

УТВЕРЖДАЮ

И.о. декана

Механико-математического ф-та

МГУ имени М.В. Ломоносова

профессор В.Н. Чубариков

21, 02, 2017г.



ОТЗЫВ

ведущей организации «Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»» на диссертацию Лазарева Нюргуна Петровича «Краевые задачи теории трещин с неизвестными границами для пластин модели Тимошенко», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02. – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Представленная на отзыв диссертация изложена на 295 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 184 наименований.

Актуальность работы определяется необходимостью в разработке методов анализа нелинейных краевых задач математической теории трещин. В отличие от классического подхода, использующего граничные условия в виде равенств, в диссертации рассматриваются односторонние ограничения в виде неравенств. Это обстоятельство приводит к постановке и изучению соответствующих вариационных задач. Анализ рассмотренных в диссертации задач затруднен также и негладкими свойствами границ – поскольку двумерные области содержат разрез, соответствующий трещине. Работа Лазарева Н.П. посвящена исследованию нового класса задач, описывающих упругое деформирование пластин с трещиной. Кроме

однородных пластин с трещиной, изучены также такие модели пластин Тимошенко, для которых трещины расположены вдоль жестких включений или упругих включений. Отметим, что во всех исследуемых задачах диссертации область контакта берегов трещины заранее неизвестна, а в случае наличия жестких включений краевые условия содержат также нелокальные характеристики решения.

Краткий обзор содержания работы. Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована ее основная цель и конкретные задачи исследования, представлены краткий исторический обзор и положения, вносимые на защиту.

В первой главе, с целью облегчения восприятия основной части, приведены известные сведения из функционального анализа, вариационного анализа, теории пространств Соболева, дифференциальных уравнений в частных производных. Даны основные положения теории упругих пластин моделей Тимошенко и Кирхгофа-Лява.

Вторая глава посвящена анализу математической корректности краевых задач, описывающих равновесие пластин и оболочек. Рассмотрены математические модели для неоднородных пластин, содержащих упругие и жесткие включения с возможным отслоением. Для ряда моделей доказаны результаты о существовании и единственности решений, локальной регулярности вблизи разреза; в условиях достаточной регулярности решений найдены дифференциальные постановки, эквивалентные исходным вариационным формулировкам задач. Изучен предельный переход при стремлении коэффициентов жесткости к бесконечности. А именно, установлено, что задача о контакте пластины с жестким препятствием является предельной для семейства задач, описывающих равновесие неоднородных упругих пластин с трещиной.

В третьей главе исследована зависимость решений вариационных задач и соответствующих функционалов энергии от вариации формы области.

В первом параграфе рассматривается задача о равновесии упругой пластины, содержащей трещину. Для этой задачи выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области. Во втором параграфе, для двух частных случаев гладкого возмущения, доказана возможность представления производной функционала энергии по параметру возмущения области в виде инвариантного интеграла, не зависящего от пути интегрирования. В третьем параграфе выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области для задачи о равновесии композитной пластины с трещиной, расположенной вдоль границы объемного жесткого включения.

Четвертая глава диссертации посвящена задачам оптимального управления. В первых двух параграфах в качестве функции управления выбирается параметр толщины жесткого включения. При этом в роли целевого функционала для задачи первого параграфа выступает производная функционала энергии по длине трещины, а во втором – норма разности в пространстве Соболева, характеризующая отклонение поля перемещений от заданного вектора. Установлена разрешимость соответствующих задач оптимального управления. В ходе доказательства разрешимости разработан новый метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных задач о равновесии упругих тел с жесткими включениями по параметру, характеризующему размер включения. Отметим, что метод основан на построении подходящих пробных функций с помощью вспомогательных вариационных задач. Метод может быть применен и в других задачах, касающихся анализа влияния вариации формы жестких включений.

Теоретическая значимость работы состоит в обосновании корректности новых нелинейных математических моделей о равновесии пластин, в получении качественных свойств моделей, в разработке метода доказательства разрешимости задач оптимального управления формой жестких включений в упругих телах. Метод, разработанный соискателем, может быть применен и в других задачах вариационного исчисления, для

которых множество допустимых функций содержит требование на определенную линейную структуру решения на некотором множестве.

