

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)

На правах рукописи

Мальцев Виктор Васильевич

**РАЗРАБОТКА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Адищев В.В.

Новосибирск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. Обзор, критический анализ литературных источников по теме исследования	15
1.1. Физическая нелинейность поведения бетона и железобетона при воздействии нагрузки.....	15
1.2. Учет высокой степени неопределенности характеристик материалов	21
1.4. Алгоритм «сквозного» расчета железобетонных изгибаемых элементов..	23
1.5. Аналитические суперэлементы в алгоритмах «сквозного» расчета железобетонных изгибаемых элементов с применением программных комплексов	26
1.6. Выводы по главе 1	29
ГЛАВА 2. Численно-аналитические методы.....	32
2.1. Численно-аналитический метод определения прогибов железобетонных балок с учетом физической нелинейности материалов	32
2.1.1. Постановка задачи в общем виде.....	32
2.1.2. Постановка задачи в частном виде	34
2.1.3. Реализация численно-аналитического метода	40
2.1.4. Реализация численно-аналитического метода с использованием диаграмм аппроксимации бетона, рекомендуемых СП 63.13330.2012.....	45
2.2. Численно-аналитический метод определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу	52
2.3. Выводы по главе 2	59
ГЛАВА 3. Экспериментальные результаты	61
3.1. Первая серия экспериментов – определение зоны краевого эффекта при вытягивании армирующего элемента из матрицы связующего	61
3.1.1. Постановка эксперимента	61
3.1.2. Опытный образец №1	62
3.1.3. Опытный образец №2	65

3.2. Вторая серия экспериментов – определение напряженно-деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала.....	69
3.2.1. Постановка эксперимента	69
3.2.2. Обработки экспериментальных данных численно-аналитическим методом.....	72
3.2.3. Результаты применение численно-аналитического метода определения прогибов для обработки экспериментальных данных	75
3.3. Третья серия экспериментов – исследование напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами..	79
3.3.1. Постановка эксперимента	79
3.4.2. Результаты экспериментального исследования	81
3.5. Выводы по главе 3	85
ГЛАВА 4. Численные решения в программном комплексе ANSYS. Сравнение с численно-аналитическими решениями и экспериментальными данными.	87
4.1. Определение зоны краевого эффекта при вытягивании армирующего элемента из матрицы связующего.....	87
4.1.1. Численные решения для первой серии экспериментов.....	87
4.1.2. Опытный образец №1	87
4.1.3. «Теоретический» образец.....	91
4.1.4. Заключение к параграфу 4.1.....	95
4.2. Определение напряженно-деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала	96
4.2.1. Численные решения для второй серии экспериментов.....	96
4.2.2. Результаты расчетов с использованием диаграммы деформирования однородного ячеистого материала при численном моделировании.	97
4.2.3. Заключение к параграфу 4.2.....	103
4.3. Исследование напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами	103

4.3.1. Численные решения для четвертой серии экспериментов	103
4.3.2. Результаты численного моделирования балок с заранее организованными трещинами	105
4.3.3. Исследование влияния плотности армирования на деформированное состояние в балках с заранее организованными трещинами.....	110
4.3.4. Результаты численного моделирования балок с заранее организованными трещинами при разных процентах армирования.....	111
4.3.5. Заключение к параграфу 4.3.....	119
4.4. Выводы по главе 4.....	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	125
Список используемых источников.....	125
Список публикаций соискателя.....	136
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Программная реализация в Mathcad алгоритма численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования.....	139
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Программная реализация в Excel алгоритма численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу	153
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Акты внедрения результатов диссертационного исследования	155

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Железобетонные конструкции являются наиболее широко распространенными в строительной практике, а требования повышения адекватности расчета и возможности оптимизации возрастают при современном отходе от типовых конструктивных решений. Расчет и конструирование железобетонных элементов сопряжены с преодолением целого ряда трудностей, связанных с необходимостью учета не до конца исследованных физических явлений (взаимодействие арматуры и бетона, физическая нелинейность поведения бетона, образование трещин и др.).

Проблема развития теории расчета железобетонных элементов, одна из наиболее актуальных на сегодняшний день. Последние десятилетия направление рационализации алгоритмов расчета элементов из данного материала развивается крайне медленно, по сравнению с предыдущими десятилетиями. При этом речь идет не только о отечественных исследованиях, посвященных теории расчета железобетонных элементов, но и о работах зарубежных «партнеров».

Несмотря на то, что в России в 2012 г. научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева (НИИЖБ) утвердил новые нормы проектирования железобетонных конструкций и внедрил свод правил расчета железобетонных элементов, носящий рекомендательный характер, качественно структура представленного алгоритма расчета осталась прежней. Под структурой понимается разделение расчета элементов по двум группам предельных состояний.

В соответствии с теорией В.И. Мурашева с возрастанием нагрузок при изгибе железобетонное сечение проходит несколько стадий напряженно-деформированного состояния, качественно отличающихся друг от друга. При этом различаются так называемые предельные состояния, а методы расчета по двум группам предельных состояний базируются на противоречивых гипотезах и предположениях. Каждая стадия описывается уравнениями равновесия и соответствующими гипотезами,

а изменение параметров сечения в процессах перехода из одного состояния в другое учитывается с помощью эмпирических коэффициентов. В действительности при образовании трещины происходит не только «катастрофическое» изменение напряженно-деформированного состояния в сечении с трещиной, но и собственно изменение самой конструкции. Расчет по двум группам предельных состояний практически игнорирует реальные физические свойства бетона, а также не учитывает особенности напряженно-деформированного состояния и физически адекватные условия перехода из одного состояния в другое. Переход из 1-й стадии (до образования трещины) во 2-ю (эксплуатационную) обусловлен достижением деформацией крайнего растянутого волокна бетона предельного (строго говоря, условного) значения. В действительности разрушение не может происходить в точке. Разрушение происходит, если в некотором объеме материала уровень накопленных микрповреждений достигает своего критического значения. Условия перехода из эксплуатационной стадии в стадию разрушения (гипотетическую) в теории сопротивления железобетона не определяются. Таким образом, «сквозной» расчет от начала нагружения до потери несущей способности железобетонного элемента в рамках этой теории невозможен.

В качестве альтернативы методам расчета по предельным состояниям В.М. Митасовым и В.В. Адищевым был предложен подход к расчету изгибаемых железобетонных элементов с использованием энергетических соотношений. Задача о возникновении, стабилизации и росте трещин в изгибаемых железобетонных элементах была сформулирована физически адекватно.

При оценке несущей способности, жесткости и трещиностойкости железобетонного элемента интерес представляет только эксплуатационная стадия, а именно, начало этой стадии (возникновение трещины) и окончание (потеря несущей способности). Следовательно, проблема физически адекватного описания напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций на всех стадиях нагружения выходит на первый план.

В настоящей работе разработан численно-аналитический метод определения прогибов до момента образования трещины с использованием диаграмм деформирования материалов железобетона (сталь и бетон). Учет физической нелинейности с помощью диаграмм деформирования является более корректным, чем применение поправочных коэффициентов. Также решен ряд второстепенных задач по определению зоны краевого эффекта, на основании которых в дальнейшем планируется создание «сквозного» алгоритма расчета по определению действительного деформированного состояния в изгибаемых железобетонных элементах с трещинами.

В последние десятилетия появилось большое количество расчетных комплексов для решения задач механики деформированного твердого тела, основанных на использовании метода конечных элементов (МКЭ), предложенного Р. Курантом и А.П. Хренниковым. Возможность суперэлементного моделирования (ANSYS, SAMTECH, SCAD, ЛИРА-САПР, STARK ES и др.) позволяет эффективно решать задачи большой размерности. Основная идея метода суперэлементов (метод подструктур), сформулированная Е.С. Пржеминичим, К. Мейснером, Р.П. Федоренко и др., состоит в независимости расчета отдельных суперэлементов (подструктур) с помощью МКЭ и последующего учета их взаимодействия.

Создание численно-аналитических алгоритмов «сквозных» расчетов по определению реального деформированного состояния в изгибаемых, сжатых и сжато-изогнутых элементах позволит создавать «аналитические суперэлементы» в рамках модифицированного метода подструктур («метод аналитических подструктур») из ригелей и колонн, а также из их совокупности в виде рам. Остальные конструктивные элементы (перекрытия и стены) в рамках модифицированного метода подструктур будут рассчитываться МКЭ. Идея модифицированного метода подструктур заключается в проведении расчета не для всей конструкции в целом, а для совокупности иерархически связанных конструктивных элементов в виде «аналитических суперэлементов», объединяющихся в полную конструкцию с использованием МКЭ.

Таким образом, проблема создания алгоритмов «сквозных» расчетов по определению деформированного состояния в изгибаемых элементах является актуальным и перспективным направлением исследования.

Степень разработанности темы. В середине прошлого века наметилась тенденция развития теории сопротивления железобетона отдельно от механики деформируемого твердого тела. Это нашло отражение в большом количестве исследований железобетонных элементов с целью получения количественных характеристик работы конструкций на разных стадиях нагружения (до и после образования трещины, а также на стадии разрушения). Вопросы, связанные с физической природой происходящих процессов, при переходе от одной стадии нагружения до другой в полной мере не рассматривались, а учитывались только с помощью эмпирических коэффициентов. В свою очередь развитие механики деформируемого твердого тела без тесного соприкосновения с теорией сопротивления железобетона привело к тому, что появилось большое количество гипотетических моделей для определения напряженно-деформированного состояния в элементах конструкции, которые не учитывают особенности железобетона (взаимодействие стали и бетона, образование трещин и другие).

Главной причиной, сдерживающей внедрение «сквозного» расчета, свободного от противоречий расчета по предельным состояниям, является явно недостаточная степень разработанности данного направления, заключающаяся в отсутствии необходимых исследований, постановок, методов и расчетных алгоритмов решения наиболее важных практических задач на стадиях от начала нагружения до потери несущей способности железобетонного элемента с точки зрения комплексного подхода, включающего в себя достижения, как теории сопротивления железобетона, так и строительной механики.

Цель диссертационной работы заключается в разработке и экспериментальной апробации численно-аналитических методов расчета железобетонных конструктивных элементов с учетом физической нелинейности поведения бетона, а

также наличия трещин, на основе применения нелинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры.

Для осуществления поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Выполнить анализ методик, применяемых для расчета железобетонных элементов от начала нагружения до потери несущей способности.
2. Разработать и выполнить программную реализацию алгоритмов численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования.
3. Разработать и выполнить программную реализацию алгоритмов численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу.
4. Произвести экспериментальную апробацию предложенных численно-аналитических методов, в том числе с помощью численного моделирования в программном комплексе ANSYS (ПК ANSYS).
5. Провести экспериментальное исследование балок с заранее организованными трещинами с использованием поляризационно-оптического метода. Осуществить сравнение полученных экспериментальных данных с результатами численного моделирования в ПК ANSYS.

Объект исследования – статически определимые армированные и неармированные балки с кратковременным характером нагружения; пластины с замоноличенным армирующим элементом.

Предмет исследования – напряженно-деформируемое состояние изгибаемых армированных и неармированных балок; методики определения прогибов и зоны краевого эффекта в окрестности трещины.

Научная новизна исследования:

1. Разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных

диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования. Проведена экспериментальная апробация предложенного численно-аналитического метода.

2. Проведены экспериментальные исследования с целью определения зоны краевого эффекта армирующего элемента при вытягивании из матрицы связующего с использованием поляризационно-оптического метода.

3. Разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу. Результаты расчетов по разработанной методике хорошо согласуются с экспериментальными данными, а также с результатами численного моделирования в ПК ANSYS.

4. Проведено экспериментальное исследование балок с заранее организованными трещинами с использованием поляризационно-оптического метода. Данные численного моделирования подтвердили экспериментально полученный результат о независимости длины зоны краевого эффекта от прикладываемой нагрузки.

5. Предложен и апробирован оригинальный способ численного моделирования балки в окрестности трещины с помощью жесткого контакта типа «bonded».

6. Доказано предположение о существовании плоскости в продольном направлении балки с заранее организованными трещинами, в котором распределение продольных деформаций не зависит от изменения плотности армирования на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин.

Теоретическая и практическая значимость результатов исследования.

Проведенное исследование полностью укладывается в предложенную В.М. Митасовым и В.В. Адищевым концепцию алгоритма «сквозного» расчета железобетонных элементов. Разработан численно-аналитический метод определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейной диаграммы деформирования бетона на стадии деформирования до образования трещины. Решен ряд второстепенных задач-предпосылок необходимых для создания численно-аналитических расчетов на стадии возникновения и стабилизации первичной трещины. Предложенные численно-аналитические методы можно использовать для создания

и расчета «аналитических суперэлементов» в рамках модифицированного метода подструктур.

Разработанный численно-аналитический метод определения зоны краевого эффекта арматурного стержня замоноличенного в матрицу при вытягивании, позволяет оценить эффективную длину стержня при возникновении проскальзывания в матрице связующего.

Предложен оригинальный способ численного моделирования балки в окрестности трещины, обеспечивающий возможность создания однотипной структурированной сетки по всей длине образца, с помощью жесткого контакта типа «bonded».

Теоретическая и практическая значимость выполненных разработок подтверждается поддержкой грантов РФФИ: проект № 13-08-00633 «Разработка и экспериментальная апробация методов оценки несущей способности и трещиностойкости железобетонных изгибаемых элементов», руководитель В.В. Адищев, 2013-2015 гг.; проект № 16-08-00975 «Разработка методов оценки несущей способности и трещиностойкости железобетонных элементов конструкций с учетом высокой степени неопределенности свойств материалов», руководитель В.В. Адищев, 2016-2018 гг.; проект № 18-31-00103 «Разработка математической модели деформирования бетона, как структурно-неоднородного материала», руководитель М.Н. Данилов, 2018-2019 гг.

Практическая значимость результатов исследования подтверждается актами внедрения в следующих проектных организациях города Новосибирска: ООО «Девали», ООО «Астра-Проект», ООО «АРТ-Проект», ООО ПСК «СИБКОНТРОРС.

Методология и методы диссертационного исследования. В диссертационном исследовании применены методы и методологические принципы: системного подхода, позволяющего раскрыть в целостности и взаимосвязи многообразие проявлений изучаемого объекта; моделирования – как способа исследования объекта, его основных свойств и взаимодействия с внешней средой путем построения и изучения моделей; эмпирического подхода, связанного с постановкой проверок разра-

ботанной теории на практике. Работа характеризуется научно обоснованной постановкой проблемы исследования, которая может быть реализована практически с получением новых научных результатов, законченностью и цельностью исследования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Результаты экспериментальных исследований с использованием поляризационно-оптического метода по определению зоны краевого эффекта армирующего элемента при вытягивании из матрицы.
2. Результаты экспериментальных исследований с использованием поляризационно-оптического метода по определению напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами.
3. Алгоритм и программная реализация численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования. Определенное численно-аналитическим методом напряженно-деформированное состояние хорошо согласуется с результатами численного моделирования в ПК ANSYS, а также с экспериментальными данными.
4. Алгоритм и программная реализация численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу. Проведенные экспериментальные исследования с использованием поляризационно-оптического метода, а также численное моделирование в ПК ANSYS для определения зоны краевого эффекта армирующего элемента при вытягивании из матрицы связующего подтверждают эффективность предложенного метода.
5. Оригинальный способ численного моделирования балки в окрестности трещины, обеспечивающий возможность создания однотипной структурированной сетки по всей длине образца, с помощью жесткого контакта типа «bonded».

6. Результаты численного моделирования в ПК ANSYS, на основании которых сделан вывод о существовании плоскости в продольном направлении балки с заранее организованными трещинами, в котором распределение продольных деформаций не зависит от плотности армирования на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин.

Достоверность экспериментальных результатов обеспечена применением метрологически поверенных приборов и установок, достаточной воспроизводимостью экспериментальных величин, сравнением их с аналогичными результатами, полученными отечественными и зарубежными учеными. Расчетные предпосылки основаны на анализе обширных экспериментальных данных о поведении материалов и конструкций. Достаточная точность расчетной методики подтверждена удовлетворительным совпадением теоретических и экспериментальных данных.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались: на VIII Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства» (Новосибирск, 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); на Международной научной конференции «Инновационные пути развития железобетона» (Новосибирск, 2016); на IX Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства» (Новосибирск, 2016); на 4-ой Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 2017); VII Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Новосибирск, 2018).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 14 печатных работ, включая 9 статей в журналах, входящих в перечень ВАК, а также в 1 статье в журнале, индексируемом в информационно-аналитической системе научного цитирования Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 110 наименований, а также 3 приложений. Текст диссертации изложен на 159 страницах, включает в себя 15 таблиц и 63 рисунка.

Автор выражает благодарность всем тем, кто принял участие в подготовке, представлении, публичной защите и обсуждении данной диссертационной работы. Особая благодарность и признательность научному руководителю доктору технических наук, профессору Владимиру Васильевичу Адищеву за неоценимую помощь на всех этапах выполнения диссертации.

ГЛАВА 1. ОБЗОР, КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Физическая нелинейность поведения бетона и железобетона при воздействии нагрузки

Аналитическое описание моделей для определения напряженно-деформируемого состояния в изгибаемых элементах представлено в работах С.П. Тимошенко [85, 86], А.Р. Ржаницына [78], Я.Г. Пановко [73] и др. Однако данные модели не учитывают особенности бетона, как материала, имеющего разные свойства при работе на растяжение и сжатие, а также то, что железобетон – это композитный материал, состоящий из стали и бетона.

Учет физической нелинейности бетона позволяет раскрыть физические процессы и наиболее точно отразить напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. Современные отечественные и зарубежные нормативных документов учитывают влияние физической нелинейности поведения бетона при расчете железобетонных конструкций с помощью нелинейных деформационных моделей, основанных на диаграммах деформирования бетона.

Способам аппроксимации диаграмм деформирования бетона посвящено значительное количество публикаций, так предложения по учету криволинейной эпюры напряжений-деформаций бетона в явном виде представлены в работах В.В. Адищева [2, 4-7], В.Н. Байкова [24], В.М. Бондаренко [29], Н.И. Карпенко [40-45], А.С. Залесова [38], Завьялов Ю.С. [37], В.М. Митасова [57-63], В.И. Мурашева [69], Н.Н. Попова [74] и др. На рисунке 1.1 изображена общепринятая зависимость напряжения – деформации при растяжении и сжатии бетона.

Аналитическое описание диаграмм деформирования бетона и арматуры регламентируется следующими нормативными документами России (СП 63.13330.2012, СП 52-101-2003) [83-84], Европы (EuroCode 2) [99], Индии (IS-456-2000) [103], Китае (GB50010-2002) [102], Японии (JSCE-2007) [104], Украины (ДБН В.2.6-98:2009) [30] и т.д.

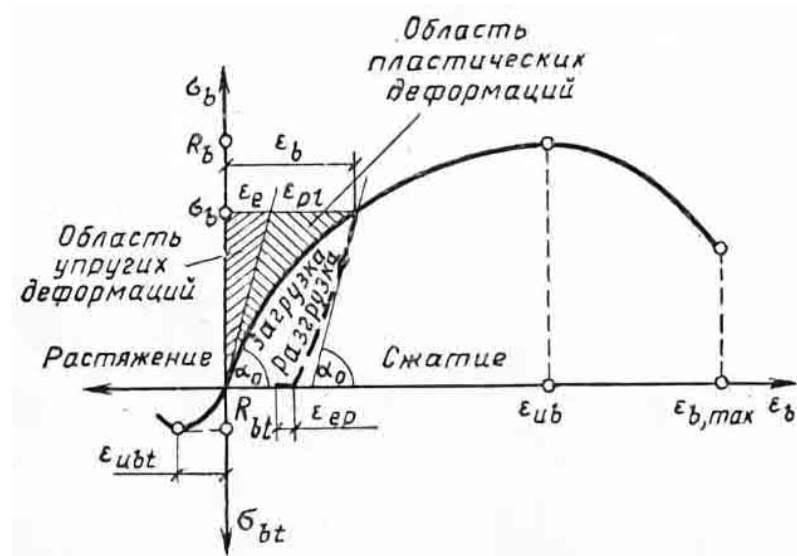
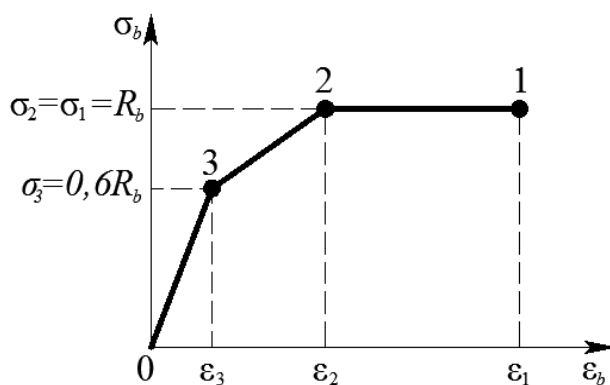


Рисунок 1.1 – Общая диаграмма зависимости между напряжениями и деформациями в бетоне

СП 63.13330.2012 рекомендует использовать следующие аппроксимации диаграммы бетона – двухлинейную (Прандтля) или трехлинейную (рисунок 1.2), а также криволинейную диаграмму Н.И. Карпенко (рисунок 1.3) [84].

а)



б)

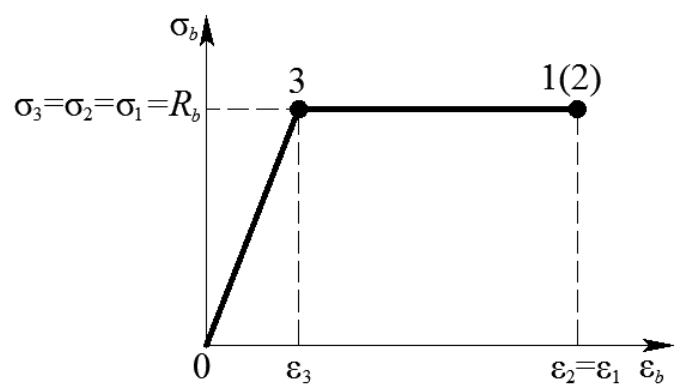


Рисунок 1.2 – Диаграмма деформирования сжатого бетона 1-0:
трехлинейная (а); двухлинейная (Прандтля) (б)

Следует отметить, что диаграмма деформирования растянутого бетона определяются по диаграммам, представленным на рисунке 1.2, при этом расчетное сопротивление бетона сжатию R_b заменяют на расчетное сопротивление бетона растяжению R_{bt} (ϵ_3 заменяют на ϵ_4 , ϵ_2 — на ϵ_5 , а ϵ_1 — на ϵ_6). Трехлинейная диаграмма

растяжения - сжатия бетона (рисунок 1.2а) аппроксимируется на участках 1 – 6 следующими линейными функциями:

$$\text{участок 1 - 2: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(\varepsilon - \varepsilon_2);$$

$$\text{участок 2 - 3: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_3 + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}(\varepsilon - \varepsilon_3);$$

$$\text{участок 3 - 4: } \sigma_b(\varepsilon) = E_b \varepsilon;$$

$$\text{участок 4 - 5: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_4 + \frac{\sigma_5 - \sigma_4}{\varepsilon_5 - \varepsilon_4}(\varepsilon - \varepsilon_4);$$

$$\text{участок 5 - 6: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_5 + \frac{\sigma_6 - \sigma_5}{\varepsilon_6 - \varepsilon_5}(\varepsilon - \varepsilon_5).$$

Двухлинейная диаграмма деформирования (рисунок 1.2б) аппроксимируется по аналогии с техлинейной на участках 2-5, так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$.

Многие авторы пытаются аппроксимировать диаграмму деформирования бетона одной аналитической функцией. Так аналитическая зависимость криволинейных диаграмм деформирования бетона (Н.И. Карпенко) принимается в виде:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m \nu_m}, \quad d\varepsilon_m = \frac{d\sigma_m}{E_m \nu_m^k},$$

где ε_m , σ_m , E_m – деформации, напряжения, начальный модуль упругости; m – индекс материала (для сжатой зоны бетона $m = b$, для растянутой $m = bt$); ν_m – коэффициент изменения секущего модуля, определяемый в соответствии с СП 63.13330.2012. Такой подход не позволяет адекватно отразить все особенности диаграммы. Следует отметить, что введено некорректное обозначение, которое привело к бессмысленному равенству $\operatorname{tg} \theta_k = E_b \nu_b^k$, так как тангенс любого угла является безразмерной физической величиной, а секущий модуль E_b имеет размерность напряжений. К сожалению, такая ошибка повторяется во многих учебниках по железобетону.

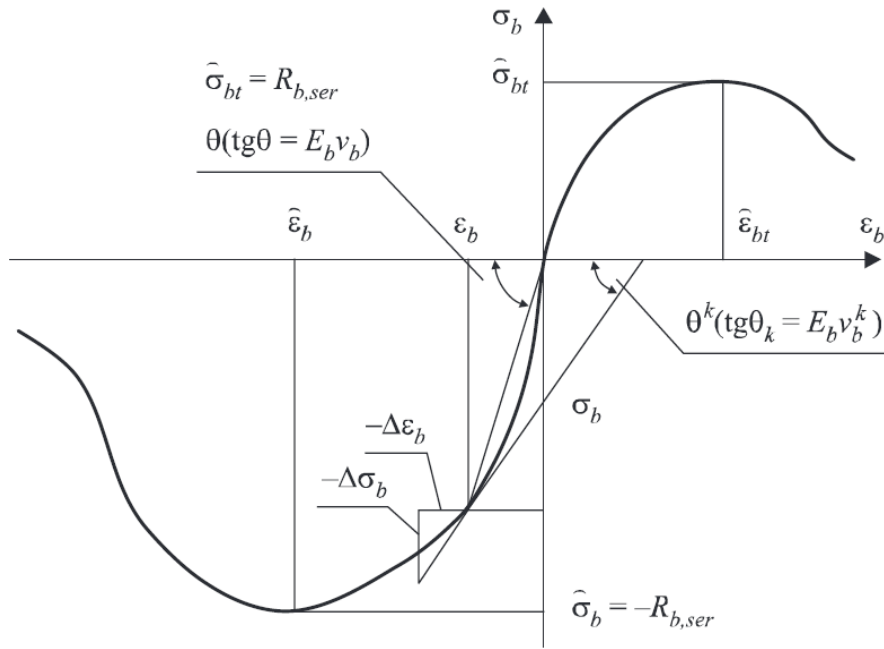


Рисунок 1.3 – Криволинейная диаграмма деформирования бетона
(Н.И. Карпенко)

Наиболее проста и эффективна аппроксимация диаграммы бетона с помощью сплайн-функций. Аналитическое описание диаграмм деформирования бетона и арматуры сплайн-функциями (рисунки 1.4 и 1.5) представлено в работах Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко [37], В.В. Адищева и В.М. Митасова [2, 4-6], В.В. Роота [80].

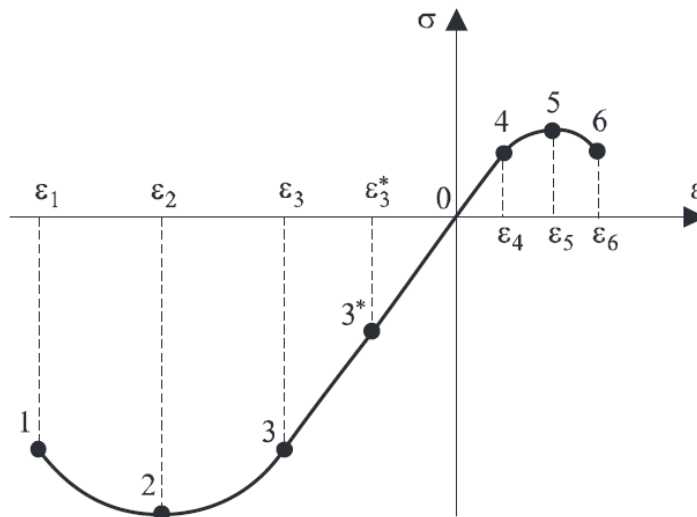


Рисунок 1.4 – Диаграмма деформирования бетона, аппроксимированная сплайн-функцией

Диаграмма растяжения - сжатия бетона (рисунок 1.4) аппроксимируется на участках 1 – 6 сплайн-функциями:

$$\text{участок 1 - 2: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_2 + b_2(\varepsilon_2 - \varepsilon)^{m_2};$$

$$\text{участок 2 - 3: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_3 + E_b(\varepsilon - \varepsilon_3) + b_3(\varepsilon_3 - \varepsilon)^{m_3};$$

$$\text{участок 3 - 4: } \sigma_b(\varepsilon) = E_b\varepsilon;$$

$$\text{участок 4 - 5: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_4 + E_b(\varepsilon - \varepsilon_4) + b_4(\varepsilon - \varepsilon_4)^{m_4};$$

$$\text{участок 5 - 6: } \sigma_b(\varepsilon) = \sigma_5 + b_5(\varepsilon - \varepsilon_5)^{m_5},$$

где E_b – начальный модуль упругости бетона; $b_2, m_2, b_3, m_3, b_4, m_4, b_5, m_5$ – коэффициенты сплайна.

Начальный модуль упругости бетона определяется по формуле

$$E_b = \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}.$$

Для ниспадающих участков 1 – 2, 5 - 6 примем $m_2 = 2, m_5 = 2$, в этом случае:

$$b_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{m_2}} > 0, \quad b_5 = \frac{\sigma_6 - \sigma_5}{(\varepsilon_6 - \varepsilon_5)^{m_5}} < 0.$$

Коэффициенты b_3, m_3, b_4, m_4 находятся из условий сопряжения сплайнов в узлах интерполяции (непрерывность сплайнов и их первых производных):

$$b_3 = \frac{\sigma_2 - E_b\varepsilon_2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^{m_3}} > 0, \quad m_3 = \frac{E_b}{\sigma_2 - E_b\varepsilon_2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) > 1,$$

$$b_4 = \frac{\sigma_5 - E_b\varepsilon_5}{(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)^{m_4}} < 0, \quad m_4 = \frac{E_b}{E_b\varepsilon_5 - \sigma_5}(\varepsilon_5 - \varepsilon_4) > 1.$$

Диаграмма растяжения стали (рисунок 1.5) аппроксимируется на участках 0 - 4 следующими сплайн-функциями:

$$\text{участок 0 - 1: } \sigma_s(\varepsilon) = E_s\varepsilon;$$

$$\text{участок 1 - 2: } \sigma_s(\varepsilon) = \sigma_1 + E_s(\varepsilon - \varepsilon_1) + a_1(\varepsilon - \varepsilon_1)^{n_1};$$

$$\text{участок 2 - 3: } \sigma_s(\varepsilon) = \sigma_2 + E_{s2}(\varepsilon - \varepsilon_2) + a_2(\varepsilon - \varepsilon_2)^{n_2};$$

$$\text{участок 3 - 4: } \sigma_s(\varepsilon) = \sigma_3 + E_{s3}(\varepsilon - \varepsilon_3),$$

где E_s – начальный модуль упругости стали; E_{s2} – модуль упрочнения в узле 2; E_{s3} – модуль упрочнения в узле 3; a_1, a_2, n_1, n_2 – коэффициенты сплайна.

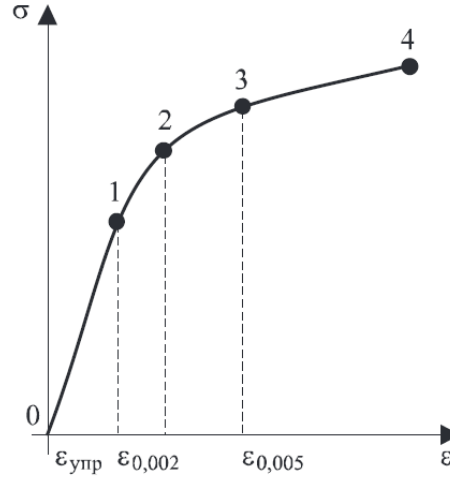


Рисунок 1.5 – Диаграмма деформирования стали, аппроксимированная сплайн-функцией

Модуль упрочнения стали в узле 2 (см. рисунок 1.5) E_{s2} принимается равным среднему арифметическому секущих модулей в интервалах 1 - 2, 2 - 3, т.е.

$$E_{s2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_2} \right).$$

Модуль упрочнения в узле 3 E_{s3} находится из следующего условия: $\sigma_s(\varepsilon_4) = \sigma_4$, откуда

$$E_{s3} = \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}.$$

Коэффициенты сплайна a_1, a_2, n_1, n_2 найдем из условий сопряжений сплайнов в узлах интерполяции:

$$n_1 = \frac{E_s - E_{s2}}{E_s \varepsilon_2 - \sigma_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) > 1, \quad a_1 = \frac{\sigma_2 - E_s \varepsilon_2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{n_1}} < 0,$$

$$n_2 = \frac{E_{s2} - E_{s3}}{E_{s2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - (\sigma_3 - \sigma_2)} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) > 1, \quad a_2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_2) - E_{s2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^{n_2}} < 0.$$

1.2. Учет высокой степени неопределенности характеристик материалов

Бетон и железобетон являются структурно-неоднородными материалами. При этом бетон представляет собой многофазную среду, включающую в себя цементный камень, заполнители, имеющие различные физико-механические характеристики. Реологические свойства бетонной смеси, прочность и деформативность бетона в значительной степени зависят от вида, крупности и формы песка и щебня (гравия), плотности упаковки их в единице объема, водоцементного соотношения. В известной монографии И.Н. Ахвердова [23] приведены физические свойства заполнителей, влияющие на технологические параметры бетона, рассмотрено влияние различных способов воздействия на бетонную смесь, обуславливающих деформативность и прочность бетона. Очевидно, все приведенные факторы являются случайными величинами и процессами. Физико-механические характеристики бетона (прочность, предельные деформации при растяжении и сжатии) определяют экспериментально. В расчете конструкций применяют так называемые диаграммы деформирования бетона (см. рисунки 1.1-1.4). При этом диаграммы деформирования бетона должны быть трансформированы (рисунок 1.6) в зависимости от вида напряженного состояния [4, 5].

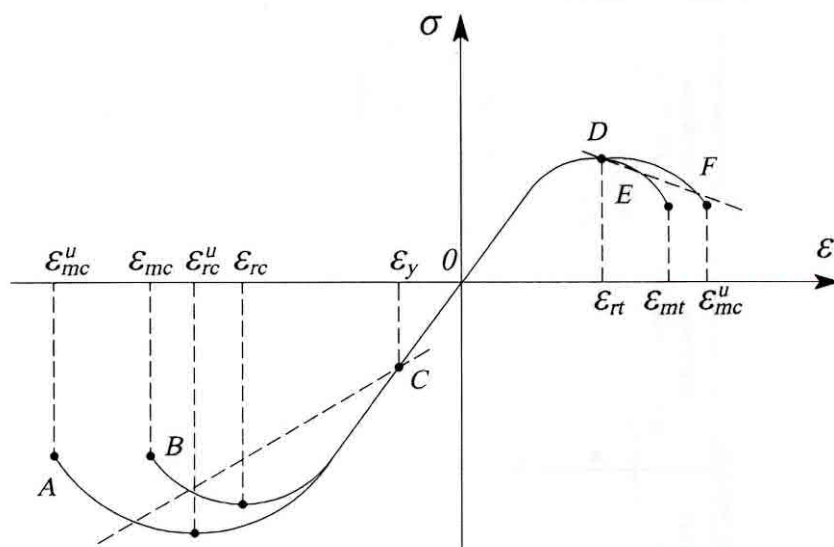


Рисунок 1.6 – Схема трансформирования эталонной диаграммы деформирования бетона

Узлы интерполяции, необходимые для построения аппроксимирующих функций, определяются экспериментально. Проблема заключается в том, что разброс экспериментальных данных очень велик. Попытки статистической обработки опытных данных показали, что во многих случаях нормальному закону распределения не удовлетворяет более 50% данных. В работе В.В. Адищева и Д.С. Шмакова [9] предложен альтернативный вероятностно-статистическому подходу метод построения диаграмм деформирования растянутого бетона (рисунок 1.7) в виде нечетких функций [108-110]. Существенным достоинством данного подхода является возможность обработки экспериментальных данных, которые не удовлетворяют известным законам распределения (биномиальный, нормальный (Гаусса), логнормальный, Пуассона и др.).

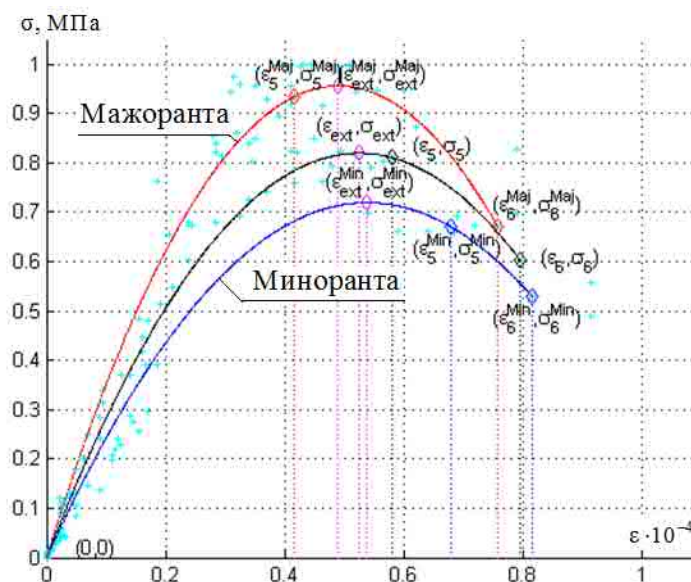


Рисунок 1.7 – Нечеткая аппроксимация диаграммы растянутого бетона

На основании работы [9] при непосредственном участии автора* были построены нечеткие аппроксимации диаграмма деформирования для сжатого бетона, полученная при испытании призм на осевое сжатие для разных скоростей нагружения (рисунок 1.8).

* Адищев В.В., Карпов Е.В., Демешкин А.Г., Карпицкая Ю.Р., Мальцев В.В., Иванов А.И. Применение оптической системы Correlated Solutions Vic 3D для построения диаграмм деформирования бетона // Известия вузов. Строительство. 2015. №8. С. 68-81.

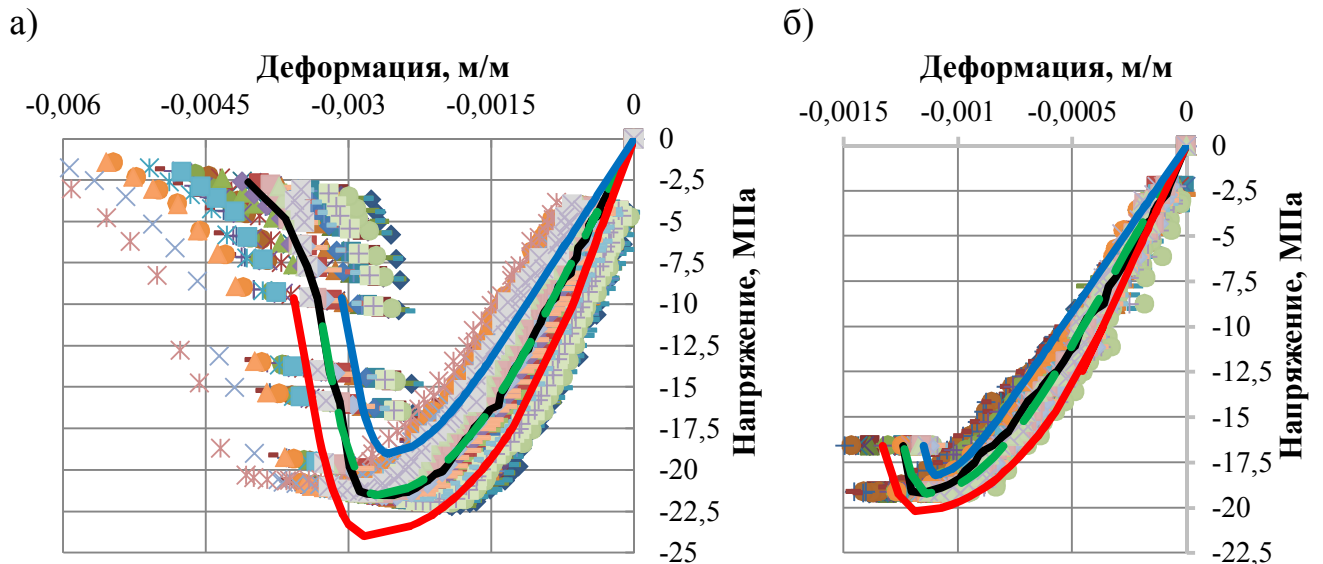


Рисунок 1.8 – Нечеткая аппроксимация диаграммы сжатого бетона

для скорости нагружения: 0,1 мм/мин (а); 1 мм/мин (б);

красная линия – миноранта; черная линия – экспериментальная осредненная кривая, зеленая линия – осредненный сплайн, синяя линия – мажоранта

1.4. Алгоритм «сквозного» расчета железобетонных изгибаемых элементов

Традиционно выделяют три стадии напряженно-деформированного состояния (см. рисунок 1.9) железобетонных элементов [24, 32, 68, 74, 90].

Стадия I – до появления трещин в бетоне растянутой зоны. Растягивающие усилия воспринимаются арматурой и бетоном совместно. Напряжения в бетоне R_b меньше временного сопротивления растяжению $R_{bt,u}$. Для определения момента трещинообразования дополнительно выделяют стадию Ia, при этом криволинейную эпюру в растянутой зоне заменяют прямоугольной.

Стадия II – после появления трещин в бетоне растянутой зоны. Растягивающие усилия воспринимаются арматурой и бетоном совместно на участках между трещинами, а непосредственно в сечении с трещиной – арматурой и бетоном над трещиной. На данной стадии определяются прогибы и ширины раскрытия трещин. В конце стадии II выделяется дополнительную стадию предразрушения (стадия IIa).

Стадия III – стадия разрушения. Напряжения в арматуре достигают предела текучести (физического или условного), а в бетоне – временного сопротивления

осевому сжатию. Растянутая зона бетона практически исключена из деформирования элемента. Различают два характерных случая разрушения элемента. Случай 1 – пластическое разрушение вследствие замедленного развития местных пластических деформаций арматуры. Случай 2 – хрупкое разрушение, происходит в перераспределенных сечениях из-за неполного использования растянутой арматуры.

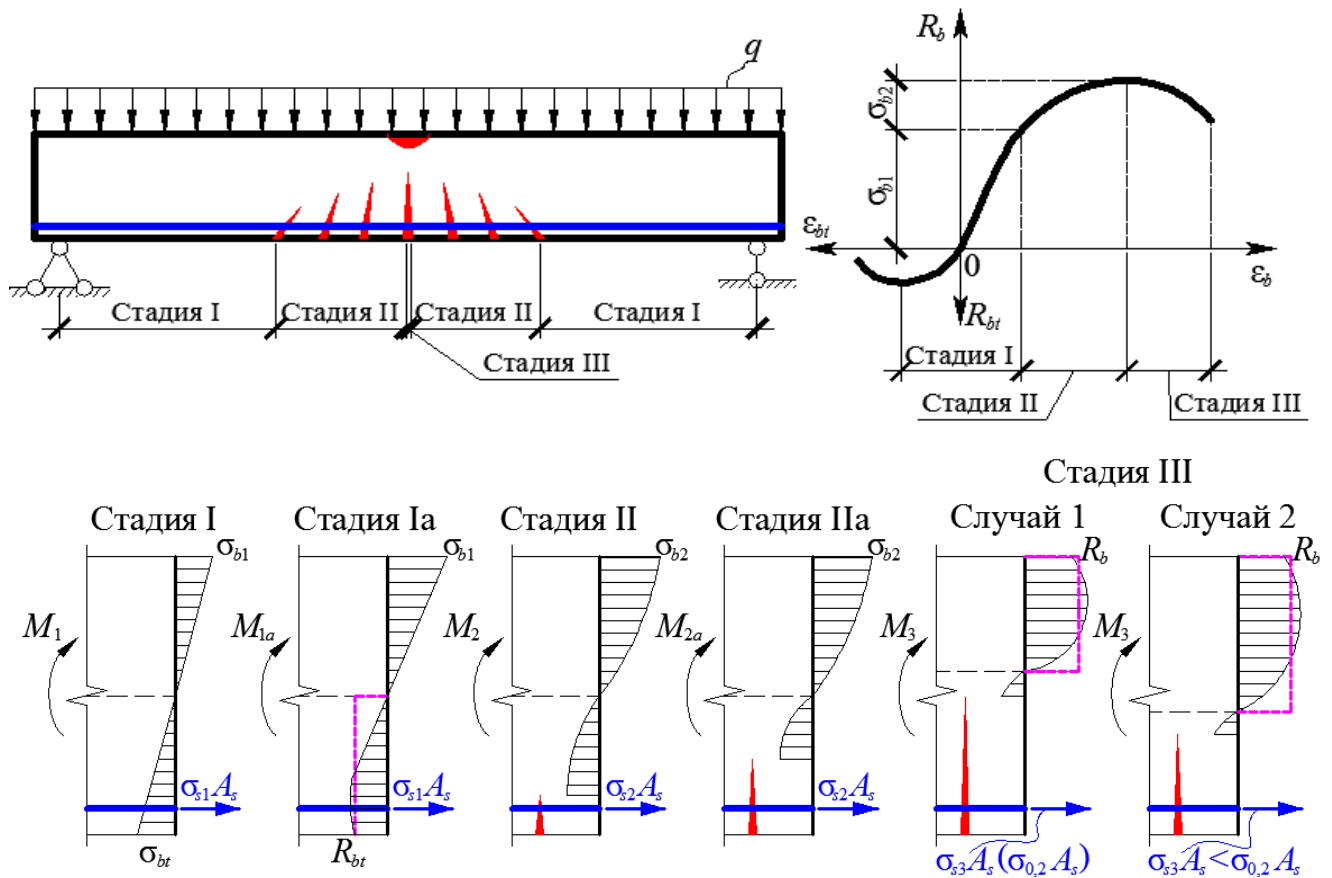


Рисунок 1.9 – Стадии напряженно деформируемого состояния в нормальных сечениях при изгибе элемента без предварительного напряжения

На данный момент не существует методик «сквозного» расчета железобетонных элементов от начала нагружения до потери несущей способности по указанным выше стадиям (рисунок 1.9). Это объясняется тем, что большинство экспериментальных исследований железобетонных конструкций проводилось с целью получения количественных данных об их сопротивлении без учета вопросов, связанных с физической природой происходящих процессов. Исследованиям в данном направлении посвящены работы Н.М. Абрамова, Б.Н. Акимова, Ю.В. Астахова,

И.Н. Ахвердова, А.Н. Бамбуры, В.Я. Бачинского, Н.А. Белелюбского, Н.Б. Богуславского, В.М. Бондаренко, С.С. Ватагина, А.А. Гвоздева, А.Б. Голышева, С.И. Дружинина, В.А. Ерышева, Д.Ф. Жаринцева, Н.И. Карпенко, А.А. Котова, И.С. Кроль, А.С. Кудашева, О.Г. Кумпяка, А.Ф. Лолейта, И.И. Лучко, В.Л. Мирошниченко, В.М. Митасова, В.В. Михайлова, В.И. Мурашева, Г.В. Мурашкина, Я.М. Немировского, В.С. Плевкова, И.С. Подольского, В.П. Полищука, Н.Н. Попова, О.В. Радайкина, С.И. Рудницкого, А.С. Самошкина, В.М. Тихомирова, Э.Е. Сигалова, В.В. Скочеляса, А.Е. Смольского, Б.С. Соколова, М.М. Холмянского, В. Budiansky, A.G. Evans, J.W. Hutchinson и многих др. [21, 22, 24, 27, 29, 30, 32, 38, 39, 43, 46, 47, 54, 55, 60, 68, 69, 70, 74, 79, 81, 82, 87, 100]. В результате нормативные документы и руководства по расчету, как правило, построены на эмпирических зависимостях, в частности на методе предельного состояния, который не имеет теоретического обоснования перехода от одной стадии деформирования к другой [68].

Создание алгоритмов «сквозного» расчета, свободных от противоречий расчета по предельным состояниям стало возможно на основе энергетического подхода к расчету железобетонных элементов, предложенного В.М. Митасовым и В.В. Адищевым [12, 57-64, 106]. Алгоритм «сквозного» расчета предполагает расчет сечения железобетонной балки с помощью иерархических моделей в следующих стадиях:

Стадия 1. Деформирование до образования трещины. Математическая модель, описывающая данную стадию, содержит систему уравнения равновесия, а также кинематические соотношения.

