ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА"

На правах рукописи

Лазарев Нюргун Петрович

Краевые задачи теории трещин с неизвестными границами для пластин модели Тимошенко

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физ.-матем. наук., профессор
Хлуднев Александр Михайлович

Якутск — 2016

Оглавление

Введение **6**

1 Обозначения и предварительные сведения **26**

1.1 Функциональные пространства 26

1.2 Область с разрезом 30

1.3 Неравенства Корна и Пуанкаре-Фридрихса 34

1.4 Минимизация выпуклых функционалов 36

1.5 Математическая модель упругой пластины с трещиной 39

1.5.1 Обобщенные формулы Грина 43

1.5.2 О краевых условиях для пластины с трещиной 47

2 Краевые задачи теории трещин с граничными условиями типа неравенств **50**

2.1 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину 50

2.1.1 Постановка задачи 51

2.1.2 Существование и единственность решения 53

2.1.3 Краевые условия на кривой Γ_c 56

2.1.4 Гладкость решения в случае нулевого раскрытия трещины 63

2.1.5 Дополнительная гладкость решения 65

2.2 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига 69

2.2.1 Постановка задачи 70
2.2.2 Эквивалентная дифференциальная постановка 75
2.3 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе жесткого включения 82
2.3.1 Постановка задачи 83
2.3.2 Дифференциальная постановка задачи 88
2.3.3 Предельный переход по параметру жесткости 92
2.4 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения 95
2.4.1 Объемное жесткое включение без отслоения 96
2.4.2 Тонкое жесткое включение без отслоения. 99
2.4.3 Тонкое жесткое включение с отслоением 103
2.5 Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной 114
2.5.1 Постановка задачи 115
2.5.2 Формулировка в виде краевой задачи 118
2.5.3 Задачи о равновесии балки с наклонным разрезом . . . 123
2.6 Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием 130
2.6.1 Постановка задачи 131
2.6.2 Вспомогательные задачи в области с разрезом 134
2.6.3 Предельный переход 137
2.6.4 Эквивалентная краевая задача 139
2.7 Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину 147
2.7.1 Постановка задачи 148
2.7.2 Однозначная разрешимость задачи 152
2.7.3 Краевые условия на кривой Γ_c 155
2.7.4 Гладкость решения в случае нулевого раскрытия трещины 163

3 Метод регулярных возмущений в нелинейных задачах о равновесии пластины Тимошенко 166

3.1 Асимптотика функционала энергии пластины Тимошенко, содержащей криволинейную трещину 166

3.1.1 Постановка задачи 167

3.1.2 Вспомогательные утверждения и формулы 172

3.1.3 Вывод формулы для производной функционала энергии 179

3.2 Инвариантные интегралы в задаче о равновесии пластины Тимошенко с условиями типа Синьорини на трещине 181

3.2.1 Задача равновесия 182

3.2.2 Вспомогательные утверждения и формулы 188

3.2.3 Вывод формулы для производной функционала энергии 192

3.2.4 Инвариантные интегралы 194

3.3 Производная функционала энергии для пластины с трещиной вдоль жесткого включения 201

3.3.1 Постановка задачи 202

3.3.2 Вспомогательные утверждения и формулы 208

3.3.3 Вывод формулы для производной функционала энергии 220

3.3.4 Производная функционала энергии по длине трещины 223

4 Задачи оптимального управления 225

4.1 Оптимальное управление размером включения в задаче о равновесии пластины Тимошенко с трещиной вдоль жесткого включения 225

4.1.1 Постановка семейства вариационных задач о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе жесткого включения 227

4.1.2 Задача оптимального управления 231

4.2 Оптимальный размер жесткого включения в задаче о контакте пластины с жестким препятствием 243

4.2.1 Контактные задачи для пластин с жесткими включениями 245
4.2.2 Задача оптимального управления 249
4.3 Существование экстремальной формы трещины с условием непроникания в задаче о равновесии пластины Тимошенко 259
4.3.1 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину 260
4.3.2 Анализ зависимости решений от возмущения формы кривой, описывающей трещину 263
4.3.3 Оптимальная форма трещины 269

Заключение: основные результаты диссертации **273**

Литература **274**

Введение

Актуальность темы диссертации. Как известно, развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных неразрывно связано с успехами в моделировании физических задач. Современные математические методы вариационного исчисления, функционального анализа позволяют изучать обобщенные постановки краевых задач. В частности, многие задачи механики допускают постановку в виде минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций. В последние десятилетия в работах А.М. Хлуднева, В.А. Ковтуненко, С.Е. Пастуховой, Е.М. Рудого, Т.С. Поповой, Е.В. Вторушина, Н.В. Неустроевой, Т.А. Ротановой, В.В. Щербакова, D. Knees, D. Hoemberg, H. Itou, K. Ohtsuka, A. Tani, M. Negri, G. Leugering, M. Bach, A.-M. Saendig, J. Sokolowski, A. Mielke, M. Specovius-Neugebauer, K.-H. Hoffmann, N.D. Botkin и др. с помощью вариационного подхода изучен широкий круг нелинейных краевых задач теории трещин с граничными условиями в виде неравенств. Эти условия задаются на кривой или поверхности, соответствующей трещине, и описывают взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Отметим, что классический подход к задачам теории трещин предполагает использование линейных условий в виде равенств. Этот подход в ряде задач о деформировании тел с трещинами допускает противоречивое с физической точки зрения проникновение противоположных берегов разреза друг в друга. Поэтому, применение условий непроникания в виде неравенств при постановке соответствующей краевой задачи гарантирует более точное описание механического взаимодействия берегов трещины. Вместе с тем точность описания процессов вблизи трещин, как следствие, влечет усложнение математической модели, обусловленное нелинейностью краевых условий. Трудности в изучении задач о равновесии тел, содержащих трещины, вызваны также нерегулярностью границы области, в которой ищется решение. По сравнению с решениями задач, определенных в гладких областях, решения задач теории трещин содержат так называемые сингулярные составляющие. Теория и методы решения линейных краевых задач в областях с негладкими границами (с линейными краевыми условиями на границах) разрабатывались в работах С.А. Назарова, В.А. Кондратьева, В.Г. Мазьи, В.А. Козлова, И.И. Аргатова, Р.В. Гольдштейна, А.Н. Гузя, Р. Дудучавы, В.М. Ентова, Ю.Г. Матвиенко, А.Б. Мовчана, Е.М. Морозова, Н.Ф. Морозова, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Б.А. Пламеневского, Ю.Н. Работнова, М.П. Саврука, Л.И. Слепяна, А.С. Слуцкого, Е.И. Шифрина, Г.П. Черепанова, H.D. Bui, M. Costabel, G. DalMaso, L.B. Freund, G.A. Francfort, P.Grisvard, D. Knees, J.-J.Marigo, M. Negri, M. Dauge, K. Ohtsuka, J.R. Rice и др. Математическое моделирование и исследование задач о деформировании неоднородных тел, содержащих трещины вдоль включений, предполагает задание условий сопряжения на границе стыка разных материалов, кроме того, в случае жестких включений, задается определенная структура вектора перемещений. Описанные трудности в изучении краевых задач математической теории трещин с краевыми условиями типа неравенств обуславливают необходимость применения современного математического аппарата и разработки новых подходов и методов исследования. Уместно отметить, что имеется целый ряд нерешенных математических задач, связанных с прикладными задачами теории трещин.

К настоящему времени, начиная с 1995г., получен целый ряд важных результатов для задач о равновесии пластин модели Кирхгофа–Лява с условиями в виде неравенств. Как известно, в отличие от модели Кирхгофа–Лява, модель пластины Тимошенко позволяет учитывать поперечные сдвиги. При этом в модели Тимошенко деформирование описывается с помощью пяти скалярных функций — перемещений точек срединной плоскости и углов поворота нормальных волокон (в модели Кирхгофа–Лява деформирование описывается тремя скалярными функциями — перемещениями). Применение моделей, учитывающих поперечный сдвиг, во многих случаях позволяет наиболее точно описать реальные процессы в задачах о деформировании пластин. В связи с этим, научный интерес представляет исследование задач о равновесии пластин модели Тимошенко с неизвестной областью контакта. В диссертационной работе изучен новый класс задач для пластин модели Тимошенко с граничными условиями типа неравенств, разработан метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных неравенств, соответствующих задачам о равновесии упругих тел с жесткими включениями.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы функционального анализа, вариационного исчисления, оптимального управления, теории пространств Соболева, а также методы, разработанные автором.

Теоретическая и практическая ценность. Методы и результаты диссертации представляют интерес для специалистов, работающих в области дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, оптимального управления, численного решения задач оптимизации форм.

Полученные результаты могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами, сравнением с другими результатами, известными автору в литературе по математическим и прикладным наукам.

Целью диссертационной работы является строгое математическое обоснование и анализ неклассических краевых задач для уравнений с частными производными, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин Тимошенко с трещинами и использующих нелинейные граничные условия типа Синьорини.

На защиту выносятся:

- Доказательство однозначной разрешимости для нелинейных краевых задач с условиями типа неравенств на внутренней границе, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин с трещиной, в том числе, пластин с трещиной вдоль жесткого или упругого включения. Для задач, сформулированных в области с негладкой границей, установлены свойства дополнительной регулярности решения;

- Доказательство существования и вывод формул производных для функционалов энергии по параметру возмущения формы негладкой области в нелинейных краевых задачах о равновесии однородной пластины с трещиной и упругой пластины с трещиной вдоль жесткого объемного включения;

- Вывод достаточных условий, при которых производная функционала энергии по параметру возмущения области может быть представлена в виде инвариантного интеграла;

- Доказательство разрешимости задач оптимального управления, в которых функции управления задаются формой трещины или размером жесткого включения;

- Метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных задач о равновесии упругих тел с жесткими включениями по параметру, характеризующему размер включения.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Результаты параграфа 3.1 главы 3 получены совместно с Е.М. Рудым, результаты параграфа 4.2 главы 4 получены совместно с Поповой Т.С., Семеновой Г.М.

Научная новизна. В диссертационной работе исследован новый класс нелинейных краевых задач, описывающих деформирование однородных пластин с трещинами, а также неоднородных пластин с трещинами вдоль жестких или упругих включений. Новизна обусловлена наличием граничных условий в виде неравенств. Условия задаются на кривой, соответствующей трещине, и описывают взаимное непроникание берегов трещины. Нелинейные задачи, описывающие равновесие упругих пластин с трещинами, с условиями непроникания ранее были изучены в рамках моделей двумерной теории упругости и Кирхгофа–Лява. В настоящей работе рассматриваются пластины модели Тимошенко, учитывающие, в отличие от модели Кирхгофа–Лява, поперечные сдвиги. Для указанной модели доказана однозначная разрешимость широкого класса нелинейных краевых задач в областях с негладкими границами. Проведен анализ зависимости решений и функционалов энергии пластин от изменения формы трещины и формы области (shape sensitivity analysis). На основе современных подходов разработан метод доказательства непрерывной зависимости решений задач о равновесии упругих тел от вариации размера отслоившихся жестких включений.

Апробация работы.

Результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения исследовательских проектов: Министерства образования и науки РФ № 8222 «Задачи управления формой и структурой для композитных материалов при наличии трещин отслоения» (рук. проф. А.М. Хлуднев), № 4402 «Фундаментальные теоретические основы математических моделей экологических процессов в условиях Крайнего Севера» (рук. проф. И.Е. Егоров), а также — грантов РФФИ №12-01-31076 «Математические модели упругих пластин и оболочек с односторонними ограничениями», №12-01-90808 «Задачи о равновесии пластин Тимошенко с краевыми условиями вида неравенств. Научный проект

Лазарева Нюргуна Петровича из ФГАОУ ВПО СВФУ имени М.К.Аммосова, г. Якутск в ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск» (рук. Н.П. Лазарев.), №10-01-00054 «Задачи равновесия упругих тел с жесткими включениями и возможным отслоением», №13-01-00017 «Иерархия тонких включений в упругих телах при наличии отслоений» (рук. проф. А.М. Хлуднев).

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных научных конференциях, среди которых:

— 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (Istanbul, Turkey, 2015);

— VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» , посвященная 115-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015);

— III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» , посвященная 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова (Новосибирск, 2014);

— Международная конференция «Успехи механики сплошных сред» (УМСС'2014), приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2014);

— VII Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 2014);

— Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.» (Новосибирск, 2013);

— The International Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Актуальные проблемы механики) (Санкт-Петербург, 2013);

— Суперкомпьютерные технологии математического моделирования (Якутск, 2013);

— IX Всероссийская конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск, 2012);

— II Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-

неоднородных сред и конструкций» , посвященная 85-летию со дня рождения профессора О.В. Соснина (Новосибирск, 2011);
— VI Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 2011).

Результаты работы были представлены на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН В.В. Пухначева (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. В.К. Андреева (ИВМ СО РАН); д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева (ИГиЛ СО РАН), д.ф.-м.н. И.Е. Егорова (СВФУ).

Публикации. Содержание и результаты диссертации отражены в 21 статье. Все статьи опубликованы в рекомендованных ВАКом для защиты докторских диссертаций рецензируемых научных журналах. Результаты работ в соавторстве получены авторами совместно, при равном вкладе и являются неделимыми.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 184 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 295 страницах текста.

Исторический обзор. В настоящее время интенсивно развивается подход, в котором краевые задачи, описывающие деформирование твердых тел решаются и исследуются с помощью применения методов функционального анализа, вариационного исчисления, выпуклого анализа. Уместно отметить здесь, что впервые краевая задача о контакте упругого тела с жестким препятствием (задача Синьорини), в которой ставится естественное условие непроникания, была решена Г. Фикерой (1964) с помощью математических методов, впоследствии приведших к развитию теории вариационных неравенств [14]. Отличительной особенностью этой задачи являлась математическая постановка, в которой механическое взаимодействие упругого тела с жестким препятствием описывалось с помощью условий вида неравенств. В настоящее время вариационный подход успешно используется и развивается во многих областях математики, в том числе и в приложениях к проблемам теории упругости и вязкоупругости, в частности — при решении контактных задач [7, 63, 109, 110, 116]. При этом, использование вариационных методов при решении прикладных задач часто обусловлено нелинейностью проблемы. Нелинейность, в свою очередь, может быть связана с краевыми условиями (например, в задаче Синьорини) и видом целевого функционала. Общность вариационного подхода часто позволяет успешно применять методы, развитые при решении нелинейных задач, и в линейном случае. В отличие от линейной теории эллиптических задач, где гладкость решения зависит от гладкости заданных функций задачи, для вариационных неравенств регулярность решения зависит также и от характера выпуклых ограничений. Изучению качественных свойств решения, и, в частности, дополнительной регулярности, по сравнению с гарантированной исходной постановкой задачи, посвящено множество работ, см. [88, 107, 109, 110, 150, 173]. Вопросам численных методов решения вариационных неравенств посвящены работы Р. Гловински, Ж.-Л. Лионса, Р.Тремольера, Н.В. Баничука, Ф.Л. Черноусько, П.Н. Вабищевича, В.А. Ковтуненко, А.С. Кравчука и др. [5, 9, 15, 28, 125, 164]. Более детальный обзор успешного применения вариационного метода в контактных задачах можно найти в [33]. Обзорная статья [116] посвящена результатам в области математической теории трещин с неизвестными границами. С другими подходами в изучении контактных задач для упругих, вязкоупругих, термоупругих, жесткопластических и упругопластических тел можно ознакомиться в монографиях [91, 17].

Что касается математического моделирования и анализа проблем теории трещин, широкий круг краевых задач с нелинейными граничными условиями вида неравенств на кривой (поверхности) трещины изучен в работах А.М. Хлуднева и его учеников В.А. Ковтуненко, Е.М. Рудого и др. Физический смысл этих условий, заключается в том, что на функции перемещений накладываются ограничения, не допускающие взаимное проникновение точек тела, лежащих на противоположных берегах трещины. Эти задачи являются нелинейными. Более того, они формулируются в негладкой области — это обстоятельство отличает их от задач о контакте двух тел, и приводит к тому, что решения обладают особенностями в окрестности угловых точек границы. Приведем к примеру, хорошо известное условие непроникания для трехмерного тела [85, 121, 150, 153]:

$$[u]\nu \geq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{0.0.1}$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ — перемещения точек тела, скобки $[\cdot]$ означают скачок функции на берегах трещины, ν — нормаль к поверхности Γ_c, определяющей форму трещины.

А.М. Хлудневым было предложено следующее неравенство, описывающее условие непроникания для противоположных берегов вертикальной трещины в пластинах и оболочках

$$[U]\nu \geq h\Big|[\frac{\partial u}{\partial \nu}]\Big| \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{0.0.2}$$

где U, u — горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины, $2h$ — толщина пластины (оболочки), кривая Γ_c задает пересечение поверхности трещины со срединной плоскостью, ν — нормаль к Γ_c. Вывод и обоснование этого условия проводится в рамках гипотез Кирхгофа–Лява [153]. Задачи о пластинах Кирхгофа–Лява с наклонными трещинами (в отличие от вертикальных трещин, вектор нормали к поверхности наклонной трещины может быть не параллельным срединной плоскости), в которых используются более сложные условия непроникания изучены в [29, 35, 49, 113].

Для пластины модели Тимошенко условие непроникания берегов сквозной вертикальной трещины имеет вид

$$[U]\nu \geq h\big|[\phi\nu]\big| \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{0.0.3}$$

где U — горизонтальные перемещения точек срединной поверхности пластины, ϕ — углы поворота нормальных волокон, $2h$ — толщина пластины (оболочки), кривая Γ_c задает пересечение поверхности трещины со срединной плоскостью, ν — нормаль к Γ_c.

Контактные задачи с нелинейными условиями непроникания и краевые задачи математической теории трещин с граничными условиями вида (0.0.1)–(0.0.3) относятся к классу задач с неизвестной границей. В рамках задач этого класса область (границу) механического взаимодействия контактирующих поверхностей возможно найти лишь после решения задачи, описывающей деформацию твердого тела [109].

К настоящему времени изучен широкий круг задач для математических моделей, в которых используются нелинейные краевые условия непроникания. Одним из значимых результатов является обоснование метода фиктивных областей [3, 146]. Согласно этому подходу задача о равновесии упругого тела, контактирующего с жестким штампом (задача Синьорини) является предельной для семейства задач, описывающих равновесие упругих тел с трещиной. Важно отметить, что здесь условия на трещине имеют вид (0.0.1) (для двумерного случая). Для трехмерного случая также можно доказать аналогичный результат [116]. С математической точки зрения интересен также метод гладких областей [121]. Применение этого метода позволяет формулировать исходную задачу в гладкой области, несмотря на то, что изначально она сформулирована в области с разрезами [36, 115].

В [121, 153] изучены вопросы, связанные с прогнозированием развития трещин, а именно, приводится математическое обоснование возможности применения критерия разрушения Гриффитса. Согласно этому критерию, развитие трещины начинается в том случае, когда производная функционала энергии по отношению к параметру, задающему длину трещины, достигает критического значения [82, 123]. В работе [96] найдена формула для производной функционала энергии для модели пластины Кирхгофа–Лява с условием вида (0.0.2) на трещине. При этом производная находится по отношению к параметру общего возмущения области, занимаемой пластиной в срединной плоскости. Случаи трехмерного упругого тела с трещиной рассмотрены в [25, 95, 121]. Заметим, что результаты, в которых приводится вывод формулы для производной, можно отнести к исследованиям анализа чувствительности формы области (shape sensitivity analysis) см., например, [144, 182]. Как оказалось, при определенном выборе геометрии кривой, задающей трещину и функций внешних нагрузок, формула производной функционала энергии может быть представлена в виде инвариантного интеграла [3, 25, 121]. В [25] для задачи о равновесии N-мерного ($N = 2, 3$) упругого тела с условиями типа неравенств на трещине выведены достаточные условия существования инвариантных интегралов. В [3, 98] найдены инвариантные интегралы для двумерного тела с трещиной, лежащей на линии раздела двух сред. Для пластин модели Кирхгофа–Лява инвариантные интегралы, выражающие производную функционала энергии, найдены в рамках линейных краевых условий [94].