Практическая значимость и рекомендации по использованию результатов и выводов, приведенных в диссертации

Полученные автором выводы и результаты могут быть взяты за основу при разработке численных экспериментов, касающихся деформирования пластин из упругого материала. В частности, найденные формулы для производных функционала энергии по длине трещины, могут быть применены с целью разработки инженерного прогноза о возможности развития трещины.

Научная новизна работы обусловлена наличием односторонних граничных условий. Условия задаются на кривой, соответствующей трещине, и описывают взаимное непроникание берегов трещины. В рамках краевых задач с неизвестными границами при наличии трещин, другими авторами ранее были изучены модели двумерных и трехмерных тел, а также пластин Кирхгофа-Лява. В настоящей работе за основу берется модель пластины Тимошенко. Отметим, что модели Кирхгофа-Лява и Тимошенко упругих пластин существенно отличаются друг от друга. В частности, одно из базовых отличий состоит в том, что для модели Тимошенко деформированное состояние пластины определяется еще и функциями, описывающими углы поворота нормальных сечений. Для указанной модели изучен широкий класс новых нелинейных краевых задач. Доказана однозначная разрешимость задач, исследованы качественные свойства решений, установлены свойства решений и функционалов энергии в зависимости от изменения геометрической формы области, доказана разрешимость задач оптимального управления. Разработан метод доказательства непрерывной зависимости решений задач о равновесии упругих тел от вариации размера отслоившихся жестких включений.

Достоверность и обоснованность основных результатов работы.

Обоснованность научных положений и выводов, содержащихся в диссертации, гарантируется использованием точных математических формул, применением методов дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления, функционального анализа.

Общая оценка работы. Диссертация Н.П. Лазаревак «Краевые задачи теории трещин с неизвестными границами для пластин модели Тимошенко» является завершенной научно-исследовательской работой, содержащей глубокие результаты. Диссертационная работа представляет собой заметный вклад в области краевых задач с неизвестными границами. Автореферат диссертации правильно отражает ее суть.

Вместе с тем диссертация не лишена недостатков.

1. К сожалению, все рассматриваемые на сегодня модели – являются моделями развитой трещины, т.е. нет моделей, описывающих зарождение трещины и дающих хотя какую либо гипотезу механизма их зарождения. В известной работе Баренблата выдвинута гипотеза, что в рождении трещин есть аналогия с ламинарно-турбулентным переходом. Более того, что этот процесс есть неравновесный фазовый переход. Из эксперимента следует, что развитие трещины существенно зависит от природы и характера ее зарождения. Поэтому, полученные в диссертации результаты достаточно остроожно нужно применять при анализе реального эксперимента.
2. В параграфах 2.1, 2.2 автор не указывает минимальную гладкость замкнутых кривых, по отношению к которым применяются соответствующие формулы Грина.
3. Какова гладкость замкнутых кривых, относительно которых найдены инвариантные интегралы см. формулы (3.2.37), (3.2.42)?
4. Предположение о том, что обратное преобразование принадлежит классу $[0, \varepsilon); W_{loc}^{1,\infty}(R^2)$, $i = 1, 2$, является излишним, это следует из свойств прямого $\Phi_{\varepsilon i}^{-1} \in C^1$ преобразования.

5. Требование дифференцируемости для функции $l = l(x)$ в постановке задачи (2.7.6), описывающей расстояние между соответствующими точками срединной поверхности противоположных берегов является излишним.

Имеется ряд незначительных опечаток.

Указанные замечания не отражаются на общей положительной оценке диссертации. Принимая во внимание актуальность темы, научную новизну и практическую значимость полученных результатов, считаем, что работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013г., а ее автор – Лазарев Нюргун Петрович – заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук, профессором Радкевичем Евгением Владимировичем. Отзыв одобрен и утвержден на заседании кафедры дифференциальных уравнений, протокол № 260_ от _17.02.2017_.

Доктор физико-математических наук,
специальность 01.01.02 –дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление;
профессор кафедры дифференциальных уравнений
Механико-математического факультета
Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова

E.B. Radkevich

17 февраля 2017 г.

Подпись профессора Радкевича Евгения Владимировича удостоверяю:
Специалист по кадрам
Механико-математического факультета

Телефон: +7(495)9391631 (раб.)

E-mail: evrad07@gmail.com,
Веб. сайт ММФ МГУ:<http://www.math.msu.su/>

Почтовый адрес: 119991, г. Москва,
Ленинские горы 1, Главное здание МГУ,
Механико-математический факультет