Стадия 2. Возникновение и стабилизация первичной трещины. Динамический процесс образования трещины (переход от состояния без трещины к состоянию с трещиной) описывается уравнениями равновесия, а также дополнительным уравнением энергетического баланса, учитывающее работу внешних сил. При стабилизации трещины для «замыкания» системы уравнений, добавляется уравнение баланса полной энергии при стабилизации трещины.

Стадия 3. Возникновение и стабилизация вторичных трещин. Математическая модель содержит уравнения аналогичные второй стадии, при этом учитывается перераспределения энергии между трещинами.

Стадия 4. Подрастание и остановка первичной и вторичных трещин. В математическую модель добавляется J-интеграл Черепанова – Райса [96].

Стадия 5. Разрушение изгибаемого элемента, которое может происходить по двум сценариям: «квазихрупкому» (разрушение сжатого бетона) и «квазипластическому» (разрыв арматуры).

Следует отметить, что в качестве возможных критериев образования трещин обычно принимают достижение деформациями фибровых волокон предельного значения или концепцию Нейбера [71], согласно которой трещинообразование происходит, когда в некотором объеме растянутого бетона средняя плотность энергии деформирования достигает значения удельной энергии разрушения.

В настоящее время разработаны математические модели для описания процесса деформирования на первой и второй стадиях [1, 8]. Условия перехода от одной стадии к другой имеют в своей основе уравнения энергетического баланса, в которые входит дополнительная работа внешних сил.

Решение задачи определения прогибов балки и представление функции прогиба в виде аналитических аппроксимаций становятся одними из основных задач при разработке указанных выше математических моделей.

1.5. Аналитические суперэлементы в алгоритмах «сквозного» расчета железобетонных изгибаемых элементов с применением программных комплексов

В последние десятилетия появилось большое количество расчетных комплексов (ANSYS, SAMTECH, SCAD, ЛИРА-САПР, STARK ES и др.) для решения задач механики деформированного твердого тела, основанных на использовании МКЭ, разработанного Р. Курантом [101] и А.П. Хренниковым [105]. Расчетные ком-

плексы на базе МКЭ широко используются при расчете и проектировании строительных сооружений. Возможность конечно-элементного моделирования позволяет эффективно решать задачи большой размерности. В работе [33] отмечалось, что если рассчитываемая система слишком громоздка, то более рационально организовать рекурсивный расчет с расчленением всей системы на подсистемы – суперэлементы. Этот прием может оказаться удачным, когда расчленение на подсистемы происходит естественно: например, здание из объемных блоков (объемный блок – суперэлемент) или диафрагма высотного здания, собирающаяся из отдельных панелей (панель – суперэлемент, см. рисунок 1.10).

Основная идея метода суперэлементов (метод подструктур), сформулированная Е.С. Пржеминичем [75], К. Мейснером [56], Р.П. Федоренко [88] и др., состоит в независимости расчета отдельных суперэлементов (подструктур) с помощью МКЭ и последующего учета их взаимодействия. Расчет сложной системы можно выполнить обычным способом: нанести необходимую сетку и рассчитать всю систему целиком. Однако большое количество расчетных узлов, элементов, неизвестных перемещений может сильно затруднить решение задачи. Используя суперэлементы, можно провести расчет поэтапно, существенно снизив на каждом этапе размерность задачи.

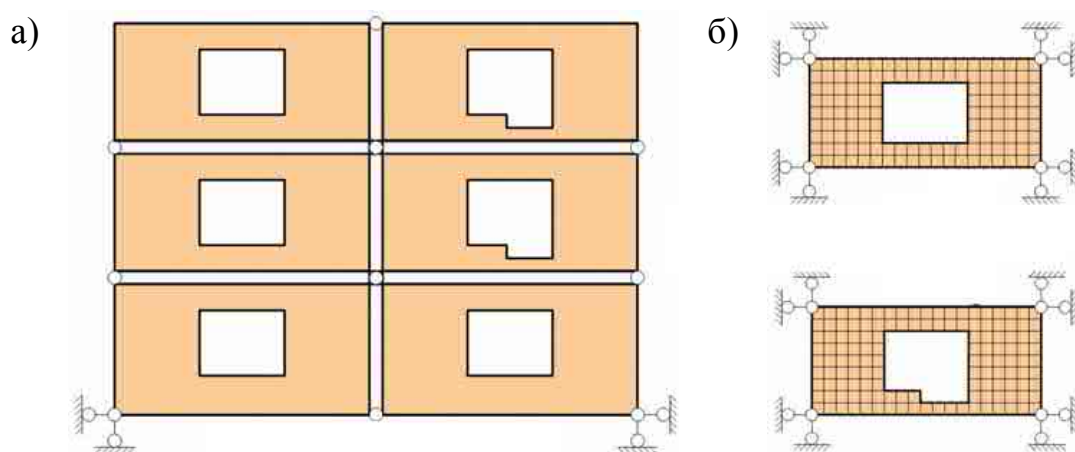


Рисунок 1.10 – Расчетная модель с суперэлементами:

основная схема (а); суперэлементы (б)

Реализация метода суперэлементов достаточно подробно описана в работе [33]. Автор предлагает конечно-элементную дискретизацию всех суперэлементов. При этом, расчет системы, набранной из суперэлементов, аналогичен обыкновенной процедуре МКЭ.

При расчете железобетонных конструкций одним из основных условий адекватности расчета является учет нелинейности деформирования бетона при нагружении. В работе [33] предлагается учитывать физическую нелинейность с помощью применения метода суперэлементов. Предлагается процедура построения матрицы жесткости стержня на m -м шаге или на n -й итерации. Изменение жесткостных характеристик сечений по длине обусловлено нелинейной работой материала и изменением усилий по длине стержня. То есть в действительности стержень (ригель или колонна) из неупругого материала представляется в виде упругого стержня с переменными жесткостями. В работе [33] отмечено, что каждое i -е сечение имеет не только присущие на m -м шаге или на n -й итерации жесткостные характеристики (EL_{yi} , EL_{zi} , GI_{kpi} , EF_{is} , GI_{kpi}), но и абсолютно жесткую вставку a_i и угол чистого вращения θ_i (рисунок 1.11). Что бы учесть эти эффекты необходимо по длине стержня вводить промежуточные узлы, что резко увеличивает размерность решаемой задачи.

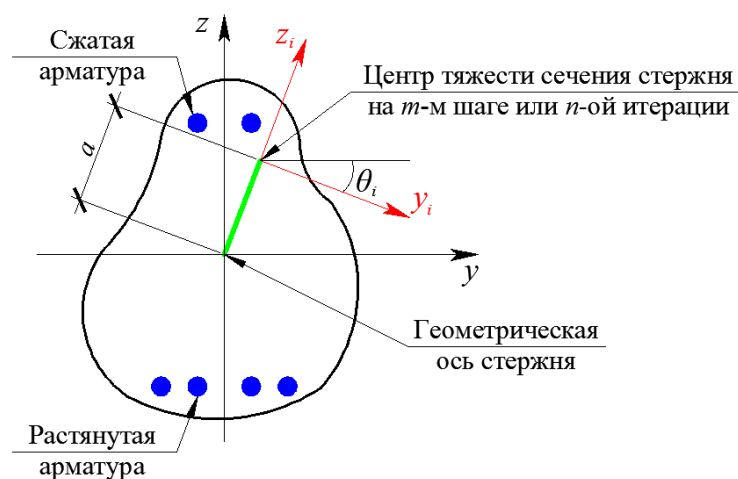


Рисунок 1.11 – Расчетное сечение стержня на m -м шаге или на n -й итерации

В настоящее время формируется другой подход к разработке гибридных численно-аналитических методов расчета [12, 57-64, 106], позволяющих создавать

численно-аналитические алгоритмы «сквозных» расчетов для определения деформированного состояния в изгибаемых, сжатых и сжато-изогнутых железобетонных элементах. В рамках модифицированного метода подструктур («метод аналитических подструктур») ригели и колонны, а также из их совокупности в виде рам рассчитываются как «аналитические суперэлементы» (рисунок 1.12). При этом напряженно-деформированное состояние в «аналитических суперэлементах» определяется не методом конечных элементов, а численно-аналитическим методом, то есть решением системы алгебраических уравнений равновесия и кинематических соотношений.

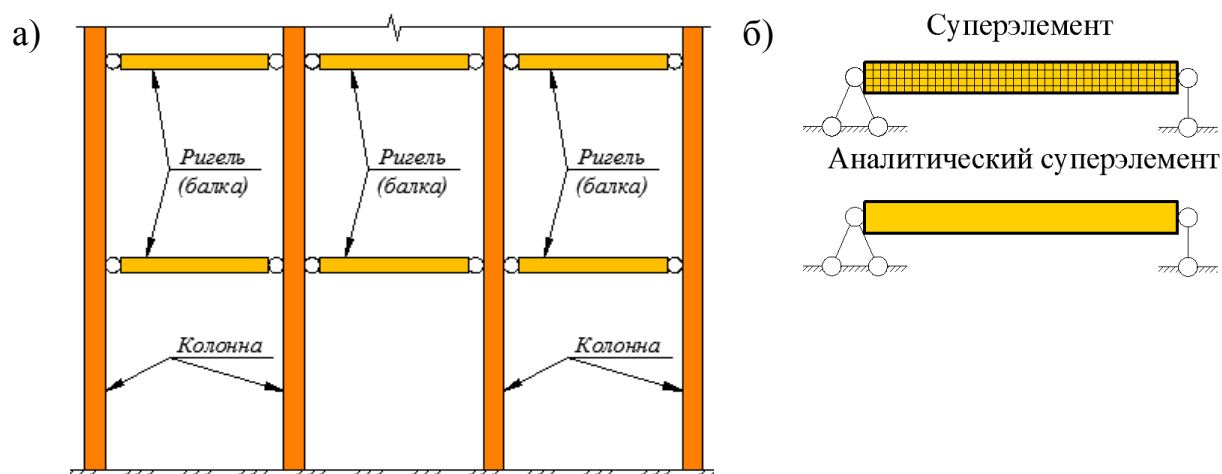


Рисунок 1.12 – Расчетная модель фрагмента поперечной рамы здания:
основная схема (а); суперэлементы (б)

Идея модифицированного метода подструктур заключается в проведении расчета не для всей конструкции в целом, а для совокупности иерархически связанных конструктивных элементов в виде «аналитических суперэлементов», объединяющихся в полную конструкцию с использованием МКЭ.

1.6. Выводы по главе 1

1) Анализ литературных источников, посвященных способам аппроксимации диаграмм деформирования бетона и арматуры выявил, что в настоящее время существует достаточное количество публикаций посвященных данной проблеме.

Предложения по учету криволинейной эпюры напряжений-деформаций бетона в явном виде представлено в работах В.В. Адищева, В.Н. Байкова, В.М. Бондаренко, Н.И. Карпенко, А.С. Залесова, Завьялов Ю.С., Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, В.М. Митасова, В.И. Мурашева, Н.Н. Попова и др. Дополнительно рассмотрены способы аппроксимации диаграмм деформирования бетона рекомендуемые отечественными и зарубежными нормативными документами. Наиболее простым и эффективным способом аппроксимации диаграмм бетона является сплайн-функции. Универсальность данного метода позволяет с равным успехом аппроксимировать диаграммы бетона и арматуры.

2) При определении физико-механических характеристики бетона (прочность, предельные деформации при растяжении и сжатии) экспериментально наблюдается большой разброс данных, 50% которых во многих случаях не удовлетворяют нормальному закону распределения. Это объясняется тем, что бетон является структурно-неоднородным материалом, представляющий собой многофазную среду, включающую в себя цементный камень, заполнители, имеющие различные физико-механические характеристики. Для решения данной проблемы в работе В.В. Адищева и Д.С. Шмакова был предложен альтернативный вероятностно-статистическому подходу метод построения диаграмм деформирования в виде нечетких функций.

3) Анализ литературы данных показал, что на данный момент не существует методик, позволяющих проводить «сквозной» расчет железобетонных элементов от начала нагружения до потери несущей способности. Это объясняется тем, что большинство экспериментальных исследований железобетонных конструкций проводилось с целью получения количественных данных об их сопротивлении без учета вопросов, связанных с физической природой происходящих процессов. Существующие нормативные документы и руководства по расчету построены на эмпирических зависимостях, в частности на методе предельного состояния, который не имеет теоретического обоснования перехода от одной стадии деформирования к другой.

4) Выявлено, что на основе энергетического подхода к расчету железобетонных элементов, предложенного В.М. Митасовым и В.В. Адищевым, возможно создание алгоритма «сквозного» расчета. Данный алгоритм предполагает расчет сечения железобетонной балки с помощью иерархических моделей от начала нагружения до потери несущей способности. Условия перехода от одной стадии к другой имеют в своей основе уравнения энергетического баланса, в которые входит дополнительная работа внешних сил. Решение задачи определения прогибов балки и представление функции прогиба в виде аналитических аппроксимаций становятся одними из основных задач при разработке указанных выше математических моделей.

5) Предложена возможность использования численно-аналитических алгоритмов «сквозных» расчетов, определяющих деформированное состояние в изгибаемых, сжатых и сжато-изогнутых железобетонных элементах, для создания и решения «аналитических суперэлементов». В рамках модифицированного метода подструктур («метод аналитических подструктур») ригели и колонны, а также из их совокупности в виде рам рассчитываются как «аналитические суперэлементы». Идея модифицированного метода подструктур заключается в проведении расчета не для всей конструкции в целом, а для совокупности иерархически связанных конструктивных элементов в виде «аналитических суперэлементов», объединяющихся в полную конструкцию с использованием МКЭ.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

2.1. Численно-аналитический метод определения прогибов железобетонных балок с учетом физической нелинейности материалов

2.1.1. Постановка задачи в общем виде

Рассмотрим сечение произвольной формы (рисунок 2.1), которое можно условно разделить по высоте на произвольное количество «прямоугольных» слоев N_R . Пусть i -й прямоугольный слой ($i = 1, \dots, N_R$) имеет основание равное b_i и расположен относительно верхнего слоя сечения на расстоянии h_i . Сечение армировано произвольным числом слоев арматуры N_S , тогда для i -го арматурного слоя имеем: $A_{s,i}$ – площадь слоя, $h_{s,i}$ – расстояние от верхнего слоя сечения до арматурного слоя.

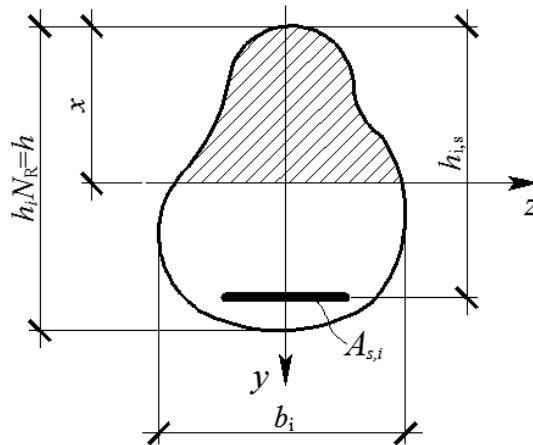


Рисунок 2.1 – Сечение произвольной формы

Считая, что растянут нижний слой сечения, запишем уравнение равновесия:

$$\int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) b(y) dy + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) y b(y) dy + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} (h_{s,i} - x) = M. \quad (2.2)$$

где h – полная высота сечения; x – высота сжатой зоны в сечении.

Преобразуем систему уравнений (2.1) – (2.2) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N_R} b_i \int_{h_{i-1}-x}^{h_i-x} \sigma_b(y) dy + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N_R} b_i \int_{h_{i-1}-x}^{h_i-x} \sigma_b(y) y dy + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} (h_{s,i} - x) = M. \quad (2.4)$$

В этих уравнениях $h_0=0$, $h_{N_R}=h$. Рассмотрим следующую замену переменных: $y = \rho \varepsilon$, где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя. Тогда, для каждого слоя сечения

$$\rho = -\frac{h_i - x}{\varepsilon_{b,i}}, \quad i = 0, \dots, N_R,$$

откуда

$$y = -\frac{h_i - x}{\varepsilon_{b,i}} \varepsilon, \quad \sigma_b(y) = \sigma_b\left(-\frac{h_i - x}{\varepsilon_{b,i}} \varepsilon\right) = \psi_b(\varepsilon),$$

где $\psi(\varepsilon)$ – функция, аппроксимирующая диаграмму бетона.

Произведя замену переменных в (2.3) – (2.4), получим:

$$\sum_{i=1}^{N_R} b_i \left(-\frac{h_i - x}{\varepsilon_{b,i}}\right)^{\varepsilon_{bt}} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} = 0, \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{N_R} b_i \left(-\frac{h_i - x}{\varepsilon_{b,i}}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{s,i} A_{s,i} (h_{s,i} - x) = M. \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.5) - (2.6) содержит в качестве неизвестных следующие переменные: $\varepsilon_{b,i}$ – деформации бетона в каждом слое ($i = 1, \dots, N_R$); x – положение нейтральной оси в сечении; $\sigma_{s,i}$ – напряжение в арматурных слоях ($i = 1, \dots, N_S$).

Для замыкания (2.5) - (2.6) используется гипотеза плоских сечений, из которой следует:

$$\begin{cases} \varepsilon_{b,i} = \frac{h_i - x}{h - x} \varepsilon_{bt}, & i = 1 \dots N_R - 1; \\ \varepsilon_{s,i} = \frac{h_{s,i} - x}{h - x} \varepsilon_{bt}, & i = 1 \dots N_S, \end{cases} \quad (2.7)$$

где ε_{bt} – деформация нижнего слоя (растянутого) сечения.

Напряжение в арматурном слое находим через соответствующую этому слою деформацию $\varepsilon_{s,i}$. Перемещение сечений определяется по формуле Максвелла - Мора (метод единичной нагрузки):

$$\Delta(z_0) = \sum_i \int_0^L M_1(z) \chi(z) dz, \quad (2.8)$$

где $M_1(z_0)$ – изгибающий момент от действия единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения по длине балки, в сечении с координатой z_0 для i -го слоя; $\chi(z)$ – кривизна от приложенной нагрузки по длине балки.

$$\chi(z) = \frac{1}{\rho(z)} = \frac{\varepsilon_{bt}(z)}{h - x(z)}. \quad (2.9)$$

2.1.2. Постановка задачи в частном виде

Рассмотрим произвольную железобетонную балку прямоугольного сечения, армированную одним семейством арматуры. На рисунке 2.2 изображено расчетное сечение, в котором действует изгибающий момент M , и эпюры деформаций и напряжений в сечении. На нейтральной линии ($y = 0$) напряжения и деформации равны нулю. Уравнения равновесия (2.1) – (2.2) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) b(y) dy + \sigma_s A_s = 0, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) y b(y) dy + \sigma_s A_s (h_0 - x) = M, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

где $\sigma_b(y)$ – функция распределения напряжений по сечению; $b(y)$ – функция изменения ширины балки по сечению; σ_s – напряжение в слое арматуры; A_s – суммарная площадь сечения арматуры; h – высота сечения; x – высота сжатой зоны сечения; h_0 – полезная высота сечения балки; M – действующий в сечении изгибающий момент.

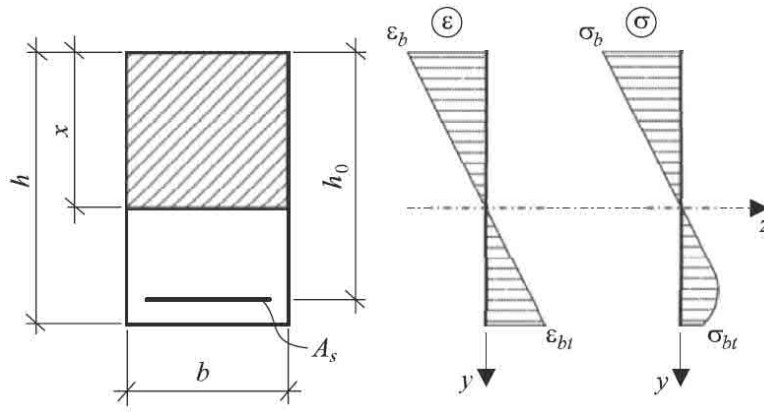


Рисунок 2.2 – Распределение деформаций и напряжений по высоте сечения балки

При образовании трещин в сжатой зоне напряжения, как правило, соответствуют линейно-упругому закону деформирования (рисунок 2.2).

Считая, что сечение балки прямоугольное $b(y)=b$, преобразуем систему уравнений (2.10) - (2.11) следующим образом:

$$\begin{cases} b \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) dy + \sigma_s A_s = 0, & (2.12) \\ b \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) y dy + \sigma_s A_s (h_0 - x) = M. & (2.13) \end{cases}$$

Согласно гипотезе плоских сечений, запишем два кинематических соотношения (рисунок 2.1):

$$\begin{cases} \varepsilon_b = \frac{x}{x - h_0} \varepsilon_s, & (2.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{bt} = \frac{h - x}{h_0 - x} \varepsilon_s, & (2.15) \end{cases}$$

где ε_b – деформация крайнего сжатого волокна сечения; ε_{bt} – деформация крайнего растянутого волокна сечения; ε_s – деформация растяжения арматуры.

Выполним следующую замену переменных: $y = \rho \varepsilon$, где ρ – радиус кривизны в сечении. Для каждого сечения $\rho = -x / \varepsilon_b$, откуда

$$y = -\frac{x}{\varepsilon_b} \varepsilon, \quad \sigma_b(y) = \sigma_b\left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \varepsilon\right) = \psi_b(\varepsilon),$$

где $\psi(\varepsilon)$ – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования бетона (см. рисунок 1.4). Произведя замену переменных в (2.12) - (2.13), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} b \left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \right) \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) d\varepsilon + \sigma_s A_s = 0, \\ b \left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sigma_s A_s (h_0 - x) = M. \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} b \left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sigma_s A_s (h_0 - x) = M. \end{aligned} \right. \quad (2.17)$$

Введем безразмерные величины: $\xi = x / h_0$ – относительная высота сжатой зоны; $\zeta = z / h_0$ – безразмерная координата по длине балки; $H = h / h_0$; $\mu_s = A_s / (bh_0)$ – коэффициент армирования сечения; $\bar{\varphi}(\varepsilon_s) = \varphi(\varepsilon_s) / \sigma_{02}$; $\bar{\psi}(\varepsilon) = \psi(\varepsilon) / \sigma_{02}$; $\bar{M} = M / (bh_0^2 \sigma_{02})$. Функция $\sigma_s = \varphi(\varepsilon_s)$ аппроксимирует диаграмму деформирования арматуры. Для обезразмеривания удобно выбрать значение напряжения σ_{02} для арматуры – напряжение соответствующее остаточной деформации 0,2%. Тогда в безразмерном виде уравнения равновесия (2.16) - (2.17) принимают вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\xi}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_s \bar{\varphi}(\varepsilon_s), \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\xi}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + (1 - \xi) \mu_s \bar{\varphi}(\varepsilon_s) = \bar{M}, \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

соответственно кинематические соотношения (2.14) - (2.15) приводятся к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_b = \frac{\xi}{\xi - 1} \varepsilon_s, \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{bt} = \frac{H - \xi}{1 - \xi} \varepsilon_s, \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

Наибольший интерес представляет состояние предразрушения расчетного сечения, когда деформация крайнего растянутого волокна достигает предельного значения ε_{bt}^{crc} . Выберем узловые значения $\varepsilon_{bt,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в интервале $0 < \varepsilon_{bt,i} < \varepsilon_{bt}^{crc}$, где $\varepsilon_{bt}^{crc} = \varepsilon_6$ – предельная деформация растяжения бетона согласно

диаграмме деформирования бетона (см. рисунок 1.4). Для каждого узлового значения деформаций растяжения бетона получаем систему уравнений (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), состоящую из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\varepsilon_{b,i}$, $\varepsilon_{s,i}$, ξ_i , $\bar{M}_i$. Из уравнений (2.18), (2.20), (2.21) определяются значения $\varepsilon_{b,i}$, $\varepsilon_{s,i}$, ξ_i . Затем из уравнения (2.19) определяется значение безразмерного изгибающего момента $\bar{M}_i$. Такая процедура существенно упрощает решение системы (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), кроме того, при этом непосредственно вычисляется изгибающий момент, соответствующий возникновению трещины.

Если известна зависимость изгибающего момента от координаты ζ по длине балки, то безразмерный изгибающий момент является функцией $\bar{M}(\zeta)$. Записав условия равенства момента значениям $\bar{M}_i$, получим уравнения для определения изначально неизвестных координат сечений ζ_i :

$$\bar{M}_i = \bar{M}(\zeta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

В каждом из этих сечений реализуется напряженно-деформированное состояние, соответствующее деформации растяжения нижнего волокна $\varepsilon_{bt,i}$.

Перемещение сечения с координатой z_0 определяется по известной формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta(z_0) = \int_0^l M_1(z) \chi(z) dz, \quad (2.23)$$

где $M_1(z)$ – распределение по длине балки изгибающего момента от действия единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (в сечении с координатой z_0); l – длина балки; $\chi(z)$ – распределение по длине балки кривизны нейтральной линии, вычисляется по формуле:

$$\chi(z) = -\frac{\varepsilon_b(z)}{x(z)},$$

или в безразмерном виде

$$\bar{\chi}(\zeta) = -\frac{\varepsilon_b(\zeta)}{\xi(\zeta)}. \quad (2.24)$$

Формула (2.23) в безразмерном виде принимает вид:

$$\bar{\Delta}(\zeta_0) = \int_0^L \bar{M}_1(\zeta) \bar{\chi}(\zeta) d\zeta \quad (2.25)$$

где $L = l / h_0$ – безразмерная длина балки, $\bar{\Delta}(\zeta_0) = \Delta(z_0) / h_0$,

$$\bar{M}_1(\zeta) = \frac{M_1(z)}{bh_0^2\sigma_{02}}.$$

Как будет показано ниже, вследствие физической нелинейности поведения бетона высота сжатой зоны по длине балки не является величиной постоянной, а зависит от координаты ζ . Воспользуемся нелинейной аппроксимацией функции $\bar{\chi}(\zeta)$, представив её в каждом из интервалов (ζ_{i-1}, ζ_i) в виде следующих сплайн-функций:

$$\bar{\chi}_i(\zeta) = \bar{\chi}(\zeta_{i-1}) + A_{i-1}(\zeta - \zeta_{i-1}) + a_i(\zeta - \zeta_{i-1})^{b_i}, \quad (2.26)$$

где A_{i-1} – производная кривизны $\bar{\chi}'(\zeta_{i-1})$ в точке ζ_{i-1} ; a_i, b_i – коэффициенты, определяемые из условия «склейки» аппроксимирующих функций в узле с координатой в интервале (ζ_i, ζ_{i+1}) :

$$\begin{cases} \bar{\chi}_i(\zeta_i) = \bar{\chi}_{i+1}(\zeta_i), \\ \bar{\chi}'_i(\zeta_i) = \bar{\chi}'_{i+1}(\zeta_i). \end{cases}$$

Производную A_{i-1} удобно вычислять по формуле:

$$A_{i-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\chi}(\zeta_{i-1}) - \bar{\chi}(\zeta_{i-2})}{\zeta_{i-1} - \zeta_{i-2}} + \frac{\bar{\chi}(\zeta_i) - \bar{\chi}(\zeta_{i-1})}{\zeta_{i-1} - \zeta_i} \right). \quad (2.27)$$

Если рассмотреть два соседних участка эпюры кривизны, соответствующих двум интервалам $(\zeta_{i-2}, \zeta_{i-1})$, (ζ_{i-1}, ζ_i) , то первое слагаемое в правой части выражения (2.27) представляет собой «секущий модуль» на участке $(\zeta_{i-2}, \zeta_{i-1})$, а второе – «секущий модуль» на участке (ζ_{i-1}, ζ_i) . Тогда соотношение (2.27) означает, что тангенциальный модуль вычисляется, как среднее арифметическое «секущих модулей».

Из условий «склейки» следуют формулы для определения коэффициентов a_i , b_i :

$$b_i = \frac{A_{i-1} - A_i}{A_{i-1}(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - (\bar{\chi}(\zeta_{i+1}) - \bar{\chi}(\zeta_i))},$$

$$a_i = \frac{(\bar{\chi}(\zeta_{i+1}) - \bar{\chi}(\zeta_i)) - A_{i-1}(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)^{b_i}}.$$

После определения относительной кривизны $\bar{\chi}(\zeta)$, вычисляются прогибы в произвольной точке ζ_0 по формуле (2.25). Для аппроксимации функции распределения прогиба по длине балки используем сплайн-функции, аналогичные (2.26):

$$\bar{W}(\zeta) = \bar{W}(\zeta_{i-1}) + C_{i-1}(\zeta - \zeta_{i-1}) + c_i(\zeta - \zeta_{i-1})^{d_i}, \quad (2.28)$$

где

$$C_{i-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{W}(\zeta_{i-1}) - \bar{W}(\zeta_{i-2})}{\zeta_{i-1} - \zeta_{i-2}} + \frac{\bar{W}(\zeta_i) - \bar{W}(\zeta_{i-1})}{\zeta_{i-1} - \zeta_i} \right),$$

$$d_i = \frac{C_{i-1} - C_i}{C_{i-1}(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - (\bar{W}(\zeta_{i+1}) - \bar{W}(\zeta_i))},$$

$$c_i = \frac{(\bar{W}(\zeta_{i+1}) - \bar{W}(\zeta_i)) - C_{i-1}(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)^{d_i}}.$$

Значение $\bar{W}(\zeta_i)$ вычисляются по формуле (2.25):

$$\bar{W}(\zeta_i) = \bar{\Delta}(\zeta_i) = \int_0^L \bar{M}_{li}(\zeta) \bar{\chi}(\zeta) d\zeta,$$

где $\bar{M}_{li}(\zeta)$ – распределение по длине балки безразмерного изгибающего момента от действия единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения в точке с координатой ζ_i .

2.1.3. Реализация численно-аналитического метода

В качестве примера применения предложенной выше методики, рассмотрим задачу об изгибе однопролетной шарнирно опертой балки длиной l , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q .

Примем следующие геометрические характеристики балки: высота поперечного сечения: $h = 0,4$ м; полезная высота поперечного сечения: $h_0 = 0,37$ м; ширина поперечного сечения: $b = 0,2$ м; длина пролета: $l = 4$ м. Материал балки железобетон: условный класс бетона В20; класс арматурной стали А400 (модуль упругости стали $E_s = 200000$ МПа, $\sigma_{02} = 460$ МПа). Коэффициент армирования μ_s варьируется. Армирование балки выполнено в соответствии со схемой, представленной на рисунке 2.2.

Различные способы аппроксимации диаграмм деформирования бетона представлены в главе 1. В рассматриваемом примере диаграмма бетона и арматуры аппроксимируются сплайн-функциями (см. рисунки 1.4 и 1.5). Таблица 2.1 содержит координаты узлов аппроксимации для построения диаграмм бетона класса В20 и арматуры А400.

Таблица 2.1 – Узлы аппроксимации для построения диаграммы бетона и арматуры

№ узла	1	2	3	4	5	6
Бетона класса В20						
σ , МПа	-5,70	-15,00	-5,70	0,82	1,35	0,80
ε , м/м	$-4,80 \cdot 10^{-3}$	$-2,50 \cdot 10^{-3}$	$-0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,03 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$
Арматура класса А400						
σ , МПа	400	460	520	590	-	-
ε , м/м	$2,00 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	$5,51 \cdot 10^{-3}$	$58,04 \cdot 10^{-3}$	-	-

На первом шаге проводится расчет разрушаемого сечения. Принимаем $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^{crc} = \varepsilon_6$ согласно представленным в таблице 2.1 узлам диаграммы деформирования бетона. Три неизвестные ε_b , ε_s , ξ определяются как решение системы уравнений (18), (20), (21). Из уравнения (19) определяется значение безразмерного изгибающего момента, где $\bar{M}$ в соответствии с выдвинутой гипотезой можно считать моментом трещинообразования, $\bar{M} = \bar{M}_{crc}$.

Зависимость изгибающего момента от координаты по длине шарнирно опертой балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q , описывается известной формулой:

$$\bar{M}(\zeta) = \frac{\bar{q}\zeta L}{2} - \frac{\bar{q}\zeta^2}{2}, \quad (2.29)$$

где относительная нагрузка $\bar{q} = q / (b\sigma_{02})$. Для шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной нагрузки трещина может образоваться в сечении с координатой $\zeta = L/2$, при нагрузке, определяемой из соотношения

$$\bar{M}_{crc} = \bar{q}_{crc} L^2 / 8.$$

В таблице 2.2 представлены результаты расчета разрушаемого сечения, выполненные в программном комплексе Mathcad 15, при различных коэффициентах армирования.

Таблица 2.2 – Результаты расчета НДС разрушаемого сечения в состоянии предразрушения при различных коэффициентах армирования

Безразмерные физические величины	Значения физических величин при различных коэффициентах армирования			
	$\mu_s = 0,001$	$\mu_s = 0,0025$	$\mu_s = 0,005$	$\mu_s = 0,01$
$\varepsilon_b \cdot 10^4$	-1,493	-1,561	-1,663	-1,875
$\bar{\psi}(\varepsilon_b) \cdot 10^3$	-9,252	-9,669	-10,01	-12,00
$\varepsilon_{bt} \cdot 10^4$	2,700	2,700	2,700	2,700
$\bar{\psi}(\varepsilon_{bt}) \cdot 10^3$	1,739	1,739	1,739	1,739
$\varepsilon_s \cdot 10^4$	2,385	2,380	2,373	2,357
$\bar{\varphi}(\varepsilon_s)$	0,104	0,103	0,103	0,102
ξ	0,385	0,396	0,412	0,443
$\bar{\chi} \cdot 10^4$	3,879	3,941	4,035	4,231
$\bar{M} \cdot 10^3$	1,157	1,277	1,473	1,864
$\bar{q} \cdot 10^5$	7,917	8,742	10,08	12,76
$\bar{\Delta} \cdot 10^3$	3,653	3,953	4,256	4,617

В соответствии с описанной выше процедурой выбираем узловые значения $\varepsilon_{bt,i}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) в интервале $0 < \varepsilon_{bt,i} < \varepsilon_{bt}^{crc}$, где $\varepsilon_{bt}^{crc} = \varepsilon_6$ – предельная деформация растяжения бетона согласно диаграмме деформирования бетона. Интервал изменения деформаций на участке линейно-упругого деформирования 0-4 (рисунок 1.4) не

разбивался на подынтервалы, участок 4-5 разбивался на четыре равных интервала, участок 5-6 разбивался на два равных интервала. Из уравнений (2.18), (2.20), (2.21) определяются значения $\varepsilon_{b,i}$, $\varepsilon_{s,i}$, ξ_i . Затем из уравнения (2.19) определяется значение безразмерного изгибающего момента $\bar{M}_i$.

Из уравнений (2.22) и (2.29) определяется относительная координата сечения ζ_i , в котором изгибающий момент равен $\bar{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Затем, находятся относительные величины кривизны и прогиба в узловых точках по формулам (2.24) и (2.25) соответственно и строятся аппроксимирующие функции для кривизны и прогиба.

По определенным узловым значениям $\varepsilon_{b,i}$, ξ_i , $\bar{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) с использованием аппроксимирующих функций вида (2.26), (2.28) строятся распределения для высоты сжатой зоны и изгибающего момента в состоянии предразрушения. На рисунках 2.3 и 2.4 приведены распределения относительных высот сжатой зоны ξ и относительных изгибающих моментов $\bar{M}$ при различных значениях коэффициента армирования μ_s .

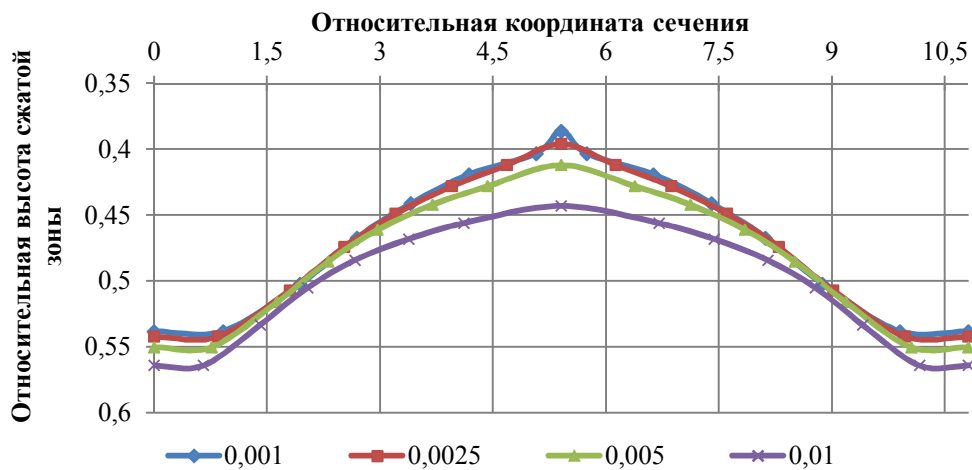


Рисунок 2.3 – Распределения относительных высот сжатой зоны при различных значениях коэффициента армирования ($\mu_s = 0,001; 0,0025; 0,005; 0,01$)

Вследствие физической нелинейности поведения бетона высота сжатой зоны по длине балки не является величиной постоянной (рисунок 2.3), кроме пропорных участков, на которых выполняются соотношения закона Гука.

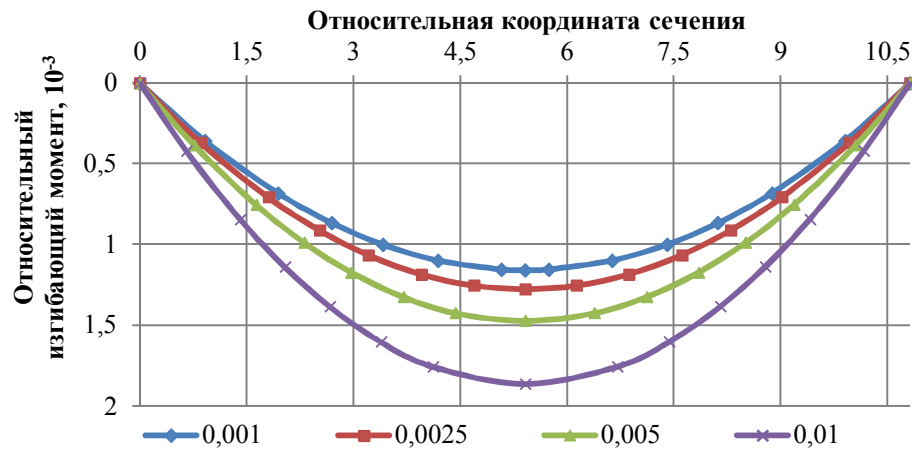


Рисунок 2.4 – Распределения относительных изгибающих моментов при различных значениях коэффициента армирования ($\mu_s = 0,001; 0,0025; 0,005; 0,01$)

На рисунке 2.5 представлены распределения относительных кривизн по относительной длине балки при различных значениях коэффициента армирования μ_s . Характерно резкое увеличение кривизны по середине балки. На этом участке деформации растяжения крайнего нижнего волокна попадают на ниспадающую ветвь диаграммы деформирования бетона (рисунок 1.4): $\varepsilon_5 < \varepsilon_{bt} < \varepsilon_6$

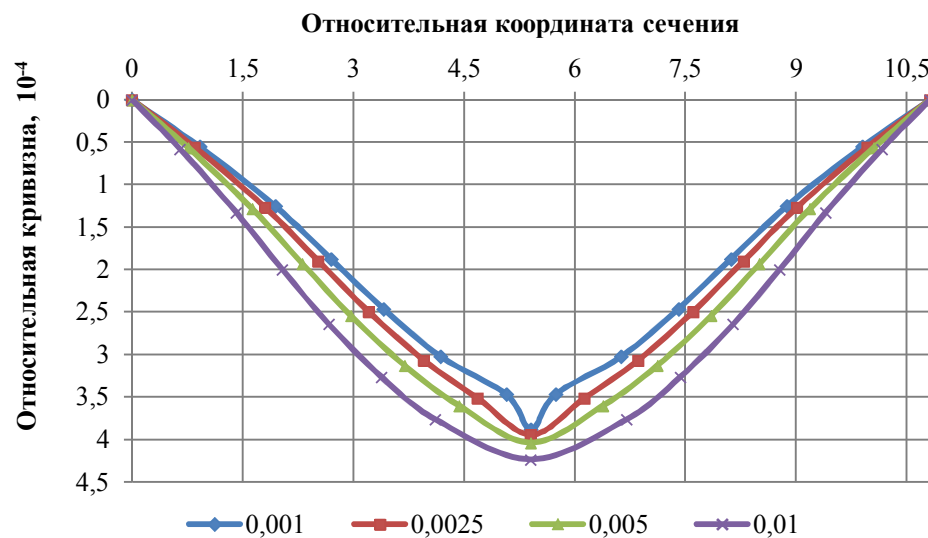


Рисунок 2.5 – Распределения относительных кривизн при различных значениях коэффициента армирования ($\mu_s = 0,001; 0,0025; 0,005; 0,01$)

Распределения относительных прогибов по относительной длине балки при различных значениях коэффициента армирования μ_s показаны на рисунке 2.6. Среднее сечение находится в состоянии предразрушения. Интересно, что большему коэффициенту армирования соответствует большее значение максимальных прогибов. Этот факт объясняется тем, что при увеличении коэффициента армирования соответственно увеличивается изгибающий момент, соответствующий образованию трещины.

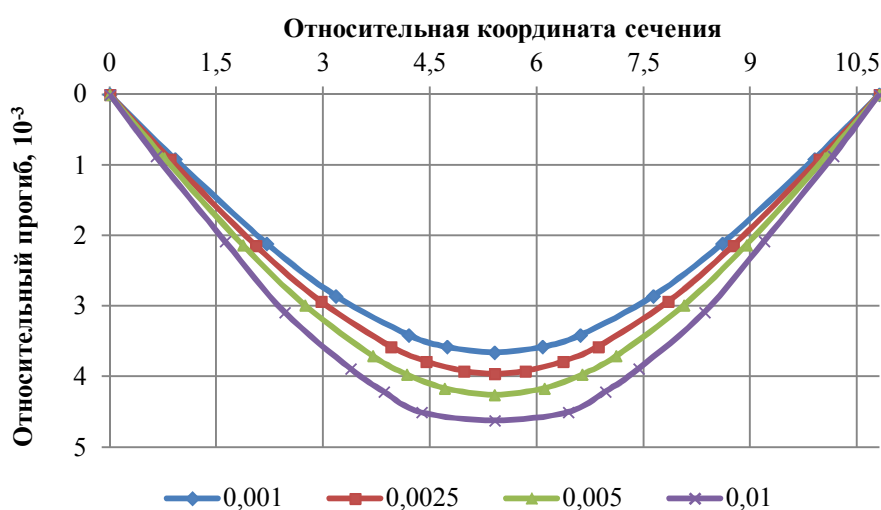


Рисунок 2.6 – Распределения относительных прогибов при различных значениях коэффициента армирования ($\mu_s = 0,001; 0,0025; 0,005; 0,01$)

Выше представленные результаты расчетов получены для разбиения интервала $0 < \varepsilon_{bt,i} < \varepsilon_{bt}^{crc}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) на семь подынтервалов. Расчеты, проведенные для большего количества подынтервалов (пятнадцать и более) показали, что аппроксимации всех величин изменяются незначительно.

Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только на участке линейно-упругого деформирования (в приведенном примере на двух приопорных участках балки).

Наличие ниспадающего участка на диаграмме бетона выражается в том, что вблизи разрушаемого сечения наблюдается резкое увеличение кривизны нейтраль-

ной линии. Как следствие, резко возрастают прогибы балки в окрестности разрушаемого сечения. Причем наибольшему значению коэффициента армирования соответствуют наибольшие прогибы, что объясняется тем, что все распределения строятся для случая, когда деформации растяжения в разрушаемом сечении достигают предельного значения. В этом случае при наибольшем коэффициенте армирования в разрушаемом сечении реализуется наибольший момент.

2.1.4. Реализация численно-аналитического метода с использованием диаграмм аппроксимации бетона, рекомендуемых СП 63.13330.2012

Для реализации численного-аналитического метода с использованием различных диаграмм аппроксимирования бетона для удобства будет рассмотрен пример из предыдущего пункта данной главы.

В главе 1 рассмотрены аппроксимации диаграмм деформирования бетона, рекомендуемые СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции», а именно двухлинейная, трехлинейная диаграмма (рисунок 1.2) и криволинейная диаграмма Н.И. Карпенко (рисунок 1.3). В данном пункте для корректного сравнения выше перечисленных способов аппроксимации со сплайн-аппроксимацией воспользуемся следующей методикой.

По СП 63.13330.2012 определяем расчетные сопротивление бетона сжатию $R_b = \sigma_2$ и растяжению $R_{bt} = \sigma_5$, округляя полученные значения по меньшему классу бетона. Данные сопротивления соответствуют напряжениям $R_b = \sigma_1 = \sigma_2$, $R_{bt} = \sigma_5 = \sigma_6$ для трехлинейной диаграммы (рисунок 1.2а) и $R_b = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, $R_{bt} = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6$ для двухлинейной диаграммы (рисунок 1.2б). Максимальные напряжения на линейно-упругом участке трехлинейных диаграмм определяются по формуле $\sigma_3 = 0,6 \cdot R_b$ и $\sigma_4 = 0,6 \cdot R_{bt}$. Деформации на участках 3-0 и 0-4 определяются из закона Гука $\varepsilon_3 = \sigma_3 / E_3$ и $\varepsilon_4 = \sigma_4 / E_4$ соответственно для всех видов диаграмм. Для трехлинейной диаграммы деформации ε_2 и ε_5 определяются

графически путем, наложением трехлинейной и реальной диаграммы с последующим определением точки пересечения. Деформации, соответствующие первой и шестой узловым точкам, определяются из условия равенства удельной энергии разрушения двухлинейной $\bar{U}_{2,b}$, $\bar{U}_{2,bt}$ и трехлинейной $\bar{U}_{3,b}$, $\bar{U}_{3,bt}$ диаграмм в выбранном сечении удельной энергии разрушения диаграммы аппроксимируемой сплайн-функцией $\bar{U}_b$, $\bar{U}_{bt}$ в том же сечении, отдельно для сжатого 1-0 и растянутого 0-6 участков (рис. 1):

$$\begin{cases} \bar{U}_b = \bar{U}_{2,b} = \bar{U}_{3,b} = \int_{\varepsilon_1}^0 \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \bar{U}_{bt} = \bar{U}_{2,bt} = \bar{U}_{3,bt} = \int_0^{\varepsilon_6} \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon, \end{cases}$$

где $\bar{U}_b$, $\bar{U}_{bt}$ – удельная энергия разрушения на участке сжатого 1-0 и растянутого 0-6 бетона, соответственно; $\bar{U}_b = U_b / \sigma_{02}$; $\bar{U}_{bt} = U_{bt} / \sigma_{02}$; $\bar{U}_{1,b} = U_{1,b} / \sigma_{02}$; $\bar{U}_{1,bt} = U_{1,bt} / \sigma_{02}$; $\bar{U}_{2,b} = U_{2,b} / \sigma_{02}$; $\bar{U}_{2,bt} = U_{2,bt} / \sigma_{02}$. Удельные энергии разрушения определяются, как площади подграфиков аппроксимирующих кривых.

Удельные энергии разрушения для сплайн-аппроксимацией диаграммы на участках 1-0 и 0-6 (рис. 1):

$$\begin{cases} \bar{U}_b = \int_{\varepsilon_1}^0 \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon = 1,232 \cdot 10^{-4}, \\ \bar{U}_{bt} = \int_0^{\varepsilon_6} \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon = 6,522 \cdot 10^{-7}. \end{cases}$$

По принятой гипотезе равенства удельных энергий при сжатии $\bar{U}_b = \bar{U}_{2,b} = \bar{U}_{3,b}$ и растяжении $\bar{U}_{bt} = \bar{U}_{2,bt} = \bar{U}_{3,bt}$ определяются узловые деформации ε_1 , ε_6 для двухлинейной и трехлинейной диаграмм.

