ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА АЛЕКСЕЕВА Г.В.

на диссертацию

Лазарева Нюргуна Петровича

«Краевые задачи теории трещин с неизвестными границами для пластин модели Тимошенко»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертационное исследование Лазарева Н.П. относится к теории краевых задач с односторонними граничными условиями в приложении к задачам математической теории трещин. Развитию классической теории трещин посвящены работы большого количества авторов, среди которых И.И. Аргатов, В.И. Астафьев, Н.В. Баничук, Г.И. Баренблатт, Р.В. Гольдштейн, А.Н. Гузь, Р. Дудучава, В.М. Ентов, В.В. Зозуля, Л.М. Качанов, В.А. Козлов, В.А. Кондратьев, В.М. Корнев, А.С. Кравчук, М. Леонов, В.Г. Мазья, А.Б. Мовчан, Е.М. Морозов, Н.Ф. Морозов, С.А. Назаров, В.В. Новожилов, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Ю.В. Петров, Б.А. Пламеневский, Ю.Н. Работнов, Л.И. Слепян, Л.М. Трушкиновский, Г.П. Черепанов, G.A. Francfort, P. Grisvard, J.-J. Marigo, J. Sokolowski, J.R. Rice и другие. В соответствии с классическим подходом, краевые условия на берегах трещины задаются в виде равенств для функции перемещений или же для функций, описывающих поверхностные нагрузки. В работах указанных авторов был исследован широкий спектр задач, представляющих интерес как с точки зрения математики, так и с позиций прикладной механики. Отметим, что в случае линейных задач теории трещин формулировка исследуемых моделей в областях с разрезами приводит к трудностям, обусловленным, главным образом, отсутствием гладкости границы области. Последнее приводит к тому, что решения задач теории трещин содержат так называемые сингулярные составляющие в отличие от решений этих же задач, рассматриваемых в гладких областях.

С механической точки зрения, использование линейных краевых условий в виде равенств может приводить к физически некорректным постановкам. А именно, нередко получается так, что линейная модель допускает такие перемещения, которые физически соответствуют проникновению точек берегов трещины друг в друга. Поэтому применение таких краевых условий пригодно не для любых условий нагружения.

С 1990-х годов начали активно разрабатываться задачи теории трещин на основе краевых задач с односторонними граничными условиями. Значительный вклад в данном направлении внесли А.М. Хлуднев, В.А. Ковтуненко, С.Е. Пастухова, Е.М. Рудой, В.В. Щербаков, J. Sokolowski, G. Leugering, A.-M. Saendig, D. Knees, K. Ohtsuka, H. Itou и другие. Развитые ими подходы используют слабые формулировки рассматриваемых задач и приводят к нелинейным краевым проблемам с неизвестными границами. В указанных задачах область контакта берегов трещины заранее неизвестна, поскольку краевые условия на берегах трещины имеют вид системы равенств и неравенств, а в случае наличия в упругих телах жестких включений краевые условия содержат также нелокальные характеристики решения. Перечисленными выше авторами были получены, в частности, следующие результаты: установлена дифференцируемость функционалов энергии по параметру возмущения формы трещины, разработаны метод фиктивных областей и метод гладких областей, предложены смешанные формулировки проблем, исследованы асимптотические свойства решений, выполнен анализ большого класса задач оптимального управления и т.д. В последние годы (2010–2016) получено большое число результатов, относящихся к анализу равновесия упругих тел и конструкций, содержащих тонкие упругие и жесткие включения при наличии отслоений, см. работы А.М. Хлуднева, Е.М. Рудого, G. Leugering, H. Itou, M. Negri, A. Gaudiello.