Как уже было отмечено ранее, неоднородность тела является существенным фактором, влияющим на его прочность. Сравнительно недавно, в 2009 г., благодаря общности вариационного подхода, удалось обосновать корректность нелинейных задач о равновесии тел с трещинами, расположенными вдоль жестких включений [117, 120, 122]. Наличие объемного жесткого включения в трехмерном теле или пластине предполагает заданную структуру искомых функций в соответствующей подобласти [76, 77, 121, 166, 172]. В работе [169] доказано, что решения задач о равновесии двумерного упругого тела с трещиной вдоль объемного жесткого включения сходятся к решению задачи о равновесии двумерного упругого тела с тонким жестким включением. Качественная связь между задачей о равновесии пластины Кирхгофа–Лява с отслоившимися жестким объемным и задачей с отслоившимися жестким тонким включением установлена в [170].

В [155, 156] изучена задача о двумерном теле, содержащей трещину, расположенную вдоль тонкого упругого включения. При этом, механическое взаимодействие берегов трещины моделируются с помощью условий непроникания вида (0.0.1). В работе [155] изучена зависимость задачи от параметра жесткости включения. Установлено, что при стремлении параметра жесткости к нулю, в пределе получается известная задача о равновесии упругого тела с трещиной.

С точки зрения приложений представляют также интерес задачи оптимального управления. В рамках изучения математических моделей с односторонними ограничениями, описывающих деформирование тел, подобные задачи исследованы в [111, 114, 129, 145, 157]. Речь идет о задачах, в которых в качестве управляющих функций выступают внешние нагрузки, форма трещины, геометрия области, форма штампа и т.д. Целевые функционалы выбирались с точки зрения возможных приложений, например, они могут характеризовать поле перемещений, напряженно-деформированное состояние, раскрытие трещины и т.п. При этом доказательство возможности существования решения задач оптимального управления обусловлено, в частности, подходящим выбором класса функций, задающего управляющие функции.

Добавим, что в рамках классического подхода в исследовании задач математической теории трещин используются линейные краевые условия следующего вида

$$\sigma_{ij}\nu_j = f_i \quad \text{на} \quad S$$

или

$$u_i = g_i \quad \text{на} \quad S,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ν_j – компоненты вектора внешней нормали к поверхности S, описывающей форму трещины, u_i – компоненты вектора перемещений, f_i, g_i — заданные функции. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная исследованию задач теории трещин с краевыми условиями такого типа, см. монографии [6, 75, 52, 62, 68, 69, 82, 84, 90, 101, 103, 123, 137, 142]. Отметим основные методы исследования указанных задач. В соответствии с методом Колосова–Мусхелишвили задача теории трещин сводится к решению краевой задач теории функций одного комплексного переменного [69]. Метод интегральных уравнений также относится к одним из наиболее используемых в задачах теории упругости. Сведение задач к интегральным уравнениям и последующее их изучение описаны в [16, 83]. Винер и Хопф предложили метод для решения некоторых интегральных уравнений, основанный на идее факторизации. С техникой этого метода можно ознакомиться в [141]. Теория потенциалов, изложенная в монографии В. Д. Купрадзе [34], также нашла применение к задачам теории трещин [8, 22]. Особенностью линейных и нелинейных задач теории трещин является постановка в негладкой области с разрезом (трещиной). Это обстоятельство обуславливает наличие сингулярных решений — в отличие от краевых задач в областях с гладкими границами. Исследованию асимптотики решений краевых задач в негладких областях, в том числе и в областях с разрезами посвящены работы [31, 57, 59, 60, 67, 73, 74, 139, 174]. В случае краевых условий вида неравенств на разрезе, асимптотика решения уравнения Пуассона исследована в [24]. Для задач о равновесии двумерных и трехмерных тел с условиями непроникания вида Синьорини на трещине гладкость вблизи кривой или поверхности трещины исследована в [161]. Следует отметить, что классический подход к задачам теории трещин часто приводит к решениям, которые противоречат физической природе твердых тел. А именно, в ряде случаев получается так, что функции перемещений принимают такие значения, которые с физической точки зрения означают взаимное проникновение противоположных берегов трещины [66, 68]. В связи с этим возникает необходимость обосновывания и исследования математических моделей, в которых возможность проникновения исключается с помощью условий непроникания.

В настоящей диссертационной работе обоснована корректность математических моделей пластин Тимошенко с условиями непроникания берегов трещины вида (0.0.3), а также исследованы качественные свойства решения задач равновесия, изучены задачи оптимального управления, установлена зависимость параметров задачи от возмущения области и т.д. Как уже было отмечено, нелинейные задачи для пластин с условиями непроникания вида неравенств были изучены только для модели Кирхгофа–Лява. Модель пластины Тимошенко, в отличие от модели Кирхгофа–Лява, позволяет учитывать поперечные сдвиги. Сравнение моделей пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера с моделями Кирхгофа–Лява, а также с трехмерной теорией упругости можно найти в работах [63, 19, 106, 135]. В [106] на основе тестовых примеров установлен асимптотический характер одномерных (для балок) и двумерных моделей (для пластин и оболочек) и найдена область их применимости. В ряде случаев учет деформации поперечного сдвига позволяет успешно исследовать напряженно-деформированное состояние пластины [64, 106].

Краткий обзор содержания диссертации.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Главы разбиты на параграфы, параграфы — на разделы. Используется тройная нумерация формул вида (n.m.k).

В настоящей диссертации исследуются краевые задачи, моделирующие равновесие пластин с трещинами. Деформирование упругих пластин описывается с помощью модели Тимошенко. Задачи формулируются в негладких двумерных областях с разрезом. Все результаты объединяет способ задания краевых условий на кривой, соответствующей трещине. А именно, задается условие непроникания в виде неравенства, которое предотвращает взаимное проникание берегов трещины друг в друга. В ряде изученных задач рассматриваются модели неоднородных пластин с жестким включением. При этом включение описывается либо трехмерной областью — для объемного включения, либо двумерной цилиндрической поверхностью — для тонкого включения. В работе также исследуются модели пологой оболочки с трещиной.

Изучаются вариационные постановки задач, в которых минимизируется функционал энергии пластины, а решение ищется в классах соболевских пространств. При этом множества допустимых функций, удовлетворяющие свойствам замкнутости и выпуклости, выбираются в соответствии с физическим смыслом задачи.

Глава 1 является вводной. В ней содержатся некоторые используемые в работе сведения из вариационного исчисления, уравнений математической физики, теории пространств Соболева, функционального анализа. Большинство определений и утверждений являются хорошо известными фактами и приводятся для удобства, как правило, без доказательств со ссылками на источники, где они могут быть найдены.

Также в главе 1 приводится описание математических моделей упругих пластин Кирхгофа–Лява и Тимошенко, формулы Грина, вывод условия непроникания для трещины в пластине модели Тимошенко.

Вторая глава диссертации посвящена обоснованию корректности математических моделей пластин и оболочек Тимошенко с краевыми условиями вида неравенств и исследованию качественных свойств соответствующих задач: гладкости решений, возможности формулировки в дифференциальной форме.

В параграфе 2.1 сформулирована и доказана однозначная разрешимость задачи о равновесии трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную вертикальную трещину. При условии дополнительной гладкости решения, найдена дифференциальная формулировка, эквивалентная исходной вариационной постановке. Установлена локальная дополнительная гладкость решения на трещине вне окрестности ее трещины; при локальных условиях бесконечной дифференцируемости функций внешних нагрузок и "нулевого" раскрытия трещины доказана локальная бесконечная дифференцируемость решения.

В параграфе 2.2 доказана однозначная разрешимость задачи о равновесии композитной пластины, состоящей из связующей и упругого включения. При этом для описания деформирования связующей пластины используется модель Тимошенко, а для включения — модель пластины Кирхгофа–Лява. Кроме того, предполагается, что вдоль границы упругого включения пластина имеет сквозную трещину. Из вариационной постановки задачи получена система краевых условий на замкнутой кривой, описывающей границу упругого включения.

В параграфах 2.3 и 2.4 второй главы исследуется вариационные задачи о равновесии пластины с жесткими объемными и тонкими включениями. Для каждой из рассмотренных задач доказана однозначная разрешимость, найдены дифференциальные постановки задач, эквивалентные исходным. Исследован предельный переход при стремлении параметра жесткости к бесконечности в некоторой фиксированной части упругой пластины. С помощью обоснования этого предельного перехода доказано, что предельной для семейства задач о равновесии упругих пластин является задача о пластине с жестким включением. Установлено, что предельный переход по параметру размера включения в задачах о равновесии пластины с объемным включением (без отслоения), приводит к корректной формулировке задачи о пластине с тонким жестким включением без отслоения. В задаче о пластине с отслоившимся тонким включением на трещине задаются условия непроникания вида неравенств.

Параграф 2.5 посвящен математическому обоснованию корректности и изучению модели пластины Тимошенко с наклонной трещиной. Осуществлен вывод условия взаимного непроникания берегов трещины в рамках предположения о том, что нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины с условиями непроникания на кривой, соответствующей трещине. Найдена дифференциальная формулировка, эквивалентная исходной при достаточной гладкости решения. Для одномерного случая (балка с разрезом) приведено аналитическое решение и изучены частные случаи продольного растяжения и сжатия.

Метод фиктивных областей для контактной задачи с краевыми условиями непроникания (типа Синьорини) для пластины Тимошенко предложен в параграфе 2.6. Доказано, что исходную задачу о контакте пластины с жестким препятствием можно получить с помощью предельного перехода в семействе вспомогательных задач, формулируемых в более широкой области. Каждая задача семейства моделирует равновесие пластины, содержащей трещину. При этом на внутренней границе, соответствующей трещине, налагаются условия непроникания противоположных берегов трещины в виде неравенств. Для вариационных формулировок рассматриваемых задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки.

В параграфе 2.7 второй главы сформулирована модель, описывающая равновесие пологой оболочки с трещиной. Особенностью данной нелинейной модели, по сравнению с ранее изученными моделями пологих оболочек является то, что в исходном состоянии берега трещины могут выступать друг над другом. Для нелинейной вариационной задачи установлена единственность решения в классе соболевских функций; найдена дифференциальная постановка, эквивалентная исходной при дополнительной гладкости решения. При дополнительных условиях "нулевого" раскрытия трещины и бесконечной гладкости функций, описывающих кривизны оболочки и воздействие внешних нагрузок доказана локальная бесконечная дифференцируемость функции решения.

Основными результатами главы являются математическое обоснования корректности задач теории упругих пластин, вывод соответствующих дифференциальных постановок, анализ качественных свойств моделей: гладкости решения, обоснование предельных переходов. Результаты содержатся в работах [37, 41, 45, 46, 47, 48, 166].

Глава 3 состоит из трех параграфов, в которых исследуется зависимость функционала энергии и решения от вариации геометрии задачи. В параграфах 3.1, 3.2 рассматривается задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину. В 3.1 с помощью достаточно гладкого возмущения класса $C^1([0,\varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2))$, определенного в срединной плоскости пластины, задается возмущение геометрии пластины в срединной плоскости. Доказана сильная сходимость решений возмущенных задач к решению невозмущенной задачи. Доказано существование производной функционала энергии и найдена выражающая ее формула.

В параграфе 3.2 предполагается, что выбор преобразования и геометрические свойства области с разрезом обеспечивают взаимную однозначность допустимых множеств, соответствующих невозмущенной и возмущенной области. При указанных предположениях доказано существование функционала энергии и найдена выражающая ее формула. Показано, что в этой задаче существуют инвариантные интегралы, не зависящие от пути интегрирования и численно равные производной функционала энергии пластины по параметру возмущения.

Последний параграф 3.3 главы посвящен анализу задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль жесткого включения. С помощью достаточно гладкого отображения задается возмущение геометрии пластины в срединной плоскости. Выведена формула производной функционала энергии пластины по отношению к параметру возмущения, доказана непрерывная зависимость решений семейства задач о равновесии пластин в зависимости от параметра возмущения.

Основными результатами главы являются вывод формулы для производной функционала энергии в задаче о равновесии однородной пластины с трещиной и неоднородной пластины с отслоившимся жестким включением, а также вывод достаточных условий существования инвариантных интегралов и их построение. Результаты главы 3 опубликованы в работах [43, 167, 168]

Четвертая глава посвящена изучению разрешимости задач оптимального управления. В первом параграфе 4.1 изучены задачи о равновесии пластин с трещиной вдоль жесткого включения. При этом рассматриваются случаи объемного жесткого включения и тонкого жесткого включения. Деформирование упругой части пластины описывается с помощью модели Тимошенко. Проводится анализ зависимости решений и производной функционала энергии пластины от вариации размера жесткого включения. С помощью метода вспомогательных задач доказана непрерывная зависимость решений от параметра, характеризующего размер жесткого включения. Установлена разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества задается производной функционала энергии пластины, а управляющий параметр описывает размер включения.

В параграфе 4.2 исследуется задача о контакте пластины, содержащей жесткое включение. Предполагаем, что пластина может вступать в механический контакт по внешней жесткой части пластины. На внешней границы области пластины задаются условия непроникания типа Синьорини и однородные условия жесткого защемления. В формулировках задач объемное включение задается трехмерной областью, а тонкое включение – двумерной поверхностью. Проводится анализ зависимости решения от размера жесткого включения. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества характеризует отклонение вектора обобщенных перемещений от заданных функций, а управляющий параметр моделирует размер жесткого включения.

В следующем параграфе 4.3 исследуется зависимость решений указанной задачи от изменения формы кривой, задающей трещину. Установлена слабая сходимость решений в пространстве Соболева при стремлению к нулю параметра, описывающего возмущение прямолинейной трещины. Доказано существование экстремальной кривой, доставляющей экстремум для функционала качества, описывающего отклонение от заданных обобщенных перемещений.

Основными результатами главы являются результаты о непрерывной зависимости решений задач при вариации геометрии задачи: в параграфах 4.1 изучается возмущение размера объемного включения, а в параграфе 4.3 — форма трещины. На основе этих результатов доказаны теоремы о разрешимости задач оптимального управления. В рамках исследования нелинейных задач о равновесии пластин с жесткими включениями предложен новый метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных задач с заданной структурой решения. Этот метод основан на применении семейства вспомогательных задач. Отметим, что метод анализа семейства вариационных неравенств для тел с жесткими включения был предложен автором диссертационной работы и может быть применен и для других модельных задач теории упругости (см. [169, 170]). Результаты главы 4 опубликованы в работах [39, 172].

Глава 1

Обозначения и предварительные сведения

1.1 Функциональные пространства

Пусть Ω открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Через $W_p^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначается пространство Соболева, состоящее из всех функций измеримых по Лебегу функций, обобщенные производные которых принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ вплоть до порядка k. В случае $k = 0$, как обычно, полагаем $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$.

Пространство $W_p^k(\Omega)$ является банаховым [130] относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Для $p = 2$ мы будем использовать обозначение $H^k(\Omega)$ вместо $W_p^k(\Omega)$. В этом случае $H^k(\Omega)$ будет гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

и нормой

$$\|u\|^2_{H^k(\Omega)} = (u, u)_{H^k(\Omega)}.$$

Для дальнейшего изложения необходимо понятие гладкости границы $\partial\Omega$ области Ω. Следуя [7], дадим определение гладкости границы.

Определение 1.1.1. *Граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{k,1}$, $k \geq 1$, если существуют два вещественных числа $b > 0$, $h > 0$; m систем координат*

$$(y^j, y^j_N), \quad y^j = (y^j_1, ..., y^j_{N-1}), \quad j = 1, ..., m, \tag{1.1.1}$$

и m функций θ^j, $j = 1, ..., m$ таких, что в кубах

$$\triangle^j = \{y^j \in \mathbb{R}^{N-1} \mid \quad |y^j_i| < b, \quad i = 1, ..., N-1\}$$

функции θ^j принадлежат $C^{k,1}(\overline{\triangle}^j)$, и для множеств

$$\Sigma^j = \{(y^j, y^j_N) \in \mathbb{R}^N \mid \quad y^j \in \triangle^j, \quad y^j_N = \theta^j(y^j)\},$$

$$\Omega^j_+ = \{(y^j, y^j_N) \in \mathbb{R}^N \mid \quad y^j \in \triangle^j, \quad \theta^j(y^j) < y^j_N < \theta^j(y^j) + h\},$$

$$\Omega^j_- = \{(y^j, y^j_N) \in \mathbb{R}^N \mid \quad y^j \in \triangle^j, \quad \theta^j(y^j) - h < y^j_N < \theta^j(y^j)\},$$

выполнены следующие условия:

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Sigma^j, \quad \Omega^j_+ \subset \Omega, \quad \Omega^j_- \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \quad j = 1, ..., m.$$

Здесь $C^{k,1}(\overline{\triangle}^j)$ обозначает пространство функций, которые имеют k Липшиц-непрерывных производных в $\overline{\triangle}^j$.

Это определение утверждает, что граница $\partial\Omega$ множества Ω может быть локально представлена как график функции класса $C^{k,1}$, и множество Ω локально является надграфиком этой функции.

В диссертационной работе используется известная теорема вложения Соболева [56].

Теорема 1.1.1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является липшицевой. Тогда*

1) Если $N > lp$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{N}$ или если $N = lp$ и $q \geq 1$ – любое конечное, то

$$W^l_p(\Omega) \subset L^q(\Omega),$$

причем оператор вложения непрерывен;

2) если $\frac{N}{p} + k < l \le \frac{N}{p} + k + 1$, *где* k *– неотрицательное целое, то*

$$W_p^l(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}),$$

причем оператор вложения непрерывен;

3) если $N > lp$ *и* q *удовлетворяет неравенствам* $1 \le q < \frac{Np}{N-lp}$ *или если* $N \le lp$ *и* $q \ge 1$ *– любое конечное, то вложение* $W_p^l(\Omega)$ *в* $L^q(\Omega)$ *компактно.*

Для анализа чувствительности функционалов энергии к изменению формы областей мы будем использовать преобразования координат, зависящее от малого параметра. Справедлива следующая теорема [175].

Пусть Ω и G — открытые множества в $\mathbb{R}^N$ и пусть $F = (F_1, \ldots, F_N)$ — взаимно однозначное би-Липшицево отображение Ω на G, то есть все координатные функции F_i, $i = 1, \ldots, N$, равномерно Липшицевы на Ω и все координатные функции F_i^{-1}, $i = 1, \ldots, N$, в свою очередь, равномерно Липшицевы на G. Заметим, что в этом случае отображение F почти всюду дифференцируемо [131] и элементы матрицы Якоби F' принадлежат $L_\infty(\Omega)$. Кроме того, справедлива обобщенная формула замены переменных в интегралах

$$\int\limits_G f(y)dy = \int\limits_\Omega (f \circ F)(x)|\det F'(x)|\, dx$$

для всех функций f из $L_1(G)$ (см. [108]).

Теорема 1.1.2. *Пусть* $F : \Omega \to G$ *— би-Липшицево отображение и пусть элементы матрицы Якоби* F' *принадлежат пространству* $W_\infty^{k-1}(\Omega)$, $k \ge 1$. *Если* $u \in W_p^k(G)$, *то функция* $u \circ F$ *принадлежит пространству* $W_p^k(\Omega)$. *Кроме того, все ее производные* $D^\alpha(u \circ F)$, $|\alpha| \le k$ *выражаются по классической формуле дифференцирования сложных функций.*

Доказательство теоремы 1.1.2 можно найти в [175] (стр. 46).