Таблица 2.3 содержит координаты узлов аппроксимации для построения сплайн-аппроксимации (рисунок 1.4), трехлинейной и двухлинейной (рисунок 1.2)

диаграмм деформирования бетона, а также характерных точек для построения диаграммы Н.И. Карпенко (рисунок 1.3) для бетона класса В20. Следует отметить, что первая и шестая узловая точка для криволинейной диаграммы Н.И. Карпенко найдены также из условия равенства удельных энергий в зоне сжатия и растяжения.

Таблица 2.3 – Узлы аппроксимации для построения диаграммы бетона

№ узла	1	2	3	4	5	6
Сплайн-аппроксимация диаграммы						
σ , МПа	-5,70	-15,00	-5,70	0,82	1,35	0,80
ε , м/м	$-4,80 \cdot 10^{-3}$	$-2,50 \cdot 10^{-3}$	$-0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,03 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$
Трехлинейная диаграмма						
σ , МПа	-11,50	-11,50	-6,90	0,54	0,90	0,90
ε , м/м	$-5,23 \cdot 10^{-3}$	$-0,88 \cdot 10^{-3}$	$-0,24 \cdot 10^{-3}$	$0,02 \cdot 10^{-3}$	$0,07 \cdot 10^{-3}$	$0,33 \cdot 10^{-3}$
Двухлинейная диаграмма (Прандтля)						
σ , МПа	-	-11,50	-11,50	0,90	0,90	-
ε , м/м	-	$-5,13 \cdot 10^{-3}$	$-0,40 \cdot 10^{-3}$	$0,03 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	-
Криволинейная диаграмма Н.И. Карпенко						
σ , МПа	-12,69	-15,00	-5,70	0,82	1,35	1,27
ε , м/м	$-4,44 \cdot 10^{-3}$	$-2,50 \cdot 10^{-3}$	$-0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,045 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$

Методика определения параметров напряженно-деформированного состояния численно-аналитическим методом подробно приведена в предыдущих пунктах данной главы. В таблице 2.4 представлены результаты расчета разрушаемого сечения, выполненные в программном комплексе Mathcad 15, при использовании различных нелинейных диаграмм деформирования бетона и варьировании коэффициента армирования μ_s .

На рисунке 2.7 приведены распределения относительных высот сжатой зоны ξ для различных диаграмм деформирования. Графики высот сжатой зоны на пропорных участках накладываются друг на друга при расчете с применением сплайнов, двухлинейной и трехлинейной диаграмм. При этом при использовании диаграммы Н.И. Карпенко значение высоты сжатой зоны на пропорном участке ниже, чем при использовании диаграммы описанной сплайн-функциями на ~4% для $\mu_s = 0,001; 0,005; 0,01$. Это объясняется тем, что на диаграмме Н.И. Карпенко отсутствует участок линейно-упругого деформирования.

Таблица 2.4 - Результаты расчета НДС разрушаемого сечения в состоянии предразрушения при различных нелинейных диаграммах деформирования бетона

Вид диаграммы	Безразмерные физические величины							
	$\frac{\varepsilon_b \cdot 10^4}{\bar{\Psi}(\varepsilon_b) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_{bt} \cdot 10^4}{\bar{\Psi}(\varepsilon_{bt}) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_s \cdot 10^4}{\bar{\Phi}(\varepsilon_s)}$	ξ	$\bar{\chi} \cdot 10^4$	$\bar{M} \cdot 10^3$	$\bar{q} \cdot 10^5$	$\bar{\Delta} \cdot 10^3$
Коэффициент армирования $\mu_s = 0,001$								
Сплайн	$\frac{-1,493}{-9,25}$	$\frac{2,70}{1,739}$	$\frac{2,385}{0,104}$	0,385	3,879	1,157	7,92	3,65
Трехлинейная	$\frac{-1,443}{-8,94}$	$\frac{3,27}{1,957}$	$\frac{2,917}{0,127}$	0,331	4,360	0,957	6,55	4,18
Двухлинейная	$\frac{-1,518}{-9,39}$	$\frac{3,50}{1,957}$	$\frac{3,124}{0,136}$	0,327	4,641	0,981	6,71	4,38
Н.И. Карпенко	$\frac{-1,697}{-8,13}$	$\frac{2,70}{2,750}$	$\frac{2,372}{0,103}$	0,417	4,069	1,136	7,78	4,31
Коэффициент армирования $\mu_s = 0,005$								
Сплайн	$\frac{-1,663}{-10,01}$	$\frac{2,70}{1,739}$	$\frac{2,373}{0,103}$	0,412	4,035	1,473	10,08	4,26
Трехлинейная	$\frac{-1,688}{-10,00}$	$\frac{3,27}{1,957}$	$\frac{2,898}{0,126}$	0,368	4,586	1,363	9,33	4,87
Двухлинейная	$\frac{-1,784}{-10,59}$	$\frac{3,50}{1,957}$	$\frac{3,104}{0,135}$	0,365	4,888	1,419	9,71	5,25
Н.И. Карпенко	$\frac{-1,905}{-9,13}$	$\frac{2,70}{2,750}$	$\frac{2,356}{0,102}$	0,447	4,261	1,443	9,88	4,74
Коэффициент армирования $\mu_s = 0,01$								
Сплайн	$\frac{-1,875}{-12,00}$	$\frac{2,70}{1,739}$	$\frac{2,357}{0,102}$	0,443	4,231	1,864	12,76	4,62
Трехлинейная	$\frac{-1,967}{-11,59}$	$\frac{3,27}{1,957}$	$\frac{2,877}{0,125}$	0,406	4,844	1,855	12,70	5,37
Двухлинейная	$\frac{-2,080}{-13,00}$	$\frac{3,50}{1,957}$	$\frac{3,081}{0,134}$	0,403	5,162	1,946	13,32	5,81
Н.И. Карпенко	$\frac{-2,150}{-10,00}$	$\frac{2,70}{2,750}$	$\frac{2,338}{0,102}$	0,479	4,488	1,815	12,42	5,13

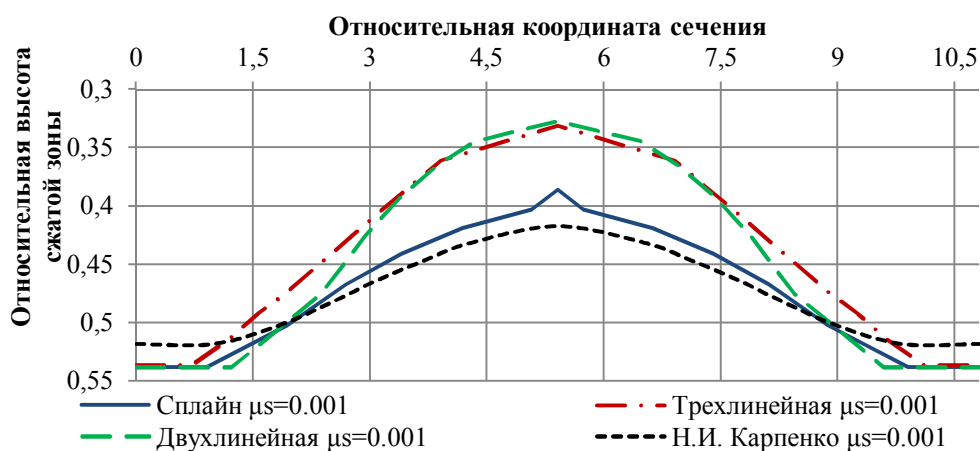


Рисунок 2.7 – Влияние различных диаграмм деформирования на распределение относительных высот сжатой зоны

Графики высот сжатой зоны, построенные с использованием двухлинейной и трехлинейной диаграммы деформирования, практически накладываются друг на друга в окрестности опасного (разрушаемого) сечения (рисунок 1.4). Погрешность использования двухлинейных и трехлинейных диаграмм при определении высоты сжатой зоны по сравнению с диаграммой, аппроксимированной сплайн-функциями, составляет $\sim 15\%$ для $\mu_s = 0,001$, $\sim 12\%$ для $\mu_s = 0,005$ и $\sim 9\%$ для $\mu_s = 0,01$. Распределение высоты сжатой зоны для диаграммы Н.И. Карпенко дает более близкие значения по сравнению с распределением, полученным при помощи сплайн-аппроксимаций, погрешность в окрестности опасного сечения составляет $\sim 8\%$ для $\mu_s = 0,001; 0,005; 0,01$.

На рисунке 2.8 приведены распределения относительных моментов. Близкие результаты получаются для двухлинейной и трехлинейной диаграмм, аналогичная ситуация наблюдается для диаграмм Н.И. Карпенко и сплайн-аппроксимаций. Погрешность определения изгибающего момента по двухлинейной и трехлинейной диаграммам составляет $\sim 18\%$ для $\mu_s = 0,001$, $\sim 8\%$ для $\mu_s = 0,005$ и $\sim 4\%$ для $\mu_s = 0,01$ по сравнению с моментами, определенными с использованием сплайн-аппроксимации.

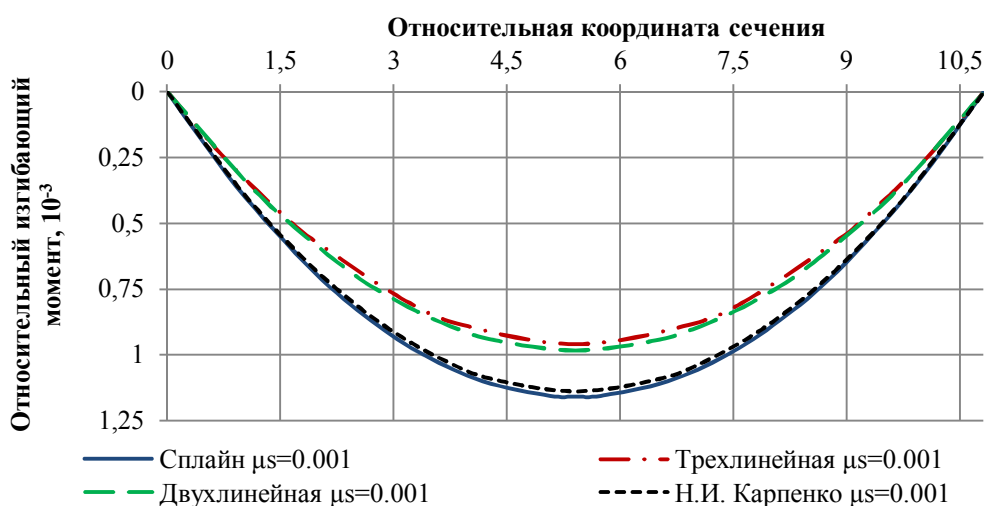


Рисунок 2.8 – Влияние различных диаграмм деформирования на распределения относительных изгибающих моментов

На рисунке 2.9 представлены распределения относительных кривизн по длине балки при различных значениях коэффициента армирования μ_s . Характерно резкое увеличение кривизны на участке в середине балки, при использовании диаграммы деформирования описанной сплайн-функциями ($\mu_s = 0,001$). На этом участке деформации растяжения крайнего нижнего волокна попадают на ниспадающую ветвь диаграммы деформирования бетона: $\varepsilon_5 < \varepsilon_{bt} < \varepsilon_6$. При увеличении коэффициента армирования ($\mu_s = 0,005$) данный эффект исчезает.

Наибольшее отличие результатов расчетов при использовании двухлинейной диаграммы от результатов, полученных при помощи сплайн-аппроксимации, составляет $\sim 17\%$ для $\mu_s = 0,001$, $\sim 18\%$ для $\mu_s = 0,005$ и $\sim 19\%$ для $\mu_s = 0,01$.

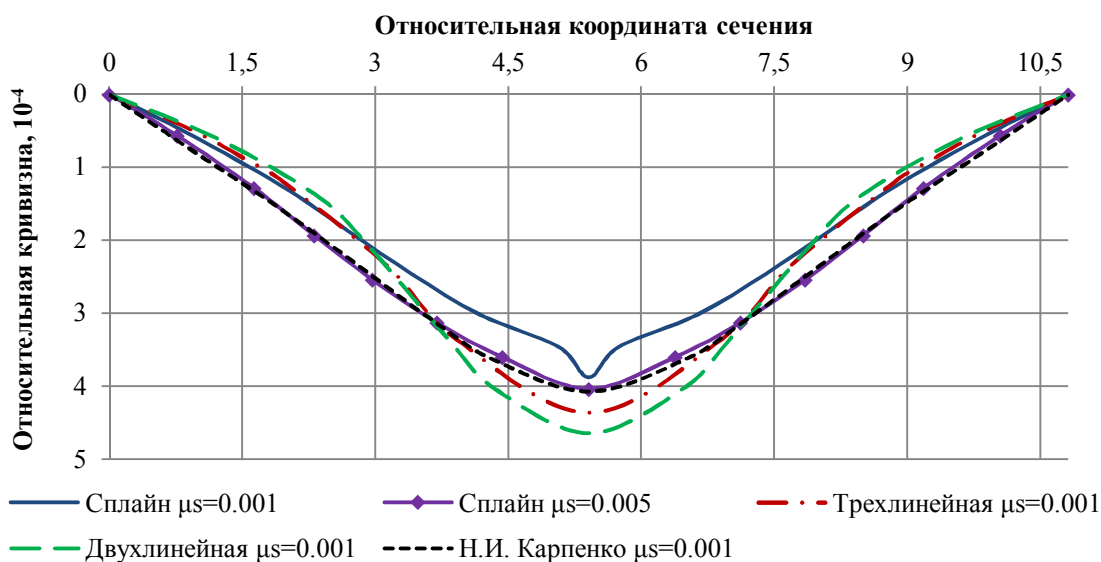


Рисунок 2.9 – Влияние различных диаграмм деформирования на распределения относительных кривизн

Распределения относительных прогибов по длине балки при различных значениях коэффициента армирования μ_s показаны на рисунке 2.10. По результатам расчетов (Таблица 2.4) большему коэффициенту армирования соответствует большее значение максимальных прогибов. Этот факт объясняется тем, что при увеличении коэффициента армирования увеличивается изгибающий момент, соответствующий образованию трещины.

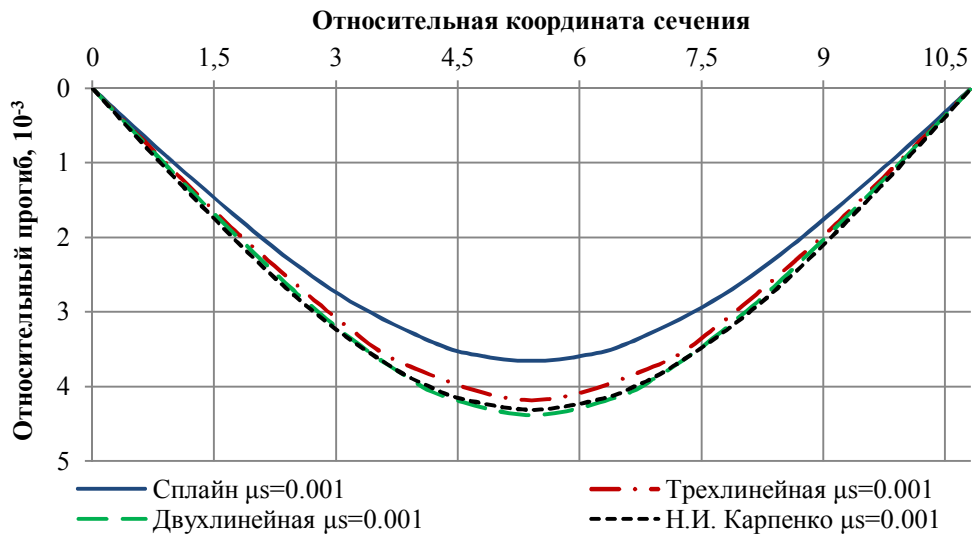


Рисунок 2.10 – Влияние различных диаграмм деформирования на распределения относительных прогибов

Результаты расчета прогибов, полученные по диаграммам деформирования Н.И. Карпенко, двухлинейной и трехлинейной диаграмм, дают близкие значения, что превышает значения прогиба, найденные по сплайн диаграмме на $\sim 14\%$ для $\mu_s = 0,001$, $\sim 15\%$ для $\mu_s = 0,005$ и $\sim 15\%$ для $\mu_s = 0,01$. Наиболее близкие значения прогибов по отношению к сплайн-аппроксимации получены для трехлинейных диаграмм, составляют $\sim 13\%$ для $\mu_s = 0,001$; $0,005$; $0,01$, а наибольшая погрешность наблюдается при использовании двухлинейной диаграммы ($\sim 17\%$ для $\mu_s = 0,001$, $\sim 19\%$ для $\mu_s = 0,005$ и $\sim 21\%$ для $\mu_s = 0,01$).

Сравнение результатов расчетов численно-аналитическим методом с применением различных аппроксимаций диаграмм деформирования бетона позволяют сделать следующие выводы.

На приопорных участках балки сплайн-аппроксимация, двухлинейная и трехлинейная аппроксимации дают практически одинаковые результаты при определении высоты сжатой зоны. Отличие от этих результатов для аппроксимации диаграммы Н.И. Карпенко составляет $\sim 4\%$.

В окрестности центрального разрушаемого сечения погрешность при вычислении высоты сжатой зоны для двухлинейной и трехлинейной аппроксимаций по

сравнению со сплайн-аппроксимацией составляет от 9% до 15% (в сторону занижения). Аппроксимация Н.И. Карпенко завышает значение высоты сжатой зоны на ~8%.

Результаты расчета распределений изгибающего момента в состоянии предразрушения показывают, что сплайн-аппроксимация и аппроксимация Н.И. Карпенко дают практически совпадающие результаты. Применение двухлинейной и трехлинейной аппроксимации при достаточно высоком проценте армирования дает незначительную погрешность по сравнению со сплайн-аппроксимацией. Для малоармированных балок двухлинейная и трехлинейная аппроксимации занижают значение изгибающего момента до ~20%.

Наибольшие погрешности от 17% до 19% по сравнению со сплайн-аппроксимацией при определении кривизны получены для двухлинейной аппроксимации диаграммы бетона.

Результаты расчетов с применением аппроксимаций Н.И. Карпенко, двухлинейной и трехлинейной показали завышение прогибов на ~15% по сравнению со сплайн-аппроксимацией.

2.2. Численно-аналитический метод определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу

После образования трещины происходит изменение напряженно-деформированного состояния элемента. Введем допущение – будем считать, что сценарий деформирования в окрестности трещины нормального отрыва, в изгибаемом элементе, соответствует сценарию происходящему при одноосном вырыве армирующего элемента из матрицы связующего.

В трещине растягивающее усилие N ($P_{crc} \leq N \leq P_{crc}^*$), возникающее в результате изгиба, теперь воспринимается тормозящим элементом роль, которого играет арматура. При возрастании нагрузки действующей на элемент возрастает и изгибающий момент a , следовательно, и растягивающее усилие $N = P_{crc}$ воспринимаемое стержнем возрастает до P_{crc}^* .

Допустим, что после образования трещины совместная работа армирующего элемента и матрицы происходит за счет адгезионных связей между ними, по так называемой модели Аутвотера. Данное взаимодействие описывается первой математической моделью.

После возрастания растягивающего усилия P_{crc} до P_{crc}^* , касательные напряжения τ на границе арматура-бетон превышают расчетное сопротивление сдвигу R_{sh} (нарушение адгезионных связей) образуется второй участок, на котором совместная работа арматуры и бетона осуществляется за счет фрикционного трения между ними.

Таким образом, вторая математическая модель описывает два участка взаимодействия армирующего стержня и матрицы. На первом участке взаимодействие на границе арматуры с бетоном происходит за счет адгезионных связей, а на втором за счет фрикционного трения.

В качестве теоретической оценки зоны краевого эффекта предлагается приближенная математическая модель, позволяющая оценить распределение напряжений в контактном слое связующего с армирующим элементом при воздействии на последний вытягивающего усилия. При этом под зоной краевого эффекта понимается зона анкеровки – характерная длина участка армирующего элемента, на котором существенными являются касательные напряжения в контактном слое матрицы. Первоначально по всей длине контакта предполагается «жесткое» сцепление армирующего элемента с матрицей, а совместная работа осуществляется по так называемой модели Аутвотера. В процессе увеличения вытягивающего усилия, приложенного к армирующему элементу по границе контакта, происходит нарушение сцепления, в результате чего образуется второй участок. Взаимодействие армирующего элемента и связующего на этом участке предположительно осуществляется за счет сил фрикционного трения с интенсивностью q . Математическое моделирование осуществлено в рамках двумерной задачи теории упругости.

Рассмотрим полубесконечную пластину, в которой замоноличен стержень

(рисунок 2.11а). К стержню приложено вытягивающее усилие N . Совместное деформирование осуществляется за счет адгезионных связей и зацепления материала матриц выступов (если стержень имеет периодический профиль).

Уравнение равновесия для стержня (рисунок 2.11в) в соответствии с гипотезами Аутвотера имеет вид:

$$dN = 2\tau b dz,$$

где b – толщина стержня; τ – касательные напряжения в контактном слое.

С учетом закона Гука получим:

$$\frac{dN}{dz} = 2bG_A\gamma,$$

где G_A – модуль сдвига материала матрицы; $\gamma = u_1(z)/2t$ – деформация сдвига; $u_1(z)$ – перемещение сечения с координатой z ; t – половина толщины контактного слоя связующего.

Уравнение равновесия для стержня принимает вид:

$$\frac{dN}{dz} - cu_1(z) = 0, \quad (2.30)$$

где $c = G_A \frac{b}{t}$ – жесткость на сдвиг контактного слоя.

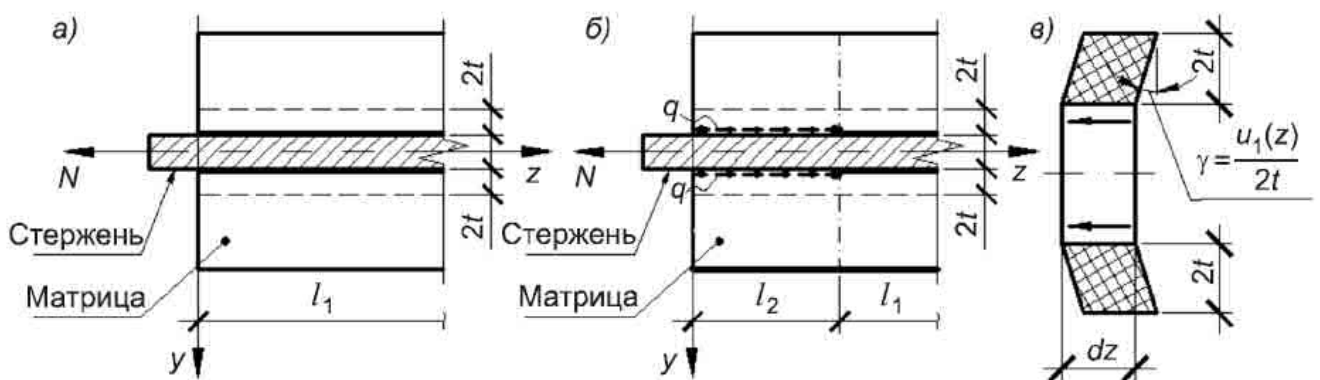


Рисунок 2.11 – К оценке зоны краевого эффекта:

участок с «жестким» сцеплением армирующего элемента и матрицей (а);
участок с нарушенным сцеплением армирующего элемента и матрицы (б);
участок контактного взаимодействия под нагрузкой (в)

С учетом зависимостей между нормальными напряжениями, деформациями,

модулями упругости и площадями поперечных сечений:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \sigma = \varepsilon_1 E = \frac{du_1}{dz} E$$

откуда

$$N = \frac{du_1}{dz} EA, \quad (2.31)$$

уравнение равновесия записывается в виде дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} - \beta^2 u_1(z) = 0, \quad (2.32)$$

где

$$\beta^2 = \frac{c}{E_s A_s}.$$

Решение уравнение (2.32):

$$k^2 - \beta^2 = 0;$$

$$D = 4\beta^2;$$

$$k_{1,2} = \pm \beta;$$

$$u'_1 = e^{\beta z}, u''_1 = e^{-\beta z}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.32) имеет вид:

$$u_1 = C_1 e^{\beta z} + C_2 e^{-\beta z} \quad (2.33)$$

Перемещения u_1 ограничены по длине границы контакта, поэтому можно считать $C_1 = 0$.

Окончательное решение принимает вид:

$$u_1 = C_2 e^{-\beta z} \quad (2.34)$$

Рассмотрим равновесие пластины, в случае, когда вытягивающее усилие N достигло значения P_{crc} , которое соответствует касательным напряжениям τ в пограничном слое, превышающим сопротивление сдвигу связующего R_{sh} , то есть

произошло нарушение сцепления на участке длиной l_2 . Совместное деформирование связующего и вырываемого стержня на участке l_2 осуществляется за счет сил трения интенсивностью q (рисунок 2.11б).

Уравнение равновесия для стержня на участке фрикционного взаимодействия записывается в следующем виде:

$$\frac{dN}{dz} = -q.$$

или

$$\frac{d^2 u_2(z)}{dz^2} = -\frac{q}{E_s A_s}. \quad (2.35)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3):

$$u_2(z) = -\frac{qz^2}{2E_s A_s} + \overline{C}_1 z + \overline{C}_2. \quad (2.36)$$

Таким образом, перемещения стержня выражаются для участков с нарушенным сцеплением $u_2(z)$ и с «жестким» сцеплением $u_1(z)$ формулами:

$$\begin{cases} u_2(z) = -\frac{qz^2}{2E_s A_s} + \overline{C}_1 z + \overline{C}_2; \\ u_1(z) = C_2 e^{-\beta z}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Склейка полученных решений осуществляется из условий равенства перемещений и деформаций при $z = l_2$:

$$\begin{cases} \left. \frac{du_1(z)}{dz} \right|_{z=l_2} = \left. \frac{du_2(z)}{dz} \right|_{z=l_2}; \\ u_1(l_2) = u_2(l_2) = u. \end{cases} \quad (2.38)$$

если:

$$\begin{cases} -\frac{ql_2^2}{2E_s A_s} + \overline{C}_1 l_2 + \overline{C}_2 = C_2 e^{-\beta l_2}; \\ -\frac{q}{E_s A_s} l_2 + \overline{C}_1 = -\beta C_2 e^{-\beta l_2}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Система уравнений (2.39) содержит неизвестные $\overline{C}_1, \overline{C}_2, C_2, l_2$.

Константы интегрирования $\overline{C}_1$ и C_2 находятся из краевого условия для деформаций при $z = 0$ и условия нарушения сцепления $\tau(l_2) = -R_{sh}$:

$$\begin{cases} \left. \frac{du_2(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{P_{crc}}{E_s A_s}; \\ R_{sh} = -\frac{u_1(l_2)}{t} G_A = -\frac{C_2 e^{-\beta l_2}}{t} G_A. \end{cases} \quad (2.40)$$

Константы $\overline{C}_1$ и C_2 :

$$\begin{cases} \overline{C}_1 = \frac{P_{crc}}{E_s A_s}; \\ C_2 = -\frac{R_{sh} t}{e^{-\beta l_2} G_A}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Окончательно

$$\begin{cases} \overline{C}_1 = \frac{P_{crc}}{E_s A_s}; \\ \overline{C}_2 = -\frac{R_{sh} t}{G_A} + \frac{q l_2^2}{2 E_s A_s} - \frac{P_{crc}}{E_s A_s} l_2; \\ C_2 = -\frac{R_{sh} t}{e^{-\beta l_2} G_A}; \\ l_2 = E_s A_s q^{-1} \left(\frac{N}{E_s A_s} - \beta \frac{R_{sh} t}{G_A} \right). \end{cases} \quad (2.42)$$

Выражения для перемещений, деформаций и напряжений для двух участков принимают вид:

$$\begin{cases} u_2(z) = \frac{q}{2 E_s A_s} (l_2^2 - z^2) + \frac{P_{crc}}{E_s A_s} (z - l_2) - \frac{R_{sh} t}{G_A}; \\ u_1(z) = -\frac{R_{sh} t}{e^{-\beta l_2} G_A} e^{-\beta z}, \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{2s} = \frac{du_2(z)}{dz} = \frac{(P_{crc} - qz)}{E_s A_s}; \\ \varepsilon_{1s} = \frac{du_1(z)}{dz} = \beta \frac{R_{sh} t}{e^{-\beta l_2} G_A} e^{-\beta z}, \end{cases} \quad (2.44)$$

нормальные напряжения σ в стержне и касательные напряжения τ в матрице:

$$\begin{cases} \sigma_{2s} = \frac{(P_{crc} - qz)}{A_s}; \\ \sigma_{1s} = E_s \beta \frac{R_{sh} t}{e^{-\beta l_2} G_A} e^{-\beta z}; \\ \tau = \gamma G_A = \frac{u_1(z)}{t} G_A. \end{cases} \quad (2.45)$$

Параметр β в уравнениях систем (2.43), (2.44), (2.45) может быть определен экспериментальным путем.

Деформация стержня при $0 \leq z \leq l_l$ равна:

$$\varepsilon_{1s} = -\beta C_2 e^{-\beta z}$$

Длина зоны краевого эффекта соответствует деформации ε_{crc} , а ε_0 - значению деформаций в месте приложения усилия, тогда система уравнений для определения деформаций в начале (z_0) и в конце (z_{crc}) зоны краевого эффекта примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = -\beta C_2 e^{-\beta z_0}, \\ \varepsilon_{crc} = -\beta C_2 e^{-\beta z_{crc}}; \end{cases} \quad (2.46)$$

Решив систему уравнений (2.46), получим:

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{crc}}\right)}{z_1 - z_0} \quad (2.47)$$

Формулу (2.47) удобно использовать только для оценки β по данным полученным с помощью программных комплексов, так как формула содержит деформации в начале ε_0 и конце ε_{crc} зоны краевого эффекта, а также непосредственно длину зоны краевого эффекта $z_1 - z_0$. Перепишем формулу (2.47) в виде:

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)}{z_1 - z_0} \quad (2.48)$$

где индекс 0 соответствует первому контролируемому параметру, 1 – второму. В качестве контролируемых параметров могут приниматься расположения и показания тензодатчиков. Таким образом уравнение (2.48) можно использовать для определения параметра β по координатам двух точек контролируемых параметров, полученных в ходе эксперимента.

Величина t – половина толщины сдвигаемого слоя связующего, определяется по формуле:

$$t = \frac{G_A b}{E_s A_s \beta^2} \quad (2.49)$$

2.3. Выводы по главе 2

1. Разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейной диаграммы деформирования бетона. Метод основан на едином подходе к построению аппроксимаций диаграмм деформирования бетона и арматуры, а также аппроксимаций функции кривизны, функции распределения высоты сжатой зоны с помощью сплайн-функций.

Продемонстрирована реализация метода на конкретном примере расчета шарнирно опертой железобетонной балки. Дополнительно рассмотрены диаграммы деформирования бетона, рекомендованные СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции», а именно двухлинейная, трехлинейная диаграмма и криволинейная диаграмма Н.И. Карпенко. Сравнение показало, что при определении изгибающего момента в состоянии предразрушения полученные результаты для всех аппроксимаций мало отличаются, кроме малоармированных балок. Результаты расчетов с применением криволинейной диаграммы Н.И. Карпенко, а

также двухлинейной и трехлинейной аппроксимаций показали завышение прогибов на ~15% по сравнению со сплайн-аппроксимацией.

Показано, что такие характеристики напряженно-деформированного состояния, как высота сжатой зоны бетона, кривизна нейтральной линии существенно зависят от координаты по длине балки.

2. На основании гипотезы о том, что характер совместного деформирования арматуры и бетона вблизи трещины в изгибаемом элементе, такой же, как при вытягивании арматуры из бетонного массива, разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта арматурного стержня замоноличенного в матрицу при вытягивании. Под зоной краевого эффекта понимается характерная длина участка армирующего элемента, на котором существенными являются касательные напряжения в контактном слое матрицы.

В предложенном методе при малых нагрузках по всей длине контакта предполагается «жесткое» сцепление армирующего элемента с матрицей, что соответствует модели Аутвотера. В процессе увеличения вытягивающего усилия, приложенного к армирующему элементу, по некоторому участку границ контакта происходит нарушение «жесткого» сцепления, при котором взаимодействие армирующего элемента и контактного слоя связующего материала на этом участке осуществляется за счет сил трения.

ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Первая серия экспериментов – определение зоны краевого эффекта при вытягивании армирующего элемента из матрицы связующего

3.1.1. Постановка эксперимента

Предпосылка: распределение касательных напряжений по длине стержня в окрестности трещины нормального отрыва в изгибаемом элементе соответствует решению, полученному при решении задачи о вытягивании арматурного стержня из массива бетона.

С целью экспериментального подтверждения описанной в главе 2.2 математической модели проведено экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния опытных образцов – пластин с замоноличенными армирующими элементами (рисунок 3.1). На рисунке 3.2 приведена схема приложения нагрузки на образец, а также указаны расчетные сечения.

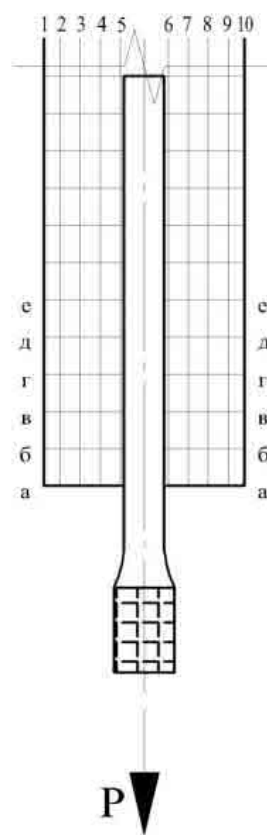


Рисунок 3.1 – Опытный образец

Рисунок 3.2 – Схема приложения нагрузки

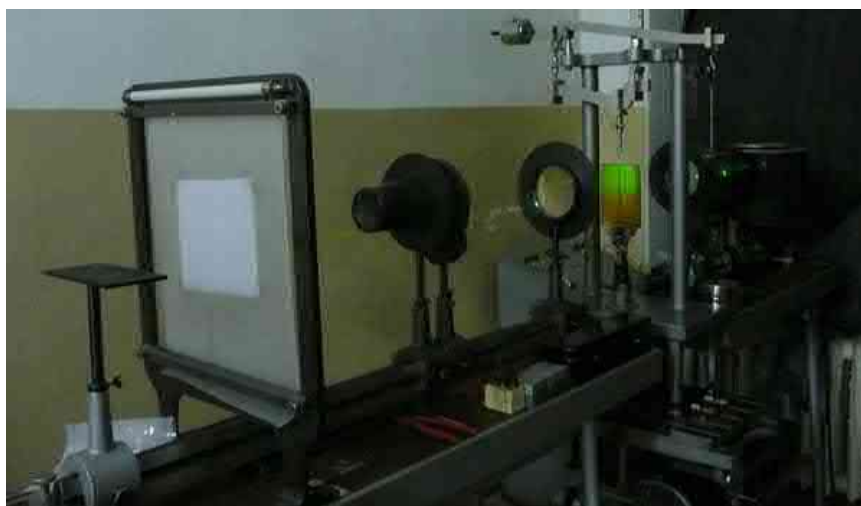
Предмет исследования – определение напряженно-деформируемого состояния на участке активного контактного взаимодействия армирующего элемента с матрицей связующего.

Объект исследования – пластина с замоноличенным армирующим элементом (рисунок 3.1).

Задача исследования – экспериментально-теоретическая оценка напряженно-деформируемого состояния на участке активного контактного взаимодействия армирующего элемента с матрицей связующего, за пределами которого касательные напряжения малы, а нормальные напряжения постоянны.

Экспериментальная установка – проекционно-поляризационная установка ППУ-7 (рисунок 3.3а).

а)



б)

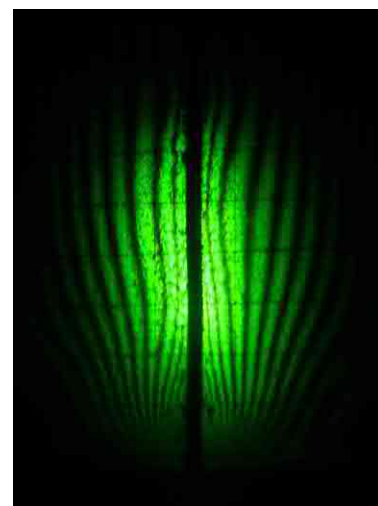


Рисунок 3.3 –Проекционно-поляризационная установка ППУ-7 (а);

Полосы интерференции в ненагруженном образце (б)

3.1.2. Опытный образец №1

Геометрические размеры образца №1 (рисунок 3.4): толщина $\delta = 6$ мм, ширина матрицы $b_m = 54$ мм, ширина армирующего элемента (стержня) $b_{cm} = 8$ мм, длина замоноличенного участка стержня $l = 90$ мм. Процент армирования – $\mu \approx 14,8\%$.

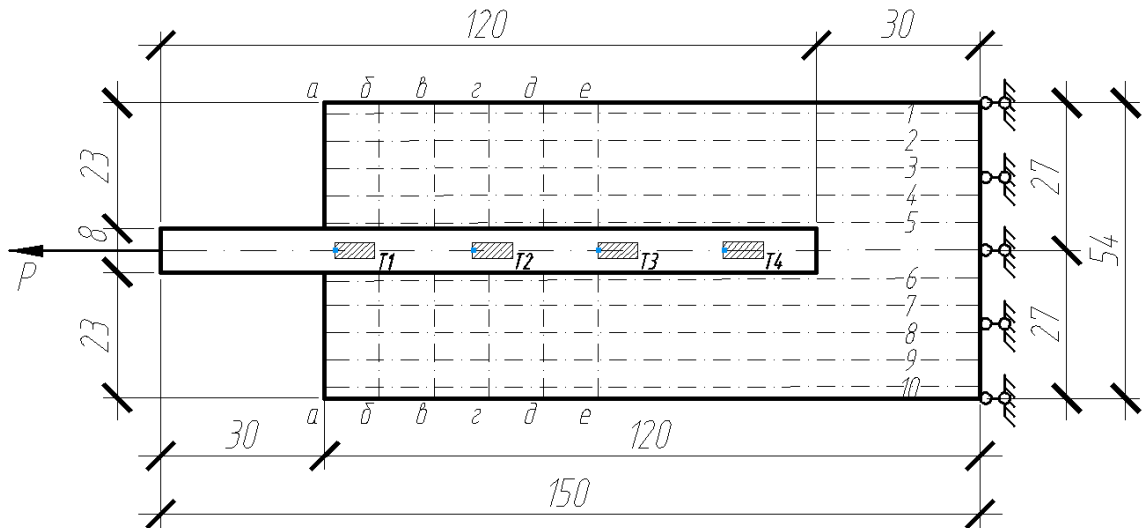


Рисунок 3.4 – Схема образца №1 с указанными расчетными сечениями

Основные параметры образца №1: связующий материал – фенолформальдегид «Хромвинил V-276»; армирующий элемент – стеклопластик «АГ-4С». Соотношение предельных сопротивлений (R_{cm} , R_m) и модулей упругости (E_{cm} , E_m) материалов образца:

$$\frac{R_{cm,1}}{R_{m,1}} = \frac{500 \text{ [МПа]}}{40 \text{ [МПа]}} = 12,5; \quad \frac{E_{cm,1}}{E_{m,1}} = \frac{35000 \text{ [МПа]}}{3500 \text{ [МПа]}} = 10$$

Сцепление армирующего элемента с матрицей обеспечивается адгезией и механическим контактом. Для усиления сцепления армирующего элемента с матрицей на поверхности стержня созданы канавки радиусом $r = 0,5$ мм с шагом 20 мм.

Для определения напряжений и деформаций назначены продольные сечения (1-10) с шагом 5 мм и поперечные (а-е) с шагом 10 мм (рисунок 3.4).

Нагружение образца производится приложением растягивающей нагрузки к свободному концу стержня и фиксацией матрицы с противоположной стороны. Степень нагружения 250 Н. Максимальное значение усилия $P_{\max} = 1500$ Н.

Эксперимент проведен с использованием метода нелинейной фотоупругости [13, 15-16, 36, 90-92] для получения полей напряжений в матрице (рисунок 3.5) и тензометрии для определения продольных деформаций стержня (рисунок 3.6). Координаты расположения четырех тензодатчиков (Т1, Т2, Т3, Т4), наклеенных на армирующий элемент (рисунок 3.4), относительно свободного торца стержня:

39 мм (Т1), 71 мм (Т2), 93 мм (Т3), 115 мм (Т4). Для определения напряжений и деформаций назначены продольные сечения (1-10) с шагом 5 мм и поперечные (а-е) с шагом 10 мм (рисунок 3.4).

В ходе проведения эксперимента в ненагруженных образцах обнаружены полосы интерференции порядком отличным от нуля (рисунок 3.3б), что свидетельствует о наличии остаточных напряжений, возникших в результате усадки связующего при твердении (рисунок 3.5а, рисунок 3.5в).

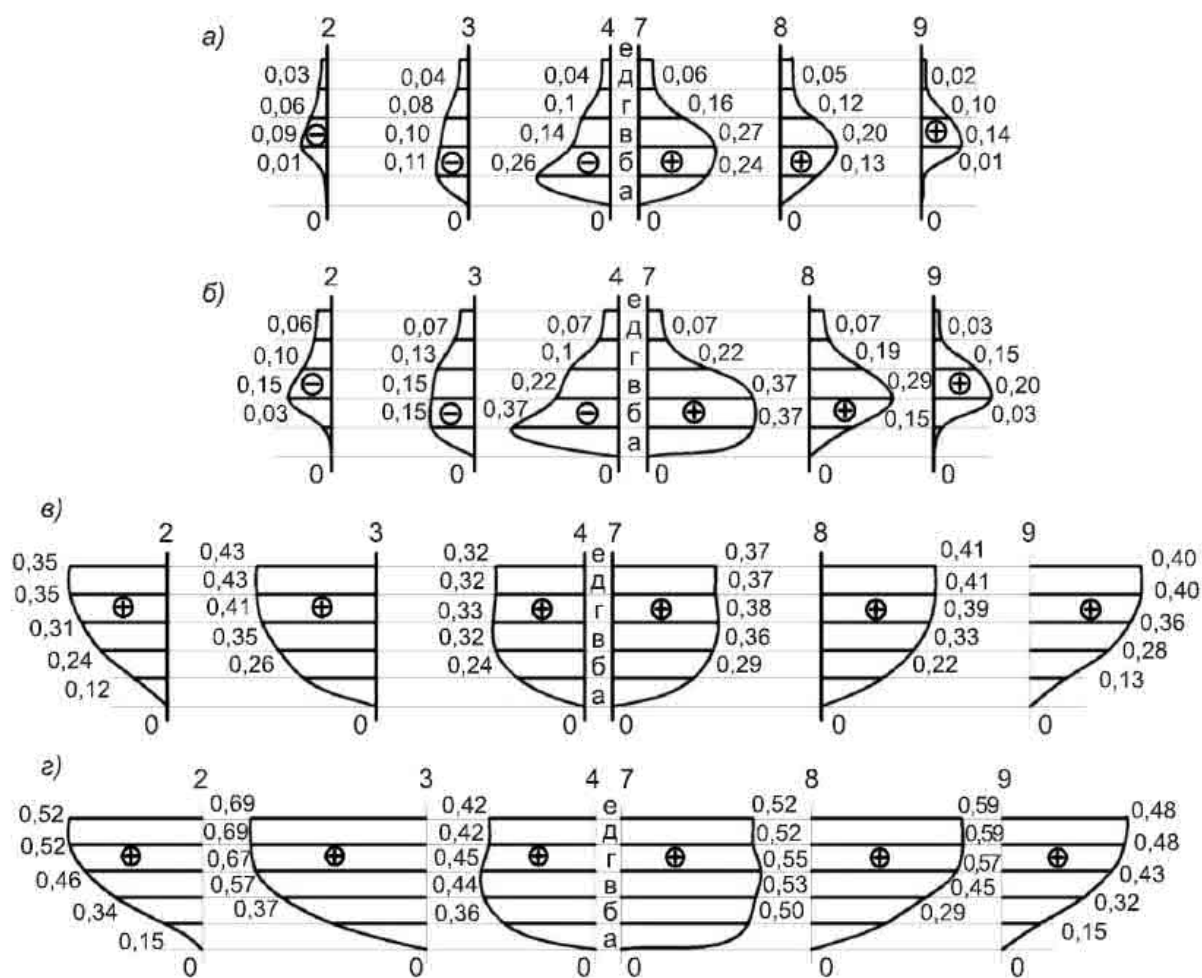


Рисунок. 3.5 – Напряжения в образце №1 (МПа):

касательные τ_{zy} при $P = 0$ Н (а); касательные τ_{zy} при $P = 500$ Н (б);

нормальные σ_y при $P = 0$ Н (в); нормальные σ_y при $P = 500$ Н (г)

Установлено, что касательные напряжения τ_{zy} стремятся к нулю, а нормальные напряжения σ_y постоянны, не зависимо от величины нагрузки P при $y \geq 40$ мм, т.е. за пределами сечений «а-д».

Продольные деформации в стержне (рисунок 3.6), полученные с помощью тензодатчиков, приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Деформации вдоль стержня по показаниям тензодатчиков, 10^{-4}

P , Н	T1	T2	T3	T4
500	2,819	2,349	1,888	1,076
1000	4,768	4,111	3,377	1,982
1500	6,654	5,842	4,867	2,895

При сопоставлении продольных деформаций в стержне, определенных с помощью численно-аналитического метода, с экспериментальными данными выявлена хорошая согласованность результатов (рисунок 3.6).

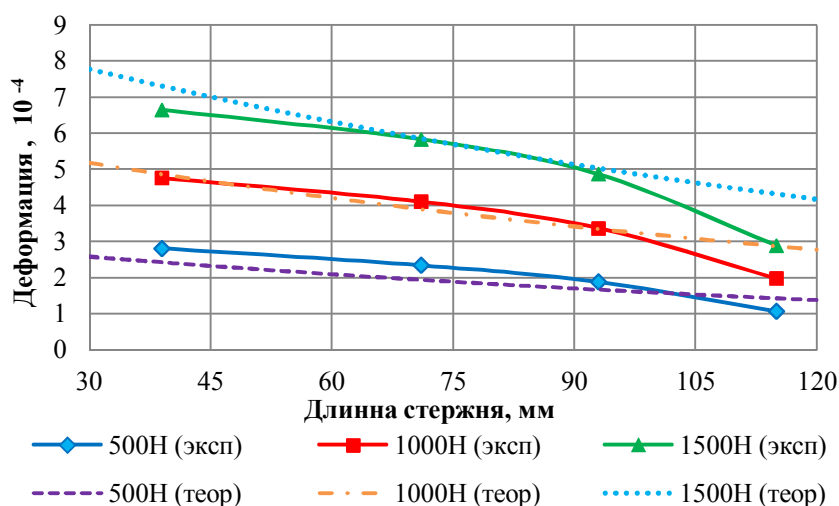


Рисунок 3.6 – Продольные деформации в стержне при $P = 500 \div 1500$ Н

Зона краевого эффекта, определенная с помощью численно аналитического метода 50-60 мм, на 20-30% превышает зону краевого эффекта, определенную с помощью эксперимента ~ 40 мм.

3.1.3. Опытный образец №2

Геометрические размеры образца №2 (рисунок 3.7): толщина $\delta = 5$ мм, ширина матрицы $b_m = 48$ мм, ширина армирующего элемента (стержня) $b_{cm} = 7$ мм, длина замоноличенного участка стержня $l = 90$ мм. Процент армирования – $\mu \approx 14,6\%$.