В отличие от предыдущих работ, соискателем исследован новый класс задач о равновесии пластин и оболочек на основе модели Тимошенко, учитывающей не только перемещения (как для модели Кирхгофа-Лява), но и углы поворота нормальных сечений. Эта модель позволяет более точно учитывать влияние поперечных сил при деформировании пластины. Указанное качественное преимущество по сравнению с моделью Кирхгофа-Лява в описании механических процессов, как следствие, приводит к появлению дополнительных неизвестных функций, а также к другому виду соотношений на берегах трещины, связывающих усилия, моменты и поперечные силы. Кроме того, в условии непроникания, имеющем вид неравенства, содержатся функции перемещений и углов поворота. Таким образом, в работе соискателя исследован класс новых сложных в математическом плане краевых задач с односторонними ограничениями, представляющих несомненный интерес также и с точки зрения механики.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы основополагающие идеи, цель работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, представлены краткий исторический обзор и положения, вносимые на защиту. *Первая глава* имеет вспомогательный характер, в ней приводятся сведения из функционального анализа, теории пространств Соболева, вариационного исчисления. Также в ней выписаны основные соотношения и положения для известных математических моделей упругих пластин моделей Кирхгофа-Лява и Тимошенко. *Во второй главе* изучаются вопросы математической корректности нелинейных краевых задач, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин и оболочек с трещинами. Получены результаты о локальной дополнительной гладкости решений вплоть до концевых точек разреза. Доказана эквивалентность исходных вариационных задач, соответствующим дифференциальным формулировкам. Исследованы предельные переходы для коэффициентов упругости, в частности установлено, что задача о контакте пластины с жестким препятствием (задача типа Синьорини), является предельной для семейства задач, описывающих равновесие неоднородных упругих пластин с трещиной. *В третьей главе* исследована асимптотика функционала энергии для пластин с трещиной при малом возмущении геометрии пластины в срединной плоскости. Для случаев, когда гладкое возмущение описывает сдвиг всего разреза или квазистатический рост трещины, доказана возможность представления производной функционала энергии в виде инвариантного интеграла, не зависящего от замкнутого контура интегрирования. *В четвертой главе* проведено исследование задач оптимального управления геометрическими параметрами задачи. При этом, параметры, характеризующие форму трещины и размер жесткого включения, выступают в виде функций управления. Установлено существование решений соответствующих задач с различными функционалами качества.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказана однозначная разрешимость для нелинейных краевых задач с условиями типа неравенств на внутренней границе. Из вариационных постановок задач получены системы дифференциальных уравнений и граничных условий, определяющие эквивалентные дифференциальные фор-

мулировки. Установлены свойства дополнительной регулярности решений по сравнению с гладкостью, гарантируемой множеством допустимых функций. Обоснован метод фиктивных областей для рассматриваемой модели пластины.

2. Выведены формулы для производных функционала энергии по параметру произвольного гладкого возмущения области в задаче о равновесии однородной пластины с трещиной и пластины с трещиной вдоль жесткого включения. Найдены оценки, характеризующие непрерывную зависимость решений от изменения области.

3. Получены достаточные условия для задачи о равновесии однородной пластины с трещиной, при выполнении которых производная функционала энергии по параметру возмущения области представляется в виде инвариантного интеграла.

4. В задаче о равновесии пластины с трещиной установлена слабая сходимость решений при стремлению к нулю параметра, описывающего возмущение прямолинейной трещины. Доказано существование решения задачи оптимального управления геометрической формой трещины.

5. Разработан метод предельного перехода по геометрическому параметру в семействе вариационных задач, описывающих равновесие упругих тел с жесткими включениями разного размера. Метод основан на вариационных свойствах задачи, а именно, на применении вспомогательных задач, решения которых доставляют подходящие пробные функции, которые затем подставляются при осуществлении предельного перехода. Метод позволил установить, что решения задач о пластине с объемным жестким включением сходятся к решению задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением, а также доказать существование решения задачи оптимального управления размером жесткого включения в упругих пластинах с разными функционалами качества.

Таким образом, продолжая развивать направление в исследовании задач теории упругости в негладких областях, заложенное А.М. Хлудневым и рядом других упомянутых выше исследователей, соискатель разработал для широкого класса задач о равновесии пластин в рамках модели Тимошенко с трещинами оригинальный подход для случая нелинейных краевых условий. Необходимо выделить среди результатов соискателя разработанный им метод обоснования предельного перехода по геометрическому параметру размера жесткого включения в семействе вариационных задач о равновесии упругих тел (включая пластины) с жестким отслоившимся включением. Метод позволил установить качественную связь между краевыми задачами для тел, содержащих жесткие объемные включения (размерность объемного включения совпадает с размерностью тела), и задачами для тел с тонкими жесткими включениями (размерность тонкого включения на единицу меньше размерности тела). Это факт, по-существу, доказывает возможность приближенного моделирования трехмерных включений малой толщины в реальных телах с помощью двумерных поверхностей или одномерных кривых (в случае пластин). Метод позволяет решать широкий круг задач оптимального управления размером жестких включений, содержащихся в упругих телах.