Определим пространства Соболева на многообразиях. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, граница которого принадлежит классу $C^{k,1}$. На границе $\partial\Omega$ определим функциональные пространства посредством локальных координат (1.1.1) следующим образом [54]. Для заданной функции $s(x)$, $x \in \partial\Omega$, функции

$$s^j(y^j) = s(y^j, \theta^j(y^j)), \quad y^j \in \triangle_2^j = \{y^j \in \mathbb{R} \,|\, |y^j| < b\}, \quad j = 1, ..., m,$$

могут быть рассмотрены в кубах (интервалах) $\triangle_2^j$. Тогда мы определим пространство

$$H^k(\partial\Omega) = \{s \in L^2(\partial\Omega) \mid \quad s^j \in H^k(\triangle_2^j),\ j = 1, ..., m\},$$

снабженной нормой

$$\|s\|^2_{k,\partial\Omega} = \sum_{j=1}^{m} \|s^j\|^2_{k,\triangle_2^j}.$$

Введем так же пространство $H^{k-1/2}(\partial\Omega)$, $k \geq 1$, снабженное нормой

$$\|s\|^2_{k-1/2,\partial\Omega} = \|s\|^2_{k-1,\partial\Omega} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\triangle_2^j} \int\limits_{\triangle_2^j} \frac{|D^\alpha s^j(y^j) - D^\alpha s^j(\theta^j)|^2}{|y^j - \theta^j|^2} \, dy^j d\theta^j.$$

Пусть $n = (n_1, n_2)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Обозначим через $\partial^i/\partial\, n^i$ производную по нормали порядка i на $\partial\Omega$. Сформулируем стандартный результат о следах функций на границе для пространств $H^k(\Omega)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{k-1,1}$, $k \geq 1$ – целое, а функция u принадлежит пространству $H^k(\Omega)$. Тогда существует линейный непрерывный оператор*

$$\pi:\ H^k(\Omega) \to \prod_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\partial\Omega),$$

однозначно определяющий следы $\pi u = (\pi_0 u, ..., \pi_{k-1} u)$ функции u на $\partial\Omega$:

$$\pi_i u \in H^{k-i-1/2}(\partial\Omega), \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

Для гладких функций u, определенных в $\bar{\Omega}$, имеют место формулы

$$\pi_i u = \frac{\partial^i u}{\partial n^i}, \quad 0 \leq i \leq k-1, \qquad \text{на } \ \partial\Omega.$$

Обратно, существует линейный непрерывный оператор

$$\prod_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\partial\Omega) \to H^k(\Omega),$$

такой что для любых заданных $g_i \in H^{k-i-1/2}(\partial\Omega)$, $0 \le i \le k-1$, *можно найти функцию* $u \in H^k(\Omega)$, *обладающую свойствами*

$$\pi_i u = g_i, \quad 0 \le i \le k-1, \quad \text{на } \partial\Omega.$$

1.2 Область с разрезом

В этом параграфе определим область с разрезом. Пусть Ω — ограниченная, связная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, а $n = (n_1, n_2)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Пусть внутри Ω содержится кривая γ. Считаем, что γ — не имеет самопересечений. В дальнейшем с помощью кривой γ мы будем моделировать пересечение трещины и срединной плоскости пластины. Обозначим через $\partial\gamma$ концевые точки кривой γ. В дальнейшем будем считать, что $\gamma = \gamma \setminus \partial\gamma$ и $\overline{\gamma} = \gamma \cup \partial\gamma$.

Выберем и зафиксируем направление единичной нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к γ, которое определит положительный берег γ^+ разреза γ (с внешней нормалью $(-\nu)$) и отрицательный берег γ^- (с внешней нормалью ν). Определим область с трещиной Ω_γ как $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$, граница которой $\partial\Omega_\gamma$ есть $\partial\Omega \cup \gamma^- \cup \gamma^+ \cup \partial\gamma$. Очевидно, что граница области с трещиной не является Липшиц-непрерывной в смысле определения 1.1.1.

Предположим, что существует замкнутое продолжение Σ кривой γ, делящее Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 с границами $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$, такими что $\gamma \subset \Sigma$. Предполагается, что $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \partial\Omega$. Будем говорить, что граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{k,1}$, если $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ принадлежат $C^{k,1}$.

Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит $C^{k-1,1}$, и пусть задана функция $u \in H^k(\Omega_\gamma)$, $k \ge 1$. Тогда однозначно определены нормальные производные на границе $\partial\Omega_\gamma$, причем

$$\frac{\partial^i u}{\partial n^i} \in H^{k-i-1/2}(\partial\Omega), \quad \frac{\partial^i u^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \le i \le k-1.$$

Введем обозначение для скачка функции u на γ:

$$[u] = u|_{\gamma^+} - u|_{\gamma^-}.$$

Для функции $u \in H^k(\Omega_\gamma)$ имеем

$$\left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] = \frac{\partial^i u^+}{\partial \nu^i} - \frac{\partial^i u^-}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \le i \le k-1.$$

Аналогичные обозначения используются и для замкнутого расширения Σ, $\gamma \subset \Sigma$, именно

$$\left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] = \frac{\partial^i u^+}{\partial \nu^i} - \frac{\partial^i u^-}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \le i \le k-1.$$

Заметим, что в силу включения $u \in H^k(\Omega_\gamma)$ и единственности определения следа имеем

$$\frac{\partial^i u^+}{\partial \nu^i} = \frac{\partial^i u^-}{\partial \nu^i} \quad \text{на } \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \le i \le k-1,$$

или

$$\left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] = 0 \quad \text{на } \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \le i \le k-1.$$

Пусть γ класса $C^{k,1}$, $k \ge 0$. Определим пространство Соболева с весом [54]

$$H^{1/2}_{00}(\gamma) = \{u \in H^{1/2}(\gamma) \;\; | \;\; d^{-1/2}u \in L_2(\gamma)\},$$

снабженной нормой

$$\|u\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma)} = \|u\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|d^{-1/2}u\|^2_{L_2(\gamma)},$$

где $d(x)$ — расстояние от точки $x \in \gamma$ до $\partial\gamma$.

Сформулируем ряд утверждений, характеризующих функции из пространств $H^k(\Omega_\gamma)$ и $H^{k-1/2}_{00}(\gamma)$. Первое утверждение устанавливает связь между функциями из $H^{k-1/2}_{00}(\gamma)$ и функциями из $H^{k-1/2}(\Sigma)$, допускающими продолжение нулем на $\Sigma \supset \gamma$ (см. [121, 143]).

Лемма 1.2.1. *Пусть $k \geq 1$, а γ принадлежит классу $C^{k-1,1}$. Пусть существует замкнутое продолжение $\Sigma \in C^{k-1,1}$ кривой γ. Тогда функция $u \in H_{00}^{k-1/2}(\gamma)$ тогда и только тогда, когда*

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{на } \gamma \\ 0 & \text{на } \Sigma \setminus \gamma \end{cases} \in H^{k-1/2}(\Sigma).$$

В силу теоремы 1.1.3 и леммы 1.2.1 справедлива следующая теорема [121, 153].

Теорема 1.2.1. *Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{k-1,1}$, а функция u принадлежит $H^k(\Omega_\gamma)$. Тогда существует линейный непрерывный оператор, который однозначно определяет на $\partial\Omega_\gamma$ величины*

$$\frac{\partial^i u}{\partial n^i} \in H^{k-i-1/2}(\partial\Omega), \quad \frac{\partial^i u^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad \left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma)$$

для $0 \leq i \leq k-1$. Наоборот, существует линейный непрерывный оператор, такой что для любых заданных

$$g_i^\pm \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad [g_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

можно найти функцию $v \in H^k(\Omega_\gamma)$, такую что

$$\frac{\partial^i v^\pm}{\partial \nu^i} = g_i^\pm, \quad 0 \leq i \leq k-1, \quad \text{на } \gamma.$$

Доказательство. Предположим, что Σ – гладкое замкнутое продолжение γ класса $C^{k-1,1}$, делящее область Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 так же, как и ранее. Границы $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ состоят из Σ^-, $\partial\Omega \cup \Sigma^+$ соответственно. По теореме 1.1.3 для $u \in H^k(\Omega_\gamma)$ имеем

$$\frac{\partial^i u^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

Ввиду единственности определения следов получаем

$$\left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] = 0 \ \text{ на } \Sigma \setminus \gamma, \quad \left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

С учетом леммы 1.2.1 это означает, что

$$\left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \le i \le k-1,$$

что и доказывает первое утверждение теоремы 1.2.1.

Докажем обратное утверждение. Пусть $g_i^{\pm} \in H^{k-i-1/2}(\gamma)$ заданы, $[g_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma)$, $0 \le i \le k-1$. Построим произвольное гладкое продолжение g_i^- на Σ^- такое, что

$$\tilde{g}_i^- = \begin{cases} g_i^- & \text{на } \ \gamma^- \\ s_i & \text{на } \Sigma^- \setminus \gamma^- \end{cases} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \le i \le k-1.$$

Определим функцию на Σ^+

$$\tilde{g}_i^+ = \begin{cases} g_i^+ & \text{на } \ \gamma^+ \\ s_i & \text{на } \ \Sigma^+ \setminus \gamma^+ \end{cases}, \quad 0 \le i \le k-1.$$

Поскольку $[g_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\partial\Omega)$ и $[\tilde{g}_i] = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, то в силу леммы 1.2.1 получаем $[\tilde{g}_i] \in H^{k-i-1/2}(\Sigma)$. В частности, это влечет $\tilde{g}_i^+ = [\tilde{g}_i] + \tilde{g}_i^- \in H^{k-i-1/2}(\Sigma)$. Таким образом, по теореме 1.1.3 существуют функции $u_j \in H^k(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, такие что $\partial^i u_j / \partial \nu^i$ совпадают с $\tilde{g}_i^{\pm}$ на $\Sigma^{\pm}$. Определим функцию в Ω_γ:

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{в } \ \Omega_1 \\ u_2 & \text{в } \ \Omega_2. \end{cases}$$

В силу свойства

$$0 = [\tilde{g}_i] = \left[\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right] \quad \text{на } \ \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \le i \le k-1,$$

получаем $u \in H^k(\Omega_\gamma)$. Теорема доказана.

Рассмотрим векторный случай. Пусть $u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_\gamma)^2$. Имеет место разложение вектора u на нормальную и касательные составляющие

$$u_i = u_n n_i + u_{\tau i}, \quad u_n = u_j n_j \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2,$$

$$u_i = u_\nu \nu_i + u_{\tau i}, \quad u_\nu = u_j \nu_j \quad \text{на } \gamma, \quad i = 1, 2.$$

Если граница $\partial\Omega_\gamma$ класса $C^{1,1}$, то из результатов работы [140] следует, что векторы n и ν есть равномерно Липшиц-непрерывные функции. Справедлив следующий результат о следах в области с трещиной [30].

Теорема 1.2.2. *Пусть $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{1,1}$. Существует линейный непрерывный оператор*

$$H^1(\Omega_\gamma)^2 \to H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)^2 \times H_{00}^{1/2}(\gamma)^2,$$

который однозначно определяет следующие следы $u \in H^1(\Omega_\gamma)^2$ на $\partial\Omega_\gamma$:

$$u_n,\ u_{\tau i} \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad i = 1, 2,$$

$$u_\nu,\ u_{\tau i} \in H^{1/2}(\gamma), \quad i = 1, 2,$$

$$[u_\nu],\ [u_{\tau i}] \in H_{00}^{1/2}(\gamma), \quad i = 1, 2.$$

Наоборот, существует линейный непрерывный оператор

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)^2 \times H_{00}^{1/2}(\gamma)^2 \to H^1(\Omega_\gamma)^2,$$

который для любых заданных $s_n, s_{\tau i}$ и $g_\nu, g_{\tau i}$, $i = 1, 2$, таких, что

$$s_n,\ s_{\tau i} \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad i = 1, 2,$$

$$g_\nu^\pm,\ g_{\tau i}^\pm \in H^{1/2}(\gamma), \quad i = 1, 2,$$

$$[g_\nu],\ [g_{\tau i}] \in H_{00}^{1/2}(\gamma), \quad i = 1, 2,$$

можно построить функцию $u \in H^1(\Omega_\gamma)^2$ с условиями

$$(u_n, u_{\tau i}) = (s_n, s_{\tau i}), \quad \text{на } \partial\Omega,\ i = 1, 2,$$

$$(u_\nu, u_{\tau i}) = (g_\nu^\pm, g_{\tau i}^\pm) \quad \text{на } \gamma,\ i = 1, 2.$$

Уместно отметить, что в работах [58, 175], исследованы пространства Соболева, определенные на негладких областях.

1.3 Неравенства Корна и Пуанкаре-Фридрихса

Для получения оценок в пространствах Соболева понадобятся неравенства Корна и Пуанкаре-Фридрихса.

Теорема 1.3.1. (Первое неравенство Корна). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— ограниченная область. Тогда существует постоянная* c*, зависящая лишь от* Ω *такая, что*

$$\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\,dx \geq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)^2} \ \ \forall u \in H^1_0(\Omega)^2, \tag{1.3.1}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Теорема 1.3.2. (Второе неравенство Корна). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *– ограниченная область класса* $C^{0,1}$*. Тогда существует постоянная* $c > 0$*, зависящая лишь от* Ω *такая, что*

$$\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\,dx + \int\limits_\Omega u^2\,dx \geq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)^2} \ \ \forall u \in H^1(\Omega)^2.$$

Замечание 1.3.1. *Если граница области* Ω *липшицева, то первое неравенство Корна имеет место и для функций, которые обращаются в нуль не на всей границе* $\partial\Omega$*, а лишь на ее части, мера Хаусдорфа которой положительна.*

Доказательство первого и второго неравенства Корна можно найти в [18, 78].

Теорема 1.3.3. (Неравенство Пуанкаре—Фридрихса). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *– ограниченная с липшицевой границей* $\partial\Omega$*, которая может быть представлена в виде* $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$*,* $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \emptyset$*,* $meas(\Gamma_0) > 0$*. Тогда существует постоянная* $c > 0$*, зависящая лишь от* Ω *такая, что*

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq \int\limits_\Omega v^2\,dx \ \ \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),$$

где

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \,|\, v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\}.$$

Доказательство неравенства Пуанкаре—Фридрихса содержится в [56].

При изучении краевых задач, описывающих равновесие пластин Кирхгофа-Лява, нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1.3.4. *Пусть* Ω *ограниченная область с гладкой границей. Пусть граница* $\partial\Omega$ *разбита на две части* Γ_0 *и* Γ_1*, причем* $meas(\Gamma_0) > 0$*. Определим пространство*

$$H^2_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \ \ | \ \ u = 0 \textit{ на } \Gamma_0\}$$

и билинейную форму

$$b(u,v) = u_{x_1x_1}v_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}v_{x_2x_2} + æu_{x_1x_1}v_{x_2x_2} + æu_{x_2x_2}v_{x_1x_1} + \\ + 2(1-æ)u_{x_1x_2}v_{x_1x_2},$$

где $æ = const$*,* $0 < æ < 1/2$*. Тогда существует константа* c*, зависящая только от* Ω *и* $æ$ *такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} b(u,u)\, dx_1dx_2 \geq c\|u\|^2_{H^2(\Omega)}$$

для всех $u \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$*.*

Доказательство можно найти в [109] (стр. 69-72).

1.4 Минимизация выпуклых функционалов

В диссертационной работе краевые задачи о равновесии упругих пластин будут исследованы с помощью вариационных формулировок — в виде минимизации функционалов на множестве допустимых функций. Поэтому нам понадобится ряд общих определений и теорем вариационного исчисления [14, 32, 80, 100, 121, 132, 164].

Пусть V — нормированное пространство, V^* — его сопряженное (двойственное). Пусть $\Pi : V \to \mathbb{R}$ — произвольный функционал, а элемент u принадлежит пространству V.

Определение 1.4.1. *Множество $K \subset V$ называется выпуклым, если для всех $u_1, u_2 \in K$, $\lambda \in (0,1)$ справедливо включение*

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in K.$$

Определение 1.4.2. *Множество $K \subset V$ называется замкнутым (слабо замкнутым), если для любой последовательности $\{u_n\} \subset K$ сходящейся сильно (слабо) к $u \in V$ в пространстве V при $n \to \infty$ выполнено $u \in K$.*

Очевидно, что слабозамкнутое множество является замкнутым. Обратное, вообще говоря, неверно. Тем не менее для выпуклых множеств верна следующая лемма.

Лемма 1.4.1. *Выпуклое замкнутое множество слабо замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset K$ сходится слабо к u в пространстве V. Покажем, что $u \in K$. От противного. Пусть u не принадлежит K. Так как K — замкнутое множество, то $\operatorname{dist}(u, K) > 0$. По лемме об отделимости точки и замкнутого выпуклого множества [89, 132] существует функционал $u^* \in V^*$ такой, что

$$u^*(u) < \inf_{v \in K} u^*(v).$$

С другой стороны

$$\inf_{v \in K} u^*(v) \leq \inf_n u^*(u_n) \leq \lim_{n \to \infty} u^*(u_n) = u^*(u).$$

Получили, что $u^*(u) < u^*(u)$. Указанное противоречие доказывает теорему.

Определение 1.4.3. *Функционал $\Pi : V \to \mathbb{R}$ называется выпуклым, если для всех $u, v \in V$, $\lambda \in (0,1)$, справедливо неравенство*

$$\Pi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \Pi(u) + (1-\lambda)\Pi(v). \tag{1.4.1}$$

Функционал Π называется строго выпуклым, если равенство в (1.4.1) достигается только при $u = v$.

Определение 1.4.4. *Функционал $\Pi : V \to \mathbb{R}$ называется коэрцитивным, если*

$$\Pi(u) \ \to \ +\infty \quad \textit{при} \quad \|u\| \to \infty.$$

Определение 1.4.5. *Функционал $\Pi : V \to \mathbb{R}$ называется слабо полунепрерывным снизу в точке u, если из условия $u_n \to u$ слабо в V при $n \to \infty$ следует*

$$\liminf_{n\to\infty} \Pi(u_n) \geq \Pi(u).$$

Определение 1.4.6. *Точка $u \in K$ называется точкой минимума функционала Π на множестве K, если*

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in K.$$

Теперь приведем основную теорему существования точки минимума [7].

Теорема 1.4.1. *Пусть V – рефлексивное банахово пространство, а подмножество $K \subset V$ – выпукло и замкнуто. Если $\Pi : V \to R$ – коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу функционал, то задача*

$$\inf_{v\in K} \Pi(v) \tag{1.4.2}$$

имеет решение.

Если кроме того, на функционал Π наложить требование выпуклости и дифференцируемости, то задача (1.4.2) будет эквивалентна некоторому вариационному неравенству [121].

Определение 1.4.7. *Говорят, что функционал Π дифференцируем по Гато в точке $u \in V$, если существует линейный непрерывный функционал $\Pi' \in V^*$ такой, что для каждого $v \in V$*

$$\Pi'_u(v) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Pi(u+\lambda v) - \Pi(u)}{\lambda}.$$

Лемма 1.4.2. *Пусть K – выпуклое множество, функционал Π – выпуклый и дифференцируемый по Гато. Тогда задача (1.4.2) эквивалентна вариационному неравенству*

$$u \in K, \quad \Pi'_u(v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.4.3}$$

Лемма 1.4.3. *Если в дополнение к лемме 1.4.2 потребовать, что функционал* Π *является строго выпуклым, то решение задачи минимизации* (1.4.2) *единственно.*

Замечание 1.4.1. *Если рассматривать задачу минимизации на всем пространстве* V*, то в условиях леммы 1.4.2 вариационное неравенство* (1.4.3) *примет вид вариационного равенства — уравнения Эйлера:*

$$\Pi'_u(v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{1.4.4}$$

Вариационные равенства вида (1.4.4) будут возникать, когда мы будем рассматривать задачи равновесия упругих тел, в которых не накладываются односторонние ограничения на решения.

1.5 Математическая модель упругой пластины с трещиной

В настоящем параграфе приведем необходимые сведения, которые позволяют сформулировать математическую модель пластины Тимошенко, содержащей сквозную вертикальную трещину.

Пластиной называется тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми, называемое толщиной пластины, мало по сравнению с его другими размерами. Тело называется трансверсально-изотропным, если через каждую точку тела можно провести плоскость перпендикулярно одной и той же линии так, что механические свойства в этой плоскости не зависят от направлений. Для трансверсально-изотропной пластины, будем считать, что плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластины [86].

В соответствии с моделью Тимошенко, нормальное до деформации волокно после деформации остается прямолинейным, но не перпендикулярным к срединной поверхности. При этом считается, что длина волокна остается постоянной [12]. Последнее означает, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной плоскости можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями (нормальными и касательными напряжения в срединной поверхности).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, кривая γ содержится в области Ω. Полагаем, что γ не содержит своих концевых точек $\partial\gamma$. Будем считать, что относительно Ω, $\partial\Omega$ и γ выполнены предположения параграфа 1.2.