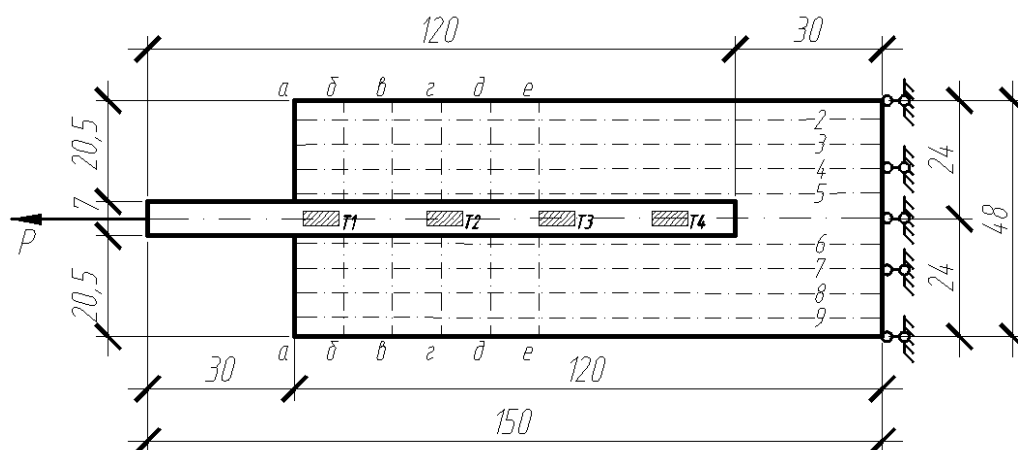


Рисунок 3.7 – Схема образца №2 с указанными расчетными сечениями

Основные параметры образца №2: связующий материал – фенолформальдегид «Хромвинил V-276»; армирующий элемент – стеклопластик «АГ-4С». Соотношение предельных сопротивлений (R_{cm} , R_m) и модулей упругости (E_{cm} , E_m) материалов образца:

$$\frac{R_{cm,2}}{R_{m,2}} = \frac{500 \text{ [МПа]}}{40 \text{ [МПа]}} = 12,5; \quad \frac{E_{cm,2}}{E_{m,2}} = \frac{50000 \text{ [МПа]}}{3500 \text{ [МПа]}} \approx 14$$

Сцепление армирующего элемента с матрицей обеспечивается адгезией [100] и механическим контактом. Для усиления сцепления армирующего элемента с матрицей на поверхности стержня созданы канавки радиусом $r = 0,5$ мм с шагом 20 мм.

Для определения напряжений и деформаций назначены продольные сечения (1-10) с шагом 5 мм и поперечные (а-е) с шагом 10 мм (рисунок 3.7).

Нагружение образца производится приложением растягивающей нагрузки к свободному концу стержня и фиксацией матрицы с противоположной стороны. Степень нагружения 200 Н. Максимальное значение усилия $P_{\max} = 1000$ Н.

Продольных деформаций стержня найдены экспериментально с помощью системы тензометрии. Координаты расположения четырех тензодатчиков (Т1, Т2, Т3, Т4) наклеенных на армирующий элемент (рисунок 3.4) относительно свободного торца стержня: 33 мм (Т1), 60 мм (Т2), 83 мм (Т3), 112 мм (Т4).

По показаниям тензометрии было зафиксировано проскальзывание стержня

в матрице (нарушение адгезии) при нагрузке 1000 Н (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Деформации вдоль стержня по показаниям тензодатчиков, 10^{-4}

P, Н	T1	T2	T3	T4
600	4,072	2,081	1,014	0,013
700	4,853	2,617	1,368	0,187
800	5,628	3,175	1,762	0,399
900	6,361	3,738	2,154	0,657
1000	7,102	4,326	2,575	0,909
destr. 1000	7,203	4,907	2,717	0,923

Для образца №2 параметр β определен по формуле (2.48) для разного сочетания тензодатчиков (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Значение параметра β [1/м] в образце №2
для разных сочетаний тензодатчиков

P, Н	T2 и T3	T2 и T4	T3 и T4
600	31,26	97,33	149,73
700	28,19	50,73	68,60
800	25,60	39,86	51,17
900	23,97	33,43	40,94
1000	22,56	30,00	35,90
destr. 1000	25,70	32,13	37,23

В данном случае определять β , как среднее значение не корректно, так как в таблице 3.3 присутствует существенный разброс. Таким образом, при определении параметра β возникает неопределенность. В качестве основных инструментов и методов описания данной неопределённости могут использоваться различные математические модели: вероятностно-статистическая, интервальная, нечёткая.

Для описания нечёткой величины использован метод обработки данных предложенный в статье В.В. Адищева, Д.С. Шмакова «Метод построения функции принадлежности с «прямой» обработкой исходных данных» [3]. Анализ функции принадлежности (рисунок 3.8) показал, что $\beta \approx 35$.

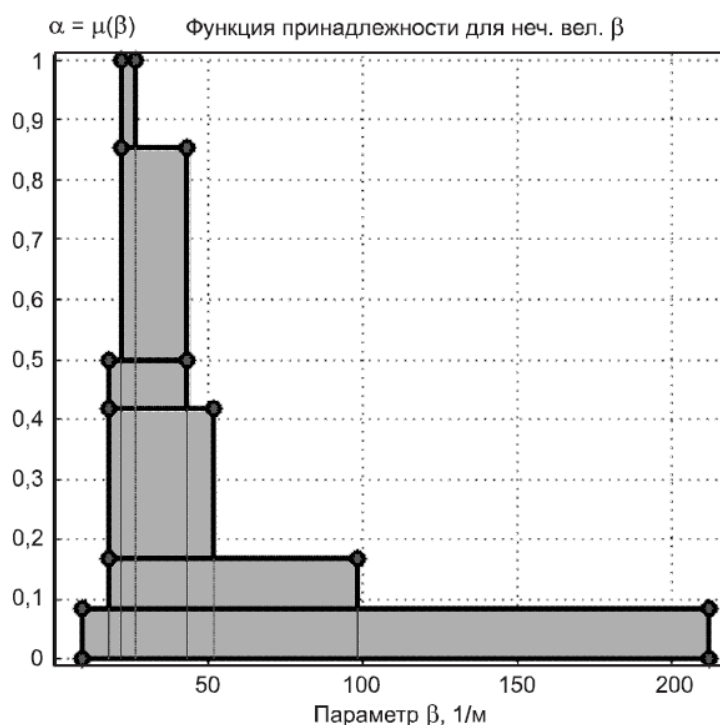


Рисунок 3.8 –Функция принадлежности для нечеткой величины β

Величина сдвигающего слоя $2t$ по формуле (2.49) равна 6.2 мм, что соизмеримо с толщиной образца $b = 5$ мм.

При построении кривых, полученных по математической модели (рисунок 3.9), предполагалось, что при нагрузке $P \leq 1000$ Н совместная работа армирующего элемента и матрицы происходит за счет адгезионных связей между ними (по модели Аутвотера). При $P > 1000$ Н образуется второй участок, на котором совместная работа арматуры и бетона осуществляется за счет фрикционного взаимодействия (соответствует экспериментальной кривым «1000Н (эксп) destr», а также кривым, полученным с помощью численно-аналитического метода «1100Н (теор)» и «1200Н (теор)»).

Выявлено, что зона краевого эффекта по результатам, полученным с помощью численно-аналитической модели составляет 50-60 мм, по экспериментальным данным – ~ 50 мм.

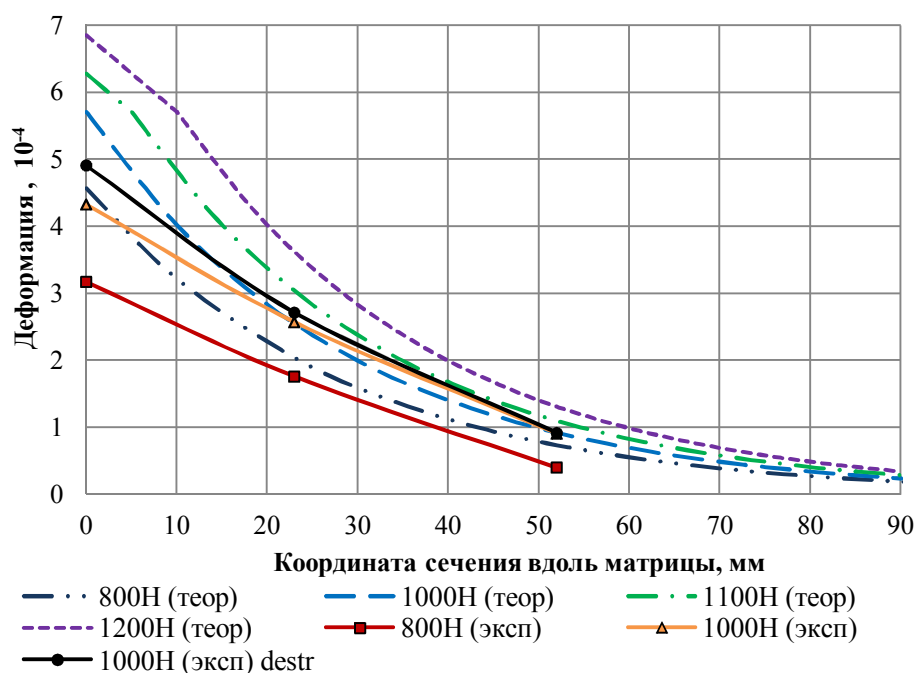


Рисунок 3.9 – Продольные деформации в стержне образца №2
при $P = 800 \div 1200$ Н

Таким образом, в первом приближении можно определять зону краевого эффекта по модели Аутвотера с 20-30% погрешностью.

3.2. Вторая серия экспериментов – определение напряженно-деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала

3.2.1. Постановка эксперимента

С целью экспериментального подтверждения, описанного в главе 2.1 численно-аналитического метода определения прогибов железобетонного элемента проведено исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) изгибаемых элементов из однородного ячеистого материала, армированных полосами дюралюминия. В качестве экспериментальных данных использованы материалы, опубликованные в статье В.В. Адищева, А.Г. Демешкина, В.В. Роота «Экспериментальное исследование процесса возникновения трещин нормального отрыва в изгибаемых армированных элементах» [11].

Испытывались шесть образцов балок прямоугольного поперечного сечения с различными коэффициентами армирования μ_s и схемами армирования. Нагружение соответствовало схемам трехточечного изгиба для образцов 1-4 и четырехточечного изгиба для образцов 5-6 (рисунок 3.10).

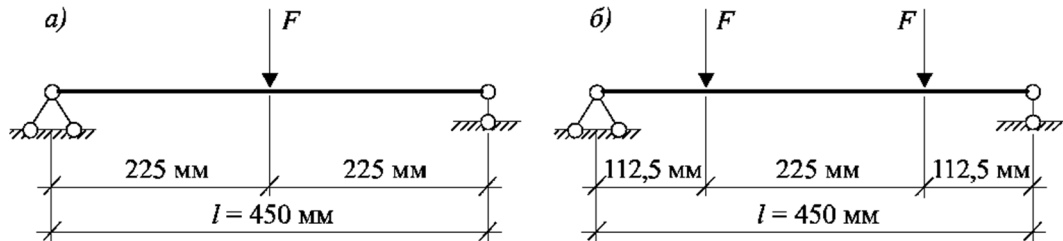


Рисунок 3.10 – Схема испытания образцов:
трехточечный изгиб (а); четырехточечный изгиб (б)

Прогиб балки определялся по показаниям индикатора часового типа, а деформации – тензодатчиков типа 2ПКБ-20-100ХБ. Армирование образцов выполнено из полосок дюралюминия (модуль упругости $E_s = 71000$ МПа) различной высоты и ширины, которые вклеивались в предварительно выфрезерованные канавки с помощью поливинилацетатного клея, смешанного с известковой пылью. Длина образцов $l = 450$ мм, ширина $b = 100$ мм, высота h . Описание схем армирования шести экспериментальных образцов (рисунок 3.11) приведены ниже:

- образец №1 – неармированная балка ($h = 89$ мм);
- образец №2 – армированная балка 5 полосками дюралюминия шириной 1,5 мм и высотой 2,4 мм на нижней грани, $\mu_s = 0,002$ ($h = 90$ мм);
- образец №3 – армированная балка 3 полосками дюралюминия шириной 1,5 мм и высотой 2,9 мм на нижней грани, $\mu_s = 0,0015$ ($h = 90$ мм);
- образец №4 – армированная балка 3 полосками дюралюминия на нижней грани и 3 полоски на верхней грани шириной 1,5 мм и высотой 2,8 мм, $\mu_s = 0,0028$ ($h = 90$ мм);
- образец №5 – армированная балка 3 полосками дюралюминия шириной 1,0 мм и высотой 3,0 мм на нижней грани, $\mu_s = 0,001$ ($h = 90$ мм);
- образец №6 – армированная балка 7 полосками дюралюминия шириной 1,5 мм и высотой 3,2 мм на нижней грани, $\mu_s = 0,004$ ($h = 82$ мм).

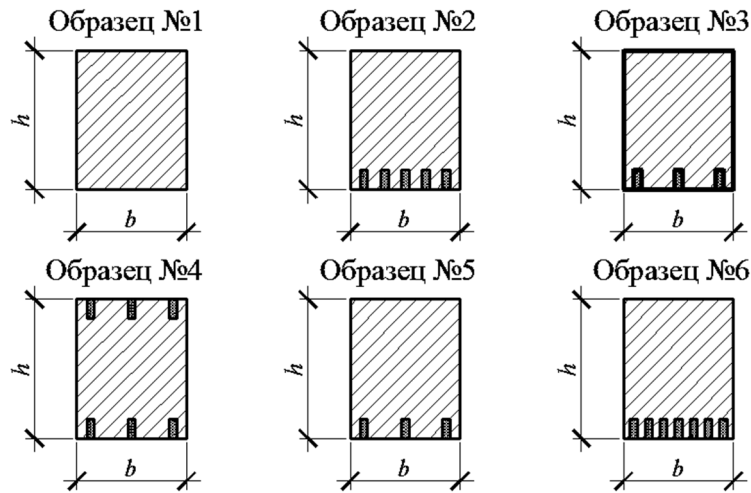


Рисунок 3.11 – Схемы армирования образцов

В статье [6] приведены результаты испытаний кубов со стороной 100 мм и «восьмерок» из однородного ячеистого материала. Испытывались 5 образцов на сжатие и 5 образцов на растяжение. По результатам данных испытаний приводятся кривые «напряжения-деформации» (рисунок 3.12): слева от сплошной прямой расположены кривые деформирования образцов, определенные с помощью индикатора часового типа, справа – с помощью тензодатчиков типа 2ПКБ-20-100ХБ. Сплошная прямая на рисунке 3.12 получена усреднением деформаций, измеренных с помощью индикаторов часового типа и тензодатчиков.

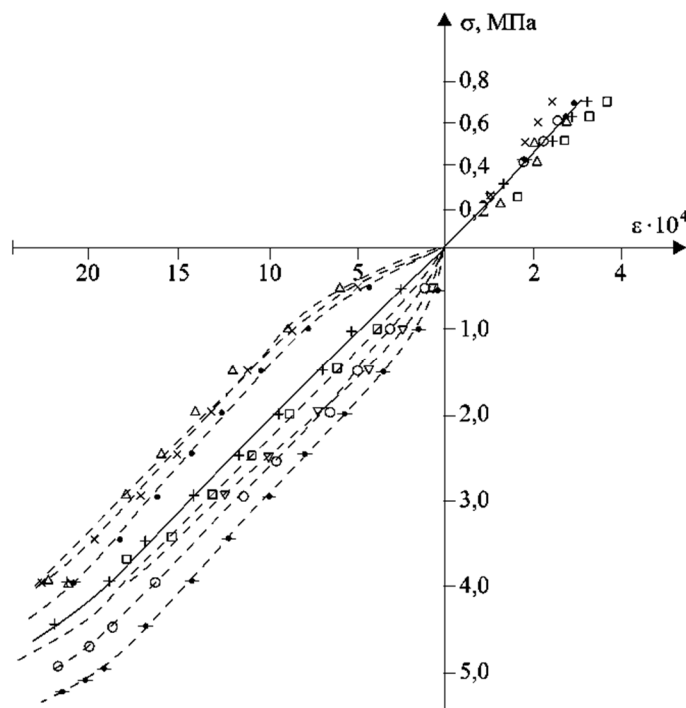


Рисунок 3.12 – Кривые деформирования однородного ячеистого материала

Среднее значение модуля упругости на сжатие составляет $E_b = 2160$ МПа, на растяжение $E_{bt} = 2060$ МПа.

В качестве аппроксимаций диаграммы деформирования была использована диаграмма Прандтля в зоне растяжения 0-3 и линейно-упругая зависимость в сжатой зоне 1-0 (рисунок 3.13).

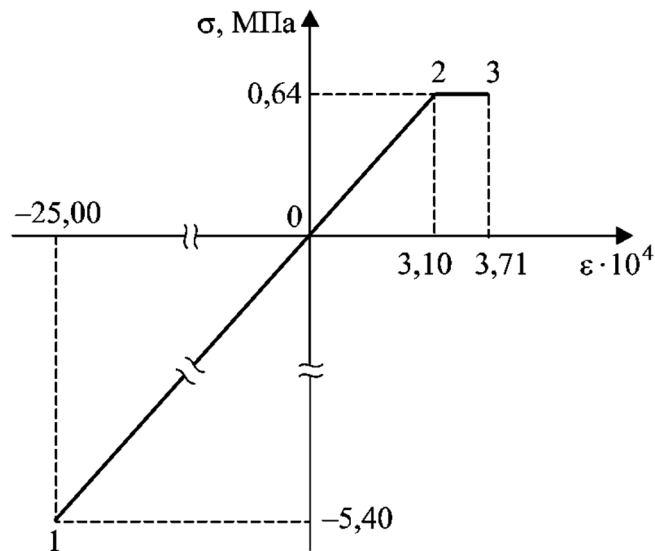


Рисунок 3.13 – Диаграмма деформирования однородного ячеистого материала

3.2.2. Обработки экспериментальных данных численно-аналитическим методом

Рассмотрим армированный образец №4, как наиболее общий случай, так как данный образец армирован двумя семействами арматуры (рисунок 3.11). На рисунке 3.14 изображено расчетное сечение, в котором действует изгибающий момент M , а также эпюры деформаций и напряжений для сечения данного образца. Эпюра напряжений в сжатой зоне линейна, так как при образовании трещин при изгибе в бетонных и железобетонных элементах напряжения в сжатой зоне не достигают предела пропорциональности.

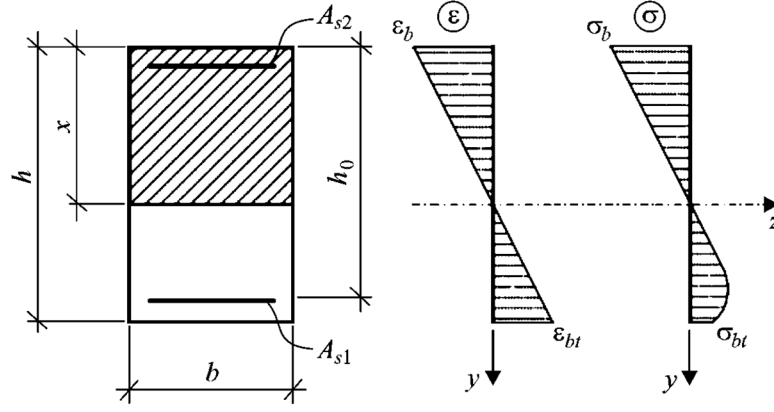


Рисунок 3.14 – Распределение деформаций и напряжений по высоте сечения балки

Перепишем уравнения равновесия (2.14)-(2.17) с учетом дополнительного армирования в сжатой зоне относительно нейтральной линии ($y = 0$) до момента образования трещины:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \right) \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) d\varepsilon + \sigma_{s1} A_{s1} - \sigma_{s2} A_{s2} = 0, \\ b \left(-\frac{x}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \psi(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sigma_{s1} A_{s1} (h_0 - x) - \sigma_{s2} A_{s2} (x - a') = M, \\ \varepsilon_b = \frac{x}{x - h_0} \varepsilon_{s1}, \\ \varepsilon_{bt} = \frac{h - x}{h_0 - x} \varepsilon_{s1}, \\ \varepsilon_{s2} = \frac{x - a}{x} \varepsilon_b, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где σ_{s1} , σ_{s2} – напряжение в слое растянутой и сжатой арматуры соответственно; ε_{s1} , ε_{s2} – деформация растяжения и сжатия в арматурном слое; a , a' – защитный слой бетона в зоне растяжения и сжатия, A_{s1} , A_{s2} – площадь армирования в растянутой и сжатой зоне.

Перепишем систему уравнения равновесия (3.1) в безразмерном виде, учитывая, что в соответствии со схемами армирования (рисунок 3.11), защитный слой бетона отсутствует $a = a' = 0$, $h = h_0$:

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_{s1} \bar{\varphi}(\varepsilon_{s1}) - \mu_{s2} \bar{\varphi}(\varepsilon_{s2}), \\ \left(\frac{\xi}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + (1 - \xi) \mu_{s1} \bar{\varphi}(\varepsilon_{s1}) - \mu_{s2} \bar{\varphi}(\varepsilon_{s2}) \xi = \bar{M}, \\ \varepsilon_b = \frac{\xi}{\xi - 1} \varepsilon_{s1}, \\ \varepsilon_{bt} = \varepsilon_{s1}, \\ \varepsilon_{s2} = \varepsilon_b, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\mu_s = \mu_{s1} + \mu_{s2}$ – коэффициент армирования сечения, $\mu_{s1} = A_{s1} / (bh_0)$, $\mu_{s2} = A_{s2} / (bh_0)$; $\bar{\varphi}(\varepsilon_{s1}) = \varphi(\varepsilon_{s1}) / \sigma_{02}$, $\bar{\varphi}(\varepsilon_{s2}) = \varphi(\varepsilon_{s2}) / \sigma_{02}$; $\bar{\psi}(\varepsilon) = \psi(\varepsilon) / \sigma_{02}$; $\bar{M} = M / (bh_0^2 \sigma_{02})$. Функции $\sigma_{s1} = \varphi(\varepsilon_{s1})$ и $\sigma_{s2} = \varphi(\varepsilon_{s2})$ аппроксимируют диаграмму деформирования арматуры.

Упростим форму записи системы (3.2), следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_{s1} \bar{\varphi}(\varepsilon_{bt}) - \mu_{s2} \bar{\varphi}(\varepsilon_b), \\ \left(\frac{\xi}{\varepsilon_b} \right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \bar{\psi}(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + (1 - \xi) \mu_{s1} \bar{\varphi}(\varepsilon_{bt}) - \mu_{s2} \bar{\varphi}(\varepsilon_b) \xi = \bar{M}, \\ \varepsilon_b = \frac{\xi}{\xi - 1} \varepsilon_{bt}, \end{cases} \quad (3.3)$$

В соответствии с алгоритмом численно-аналитического метода расчета, выбираются узловые значения $\varepsilon_{bt,i}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) в интервале $0 < \varepsilon_{bt,i} < \varepsilon_{bt}^{crc}$, где $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^{crc} = \varepsilon_3$ предельная деформация растяжения бетона согласно реальной диаграмме деформирования однородного ячеистого материала (рисунок 3.13). Таким образом, для каждого узлового значения деформаций растяжения бетона получаем систему уравнений (3.3), состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными $\varepsilon_{b,i}$, ξ_i , $\bar{M}_i$ для всех типов образцов. При этом для образцов №2, 3, 5 и 6 в данной системе уравнений $\mu_{s2} = 0$, а для образца №1 – $\mu_{s1} = \mu_{s2} = 0$.

Зависимость изгибающего момента $\bar{M}(\zeta)$ от координаты по длине шарнирно опертой балки при трехточечном изгибе (рисунок 3.10а) и при четырехточечном изгибе (рисунок 3.10б) описываются известными формулами, соответствующими треугольной и трапецеидальной эпюрам изгибающих моментов. Безразмерная нагрузка $\bar{F} = F / (bh_0\sigma_{02})$.

Трещина может образоваться при нагрузке, определяемой из соотношения $\bar{M}_{crc} = \bar{F}L / 4$, где $\bar{M}_{crc}$ – безразмерный изгибающий момент образования трещины. При трехточечном изгибе в сечении с координатой $\zeta = L / 2$, при четырехточечном изгибе трещина может образоваться в интервале $\zeta = L / 4 \div 3L / 4$.

Неизвестные координаты сечений ζ_i определяются из уравнения $\bar{M}(\zeta_i) = \bar{M}_i$, где изгибающий момент равен $\bar{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Далее определяется перемещение сечения с координатой ζ_i по формуле Мора:

$$\bar{\Delta}(\zeta_i) = \int_0^L \bar{M}_{0i}(\zeta) \bar{\chi}(\zeta) d\zeta,$$

где $\zeta = z / h_0$, z – координата по длине балки; $L = l / h_0$, l – длина балки, $\bar{\Delta}(\zeta_i) = \Delta(z_i) / h_0$, $\bar{M}_{0i}(\zeta) = M_{0i}(z) / (bh_0^2\sigma_{02})$, $M_{0i}(z)$ – распределение по длине балки изгибающего момента, возникающего при действии единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (в сечении с координатой ζ_i); $\bar{\chi}(\zeta) = -\varepsilon_b(\zeta) / \xi(\zeta)$ – функция, описывающая зависимость кривизны нейтральной линии от координаты.

3.2.3. Результаты применение численно-аналитического метода определения прогибов для обработки экспериментальных данных

В таблице 3.4 представлены результаты расчета разрушаемого сечения, выполненные в программном комплексе Mathcad 15, для шести образцов (рисунок 3.11) с разными схемами нагружения и коэффициентами армирования.

Таблица 3.4 – Результаты расчета НДС разрушаемого сечения в состоянии предразрушения для шести экспериментальных образцов

Номер образца, коэффициент армирования	Безразмерные физические величины								
	$\frac{\varepsilon_b \cdot 10^4}{\bar{\Psi}(\varepsilon_b) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_{bt} \cdot 10^4}{\bar{\Psi}(\varepsilon_{bt}) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_{s1} \cdot 10^4}{\bar{\Phi}(\varepsilon_{s1})}$	$\frac{\varepsilon_{s2} \cdot 10^4}{\bar{\Phi}(\varepsilon_{s2})}$	ξ	$\bar{\chi} \cdot 10^4$	$\bar{M} \cdot 10^4$	$\bar{F} \cdot 10^4$	$\bar{\Delta} \cdot 10^3$
№1, $\mu_s = 0$	$\frac{-3,622}{-1,961}$	$\frac{3,770}{1,604}$	-	-	0,490	7,392	3,184	2,519	1,541
№2, $\mu_s = 0,002$	$\frac{-6,116}{-3,311}$	$\frac{6,190}{1,604}$	$\frac{6,190}{0,110}$	-	0,497	12,310	5,691	4,553	2,363
№3, $\mu_s = 0,0015$	$\frac{-4,856}{-2,629}$	$\frac{4,760}{1,604}$	$\frac{4,760}{0,085}$	-	0,505	9,616	4,551	3,641	1,904
№4, $\mu_s = 0,0028$	$\frac{-4,291}{-2,323}$	$\frac{3,570}{1,604}$	$\frac{3,570}{0,065}$	$\frac{-4,291}{-0,076}$	0,539	7,961	4,548	3,638	1,643
№5, $\mu_s = 0,001$	$\frac{-4,644}{-2,514}$	$\frac{4,700}{1,604}$	$\frac{4,700}{0,084}$	-	0,497	9,344	4,226	3,381	2,652
№6, $\mu_s = 0,004$	$\frac{-6,821}{-3,692}$	$\frac{6,000}{1,604}$	$\frac{6,000}{0,107}$	-	0,532	12,820	7,084	5,164	4,385

В образце №2 и №6 предельные деформации растяжения различаются незначительно (таблица 3.4), при том, что коэффициенты армирования отличаются в два раза. Это объясняется различными схемами нагружения (образец №2 - трехточечный изгиб, образец №6 - четырехточечный изгиб).

Вследствие физической нелинейности поведения бетона высота сжатой зоны по длине балки не является величиной постоянной (рисунок 3.15), кроме пропорных участков, на которых выполняются соотношения закона Гука, а также в зоне чистого изгиба для образцов №5 и №6.

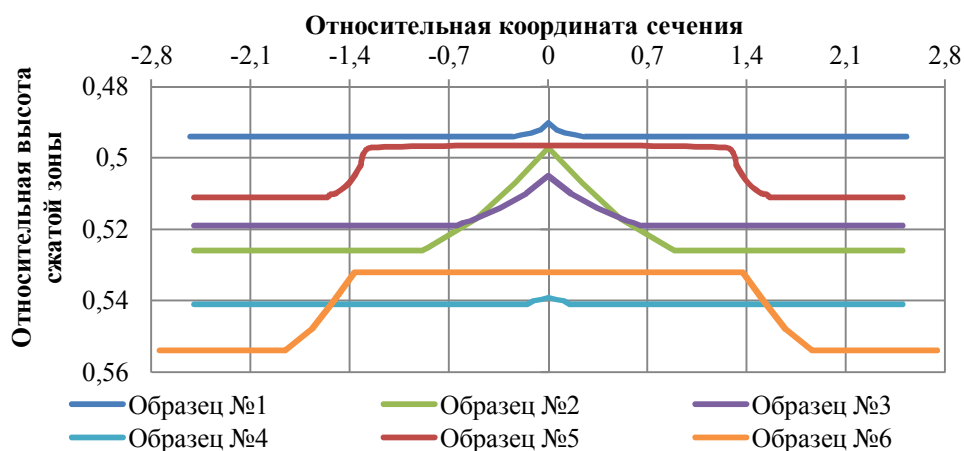


Рисунок 3.15 – Распределение относительных высот сжатой зоны

На рисунке 3.16 приведены графики распределений по длине балки кривизн и прогибов.

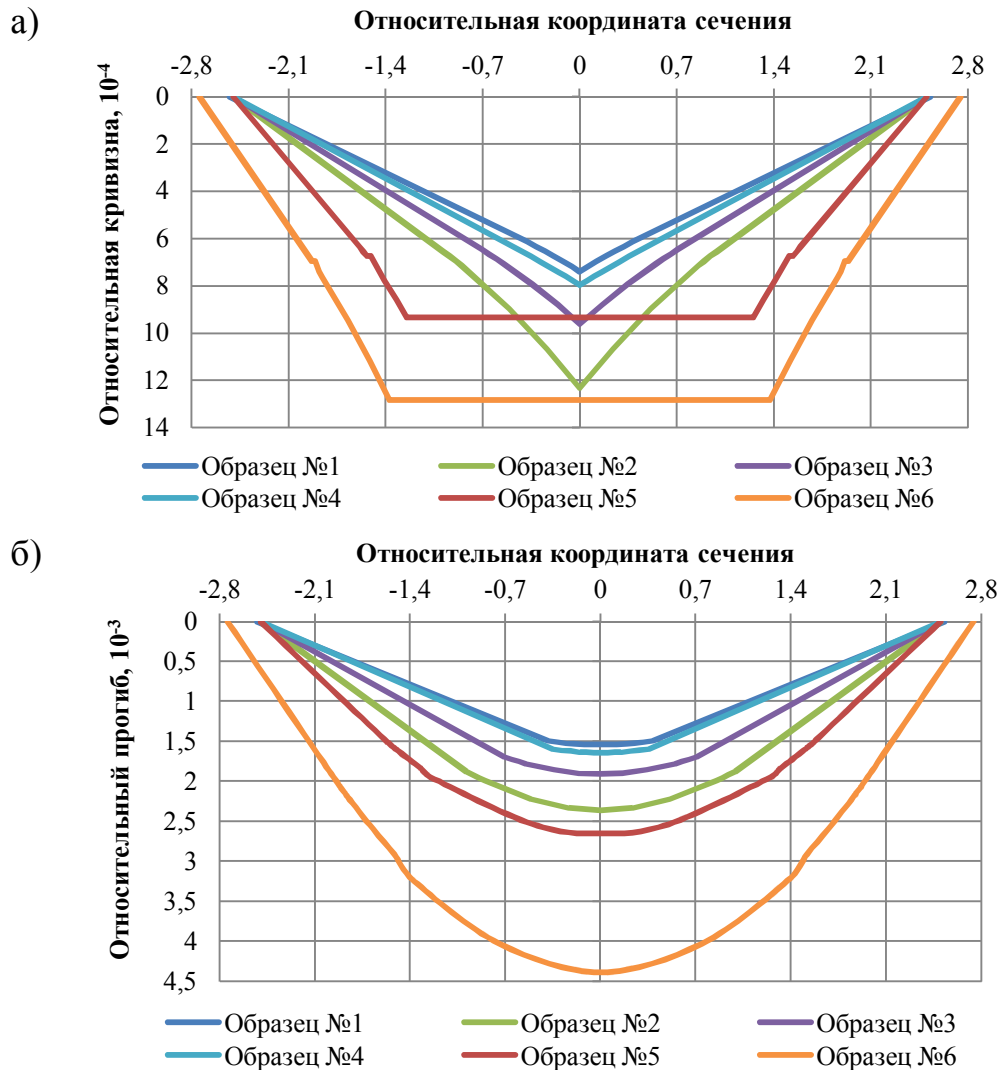


Рисунок 3.16 – Распределения относительных кривизн (а), прогибов (б)

В таблице 3.5 сравниваются напряжения и деформации в состоянии предразрушения, определенные по результатам экспериментального исследования и расчетов. Расчеты выполнены с применением численно-аналитического метода, при этом расчетные предельные деформации растяжения бетона приняты равными деформациям арматуры, полученным в эксперименте.

Эксперимент на неармированной балке (образец №1) показал, что деформация растяжения, при которой происходит образование трещины ($\epsilon_{bt} = -\epsilon_b = 3,77 \cdot 10^{-4}$), что превышает предельную деформацию растяжения

($\varepsilon_{bt} = 3,71 \cdot 10^{-4}$ на рисунке 3.13). Для образцов с максимальным армированием предельная деформация увеличивается до $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_s = 6,19 \cdot 10^{-4}$ (образец №2) и до $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_s = 6,00 \cdot 10^{-4}$ (образец №6). Для образцов с меньшей плотностью армирования предельные деформации достигают значений $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_s = 4,76 \cdot 10^{-4}$ (образец №3) и $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_s = 4,70 \cdot 10^{-4}$ (образец №5). Это подтверждает правильность основных предпосылок, принятых В.В. Адищевым и В.М. Митасовым в обосновании метода трансформации диаграмм деформирования бетона [4-5].

Таблица 3.5 – Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Образец		Физические величины				
		$\varepsilon_b \cdot 10^4$	$\varepsilon_{sl} \cdot 10^4$	M (Н·м)	F (Н)	$\Delta \cdot 10^2$ (мм)
№1	Эксперимент	-3,77	-	132	1200	12,0÷14,0
	Численно-аналитический метод	-3,62	3,77	101	895	13,7
№2	Эксперимент	-6,28	6,19	210	1900	18,1
	Численно-аналитический метод	-6,11	6,19	184	1635	21,3
№3	Эксперимент	-4,28	4,76	155	1400	16,0
	Численно-аналитический метод	-4,86	4,76	147	1307	17,1
№4	Эксперимент	-4,05	3,57	155	1400	-
	Численно-аналитический метод	-4,29	3,57	147	1306	14,8
№5	Эксперимент	-4,20	4,70	143	1300	-
	Численно-аналитический метод	-4,64	4,70	137	1214	23,87
№6	Эксперимент	-4,80	6,00	177	1600	-
	Численно-аналитический метод	-6,82	6,00	190	1689	35,95

Результаты для неармированной балки (образец №1), полученные с помощью численно-аналитического метода с применением экспериментальной диаграммы для однородного ячеистого материала (рисунок 3.13), продемонстрировали хорошую согласованность деформаций и прогибов с экспериментальными данными. Существенное различие опытных и расчетных нагрузок объясняется тем, что образование трещины в неармированном образце происходит практически мгновенно. Поэтому нагрузка, соответствующая моменту трещинообразования, определяется

с большой погрешностью. Для армированных образцов наблюдается хорошая согласованность по нагрузкам. Результаты, полученные для образца №4 с армированием в сжатой и растянутой областях с использованием численно-аналитического метода, хорошо согласуются с опытными данными.

Сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов численно-аналитическим методом для образцов с различными схемами армирования и нагружения позволяют сделать следующие выводы.

При совместном деформировании арматуры и бетона сдерживающее влияние арматуры проявляется в значительном увеличении предельных деформаций растяжения бетона, причем с увеличением плотности армирования увеличиваются предельные деформации. Это подтверждает необходимость применения трансформированных диаграмм при расчете на изгиб.

Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только на участке линейно-упругого деформирования (в приведенном примере на двух приопорных участках балки), а также в зоне чистого изгиба (образцы №5 и №6).

Сравнение теории и эксперимента показало, что предложенный численно-аналитический метод позволяет адекватно моделировать напряженно-деформированное состояние в армированных балках (в том числе в сжатой и растянутой зонах) до момента образования трещины и в предельном состоянии предразрушения.

3.3. Третья серия экспериментов – исследование напряженно-деформированного состояния в балка с заранее организованными трещинами

3.3.1. Постановка эксперимента

С использованием поляризационно-оптического метода [13, 15, 36, 90-92] проведено экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния балок с заранее организованными трещинами в окрестности трещин, а также определялась длина зоны краевого эффекта. Под зоной краевого эффекта по-

нимается характерная длина изгибаемого элемента в окрестности трещины, на которой существенными являются касательные напряжения, а также наблюдается резкое изменение напряжений в продольном направлении (см. главу 3.1). Данное исследование необходимо для создания численно-аналитического метода определения прогиба железобетонного элемента не только для стадии до момента образования трещины (см. главу 2.1), но и для стадии появления и стабилизации трещины.

Исследование напряженного состояния изгибаемого армированного элемента проводилось в условиях чистого изгиба (четырёхточечный изгиб) на образце с одной трещиной высотой 5 мм, а также на образце с тремя трещинами высотой 7 мм (рисунок 3.17а). Ширина заранее организованных трещин 0,2 мм. Толщина образцов – 6 мм, процент армирования $\mu \approx 5\%$, защитный слой армирующего элемента не предусмотрен.

Образцы выполнены из связующего материала – фенолформальдегидная смола «Хромвинил V-276», армирующий слой – стеклопластик «АГ-4С». Соотношения предельных сопротивлений ($R_{\text{арматура}}$, $R_{\text{смола}}$) и модулей упругости ($E_{\text{арматура}}$, $E_{\text{смола}}$):

$$\frac{R_{\text{арматура}}}{R_{\text{смола}}} \approx \frac{500 [\text{МПа}]}{40 [\text{МПа}]} \approx 12,5; \quad \frac{E_{\text{арматура}}}{E_{\text{смола}}} \approx \frac{38000 [\text{МПа}]}{3200 [\text{МПа}]} \approx 11,87.$$

Схемы нагружения и габариты образцов представлены на рисунке 3.17 б,в. Степень нагружения каждой силы $F = 50$ Н. Максимальное значение усилия $F_{\text{max}} = 200$ Н.

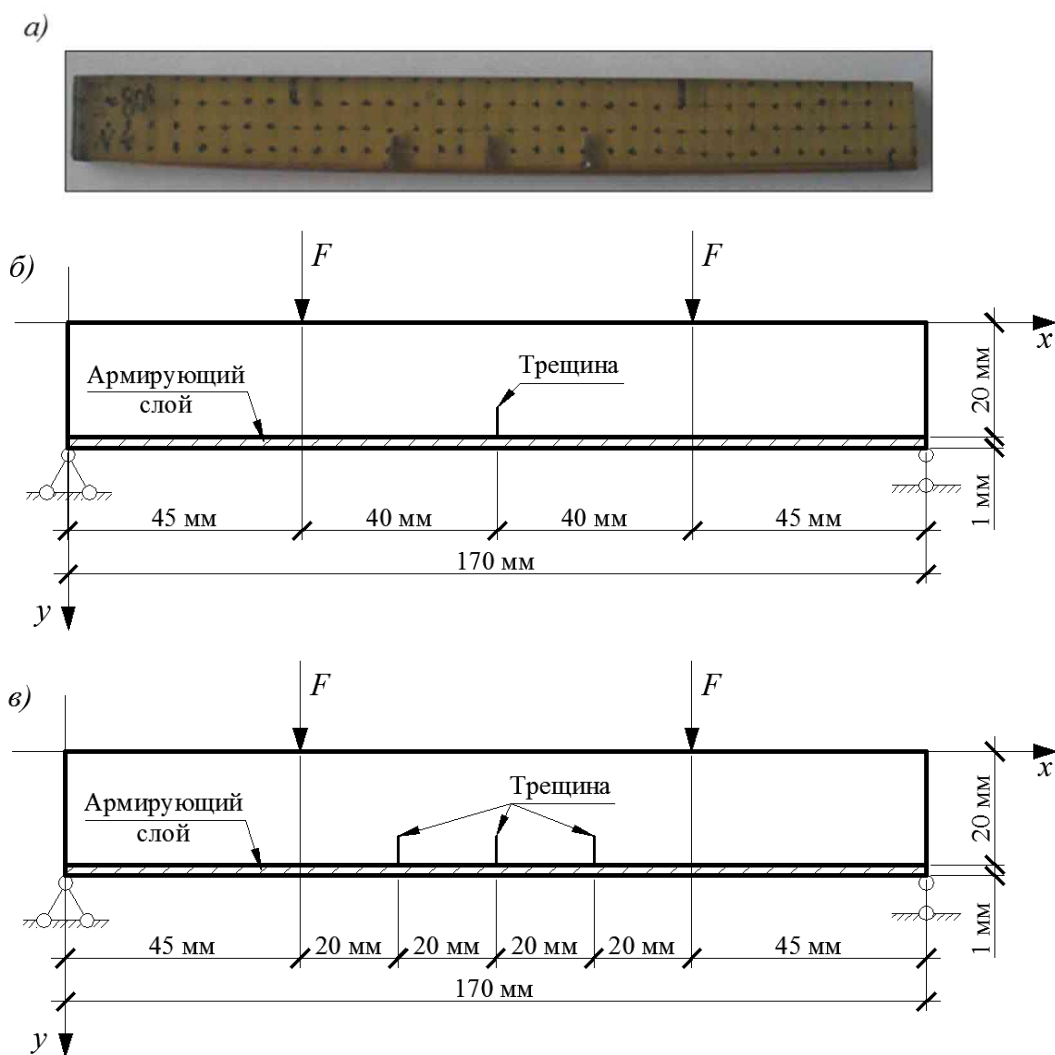


Рисунок 3.17 – Опытный образец с тремя трещинами (а);
схема испытания образцов: с одной трещиной (б), с тремя трещинами (в)

3.4.2. Результаты экспериментального исследования

В результате поляризационно-оптического эксперимента на поляризационно-проекционной установке ППУ-7 получены картины полос интерференции (рисунки 3.18 и 3.19), позволяющие наглядно оценить зону краевого эффекта. В ходе эксперимента были обнаружены остаточные (усадочные) напряжения при отсутствии механического воздействия на образцы $F = 0$ Н (рисунки 3.18а и 3.19а).

Напряжения на свободном контуре σ_k от воздействия нагрузки определяются согласно зависимости [13]:

$$\sigma_k = (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\sigma_0^{1,0} n}{b}, \quad (3.4)$$

где $\sigma_1 - \sigma_2$ – разница главных напряжений; $\sigma_0^{1,0}$ – цена полосы материала; n – порядок полосы интерференции, b – толщина модели.

В области чистого изгиба главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{M_x}{W_x}, \quad \sigma_2 = 0, \quad (3.5)$$

где M_x – изгибающий момент, $W_x = bh^2 / 6$ – момент сопротивления для прямоугольного сечения, h – высота образца.

Приравняв выражение (3.4) к выражениям (3.5), получим зависимость для определения цены полосы интерференции $\sigma_0^{1,0}$ в балке при чистом изгибе:

$$\sigma_0^{1,0} = \frac{M_x b}{W_x n_{\max}} = \frac{6F}{h^2 n_{\max}} a, \quad (3.6)$$

где a – расстояние, от опоры до ближайшей силы F ; $n_{\max}$ – максимальный порядок интерференционной полосы соответствующей нагрузке F . Чтобы свести погрешность эксперимента к минимуму цена полосы материала по напряжениям определяется, как среднее арифметическое значение результатов нескольких нагружений.

Если $F = 100$ Н, то для балки с одной трещиной максимальный порядок полосы интерференции $n_{\max} = 3$ (рис. 3.18б); если $F = 200$ Н, то $n_{\max}^{200} = 5$ (рис. 3.18в).

По формуле (3.6) цена полосы материала, для данных нагрузок примет вид:

$$\sigma_{0,100}^{1,0} = \frac{6 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{21^2 \cdot 10^{-6} \cdot 3} 4,5 = 2,04 \text{ [МПа} \cdot \text{см]};$$

$$\sigma_{0,200}^{1,0} = \frac{6 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{21^2 \cdot 10^{-6} \cdot 5} 4,5 = 2,44 \text{ [МПа} \cdot \text{см]},$$

тогда среднее арифметическое цены полосы материала $\sigma_0^{1,0} = 2,24 \text{ МПа} \cdot \text{см}$.

На рисунке 3.18 приведены эпюры нормальных напряжений вдоль оси x для балки с одной трещиной (см. рисунок 3.17б), определенные по формуле (3.4), над трещиной (сечение 2-2) и на расстоянии 15 мм от трещины (сечение 1-1). Красной линией на картине полос интерференции обозначена нейтральная линия (Н.Л.).

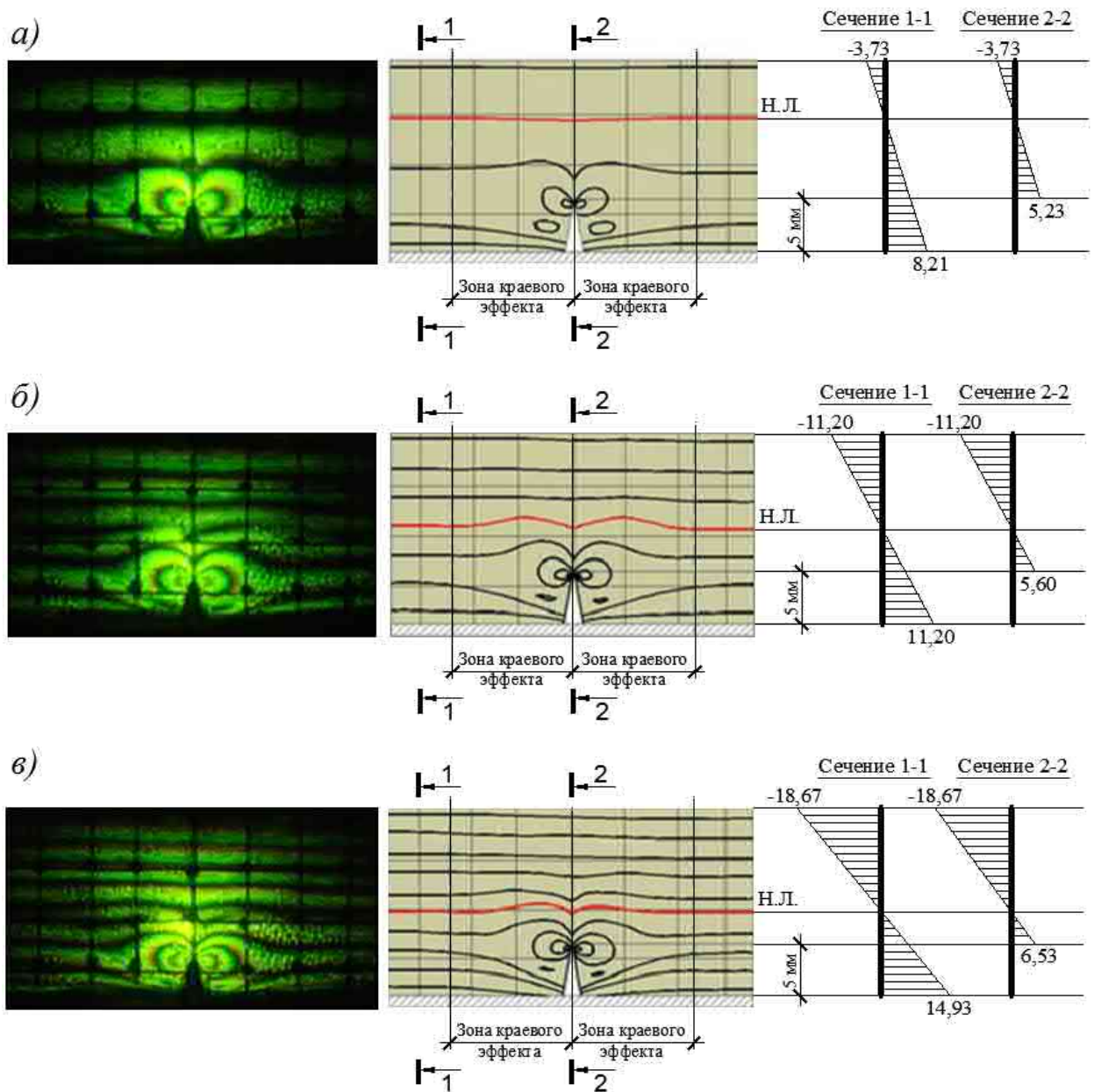


Рисунок 3.18 – Картина полос интерференции и эпюры напряжений σ_x (МПа) для образца с одной заранее организованной трещиной при нагрузке $F = 0$ Н (а); $F = 100$ Н (б); $F = 200$ Н (в)

По аналогии построены эпюры нормальных напряжений вдоль оси x (рисунок 3.19) для балки с тремя трещинами (см. рисунок 3.17в) над трещиной (сечение 2-2) и на расстоянии 35 мм от центральной трещины (сечение 1-1).

