in nearly horizontal pipes using the multi-fluid model // International journal of multiphase flow. 2003. V. 29(11). P. 1719-1747.
- [342] Bonizzi M. Transient one-dimensional modelling of multiphase slug flows. Doctoral dissertation, Imperial College London, University of London. 2003.
- [343] Cordier F., Degond P., Kumbaro A. Phase appearance or disappearance in two-phase flows // Journal of Scientific Computing. 2014. V. 58(1). P. 115-148.
- [344] Paillere H., Corre C., Cascales J.G. On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models // Computers & Fluids. 2003. V. 32(6). P. 891-916.
- [345] Shi H., Holmes J.A., Durlofsky L.J., Aziz K., Diaz L., Alkaya B., Oddie G. Drift-flux modeling of two-phase flow in wellbores // SPE Journal. 2005. V. 10(01). P. 24-33.

- [346] Ishii M., Hibiki T. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. Springer Science & Business Media. 2010.
- [347] Li Q., Fu S. A gas-kinetic BGK scheme for gas–water flow // Computers & Mathematics with Applications. 2011. V. 61(12). P. 3639-3652.
- [348] Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw Hill. 1980.
- [349] Darwish F.M.M. A unified formulation of the segregated class of algorithms for fluid flow at all speeds // Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals. 2000. V. 37(1). P. 103-139.
- [350] Spalding D.B. Numerical computation of multi-phase fluid flow and heat transfer // In Von Karman Inst. for Fluid Dyn. Numerical Computation of Multi-Phase Flows. 1981.
- [351] Moukalled F., Darwish M. Pressure-based algorithms for multifluid flow at all speeds—Part I: Mass conservation formulation // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2004. V. 45(6). P. 495-522.
- [352] Moukalled F., Darwish M. Pressure-Based Algorithms for Multifluid Flow at All Speeds—Part II: Geometric Conservation Formulation // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2004. V. 45(6). P. 523-540.
- [353] Hasan A.R., Kabir C.S. A simplified model for oil-water flow in vertical and deviated wellbores // In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 1998. Paper SPE 49163.
- [354] Bratland O. Pipe Flow 2: Multi-phase Flow Assurance. 2009.
- [355] Lhuillier D., Chang C.H., Theofanous T.G. On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows // Journal of Fluid Mechanics. 2013. V. 731. P. 184–194.

- [356] Рахматулин Х.А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
- [357] Stuhmiller J.H. The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations // International Journal of Multiphase Flow. 1977. V. 3. № 6. P. 551–560.
- [358] Ndjinga M. Influence of interfacial pressure on the hyperbolicity of the two-fluid model // Comptes Rendus Mathematique. 2007. V. 344. № 6. P. 407–412.
- [359] Kumbaro A., Ndjinga M. Influence of interfacial pressure term on the hyperbolicity of a general multifluid model // The Journal of Computational Multiphase Flows. 2011. V. 3. № 3. P. 177–196.
- [360] Théron B. Ecoulements diphasiques instationnaires en conduite horizontale. Thése INP Toulouse, France, 1989.
- [361] Trangenstein, J.A. and Bell, J.B., 1989. Mathematical structure of the black-oil model for petroleum reservoir simulation. SIAM Journal on Applied Mathematics, 49(3), pp.749-783.
- [362] Benzoni-Gavage S. Analyse numérique des modèles hydrodynamiques d'écoulements diphasiques instationnaires dans les réseaux de production pétrolière. Thése ENS Lyon, France, 1991.
- [363] Gavrilyuk S.L., Fabre J. Lagrangian coordinates for a drift-flux model of a gas–liquid mixture // Int. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22. № 3. P. 453–460.
- [364] Evje S., Flåtten T. On the wave structure of two-phase models // SIAM J. Appl. Math. 2007. V. 67. № 2. P. 487–511.
- [365] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.

- [366] Kadri U., Mudde R.F., Oliemans R.V.A., Bonizzi M., Andreussi P. Prediction of the transition from stratified to slug flow or roll-waves in gas–liquid horizontal pipes // International Journal of Multiphase Flow. 2009. V. 35. № 11. P. 1001–1010.
- [367] Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // International journal of multiphase flow. 1986. V. 12. № 6. P. 861–889.
- [368] Romenski E., Toro E.F. Compressible two-phase flows: two-pressure models and numerical methods // Comput. Fluid Dyn. J. 2004. V. 13. P. 403–416.
- [369] Gallouet T., Herard J.M., Seguin N. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2004. V. 14. № 5. P. 663–700.
- [370] Осипцов А.А. Автомодельное решение задачи о росте лавового купола на произвольной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 53–68.
- [371] Jenkins M.A., Traub J.F. A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1970. V. 7. № 4. P. 545–566.