Предположим, что трансверсально-изотропная однородная пластина имеет постоянную толщину $2h$. В диссертационной работе будем рассматривать пластины постоянной толщины. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы область $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ задавала проекцию пластины со сквозной трещиной на срединную плоскость $z = 0$. При этом кривая γ соответствует трещине в пластине. Это означает, что сквозная вертикальная трещина моделируется цилиндрической поверхностью: $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -h \leq z \leq h$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. Слово "вертикальная" означает то, что поверхность, описывающая трещину перпендикулярна к срединной горизонтальной плоскости пластины.

В работе используется подход Лагранжа, при котором каждая частица сплошной среды в естественном состоянии имеет заданные координаты, и задача состоит в том, чтобы найти перемещения, деформации и напряжения как функции координат.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной плоскости, $x = (x_1, x_2)$, где $W = (w_1, w_2)$ — горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)), а w — вертикальные перемещения. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$. Обобщенный вектор перемещений $\eta = (W, w, \psi)$. Будем считать, в соответствии положениями классической теории упругости, что величины χ, ψ являются бесконечно малыми. Для удобства будем также использовать обозначения η_i, $i = 1, 2..., 5$ для компонент вектора η, при этом $(\eta_1, \eta_2) = W$, $\eta_3 = w$, $(\eta_4, \eta_5) = \psi$.

Пусть (x, z) — координаты некоторой точки пластины, где $x = (x_1, x_2)$, $z \in [-h, h]$. Перемещения этой точки вдоль срединной плоскости (по–горизонтали) $W^z = ({w_1}^z, {w_2}^z)$ и прогибы w^z зависят от $\psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$, $W(x) = (w_1, w_2)$, $w(x)$ следующим образом:

$$ {w_1}^z = w_1 + z\psi_1, \quad {w_2}^z = w_2 + z\psi_2, \quad w^z = w. \tag{1.5.1} $$

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для модели Тимошенко [86]. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам:

$$ \varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\Big), \ i, j = 1, 2. $$

Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$ m_{ij}(\psi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \tag{1.5.2} $$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование) где ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$ c_{iiii} = D, \ c_{iijj} = D\text{æ}, \ c_{ijij} = c_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2, \ i, j = 1, 2, \ i \neq j, $$

D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона. Для вектора поперечных сил $q = (q_1, q_2)$ выполняются следующие равенства [86]:

$$ q_i(w, \psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}) \tag{1.5.3} $$

где $\Lambda = 2\kappa' G h$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

Удельная энергия деформации пластины (стр. 32, [87]) или плотность энергии деформации, отнесенная к единице площади, выражается формулой

$$ \frac{1}{2} b(\eta, \eta), $$

где

$$ b(\eta, \bar\eta) = \sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + q_i(w, \psi)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i), $$

Полная энергия деформации пластины получается интегрированием по области, занимаемой пластиной:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} b(\eta,\eta) \tag{1.5.4}$$

Функционал энергии имеет вид [86]

$$\Pi(\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} b(\eta,\eta)-\int\limits_{\Omega_\gamma} F\eta, \tag{1.5.5}$$

где $F=(f_1,f_2,...f_5)$, $F\eta=f_i\eta_i$.

Другой моделью упругой пластины, является модель пластины Кирхгофа–Лява. Вывод соотношений для этой модели основан на следующих гипотезах: любое нормальное к срединной поверхности волокно до деформации остается нормальным к срединной поверхности и после деформации, нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с основными продольными напряжениями [12].

Для этой модели горизонтальные перемещения $W=(w_1,w_2)$ и прогибы w срединной плоскости пластины определяют перемещения всех точек пластины. При этом перемещения W^z и прогибы w^z произвольной точки пластины зависят от срединных по следующему правилу

$$w^z=w,\quad W^z=W-z\nabla w,\quad z\in[-h,h]\,.$$

Уравнения состояния имеют вид:

$$\sigma_{ij}(W)=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W),\quad m_{ij}=d_{ijkl}w_{,kl},\ i,j=1,2, \tag{1.5.6}$$

где тензоры $\{c_{ijkl}\}$ и $\{d_{ijkl}\}$ удовлетворяют условиям симметричности и положительной определенности. Тензор $m=\{m_{ijkl}\}$ называется тензором моментов.

В дальнейшем мы будем считать, что пластина является однородной. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} m_{11} &= -D(w_{,11} + æ w_{,22}) \\ m_{22} &= -D(w_{,22} + æ w_{,11}) \\ m_{12} &= m_{21} = -D(1 - æ) w_{,12}, \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

где D обозначает цилиндрическую жесткость пластины, æ – коэффициент Пуассона, $æ \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

1.5.1 Обобщенные формулы Грина

При анализе краевых задач теории упругости мы будем неоднократно пользоваться формулами Грина, доказательство которых можно найти в [7, 30, 54, 105].

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ и введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$Y(\Omega) = \{u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega)^2 \mid \quad \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} (uv + \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v)\, dx.$$

Обозначим через $H^{-s}(\partial\Omega)$ пространство, сопряженное к $H^s(\partial\Omega)$. Двойственность между этими пространствами обозначаем через $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{s,\partial\Omega}$, $s > 0$.

Теорема 1.5.1. *Пусть граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{0,1}$, n – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $u \in Y(\Omega)$. Существует линейный непрерывный оператор $\Lambda : Y(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$, однозначно определяющий на $\partial\Omega$ значения $\Lambda u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, и при этом справедлива обобщенная формула Грина:*

$$\int\limits_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dx = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot v \, dx + \langle \Lambda u, v \rangle_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.5.8}$$

Для гладких функций u, определенных в $\bar{\Omega}$, имеем

$$\Lambda u = u \cdot n \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Обратно, существует линейный непрерывный оператор $H^{-1/2}(\partial\Omega) \to Y(\Omega)$ *такой, что для заданного* $\Lambda_0 \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *можно построить функцию* $u \in Y(\Omega)$, *обладающую свойствами* $\Lambda u = \Lambda_0$ *на* $\partial\Omega$.

Заметим, что если функция $u \in Y(\Omega)$ имеет представление

$$u = \nabla w, \quad w \in H^1(\Omega),$$

то (1.5.8) принимает вид

$$\int\limits_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = -\int\limits_\Omega v \Delta u \, dx + \langle \frac{\partial w}{\partial n}, v \rangle_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

где $\partial w/\partial n$ обозначает элемент из $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, совпадающий с обычной производной по нормали от гладкой функции w, определенной на $\bar{\Omega}$.

Приведем формулу Грина для оператора линейной теории упругости, определенных в областях с гладкими границами.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Введем тензоры напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i,j = 1,2,$$

где $u = (u_1, u_2)$ – вектор перемещений в Ω.

В силу симметрии $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ji}(u)$ мы можем проинтегрировать по частям:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v) \, dx = -\int\limits_\Omega \sigma_{ij,j}(u) v_i \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(u) n_j v_i \, ds.$$

Разложим векторы $(\sigma_{1j}(u)n_j, \sigma_{2j}(u)n_j)$, $v = (v_1, v_2)$ на нормальную и касательные составляющие на границе:

$$\sigma_{ij}(u)n_j = \sigma_n(u)n_i + \sigma_{\tau i}(u), \ i = 1,2, \sigma_n(u) = \sigma_{ij}(u)n_j n_i; \tag{1.5.9}$$

$$v_i = v_n n_i + v_{\tau i}, \quad i = 1,2, \quad v_n = v_i n_i. \tag{1.5.10}$$

Поскольку $\sigma_{\tau i}(u)n_i = \sigma_{ij}(u)n_j n_i - \sigma_n(u) = 0$, $v_{\tau i}n_i = v_i n_i - v_n = 0$, получаем

$$\sigma_{ij}(u)n_j v_i = (\sigma_n(u)n_i + \sigma_{\tau i}(u))(v_n n_i + v_{\tau i}) = \sigma_n(u)v_n + \sigma_{\tau i}(u)v_{\tau i}.$$

Таким образом, для гладких функций u, v будем иметь формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, dx = -\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u)v_i\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} (\sigma_n(u)v_n + \sigma_{\tau i}(u)v_{\tau i})\, ds.$$

Введем далее пространство

$$H_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega)^2 \mid \quad \sigma_{ij,j}(u) \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_{\mathrm{div}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{2} \left(\|u_i\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\sigma_{ij,j}(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Справедливо следующее утверждение (см. [104, 121]).

Теорема 1.5.2. *Пусть граница $\partial\Omega$ имеет гладкость $C^{1,1}$, а функция u принадлежит пространству $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Тогда существует линейный непрерывный оператор $H_{\mathrm{div}}(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)^2$, который однозначно определяет на границе $\partial\Omega$ значения*

$$\sigma_n(u), \sigma_{\tau i}(u) \in H^{-1/2}(\partial\Omega),\ i = 1, 2, \quad \sigma_{\tau i}(u)n_i = 0,$$

и для всех $v \in H^1(\Omega)^2$ справедлива обобщенная формула Грина:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, dx = -\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u)v_i\, dx + \\ + \langle \sigma_n(u), v_n \rangle_{1/2,\partial\Omega} + \langle \sigma_{\tau i}(u), v_{\tau i} \rangle_{1/2,\partial\Omega}. \quad (1.5.11)$$

Наоборот, существует линейный непрерывный оператор $H^{-1/2}(\partial\Omega)^2 \to H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, такой что для любых заданных $\lambda_n, \lambda_{\tau i} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $i = 1, 2$, $\lambda_{\tau i}n_i = 0$, можно построить функцию $u \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, обладающую свойствами

$$\sigma_n(u) = \lambda_n, \quad \sigma_{\tau i}(u) = \lambda_{\tau i},\ i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Рассмотрим теперь область $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ с трещиной γ. Определим векторное пространство

$$H(\Omega_\gamma) = \{u \in H^1(\Omega_\gamma)^2 \mid \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H(\Omega_\gamma)} = \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)} + \sum_{i,j=1}^{2} \|u_{i,j}\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)},$$

и пространство

$$H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) = \{u \in H(\Omega_\gamma)^2 \mid \quad \sigma_{ij,j}(u) \in L_2(\Omega_\gamma),\ i = 1,2\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)} = \|u_i\|^2_{H(\Omega_\gamma)} + \sum_{i=1}^{2} \|\sigma_{ij,j}(u)\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)}.$$

Пусть существует $C^{0,1}$-гладкое продолжение трещины γ до замкнутого многообразия Σ в области Ω, с выбранным вектором единичной нормали ν. Тогда в силу теоремы 1.5.2 определены $\sigma^+_{ij}(u)\nu_j$ и $\sigma^-_{ij}(u)\nu_j$, $i = 1,2$, как элементы пространства $H^{-1/2}(\Sigma)$ на берегах Σ^+ и Σ^-. Определим множество

$$\tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) = \{u \in H_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) \mid \quad [\sigma_{ij}(u)\nu_j] = 0 \text{ на } \Sigma\}.$$

Теперь сформулируем обобщенную формулу Грина для оператора линейной теории упругости в области с трещиной [30].

Теорема 1.5.3. *Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ класса $C^{1,1}$. Пусть функция $u \in \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)$. Существует линейный непрерывный оператор*

$$\tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma) \to [H^{1/2}_{00}(\gamma)^*]^3,$$

который определяет на трещине γ единственным образом значения

$$\sigma_\nu(u),\ \sigma_{\tau i} \in H^{1/2}_{00}(\gamma)^*, \quad i = 1,2$$

и справедлива обобщенная формула Грина

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,dx = -\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(u)v_i\,dx -$$

$$- \langle \sigma_\nu(u), [v_\nu]\rangle_{00,1/2,\gamma} - \langle \sigma_{\tau i}(u), [v_{\tau i}]\rangle_{00,1/2,\gamma}$$

для произвольной $v \in H(\Omega_\gamma)$; скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{00,1/2,\gamma}$ обозначают двойственность между $H^{1/2}_{00}(\gamma)$ и $H^{1/2}_{00}(\gamma)^*$. Если u гладкая в $\overline{\Omega}_\gamma$ функция, то выполнены следующие равенства

$$\sigma_{\tau i}(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j - \sigma_\nu(u)\nu_i, \quad i = 1,2,$$

$$\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j\nu_i \quad \textit{на } \gamma.$$

Обратно, существует линейный непрерывный оператор

$$[H_{00}^{1/2}(\gamma)^*]^3 \to \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma),$$

который для любых заданных λ_ν, $\lambda_{\tau i} \in H_{00}^{1/2}(\gamma)^*$, $i = 1, 2$, *определяет функцию* $u \in \tilde{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_\gamma)$, *обладающую свойствами*

$$\sigma_\nu(u) = \lambda_\nu, \quad \sigma_{\tau i}(u) = \lambda_{\tau i},\ i = 1, 2, \quad \textit{на } \gamma.$$

В заключение раздела приведем формулу Грина для краевых задач теории пластин. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Определим билинейную форму B следующим образом

$$B(u, v) = \int\limits_\Omega (u_{,11}v_{,11} + u_{,22}v_{,22} + æ(u_{,11}v_{,22} + u_{,22}v_{,11}) + 2(1 - æ)u_{,12}v_{,12})\, dx,$$

где æ – постоянная, $0 < æ < 1/2$. Обозначим через $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Определим на границе $\partial\Omega$ величины

$$m(u) = æ\Delta u + (1 - æ)\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad t(u) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta u + (1 - æ)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right). \tag{1.5.12}$$

Здесь $\tau = (-n_2, n_1)$ – касательный вектор на $\partial\Omega$. Для достаточно гладких функций, интегрируя по частям, можно получить следующую формулу Грина [121]:

$$B(u, v) = \int\limits_\Omega v\Delta^2 u\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} m(u)\frac{\partial v}{\partial n}\, ds - \int\limits_{\partial\Omega} t(u)v\, ds. \tag{1.5.13}$$

1.5.2 О краевых условиях для пластины с трещиной

В этом разделе выведем соотношения, описывающие взаимное непроникания противоположных берегов трещины пластины. Выпишем формулы для компонент вектора перемещений $\chi^z = (w_1^z, w_2^z, w^z)$, в зависимости от z, для модели Тимошенко

$$w_1{}^z = w_1 + z\psi_1, \quad w_2{}^z = w_2 + z\psi_2, \quad w^z = w.$$

Условие непроникания берегов трещины, заключается в том, что разность перемещений χ^{z+} на положительном берегу трещины (относительно γ) и χ^{z-} — на отрицательном берегу в проекции на нормаль $\nu' = (\nu_1, \nu_2, 0)$ должна быть неотрицательной:

$$(\chi^{z+} - \chi^{z-})\nu' = ([w_1(z)], [w_2(z)], [w]) \cdot (\nu_1, \nu_2, 0) =$$
$$= [W(z)] \cdot \nu = [W_\nu] + z[\psi_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \quad (1.5.14)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная нормаль к кривой γ, через W_ν, ψ_ν обозначены скалярные произведения $W_\nu = W\nu = w_i\nu_i$, $\psi_\nu = \psi\nu = \psi_i\nu_i$, соответственно (см. рис. 1.1) . Подставив в данном неравенстве $z = h$ и $z = -h$, получим

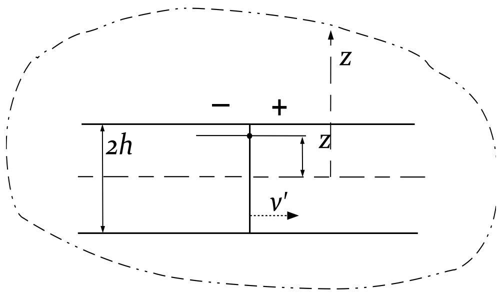

Рис. 1.1: Сечение пластины с трещиной.

условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины

$$[W_\nu] \geq h|[\psi_\nu]| \quad \text{на} \quad \gamma. \quad (1.5.15)$$

Условие (1.5.15) инвариантно относительно выбора направления нормали ν, так как при изменении направления на $-\nu$ значение скачка на берегах трещины также меняет знак.

Заметим, что хорошо известное условие непроникания для пластины Кирхгофа–Лява было получено аналогичными рассуждениями, и имеет вид [96, 114, 121]

$$[W_\nu] \geq h|[\frac{\partial w}{\partial \nu}]| \quad \text{на} \quad \gamma. \quad (1.5.16)$$

При выполнении гипотезы "прямых нормалей" Кирхгофа—Лява (см. [86]) вблизи трещины γ, т.е. при $w_{,i} + \psi_i = 0$ в окрестности трещины, неравенство (1.5.15) в точности принимает вид (1.5.16).

Определение 1.5.1. *Будем считать, что упругое тело жестко закреплено на части границы $\partial\Omega$, если вектор перемещений удовлетворяет условию*

$$\eta = 0 \quad \textit{или} \quad w_1 = w_2 = \psi_1 = \psi_2 = w = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

Как правило мы будем рассматривать краевые задачи с условием жесткого защемления на всей внешней границе. Однородные условия в работе используются с целью последующего применения неравенств Корна и Фридрихса-Пуанкаре. Заметим, что вместо выполнения однородных условий Дирихле на всей кривой $\partial\Omega$ можно требовать их выполнение лишь на части $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$, такой что $\mathrm{meas}(\Gamma_1) > 0$.

Глава 2

Краевые задачи теории трещин с граничными условиями типа неравенств

2.1 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину

В этом параграфе исследуется задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины (модели Тимошенко), содержащей сквозную вертикальную трещину. При этом на кривой задающей трещину, ставится краевое условие в виде неравенства, описывающее непроникание противоположных берегов трещины. Доказана однозначная разрешимость вариационной постановки задачи. Из вариационной постановки выведена полная система краевых условий, с помощью которой получена эквивалентная исходной дифференциальная постановка. Установлена дополнительная гладкость решения по сравнению с заданной в вариационной формулировке. Доказана бесконечная дифференцируемость решения при дополнительных предположениях на функцию, задающую внешние нагрузки, и на значения функций перемещений вблизи кривой, описывающей трещину.

2.1.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, а кривая Γ_c задается в виде графика достаточно гладкой функции g:

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = g(x), 0 < x < l\}.$$

При этом Γ_c содержится строго внутри Ω т.е. $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$. Считаем, что область $\Omega_c = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_c$ можно разбить продолжением кривой Γ_c на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ соответственно так, чтобы $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\Gamma_c \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\mathrm{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma) > 0$, $i = 1, 2$. Это предположение достаточно для выполнения неравенств Корна и Пуанкаре в негладкой области Ω_c.

Нормаль к кривой Γ_c обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Считаем, что проекция пластины на срединную плоскость соответствует области Ω_c. Предположим, что пластина содержит сквозную вертикальную трещину, которая описывается в срединной плоскости кривой Γ_c. Это означает, что поверхность трещины можно задать в виде множества

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \Gamma_c, -h \le z \le h\},$$

где $|z|$ — расстояние до срединной поверхности пластины, а $2h$ — толщина пластины. Обозначим через $\chi = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, где $W = (w_1, w_2)$ и w горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Считаем один из берегов разреза положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением нормали ν. В случае, когда след функции v берется на положительном берегу Γ_c^+ , применим обозначение $v^+ = v|_{\Gamma_c^+}$, аналогично для отрицательного берега $v^- = v|_{\Gamma_c^-}$. Скачок функции на Γ_c обозначим через $[v] = v^+ - v^-$. Введем обозначения для тензоров описывающих деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \; i, j = 1, 2,$$

$$(v,_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}), \quad x_1 = x,\ x_2 = y.$$

Тензор моментов введем по формулам $m_{ij},\ i,j = 1,2$:

$$m_{11}(\psi) = D(\varepsilon_{11}(\psi) + æ\varepsilon_{22}(\psi)),$$

$$m_{22}(\psi) = D(\varepsilon_{22}(\psi) + æ\varepsilon_{11}(\psi)),$$

$$m_{12}(\psi) = m_{21}(\psi) = D(1 - æ)\varepsilon_{12}(\psi),$$

где $D, æ$ — постоянные, $D > 0, \quad 0 < æ < \frac{1}{2}$; D — цилиндрическая жесткость пластины, $æ$ — коэффициент Пуассона. Аналогично определим тензор усилий $\sigma_{ij},\ i,j = 1,2$

$$\sigma_{11}(W) = \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_{11}(W) + æ\varepsilon_{22}(W)),$$

$$\sigma_{22}(W) = \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_{22}(W) + æ\varepsilon_{11}(W)),$$

$$\sigma_{12}(W) = \sigma_{21}(W) = \frac{3D}{h^2}(1 - æ)\varepsilon_{12}(W).$$

Поперечные силы в данной модели записываются следующим образом

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w,_i + \psi_i), \quad i = 1,2,$$

где $\Lambda = 2\kappa' Gh$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины [86]. На внешней границе зададим краевые условия, которые описывают жесткое защемление

$$\psi = W = (0,0), \quad w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.1.1}$$

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_c)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_c)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Введем обозначение

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c)^5.$$

Через $H(\Omega)$ обозначим следующее пространство

$$H(\Omega) = H_0^1(\Omega)^5.$$

Определим билинейную форму

$$B(\eta, \bar{\eta}) = \int\limits_{\Omega_c} b(\eta, \bar{\eta}) dx,$$

где

$$b(\eta, \bar{\eta}) = \big\{\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + q_i(w, \psi)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i)\big\}.$$

С учетом записанных выше формул, функционал потенциальной энергии пластины имеет вид [12, 86]

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B(\eta, \eta) - \int\limits_{\Omega_c} F\eta dx,$$

функция $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in L_2(\Omega_c)^5$ описывает воздействие внешних нагрузок. Всюду используем правило суммирования по повторяющимся индексам.