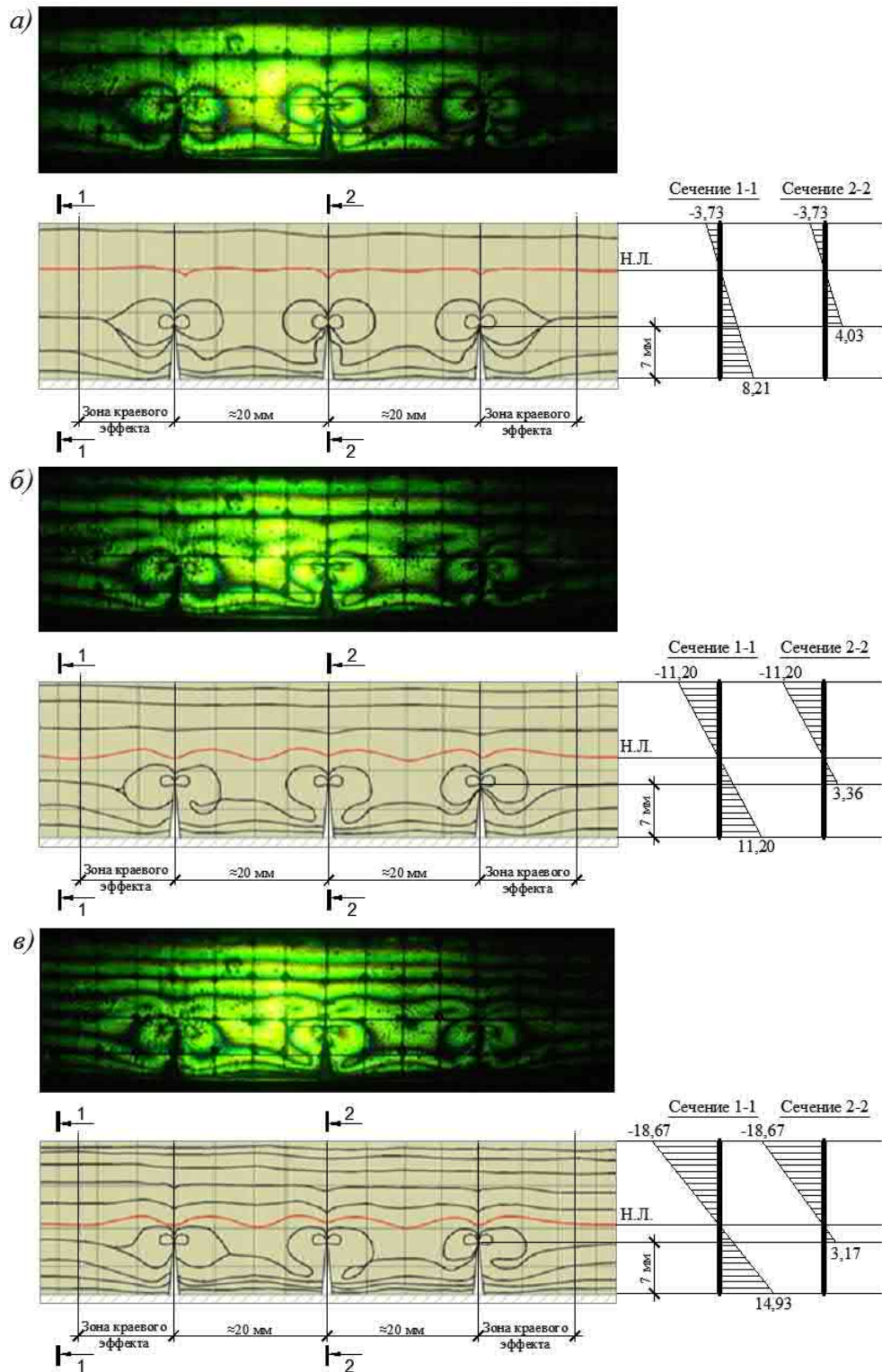


Рисунок 3.19 – Картина полос интерференции и эпюры напряжений σ_x (МПа) для образца с тремя заранее организованными трещинами при нагрузке $F = 0$ Н (а); $F = 100$ Н (б); $F = 200$ Н (в)

По результатам экспериментального исследования, выявлено что, зона краевого эффекта при увеличении нагрузки остается постоянной ~ 12 мм, при этом зафиксировано перемещение нейтральной линии (Н.Л. на рисунках 3.18 и 3.19) к вершине трещины при увеличении нагрузки. Предполагается, что данное изменение высоты сжатой зоны возможно из-за наличия в образце остаточных (усадочных) напряжений и (или) большого процента армирования сечения.

3.5. Выводы по главе 3

1. Проведены экспериментальные исследования с использованием поляризационно-оптического метода, получены распределения нормальных и касательных напряжений в матрице при вытягивании из нее армирующего элемента. Получены теоретические оценки длины зоны краевого эффекта (зона анкеровки – эффективной длины армирующего элемента), на основе простейшей модели типа модели Аутвотера. Выявлено, что в первом приближении можно определять зону анкеровки по модели типа Аутвотера с $20 \div 30\%$ погрешностью.

2. Проведена экспериментальная апробация численно-аналитического метода определения прогибов железобетонного элемента.

Сравнение теории и эксперимента показало, что предложенный численно-аналитический метод позволяет адекватно моделировать напряженно-деформированное состояние в армированных балках из однородного ячеистого материала, армированных полосами дюралюминия до момента образования трещины и в предельном состоянии предразрушения.

Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль шарнирно опертой балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только на участке линейно-упругого деформирования, что соответствует приопорным участкам, а также в зоне чистого изгиба (в образцах с четырехточечным изгибом).

3. Проведено экспериментальное исследование балок с заранее организованными трещинами с использованием поляризационно-оптического метода. Получены распределения нормальных напряжений в окрестности трещины.

Выявлено что, зона краевого эффекта при увеличении нагрузки остается постоянной. Зона краевого эффекта для образцов с одной и тремя заранее организованными трещинами равна ~ 12 мм.

Зафиксировано перемещение нейтральной линии к вершине трещины при увеличении нагрузки. Предполагается, что данное изменение высоты сжатой зоны возможно из-за наличия в образце остаточных (усадочных) напряжений и (или) большого процента армирования сечения.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS. СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ.

4.1. Определение зоны краевого эффекта при вытягивании армирующего элемента из матрицы связующего

4.1.1. Численные решения для первой серии экспериментов

В данном параграфе приведено численное моделирование процесса вырывания армирующего элемента из матрицы. Моделирование выполнено с помощью конечно-элементного программного комплекса ANSYS (ПК ANSYS) в рамках двумерной задачи теории упругости с учетом геометрической нелинейности. Необходимость учета геометрической нелинейности при моделировании растяжения образца обусловлена возникновением больших деформаций. В основе геометрической нелинейности лежит теория конечных деформаций, описывающая перемещение частиц тела и обусловленные этим движением деформации [30, 49, 52].

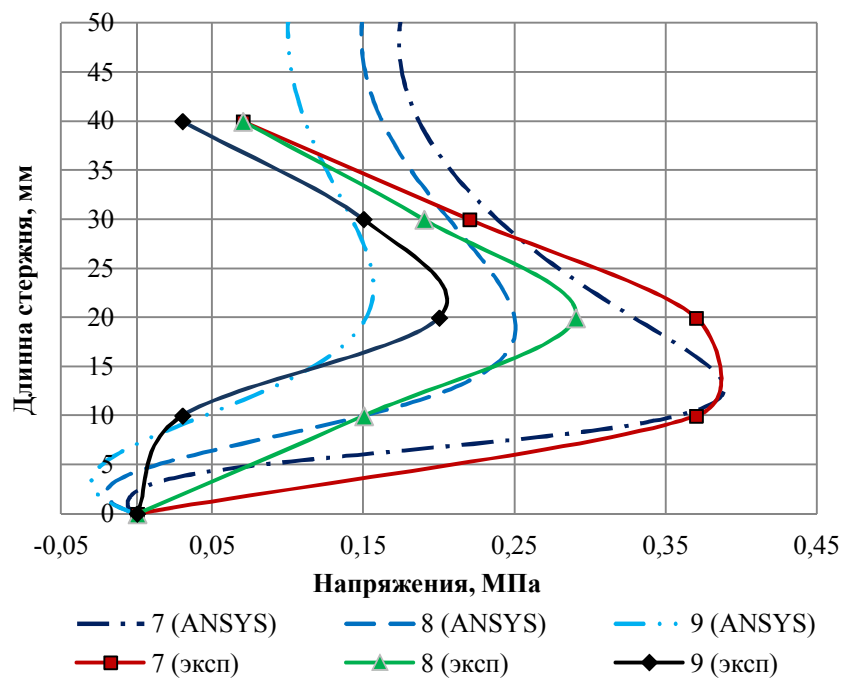
4.1.2. Опытный образец №1

В данном пункте произведено численное моделирование экспериментального образца №1, приведенного в параграфе 3.1. Расчетная модель образца, с указанными расчетными сечениями «7, 8, 9» представлена на рисунке 3.4. При создании расчетной модели приняты следующие допущения: 1) торец стержня не связан с матрицей; 2) адгезионные связи нарушены на расстоянии 5 мм от торцов стержня. Данные условия назначены на основании визуального обследования образцов в ходе эксперимента.

На рисунке 4.1 представлены касательные и продольные напряжения в матрице. При этом координата 0 мм на оси «Длина стержня, мм» соответствует свободному торцу матрицы (см. рисунок 3.4). Наличие отрицательных касательных напряжений (рисунок 4.1а), полученных по результатам расчетов в ПК ANSYS на

первых 5 мм контактного взаимодействия армирующего элемента и матрицы связующего, является следствием того, что на данном участке, согласно принятым допущениям, отсутствуют адгезионные связи.

а)



б)

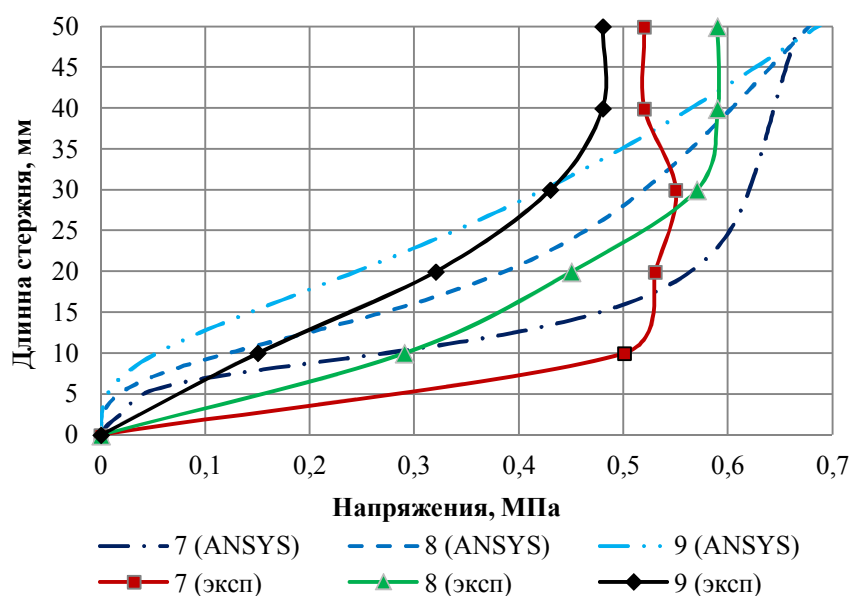


Рисунок 4.1 – Напряжения в матрице при $P = 500$ Н:
касательные τ_{zy} (а); нормальные σ_y (б)

На рисунке 4.1б зона краевого эффекта соответствует точке пересечения кривых деформаций (координата 49 мм по оси «Длина стержня, мм») полученных по результатам численного моделирования. С учетом того, что адгезионные связи между стержнем и матрицей отсутствуют на первых 5 мм, было выявлено, что зона краевого эффекта составляет 44 мм, разница с экспериментом составляет 9%.

В Таблице 4.1 приведены данные необходимые для определения параметра β по формуле (2.47):

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{crc}}\right)}{z_1 - z_0}$$

Следует отметить, деформации в начале ε_0 и конце ε_{crc} зона зоны краевого эффекта, а также не посредственно длину зоны краевого эффекта ($z_1 - z_0$) можно определить с помощью данных полученных в ПК ANSYS.

Таблица 4.1 – Определение параметра β по формуле (2.47)

Определяемые параметры	Нагрузка, Н		
	500	1000	1500
z_0 , м	0,005	0,005	0,005
z_1 , м	0,049	0,049	0,049
ε_0 , м/м	0,00060	0,00038	0,00020
ε_{crc} , м/м	0,00080	0,00054	0,00027
$\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{crc}}\right)$	0,281	0,348	0,281
β	6,40	7,90	6,40

Среднее значение β составляет 6,9. Данное значение β использовано для определения продольных деформаций в стержне (кривые «теор» на рисунках 4.2 и 4.3) по формуле (2.44).

Длина зоны анкеровки определяется из условия равенства продольных деформаций в стержне и матрице образца, что соответствует точке пересечения кривых деформаций на рисунке 4.2. Под зоной анкеровки понимается характерная длина участка армирующего элемента, на котором существенными являются касательные напряжения (рисунок 4.1а) в контактном слое матрицы.

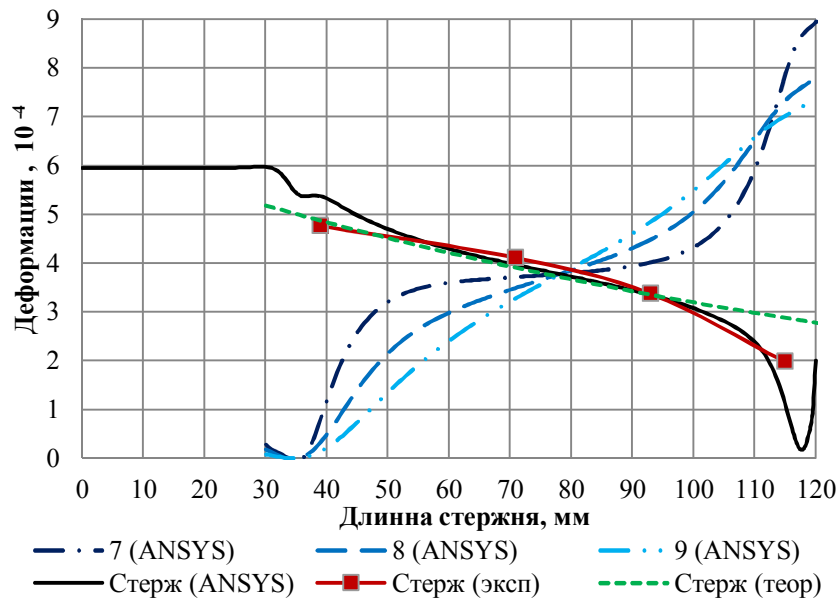


Рисунок 4.2 – Продольные деформации в матрице и стержне при $P = 1000$ Н

При сопоставлении продольных деформаций в стержне, определенных с помощью численного моделирования в ПК ANSYS и численно-аналитического метода, с экспериментальными данными выявлена хорошая согласованность результатов (рисунки 4.2 и 4.3). Отличие результатов численного моделирования от аналитического расчета выявлено в районе опор, где реализуется сложное напряженное состояние, которое не описывается в математической модели.

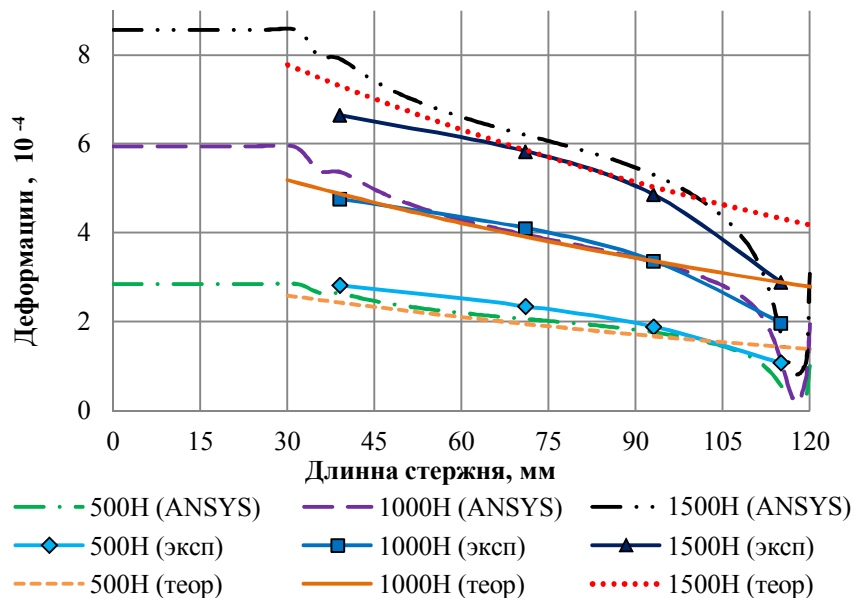


Рисунок 4.3 – Продольные деформации в стержне при $P = 500 \div 1500$ Н

Длины зоны анкеровки для опытного образца №1 составляет: 40 мм по результатам экспериментального исследования; 50÷60 мм по данным, полученным с использованием модели типа Аутвотера (численно-аналитический метод); 40÷50 мм по результатам численного моделирования в программном комплексе ANSYS.

Таким образом, в первом приближении можно определять зону анкеровки по модели Аутвотера с 20÷30% погрешностью. Отличие результатов численного моделирования от аналитического расчета выявлено в районе опор, где реализуется сложное напряженное состояние, которое не описывается в математической модели.

4.1.3. «Теоретический» образец

Приведено численное моделирование для дополнительного «теоретического» образца. Данный образец испытан только с использованием численного моделирования в ПК ANSYS. Конструктивная схема «теоретического» образца (рисунок 4.4) отличается от схем опытных образцов №1 и №2 (см. рисунки 3.4 и 3.7). Геометрические размеры образца: толщина $\delta = 6$ мм, ширина матрицы $b_m = 54$ мм, ширина армирующего элемента (стержня) $b_{cm} = 8$ мм, длина замоноличенного участка стержня $l = 90$ мм. Процент армирования $\mu \approx 14,8\%$.

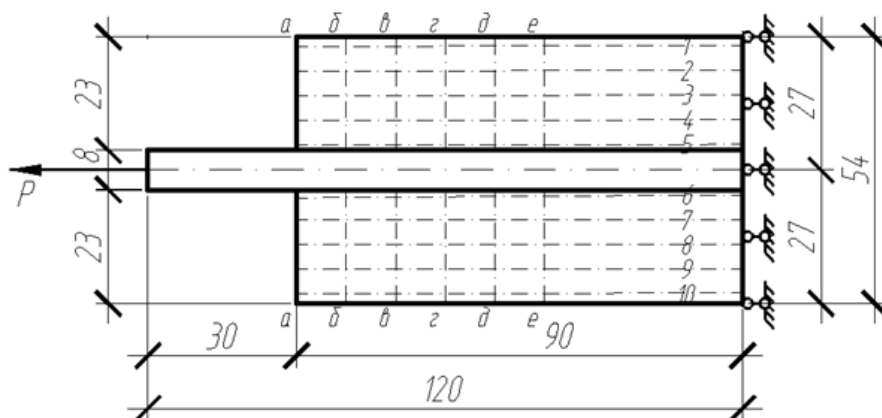


Рисунок 4.4 – Схема образца с указанными расчетными сечениями

Соотношение предельных сопротивлений (R_{cm} , R_m) и модулей упругости (E_{cm} , E_m) материалов образца:

$$\frac{R_{cm,3}}{R_{m,3}} = \frac{500 \text{ [МПа]}}{40 \text{ [МПа]}} = 12,5; \quad \frac{E_{cm,3}}{E_{m,3}} = \frac{35000 \text{ [МПа]}}{3500 \text{ [МПа]}} = 10$$

Для определения напряжений и деформаций назначены продольные сечения (1-10) с шагом 5 мм и поперечные (а-е) с шагом 10 мм (рис. 11).

При моделировании в ПК ANSYS предполагается, что на первых 5 мм контактного взаимодействия армирующего элемента и матрицы связующего отсутствуют адгезионные связи.

Нагружение образца производится приложением растягивающей нагрузки к свободному концу стержня и фиксацией матрицы с противоположной стороны. Степень нагружения 250 Н. Максимальное значение усилия $P_{\max} = 1000 \text{ Н}$.

На рисунке 4.5 представлены касательные и продольные напряжения в матрице. Наличие отрицательных касательных напряжений (рисунок 4.5а), является следствием того, что на данном участке, согласно принятым допущениям, отсутствуют адгезионные связи.

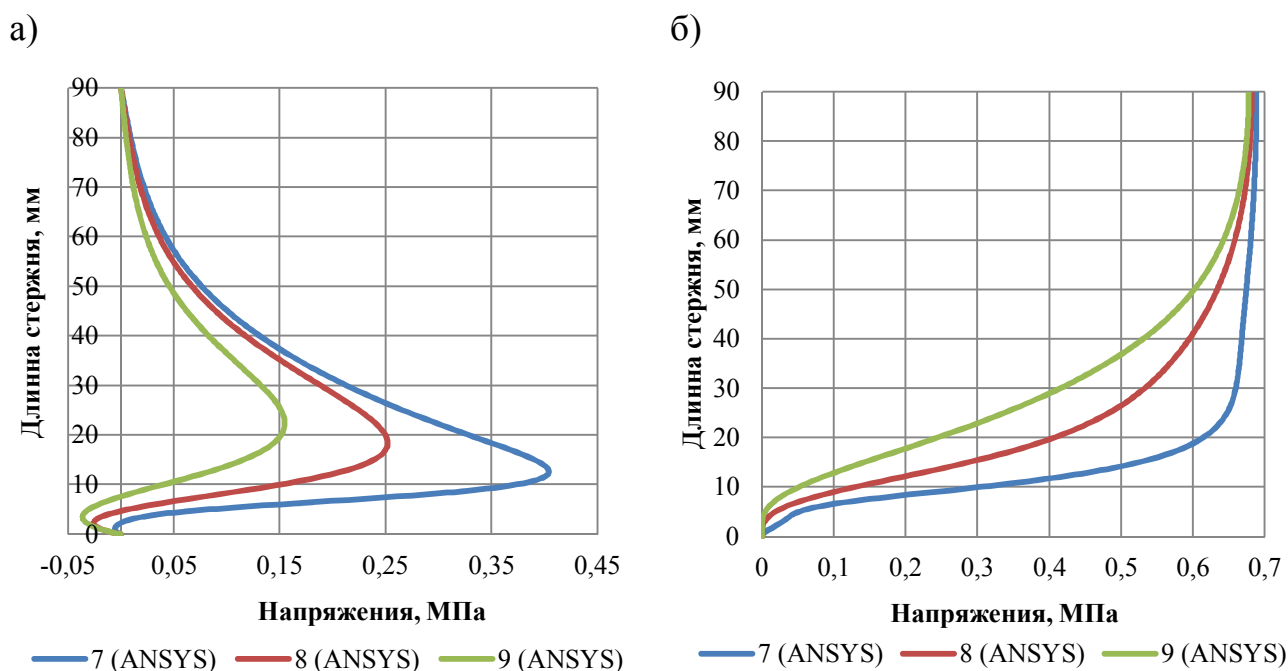


Рисунок 4.5 – Напряжения в матрице при $P = 500 \text{ Н}$:

касательные τ_{xy} (а); нормальные σ_y (б)

Следует отметить, что в «теоретическом» образце зона краевого эффекта не может быть определена графически, как точка пересечения кривых деформаций, по

аналогии с образцом №1 (пункт 4.1.2). В данном образце кривые деформации за счет выбранной расчетной схемы (рисунок 4.4) пересекаются в районе опоры (рисунок 4.6). При этом на расстоянии ≤ 55 мм от свободного торца образца деформации мало изменяются.

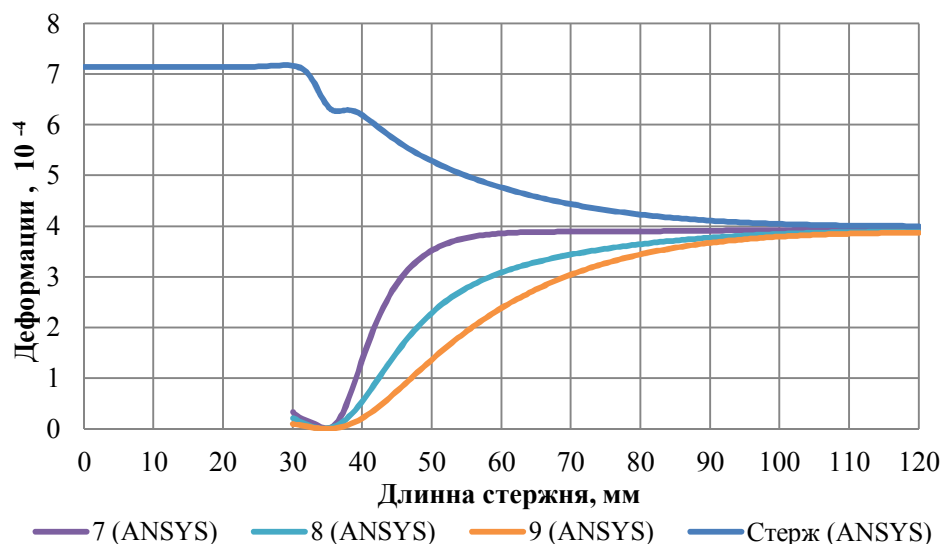


Рисунок 4.6 – Продольные деформации в матрице и стержне при $P = 1000$ Н

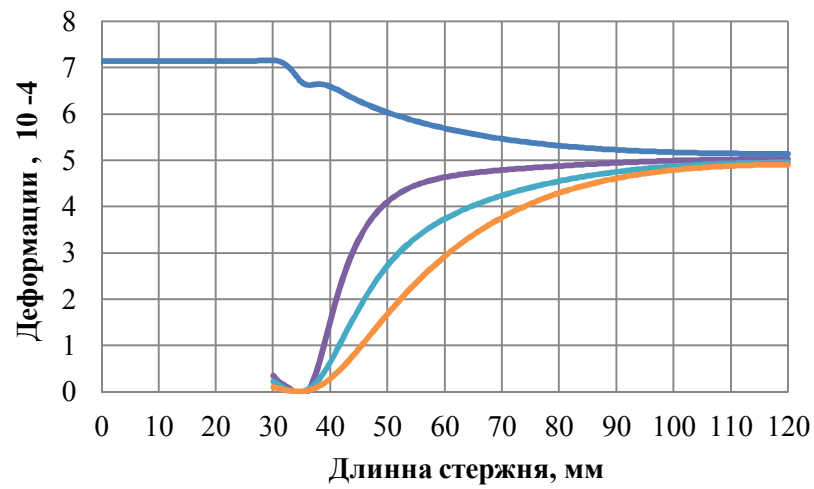
Зона анкеровки – характерная длина участка армирующего элемента, на котором существенными являются касательные напряжения в контактном слое матрицы является зоной анкеровки. Учитывая результаты, представленные на рисунке 4.5а, получим зона краевого эффекта (анкеровки) ~ 55 мм. Таким образом зону анкеровки можно определять по касательным напряжениям (деформациям) матрицы или нормальным напряжениям (деформациям) матрицы и армирующего элемента.

Ниже приведены графики продольных деформаций в матрице и стержне для различных соотношений модулей упругости (E_{cm} , E_m) материалов образца:

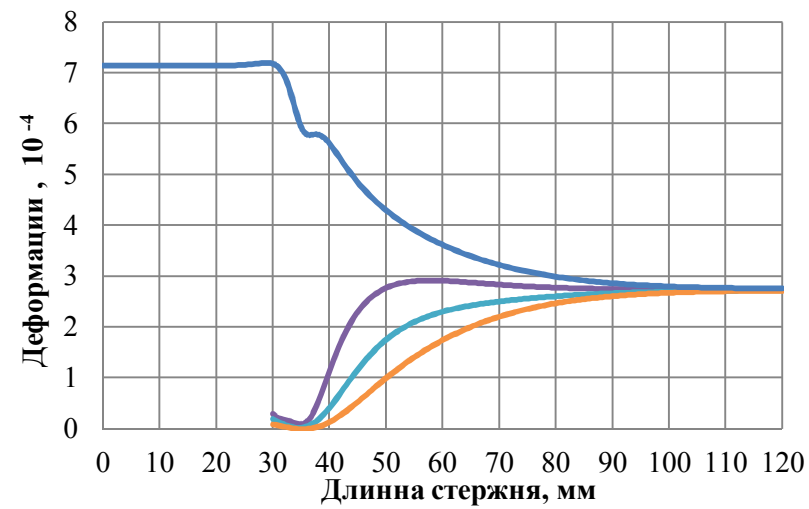
$$\frac{E_{cm,3}^a}{E_{m,3}^a} = \frac{35000 \text{ [МПа]}}{1750 \text{ [МПа]}} = 20; \quad \frac{E_{cm,3}^b}{E_{m,3}^b} = \frac{35000 \text{ [МПа]}}{7000 \text{ [МПа]}} = 5;$$

$$\frac{E_{cm,3}^c}{E_{m,3}^c} = \frac{35000 \text{ [МПа]}}{14000 \text{ [МПа]}} = 2,5.$$

а)



б)



в)

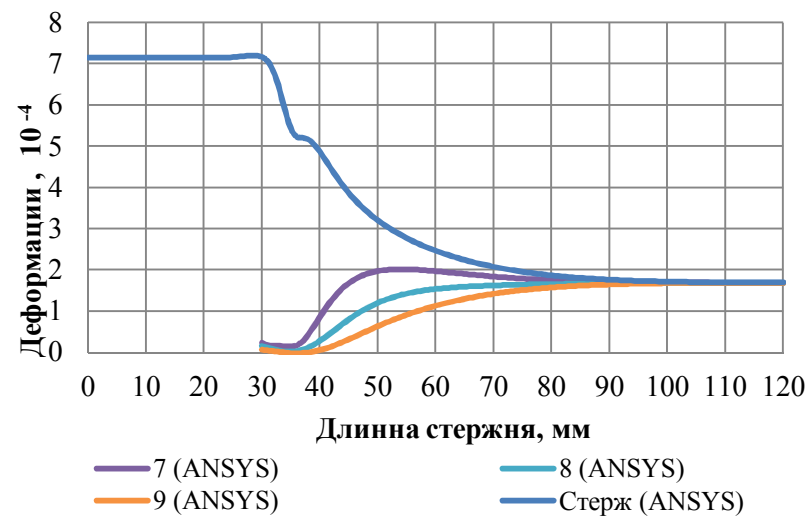


Рисунок 4.7 – Продольные деформации в матрице и стержне при $P = 1000$ Н:

$$E_{cm}/E_m = 20 \text{ (а)}; E_{cm}/E_m = 5 \text{ (б)}; E_{cm}/E_m = 2,5 \text{ (в)}$$

В ходе серии численных экспериментов с «теоретическим» образцом (рисунок 4.7) за счет варьирования модуля Юнга матрицы связующего при постоянном модуле Юнга армирующего получена зависимость длины зоны анкеровки от отношения жесткостных характеристик (рисунок 4.8). Выявлено, что при увеличении отношения E_m/E_{cm} уменьшается зона краевого эффекта, соответственно при уменьшении отношения E_m/E_{cm} — увеличивается.

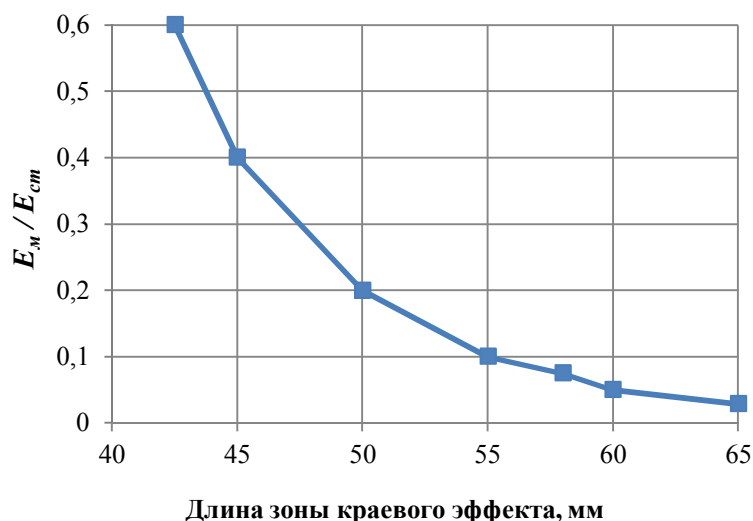


Рисунок 4.8 – Зависимость зоны краевого эффекта от отношения модуля упругости матрицы к модулю упругости армирующего элемента.

4.1.4. Заключение к параграфу 4.1

ПК ANSYS использован для определения зоны краевого эффекта при вытягивании армирующего элемента из матрицы связующего. Максимальный разброс результатов по сравнению с экспериментальными данными составляют 20%.

Проведенное сравнение результатов вычислительного эксперимента с экспериментальными данными показали адекватность заложенных ПК ANSYS алгоритмов при решении задач механики деформируемого твердого тела.

По данным численного эксперимента в ПК ANSYS получена зависимость величины зоны краевого эффекта от изменения модуля упругости, которая хорошо согласуется с теорией железобетона.

Выявлено, что в первом приближении длину зону краевого эффекта можно определять по модели Аутвотера с 20-30% погрешностью.

Отличие результатов численного моделирования от аналитического расчета объясняется влиянием закрепления, которое не описывается в математической модели.

4.2. Определение напряженно-деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала

4.2.1. Численные решения для второй серии экспериментов

Параграф посвящен апробации предложенного ранее численно-аналитического метода определения прогибов железобетонного элемента с помощью численного моделирования в ПК ANSYS. При реализации данного метода использован единый подход к построению аппроксимаций диаграмм деформирования бетона и арматуры, а также аппроксимаций функции кривизны, высоты сжатой зоны и прогиба в зависимости от координаты по длине балки. Численное моделирование в ПК ANSYS используется для определения реального напряженно-деформированного состояния при изгибе элемента из однородного ячеистого материала, армированного полосами дюралюминия, в стадии предразрушения. В параграфе 3.2. приводится обработка экспериментальных данных, полученных при испытании изгибаемых элементов из однородного ячеистого материала, армированных полосами дюралюминия. С помощью численно-аналитического метода определяется напряженно-деформированное состояние для шести шарнирно-опертых по краям балок прямоугольного поперечного сечения с различными коэффициентами армирования μ_s (рисунок 3.11) и схемами армирования (рисунок 3.10).

При численном моделировании в ПК ANSYS для устранения концентраторов напряжений в местах приложения нагрузки, а также в районе опор нагрузка F считается не сосредоточенной, а равномерно распределенной по площади шириной $b = 100$ мм и длиной 20 мм (черные прямоугольники в районе приложения силы на

рисунке 4.9). Верхний слой балки высотой 20 мм находится в упругой области (заштрихованный участок на рисунке 4.9), нижняя часть балки деформируется в соответствии с диаграммой растяжения-сжатия однородного ячеистого материала (рисунки 3.13). Опорные реакции по аналогии с реакциями от нагрузки передаются по площади шириной $b = 100$ мм и длиной 20 мм (черные прямоугольники в районе опор на рисунке 4.9).

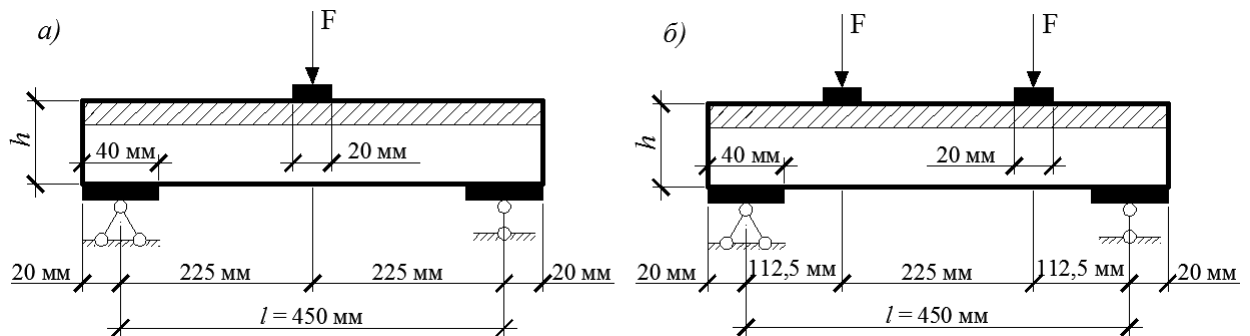


Рисунок 4.9 – Схема испытания образцов:
трехточечный изгиб (а); четырехточечный изгиб (б)

Нагрузка F , соответствующая стадии предразрушения, определяется численно-аналитическим методом, значения нагрузки для каждого образца приведено в таблице 4.2.

4.2.2. Результаты расчетов с использованием диаграммы деформирования однородного ячеистого материала при численном моделировании.

В Таблице 4.2 представлены результаты расчета разрушаемого сечения (по середине пролета балки), полученные численно-аналитическим методом, а также с помощью численного моделирования в ПК ANSYS для шести балок-образцов с разными схемами нагружения и коэффициентами армирования. В данную таблицу входят следующие физические величины: ε_b – деформация крайнего сжатого волокна сечения; ε_{s1} , ε_{s2} – деформация растяжения и сжатия в арматурном слое; Δ – прогиб в центре балки. Деформации крайнего растянутого волокна ε_{bt} . При этом $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{s1}$, так как защитный слой бетона отсутствует у всех образцов. Аналогичная

ситуация наблюдается в образце №2 с армированием в сжатой области, в данной балке $\varepsilon_b = \varepsilon_{s2}$.

Таблица 4.2 – Сопоставление полученных результатов

Образец		Физические величины				
		$\varepsilon_b \cdot 10^4$	$\varepsilon_{s1} \cdot 10^4$	$\varepsilon_{s2} \cdot 10^4$	F (Н)	$\Delta \cdot 10^2$ (мм)
№1	Численно-аналитический метод	-3,62	3,77	-	895	13,7
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-4,29	3,44	-	895	15,9
№2	Численно-аналитический метод	-6,11	6,19	-	1635	21,3
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-6,60	5,49	-	1635	25,6
№3	Численно-аналитический метод	-4,86	4,76	-	1307	17,1
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-5,25	4,35	-	1307	20,5
№4	Численно-аналитический метод	-4,29	3,57	4,29	1306	14,8
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-4,48	4,00	4,48	1306	18,5
№5	Численно-аналитический метод	-4,64	4,70	-	1214	23,9
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-4,85	4,91	-	1214	28,3
№6	Численно-аналитический метод	-6,82	6,00	-	1689	35,9
	Численное моделирование в ПК ANSYS	-7,26	6,30	-	1689	43,0

Перепишем результаты Таблицы 4.2 в безразмерном виде, дополнив таблицу дополнительными физическими величинами напряженно-деформированного состояния (Таблица 4.3). Обезразмеривание произведено по следующим формулам: $\bar{F} = F / (bh_0\sigma_{02})$ – нагрузка в безразмерном виде в момент предразрушения, где $\sigma_{02} = 399$ МПа; $\bar{\psi}(\varepsilon_b) = \psi(\varepsilon_b) / \sigma_{02}$, $\bar{\varphi}(\varepsilon_b) = \varphi(\varepsilon_b) / \sigma_{02}$ – нормальные напряжения по длине балки сжатого и растянутого волокна, где $\psi(\varepsilon)$ – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования бетона, $\bar{\varphi}(\varepsilon_{s1}) = \varphi(\varepsilon_{s1}) / \sigma_{02}$, $\bar{\varphi}(\varepsilon_{s2}) = \varphi(\varepsilon_{s2}) / \sigma_{02}$ – нормальные напряжения растяжения и сжатия по длине балки в арматурном слое,

где $\varphi(\varepsilon_{s1}) = \sigma_{s1}$ и $\varphi(\varepsilon_{s2}) = \sigma_{s2}$ функции аппроксимирующие диаграмму деформирования арматуры; $\xi = x / h_0$ – относительная высота сжатой зоны, где x – высота сжатой зоны; $\bar{\Delta} = \Delta / h_0$ – относительный прогиб в центре балки.

Таблица 4.3 – Результаты расчета НДС разрушаемого сечения в состоянии предразрушения для шести образцов

Образец		Безразмерные физические величины							
		μ_s	$\bar{F} \cdot 10^4$	$\frac{\varepsilon_b \cdot 10^4}{\bar{\psi}(\varepsilon_b) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_{bt} \cdot 10^4}{\bar{\psi}(\varepsilon_{bt}) \cdot 10^3}$	$\frac{\varepsilon_{s1} \cdot 10^4}{\bar{\varphi}(\varepsilon_{s1})}$	$\frac{\varepsilon_{s2} \cdot 10^4}{\bar{\varphi}(\varepsilon_{s2})}$	ξ	$\bar{\Delta} \cdot 10^3$
№1	Численно-аналитический метод	0	2,519	$\frac{-3,622}{-1,961}$	$\frac{3,770}{1,604}$	-	-	0,490	1,541
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-4,299}{-2,781}$	$\frac{3,443}{1,642}$	-	-	0,484	1,782
№2	Численно-аналитический метод	0,002	4,553	$\frac{-6,116}{-3,311}$	$\frac{6,190}{1,604}$	$\frac{6,190}{0,110}$	-	0,497	2,363
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-6,604}{-4,248}$	$\frac{5,493}{1,689}$	$\frac{5,493}{0,097}$	-	0,473	2,847
№3	Численно-аналитический метод	0,0015	3,641	$\frac{-4,856}{-2,629}$	$\frac{4,760}{1,604}$	$\frac{4,760}{0,085}$	-	0,505	1,904
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-5,249}{-3,381}$	$\frac{4,351}{1,612}$	$\frac{4,351}{0,077}$	-	0,477	2,275
№4	Численно-аналитический метод	0,0028	3,638	$\frac{-4,291}{-2,323}$	$\frac{3,570}{1,604}$	$\frac{3,570}{0,065}$	$\frac{-4,291}{-0,076}$	0,539	1,643
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-4,482}{-2,431}$	$\frac{4,003}{1,673}$	$\frac{4,003}{0,071}$	$\frac{-4,482}{-0,078}$	0,451	2,054
№5	Численно-аналитический метод	0,001	3,381	$\frac{-4,644}{-2,514}$	$\frac{4,700}{1,604}$	$\frac{4,700}{0,084}$	-	0,497	2,652
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-4,848}{-2,505}$	$\frac{4,910}{1,681}$	$\frac{4,910}{0,087}$	-	0,501	3,142
№6	Численно-аналитический метод	0,004	5,164	$\frac{-6,821}{-3,692}$	$\frac{6,000}{1,604}$	$\frac{6,000}{0,107}$	-	0,532	4,385
	Численное моделирование в ПК ANSYS			$\frac{-7,261}{-3,744}$	$\frac{6,309}{1,679}$	$\frac{6,309}{0,112}$	-	0,543	5,246

По результатам расчетов (Таблица 4.3) высота сжатой зоны совпадает с погрешностью ~5% практически для всех образцов. Исключением является образец №4 с армированием в сжатой и растянутой области в нем высота сжатой зоны,

найденная с помощью численного моделирования, на ~20% ниже, чем определенная с помощью численно-аналитического метода (рисунок 4.10).

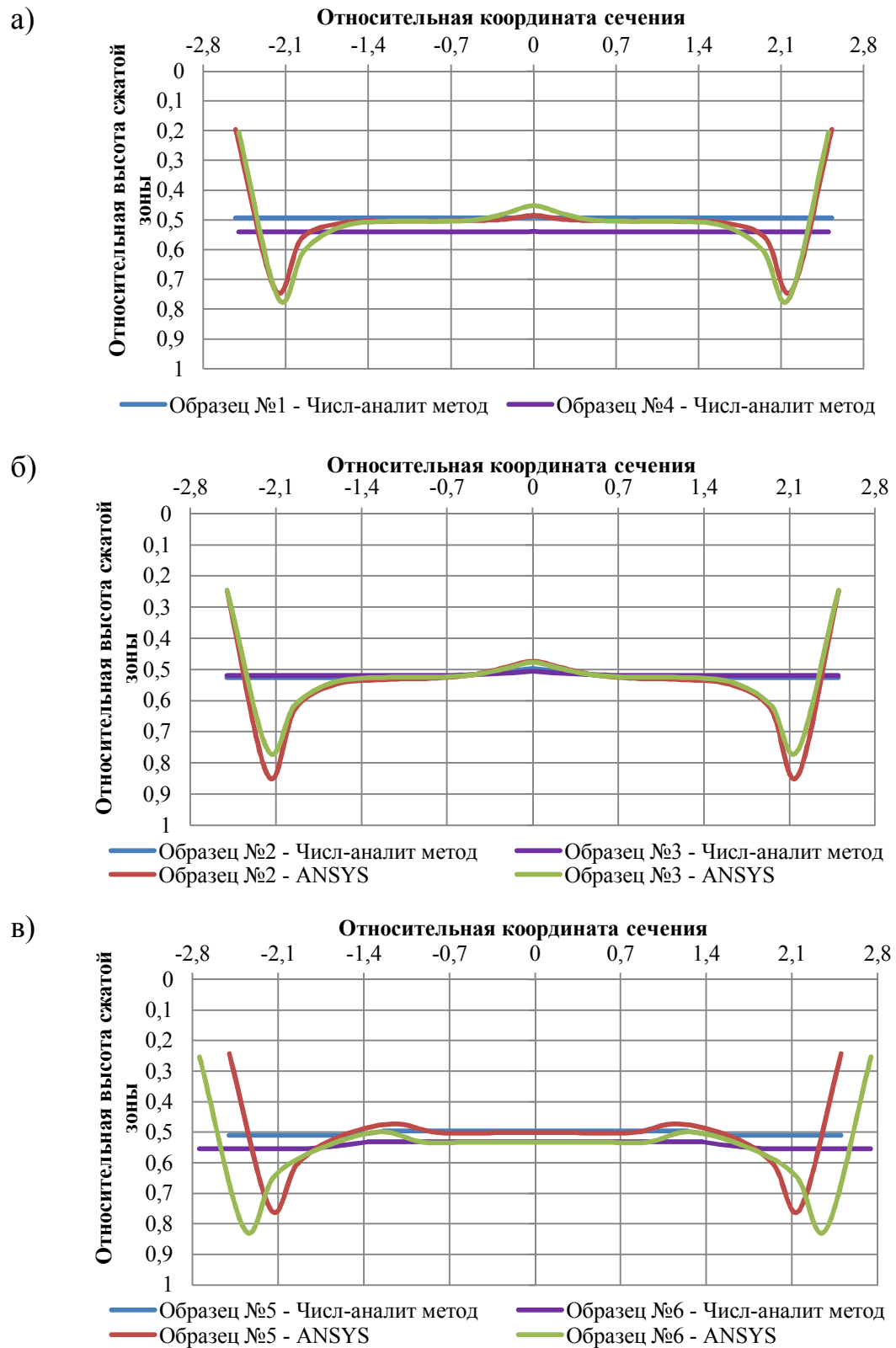
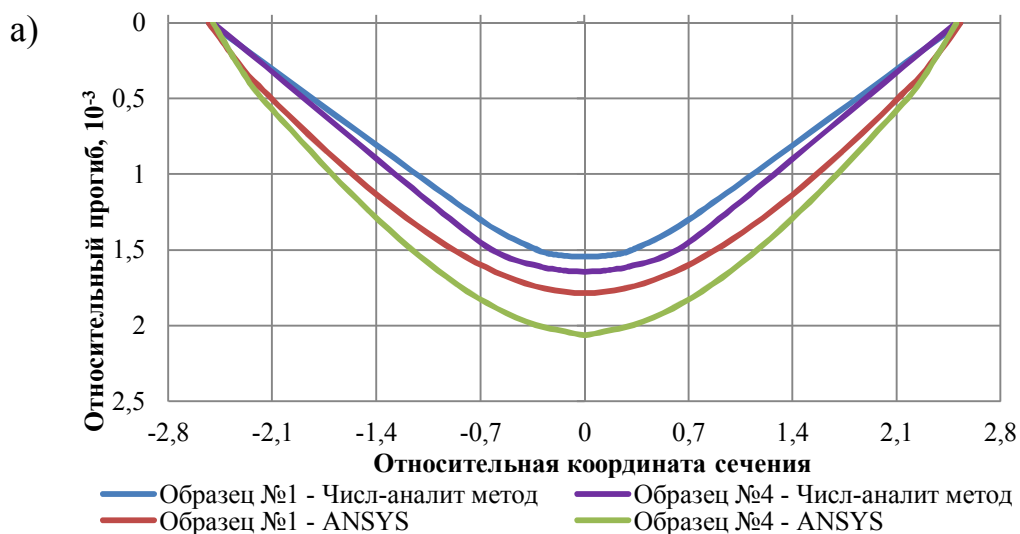


Рисунок 4.10 – Распределение относительных высот сжатой зоны: образцы №1 и №4 (а); образцы №2 и №3 (б); образцы №5 и №6 (в)

Вследствие физической нелинейности поведения бетона высота сжатой зоны по длине балки не является величиной постоянной (рисунок 4.10), кроме зоны чистого изгиба в образцах №5 и №6 (рисунок 4.10в).