Подчеркну, что диссертационная работа хорошо структурирована и является цельным и завершенным исследованием. Так, например, первая вспомогательная глава, содержащая уже известные результаты, помогает воспринимать основную часть диссертации без необходимости поиска сведений из научной литературы. Последовательность и строгий математический стиль в изложении материала, а также компоновка глав способствуют ясному пониманию результатов диссертационной работы.

Вышеприведенный анализ говорит о том, что соискатель в своей диссертации развил математический аппарат для исследования нелинейных задач модели Тимошенко с неизвестными границами, заложенный в трудах его научного консультанта А.М. Хлуднева и ряда других отечественных и зарубежных исследователей. Исходя из этого, считаю, что совокупность результатов диссертационного исследования может быть классифицирована как крупное научное достижение.

Достоверность результатов диссертации Н.П. Лазарева обеспечивается ясностью математических постановок задач, строгостью теоретических доказательств всех представленных в работе результатов, согласованностью с известными результатами других авторов.

Материал диссертации изложен в 22 опубликованных научных статьях, из них 16 опубликованы в российских журналах «Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук», утвержденного ВАК РФ, а другие 6 статей - в рецензируемых зарубежных изданиях, индексируемых в научных базах Web of Science и Scopus. На все статьи, опубликованные в соавторстве, а также на использованные результаты других авторов в диссертации Лазарева Н.П. даны корректные ссылки.

Содержание диссертации соответствует пп. 3, 11, 12 перечня областей исследования, указанного в паспорте специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Вместе с тем диссертация не лишена недостатков. Приведу ряд замечаний:

1. В параграфе 2.1 на стр. 65 автор, видимо, подразумевает, что окрестность $\mathcal{O}(x^0)$ лежит в области Ω, вместе с тем не оговаривает это условие. Однако, данное условие обязательно при доказательстве теоремы 2.1.3.

2. При постановке задачи о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину используется функция $l = l(x)$, описывающая величину выступа одного берега трещину над другим, этой же буквой обозначены индексы при суммировании (см., например, формулу (2.7.9)), что создает путаницу при чтении.

3. Выбор пространства $C_0^1(\Gamma_c)$ для указанной в замечании 2 настоящего отзыва функции $l = l(x)$ не обоснован с математической точки зрения. Было бы достаточно, например, взять класс непрерывных функций, обращающихся в нуль на концах кривой Γ_c.

4. В параграфе 2.5 при постановке задачи о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной на стр.115 не оговорено, что поверхность Σ, описывающая наклонную трещину, должна лежать строго внутри множества $\Omega \times [-h, h]$. В противном случае, выписать условие (2.5.4) не представляется возможным.

5. Автор при доказательстве эквивалентности вариационных и соответствующих дифференциальных постановок предполагает достаточную регулярность решения, при этом не оговаривает какой именно должна быть достаточная гладкость решения вариационного неравенства, (см., например, параграфы 2.2 – 2.5, стр. 75, 89, 106, 119). Справедливости ради отметим, что достаточное условие на регулярность решения, а именно, его принадлежность классу $H^2(\Omega_c)$ записано в первом параграфе (см. стр. 56).

6. На стр. 152 написано «Для того чтобы показать разрешимость задачи (2.7.6), установим свойства функционала энергии $\Pi(\eta)$ и множества K».

В то же время далее речь идет о свойствах функционала энергии $\Pi(\eta)$, а свойства множества K были указаны до отмеченной фразы на той же стр. 152.

Отмеченные выше недостатки не влияют на безусловную положительную оценку диссертационной работы. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертация Лазарева Нюргуна Петровича «Краевые задачи теории трещин с неизвестными границами для пластин модели Тимошенко» соответствует всем критериям, установленным для диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в пп. 9–11, 13, 14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации No 842 от 24 сентября 2013г. с учетом изменений, внесенных постановлением Правительства Российской Федерации «О внесении изменений в Положение о присуждении ученых степеней» от 21.04.2016 г. No 335, и соискатель Лазарев Нюргун Петрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент **Алексеев Геннадий Валентинович**, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление; профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, научно-исследовательская группа вычислительной аэрогидродинамики, главный научный сотрудник; адрес: 690041 Владивосток, ул. Радио, 7. Тел.:+7(423)2313330, Эл. почта: alekseev@iam.dvo.ru

20.02.2017

Подпись Алексеева Г.В. заверяю:

Ученый секретарь ИПМ ДВО РАН

к.ф.-м.н. / [illegible] В.А./