На внутренней границе Γ_c потребуем выполнение условия взаимного непроникания противоположных берегов трещины (см. раздел 1.5.2)

$$[W_\nu] \geq h|[\psi_\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{2.1.2}$$

где $W_\nu = W\nu = w_i\nu_i$, $\psi_\nu = \psi\nu = \psi_i\nu_i$. Рассмотрим следующее множество допустимых функций

$$K = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_c) |\ \eta \text{ удовлетворяет } (2.1.2)\}.$$

Задачу о равновесии пластины можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала энергии $\Pi(\eta)$ на множестве допустимых функций K, т.е. требуется найти функцию $\xi \in K$, такую что

$$\Pi(\xi) = \min_{\eta \in K} \Pi(\eta). \tag{2.1.3}$$

2.1.2 Существование и единственность решения

Докажем сначала коэрцитивность функционала энергии. Применяя несложные алгебраические выкладки, можно показать, что имеют место неравенства

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx \geq D(1-æ)\int\limits_{\Omega_c}\varepsilon_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx,$$
$$\int\limits_{\Omega_c}\sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)dx \geq \tfrac{3D}{h^2}(1-æ)\int\limits_{\Omega_c}\varepsilon_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)dx.$$

Далее, используя неравенство Корна (1.3.1), находим

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx \geq C_1\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)^2}, \quad \int\limits_{\Omega_c}\sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)dx \geq C_2\|W\|^2_{H^1(\Omega)^2}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_c}\big(m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)+\sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)+\Lambda(w,_i+\psi_i)(w,_i+\psi_i)\big)dx \geq$$

$$\geq C_1\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)^2}+C_2\|W\|^2_{H^1(\Omega)^2}+\Lambda\Big((1-\epsilon)\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\big(1-\frac{1}{\epsilon}\big)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)^2}\Big).$$

Возьмем в последнем выражении в качестве $\epsilon = 1+\dfrac{C_1}{2\Lambda}$ и применим обобщенное неравенство Пуанкаре. В результате получим следующую оценку

$$B(\eta,\eta) \geq C_3\|\eta\|^2_{H(\Omega_c)}, \tag{2.1.4}$$

где $C_3 = \min\left\{\dfrac{C_1}{2}, C_2, C_1\cdot C_4\cdot(2\Lambda+C_1)^{-1}\right\}$ — положительная постоянная, $C_4>0$ — постоянная в обобщенном неравенстве Пуанкаре:

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^2} \geq C_4\|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

Остается выписать последнее неравенство, обеспечивающее коэрцитивность функционала энергии

$$\Pi(\eta) \geq \frac{C_3}{2}\|\eta\|^2_{H(\Omega_c)} - \|F\|_{L_2(\Omega_c)^5}\|\eta\|_{H(\Omega_c)} \quad \forall\eta\in H(\Omega_c).$$

Функционал энергии дифференцируем, т.е. для него определена производная Π'_η для всех $\eta\in H(\Omega_c)$. Слабая полунепрерывность и строгая выпуклость функционала следуют из справедливости неравенства

$$(\Pi'_{\eta_1}-\Pi'_{\eta_0})(\eta_1-\eta_0) \geq C_3\|\eta_1-\eta_0\|^2 \quad \forall\,\eta_1,\ \eta_0\in H(\Omega_c).$$

Выпуклость и замкнутость множества K вместе с указанными свойствами функционала энергии гарантируют существование и единственность решения задачи (2.1.3). Обозначим решение задачи (2.1.3) через $\xi = (U,u,\phi)$.

Поскольку множество K, определяемое неравенством (2.1.2), является выпуклым, задача (2.1.3) эквивалентна вариационному неравенству

$$B(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_c} F(\eta - \xi) dx \quad \forall \eta \in K. \tag{2.1.5}$$

Подставляя в последнее вариационное неравенство сначала $\eta = (\xi + \bar{\eta})$, а затем $\eta = (\xi - \bar{\eta})$ с функцией $\bar{\eta} \in C_0^\infty(\Omega_c)^5$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar{W}) + q_i(u,\phi)(\bar{w},_i + \bar{\psi}_i) \big) dx = \int\limits_{\Omega_c} F\bar{\eta} dx. \tag{2.1.6}$$

Из (2.1.6), учитывая независимость между финитными бесконечно дифференцируемыми функциями $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$, выведем соотношения

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + q_i(u,\phi)\bar{\psi}_i \big) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_{3+i}\bar{\psi}_i dx \quad \forall \bar{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_c)^2, \quad i = 1,2,$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar{W}) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i \bar{w}_i dx \quad \forall \bar{W} \in C_0^\infty(\Omega_c)^2, \quad i = 1,2,$$

$$\int\limits_{\Omega_c} q_i(u,\phi)\bar{w},_i\, dx = \int\limits_{\Omega_c} f_3 \bar{w} dx \quad \forall \bar{w} \in C_0^\infty(\Omega_c).$$

Заметив, что имеют место представления

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) dx = \int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\phi)\bar{\psi}_{i,j} dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar{W}) dx = \int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\bar{w}_{i,j} dx,$$

из предыдущих трех интегральных равенств заключаем, что в области Ω_c в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$m_{ij,j}(\phi) - q_i(u,\phi) = -f_{3+i}, \quad i = 1,2, \tag{2.1.7}$$

$$\sigma_{ij,j}(U) = -f_i, \quad i = 1,2, \tag{2.1.8}$$

$$q_i,_i(u,\phi) = -f_3. \tag{2.1.9}$$

2.1.3 Краевые условия на кривой Γ_c

В этом разделе мы получим эквивалентную дифференциальную постановку задачи (2.1.3). А именно, исходя из вариационного неравенства (2.1.5), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой Γ_c. Чтобы извлечь из неравенства (2.1.5) соотношения на внутренней границе Γ_c, будем использовать формулы Грина. При этом предполагаем, что кривая Γ_c может быть продолжена до замкнутой достаточно гладкой кривой Σ, делящей область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, с гладкими границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$ (см. рис. 2.1). Кривую Σ можно считать, не нарушая общности, такой что ее внешняя нормаль по отношению к области Ω_1 совпадает с нормалью ν на Γ_c. Обозначим через ν и τ нормальный и касательный векторы к Σ соответственно. Отметим, что кривая Σ может быть выбрана произвольно с точностью до наложенных на нее требований. Далее будем использовать формулы Грина по отношению к областям Ω_1 и Ω_2. Рассматриваемые нами функции принадлежат простран-

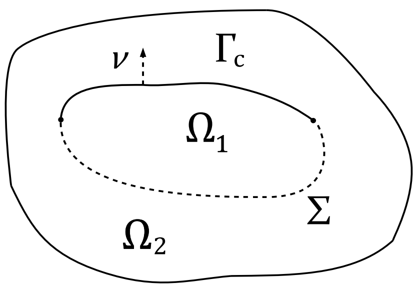

Рис. 2.1: Продолжение кривой Γ_c до Σ.

ству $H^1(\Omega_c)$, следовательно их следы $v^+ = v|_{\Sigma^+}$ (след относительно области Ω_2), $v^- = v|_{\Sigma^-}$ (след относительно области Ω_1) на кривой Σ будут принадлежать пространству $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$. Отметим также, что производные функций из пространства $H^1(\Omega_c)$ в общем случае не имеют следы, поэтому в этом разделе мы предполагаем дополнительную гладкость функции решения ξ (достаточно потребовать, чтобы функция ξ принадлежала пространству $H^2(\Omega_c)$).

Для любой подобласти $S \subset \Omega_c$ с достаточно гладкой границей ∂S справедлива следующая формула Грина (см. теорему 1.5.2)

$$\int\limits_S \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_S \sigma_{ij,j}(U)w_i dx +$$

$$+\int\limits_{\partial S} \big(\sigma_n(U)W_n + \sigma_{\mu i}(U)W_{\mu i}\big)ds \quad \forall\, W \in H^1(S)^2, \tag{2.1.10}$$

где $n = (n_1, n_2)$ — нормаль к ∂S, $\mu = (-n_2, n_1)$ — единичный касательный вектор к ∂S, $\sigma_n(U)n$ и $\sigma_\mu(U)$ — нормальная и касательная составляющие вектора $\{\sigma_{ij}(U)n_j\}$ соответственно, при этом

$$\sigma_{ij}(U)n_j = \sigma_n(U)n_i + \sigma_{\mu i}(U),\ i = 1,2, \quad \sigma_n(U) = \sigma_{ij}(U)n_j n_i,$$

$$w_i = W_n n_i + W_{\mu i}, \quad i = 1,2, \quad W_n = w_i n_i,$$

$$\sigma_\mu(U) = (\sigma_{\mu 1}(U), \sigma_{\mu 2}(U)), \quad W_\mu = (W_{\mu 1}, W_{\mu 2}).$$

В соответствии с обозначениями, для области Ω_1, из формулы (2.1.10) следует справедливость равенства

$$\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij,j}(U)w_i dx +$$

$$+\int\limits_{\Sigma} \big(\sigma_\nu(U)W_\nu + \sigma_{\tau i}(U)W_{\tau i}\big)ds \quad \forall\, W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \tag{2.1.11}$$

Возьмем теперь в формуле (2.1.10) вместо S область Ω_2. С учетом того, что для функции W принадлежащей $H^{1,0}(\Omega_c)^2$ выполняется равенство $W = (0,0)$ на внешней границе Γ, а внешняя нормаль к Σ по отношению к Ω_2 равна $(-\nu)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij,j}(U)w_i dx -$$

$$-\int\limits_{\Sigma} \big(\sigma_\nu(U)W_\nu + \sigma_{\tau i}(U)W_{\tau i}\big)ds \quad \forall\, W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \tag{2.1.12}$$

Уместно заметить, что в формуле (2.1.11) значения следов функций $\sigma_\nu(U)$, $\sigma_{\tau i}(U)$, $i = 1,2$, а также значения следов W_ν, $W_{\tau i}$, $i = 1,2$ берутся по отношению к Σ^-, а в формуле (2.1.12) к Σ^+. Обозначим через $\sigma_\nu(U)^\pm$, $\sigma_{\tau i}(U)^\pm$, $i = 1,2$ следы функций $\sigma_\nu(U)$, $\sigma_{\tau i}(U)$, $i = 1,2$ на $\Sigma^\pm$, соответственно.

Сложив равенства (2.1.11) и (2.1.12) с учетом того, что $\sigma_\nu(U)^+ = \sigma_\nu(U)^-$, $\sigma_{\tau i}(U)^+ = \sigma_{\tau i}(U)^-$, $i = 1, 2$ на $\Sigma \setminus \Gamma_c$ получим

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij,j}(U)w_i dx -$$
$$-\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu(U)W_\nu + \sigma_{\tau i}(U)W_{\tau i}\big)\Big]ds \quad \forall\, W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \qquad (2.1.13)$$

Аналогично для произвольной функции $\psi \in H^{1,0}(\Omega_c)^2$ справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx = -\int\limits_{\Omega_c} m_{ij,j}(\phi)\psi_i dx -$$
$$-\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(m_\nu(\phi)\psi_\nu + m_{\tau i}(\phi)\psi_{\tau i}\big)\Big]ds, \qquad (2.1.14)$$

где величины $m_\nu(\phi)$, $m_{\tau i}(\phi)$, $i = 1, 2$ определяются аналогично предыдущим формулам, записанным для $\sigma_\nu(U)$, $\sigma_{\tau i}(U)$, $i = 1, 2$, (см. формулу (2.1.10)). Такими же рассуждениями, применяя другую формулу Грина (см. теорему 1.5.1), для произвольной функции $w \in H^{1,0}(\Omega_c)^2$ получим следующие равенства

$$\int\limits_{\Omega_c} \nabla u \nabla w dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot w ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \triangle u dx, \qquad (2.1.15)$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \phi \nabla w dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \phi_\nu \cdot w ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \phi_{i,i} dx. \qquad (2.1.16)$$

Используя приведенные формулы (2.1.13)—(2.1.16), выведем краевые условия на кривой Γ_c. Подставив в вариационное неравенство (2.1.5) функции вида $\eta = (\xi \pm \bar\eta)$ с произвольными пробными функциями $\bar\eta \in H(\Omega)$, получим два неравенства. Сравнив их друг с другом, выведем

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar W) +$$
$$+ q_i(u, \phi)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)\big)dx = \int\limits_{\Omega_c} F\bar\eta dx \quad \forall\, \bar\eta \in H(\Omega). \qquad (2.1.17)$$

Возьмем теперь в равенстве (2.1.17) функцию $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$ такую, что $\bar{W} = (0,0)$, $\bar{\psi} = (0,0)$. Это дает равенство

$$\int\limits_{\Omega_c} q_i(u,\phi)\bar{w}_{,i}\, dx = \int\limits_{\Omega_c} f_3 \bar{w} dx \quad \forall \bar{w} \in H^1_0(\Omega). \tag{2.1.18}$$

Применяя формулы Грина (2.1.15), (2.1.16), с учетом уравнения (2.1.9), из последнего равенства заключаем, что имеет место следующее выражение

$$\begin{aligned}\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)\bar{w} ds\Big] = \int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^+ \bar{w}^+ ds - \\ - \int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^- \bar{w}^- ds = 0 \quad \forall \bar{w} \in H^1_0(\Omega).\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Поскольку для $\bar{w} \in H^1_0(\Omega)$ выполняется $\bar{w}^+ = \bar{w}^-$, из равенства (2.1.19) следует, что

$$\Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big] = \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^+ - \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^- = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Аналогично, используя независимость значений $\bar{W}_\nu$, $\bar{W}_\tau$, $\bar{\psi}_\nu$, $\bar{\psi}_\tau$, $\bar{w}$, с помощью формул Грина, из равенства (2.1.17) можно вывести следующие соотношения

$$\begin{aligned}&[\sigma_\tau(U)] = [m_\tau(\phi)] = (0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \\ &[\sigma_\nu(U)] = [m_\nu(\phi)] = \Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Далее выведем равенства

$$\begin{aligned}&(\sigma_{\tau 1}(U), \sigma_{\tau 2}(U)) = (m_{\tau 1}(\phi), m_{\tau 2}(\phi)) = (0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \\ &\frac{\partial w}{\partial \nu} + \phi_\nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

В самом деле, выберем пробную функцию $\eta = (\xi \pm \bar{\eta})$, так чтобы $\bar{\eta} = (\bar{W}, 0, 0, 0)$, $\bar{W}_\nu = 0$. Для таких тестовых функций из неравенства (2.1.5) с помощью равенств (2.1.8), (2.1.13) и (2.1.20) можно получить следующее соотношение

$$\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i}(U)\bar{W}_{\tau i} ds\Big] = \int\limits_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i}(U)[\bar{W}_{\tau i}] ds = 0.$$

Далее, принимая во внимание произвольность значений $\bar{W}_{\tau i}$, $i = 1, 2$, следует первая часть равенств (2.1.21). Аналогично, взяв пробную функцию $\bar{\eta}$, такую что $\eta = (0, 0, 0, \bar{\psi})$, $\bar{\psi}\nu = 0$, устанавливаем вторую часть равенств (2.1.21). Взяв теперь пробную функцию вида $\bar{\eta} = (0, 0, \bar{w}, 0, 0)$ с произвольной функцией $\bar{w} \in H^{1,0}(\Omega_c)$, нетрудно убедиться в справедливости оставшегося последнего равенства в (2.1.21).

Благодаря выведенным равенствам (2.1.20), (2.1.21), вариационное неравенство (2.1.5) с помощью формул Грина (2.1.13)—(2.1.16) преобразовывается к виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu(U)[\bar{W}_\nu - U_\nu] + m_\nu(\phi)[\bar{\psi}_\nu - \phi_\nu]\big) ds \le 0 \quad \forall \bar{\eta} \in K. \tag{2.1.22}$$

Из последнего неравенства извлечем систему соотношений

$$\sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu] = 0, \quad -h\sigma_\nu(U) \ge |m_\nu(\phi)| \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.1.23}$$

Взяв вместо $\bar{\eta}$ в (2.1.22) функции $\bar{\eta} = 0$, $\bar{\eta} = 2\xi$, получим интегральное тождество

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu]\big) ds = 0. \tag{2.1.24}$$

Из (2.1.22) и (2.1.24) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu(U)[\bar{W}_\nu] + m_\nu(\phi)[\bar{\psi}_\nu]\big) ds \le 0 \quad \forall \bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi}) \in K. \tag{2.1.25}$$

Подставив в (2.1.25) пробные функции двух видов: $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \frac{\bar{W}}{h})$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, -\frac{\bar{W}}{h})$, такие что $\bar{W} \in H^{1,0}(\Omega)^2$, $[\bar{W}_\nu] \ge 0$, можно получить два разных неравенства. Сравнивая их, выведем

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(h\sigma_\nu(U) + |m_\nu(\phi)|\big)[\bar{W}_\nu] ds \le 0 \quad \forall \bar{W} \in H^{1,0}(\Omega)^2 : \ [\bar{W}_\nu] \ge 0.$$

Отсюда имеем

$$-\sigma_\nu(U) \ge \frac{|m_\nu(\phi)|}{h} \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

С учетом последнего неравенства и соотношения $[U_\nu] \geq h|[\phi_\nu]|$, справедливого на Γ_c, из (2.1.24) получим

$$\sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Таким образом, из вариационного неравенства следует дифференциальная постановка, состоящая из уравнений равновесия (2.1.7)—(2.1.9), краевых условий (2.1.1) на внешней границе Γ и (2.1.2), (2.1.20), (2.1.21), (2.1.23) на внутренней границе Γ_c.

Пусть теперь $\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_c)$ — решение дифференциальной постановки задачи. Предположим, что имеют место соотношения (2.1.7)—(2.1.9), краевые условия (2.1.1) на внешней границе Γ и (2.1.2), (2.1.20), (2.1.21), (2.1.23) на внутренней границе Γ_c. Покажем, что тогда ξ является решением вариационного неравенства (2.1.5), а значит решением задачи (2.1.3).