Сжатая зона не изменяется на приопорных участках, на которых выполняются соотношения закона Гука, в численно-аналитическом методе. В действительности в районе опор реализуется сложное напряженное состояние, следствием которого является резкое увеличение сжатой зоны на участке длиной 40 мм (от торца балки до конца опорного участка, см. рисунок 4.9). Следует отметить, что на рисунке 4.10в «пики», соответствующие максимальной высоте сжатой зоны в различных образцах, не накладываются друг на друга вследствие того, что обезразмеривание геометрических величин выполняется делением этих величин на высоту образцов, которые отличаются для разных образцов (у образца №5 – $h = 90$ мм, у образца №6 – $h = 82$ мм).

Для образцов, испытывающихся по схеме трехточечного изгиба, ближе к центру балки высота сжатой зоны становится постоянной (рисунки 4.10а и 4.10б), кроме участка длиной 20 мм на который передается нагрузка, над ним величина сжатой зоны уменьшается. Таким образом, наблюдается хорошая согласованность изменения высоты сжатой зоны, определенной численно-аналитическим методом, с результатами численного моделирования, расхождения зафиксированы только в районе опорных участков.



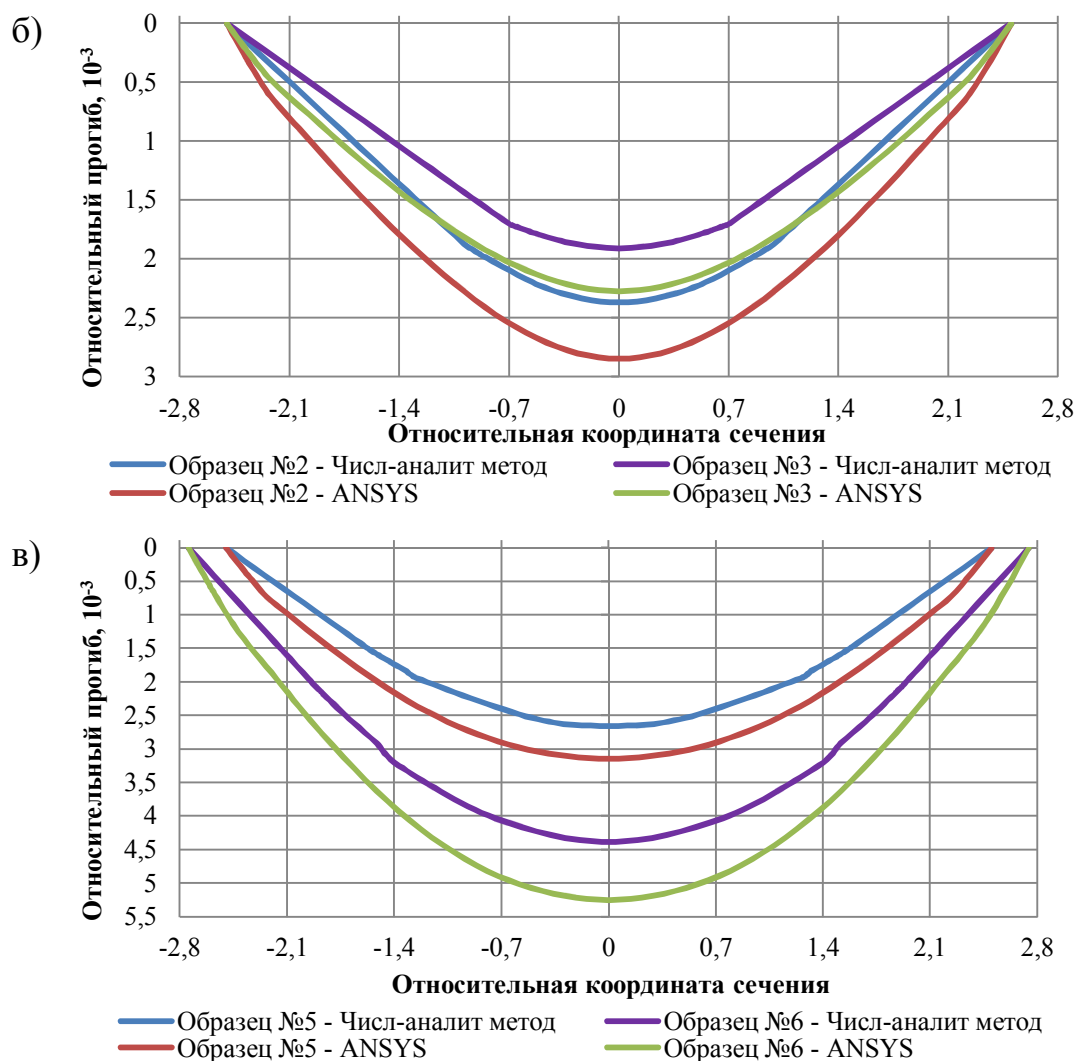


Рисунок 4.11 – Распределение относительных прогибов
образцы №1 и №4 (а); образцы №2 и №3 (б); образцы №5 и №6 (в)

Прогибы, определенные с помощью численного моделирования в ПК ANSYS, в разрушаемом сечении превышают на 15-17% прогибы, найденные с помощью численно-аналитического метода. При этом с помощью численно-аналитического метода прогиб определялся для нейтрального слоя, а при численном моделировании для нижней (растянутой) грани балки. При моделировании в ПК ANSYS происходит резкое увеличение прогиба в районе опор (рисунок 4.11), затем за пределами опор эпюра принимает вид параболы.

Прогибы для образцов №5 и №6 не выходят из одной точки в районе опор (рисунок 4.11в) из-за обезразмеривания длины балки, выполненного делением на высоту образца (образец №5 – $h = 90$ мм, образец №6 – $h = 82$ мм).

4.2.3. Заключение к параграфу 4.2

Сравнение экспериментальных данных, полученных в результате численного моделирования в ПК ANSYS, с результатами расчетов численно-аналитическим методом для образцов с различными схемами армирования и нагружения позволяют сделать следующие выводы.

Определенная численно-аналитическим методом высота сжатой зоны хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Расхождения наблюдаются только в районе опорных участков, на которых реализуется сложное напряженное состояние, которое не учитывается в численно-аналитическом методе. Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только в зоне чистого изгиба (образцы №5 и №6).

Сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными показало, что предложенный численно-аналитический метод позволяет адекватно моделировать напряженно-деформированное состояние в железобетонных балках до момента образования трещины и в предельном состоянии предразрушения.

4.3. Исследование напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами

4.3.1. Численные решения для четвертой серии экспериментов

В данном параграфе с помощью численного моделирования произведено исследование напряженно-деформируемого состояния в балках с заранее организованными трещинами. Геометрические размеры и физические характеристики материалов образцов с одной и тремя трещинами приведены в параграфе 3.4. Моделирование выполнено с помощью конечно-элементного программного комплекса ANSYS (ПК ANSYS) в трехмерной постановке. Граничные условия – опоры и места приложения нагрузки являются сосредоточенными в соответствии с расчетными схемами, приведенными на рисунке 3.29.

Основная сложность при создании геометрической модели и расчетной сетки в данной задаче связана с моделированием трещины, обусловленная малым размером ширины трещины 0,2 мм по сравнению с остальными размерами образцов (рисунок 4.12а). Данная особенность требует сгущения сетки минимум до 0,2 мм для более точной аппроксимации геометрии в окрестности трещины, что в свою очередь повлияет на увеличение времени вычислений.

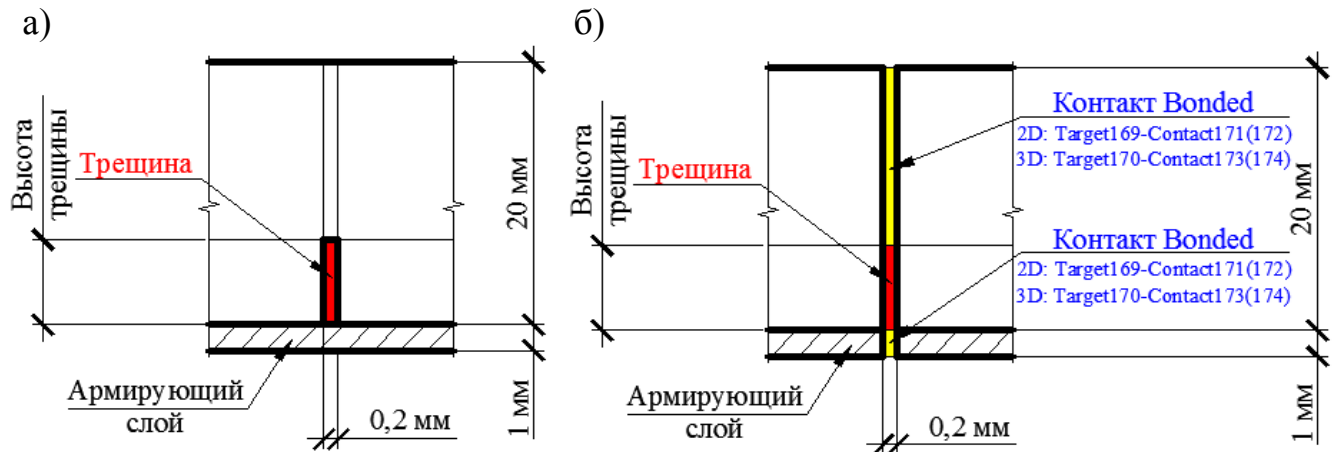


Рисунок 4.12 – Расчетная схема фрагмента балки в окрестности трещины: без использования контактов (а); с использованием контактов типа «bonded» (б)

Для упрощения геометрической модели предлагается следующий способ моделирования балок с заранее организованными трещинами: с помощью жесткого контакта типа «bonded» (рисунок 4.12б), который не допускает проскальзывания и разделения связанных между собой поверхностей [26], балка разделяется на два отдельных тела, зазор между которыми соответствует ширине трещины 0,2 мм. Совместная работа данных тел обеспечивается за счет жестких контактов «bonded» над трещиной и между армирующим элементом. Контакт по высоте трещины не предусмотрен.

Достоинством данного способа моделирования является возможность создания однотипной структурированной сетки по всей длине образца, как в двухмерной, так и трехмерной постановке. В данном случае использована гексаэдрическая сетка со стороной элемента 1 мм.

4.3.2. Результаты численного моделирования балок с заранее организованными трещинами

Результаты расчетов численного моделирования в ПК ANSYS для образцов с одной и тремя трещинами для сечений 1-1 и 2-2 (см. рисунки 3.30 и 3.31) сопоставлены с экспериментальными данными приведены ниже. На рисунке 4.13 изображены экспериментально найденные распределения напряжений в продольном направлении σ_x (зеленая и черная линии) с учетом влияния остаточных деформаций: из эпюр напряжений σ_x при $F = 100; 200$ Н (рисунки 2 б,в и 3 б,в) вычитается эпюра напряжений σ_x , соответствующая остаточным (усадочным) напряжениям при $F = 0$ Н (рисунки 3.30а и 3.31а).

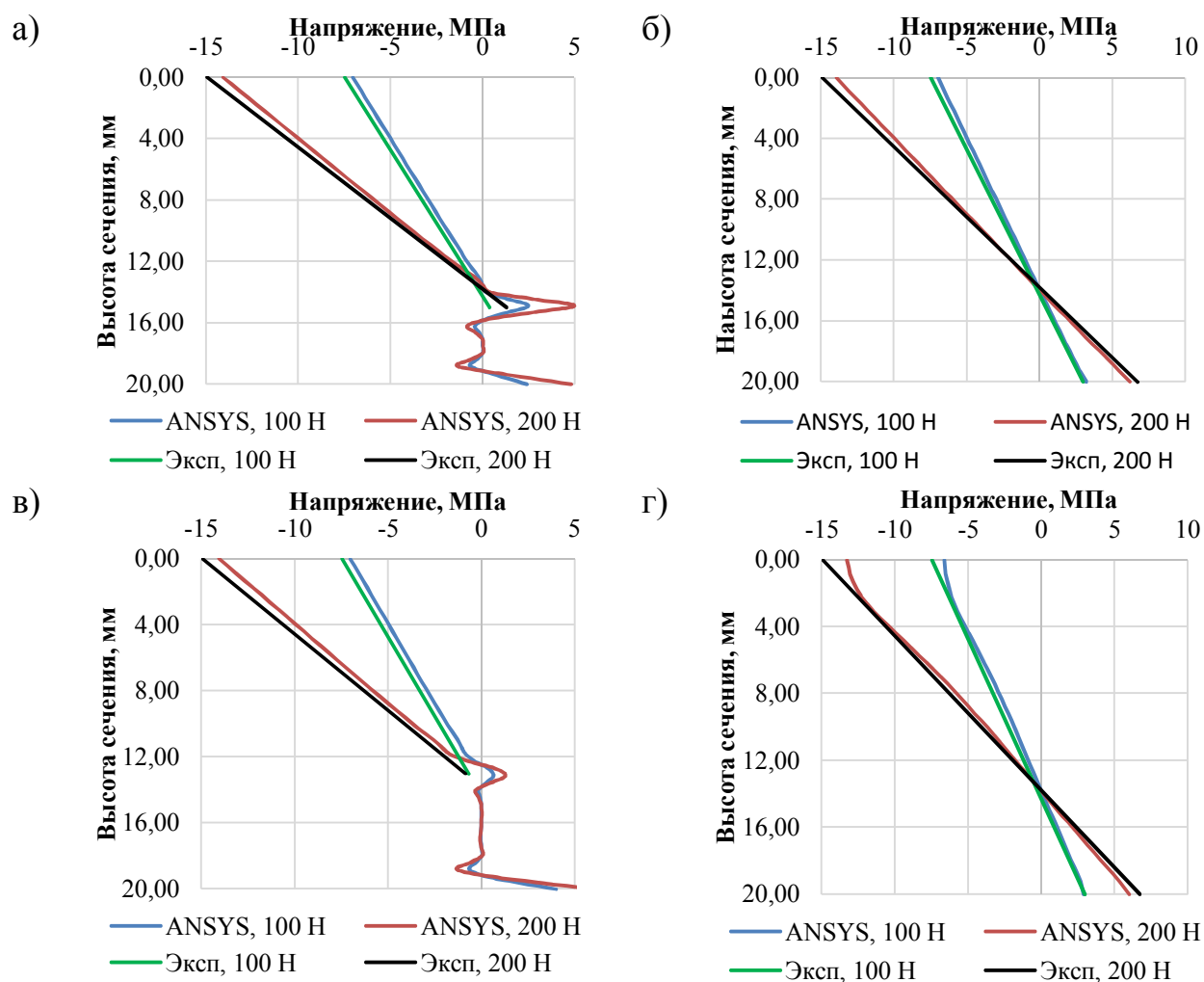


Рисунок 4.13 – Распределение напряжений в продольном направлении σ_x по высоте сечения балки: в сечениях 1-1 (а) и 2-2 (б) для балки с одной трещиной; в сечениях 1-1 (в) и 2-2 (г) для балки с тремя трещинами

В результате эксперимента и численного моделирования выявлено, что распределения напряжений в продольном направлении σ_x по высоте сечения балки мало отличаются от линейного в сечении 1-1 над трещиной и по всей высоте сечения 2-2 (рисунок 4.13). Криволинейный характер распределения нормальных напряжений σ_x в сжатой области в балке с тремя трещинами (рисунок 4.13г) обусловлен влиянием сосредоточенной силы F , находящейся на расстоянии 5 мм от сечения 2-2 (см. рисунок 3.31).

Результаты расчетов для балок с заранее организованными трещинами, полученные с помощью численного моделирования в ПК ANSYS, продемонстрировали хорошую согласованность расчетного напряженно-деформированного состояния с экспериментальными данными (см. таблицу 4.4). Данные численного моделирования подтвердили экспериментально полученный результат о независимости длины зоны краевого эффекта от прикладываемой нагрузки (см. рисунки 3.30 и 3.31), разница с экспериментом не превышает 8%.

Погрешность определения напряжений σ_x в сечениях 1-1 и 2-2 с помощью численного моделирования составляет 3-11% для сжатой и растянутой области, по сравнению с напряжениями, определенными экспериментально.

Таблица 4.4 – Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Параметр	Балка с одной трещиной				Балка с тремя трещинами			
	Эксперимент		ANSYS		Эксперимент		ANSYS	
	100 Н	200 Н	100 Н	200 Н	100 Н	200 Н	100 Н	200 Н
Зона краевого эффекта, мм	12	12	11	11	12	12	11	11
Напряжение σ_x в сечении 1-1 (сжатая область), МПа	-7,47	-14,93	-7,03	-14,07	-7,47	-14,93	-7,03	-14,06
Напряжение σ_x в сечении 2-2 (сжатая область), МПа	-7,47	-14,93	-6,98	-13,97	-7,47	-14,93	-6,64	-13,28
Напряжение σ_x в сечении 2-2 (растянутая область), МПа	2,99	6,72	3,20	6,20	2,99	6,72	2,90	6,00
Высота сжатой зоны X_R в сечении 1-1, мм	14,29	13,79	13,52	13,52	13,00	13,00	12,47	12,47
Высота сжатой зоны X_R в сечении 2-2, мм	14,29	13,79	13,96	13,96	14,29	13,79	13,83	13,83
Прогиб верхнего волокна балки, мм	-	-	0,556	1,113	-	-	0,559	1,118
Прогиб нижнего волокна балки, мм	-	-	0,558	1,117	-	-	0,561	1,122

Высота сжатой зоны X_R , определенная экспериментально (рисунок 4.13), в сечениях 1-1 и 2-2 превышает на 1-5% высоту сжатой зоны, найденную с помощью численного моделирования в ПК ANSYS. По результатам эксперимента и численного моделирования в образце с тремя заранее организованными трещинами высота сжатой зоны находится ниже вершины трещины (рисунок 4.14), что позволяет сделать вывод, что трещина оказывает не значительное влияние из-за высокого процента армирования сечения. Границу (изолинию), разделяющую изополя деформаций ϵ_{xx} сжатия и растяжения, можно считать «условной нейтральной линией».

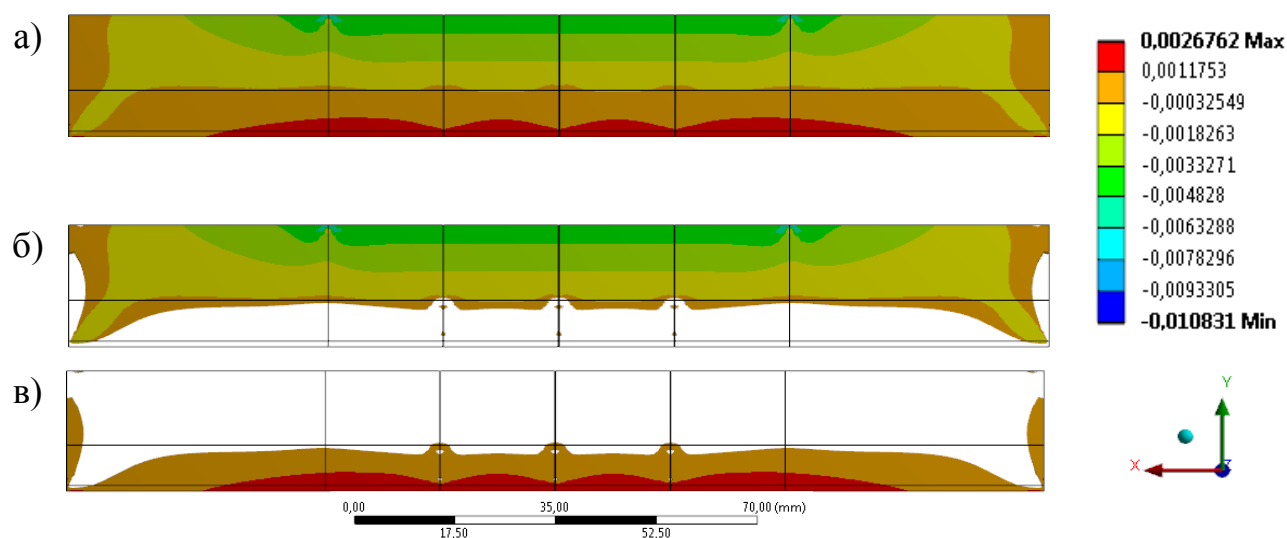


Рисунок 4.14 – Изополя деформаций в продольном направлении ϵ_{xx} для образца с тремя трещинами: деформации сжатия и растяжения (а); деформации сжатия (б); деформации растяжения (в)

Для балки с одной и тремя трещинами на рисунке 4.15 приведены деформаций ϵ_{xx} для различных сечений вдоль балки. «Пики» в сечении с координатой 0 мм (синяя линия) соответствуют местам приложения нагрузки F к верхней поверхности балки (см. рисунок 3.29). Черная линия с примечанием «трещина» (рисунок 4.15) является продольным сечением вдоль балки в уровне вершины трещины. Красная линия обозначает сечение «приведенного нейтрального слоя» – сечение,

по длине которого деформации максимально приближаются к нулевым. Распределения деформаций вблизи «приведенного нейтрального слоя» в окрестности трещины имеют криволинейный (волнообразный) характер, при удалении от данного слоя (сечения 6 мм и 0 мм) деформации выравниваются.

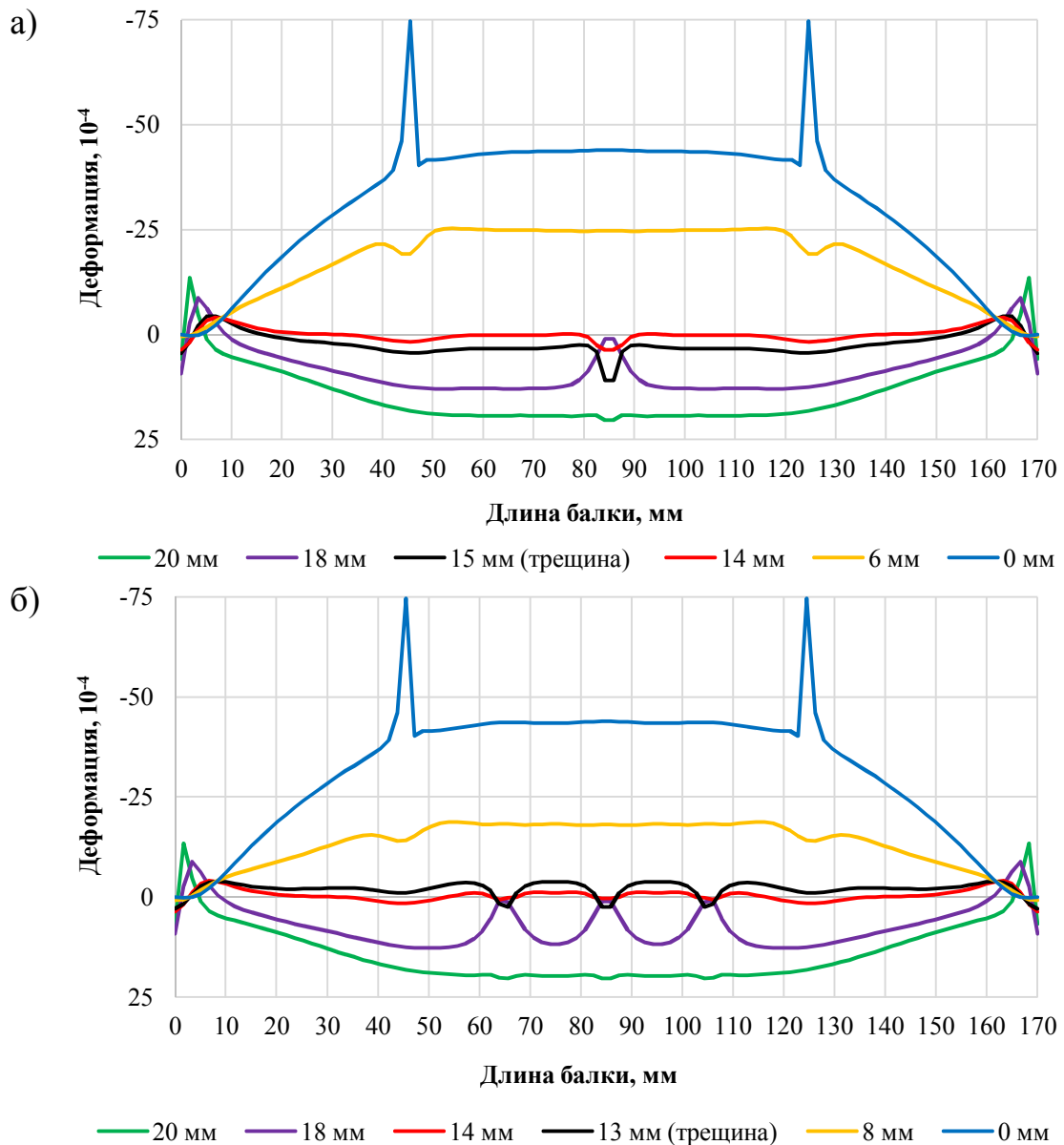


Рисунок 4.15 – Распределение деформаций в продольном направлении ϵ_{xx} для балки: с одной трещиной (а); с тремя трещинами (б)

На рисунке 4.16 представлены распределения продольных ϵ_{xx} , поперечных ϵ_{yy} и касательных ϵ_{xy} деформаций по высоте сечения балки с тремя трещинами для сечений 1-1 и 2-2 (см. рисунок 3.31), а также в поперечном сечении, соответствующем

месту приложения нагрузки F (рисунок 3.29). По результатам численного моделирования выявлено, что деформированное состояние в окрестности всех трех трещин практически совпадают.

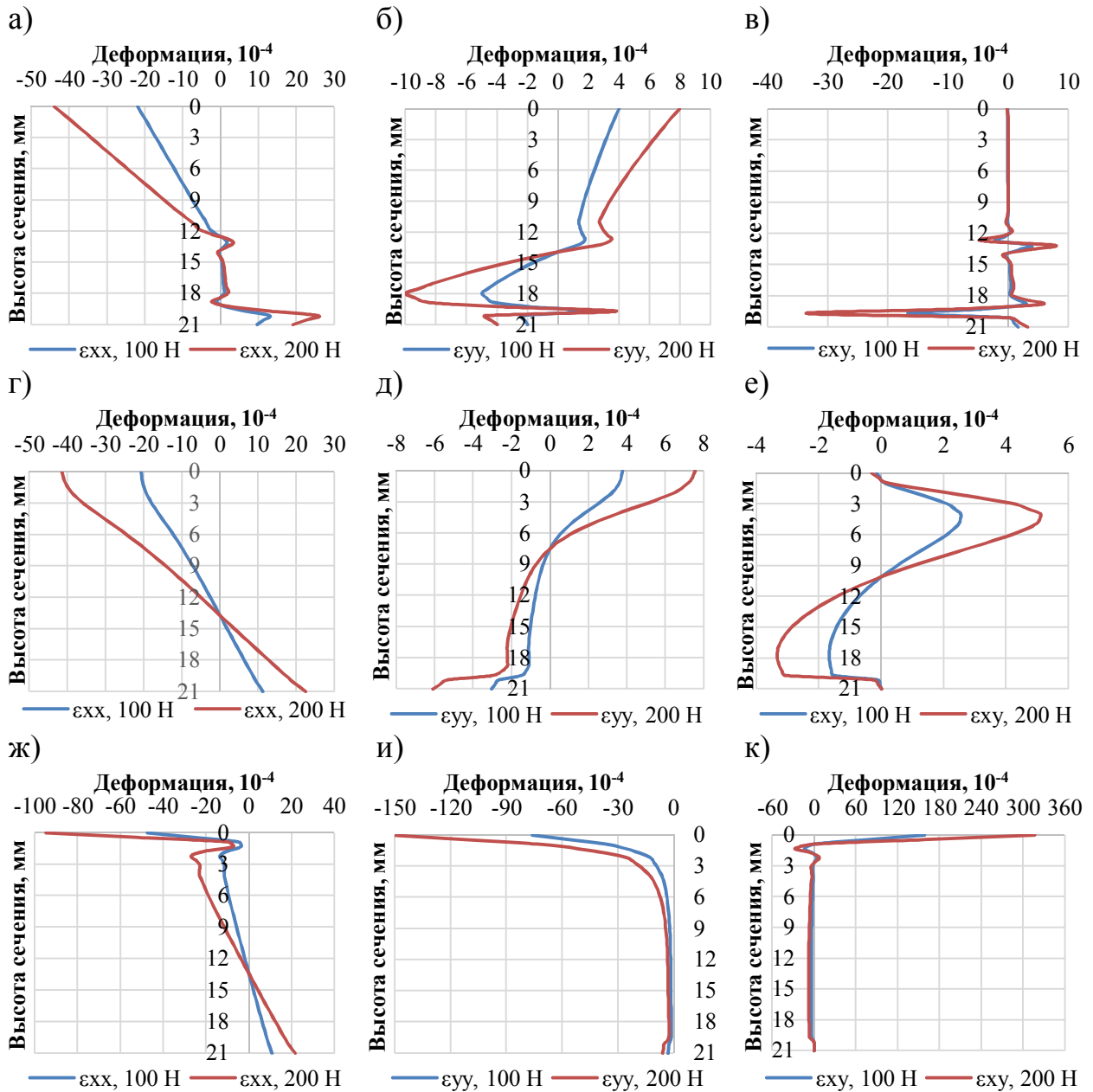


Рисунок 4.16 – Распределение продольных ϵ_{xx} , поперечных ϵ_{yy} и касательных ϵ_{xy} деформаций по высоте сечения балки с тремя трещинами: в сечении 1-1 (а-в); в сечении 2-2 (г-е); в месте приложения силы F (ж-к)

В окрестности трещин возникают значительные сдвиговые деформации; при удалении от трещины влияние касательных деформаций ϵ_{xy} уменьшается (рисунок 4.16 в,е,к). Высокие деформации в верхней части сечения (рисунок 4.16 ж,и,к) обусловлены тем, что сосредоточенная нагрузка F приложена в этом сечении.

4.3.3. Исследование влияния плотности армирования на деформированное состояние в балках с заранее организованными трещинами

Осуществлено дополнительное исследование влияния плотности армирования на деформированное состояние в балках с заранее организованными трещинами. Численные эксперименты выполняются для следующих коэффициентов армирования $\mu = 0,1; 0,5; 1; 2; 3\%$. Минимальный коэффициент армирования $\mu = 0,1\%$ выбран в соответствии с рекомендациями СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции». Необходимо отметить, что в предыдущих пунктах рассматривались балки с высокой плотностью армирования – 5%.

Исследование деформированного состояния изгибаемого армированного элемента проведено в условиях чистого изгиба на трех балках (образцах) с заранее организованными трещинами высотой 5 мм (рисунок 4.17): образец №1 – одна трещина (черная линия); образец №2 – три трещины (черная и две синие линии); образец №3 – пять трещин (черная, две синие и две красные линии). Ширина заранее организованных трещин 0,2 мм, толщина образцов – 6 мм. Защитный слой армирующего элемента не предусмотрен. Сосредоточенная нагрузка $F = 75$ Н.

В качестве материала для образцов были выбраны материалы, используемые ранее в экспериментальном исследовании (параграфе 3.4).

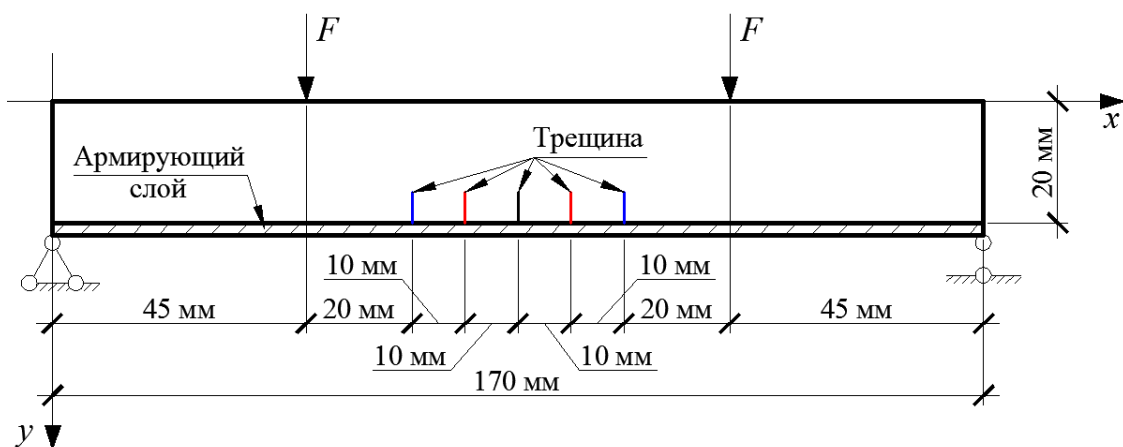


Рисунок 4.17 – Принципиальная схема испытания образцов

Расстояние между трещинами 10 мм для образца с пятью трещинами и 20 мм для образца с тремя трещинами выбрано на основании фундаментальных работ

В.И. Мурашева [68] и И.Н. Ахвердова [22], согласно которым расстояние между первичными и вторичными схоластическими трещинами обычно находится в интервале от половины высоты сечения до полной высоты сечения изгибаемого элемента.

В таблице 4.5 приведены координаты по оси x (рисунок 4.17) характерных поперечных сечений для трех образцов с заранее организованными трещинами.

Таблица 4.5 – Координаты поперечных сечений, мм

Образец	Сечение			
	1-1	2-2	3-3	4-4
№1 с 1 трещиной	85	75	-	-
№2 с 3 трещинами	85	55	65	-
№3 с 5 трещинами	85	55	65	75

Сечения 1-1, 3-3 и 4-4 проходят через трещины. Сечение 2-2 находится на расстоянии 10 мм от самой крайней трещины (см. рисунок 4.17), что позволяет исключить влияние сосредоточенной нагрузки F на напряженно-деформированное состояние для образцов с тремя и пятью трещинами. Это расстояние сопоставимо с длиной зоны краевого эффекта, определенной выше для балок с высоким процентом армирования (таблица 4.4).

4.3.4. Результаты численного моделирования балок с заранее организованными трещинами при разных процентах армирования

Ниже приведены результаты расчетов численного моделирования в ПК ANSYS балок с заранее организованными трещинами с разными плотностями армирования.

На рисунке 4.18 изображены распределения продольных ε_{xx} , поперечных ε_{yy} и касательных ε_{xy} деформаций по высоте сечения 1-1 для балки с одной трещиной. Для балок с тремя и пятью трещинами распределения деформаций по высоте сечения балки имеют аналогичный характер. Горизонтальная линия «Трещина», обозначенная черными точками на рисунке 4.18, является координатой вершины трещины по оси y .

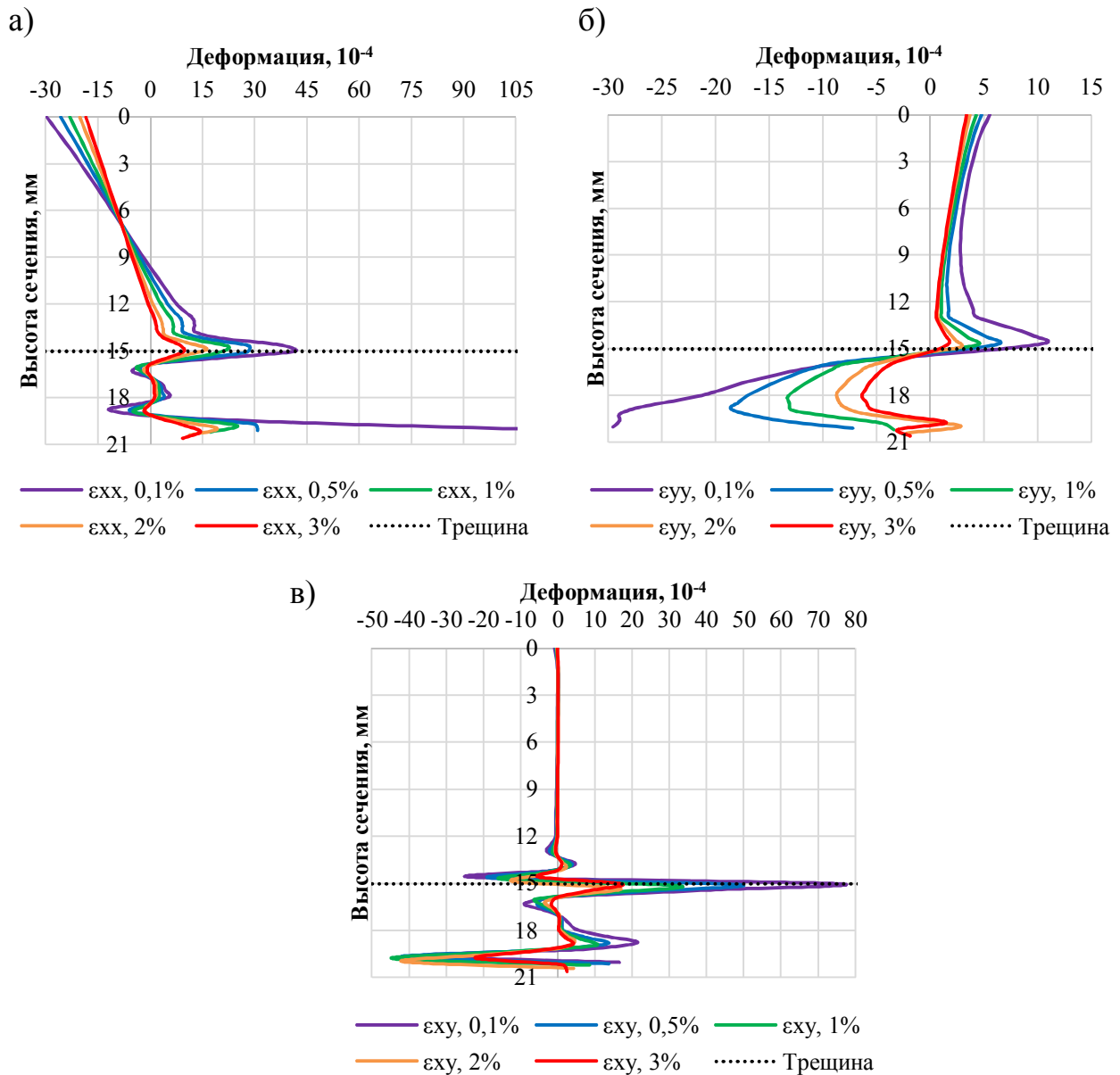


Рисунок 4.18 – Распределение деформаций при разных плотностях армирования в балке с одной трещиной по высоте сечения 1-1:

продольных ϵ_{xx} (а); поперечных ϵ_{yy} (б); касательных ϵ_{xy} (в)

Наличие точки пересечения линий на графике (рисунок 4.18а) распределения продольных деформаций ϵ_{xx} по высоте сечения для разных плотностей армирования позволяет выдвинуть гипотезу о существовании сечения в продольном направлении образца, в котором распределения продольных деформаций не зависит от плотности армирования. Координаты точек пересечения эпюр продольных дефор-

маций ϵ_{xx} вдоль оси y для образцов: с одной и тремя трещинами $y = 6,9$ мм; для образца с пятью трещинами $y = 6,4$ мм. Для подтверждения данной гипотезы построены распределения продольных деформаций ϵ_{xx} вдоль длины балки (рисунок 4.19) в сечениях по указанным выше координатам.

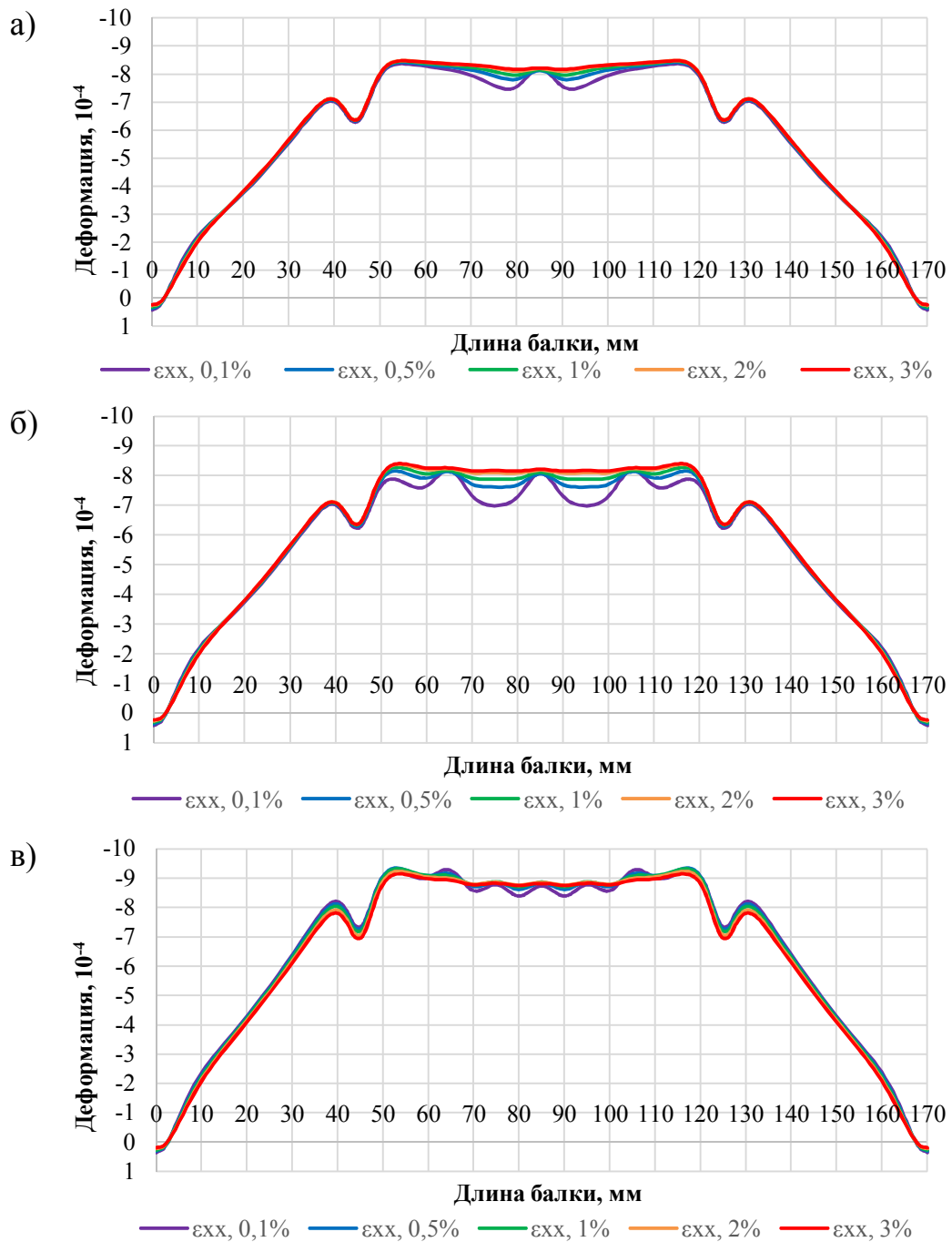


Рисунок 4.18 – Распределение продольных деформаций ϵ_{xx} в продольном сечении в образце: с одной трещиной – $y = 6,9$ мм (а); с тремя трещинами – $y = 6,9$ мм (б); с пятью трещинами – $y = 6,4$ мм (в)

Результаты численного моделирования подтверждают выдвинутую гипотезу – продольные деформации ε_{xx} при разных плотностях армирования практически совпадают на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин (рисунок 4.18). На данном участке зафиксировано расхождение деформаций на расстоянии соответствующем высоте поперечного сечения балки h для образцов с одной и тремя трещинами и $1,25 h$ для образца с пятью трещинами слева и справа от крайней трещины (см. рисунок 4.17). Следует отметить, что полученные результаты, так же подтверждают предположение В.М. Митасова [57, 59] о том, что трещину можно рассматривать, как регулятор напряженно-деформированного состояния в армированной балке.

Результаты расчетов для балок с заранее организованными трещинами, полученные с помощью численного моделирования в ПК ANYS (таблица 4.6), продемонстрировали возможность сопоставления расчетного деформированного состояния между образцами с разным количеством заранее организованных трещин. В сечении 1-1 (сечение с центральной трещиной) высота сжатой зоны X_R и деформации в продольном ε_{xx} и поперечном ε_{yy} направлении совпадают с точностью от 0,5% при $\mu = 3\%$ до 10% при $\mu = 0,1\%$ для разных образцов. Максимальная погрешность наблюдается при сопоставлении касательных деформаций. Касательные деформации в образце с одной трещиной на ~60% ниже чем в образцах с тремя и пятью трещинами. В сечении 2-2 результаты деформированного состояния совпадают с точностью 0,1-2%. В сечение 3-3 разница между высотой сжатой зоны X_R , а также деформациями в продольном и поперечном направлении не превышает 0,3% при $\mu = 3\%$ и 4,8% при $\mu = 0,1\%$ для образцов с тремя и пятью трещинами. Касательные деформации отличаются на 0,7% при $\mu = 0,1\%$ и на 3,2% при $\mu = 3\%$.

По результатам расчетов, выявлено, что в образце с тремя трещинами распределения деформаций и высота сжатой зоны в сечениях с трещинами совпадают с точностью от 2% и до 4% в образце с пятью трещинами.

Таблица 4.6 – Результаты численного моделирования

Номер об- разца	Параметр	Плотность армирования μ , %				
		0,1	0,5	1	2	3
		Сечение 1-1				
1	Высота сжатой зоны X_R , мм	9,63	10,12	10,64	11,57	12,28
2		9,55	10,06	10,61	11,56	12,29
3		8,89	9,62	10,33	11,49	12,34
1	Деформация ε_{xx} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-29,69	-25,70	-23,10	-20,17	-18,47
2		-29,86	-25,81	-23,17	-20,20	-18,48
3		-32,11	-27,06	-23,85	-20,43	-18,56
1	Деформация ε_{yy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	5,53	4,76	4,26	3,69	3,37
2		5,68	4,86	4,33	3,74	3,40
3		6,08	5,09	4,45	3,78	3,41
1	Деформация ε_{xy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-0,87	-0,61	-0,46	-0,29	-0,20
2		-1,40	-0,99	-0,73	-0,47	-0,32
3		-1,37	-0,98	-0,72	-0,45	-0,31
		Сечение 2-2				
1	Высота сжатой зоны X_R , мм	9,64	10,30	10,92	11,94	12,76
2		9,68	10,34	10,96	11,96	12,77
3		9,65	10,31	10,94	11,96	12,78
1	Деформация ε_{xx} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-27,11	-24,46	-22,38	-19,83	-18,27
2		-26,59	-23,92	-21,84	-19,30	-17,75
3		-26,61	-23,96	-21,86	-19,30	-17,74
1	Деформация ε_{xx} при $y = 20$ мм, 10^{-4}	21,72	19,26	16,43	12,56	10,17
2		21,92	19,41	16,54	12,62	10,20
3		21,86	19,36	16,52	12,62	10,20
1	Деформация ε_{yy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	3,29	3,57	4,03	4,40	4,88
2		3,19	3,47	3,93	4,31	4,79
3		3,19	3,47	3,94	4,31	4,79
1	Деформация ε_{yy} при $y = 20$ мм, 10^{-4}	-3,42	-2,63	-2,13	-1,67	-1,47
2		-3,46	-2,66	-2,15	-1,70	-1,49
3		-3,45	-2,66	-2,15	-1,70	-1,49
		Сечение 3-3				
2	Высота сжатой зоны X_R , мм	9,61	10,11	10,65	11,60	12,32
3		9,16	9,89	10,51	11,57	12,35
2	Деформация ε_{xx} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-29,76	-25,70	-23,06	-20,09	-18,37
3		-30,87	-26,32	-23,40	-20,21	-18,42
2	Деформация ε_{yy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	5,66	4,83	4,31	3,72	3,38
3		5,93	4,94	4,45	3,73	3,38
2	Деформация ε_{xy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-1,40	-0,98	-0,73	-0,46	-0,32
3		-1,39	-0,98	-0,72	-0,45	-0,31
		Сечение 4-4				
3	Высота сжатой зоны X_R , мм	8,92	9,65	10,34	11,49	12,34
3	Деформация ε_{xx} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-32,07	-27,01	-23,82	-20,42	-18,55
3	Деформация ε_{yy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	6,08	5,08	4,45	3,77	3,41
3	Деформация ε_{xy} при $y = 0$ мм, 10^{-4}	-1,37	-0,98	-0,72	-0,46	-0,31

Максимальные касательные напряжения ε_{xy} (рисунок 4.17в) в сечении с трещиной зафиксированы в окрестности вершины трещины ($y \approx 15 \text{ мм}$) и области сопряжения смолы с армирующим слоем ($y \approx 20 \text{ мм}$). На рисунке 4.19 приведено распределение касательных напряжений в указанных продольных сечениях. Необходимо отметить, что непосредственно в вершине трещины ($y = 15 \text{ мм}$) и в месте сопряжения смолы с армирующим слоем ($y = 20 \text{ мм}$) в окрестности трещины касательные напряжения ε_{xy} равны нулю. В районе опор касательные напряжения при $y = 20 \text{ мм}$ стремятся к бесконечности в следствии того, что опорные реакции являются сосредоточенными.

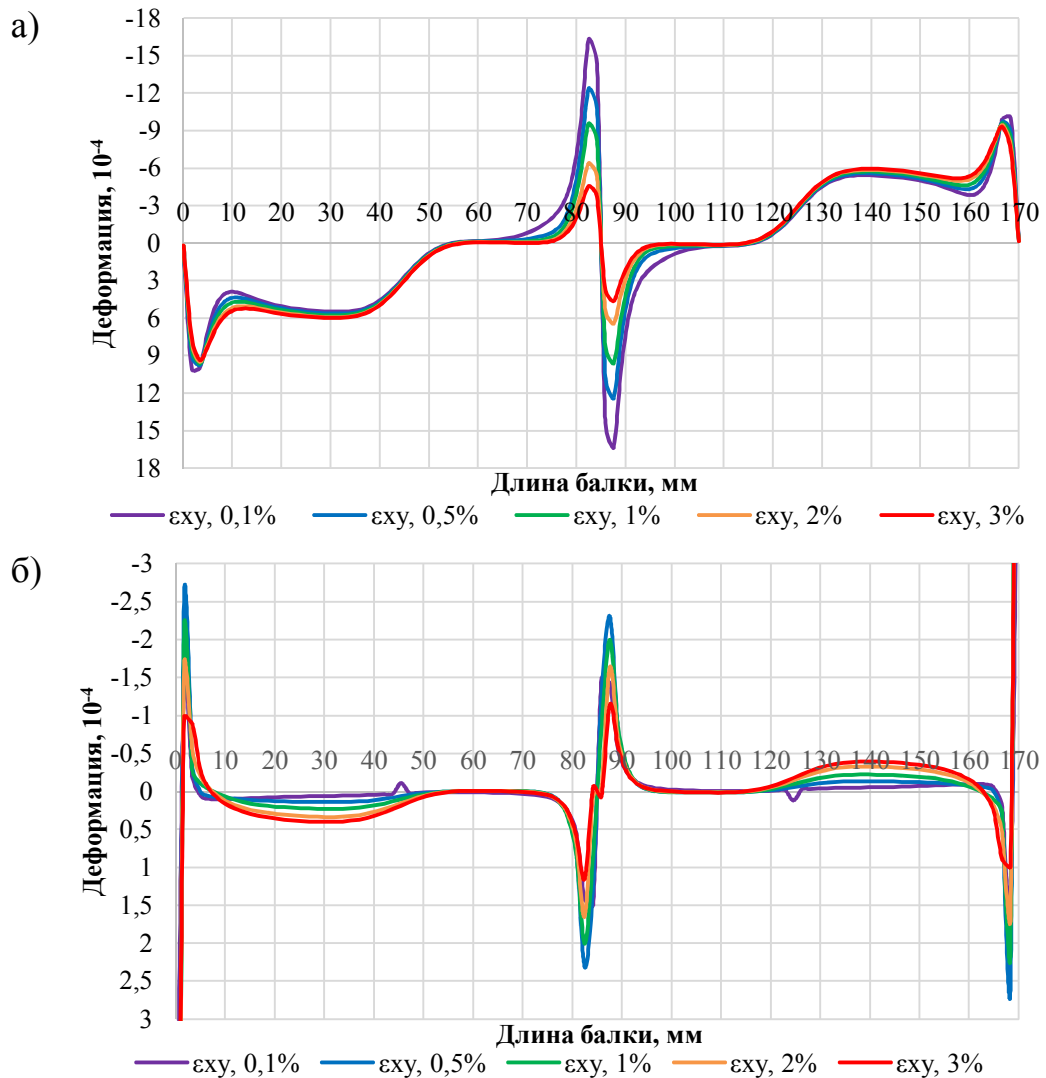
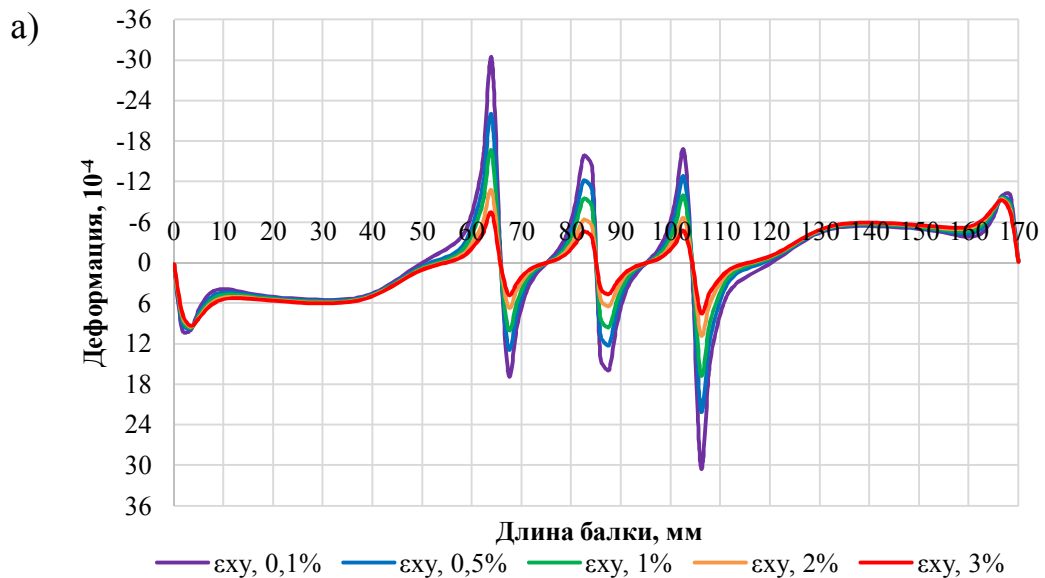


Рисунок 4.19 – Распределение касательных ε_{xy} деформаций для балки с одной трещиной в продольном сечении: в уровне вершины трещины (а); в уровне сопряжения смолы с армирующим слоем (б)

По приведённым на рисунке 4.19 распределениям может быть произведена оценка зоны краевого эффекта – характерной длины балки в окрестности трещины, на которой касательные напряжения, являются существенными. Зона краевого эффекта слева и справа от трещины не суммируется, а считается одинаковой в силу симметрии. Длина зоны краевого эффекта в уровне вершины трещины находится в интервале от 10 мм для $\mu = 3\%$ до 15 мм для $\mu = 0,1\%$ (рисунок 4.19а), а в уровне сопряжения смолы с армирующим элементом соответствует 10 мм, при этом касательные деформации для различных плотностей армирования практически совпадают (рисунок 4.19).

По аналогии построены распределения касательных деформаций ε_{xy} для балок с тремя и с пятью заранее организованными трещинами (рис. 5 и 6). Следует отметить, касательные деформации в балках с тремя и пятью трещинами превышают в ~ 2 раза деформации в балке с одной трещиной (рисунок 4.19). В образце с тремя и пятью трещинами при $\mu = 0,1\%$ зафиксировано изменение знака касательных напряжения ε_{xy} на отметке, соответствующем $y = 20$ мм, на расстоянии 4 мм от трещины вызванное малой плотности армирования (рис. 5б и 6б).



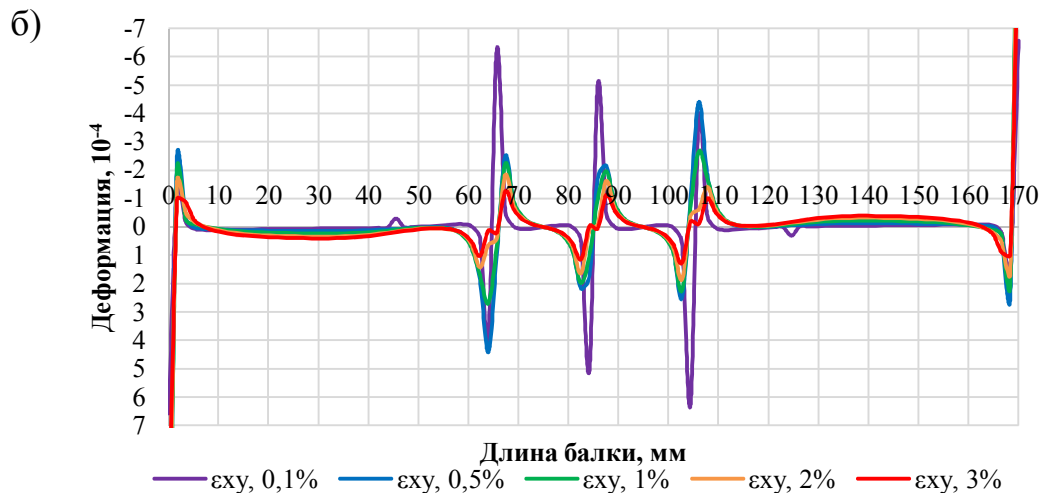


Рисунок 4.20 – Распределение касательных ϵ_{xy} деформаций для балки с тремя трещинами в продольном сечении: в уровне вершины трещины (а);
в уровне сопряжения смолы с армирующим слоем (б)

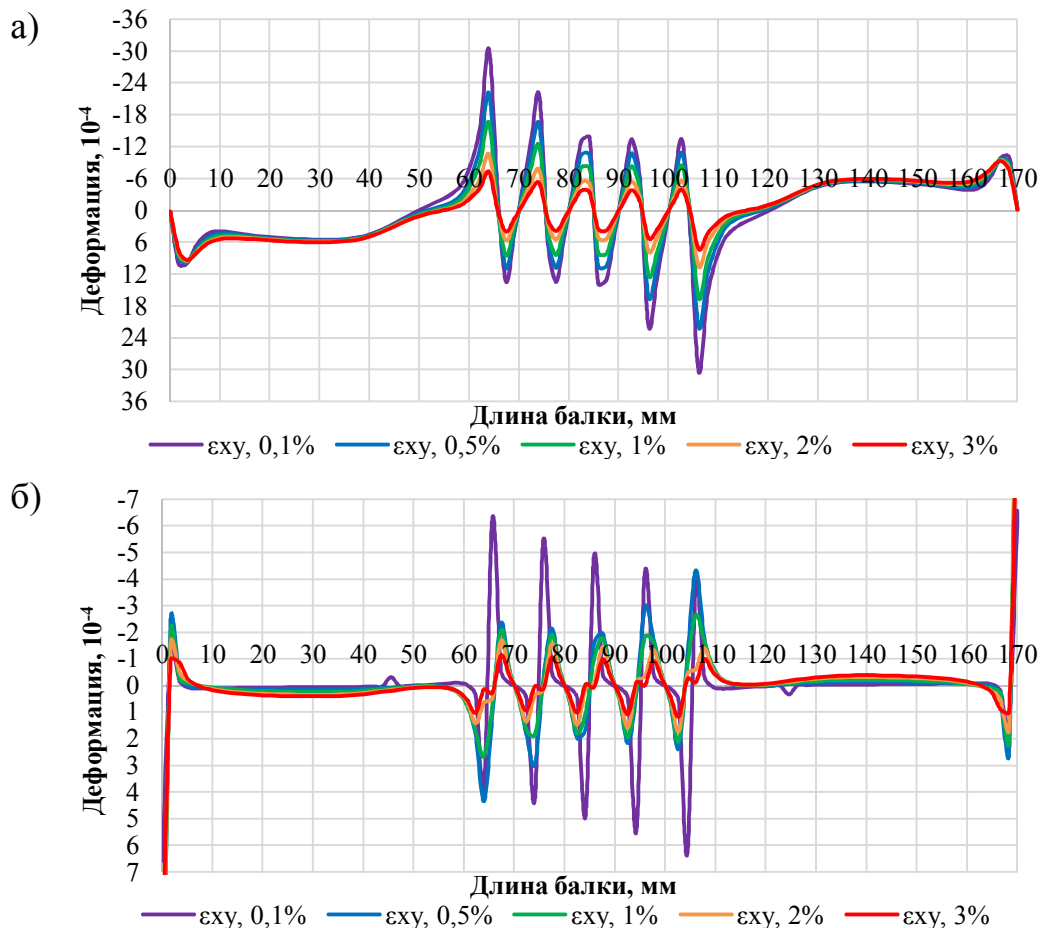


Рисунок 4.21 – Распределение касательных ϵ_{xy} деформаций для балки с пятью трещинами в продольном сечении: в уровне вершины трещины (а);
в уровне сопряжения смолы с армирующим слоем (б)

Длина зоны краевого эффекта на отметке (по y) вершины трещины (рисунки 4.20а и 4.21а) находится в интервале от 10 мм для $\mu = 3\%$ до 15 мм для $\mu = 0,1\%$ а на отметке границы раздела тела балки и армирующего элемента (рисунки 4.20б и 4.21б) соответствует 10 мм.

Таким образом, можно сделать вывод, что на длину зоны краевого эффекта не оказывает влияние количество трещин в балке. Зону краевого эффекта, найденную на отметке вершины трещины, можно считать оценкой «сверху» (максимально возможным значением), а определенную в уровне сопряжения смолы с армирующим слоем оценкой «снизу» (минимально возможным значением).

4.3.5. Заключение к параграфу 4.3

Выполнено численное моделирование в ПК ANSYS балок с заранее организованными трещинами. Предложен оригинальный способ моделирования балки в окрестности трещины с помощью жесткого контакта типа «bonded».

Сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов в ПК ANSYS для балок с заранее организованными трещинами позволяют сделать следующие выводы.

Данные численного моделирования хорошо согласуются с экспериментально полученными результатами, демонстрирующими независимость длины зоны краевого эффекта от прикладываемой нагрузки, отличие от эксперимента не превышает 8%.

Напряжения σ_x в окрестности трещины, полученные с помощью численного моделирования, хорошо согласуются (погрешность 3-11%) с напряжениями, определенными экспериментально.

Высота сжатой зоны в окрестности трещины, определенная экспериментально, превышает на 1-5% высоту сжатой зоны, найденную с помощью численного моделирования. Трещина оказывает не очень значительное влияние на характер распределения продольных напряжений и деформаций в балке с тремя заранее организованными трещинами из-за высокого процента армирования сечения.

Предложена и подтверждена с помощью численного моделирования гипотеза о существовании сечения в продольном направлении балки с заранее организованными трещинами, в котором распределение продольных деформаций не зависит от плотности армирования. Определены координаты сечений по высоте балки в которых продольные деформации при разных плотностях армирования практически одинаковы на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин. Не совпадение деформаций наблюдается слева и справа от крайней трещины на расстоянии соответствующем высоте поперечного сечения балки h для образцов с одной и тремя трещинами и $1,25 h$ для образца с пятью трещинами.

Предложена методика определения зоны краевого эффекта «сверху» и «снизу» по распределениям касательных деформаций в продольном сечении балки в уровне вершины трещины и зоны сопряжения смолы с армирующим слоем. Установлено, что на длину зоны краевого эффекта оказывает влияние плотность армирования, но не оказывает влияние количество трещин в балке.

4.4. Выводы по главе 4

1. ПК ANSYS использован для определения зоны краевого эффекта армирующего элемента при вытягивании из матрицы связующего. Проведенные сравнения результатов вычислительного эксперимента с экспериментальными данными показали адекватность заложенных ПК ANSYS алгоритмов при решении задач механики деформируемого твердого тела. Максимальный разброс результатов численного моделирования по сравнению с экспериментальными данными составляют 20%.

2. Произведена апробация предложенного ранее численно-аналитического метода определения прогибов железобетонного элемента с помощью численного моделирования в ПК ANSYS.

Определенная численно-аналитическим методом высота сжатой зоны хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Расхождения наблю-

даются только в районе опорных участков, на которых реализуется сложное напряженное состояние, которое не учитывается в численно-аналитическом методе. Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только в зоне чистого изгиба (образцы №5 и №6).

Сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными показало, что численно-аналитический метод позволяет адекватно моделировать напряженно-деформированное состояние в железобетонных балках до момента образования трещины и в предельном состоянии предразрушения.

3. Выполнено численное моделирование в ПК ANSYS балок с заранее организованными трещинами. Предложен и апробирован оригинальный способ моделирования балки в окрестности трещины с помощью жесткого контакта типа «bonded».

Данные численного моделирования хорошо согласуются с экспериментально полученными результатами, демонстрирующими независимость длины зоны краевого эффекта от прикладываемой нагрузки, отличие от эксперимента не превышает 8%.

Выявлено, что при высоком проценте армирования ($\mu = 5\%$) трещина оказывает не очень значительное влияние на характер распределения продольных напряжений и деформаций в балке с тремя заранее организованными трещинами.

Доказано с помощью численного моделирования в ПК ANSYS предположение о существовании плоскости в продольном направлении балки с заранее организованными трещинами, в котором распределение продольных деформаций не зависит от изменения плотности армирования. Определены координаты сечений по высоте балки в которых продольные деформации при разных плотностях армирования практически одинаковы на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин. Расхождение деформаций наблюдается слева и справа от крайней трещины на расстоянии соответствующем высоте поперечного сечения

балки h для образцов с одной и тремя трещинами и $1,25 h$ для образца с пятью трещинами.

Предложена методика определения зоны краевого эффекта «сверху» и «снизу» по распределениям касательных деформаций в продольном сечении балки в уровне вершины трещины и зоны сопряжения смолы с армирующим слоем. Выявлено, что на длину зоны краевого эффекта оказывает влияние плотность армирования, но не оказывает влияние количество трещин в балке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Анализ литературных данных показал, что на данный момент не существует методик, позволяющих проводить «сквозной» расчет железобетонных элементов от начала нагружения до потери несущей способности. Показана возможность использования численно-аналитических алгоритмов для «сквозного» расчета «аналитических суперэлементов».

2. Разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования. Метод реализован на конкретном примере расчета шарнирно опертой железобетонной балки с применением диаграмм деформирования стали и бетона, аппроксимированных сплайн-функциями, а также с аппроксимациями диаграмм деформирования бетона, рекомендованных СП 63.13330. Результаты расчетов, полученные с помощью аппроксимаций, рекомендованных СП 63.13330, показали завышение прогибов на ~15% по сравнению со сплайн-аппроксимацией.

3. Разработан и программно реализован алгоритм численно-аналитического метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замонтированного в матрицу. Проведены экспериментальные исследования с использованием поляризационно-оптического метода, а также численное моделирование в ПК ANSYS для определения зоны краевого эффекта армирующего элемента при вытягивании из матрицы связующего. Выявлено, что в первом приближении можно определять зону краевого эффекта по предложенной модели типа Аутвотера с 20÷30% погрешностью. Максимальный разброс результатов численного моделирования по сравнению с экспериментальными данными составляют 20%.

4. Проведена экспериментальная апробация предложенного численно-аналитического метода определения прогибов изгибаемого железобетонного элемента. Вычисления показали, что высота сжатой зоны существенно изменяется вдоль балки. Постоянное значение высота сжатой зоны имеет только в зоне чистого изгиба.

Определенная численно-аналитическим методом высота сжатой зоны хорошо согласуется с результатами численного моделирования в ПК ANSYS. Расхождения наблюдаются только в районе опорных участков, на которых реализуется сложное напряженное состояние, которое не учитывается в численно-аналитическом методе.

5. Проведено экспериментальное исследование балок с заранее организованными трещинами с использованием поляризационно-оптического метода. Предложен и апробирован оригинальный способ численного моделирования балки в окрестности трещины с помощью жесткого контакта типа «bonded». Данные численного моделирования хорошо согласуются с экспериментально полученными результатами, демонстрирующими независимость длины зоны краевого эффекта от прикладываемой нагрузки, отличие от эксперимента не превышает 8%. Выявлено, что на длину зоны краевого эффекта оказывает влияние плотность армирования, но не оказывает влияние количество трещин в балке.

6. Доказано с помощью численного моделирования в ПК ANSYS предположение о существовании плоскости в продольном направлении балки с заранее организованными трещинами, в котором распределение продольных деформаций не зависит от изменения плотности армирования на всех участках по длине балки кроме области в окрестности трещин. Расхождение деформаций наблюдается слева и справа от крайней трещины на расстоянии, соответствующем высоте поперечного сечения балки h для образцов с одной и тремя трещинами и $1,25 h$ для образца с пятью трещинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список используемых источников

1. Адищев В.В., Митасов В.М., Роот В.В., Шмаков Д.С. Динамический эффект при образовании трещины нормального отрыва в изгибаемых железобетонных элементах // Известия вузов. Строительство. 2012. №2. С. 3-14.
2. Адищев В.В., Митасов В.М. К вопросу использования диаграмм деформирования бетона в расчете стержней, подверженных внецентренному нагружению и изгибу // Научные труды Общества железобетонщиков Сибири и Урала. 1996. №4. С.55-59.
3. Адищев В.В., Шмаков Д.С. Метод построения функции принадлежности с "прямой" обработкой исходных данных // Труды НГАСУ. 2013. Т. 16. № 2 (56). С. 45-66.
4. Адищев В.В., Митасов В.М., Березина Э.В., Ершова Н.В., Сергуничева Е.М. Определение коэффициента трансформации эталонной диаграммы деформирования бетона растянутой зоны при изгибе в стадии предразрушения. // Известия вузов. Строительство. 2008. №1. С. 85-91.
5. Адищев В.В., Березина Э.В., Ершова Н.В. Определение коэффициента трансформации эталонных диаграмм для изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов // Известия вузов. Строительство. 2011. №7. С. 73-81.
6. Адищев В.В., Шмаков Д.С. Определение момента образования трещины как нечёткой величины по экспериментальным данным // Известия вузов. Строительство. 2012. № 5. С. 3-13.
7. Адищев В.В., Митасов В.М. Построение диаграмм «напряжение-деформации» для бетона в состоянии предразрушения при изгибе // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1990. №1. С. 28-32.
8. Адищев В.В., Демешкин А.Г., Роот В.В., Шульга В.К. Построение и экспериментальная апробация математических моделей образования и роста трещин

в изгибаемых железобетонных элементах // Деформирование и разрушение структурно неоднородных сред и конструкций: тез. докл. II Всерос. конф. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. С. 5.

9. Адищев В.В., Шмаков Д.С. Применение кластерного анализа для построения нечетких аппроксимаций диаграмм деформирования бетона // Известия вузов. Строительство. 2012. №4. С. 60-70.
10. Адищев В.В., Березина Э.В., Ершова Н.В. Экспериментальная апробация метода трансформации эталонных диаграмм деформирования бетона при изгибе // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2011. № 8-9. С. 118-124.
11. Адищев В.В., Демешкин А.Г., Роот В.В. Экспериментальное исследование процесса возникновения трещин нормального отрыва в изгибаемых армированных элементах // Известия вузов. Строительство. 2012. №3. С. 119-127.
12. Адищев В.В., Митасов В.М. Энергетический подход к моделированию процесса образования трещин в изгибаемых железобетонных элементах. // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 4. С. 26-31.
13. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / М.: Наука, 1973. 576 с
14. Албаут Г.Н., Барышников В.Н., Митасов В.М. Моделирование образования и развития трещин в армированных балках // Известия вузов. Строительство. 1996. № 8. С. 133-135.
15. Албаут Г.Н., Харинова Н.В. Нелинейная фотоупругость в задачах о концентрации напряжений // Известия вузов. Строительство. 2006. № 9. С. 76-82.
16. Албаут Г.Н. Нелинейная фотоупругость в приложении к задачам механики разрушения / НГАСУ, 2002. 113 с.
17. Албаут Г.Н., Барышников В.Н., Митасов В.М., Никифоровский В.С. Определение механизмов разрушения элементов конструкций из композиционных материалов поляризационно-оптическими методами // Известия вузов. Строительство. 1999. № 7. С. 46-50.

18. Албаут Г.Н., Барышников В.Н. Основы методов нелинейной фотоупругости и их применение в инженерном проектировании конструкций / Новосибирск: НГАСУ, 1997. 107 с.
19. Албаут Г.Н., Адищев В.В., Барышников В.Н., Митасов В.М., Никифоровский В.С. Экспериментальное исследование элементов конструкций из композиционных материалов при наличии трещин и разрушения // Ресурсосберегающие и энергосберегающие технологии реконструкции и нового строительства: науч. труды I междунар. конгресса, 1999. С. 6-11.
20. Албаут Г.Н., Харинова Н.В. Поляризационно-оптический анализ геометрически нелинейных задач концентрации напряжений // Известия вузов. Строительство. 2006. № 11/12. С. 79-84.
21. Астахов Ю.В. Экспериментально-расчетная оценка взаимодействия стальной канатной и стеклопластиковой арматуры с бетоном: дис. канд. техн. наук / Новосибирск, 2002. 137 с.
22. Ахвердов И.Н., Смольский А.Е., Скочеляс В.В. Моделирование напряженного состояния бетона и железобетона / Минск: Наука и техника, 1973. 231 с.
23. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона / М.: Стройиздат, 1981. 464 с.
24. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс / М.: БАСТЕТ, 2009. 768 с.
25. Балускин А.Л. Моделирование напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов на участках между дискретными трещинами // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 4. С. 43-47.
26. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя / М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
27. Бачинский В.Я., Бамбура А.Н., Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии // Бетон и железобетон. 1984. №10. С. 18-19.
28. Бокарев С.А., Смердов Д.Н. Нелинейный анализ железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных композитными материалами // Вестник ТГАСУ. 2010. №2. С. 113-125.

29. Бондаренко В.М., Суворкин Д.Г. Железобетонные и каменные конструкции / М.: Высш. шк., 1987. 384 с.
30. Гвоздев А.А. Расчёт несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / М.: Госстройиздат, 1949. 280 с.
31. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / М.: Мир, 1965. 465 с.
32. Голышев А.Б., Бачинский В.Я., Полищук В.П. Железобетонные конструкции / Киев: Логос, 2001. Т.1. 419 с.
33. Городецкий А.С. Возможности применения суперэлементов при решении различных задач строительной механики // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 4. С. 51-56.
34. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Київ, 2011. 70 с.
35. Демешкин А.Г., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Зарождение трещин в окрестности концентраторов напряжений в квазихрупких материалах // Известия РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 104-115.
36. Дюрелли А. Райли У. Введение в фотомеханику (поляризационно-оптические метод) / М.: Мир, 1970. 576 с.
37. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн – функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
38. Залесов А.С., Кодыш Э.Н., Лемыш Л.Л., Никитин И.К. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям / М.: Стройиздат, 1988. 320 с.
39. Зиновьев Б.М. Некоторые задачи расчета упругих армированных тел и тел с разрезами: автореф. дис. канд. техн. наук. / Новосибирск, 1973. 42 с.
40. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Анализ и совершенствование криволинейных диаграмм деформирования бетона для расчета железобетонных конструкций по деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2013. № 1. С. 28-30.

41. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. К определению деформаций изгибаемых железобетонных элементов с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры // Строительство и реконструкция. 2012. № 2. С. 11-19.
42. Карпенко Н.И. К построению обобщенной зависимости для диаграмм деформирования бетона // Строительные конструкции. Минск, 1983. С. 164-173.
43. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. К расчёту прочности, жёсткости и трещиностойкости внецентренно сжатых железобетонных элементов с применением нелинейной деформационной модели // Изв. КГАСУ. 2013. № 4 (26). С. 113-120.
44. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. № 3. С. 10-16.
45. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. О диаграммном методе построения физических соотношений для бетонных и железобетонных элементов при объемном напряженном состоянии // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. 2016. № 4 (364). С. 28-34.
46. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / М.: Стройиздат, 1996. 414 с.
47. Котов А.А. Напряженно-деформированное состояние железобетонной балки в сечении с трещиной при чистом изгибе // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Л. 1982. С. 118-123.
48. Кургузов В.Д. Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1562-1563.
49. Кутилин Д.И. Теория конечных деформаций. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

50. Лемыш Л.Н. Расчет железобетонных конструкций по деформациям и несущей способности с учетом полных диаграмм деформирования бетона и арматуры // Железобетонные конструкции промышленных зданий. – М.: ЦНИИ-Промздания, 1984. С. 74-89.
51. Леньшин В.П. К вопросу разработки и использования моделей деформирования железобетонных конструкций с трещинами // Строительная механика и расчет сооружений. 1980. №6. С. 34-36.
52. Логунова М.А., Пешков А.С. Экспериментальные исследования бетонных балок без организованных трещин и с заранее организованными трещинами // Известия вузов. Строительство. 2011. №1. С. 116-120.
53. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / М.: Наука, 1980. 512с.
54. Лучко И.И., Капелюжный В.В. Трещиностойкость железобетонных изгибаемых элементов при высоком уровне нагружения кратковременной и длительной нагрузкой // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1986. №8. С. 5-9.
55. Мальцов К.А. Физический смысл условного предела прочности бетона на растяжение при изгибе // Бетон и железобетон. 1958. №3. С. 107-111.
56. Мейснер К. Алгоритм многосвязного объединения для метода жесткостей структурного анализа // Ракетная техника и космонавтика. 1968. № 11. С. 153-162.
57. Митасов В.М., Логунова М.А., Стаценко Н.В. Влияние положения заранее организованных трещин на деформирование железобетонных элементов // Вестник ТГАСУ. 2016. №2. С. 139-147.
58. Митасов В.М., Логунова М.А., Шатохина М.В. Железобетонные балки с заранее организованными трещинами под воздействием длительной нагрузки // Известия вузов. Строительство. 2013. №10. С. 5-10.
59. Митасов В.М., Логунова М.А. Конструкции с заранее организованными трещинами // Вестник ТГАСУ. 2015. №1. С. 115-121.

60. Митасов В.М., Логунова М.А., Стаценко Н.В. Новые подходы к решению задач деформирования железобетонных конструкций с трещинами // Известия вузов. Строительство. 2017. №1. С. 77-83.
61. Митасов В.М. Основные положения теории сопротивления железобетона: (энергетический вариант) / Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 168 с.
62. Митасов В.М., Адищев В.В. Основные положения энергетической теории сопротивления железобетона // Известия вузов. Строительство. 2010. № 6. С. 3-7
63. Митасов В.М., Адищев В.В. Основные предпосылки построения энергетической теории сопротивления железобетона // Известия вузов. Строительство. 2010. № 5. С. 3-9
64. Митасов В.М., Адищев В.В., Федоров Д.А. Развитие теории сопротивления железобетона // Промышленность строительных материалов. Серия 3. Промышленность сборного железобетона. Аналитический обзор. 1990. Вып. 4. 45 с.
65. Михайлов В.В., Емельянов М.П., Дудолодов Л.С., Матисов В.М. Некоторые предложения по описанию диаграммы деформаций бетона при загрузении // Известия Вузов. Строительство и архитектура. 1984. №2. С. 23-27.
66. Михайлова Н.С. Экспериментальные исследования железобетонных балок без трещин и с заранее намеченной трещиной // Известия вузов. Строительство. 2007. №4. С. 110-113.
67. Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Щадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Изд. 2-е, испр. М.: ЛЕНАНД, 2010. 456 с.
68. Мурашев В.И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. М.: Машстройиздат, 1950. 268 с.
69. Мурашев В.И., Сигалов Э.Е., Байков В.Н. Железобетонные конструкции. Общий курс / М.: Госстройиздат, 1962. 662 с.
70. Немировский Я.М. Исследование напряженно- деформированного состояния

- железобетонных элементов с учетом работы растянутого бетона над трещинами и пересмотр на этой основе теории расчета деформации раскрытия трещин // Прочность и жесткость железобетонных конструкций / 1968. С.152–173.
71. Нейбер Г. Концентрация напряжений / М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
 72. Никулин А.И. К уточнению величин предельных относительных деформаций бетона в сжатой зоне изгибаемых железобетонных элементов // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 8. С. 12-15.
 73. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела / М.: Наука, 1985. 288 с.
 74. Попов Н.Н., Забегаев А.В. Проектирование и расчет железобетонных и каменных конструкций / М.: Высшая школа, 1989. 400 с.
 75. Пржеминичский Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур // Ракетная техника и космонавтика. 1963. №1. С. 165-174.
 76. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / М.: Наука, 1988. 711 с.
 77. Редикюльцев Е.А. Численное исследование поведения изгибаемых железобетонных элементов при помощи программного комплекса ANSYS // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. 2009. №2. С. 84-87.
 78. Ржаницын А.Р. Строительная механика / 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
 79. Римшин В.И., Кришан А.Л., Мухаметзянов А.И. Построение диаграммы деформирования одноосно сжатого бетона // Вестник МГСУ. 2015. №6. С. 23-31.
 80. Роот В.В., Шмаков Д.С. Применение различных видов аппроксимаций диаграмм деформирования бетона для расчета изгибаемых железобетонных элементов // Известия вузов. Строительство. 2012. №9. С. 86-91.

81. Самошкин А.С., Тихомиров В.М. Исследование нелинейного деформирования железобетона экспериментально-расчетными методами // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2017. №5. С.17-27.
82. Самошкин А.С., Тихомиров В.М. Математическая модель деформирования железобетона с учетом контактного взаимодействия его структурных компонентов // Вычислительные технологии. 2017. Т.22. Спецвыпуск 1. С.75-86.
83. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры / М.: ФГУП ЦПП, 2008. 54 с.
84. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 / М.: ФАУ ФЦС, 2012. 161 с.
85. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / 2-е изд. М.: Наука, 1979. 576с.
86. Тимошенко С.П., Гере Д.М. Механика материалов / 2-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2002. 670 с.
87. Тихомиров В.М., Астахов Ю.В., Самошкин А.С. Моделирование упругопластического сцепления арматуры с бетоном // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2015. №2. С.103-109.
88. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2008. 504 с.
89. Федоров Д.А. Диаграммы растяжения высокопрочной арматуры и использование их в расчетах железобетонных балочных элементах: дис. канд. техн. наук // Новосибирск. 1990. 266 с.
90. Филиппов В.А., Тошин Д.С. Основы расчета железобетона / Тольятти: ТГУ, 2017. 216 с.
91. Фрохт М. Фотоупругость / М.: Гостехиздат, 1948. Т1. 432 с.
92. Фрохт М. Фотоупругость / М.: Гостехиздат, 1950. Т2. 488 с.
93. Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном / М.: Стройиздат, 1981. 184 с.

94. Холмянский М.М. Работа бетонной балки с одиночными трещинами или разрезами // Бетон и железобетон. 2003. № 1. С. 20-24.
95. Холмянский М.М. Расчет центрально армированных призматических элементов на сцепление // Сб.тр. НИИЖБ М.: Госстройиздат, 1961. Вып. 4. С. 122-153
96. Черепанов Г.П. Механика разрушения // М.-Ижевск: ИКИ, 2012. 872 с.
97. Штовба С.Д. Проектирование нечётких систем средствами MATLAB // М.: Горячая линия. Телеком, 2007. 288 с.
98. ACI 224R-01. Control of Cracking in Concrete. Reported by ACI Committee 224. 2001. 46 p.
99. BS EN 1992-1-1:2004. Eurocode 2. Design of concrete structures. General rules and rules for buildings. Brussels. 2004. 230 p.
100. Budiansky B., Evans A.G., Hutchinson J.W. Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32, №3. Pp. 315-328.
101. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. №49. Pp. 1-23.
102. GB50010-2002. National Standard of the people's republic of China. Code of Design of Concrete Structures. Beijing, 2002. 357 p.
103. IS-456-2000. Indian standard. Plain and Reinforced concrete – code of practice (Fourth Revision). New Delhi. 2000. 100 p.
104. JSCE-2007. Standard specifications for concrete structures. Design. Tokyo. 2010. 469 p.
105. Hrennikoff A. Solution of problems in elasticity by the framework method // J. Appl. Mech. 1941. №6. Pp. 169-175.
106. Mitasov V.M., Adischev V.V. New calculation techniques for reinforced concrete // Application of codes, design and regulations. Dandy. 2005. Pp. 655-663.
107. Outwater J.O. The fundamental mechanics of reinforced plastics // ASME. 1956. 56 p.

108. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy sets and systems. 1978. №1. Pp. 3-28.
109. Zadeh L.A. Similarity relations and fuzzy orderings // Information Sciences. 1971. V3. Pp. 177-200.
110. Zimmerman H.J. Fuzzy set // Theory and its applications. Second revised Edition. 1990. 398 p.

Список публикаций соискателя***Публикации в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК:***

1. Адищев В.В., Демешкин А.Г., Шульга В.К., Грачева М.С., Данилов М.Н., **Мальцев В.В.** Определение зоны анкеровки армирующего элемента при вытягивании из матрицы // Известия вузов. Строительство. 2014. №12 С. 67-79. (15%)
2. Адищев В.В., Карпов Е.В., Демешкин А.Г., Карпицкая Ю.Р., **Мальцев В.В.**, Иванов А.И. Применение оптической системы Correlated Solutions Vic 3D для построения диаграмм деформирования бетона // Известия вузов. Строительство. 2015. №8. С. 68-81. (15%)
3. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Численно-аналитический метод определения прогибов железобетонной балки с применением реальной нелинейной диаграммы деформирования бетона // Известия вузов. Строительство. 2016. №9. С. 5-17. (50%)
4. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Применением нелинейных диаграмм деформирования бетона для расчета напряженно-деформированного состояния в железобетонной балке численно-аналитическим методом // Известия вузов. Строительство. 2017. №1. С. 5-17. (50%)
5. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Определение напряженно деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала численно-аналитическим методом // Известия вузов. Строительство. 2017. №4. С. 5-16. (50%)
6. Адищев В.В., **Мальцев В.В.**, Данилов М.Н. Верификация численно-аналитического метода определения прогибов с помощью численного моделирования // Известия вузов. Строительство. 2017. №9. С. 15-24. (30%)
7. Адищев В.В., **Мальцев В.В.**, Шульга В.К. Исследование напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами // Известия вузов. Строительство. 2018. №3. С. 95-108. (30%)

8. **Мальцев В.В.** Влияние плотности армирования на деформированное состояние в балках с заранее организованными трещинами // Известия вузов. Строительство. 2018. №5. С. 5-16. (100%)
9. Адищев В.В., Иванов А.И., Петрова О.В., **Мальцев В.В.** Применение нелинейных диаграмм деформирования бетона для расчета внецентренно сжатых железобетонных колонн // Известия вузов. Строительство. 2018. №9. С. 5-19. (25%)

Публикации, индексируемые в Scopus:

10. Adishchev V.V., **Maltsev V.V.** Investigation of stress-strain state in the beam with preformed cracks // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. pp. 1-6. (50%)

Публикации в других печатных изданиях

11. Демешкин А.Г., Карпицкая Ю.Р., **Мальцев В.В.**, Иванов А.И. Применение оптической системы Vic 3D для построения нечетких диаграмм деформирования бетона // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015 г. Казань: КФУ, 2015. С. 1151-1154. (25%)
12. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Применение нелинейных диаграмм деформирования бетона для расчета напряженно-деформированного состояния в железобетонной балке численно-аналитическим методом // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции. Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. С. 16-28. (50%)
13. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Определение напряженно-деформированного состояния в армированных балках из однородного ячеистого материала численно-аналитическим методом // Проблемы оптимального проектирования

- сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции. Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. С. 29-38. (50%)
14. Адищев В.В., **Мальцев В.В.** Исследование напряженно-деформированного состояния в балках с заранее организованными трещинами // VII международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (программа и тезисы докладов), 1-8 июля 2018 г., г. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2018. С. 104. (50%)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Программная реализация в Mathcad алгоритма численно-аналитического метода определения прогибов железобетонной балки с применением нелинейных диаграмм деформирования бетона до момента трещинообразования

Текст подпрограммы: «Геометрические характеристиками балки»:

Длина пролета: $L := 4$

Высота сечения: $h := 0.4$

Ширина сечения: $b := 0.2$

Рабочая высота сечения: $h_0 := 0.37$

Коэффициент армирования: $\mu_s := 1 \cdot 10^{-3}$

Высота сечения в безразмерном виде: $H := \frac{h}{h_0} \quad H = 1.081081081081081$

Длина пролета в безразмерном виде: $l := \frac{L}{h_0} \quad l = 10.81081081081081$

Текст подпрограммы: «Узлы аппроксимация для построения диаграммы бетона В20»:

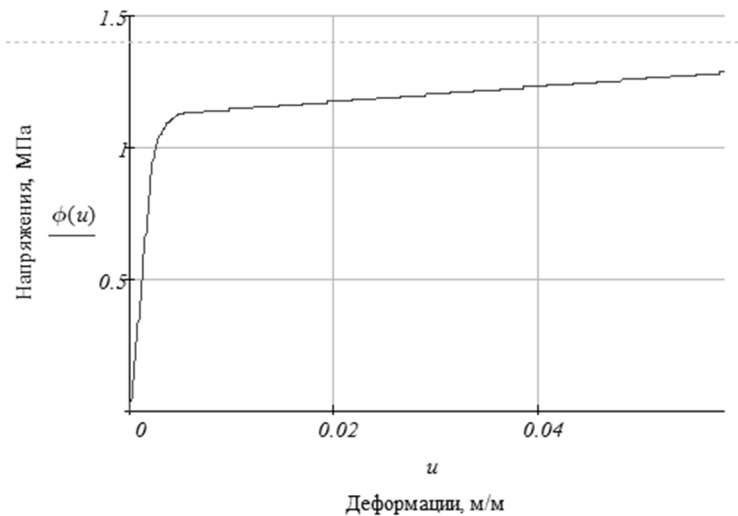
Деформации:	$\varepsilon_1 := -4.8 \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_a := 0$	$\varepsilon_4 := 0.03 \cdot 10^{-3}$
	$\varepsilon_2 := -2.5 \cdot 10^{-3}$		$\varepsilon_5 := 0.2 \cdot 10^{-3}$
	$\varepsilon_3 := -0.2 \cdot 10^{-3}$		$\varepsilon_6 := 0.27 \cdot 10^{-3}$
Напряжения:	$\sigma_1 := -5.7$	$\sigma_0 := 0$	$\sigma_4 := 0.82$
	$\sigma_2 := -15$		$\sigma_5 := 1.35$
	$\sigma_3 := -5.7$		$\sigma_6 := 0.8$

Текст подпрограммы: «Узлы аппроксимация для построения диаграммы арматуры А400»:

Деформации:	$\varepsilon_{s1} := 0.002$	$\varepsilon_{s2} := 0.002479$	$\varepsilon_{s3} := 0.005507$	$\varepsilon_{s4} := 0.05804$
Напряжения	$\sigma_{s1} := 400$	$\sigma_{s2} := 460$	$\sigma_{s3} := 520$	$\sigma_{s4} := 590$

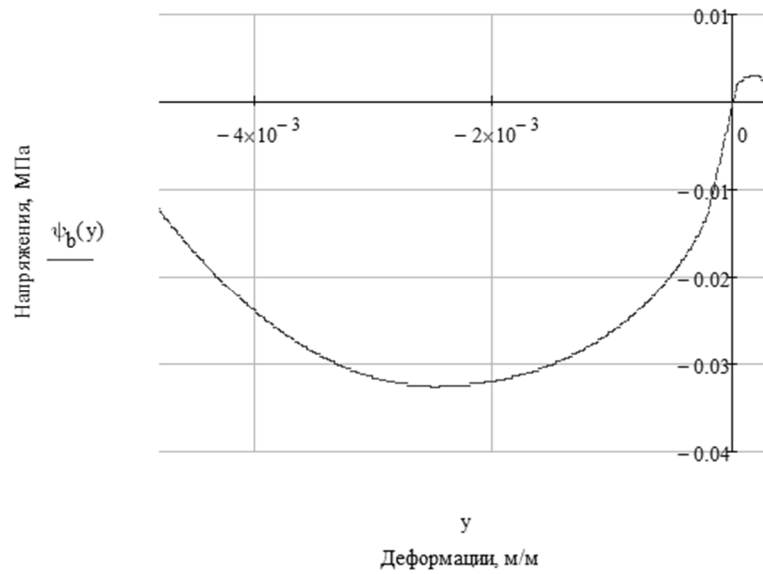
Текст подпрограммы: «Аппроксимация диаграммы арматуры сплайн-функциями»:

$$\begin{aligned}
 \phi(\varepsilon_s) := & \begin{aligned} & E_s \leftarrow \frac{\sigma_{s1}}{\varepsilon_{s1}} \\ & E_{s2} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}}{\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1}} + \frac{\sigma_{s3} - \sigma_{s2}}{\varepsilon_{s3} - \varepsilon_{s2}} \right) \\ & E_{s3} \leftarrow \frac{\sigma_{s4} - \sigma_{s3}}{\varepsilon_{s4} - \varepsilon_{s3}} \\ & n1 \leftarrow \frac{E_s - E_{s2}}{E_s \cdot \varepsilon_{s2} - \sigma_{s2}} \cdot (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1}) \\ & n2 \leftarrow \frac{E_{s2} - E_{s3}}{E_{s2} \cdot (\varepsilon_{s3} - \varepsilon_{s2}) - (\sigma_{s3} - \sigma_{s2})} \cdot (\varepsilon_{s3} - \varepsilon_{s2}) \\ & a1 \leftarrow \frac{\sigma_{s2} - E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})^{n1}} \\ & a2 \leftarrow \frac{(\sigma_{s3} - \sigma_{s2}) - E_{s2} \cdot (\varepsilon_{s3} - \varepsilon_{s2})}{(\varepsilon_{s3} - \varepsilon_{s2})^{n2}} \\ & \phi \leftarrow \frac{(E_s \cdot \varepsilon_s)}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s1} \\ & \phi \leftarrow \frac{[\sigma_{s1} + E_s \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s1}) + a1 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})^{n1}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s2} \\ & \phi \leftarrow \frac{[\sigma_{s2} + E_{s2} \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s2}) + a2 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s2})^{n2}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_{s2} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s3} \\ & \phi \leftarrow \frac{[\sigma_{s3} + E_{s3} \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s3})]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_{s3} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s4} \\ & \phi \end{aligned}
 \end{aligned}$$