Умножим равенства (2.1.8) на $(w_i - u_i)$ для каждого $i = 1, 2$, соответственно, а затем просуммируем по i и проинтегрируем по Ω_c. Для каждой подобласти Ω_i, $i = 1, 2$, применяя формулы Грина, получим

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W - U)dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i(w_i - u_i)dx - \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \sigma_\nu(U)(W_\nu - U_\nu) + \\ + \sigma_{\tau i}(U)(W_{\tau i} - U_{\tau i})ds\Big] \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.1.26)$$

Заметим, что в последнем равенстве, слагаемые в правой части, содержащие множители $\sigma_{\tau i}(U)$, $i = 1, 2$, согласно (2.1.21) равны нулю. Умножим далее (2.1.7) на $(\psi_i - \phi_i)$ равенства, соответствующие $i = 1, 2$, просуммируем по i, а затем проинтегрируем по области Ω_c. Применяя формулу Грина (2.1.14), с учетом того, что $m_{\tau i}(\phi) = 0$ при $i = 1, 2$, получим

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi - \phi)dx + \Big[\int\limits_{\Gamma_c} m_\nu(\phi)(\psi_\nu - \phi_\nu)\Big]ds + \\ + \int\limits_{\Omega_c} q_i(u, \phi)(\psi_i - \phi_i)dx = \int\limits_{\Omega_c} f_{3+i}(\psi_i - \phi_i)dx \quad \forall \psi \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.1.27)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для равенства (2.1.9), использовав (2.1.15), (2.1.16) и (2.1.21), имеем

$$\int\limits_{\Omega_c} q_i(u,\phi)(w_{,i} - u_{,i})dx + \Lambda\Big[\int\limits_{\Gamma_c}\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)(w-u)ds\Big] =$$

$$= \int\limits_{\Omega_c} f_3(w-u)dx \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_c). \quad (2.1.28)$$

Просуммировав (2.1.26)—(2.1.28) с учетом соотношений (2.1.20), (2.1.21), выведем

$$B(\xi, \eta-\xi) - \int\limits_{\Omega_c} F(\eta-\xi)dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_c}\big(\sigma_\nu(U)[W_\nu - U_\nu] + m_\nu(\phi)[\psi_\nu - \phi_\nu]\big)ds. \qquad (2.1.29)$$

Далее покажем, что для функции $\eta = (W, w, \psi)$, принадлежащей множеству K, правая часть равенства (2.1.29) неотрицательна. Действительно, в силу (2.1.23), имеем

$$\int\limits_{\Gamma_c}\big(\sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu]\big)ds = 0.$$

Остается показать, что

$$\int\limits_{\Gamma_c}\big(\sigma_\nu(U)[W_\nu] + m_\nu(\phi)[\psi_\nu]\big)ds \le 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K.$$

Из (2.1.23) следует, что для произвольного $\eta = (W, w, \psi) \in K$ выполняется

$$\int\limits_{\Gamma_c}\big(\sigma_\nu(U)[W_\nu] + m_\nu(\phi)[\psi_\nu]\big)ds \le \int\limits_{\Gamma_c}\Big(\sigma_\nu(U)[W_\nu] - h\sigma_\nu(U)|[\psi_\nu]|\Big)ds =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu(U)([W_\nu] - h|[\psi_\nu]|)ds \le 0. \qquad (2.1.30)$$

В последней цепочке соотношений замыкающее выражение меньше нуля в силу (2.1.2) и второго соотношения из (2.1.23).

В итоге, для $\eta = (W, w, \psi) \in K$ правая, а следовательно, и левая части равенства (2.1.29) неотрицательны. Это означает справедливость вариационного неравенства (2.1.5). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.1. *Гладкая функция* $\xi = (U, u, \phi)$ *является решением вариационной задачи* (2.1.3) *тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи состоящей из уравнений равновесия* (2.1.7)–(2.1.9) *и краевых условий*

$$U = \phi = (0,0), \quad u = 0$$

на внешней границе Γ,

$$[U_\nu] \geq h|[\phi_\nu]|, \quad [\sigma_\nu(U)] = [m_\nu(\phi)] = 0, \quad \sigma_\tau(U) = m_\tau(\phi) = (0,0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu = 0, \quad \sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu] = 0, \quad -\sigma_\nu(U) \geq \frac{|m_\nu(\phi)|}{h}$$

на внутренней границе Γ_c.

2.1.4 Гладкость решения в случае нулевого раскрытия трещины

В этом разделе рассматривается вопрос о регулярности решений. До сих пор предполагалось, что берега трещины могут расходиться. Пусть теперь раскрытие трещины в некоторой окрестности точки $\bar{x}^0 = (x^0, y^0) \in \Gamma_c$ является нулевым. Это условие можно записать в виде

$$[\xi] = (0,0,0,0,0) \quad \text{на} \quad \mathcal{O}(\bar{x}^0) \cap \Gamma_c.$$

Докажем, что в этом случае, при дополнительном условии бесконечной дифференцируемости функции F в этой же окрестности $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$, решение ξ также является гладким в $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $F \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^5$ *и* $[\xi] = (0,0,0,0,0)$ *на* $\mathcal{O}(\bar{x}^0) \cap \Gamma_c$. *Тогда* $\xi \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^5$.

Доказательство. По условию теоремы имеют место соотношения $[U] = [\phi] = (0,0)$, $[u] = 0$ на $\mathcal{O}(\bar{x}^0) \cap \Gamma_c$. Следовательно (см. [65]),

$$U, \phi \in H^1(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2, \quad u \in H^1(\mathcal{O}(\bar{x}^0)).$$

Для начала рассмотрим уравнение (2.1.8), установим, что оно выполняется также в области $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$. Для этого подставим в вариационное неравенство (2.1.5) пробные функции $\eta = \xi \pm (\theta, 0, 0, 0)$ с функцией θ, принадлежащей пространству $C_0^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$. В результате, имеем

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\theta)dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i\theta_i dx. \tag{2.1.31}$$

Поскольку $U \in H^1(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$, $F \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^5$ и $\operatorname{supp}(\theta) \subset \mathcal{O}(\bar{x}^0)$, (2.1.31) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\theta)dx = \int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} \sigma_{ij}(U)\theta_{i,j}dx = \int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} f_i\theta_i dx. \tag{2.1.32}$$

Данные соотношения, в силу произвольности $\theta_i \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))$, $i = 1, 2$, определяют выполнение равенств (2.1.8) в смысле распределений в области $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$. Аналогично, получим

$$\int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} q_i(u,\phi)\theta_{,i}\, dx = \int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} f_3\theta dx \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0)), \tag{2.1.33}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} m_{ij}(\phi)\theta_{i,j}dx + \int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} q_i(u,\phi)\theta_i dx =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{O}(\bar{x}^0)} f_{3+i}\theta_i dx \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2, \quad i = 1, 2. \tag{2.1.34}$$

Соотношения (2.1.33) и (2.1.34) означают, что уравнения (2.1.7), (2.1.9) выполняются в смысле распределений в области $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$. Представим уравнения (2.1.7)—(2.1.9), выполненные в $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$, следующим образом

$$L(\phi) = \nabla u - (f_4, f_5), \tag{2.1.35}$$

$$M(U) = -(f_1, f_2), \tag{2.1.36}$$

$$N(u) = -f_3 - \Lambda\phi_{i,i}, \tag{2.1.37}$$

соответственно. Здесь L, M, N — эллиптические операторы.

Далее используем результаты о внутренней гладкости решений эллиптических уравнений (см. [54]). Из (2.1.36) следует, что $U \in C^{\infty}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$. Покажем, что

$$\phi \in H^l_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2, \;\; u \in H^l_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0)), \tag{2.1.38}$$

для произвольного $l = 1, 2, \ldots$ В самом деле, из (2.1.35) следует, что $\phi \in H^2_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$, тогда правая часть в (2.1.37) принадлежит $H^1_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))$, отсюда, в свою очередь, вытекает, что $u \in H^3_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))$. Аналогично, поскольку правая часть в (2.1.35) принадлежит $H^2_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$, имеем включение $\phi \in H^4_{loc}(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2$. Продолжая описанную схему, устанавливаем справедливость (2.1.38). Согласно теоремам вложения (см.[65]) заключаем, что

$$\phi \in C^k(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^2, \;\; u \in C^k(\mathcal{O}(\bar{x}^0)) \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Откуда и следует утверждение теоремы.

2.1.5 Дополнительная гладкость решения

В предыдущем разделе исследовалась регулярность решения при дополнительных предположениях выполненных для ξ, F. В данном разделе исследуется регулярность без дополнительных условий на решение ξ и функцию F, описывающую внешние нагрузки. Докажем, что решение, при дополнительном условии на геометрию кривой Γ_c, обладает дополнительной регулярностью по сравнению с гарантируемой вариационной постановкой.

Пусть $\bar{x}^0 = (x^0, y^0) \in \Gamma_c$ — фиксированная точка. Предположим, что пересечение $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$ границы Γ_c с некоторой окрестностью точки $\bar{x}^0$ параллельно оси Ox (см. рис. 2.2).

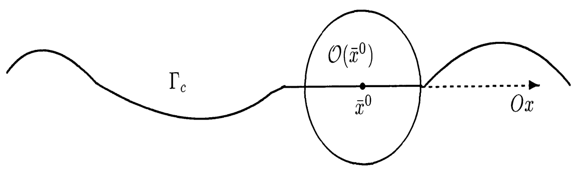

Рис. 2.2: Участок кривой Γ_c с точкой $\bar{x}^0$.

Обозначим через $R_\delta(\bar{x}^0)$ открытый круг радиуса δ с центром в точке $\bar{x}^0$, а через $R_\delta^+(\bar{x}^0)$, $R_\delta^-(\bar{x}^0)$ — полукруги (открытые множества), лежащие по разные стороны от кривой Γ_c. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены указанные выше предположения. Тогда имеют место следующие включения*

$$\xi \in H^2(R_\delta^+(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)^5, \quad \xi \in H^2(R_\delta^-(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)^5$$

для достаточно малых δ.

Доказательство. Выберем гладкую функцию β такую, что $\beta \equiv 1$ в $R_\delta(\bar{x}^0)$, $\beta \equiv 0$ вне $R_{3\delta/2}(\bar{x}^0)$, $0 \le \beta \le 1$ всюду. Включение $R_{2\delta}(\bar{x}^0) \subset \mathcal{O}(\bar{x}^0)$ предполагается выполненным.

Введем обозначения

$$d_{\pm\lambda} p(\bar{x}) = \lambda^{-1}(p(\bar{x} \pm \lambda e) - p(\bar{x})), \quad \Delta_\lambda = -d_{-\lambda} d_\lambda,$$

где $\bar{x} = (x, y)$, e — единичный вектор оси Ox, $0 < |\lambda| < \delta/2$. В этом случае функции

$$u_{i\lambda} = u_i + \frac{\lambda^2}{2}\beta^2 \Delta_\lambda u_i, \qquad \phi_{i\lambda} = \phi_i + \frac{\lambda^2}{2}\beta^2\Delta_\lambda \phi_i, \quad i = 1, 2;$$
$$u_\lambda = u + \frac{\lambda^2}{2}\beta^2\Delta_\lambda u$$

определены в области Ω_c. В соответствии с вышеуказанными предположениями нормаль ν имеет координаты $(0, 1)$ вблизи $\bar{x}^0$, значит условие непроникания (2.1.2) на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$ имеет вид

$$[u_2] \ge h|[\phi_2]|. \tag{2.1.39}$$

Далее заметим следующее: предположим, что функция $p \ge 0$ на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$. Легко проверить для введенной выше функции β неравенство

$$p + \frac{\lambda^2}{2}\beta^2\Delta_\lambda p \ge 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$$

выполнено.

Действительно, для $\bar{x} \in \Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$

$$p(\bar{x}) + \frac{\lambda^2}{2}\beta^2(\bar{x})\Delta_\lambda p(\bar{x}) =$$

$$= (1-\beta^2(\bar{x}))p(\bar{x}) + \frac{\beta^2(\bar{x})}{2}[p(\bar{x}-\lambda e) + p(\bar{x}+\lambda e)] \geq 0.$$

Поскольку ξ удовлетворяет на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$ неравенству (2.1.39), функция $\xi_\lambda = (u_{1\lambda}, u_{2\lambda}, u_\lambda, \phi_{1\lambda}, \phi_{2\lambda})$, в силу рассуждений для произвольной функции p, также удовлетворяет неравенству

$$[u_{2\lambda}] \geq h|[\phi_{2\lambda}]| \quad \text{на} \quad \Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0).$$

Отсюда следует, что

$$[(U_\lambda)_\nu] \geq h|[(\phi_\lambda)_\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Предыдущие рассуждения позволяют заключить, что ξ_λ принадлежит множеству K. Подставим ξ_λ в вариационное неравенство в качестве пробной функции. В итоге получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(m(\phi)\varepsilon(\beta^2\Delta_\lambda\phi) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\beta^2\Delta_\lambda U) +$$

$$+ q_i(u,\phi)((\beta^2\triangle_\lambda u)_{,i} + \beta^2\triangle_\lambda\phi_i)\Big)dx \geq \frac{2}{\lambda^2}\int\limits_{\Omega_c} F(\xi_\lambda - \xi)dx. \quad (2.1.40)$$

Можно проверить, что разность между интегралами $\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\beta^2\Delta_\lambda U)dx$ и $-\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(d_\lambda\beta U)\varepsilon_{ij}(d_\lambda\beta U)dx$, может быть оценена сверху правой частью следующего далее неравенства (2.1.41) (см. [150]). Аналогично, разность между $\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\beta^2\Delta_\lambda\phi)dx$ и $-\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(d_\lambda\beta\phi)\varepsilon_{ij}(d_\lambda\beta\phi)dx$, между выражением $\int\limits_{\Omega_c}(u_{,i}+\phi_i)(\beta^2\triangle_\lambda u)_{,i}+\beta^2\triangle_\lambda\phi_i)dx$ и следующим интегралом $-\int\limits_{\Omega_c}(d_\lambda(\beta u)_{,i}+d_\lambda(\beta\phi_i))(d_\lambda(\beta u)_{,i}+d_\lambda(\beta\phi_i))dx$ может быть также оценена сверху той же величиной. Таким образом, соотношение (2.1.40) влечет следующее неравенство

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(d_\lambda(\beta\phi))\varepsilon_{ij}(d_\lambda(\beta\phi)) + \sigma_{ij}(d_\lambda(\beta U))\varepsilon_{ij}(d_\lambda(\beta U)) +$$

$$+ \Lambda(d_\lambda(\beta u)_{,i} + d_\lambda(\beta\phi_i))(d_\lambda(\beta u)_{,i} + d_\lambda(\beta\phi_i))dx \le$$

$$\le \left(A + B \cdot \|d_\lambda(\beta\xi)\|_{H(\Omega_c)}\right), \quad (2.1.41)$$

где A, B — положительные величины не зависящие от λ. Применяя для левой части (2.1.41) неравенство (2.1.4), получим

$$C_3\|d_\lambda(\beta\xi)\|^2_{H^1(\Omega_c)} \le \left(A + B \cdot \|d_\lambda(\beta\xi)\|_{H(\Omega_c)}\right),$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от λ. Отсюда получаем равномерную оценку

$$\|d_\lambda(\beta\xi)\|_{H(\Omega_c)} \le c$$

для всех $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Последнее означает, что (см. [65])

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta\xi) \in H(\Omega_c).$$

Следовательно, функции $(u_i)_{,11}$, $(u_i)_{,12}$, $(\phi_i)_{,11}$, $(\phi_i)_{,12}$, $i = 1, 2$; $u_{,11}$, $u_{,12}$ принадлежат пространству $L_2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)$. Вместе с этим, равенство (2.1.8) может быть представлено следующим образом

$$U_{,22} = \Phi \quad \text{в} \quad R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c,$$

где функция Φ зависит от f_1, f_2, $(u_i)_{,11}$, $(u_i)_{,12}$, $i = 1, 2$; линейно. При этом ввиду установленных включений, справедливо включение $\Phi \in L_2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)^2$. Таким образом, производные U до второго порядка включительно принадлежат $L_2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)$. Рассмотрим теперь уравнение (2.1.7). В силу соотношений u, $\phi_i \in L_2(\Omega_c)$ при $i = 1, 2$, это уравнение можно записать в виде

$$\phi_{,22} = S \quad \text{в} \quad R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c.$$

Функция S является линейной комбинацией принадлежащих $L_2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)$ функций. Перепишем теперь уравнение (2.1.9) в виде

$$u_{,22} = -(\phi_{i,i} + u_{,11}) - \Lambda^{-1} f_3 \quad \text{в} \quad R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c.$$

Очевидно, что правая часть последнего равенства принадлежит $L_2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)$. Теорема доказана.

2.2 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига

Исследуется задача о равновесии композитной пластины, состоящей из двух частей: матрицы и упругого включения. Геометрия взаимного расположения частей определяется цилиндрической поверхностью, проходящей через замкнутый контур в срединной плоскости пластины (образующие поверхности направлены перпендикулярно к срединной плоскости пластины). Будем называть внутреннюю часть пластины (относительно замкнутой цилиндрической поверхности) упругим включением, а внешнюю часть — матрицей. Предполагаем, что свойства матрицы пластины позволяют описать ее деформирование с помощи модели Тимошенко. Для включения, которое имеет бесконечную жесткость поперечного сдвига, деформирование описывается моделью Кирхгофа—Лява. Дополнительно предположим, что (незамкнутая) часть цилиндрической поверхности, ограничивающей включение, задает сквозную трещину в пластине. На внешней границе пластины налагаются условия жесткого защемления, на кривой задающей трещину — условия взаимного непроникания берегов. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины, содержащей трещину. Из вариационной постановки задачи получена система краевых условий на замкнутой кривой, описывающей границу упругого включения. Для исходной вариационной постановки найдена эквивалентная дифференциальная формулировка задачи.

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть подобласть ω лежит строго внутри Ω, т.е. $\overline{\omega} \cap \partial\Omega = \emptyset$, а ее граница Γ является достаточно гладкой (см. рис. 2.3). Будем считать, что Γ состоит из двух частей γ и $\Gamma\backslash\gamma$, причем $\mathrm{meas}(\Gamma\backslash\gamma) > 0$, γ — кривая, $\partial\gamma \notin \gamma$. Предположим,

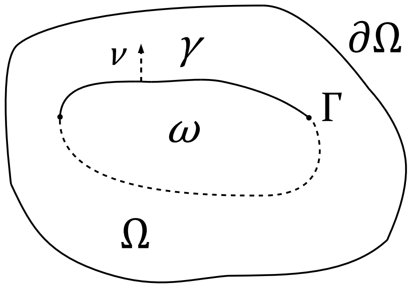

Рис. 2.3: Геометрия в срединной плоскости пластины.

что пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ определим так, чтобы множество $\Omega_\gamma \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины, где $\Omega_\gamma = \Omega\backslash\overline{\gamma}$. При этом кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -1 \leq z \leq 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. В наших рассуждениях ω будет соответствовать части пластины, описываемой моделью Кирхгофа—Лява, а $\Omega\backslash\overline{\omega}$ — моделью Тимошенко для трансверсально-изотропного материала.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($x \in \Omega_\gamma$), $U = (u_1, u_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, u — вдоль оси z. Углы поворота нормальных сечений введем с помощью $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$, $x \in \Omega_\gamma$. В соответствии с направлением внешней (по отношению к ω) нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к Γ, можно говорить о положительном Γ^+ и отрицательном Γ^- берегах кривой Γ. В случае, когда след функции v берется на положительном (со стороны области $\Omega\backslash\overline{\omega}$) берегу Γ^+ будем писать $v^+ = v|_{\Gamma^+}$, так же для отрицательного берега $v^- = v|_{\Gamma^-}$. Скачок функции

v на Γ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$. Аналогичные обозначения будем использовать для γ^+ и γ^-.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ i,j = 1,2,\ (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\phi) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad i,j,k,l = 1,2, \tag{2.2.1}$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование). Здесь $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие обычным условиям симметричности и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,$$

$$a_{ijkl}\zeta_{kl}\zeta_{ij} \geq c_0\zeta_{ij}\zeta_{ij}, \quad \forall\zeta_{ij} = \zeta_{ji}, \quad c_0 > 0,$$

аналогичные соотношения справедливы и для тензора $B = \{b_{ijkl}\}$. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины, в области $\Omega\backslash\overline{\omega}$ ненулевые коэффициенты тензоров A и B выражаются соотношениями

$$b_{iiii} = D,\ b_{iijj} = D æ,\ b_{ijij} = b_{ijji} = D(1-æ)/2,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i,j,k,l = 1,2.$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость, æ — коэффициент Пуассона, $0 < æ < 1/2$. Поперечные силы для части пластины, описываемой моделью Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1,2, \tag{2.2.2}$$

где $\Lambda = 2\kappa' G$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

Пусть $\xi = (U, u, \phi)$, $\chi = (U, u)$, $\eta = (W, w, \psi)$, $\beta = (W, w)$ — достаточно гладкие функции, определим билинейные формы $B_M(\cdot\,,\cdot)$ и $b_M(\cdot\,,\cdot)$ равенствами

$$B_M(\xi,\eta) = \int\limits_M \big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi) + \Lambda(u,_i + \phi_i)(w,_i + \psi_i) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)\big)dx,$$

$$b_M(\chi,\beta) = \int\limits_M \big(a_{ijkl}u,_{kl}\; w,_{ij} + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)\big)dx,$$

где $M \subset \Omega_\gamma$ — область. Рассмотрим следующий функционал

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2}B_{\Omega_\gamma}(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u_i + f_3 u)dx - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\phi_i dx\,, \quad \xi = (U,u,\phi), \quad (2.2.3)$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega_\gamma)^3$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})^2$ — вектора, задающие внешние нагрузки.

Условие непроникания противоположных берегов сквозной трещины в модели пластины Тимошенко имеет вид

$$[U_\nu] \ge |[\phi_\nu]| \quad \text{на} \quad \gamma, \quad \text{где} \quad U_\nu = u_i\nu_i, \quad \phi_\nu = \phi_i\nu_i. \qquad (2.2.4)$$

Считая параметр жесткости поперечного сдвига равным бесконечности в пределах упругого включения, тем самым полагаем отсутствие сдвигов в нормальных к срединной поверхности пластины плоскостях. Это означает выполнение гипотез "прямых нормалей" Кирхгофа—Лява (см. [86]). Таким образом, в области, занимаемой упругим включением, выполнены равенства

$$u,_i + \phi_i = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1,2, \qquad (2.2.5)$$

Равенства (2.2.5) описывают гипотезу "прямых нормалей" — любое волокно, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается после деформации прямым и нормальным к срединной поверхности в ее новом очертании.

Используя (2.2.5), моменты m_{ij}, $i, j = 1, 2$, в области ω можно выразить формулами

$$m_{ij} = -a_{ijkl}u,_{kl}\,. \qquad (2.2.6)$$

Подставляя в (2.2.3), функции $\xi = (U, u, \phi)$, удовлетворяющие (2.2.5), получим

$$\Pi(\xi) = \Pi_1(\chi) + \Pi_2(\xi), \quad \chi = (U, u),$$

где функционалы $\Pi_1(\chi)$, $\Pi_2(\xi)$ определяются равенствами

$$\Pi_1(\chi) = \frac{1}{2} b_\omega(\chi, \chi) - \int\limits_\omega (f_i u_i + f_3 u) dx,$$

$$\Pi_2(\xi) = \frac{1}{2} B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} (f_i u_i + f_3 u + \mu_i \phi_i) dx.$$

Заметим, что $\Pi_1(\chi)$ выражает энергию деформации пластины Кирхгофа—Лява, занимающей область ω (см. [12]). В свою очередь, $\Pi_2(\xi)$ представляет энергию деформации пластины Тимошенко, занимающей область $\Omega\setminus\overline{\omega}$ [86].

Введем пространства

$$H^{1,0}(\Omega_\gamma) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\gamma) \;\middle|\; u = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\}, \quad H = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_H.$$

Задачу о равновесии пластины, можно сформулировать в следующем виде

$$\min_{\xi \in K} \Pi(\xi), \tag{2.2.7}$$

где множество допустимых функций выражается соотношением

$$K = \{\, \xi = (U, u, \phi) \in H \mid u_{,i} + \phi_i = 0 \text{ в } \omega,\ i = 1, 2;\ [U_\nu] \geq |[\phi_\nu]| \text{ на } \gamma \,\}$$

Заметим, что поскольку решение ξ принадлежит пространству H, тем самым на границе разных сред без отслоения $\Gamma\setminus\overline{\gamma}$, предполагаются выполненными следующие условия склейки:

$$[\xi] = (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на} \quad \Gamma\setminus\overline{\gamma}.$$

Строгая выпуклость, слабая полунепрерывность, коэрцитивность функционала $\Pi(\xi)$ в пространстве H могут быть установлены так же как в параграфе 2.1. Свойства $\Pi(\xi)$, выпуклость и замкнутость множества K гарантируют существование и единственность решения задачи (2.2.7). Далее через

$\xi = (U, u, \phi)$ будем обозначать решение задачи (2.2.7). Кроме того, задача (2.2.7), эквивалентна вариационному неравенству

$$\xi = (U, u, \phi) \in K, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i(w_i - u_i) + f_3(w - u))dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu_i(\psi_i - \phi_i)dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \quad (2.2.8)$$

С учетом соотношений (2.2.5) вариационное неравенство (2.2.8) можно представить в виде

$$\xi = (U, u, \phi) \in K, \quad B_{\Omega \setminus \overline{\omega}}(\xi, \eta - \xi) + b_\omega(\chi, \beta - \chi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(f_i(w_i - u_i) +$$
$$+ f_3(w - u) \Big) dx + \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu_i(\psi_i - \phi_i)dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \quad (2.2.9)$$

Сравним два неравенства, полученные подстановкой в (2.2.9) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + q_i(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i) \big) dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} (f_i \tilde{w}_i + f_3 \tilde{w} + \mu_i \tilde{\psi}_i)dx.$$

Здесь и далее $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$. Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, имеем

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W})dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} f_i \tilde{w}_i dx \quad \forall \tilde{W} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^2,$$

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} q_i(\tilde{w}_{,i})dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} f_3 \tilde{w} dx \quad \forall \tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega}),$$

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} (m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i \tilde{\psi}_i)dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu_i \tilde{\psi}_i dx \quad \forall \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^2.$$

Заметив, что имеют место представления $\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi})dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} m_{ij}\tilde{\psi}_{i,j}dx$, $\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W})dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \sigma_{ij}\tilde{w}_{i,j}dx$, из предыдущих трех равенств заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}, \quad i = 1, 2, \tag{2.2.10}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}, \tag{2.2.11}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}, \quad i = 1, 2. \tag{2.2.12}$$

Аналогично, подставляя в (2.2.9) произвольную функцию $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, такую что $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\omega)^5$, $\tilde{\psi}_i = -\tilde{w}_{,i}$ в ω, $i = 1, 2$, можно получить следующие равенства в смысле обобщенных функций:

$$-m_{ij,ij} = f_3 \quad \text{в} \quad \omega, \tag{2.2.13}$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1, 2. \tag{2.2.14}$$

Заметим, что из (2.2.10) — (2.2.14) следуют включения

$$\triangle u \in L^2(\Omega \backslash \overline{\omega}),\ \sigma_{ij,j} \in L^2(\Omega \backslash \overline{\omega}),\ m_{ij,j} \in L^2(\Omega \backslash \overline{\omega}), \quad i = 1, 2, \tag{2.2.15}$$

$$\sigma_{ij,j} \in L^2(\omega),\ m_{ij,ij} \in L^2(\omega),\ i, j = 1, 2. \tag{2.2.16}$$

2.2.2 Эквивалентная дифференциальная постановка

В этом разделе мы получим эквивалентную дифференциальную постановку задачи (2.2.7). А именно, исходя из вариационного неравенства (2.2.9), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой Γ. При выводе условий будем использовать формулы Грина, возможность применения которых следует из включений (2.2.15), (2.2.16) и гладкости кривой Γ. Поскольку производные функций из пространства $H^1(\Omega_\gamma)$ в общем случае не имеют следы, в этом разделе мы предполагаем достаточную гладкость ξ.

Для произвольной функции $W = (w_1, w_2) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ справедливы формулы Грина (см. теорему 1.5.2)

$$\int\limits_\omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W) dx = -\int\limits_\omega \sigma_{ij,j} w_i dx + \int\limits_{\Gamma^-} (\sigma_\nu W_\nu + \sigma_\tau W_\tau) ds, \tag{2.2.17}$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W) dx = - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij,j} w_i dx - \int\limits_{\Gamma^+} (\sigma_\nu W_\nu + \sigma_\tau W_\tau) ds, \qquad (2.2.18)$$

где $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$, $W_\tau = w_i\tau_i$, $W_\nu = w_i\nu_i$. В формуле (2.2.17) верхний индекс в символе Γ^- означает, что значения (следов) подынтегральных функций на Γ берутся на отрицательном берегу. Обозначение Γ^+ в формуле (2.2.18) имеет аналогичный смысл. Для произвольных $\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ имеет место формула

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi) dx = - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij,j}\psi_i dx - \int\limits_{\Gamma^+} (m_\nu\psi_\nu + m_\tau\psi_\tau) ds, \qquad (2.2.19)$$

здесь $m_\nu = m_{ij}\nu_j\nu_i$, $m_\tau = m_{ij}\nu_j\tau_i$, $\psi_\tau = \psi_i\tau_i$, $\psi_\nu = \psi_i\nu_i$. Справедливы следующие соотношения (в силу формул Грина, см. теорему 1.5.1):

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla u \nabla w dx = - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w \triangle u dx - \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \nu} w ds \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_\gamma), \qquad (2.2.20)$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \phi \nabla w dx = - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w\, \mathrm{div}\phi dx - \int\limits_{\Gamma^+} w\phi_\nu ds \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_\gamma). \qquad (2.2.21)$$

Далее понадобится еще одна формула Грина (см. формулу (1.5.13) первой главы), справедливая для $w \in H^2(\omega)$

$$- \int\limits_{\omega} m_{ij}\, w_{,ij}\, dx = - \int\limits_{\omega} w\, m_{ij,ij} dx + \int\limits_{\Gamma^-} \big(t_\nu^- w - m_\nu^- \frac{\partial w}{\partial \nu} \big) ds, \qquad (2.2.22)$$

где m_{ij}, $i, j = 1, 2$, задаются формулами (2.2.6),

$$m_\nu^- = m_{ij}\nu_i\nu_j, \quad t_\nu^- = m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i + m_{ij,j}\nu_i.$$

Неравенство (2.2.9), для пробной функции $\eta = 2\xi \in K$ примет вид

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi, \xi) + b_\omega(\chi, \chi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u_i + f_3 u) dx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\phi_i dx. \qquad (2.2.23)$$

Подставляя затем $\eta = (0, 0, 0, 0, 0)$ в (2.2.9), выведем, что неравенство (2.2.23) выполняется так же в обратную сторону. Таким образом, из (2.2.9) получим

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi, \xi) + b_\omega(\chi, \chi) = \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u_i + f_3 u) dx + \int\limits_{\omega} \mu_i\phi_i dx, \qquad (2.2.24)$$

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi,\eta)+b_\omega(\chi,\beta)\geq\int\limits_{\Omega_\gamma}(f_iw_i+f_3w)dx+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}}\mu_i\psi_idx\quad\forall\eta\in K.\qquad(2.2.25)$$

Применяя формулы Грина (2.2.17) —(2.2.22) для интегралов в левой части (2.2.25), входящих в билинейные формы, с учетом уравнений равновесия (2.2.10)—(2.2.14), находим

$$\int\limits_{\Gamma^-}(t_\nu^-w-m_\nu^-\frac{\partial w}{\partial\nu})ds+\int\limits_{\Gamma^-}(\sigma_\nu W_\nu+\sigma_\tau W_\tau)ds-\Lambda\int\limits_{\Gamma^+}(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi_\nu)wds-$$

$$-\int\limits_{\Gamma^+}(\sigma_\nu W_\nu+\sigma_\tau W_\tau)ds-\int\limits_{\Gamma^+}\big(m_\nu\psi_\nu+m_\tau\psi_\tau\big)ds\geq0.\qquad(2.2.26)$$

Подставляя в (2.2.26) $\eta=(W,0,0,0)$, $W\in H_0^1(\Omega)^2$ (заметим, что $\eta\in K$), имеем

$$\int\limits_{\Gamma}([\sigma_\nu]W_\nu+[\sigma_\tau]W_\tau)ds\leq0.\qquad(2.2.27)$$

Из (2.2.27), ввиду произвольности $W\in H_0^1(\Omega)^2$, выведем

$$[\sigma_\nu]=0,\quad[\sigma_\tau]=0\quad\text{на}\quad\Gamma.\qquad(2.2.28)$$

Пусть $H_0^1(\Omega)$ — произвольная функция, такая что $w|_\omega\in H^2(\omega)$. Определим функцию $\psi\in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству $\psi_i=-w_{,i}$ в ω, $i=1,2$ (в силу свойств оператора поднятия, такая функция существует). Тогда $[\psi_\nu]=0$ на γ, $\eta=(0,0,0,w,\psi)\in K$. При этом, согласно (2.2.5) $\psi_\nu^+=\psi_\nu^-=-\frac{\partial w^-}{\partial\nu}$, $\psi_\tau^+=\psi_\tau^-=-\frac{\partial w^-}{\partial\tau}$. Подставляя $\eta=(0,0,w,\psi)$ в (2.2.26), получим

$$\int\limits_{\Gamma}(t_\nu^-w-m_\nu^-\frac{\partial w^-}{\partial\nu})ds-\Lambda\int\limits_{\Gamma}(\frac{\partial u^+}{\partial\nu}+\phi_\nu^+)wds+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\big(m_\nu^+\frac{\partial w^-}{\partial\nu}+m_\tau^+\frac{\partial w^-}{\partial\tau}\big)ds\geq0.\qquad(2.2.29)$$

Поскольку функция m_τ^+, по предположению гладкая, имеем $wm_\tau^+\in H^2(\omega)$. С помощью известной формулы Грина можно легко получить соотношение

$$\int\limits_{\Gamma}\nabla(m_\tau^+w)\tau ds=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial(m_\tau^+w)}{\partial\tau}ds=\int\limits_{\omega}\frac{\partial^2(m_\tau^+w)}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2(m_\tau^+w)}{\partial x_2\partial x_1}dx=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\Gamma} m_\tau^+ \frac{\partial w}{\partial \tau} ds = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial m_\tau^+}{\partial \tau} w ds. \tag{2.2.30}$$

Применяя (2.2.30) в (2.2.29), выведем

$$\int\limits_{\Gamma} \big(t_\nu^- - t_\nu^+\big) w ds + \int\limits_{\Gamma} \big(m_\nu^+ - m_\nu^-\big) \frac{\partial w^-}{\partial \nu} ds \le 0,$$

где через t_ν^+ обозначено следующее выражение $t_\nu^+ = \Lambda\big(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} + \phi_\nu^+\big) + \frac{\partial m_\tau^+}{\partial \tau}$. Отсюда, в силу произвольности и независимости значений w и $\frac{\partial w^-}{\partial \nu}$ имеем

$$t_\nu^- = t_\nu^+, \quad m_\nu^+ = m_\nu^- \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.2.31}$$

Преобразуем (2.2.26) с учетом соотношений (2.2.28), (2.2.30), (2.2.31)

$$\int\limits_{\Gamma} \big(t_\nu[w] + m_\nu(\frac{\partial w^-}{\partial \nu} + \psi_\nu^+)\big) ds + \int\limits_{\Gamma} (\sigma_\nu[W_\nu] + \sigma_\tau[W_\tau]) ds +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} m_\tau^+ (\psi_\tau^+ + \frac{\partial w^+}{\partial \tau}) ds \le 0 \quad \forall \eta \in K. \tag{2.2.32}$$

Легко видеть, что для функции $W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, такой что $W_\nu = 0$ на берегах Γ^+ и Γ^- (т.е. на Γ), справедливо включение $\xi = (W, 0, 0, 0) \in K$. Подставляя η в (2.2.32), находим

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma_\tau[W_\tau] ds = \int\limits_{\gamma} \sigma_\tau[W_\tau] ds \le 0,$$

для всех $W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, удовлетворяющих $W_\nu = 0$ на Γ. В силу произвольности значений W_τ на границе Γ, из последнего неравенства выводим

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.2.33}$$

Рассмотрим функцию $\eta = (0, 0, 0, \psi)$, такую что $\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $\psi = (0, 0)$ на ω, $\psi_\nu = 0$ на Γ^+. По построению $\eta \in K$. После подстановки ее в (2.2.32) получим

$$\int\limits_{\gamma} m_\tau^+ \psi_\tau^+ ds \le 0. \tag{2.2.34}$$

Поскольку значения ψ_τ произвольны на γ, то (2.2.34) влечет

$$m_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.2.35}$$

Пусть $\eta = (0, 0, w, 0, 0)$, где функция $w \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$, такая что $w = 0$ в ω. Очевидно, что $\eta \in K$. Вследствие равенств $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$, $w = 0$ на Γ^-, неравенство (2.2.32) для построенной функции η примет вид $\int\limits_\Gamma t_\nu[w]ds = \int\limits_\gamma t_\nu w^+ ds \leq 0$.

Поскольку $w|_{\gamma^+}$ произвольно, отсюда следует

$$t_\nu = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.2.36}$$

С помощью полученных равенств (2.2.33), (2.2.35), (2.2.36), соотношение (2.2.32) можно упростить следующим образом:

$$\int\limits_\Gamma \Big(m_\nu (\frac{\partial w^-}{\partial \nu} + \psi_\nu^+) + \sigma_\nu [W_\nu] \Big) ds \leq 0 \quad \forall \eta \in K. \tag{2.2.37}$$

Пусть $W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $W = (0, 0)$ в ω, $W_\nu^+ \geq 0$ на γ. Тогда имеют место включения $\eta_1 = (W, 0, W) \in K$, $\eta_2 = (W, 0, -W) \in K$ (т.е. $\psi_1 = W$ для η_1 и $\psi_2 = -W$ для η_2). Сравнив два неравенства, получающиеся из (2.2.37) по отношению к η_1, η_2, имеем

$$\int\limits_\gamma \big(\sigma_\nu W_\nu^+ + |m_\nu| W_\nu^+ \big) ds \leq 0.$$

Поскольку функция W в последнем неравенстве может быть выбрана произвольно (с точностью до указанных свойств), находим

$$|m_\nu| \leq -\sigma_\nu \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.2.38}$$

Принимая во внимание (2.2.28), (2.2.31), (2.2.33), (2.2.35), (2.2.36), преобразуем (2.2.24) с помощью формул Грина к виду

$$\int\limits_\gamma \big(m_\nu (\frac{\partial u^-}{\partial \nu} + \phi_\nu^+) + \sigma_\nu [U_\nu] \big) ds = 0. \tag{2.2.39}$$

С учетом (2.2.4), (2.2.38), из (2.2.39) выведем

$$m_\nu (\frac{\partial u^-}{\partial \nu} + \phi_\nu^+) + \sigma_\nu [U_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Гладкое решение задачи* (2.2.7) *является решением краевой задачи, состоящей из соотношений теории упругости* (2.2.1), (2.2.2), *уравнений равновесия* (2.2.10)–(2.2.14), соотношений (2.2.5) *и краевых условий*

$$[t_\nu] = [m_\nu] = [\sigma_\tau] = [\sigma_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.2.40}$$

$$t_\nu = \sigma_\tau = m_\tau^+ = 0, \quad |m_\nu| \le -\sigma_\nu \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{2.2.41}$$

$$[U_\nu] \ge |[\phi_\nu]|, \quad m_\nu(\frac{\partial u^-}{\partial \nu} + \phi_\nu^+) + \sigma_\nu [U_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.2.42}$$

Можно показать и обратное — решение ξ дифференциальной постановки задачи, состоящей из (2.2.10)—(2.2.14), (2.2.5), (2.2.40) — (2.2.42) является так же решением задачи минимизации (2.2.7).