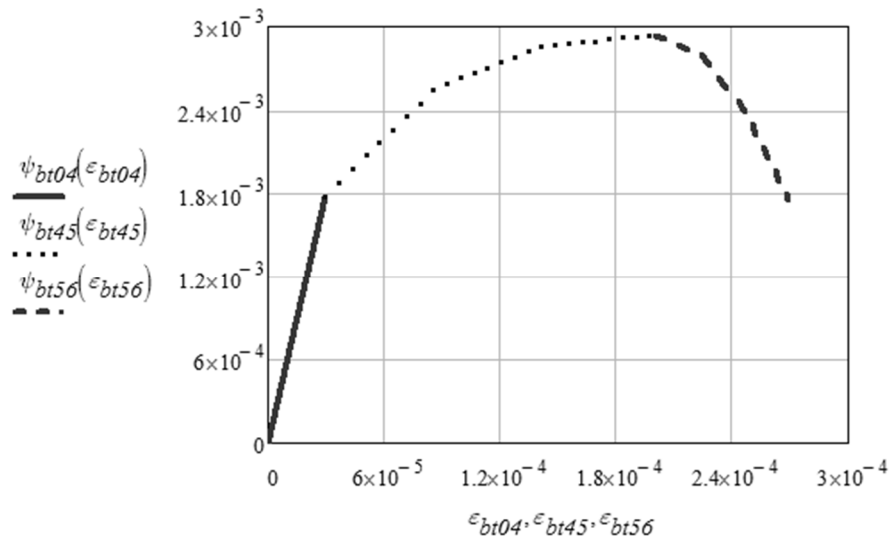
Текст подпрограммы: «Аппроксимация диаграммы бетона сплайн-функциями»:

$$\begin{aligned}
 \psi_b(\varepsilon_b) := & \begin{aligned} & E_b \leftarrow \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} \\ & E_{bt} \leftarrow \frac{\sigma_4}{\varepsilon_4} \\ & m2 \leftarrow 2 \\ & m3 \leftarrow \frac{E_b \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{\sigma_2 - E_b \cdot \varepsilon_2} \\ & m4 \leftarrow \frac{E_{bt} \cdot (\varepsilon_5 - \varepsilon_4)}{E_{bt} \cdot \varepsilon_5 - \sigma_5} \\ & m5 \leftarrow 2 \\ & b_2 \leftarrow \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{m2}} \\ & b_3 \leftarrow \frac{(\sigma_2 - E_b \cdot \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^{m3}} \\ & b_4 \leftarrow \frac{(\sigma_5 - E_{bt} \cdot \varepsilon_5)}{(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)^{m4}} \\ & b_5 \leftarrow \frac{(\sigma_6 - \sigma_5)}{(\varepsilon_6 - \varepsilon_5)^{m5}} \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & \psi \leftarrow \frac{[\sigma_2 + b_2 \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_b)^{m2}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_2 \\ & \psi \leftarrow \frac{[\sigma_3 + E_b \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_3) + b_3 \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_b)^{m3}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_3 \\ & \psi \leftarrow \frac{(E_b \cdot \varepsilon_b)}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_3 \leq \varepsilon_b \leq 0 \\ & \psi \leftarrow \frac{(E_{bt} \cdot \varepsilon_b)}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } 0 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_4 \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & \psi \leftarrow \frac{[\sigma_4 + E_{bt} \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_4) + b_4 \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_4)^{m4}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_4 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_5 \\ & \psi \leftarrow \frac{[\sigma_5 + b_5 \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_5)^{m5}]}{\sigma_{s2}} \quad \text{if } \varepsilon_5 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_6 \\ & \psi \leftarrow 0 \quad \text{otherwise} \\ & \psi \end{aligned}
 \end{aligned}$$



Текст подпрограммы: «Выделение дополнительных узлов аппроксимации на диаграмме растяжения бетона»:

участок 0-4	участок 4-5	участок 5-6
количество участков	$i45 := 3$	$i56 := \frac{i45}{1}$
длина участков	$d45 := \frac{(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)}{i45}$	$d56 := \frac{(\varepsilon_6 - \varepsilon_5)}{i56}$
Координаты участков		
$\varepsilon_{bt04} := \varepsilon_0, \varepsilon_4 \dots \varepsilon_4$	$\varepsilon_{bt45} := \varepsilon_4, (\varepsilon_4 + d45) \dots \varepsilon_5$	$\varepsilon_{bt56} := \varepsilon_5, (\varepsilon_5 + d56) \dots \varepsilon_6$
$\varepsilon_{bt04} =$	$\varepsilon_{bt45} =$	$\varepsilon_{bt56} =$
0	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^{-5}$	$8.667 \cdot 10^{-5}$	$2.233 \cdot 10^{-4}$
	$1.433 \cdot 10^{-4}$	$2.467 \cdot 10^{-4}$
	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$
$\psi_{bt04}(\varepsilon_{bt04}) := \frac{(E_{bt} \cdot \varepsilon_{bt04})}{\sigma_{s2}}$	$\psi_{bt45}(\varepsilon_{bt45}) := \frac{[\sigma_4 + E_{bt} \cdot (\varepsilon_{bt45} - \varepsilon_4) + b_4 \cdot (\varepsilon_{bt45} - \varepsilon_4)^{m4}]}{\sigma_{s2}}$	$\psi_{bt56}(\varepsilon_{bt56}) := \frac{[\sigma_5 + b_5 \cdot (\varepsilon_{bt56} - \varepsilon_5)^{m5}]}{\sigma_{s2}}$
$\psi_{bt04}(\varepsilon_{bt04}) =$	$\psi_{bt45}(\varepsilon_{bt45}) =$	$\psi_{bt56}(\varepsilon_{bt56}) =$
0	$1.783 \cdot 10^{-3}$	$2.935 \cdot 10^{-3}$
$1.783 \cdot 10^{-3}$	$2.56 \cdot 10^{-3}$	$2.802 \cdot 10^{-3}$
	$2.854 \cdot 10^{-3}$	$2.403 \cdot 10^{-3}$
	$2.935 \cdot 10^{-3}$	$1.739 \cdot 10^{-3}$



Текст подпрограммы: «Кинематические соотношения для участков 0-4, 4-5 и 5-6»:

$$\begin{aligned} \epsilon_{s04}(\epsilon_{bt04}, a) &:= \frac{1-a}{H-a} \cdot (\epsilon_{bt04}) & \epsilon_{s45}(\epsilon_{bt45}, b) &:= \frac{1-b}{H-b} \cdot (\epsilon_{bt45}) & \epsilon_{s56}(\epsilon_{bt56}, c) &:= \frac{1-c}{H-c} \cdot (\epsilon_{bt56}) \\ \epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}) &:= -\frac{a}{1-a} \cdot \epsilon_{s04}(\epsilon_{bt04}, a) & \epsilon_{b45}(b, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}) &:= -\frac{b}{1-b} \cdot \epsilon_{s45}(\epsilon_{bt45}, b) & \epsilon_{b56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}) &:= -\frac{c}{1-c} \cdot \epsilon_{s56}(\epsilon_{bt56}, c) \end{aligned}$$

Текст подпрограммы: «Определение относительной высоты сжатой зоны на участке 0-4»:

$$N_{bs04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}) := - \left[\frac{a}{\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04})} \cdot \int_{\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04})}^{\epsilon_{bt04}} \psi_b(\epsilon) d\epsilon \right] + \mu_s \cdot \psi_{s04}(\epsilon_{s04}, a, \epsilon_{bt04})$$

$$\epsilon_{bt04} := \begin{cases} \epsilon_0 \\ \epsilon_4 \end{cases} \quad \epsilon_{bt04} = 3 \times 10^{-5}$$

$$a := 0.38$$

$$a0(\epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}) := \text{root}(N_{bs04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}), a)$$

$$\underline{a} := a0(\epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}) = 0.538$$

Текст подпрограммы: «Определение относительной высоты сжатой зоны на участке 4-5»:

$$N_{bs45}(\bar{\epsilon}, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}) := - \left[\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_{b45}(\bar{\epsilon}, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45})} \int_{\epsilon_{b45}(\bar{\epsilon}, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45})}^{\epsilon_{bt45}} \psi_b(\epsilon) d\epsilon \right] + \mu_s \cdot \psi_{s45}(\epsilon_{s45}, \bar{\epsilon}, \epsilon_{bt45})$$

$\bar{\epsilon} := 0.438$
 $\bar{\epsilon}0(\epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}) := \text{root}(N_{bs45}(\bar{\epsilon}, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}), \bar{\epsilon})$
 $\bar{\epsilon}0(\epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}) \quad \bar{\epsilon}_{\text{н}}(\epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}) := \bar{\epsilon}0(\epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45})$

0.538
0.489
0.449
0.419

0.538
0.489
0.449
0.419

Текст подпрограммы: «Определение относительной высоты сжатой зоны на участке 5-6»:

$$N_{bs56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}) := - \left[\frac{c}{\epsilon_{b56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56})} \int_{\epsilon_{b56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56})}^{\epsilon_{bt56}} \psi_b(\epsilon) d\epsilon \right] + \mu_s \cdot \psi_{s56}(\epsilon_{s56}, c, \epsilon_{bt56})$$

$c := 0.38$
 $c0(\epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}) := \text{root}(N_{bs56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}), c)$
 $c0(\epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}) \quad c_{\text{н}}(\epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}) := c0(\epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56})$

0.419
0.408
0.397
0.385

0.419
0.408
0.397
0.385

Текст подпрограммы: «Решение уравнения равновесия моментов 0-4»:

$a = 0.538 \quad \epsilon_{s04}(\epsilon_{bt04}, a) = 2.552 \times 10^{-5} \quad \epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}) = -2.972 \times 10^{-5} \quad \psi_{s04}(\epsilon_{s04}, a, \epsilon_{bt04}) = 0.011$

$$M_{bs04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}) := \left(\frac{a}{\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04})} \right)^2 \int_{\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04})}^{\epsilon_{bt04}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon d\epsilon + (1 - a) \cdot \mu_s \cdot \psi_{s04}(\epsilon_{s04}, a, \epsilon_{bt04})$$

$M_{bs04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}, \epsilon_{b04}, \psi_{s04}) = 3.58 \times 10^{-4}$

$\epsilon_{s04}(\epsilon_{bt04}, a) = 2.552 \times 10^{-5} \quad \psi_{s04}(\epsilon_{s04}, a, \epsilon_{bt04}) = 0.011$

$\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}) = -2.972 \times 10^{-5} \quad \psi_{b04} := \frac{E_b(\epsilon_{b04}(a, \epsilon_{bt04}, \epsilon_{s04}))}{\sigma_{s2}} = -1.841 \times 10^{-3}$

Текст подпрограммы: «Решение уравнения равновесия моментов 4-5»:

$\epsilon(\epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45})$
0.538
0.489
0.449
0.419

$61 := 0.538$
$62 := 0.489$
$63 := 0.449$
$64 := 0.419$

$\epsilon_{bt45} =$
$3 \cdot 10^{-5}$
$8.667 \cdot 10^{-5}$
$1.433 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_{1bt45} := 3 \times 10^{-5}$
 $\epsilon_{2bt45} := 8.667 \times 10^{-5}$
 $\epsilon_{3bt45} := 1.433 \times 10^{-4}$
 $\epsilon_{4bt45} := 2 \times 10^{-4}$

$\epsilon_{1s45} := \frac{I - 61}{H - 61} \cdot \epsilon_{1bt45} = 2.552 \times 10^{-5}$
$\epsilon_{2s45} := \frac{I - 62}{H - 62} \cdot \epsilon_{2bt45} = 7.48 \times 10^{-5}$
$\epsilon_{3s45} := \frac{I - 63}{H - 63} \cdot \epsilon_{3bt45} = 1.249 \times 10^{-4}$
$\epsilon_{4s45} := \frac{I - 64}{H - 64} \cdot \epsilon_{4bt45} = 1.755 \times 10^{-4}$

$\epsilon_{1b45} := -\frac{61}{I - 61} \cdot \epsilon_{1s45} = -2.972 \times 10^{-5}$
$\epsilon_{2b45} := -\frac{62}{I - 62} \cdot \epsilon_{2s45} = -7.158 \times 10^{-5}$
$\epsilon_{3b45} := -\frac{63}{I - 63} \cdot \epsilon_{3s45} = -1.018 \times 10^{-4}$
$\epsilon_{4b45} := -\frac{64}{I - 64} \cdot \epsilon_{4s45} = -1.266 \times 10^{-4}$

$\psi_{1s45} := \frac{E_s \cdot \epsilon_{1s45}}{\sigma_{s2}} = 0.011$
$\psi_{2s45} := \frac{E_s \cdot \epsilon_{2s45}}{\sigma_{s2}} = 0.033$
$\psi_{3s45} := \frac{E_s \cdot \epsilon_{3s45}}{\sigma_{s2}} = 0.054$
$\psi_{4s45} := \frac{E_s \cdot \epsilon_{4s45}}{\sigma_{s2}} = 0.076$

$$M_{bs45}(\epsilon, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45}, \epsilon_{b45}, \psi_{s45}) := \left(\frac{6}{\epsilon_{b45}(\epsilon, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45})} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{b45}(\epsilon, \epsilon_{bt45}, \epsilon_{s45})}^{\epsilon_{bt45}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (I - 6) \cdot \mu_s \cdot \psi_{s45}(\epsilon_{s45}, 6, \epsilon_{bt45})$$

$M_{145} := \left(\frac{61}{\epsilon_{1b45}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{1b45}}^{\epsilon_{1bt45}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (I - 61) \cdot \mu_s \cdot \psi_{1s45} = 3.58 \times 10^{-4}$
$M_{245} := \left(\frac{62}{\epsilon_{2b45}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{2b45}}^{\epsilon_{2bt45}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (I - 62) \cdot \mu_s \cdot \psi_{2s45} = 7.516 \times 10^{-4}$
$M_{345} := \left(\frac{63}{\epsilon_{3b45}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{3b45}}^{\epsilon_{3bt45}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (I - 63) \cdot \mu_s \cdot \psi_{3s45} = 9.597 \times 10^{-4}$
$M_{445} := \left(\frac{64}{\epsilon_{4b45}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{4b45}}^{\epsilon_{4bt45}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (I - 64) \cdot \mu_s \cdot \psi_{4s45} = 1.099 \times 10^{-3}$

Текст подпрограммы: «Решение уравнения равновесия моментов 5-6»:

$c(\epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56})$
0.419
0.408
0.397
0.385

$c1 := 0.419$
$c2 := 0.408$
$c3 := 0.397$
$c4 := 0.385$

$\epsilon_{bt56} =$
$2 \cdot 10^{-4}$
$2.233 \cdot 10^{-4}$
$2.467 \cdot 10^{-4}$
$2.7 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_{1bt56} := 2 \times 10^{-4}$
 $\epsilon_{2bt56} := 2.233 \times 10^{-4}$
 $\epsilon_{3bt56} := 2.467 \times 10^{-4}$
 $\epsilon_{4bt56} := 2.7 \times 10^{-4}$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s56} &:= \frac{l - c1}{H - c1} \cdot \epsilon_{1bt56} = 1.755 \times 10^{-4} & \epsilon_{1b56} &:= -\frac{c1}{l - c1} \cdot \epsilon_{1s56} = -1.266 \times 10^{-4} & \psi_{1s56} &:= \frac{E_s \cdot \epsilon_{1s56}}{\sigma_{s2}} = 0.076 \\
\epsilon_{2s56} &:= \frac{l - c2}{H - c2} \cdot \epsilon_{2bt56} = 1.964 \times 10^{-4} & \epsilon_{2b56} &:= -\frac{c2}{l - c2} \cdot \epsilon_{2s56} = -1.354 \times 10^{-4} & \psi_{2s56} &:= \frac{E_s \cdot \epsilon_{2s56}}{\sigma_{s2}} = 0.085 \\
\epsilon_{3s56} &:= \frac{l - c3}{H - c3} \cdot \epsilon_{3bt56} = 2.175 \times 10^{-4} & \epsilon_{3b56} &:= -\frac{c3}{l - c3} \cdot \epsilon_{3s56} = -1.432 \times 10^{-4} & \psi_{3s56} &:= \frac{E_s \cdot \epsilon_{3s56}}{\sigma_{s2}} = 0.095 \\
\epsilon_{4s56} &:= \frac{l - c4}{H - c4} \cdot \epsilon_{4bt56} = 2.385 \times 10^{-4} & \epsilon_{4b56} &:= -\frac{c4}{l - c4} \cdot \epsilon_{4s56} = -1.493 \times 10^{-4} & \psi_{4s56} &:= \frac{E_s \cdot \epsilon_{4s56}}{\sigma_{s2}} = 0.104
\end{aligned}$$

$$M_{bs56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56}, \epsilon_{b56}, \psi_{s56}) := \left(\frac{c}{\epsilon_{b56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56})} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{b56}(c, \epsilon_{bt56}, \epsilon_{s56})}^{\epsilon_{bt56}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (l - c) \cdot \mu_s \cdot \psi_{s56}(\epsilon_{s56}, c, \epsilon_{bt56})$$

$$\begin{aligned}
M_{156} &:= \left(\frac{c1}{\epsilon_{1b56}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{1b56}}^{\epsilon_{1bt56}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (l - c1) \cdot \mu_s \cdot \psi_{1s56} = 1.099 \times 10^{-3} \\
M_{256} &:= \left(\frac{c2}{\epsilon_{2b56}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{2b56}}^{\epsilon_{2bt56}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (l - c2) \cdot \mu_s \cdot \psi_{2s56} = 1.139 \times 10^{-3} \\
M_{356} &:= \left(\frac{c3}{\epsilon_{3b56}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{3b56}}^{\epsilon_{3bt56}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (l - c3) \cdot \mu_s \cdot \psi_{3s56} = 1.161 \times 10^{-3} \\
M_{456} &:= \left(\frac{c4}{\epsilon_{4b56}} \right)^2 \cdot \int_{\epsilon_{4b56}}^{\epsilon_{4bt56}} \psi_b(\epsilon) \cdot \epsilon \, d\epsilon + (l - c4) \cdot \mu_s \cdot \psi_{4s56} = 1.157 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Текст подпрограммы: «Определение нагрузки, соответствующей моменту трещинообразования»:

$$g_{\text{min}} := 1$$

$$M(g) := \frac{g \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(l - \frac{l}{2} \right)}{2} - M_{456}$$

$$q := \text{root}(M(g), g)$$

$$q = 7.917 \times 10^{-5}$$

Текст подпрограммы: «Определение координат сечений ζ_i »:

Участок 0-4

$$\zeta := -1$$

$$M04(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - Mbs04(a, \varepsilon_{bt04}, \varepsilon_{s04}, \varepsilon_{b04}, \psi_{s04})$$

$$\zeta04 := \text{root}(M04(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta04 = 0.914$$

$$\frac{q \cdot \zeta04 \cdot (l - \zeta04)}{2} - Mbs04(a, \varepsilon_{bt04}, \varepsilon_{s04}, \varepsilon_{b04}, \psi_{s04}) = -4.842 \times 10^{-13}$$

Участок 4-5

$$M145(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M1_{45}$$

$$\zeta145 := \text{root}(M145(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta145 = 0.914$$

$$\frac{q \cdot \zeta145 \cdot (l - \zeta145)}{2} - M1_{45} = -4.844 \times 10^{-13}$$

$$M245(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M2_{45}$$

$$\zeta245 := \text{root}(M245(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta245 = 2.207$$

$$\frac{q \cdot \zeta245 \cdot (l - \zeta245)}{2} - M2_{45} = -1.609 \times 10^{-13}$$

$$M345(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M3_{45}$$

$$\zeta345 := \text{root}(M345(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta345 = 3.175$$

$$\frac{q \cdot \zeta345 \cdot (l - \zeta345)}{2} - M3_{45} = -1.466 \times 10^{-14}$$

$$M445(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M4_{45}$$

$$\zeta445 := \text{root}(M445(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta445 = 4.198$$

$$\frac{q \cdot \zeta445 \cdot (l - \zeta445)}{2} - M4_{45} = -1.773 \times 10^{-13}$$

Участок 5-6

$$M156(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M1_{56}$$

$$\zeta156 := \text{root}(M156(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta156 = 4.198$$

$$\frac{q \cdot \zeta156 \cdot (l - \zeta156)}{2} - M1_{56} = -1.773 \times 10^{-13}$$

$$M256(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M2_{56}$$

$$\zeta256 := \text{root}(M256(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta256 = 4.736$$

$$\frac{q \cdot \zeta256 \cdot (l - \zeta256)}{2} - M2_{56} = 0$$

$$M356(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M3_{56}$$

$$\zeta356 := \text{root}(M356(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta356 = 5.61$$

$$\frac{q \cdot \zeta356 \cdot (l - \zeta356)}{2} - M3_{56} = -6.15 \times 10^{-6}$$

$$M456(\zeta) := \frac{q \cdot \zeta \cdot (l - \zeta)}{2} - M4_{56}$$

$$\zeta456 := \text{root}(M456(\zeta), \zeta)$$

$$\zeta456 = 5.405$$

$$\frac{q \cdot \zeta456 \cdot (l - \zeta456)}{2} - M4_{56} = -4.499 \times 10^{-6}$$

Текст подпрограммы: «Вычисление относительной кривизны на участках 0-4, 4-5 и 5-6»:

$$\chi_{04} := -\frac{(\varepsilon_{b04}(a, \varepsilon_{bt04}, \varepsilon_{s04}))}{a} = 5.524 \times 10^{-5}$$

$$\chi_{45}^1 := -\frac{\varepsilon_{b45}^1}{6l} = 5.524 \times 10^{-5}$$

$$\chi_{56}^1 := -\frac{\varepsilon_{b56}^1}{cl} = 3.021 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{45}^2 := -\frac{\varepsilon_{b45}^2}{62} = 1.464 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{56}^2 := -\frac{\varepsilon_{b56}^2}{c2} = 3.318 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{45}^3 := -\frac{\varepsilon_{b45}^3}{63} = 2.267 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{56}^3 := -\frac{\varepsilon_{b56}^3}{c3} = 3.606 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{45}^4 := -\frac{\varepsilon_{b45}^4}{64} = 3.021 \times 10^{-4}$$

$$\chi_{56}^4 := -\frac{\varepsilon_{b56}^4}{c4} = 3.879 \times 10^{-4}$$

Текст подпрограммы: «Сплайн-аппроксимация функции кривизны»:

Участок 01

$$A1 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^1_{45} - 0}{\zeta_{145} - 0} + \frac{\chi^2_{45} - \chi^1_{45}}{\zeta_{245} - \zeta_{145}} \right) = 6.547 \times 10^{-5}$$

$$n0 := \frac{A0 - A1}{A0 \cdot (\zeta_{145} - 0) - (\chi^1_{45} - 0)} \cdot (\zeta_{145} - 0) = 1.083$$

$$a0 := \frac{\chi^1_{45} - 0 - A0 \cdot (\zeta_{145} - 0)}{(\zeta_{145} - 0)^{n0}} = 6.09 \times 10^{-5}$$

$$XXX01 := 0 + A0 \cdot (\zeta_{145} - 0) + a0 \cdot (\zeta_{145} - 0)^{n0} = 5.524 \times 10^{-5}$$

Участок 12

$$A2 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^2_{45} - \chi^1_{45}}{\zeta_{245} - \zeta_{145}} + \frac{\chi^3_{45} - \chi^2_{45}}{\zeta_{345} - \zeta_{245}} \right) = 7.672 \times 10^{-5}$$

$$n1 := \frac{A1 - A2}{A1 \cdot (\zeta_{245} - \zeta_{145}) - (\chi^2_{45} - \chi^1_{45})} \cdot (\zeta_{245} - \zeta_{145}) = 2.242$$

$$a1 := \frac{\chi^2_{45} - \chi^1_{45} - A1 \cdot (\zeta_{245} - \zeta_{145})}{(\zeta_{245} - \zeta_{145})^{n1}} = 3.649 \times 10^{-6}$$

$$XXX12 := \chi^1_{45} + A1 \cdot (\zeta_{245} - \zeta_{145}) + a1 \cdot (\zeta_{245} - \zeta_{145})^{n1} = 1.464 \times 10^{-4}$$

Участок 23

$$A3 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^3_{45} - \chi^2_{45}}{\zeta_{345} - \zeta_{245}} + \frac{\chi^4_{45} - \chi^3_{45}}{\zeta_{445} - \zeta_{345}} \right) = 7.833 \times 10^{-5}$$

$$n2 := \frac{A2 - A3}{A2 \cdot (\zeta_{345} - \zeta_{245}) - (\chi^3_{45} - \chi^2_{45})} \cdot (\zeta_{345} - \zeta_{245}) = 0.258$$

$$a2 := \frac{\chi^3_{45} - \chi^2_{45} - A2 \cdot (\zeta_{345} - \zeta_{245})}{(\zeta_{345} - \zeta_{245})^{n2}} = 6.087 \times 10^{-6}$$

$$XXX23 := \chi^2_{45} + A2 \cdot (\zeta_{345} - \zeta_{245}) + a2 \cdot (\zeta_{345} - \zeta_{245})^{n2} = 2.267 \times 10^{-4}$$

Участок 34

$$A4 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^4_{45} - \chi^3_{45}}{\zeta_{445} - \zeta_{345}} + \frac{\chi^2_{56} - \chi^4_{45}}{\zeta_{256} - \zeta_{445}} \right) = 6.444 \times 10^{-5}$$

$$n3 := \left| \frac{A3 - A4}{A3 \cdot (\zeta_{445} - \zeta_{345}) - (\chi^4_{45} - \chi^3_{45})} \cdot (\zeta_{445} - \zeta_{345}) \right| = 3$$

$$a3 := \frac{(\chi^4_{45} - \chi^3_{45}) - A3 \cdot (\zeta_{445} - \zeta_{345})}{(\zeta_{445} - \zeta_{345})^{n3}} = -4.426 \times 10^{-6}$$

$$XXX34 := \chi^3_{45} + A3 \cdot (\zeta_{445} - \zeta_{345}) + a3 \cdot (\zeta_{445} - \zeta_{345})^{n3} = 3.021 \times 10^{-4}$$

Участок 45

$$A5 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^2_{56} - \chi^4_{45}}{\zeta_{256} - \zeta_{445}} + \frac{\chi^3_{56} - \chi^2_{56}}{\zeta_{356} - \zeta_{256}} \right) = 4.411 \times 10^{-5}$$

$$n4 := \left| \frac{A4 - A5}{A4 \cdot (\zeta_{256} - \zeta_{445}) - (\chi^2_{56} - \chi^4_{45})} \cdot (\zeta_{256} - \zeta_{445}) \right| = 2.196$$

$$a4 := \frac{\chi^2_{56} - \chi^4_{45} - A4 \cdot (\zeta_{256} - \zeta_{445})}{(\zeta_{256} - \zeta_{445})^{n4}} = -1.944 \times 10^{-5}$$

$$XXX45 := \chi^4_{45} + A4 \cdot (\zeta_{256} - \zeta_{445}) + a4 \cdot (\zeta_{256} - \zeta_{445})^{n4} = 3.318 \times 10^{-4}$$

Участок 56

$$A6 := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\chi^3_{56} - \chi^2_{56}}{\zeta_{356} - \zeta_{256}} + \frac{\chi^4_{56} - \chi^3_{56}}{\zeta_{456} - \zeta_{356}} \right) = -5.02 \times 10^{-5}$$

$$n5 := \left| \frac{A5 - A6}{A5 \cdot (\zeta_{356} - \zeta_{256}) - (\chi^3_{56} - \chi^2_{56})} \cdot (\zeta_{356} - \zeta_{256}) \right| = 8.516$$

$$a5 := \frac{\chi^3_{56} - \chi^2_{56} - A5 \cdot (\zeta_{356} - \zeta_{256})}{(\zeta_{356} - \zeta_{256})^{n5}} = -3.048 \times 10^{-5}$$

$$XXX56 := \chi^2_{56} + A5 \cdot (\zeta_{356} - \zeta_{256}) + a5 \cdot (\zeta_{356} - \zeta_{256})^{n5} = 3.606 \times 10^{-4}$$

Участок 67

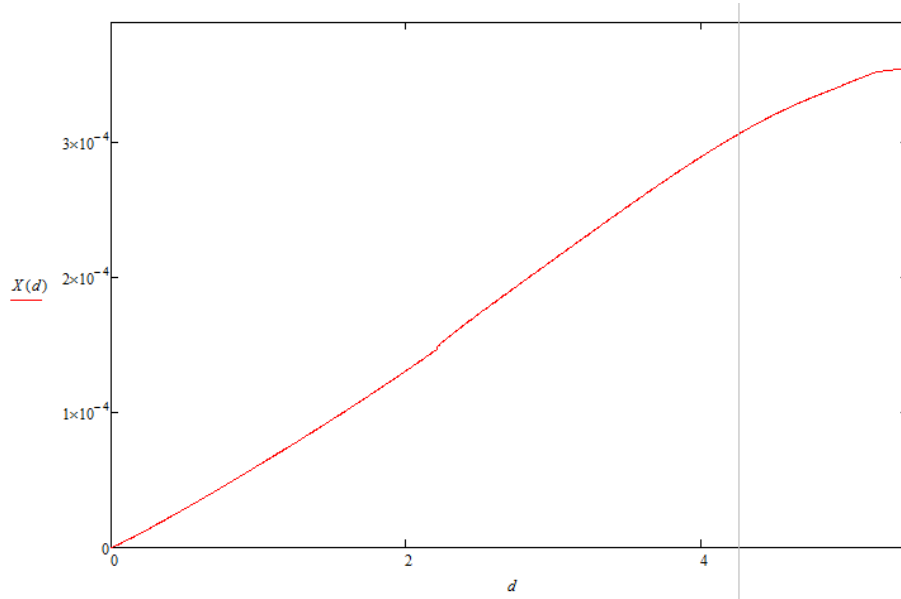
$$n6 := \left| \frac{A6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})}{\chi^3_{56} - \chi^4_{56} + A6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})} \right| = 0.603$$

$$A7 := -\frac{A6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})}{n6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})^{n6}} = 1.411 \times 10^{-5} + 4.201i \times 10^{-5}$$

$$a6 := \frac{\chi^4_{56} - \chi^3_{56} - A6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})}{(\zeta_{456} - \zeta_{356})^{n6}} = -1.411 \times 10^{-5} - 4.201i \times 10^{-5}$$

$$XXX56 := \chi^3_{56} + A6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356}) + a6 \cdot (\zeta_{456} - \zeta_{356})^{n6} = 3.879 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
X(d) := & \begin{cases} 0 & \text{if } d \geq 0 \\
0 + A0 \cdot (d - 0) + a0 \cdot (d - 0)^{n0} & \text{if } (\zeta 04) \geq d > 0 \\
\chi^1_{45} + A1 \cdot (d - \zeta 145) + a1 \cdot (d - \zeta 145)^{n1} & \text{if } (\zeta 245) \geq d > (\zeta 04) \\
\chi^2_{45} + A2 \cdot (d - \zeta 245) + a2 \cdot (d - \zeta 245)^{n2} & \text{if } (\zeta 345) \geq d > (\zeta 245) \\
\chi^3_{45} + A3 \cdot (d - \zeta 345) + a3 \cdot (d - \zeta 345)^{n3} & \text{if } (\zeta 445) \geq d > (\zeta 345) \\
\chi^4_{45} + A4 \cdot (d - \zeta 445) + a4 \cdot (d - \zeta 445)^{n4} & \text{if } (\zeta 256) \geq d > (\zeta 156) \\
\chi^2_{56} + A5 \cdot (d - \zeta 256) + a5 \cdot (d - \zeta 256)^{n5} & \text{if } (\zeta 356) \geq d > (\zeta 256) \\
\chi^3_{56} + A6 \cdot (d - \zeta 356) + a6 \cdot (d - \zeta 356)^{n6} & \text{if } (\zeta 456) \geq d > (\zeta 356) \\
\chi^4_{56} + A6 \cdot (d - \zeta 456) + a6 \cdot (d - \zeta 456)^{n6} & \text{if } (1 - \zeta 356) \geq d > (\zeta 456) \\
\chi^3_{56} + A5 \cdot [d - (1 - \zeta 356)] + a5 \cdot [d - (1 - \zeta 356)]^{n5} & \text{if } (1 - \zeta 256) \geq d > (1 - \zeta 356) \\
\chi^2_{56} + A4 \cdot [d - (1 - \zeta 256)] + a4 \cdot [d - (1 - \zeta 256)]^{n4} & \text{if } (1 - \zeta 156) \geq d > 1 - \zeta 256 \\
\chi^4_{45} + A3 \cdot [d - [1 - (\zeta 445)]] + a3 \cdot [d - [1 - (\zeta 445)]]^{n3} & \text{if } (1 - \zeta 345) \geq d > [1 - (\zeta 445)] \\
\chi^3_{45} + A2 \cdot [d - (1 - \zeta 345)] + a2 \cdot [d - (1 - \zeta 345)]^{n2} & \text{if } (1 - \zeta 245) \geq d > (1 - \zeta 345) \\
\chi^2_{45} + A1 \cdot [d - (1 - \zeta 245)] + a1 \cdot [d - (1 - \zeta 245)]^{n1} & \text{if } (1 - \zeta 145) \geq d > (1 - \zeta 245) \\
\chi^1_{45} + A0 \cdot [d - (1 - \zeta 145)] + a0 \cdot [d - (1 - \zeta 145)]^{n0} & \text{if } (1) \geq d > 1 - \zeta 145 \\
0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$



Текст подпрограммы: «Аппроксимация функции прогиба»:

$$F1 := 1$$

$$m(d) := \frac{l - (a)}{l} \cdot d$$

$$\Delta 1 := \int_0^{\zeta 04} \frac{l - \zeta 04}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \int_{(\zeta 04)}^{(l)} \frac{\zeta 04}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd$$

$$\Delta 1 = 9.12 \times 10^{-4}$$

$$\Delta 2 := \int_0^{(\zeta 245)} \frac{l - (\zeta 245)}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{(\zeta 245)}^{(l)} \frac{(\zeta 245)}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 2 = 2.111 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 4 := \int_0^{\zeta 445} \frac{l - \zeta 445}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{\zeta 445}^{(l)} \frac{\zeta 445}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 4 = 3.407 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 6 := \int_0^{((\zeta 356))} \frac{l - (\zeta 356)}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{((\zeta 356))}^{(l)} \frac{(\zeta 356)}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 6 = 3.645 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 3 := \int_0^{(\zeta 345)} \frac{l - (\zeta 345)}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{(\zeta 345)}^{(l)} \frac{\zeta 345}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 3 = 2.853 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 5 := \int_0^{(\zeta 256)} \frac{l - (\zeta 256)}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{(\zeta 256)}^{(l)} \frac{(\zeta 256)}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 5 = 3.576 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 7 := \int_0^{(\zeta 456)} \frac{l - (\zeta 456)}{l} \cdot d \cdot X(d) dd + \left[\int_{(\zeta 456)}^{(l)} \frac{(\zeta 456)}{l} \cdot (l - d) \cdot X(d) dd \right]$$

$$\Delta 7 = 3.653 \times 10^{-3}$$

$$\Delta(d) := \begin{cases} 0 & \text{if } d \geq 0 \\ 0 + \frac{\Delta 1 - 0}{\zeta 04 - 0} \cdot (d - 0) & \text{if } (\zeta 04) \geq d > 0 \end{cases}$$

$$\Delta 1 + \frac{\Delta 2 - \Delta 1}{(\zeta 245) - (\zeta 04)} \cdot [d - (\zeta 04)] \quad \text{if } (\zeta 245) \geq d > (\zeta 04)$$

$$\Delta 1 = 9.12 \times 10^{-4}$$

$$\Delta 2 + \frac{\Delta 3 - \Delta 2}{(\zeta 345) - (\zeta 245)} \cdot [d - (\zeta 245)] \quad \text{if } (\zeta 345) \geq d > (\zeta 245)$$

$$\Delta 2 = 2.111 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 3 + \frac{\Delta 4 - \Delta 3}{\zeta 445 - \zeta 345} \cdot [d - (\zeta 345)] \quad \text{if } (\zeta 445) \geq d > (\zeta 345)$$

$$\Delta 3 = 2.853 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 4 + \frac{\Delta 5 - \Delta 4}{\zeta 256 - \zeta 156} \cdot (d - \zeta 156) \quad \text{if } (\zeta 256) \geq d > (\zeta 156)$$

$$\Delta 4 = 3.407 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 5 + \frac{\Delta 6 - \Delta 5}{\zeta 356 - \zeta 256} \cdot (d - \zeta 256) \quad \text{if } (\zeta 356) \geq d > (\zeta 256)$$

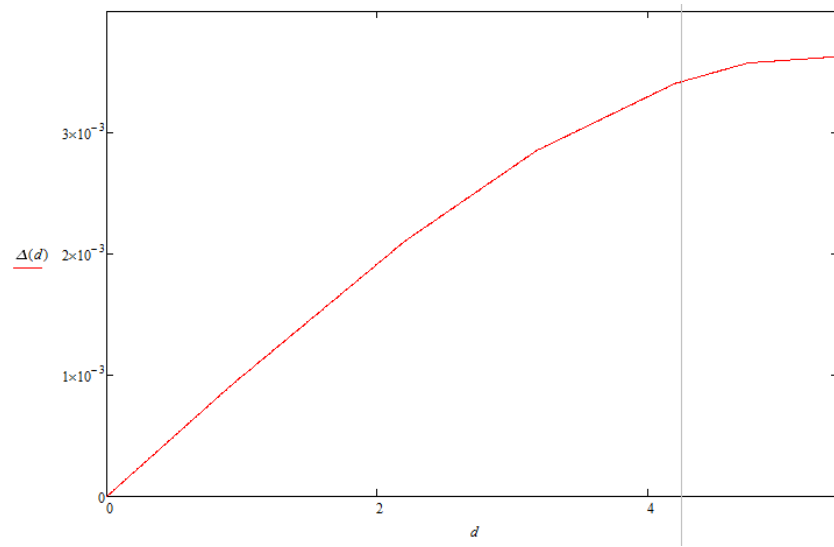
$$\Delta 5 = 3.576 \times 10^{-3}$$

$$\Delta 6 + \frac{\Delta 7 - \Delta 6}{\zeta 456 - \zeta 356} \cdot (d - \zeta 356) \quad \text{if } (\zeta 456) \geq d > (\zeta 356)$$

$$\Delta 6 = 3.645 \times 10^{-3}$$

$$0 \quad \text{otherwise}$$

$$\Delta 7 = 3.653 \times 10^{-3}$$



ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

**Программная реализация в Excel алгоритма численно-аналитического
метода определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного
стержня, замоноличенного в матрицу**

Фрагмент подпрограммы: «Исходные данные»:

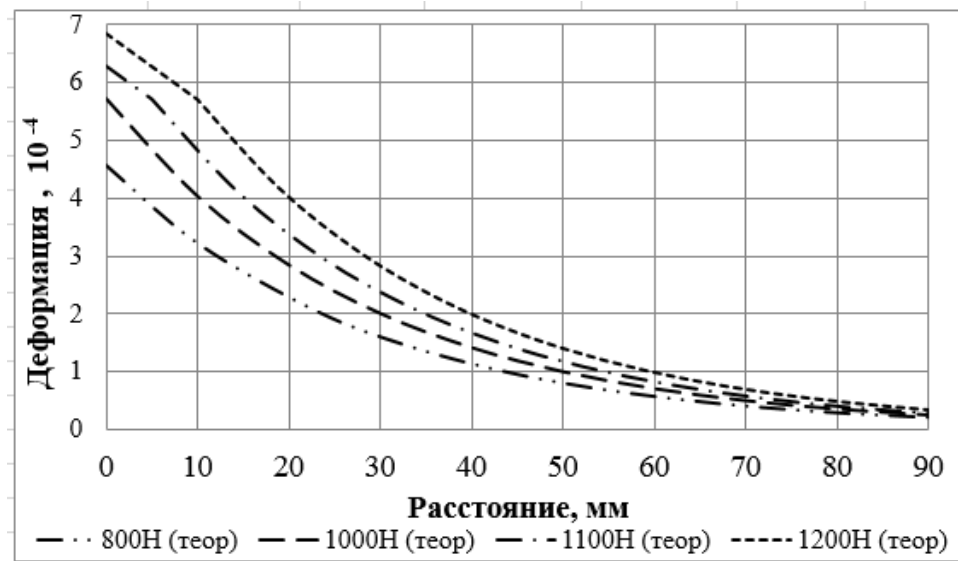
β , 1/м	35				
t, м	0,003139717			Rs, Мпа	500
a, м	0,007			Rb, Мпа	40
b, м	0,005			Rsh, Мпа	7
v	0,3				
A, м.кв.	0,000035				
Es, МПа	50000			q, МН/м	0,02
Em, МПа	3500				
Gm, МПа	1346,153846			Nmin, МН	0,001000

Фрагмент подпрограммы: «Определение деформаций в продольном направлении стержня (адгезия)»:

z, мм	0	10	23	33	43	52	62	72	82	92	102
Деформации $\times 10^{-4}$											
P, Н	0м	0,01м	0,02м	0,03м	0,04м	0,05м	0,06м	0,07м	0,08м	0,09м	0,1м
100	0,57143	0,40268	0,25548	0,18003	0,12687	0,0925861	0,06524	0,04598	0,0324	0,02283	0,01609
200	1,14286	0,80536	0,51096	0,36007	0,25373	0,1851723	0,13049	0,09195	0,0648	0,04566	0,03218
300	1,71429	1,20804	0,76644	0,5401	0,3806	0,2777584	0,19573	0,13793	0,0972	0,06849	0,04827
400	2,28571	1,61072	1,02192	0,72013	0,50747	0,3703446	0,26098	0,18391	0,1296	0,09133	0,06436
500	2,85714	2,01339	1,27739	0,90016	0,63434	0,4629307	0,32622	0,22988	0,162	0,11416	0,08045
600	3,42857	2,41607	1,53287	1,0802	0,7612	0,5555169	0,39147	0,27586	0,1944	0,13699	0,09653
700	4	2,81875	1,78835	1,26023	0,88807	0,648103	0,45671	0,32184	0,2268	0,15982	0,11262
800	4,57143	3,22143	2,04383	1,44026	1,01494	0,7406891	0,52195	0,36782	0,2592	0,18265	0,12871
900	5,14286	3,62411	2,29931	1,6203	1,1418	0,8332753	0,5872	0,41379	0,29159	0,20548	0,1448
1000	5,71429	4,02679	2,55479	1,80033	1,26867	0,9258614	0,65244	0,45977	0,32399	0,22831	0,16089
destr. 1000	5,71429	4,02679	2,55479	1,80033	1,26867	0,9258614	0,65244	0,45977	0,32399	0,22831	0,16089

Фрагмент программы: «Определение деформаций в продольном направлении стержня (с учетом нарушения адгезии)»:

1000	5,71429	5,71429	5,71429	4,02679	2,83763	1,99964	1,40913	0,99299	0,69975
z, мм	0	0	0	10	20	30	40	50	60
1100	6,28571	5,71429	5,71429	4,10585	2,95016	2,11976	1,52310	1,09438	0,78634
z, мм	0	5	5	14,44444	23,88888889	33,3333333	42,77778	52,22222	61,666667
1200	6,85714	5,71429	5,71429	4,18647	3,06714	2,24709	1,64629	1,20613	0,88365
z, мм	0	10	10	18,8889	27,77777778	36,6666667	45,55556	54,44444	63,333333
1750	10,00000	5,71429	5,71429	4,65901	3,79861	3,09711	2,52516	2,05883	1,67862
z, мм	0	37,5	37,5	43,33333	49,16666667	55	60,83333	66,66667	72,5
2000	11,42857	5,71429	5,71429	4,89108	4,18647	3,58337	3,06714	2,62529	2,24709
z, мм	0	50	50	54,44444	58,88888889	63,3333333	67,77778	72,22222	76,666667
2250	12,85714	5,71429	5,71429	5,13472	4,61393	4,14597	3,72546	3,34761	3,00808
z, мм	0	62,5	62,5	65,55556	68,61111111	71,6666667	74,72222	77,77778	80,833333



**Акты внедрения результатов
диссертационного исследования**



Общество с ограниченной ответственностью
«Девали»

ИНН 5405471039 КПП 540501001
Юр. адрес: Россия, 630008, г. Новосибирск,
ул. Лескова, д.-15, цоколь
Почт. адрес: Россия, 630009, г. Новосибирск,
ул. Добролюбова, д. 16, к 2, оф. 201
тел: +7 (913) 481 70 02 e-mail:
vroot@pg54.ru

Р/с: 4070 2810 8100 0040 0993
АО «Тинькофф Банк»
Корр/с: 30101810145250000974
БИК 044525974
ОКПО 23570154 ОКОГУ 4210014
ОКТМО 50701000 ОГРН 1135476041898

Исх. № 19/11 от 15.02.2019

«УТВЕРЖДАЮ»

На № от

Директор ООО «Девали»

 В.В. Рот

Акт о внедрении результатов

Методика «Определения зоны краевого эффекта при вытягивании арматурного стержня, замоноличенного в матрицу», предложенная Виктором Васильевичем Мальцевым, применяется при уточняющих расчетах элементов анкерных креплений специалистами нашей организации. Данная методика позволяет оценить эффективную длину стержня при возникновении проскальзывания в матрице связующего. Существенным плюсом данной методики является, то что она позволяет производить оценку длины зоны краевого эффекта с меньшей погрешностью по сравнению со стандартными методиками.

Директор ООО «Девали»



М.П.



Рот Виталий Викторович



Юр. адрес: 630099, г. Новосибирск,
ул. Депутатская, 48, оф. 713
Почтовый адрес: 630099, г. Новосибирск,
ул. Депутатская, 48, оф. 713
ИНН 5406724934 КПП 540601001
Р/сч 40702810910000363309
В «Тинькофф Банк» (АО)
К/сч 30101810145250000974
БИК 044525974 ОГРН 1125476151404
Тел./факс 8 913 906 82 98

Исх. № 13 от " 18 " февраля 2019г.

Акт о внедрении результатов

Предложенный Виктором Васильевичем Мальцевым «Оригинальный способ численного моделирования балки в окрестности трещины с помощью жестких контактов» позволяет производить расчет, как новых конструкций на стадии проектирования с заранее организованными трещинами, так и производить расчет существующих конструкций с помощью конечно-элементных программных комплексов специалистами нашей организации. Несомненным достоинством данной методики является то, что она не требует больших затрат машинного времени, а также то, что она сравнительно легка для освоения.

Директор



Блинский М.В.

Общество с ограниченной ответственностью « АРТ - Проект »



ИНН 5406356208 / КПП 540601001
Юридический адрес: 630005,
г. Новосибирск ул. Некрасова, 48
Тел. 8 (913) 065-47-88
e-mail: art-proektnsk@mail.ru
http:\\ www.art-proektnsk.ru

Р/с № 40702810944070003147
в Сибирском банке Сбербанка России,
г. Новосибирск
к/с № 301018105000000000641
БИК 045004641
ОГРН 1065406149170

Исх. №1 от 15 февраля 2019 г.

Акт о внедрении результатов

Предложенный Виктором Васильевичем Мальцевым алгоритм численно-аналитического метода определения прогибов железобетонных балок с применением нелинейной диаграммы деформирования бетона до момента образования трещин, позволяет производить расчет конструкций с учетом нелинейности физико-механических свойств бетона и арматуры.

Существенным достоинством данного метода является его универсальность за счет использования в расчете диаграмм деформирования, аппроксимированных различными способами, что позволяет использовать предложенный метод для определения прогибов железобетонных, металлических и композитных конструкций.

Одновременно с определением прогибов конструкций предложенный алгоритм позволяет оценить момент образования трещин в железобетонных конструкциях.

Предложенный алгоритм расчета позволяет получить значимый экономический эффект, в сравнении с традиционными методиками.

С уважением, директор
ООО « АРТ - Проект », канд. техн. наук

А.Н. Нарушевич





**ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
ПРОЕКТНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ КОМПАНИЯ «СИБКОНТРОРС»**

Юр. адрес: 630073, г. Новосибирск, ул. Блюхера, д. 59, кв. 41.
ИНН/КПП: 5404019782/540401001, ОГРН: 1155476100834, ОКПО: 54401577,
Р/с: 40702810903240001042, Ф-л Сибирский ПАО Банк «ФК Открытие»,
БИК: 45004867, К/с: 30101810250040000867, Тел.: 8-923-130-5972,
E-mail: gerberoni@gmail.com

№ 05-19 от 20 февраля 2019 г.

**АКТ
о внедрении результатов**

Предложенный Виктором Васильевичем Мальцевым «Способ численного моделирования балки в окрестности трещины с помощью жесткого контакта типа Bonded» позволяет эффективно моделировать в современных конечно-элементных программных комплексах железобетонные конструкции с «заранее организованными трещинами» на стадии проектирования, а также конструкции с трещинами, образовавшимися в процессе эксплуатации. Особенностью данного способа моделирования является то, что он позволяет производить уточняющие расчеты напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины без больших затрат машинного времени. Данный метод применяется специалистами нашей организации при выполнении уточняющих расчетов элементов конструкций.

Генеральный директор
ООО ПСК «СИБКОНТРОРС»



/ Гербер А.А.