Пусть $\eta = (W, w, \psi) \in K$, покажем, что выполняется вариационное неравенство (2.2.8). Умножим равенство (2.2.10) на $(W - U)$, а затем проинтегрируем по области $\Omega \backslash \overline{\omega}$. В итоге, применяя формулу Грина (2.2.18), получим

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W - U) dx + \int\limits_{\Gamma^+} (\sigma_\nu (W_\nu - U_\nu) + \sigma_\tau (W_\tau - U_\tau)) ds -$$
$$- \int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} f_i (w_i - u_i) dx = 0. \tag{2.2.43}$$

Проведя аналогичные действия относительно уравнения (2.2.13), имеем

$$\int\limits_{\omega} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W - U) dx - \int\limits_{\Gamma^-} (\sigma_\nu (W_\nu - U_\nu) + \sigma_\tau (W_\tau - U_\tau)) ds -$$
$$- \int\limits_{\omega} f_i (w_i - u_i) dx = 0. \tag{2.2.44}$$

Умножим уравнения (2.2.11), (2.2.14) на $(w - u)$, а равенство (2.2.12) на $(\psi - \phi)$. Проинтегрировав полученные соотношения по соответствующим областям, получим

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} q_i (w - u)_{,i}\, dx + \Lambda \int\limits_{\Gamma^+} (\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)(w - u) ds - \int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} f_3 (w - u) dx = 0, \tag{2.2.45}$$

$$
-\int\limits_{\omega} m_{ij}\,(w-u)_{,ij}\,dx-\int\limits_{\Gamma^-}\big(t_\nu^-(w-u)-m_\nu^-\frac{\partial(w-u)}{\partial\nu}\big)ds-
$$

$$
-\int\limits_{\omega} f_3(w-u)dx=0, \qquad (2.2.46)
$$

$$
\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(m_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\psi-\phi)+q_i(\psi_i-\phi_i))dx+
$$

$$
+\int\limits_{\Gamma^+}(m_\nu(\psi_\nu-\phi_\nu)+m_\tau(\psi_\tau-\phi_\tau))ds-\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}}\mu_i(\psi_i-\phi_i)dx=0. \quad (2.2.47)
$$

Суммируя (2.2.43)—(2.2.47), с учетом (2.2.5), (2.2.40) находим

$$
B_{\Omega_\gamma}(\xi,\eta-\xi)-\int\limits_{\Omega_\gamma}(f_i(w_i-u_i)+f_3(w-u))dx-\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}}\mu_i(\psi_i-\phi_i)dx=
$$

$$
=-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sigma_\nu[W_\nu-U_\nu]+\sigma_\tau[W_\tau-U_\tau]+\Lambda(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi_\nu)^+(w-u)^++m_\nu^+(\psi_\nu-\phi_\nu)^++
$$

$$
+m_\tau^+(\psi_\tau-\phi_\tau)^+-t_\nu^-(w-u)^-+m_\nu^-\frac{\partial(w-u)^-}{\partial\nu}\Big)ds. \quad (2.2.48)
$$

Покажем, что при $\eta\in K$ правая часть (2.2.48) является неотрицательной величиной. Заметим, что для функции $v\in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$, $[v]=0$ на $\Gamma\setminus\overline{\gamma}$. В силу (2.2.41) правая часть соотношения (2.2.48) преобразуется следующим образом:

$$
-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sigma_\nu[W_\nu-U_\nu]+\Lambda(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi_\nu)^+(w-u)^++m_\tau^+(\psi_\tau-\phi_\tau)^+
$$

$$
+m_\nu\Big((\psi_\nu-\phi_\nu)^++\frac{\partial(w-u)^-}{\partial\nu}\Big)-t_\nu^-(w-u)^-\Big)ds. \quad (2.2.49)
$$

Вспоминая равенства $t_\nu^+=\Lambda\big(\frac{\partial u^+}{\partial\nu}+\phi_\nu^+\big)+\frac{\partial m_\tau^+}{\partial\tau}$ и (2.2.30), из (2.2.49) получим

$$
-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sigma_\nu[W_\nu-U_\nu]+m_\nu\Big((\psi_\nu-\phi_\nu)^++\frac{\partial(w-u)^-}{\partial\nu}\Big)+
$$

$$
+t_\nu[w-u]+m_\tau^+\Big((\psi_\tau-\phi_\tau)^++\frac{\partial(w-u)^+}{\partial\tau}\Big)\Big)ds. \quad (2.2.50)
$$

Последние два слагаемых в (2.2.50), вследствие (2.2.5), (2.2.41) равны нулю. Включение $(W-U) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ влечет $[W_\nu - U_\nu] = 0$ на $\Gamma \backslash \overline{\gamma}$. На $\Gamma \backslash \overline{\gamma}$ справедливы также равенства $(\psi_\nu - \phi_\nu)^+ = (\psi_\nu - \phi_\nu)^- = -\frac{\partial (w-u)^-}{\partial \nu}$, следовательно $\left((\psi_\nu - \phi_\nu)^+ + \frac{\partial (w-u)^-}{\partial \nu}\right) = 0$ на $\Gamma \backslash \overline{\gamma}$. Таким образом, (2.2.50) можно упростить к виду

$$-\int\limits_\gamma \Big(\sigma_\nu [W_\nu - U_\nu] + m_\nu \Big((\psi_\nu - \phi_\nu)^+ + \frac{\partial (w-u)^-}{\partial \nu}\Big)\Big) ds. \tag{2.2.51}$$

Отсюда, с учетом соотношений (2.2.42), выражение (2.2.51) равно

$$-\int\limits_\gamma \Big(\sigma_\nu [W_\nu] + m_\nu ({\psi_\nu}^+ + \frac{\partial w^-}{\partial \nu})\Big) ds. \tag{2.2.52}$$

Неотрицательность выражения (2.2.52) можно установить, используя неравенство $|m_\nu| \le -\sigma_\nu$, выполненное на γ (см. (2.2.41)), а также неравенство $[W_\nu] \ge |[\psi_\nu]|$ на γ, следующее из условия $\eta \in K$. Здесь уместно вспомнить, что на кривой γ справедливо равенство: $[\psi_\nu] = (\psi_\nu^+ - \psi_\nu^-) = (\psi_\nu^+ + \frac{\partial w^-}{\partial \nu})$. Итак, правая часть (2.2.48) для произвольного $\eta \in K$ имеет неотрицательное значение, следовательно справедливо вариационное неравенство (2.2.8). Это означает, в силу свойств функционала Π и множества K, что ξ является решением вариационного неравенства (2.2.8) и задачи минимизации (2.2.7).

2.3 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе жесткого включения

При исследовании деформирования пластин и оболочек успешно используются модели Кирхгофа—Лява и Тимошенко [10, 11, 12, 13, 86]. Изучению моделей пластин Кирхгофа—Лява, содержащих жесткие включения, посвящено множество работ [76, 92, 97, 117, 121, 170]. При этом в [76, 92, 97, 121] предполагается, что жесткое включение в пластине объемное. В работе [117] с помощью плоской двумерной кривой моделируется тонкое жесткое включение.

В настоящем параграфе исследуется задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину на границе объемного жесткого включения. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины, содержащей трещину. Из вариационной постановки задачи получена система краевых условий, определяющая эквивалентную краевую задачу. Для задачи о равновесии упругой пластины Тимошенко с трещиной установлено, что при стремлении параметра жесткости к бесконечности в некоторой фиксированной части пластины, получается задача о равновесии пластины с жестким включением.

2.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть подобласть ω лежит строго внутри Ω, т.е. $\overline{\omega} \cap \Gamma = \emptyset$, а ее граница Ξ является достаточно гладкой. Будем считать, что Ξ состоит из двух частей γ и $\Xi \backslash \gamma$, причем $\partial\gamma \notin \gamma$ (см. рис. 2.4). Предположим, что пластина имеет посто-

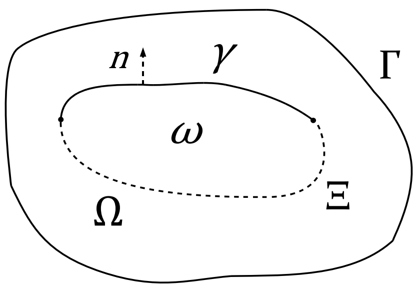

Рис. 2.4: Геометрия в срединной плоскости пластины.

янную толщину $2h$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ выберем так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины, где $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$. При этом кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -h \leq z \leq h$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. В наших рассуждениях жесткое включение будет задаваться множеством $\omega \times [-h, h]$. При этом граница жесткого включения задается цилиндрической поверхностью $\Xi \times [-h, h]$. Упругая часть пластины соответствует области $\Omega\backslash\overline{\omega}$.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($x \in \Omega_\gamma$), $U = (u_1, u_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, u — вдоль оси z. Углы поворота нормальных сечений введем с помощью $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$, $x \in \Omega_\gamma$. Будем считать, в соответствии положениями классической теории упругости, что величины χ, ϕ являются бесконечно малыми. В соответствии с направлением внешней (по отношению к ω) нормали $n = (n_1, n_2)$ к Ξ, можно говорить о положительном Ξ^+ и отрицательном Ξ^- берегах кривой Ξ. В случае, когда след функции v берется на положительном (со стороны области $\Omega\backslash\overline{\omega}$) берегу Ξ^+ будем писать $v^+ = v|_{\Xi^+}$, так же для отрицательного берега $v^- = v|_{\Xi^-}$. Скачок $[v]$ функции v на кривой Ξ находится по формуле: $[v] = v|_{\Xi^+} - v|_{\Xi^-}$. Аналогичные обозначения будем использовать для γ^+ и γ^-.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ i, j = 1, 2,\ (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijkl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\ a_{iijj} = D\text{æ},\ a_{ijij} = a_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2,$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(u, \phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2\kappa' G h$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

Пусть $B_M(\cdot\,,\cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B_M(\xi,\eta)=\int\limits_M \Big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi)+\Lambda(u_{,i}+\phi_i)(v_{,i}+\psi_i)+\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(V)\Big)dx,$$

где $M\subset\Omega$ — подобласть, $\xi=(U,u,\phi)$, $\eta=(V,v,\psi)$. Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω_γ, имеет вид

$$\Pi(\xi)=\frac{1}{2}B_{\Omega_\gamma}(\xi,\xi)-\int\limits_{\Omega_\gamma}F\xi dx\,,\quad \xi=(U,u,\phi),$$

где $F=(f_1,f_2,f_3,\mu_1,\mu_2)\in L^2(\Omega_\gamma)^5$ — вектор, задающий внешние нагрузки [86].

Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega_\gamma)=\Big\{u\in H^1(\Omega_\gamma)\ \Big|\ u=0\ \text{ п.в. на}\,\Gamma\Big\},\quad H=H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5.$$

Для удобства будем обозначать стандартную норму в H следующим образом $\|\cdot\|=\|\cdot\|_H$.

Пусть $\xi\in H$. Выпишем соотношения для ξ, обусловленные наличием в пластине жесткого включения и трещины. Как известно, для жесткого тела деформации равны нулю. Относительно рассматриваемого жесткого включения в пластине модели Тимошенко, это означает, что в области ω тангенциальные $\varepsilon_{ij}(U)$, $i,j=1,2$, изгибные $\varepsilon_{ij}(\phi)$, $i,j=1,2$, трансверсальные $u_{,i}+\phi_i$, $i=1,2$ деформации равны нулю. Следовательно, сужение функции ξ на область ω имеет заданную структуру (см., например, [109]):

$$U=\rho,\quad \phi=d,\quad \phi+\nabla u=0\quad\text{на}\quad\omega,\quad \rho,d\in R(\omega),\tag{2.3.1}$$

где пространство $R(\omega)$ определяется следующим образом

$$R(\omega)=\{\rho=(\rho_1,\rho_2)\,|\,\rho(x)=Bx+C,\ x\in\omega\},$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix},\quad C=(c_1,c_2);\quad b,c_1,c_2=const.$$

В покомпонентной записи два последних равенства из (2.3.1) принимают вид

$$
\begin{cases}
u_{,i} + \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \omega, \\
\phi_1 = d_1 = bx_2 + c_1 \quad \text{на} \quad \omega, \\
\phi_2 = d_2 = -bx_1 + c_2 \quad \text{на} \quad \omega.
\end{cases}
$$

Отсюда следует, что $u_{,12} = b$ и $u_{,21} = -b$. Это означает, что $b = 0$ и сужение компонент функции ξ удовлетворяет соотношениям

$$
U = \rho, \quad u = l, \quad \phi + \nabla u = 0 \quad \text{на} \quad \omega, \quad \rho \in R(\omega),\, l \in L(\omega), \tag{2.3.2}
$$

где

$$
L(\omega) = \{l \,|\, l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2,\ x = (x_1, x_2) \in \omega\}.
$$

В свою очередь, можно установить, что из (2.3.2) следуют равенства (2.3.1).

На кривой γ зададим условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины

$$
[U] \cdot n \geq h |[\phi] \cdot n| \quad \text{на} \quad \gamma.
$$

Заметим, что в данном неравенстве отсутствуют вертикальные перемещения u — это обусловлено тем, что образующие цилиндрической поверхности, ограничивающей жесткое включение перпендикулярны срединной плоскости пластины. Далее, учитывая то, что на γ^- следы функций U, ϕ определяются в соответствии с (2.3.2), из последнего неравенства выведем

$$
(U - \rho) \cdot n \geq h \Big| (\phi + \nabla l) \cdot n \Big| \quad \text{на} \quad \gamma^+, \tag{2.3.3}
$$

где $U = \rho$, $u = l$ на ω, $\rho \in R(\omega)$, $l \in L(\omega)$.

Задачу о равновесии пластины с трещиной на границе жесткого включения можно сформулировать в виде задачи минимизации

$$
\inf_{\xi \in K_\omega} \Pi(\xi), \tag{2.3.4}
$$

где

$$
K_\omega = \Big\{ \xi = (U, u, \phi) \in H \;\Big|\; \xi \quad \text{удовлетворяет} \quad (2.3.2)\,,\ (2.3.3) \Big\}
$$

есть множество допустимых функций. Заметим, что включение $\xi \in H$ предполагает выполнение однородных краевых условий

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \text{ на } \Gamma. \tag{2.3.5}$$

В силу эквивалентности (2.3.1) и (2.3.2), для функций $\xi \in K_\omega$ выполняются равенства: $\varepsilon_{ij}(U) = 0$, $\varepsilon_{ij}(\phi) = 0$, $\phi_i + u_{,i} = 0$ п.в. в области ω, $i,j = 1,2$. Следовательно, функционал энергии $\Pi(\xi)$ может быть представлен в виде

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2} B_{\Omega \setminus \overline{\omega}}(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\xi dx, \quad \xi = (U,u,\phi) \in K_\omega.$$

Легко показать, что множество K_ω является выпуклым и замкнутым в гильбертовом пространстве H. В силу оценки

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi,\eta) \le C_1 \|\xi\| \|\eta\|,$$

с постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от $\xi \in H$ и $\eta \in H$, симметричная билинейная форма $B_{\Omega_\gamma}(\xi,\eta)$ является непрерывной над H. Коэрцитивность функционала $\Pi(\xi)$ следует из неравенства

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi,\xi) \ge C_2 \|\xi\|^2, \quad \xi \in H, \tag{2.3.6}$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от ξ (см. оценку (2.1.4) параграфа 2.1). Кроме того, известно, что функционал $\Pi(\xi)$ является коэрцитивным, дифференцируемым, строго выпуклым, слабо полунепрерывным снизу. Указанные свойства функционала энергии $\Pi(\xi)$ и множества K_ω позволяют утверждать об однозначной разрешимости задачи (2.3.4) (см. теорему 1.4.1 и леммы 1.4.2, 1.4.3 параграфа 1.4).

Далее через $\xi = (U,u,\phi)$ будем обозначать решение задачи (2.3.4). Пусть функции $\rho_0 \in R(\omega)$ и $l_0 \in L(\omega)$ определяются равенствами $\rho_0 = U$, $l_0 = u$ на ω, где U и u компоненты решения ξ.

Симметричность, непрерывность билинейной формы $B_{\Omega_\gamma}(\cdot,\cdot)$ и свойства множества K_ω обеспечивают (см. лемму 1.4.2) эквивалентность задачи (2.3.4) следующему вариационному неравенству:

$$\xi \in K_\omega, \quad B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi)dx \quad \forall \eta = (V, v, \psi) \in K_\omega. \tag{2.3.7}$$

Сравним два неравенства, полученные подстановкой в (2.3.7) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{V}, \tilde{v}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega\setminus\overline{\omega})^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{V}) + (\tilde{v}_{,i} + \tilde{\psi}_i)q_i\Big)dx = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} F\tilde{\eta}dx, \tag{2.3.8}$$

где $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$; U, u, ϕ — компоненты решения ξ. Из (2.3.8), учитывая независимость $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, имеем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{V})dx = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f_i\tilde{v}_i dx \quad \forall \tilde{V} \in C_0^\infty(\Omega\setminus\overline{\omega})^2,$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} q_i\tilde{v}_{,i}\, dx = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f_3\tilde{v}dx \quad \forall \tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega\setminus\overline{\omega}),$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i\tilde{\psi}_i\Big)dx = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\tilde{\psi}_i dx \quad \forall \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega\setminus\overline{\omega})^2.$$

Из предыдущих трех равенств заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\overline{\omega}, \tag{2.3.9}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\overline{\omega}, \tag{2.3.10}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\overline{\omega}. \tag{2.3.11}$$

2.3.2 Дифференциальная постановка задачи

В этом разделе мы получим эквивалентную дифференциальную постановку задачи (2.3.4). А именно, исходя из вариационного неравенства (2.3.7), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой γ. Чтобы извлечь из неравенства (2.3.7) соотношения на внутренней границе γ, будем использовать формулы Грина. Поскольку производные функций из пространства $H^1(\Omega_\gamma)$ в общем случае не имеют следы, в этом разделе мы предполагаем достаточную гладкость ξ.

Для области $\Omega\backslash\overline{\omega}$ справедлива формула Грина (см. теорему 1.5.2)

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(V)dx = -\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij,j}v_i dx - \int\limits_{\Xi} \sigma_{ij}n_j v_i ds,$$
$$\forall V = (v_1, v_2) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2, \qquad (2.3.12)$$

где $n = (n_1, n_2)$ — нормаль к Ξ. Аналогично для произвольных $\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $v \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ имеют место следующие формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi)dx = -\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} m_{ij,j}\psi_i dx - \int\limits_{\Xi} m_{ij}n_j\psi_i ds, \qquad (2.3.13)$$

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla u \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} v\triangle u dx - \int\limits_{\Xi} \frac{\partial u}{\partial n} v ds, \qquad (2.3.14)$$

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \phi\nabla v dx = -\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} (\phi_{i,i})v dx - \int\limits_{\Xi} (\phi\cdot n)v ds. \qquad (2.3.15)$$

Пусть функция $\tilde{\eta} = (\tilde{V}, \tilde{v}, \tilde{\psi}) \in K_\omega$ такая, что $\tilde{\eta} \in H_0^1(\Omega)^5$. Подставляя в вариационное неравенство (2.3.7) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, получим следующее интегральное тождество, справедливое для всех $\tilde{\eta} \in H_0^1(\Omega)^5$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{V}) + (\tilde{v}_{,i} + \tilde{\psi}_i)q_i\Big)dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\tilde{\eta}dx. \qquad (2.3.16)$$

Далее, применяя формулы интегрирования по частям, с учетом (2.3.2) из (2.3.16) выводим

$$-\int\limits_{\Xi} \sigma_{ij}n_j\rho_i ds + \int\limits_{\Xi} m_{ij}n_j l_{,i}\,ds - \Lambda\int\limits_{\Xi}(\phi\cdot n + \frac{\partial u}{\partial n})l ds =$$
$$= \int\limits_{\omega}(f_i\rho_i + f_3 l - \mu_i l_{,i})dx. \qquad (2.3.17)$$

Учитывая независимость ρ и l в (2.3.17), имеем

$$-\int\limits_{\Xi} \sigma_{ij} n_j \rho_i ds = \int\limits_{\omega} f_i \rho_i dx \quad \forall \rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\omega), \tag{2.3.18}$$

$$\int\limits_{\Xi} m_{ij} n_j l_{,i} \, ds - \Lambda \int\limits_{\Xi} (\phi \cdot n + \frac{\partial u}{\partial n}) l ds =$$
$$= \int\limits_{\omega} (f_3 l - \mu_i l_{,i}) dx \quad \forall l \in L(\omega). \tag{2.3.19}$$

Сравнив два неравенства, извлекаемые из (2.3.7) путем подстановок пробных функций $\eta = 0$ и $\eta = 2\xi$, выведем тождество

$$-\int\limits_{\Xi^+} \sigma_{ij} n_j u_i ds - \int\limits_{\Xi^+} m_{ij} n_j \phi_i ds - \Lambda \int\limits_{\Xi^+} (\phi \cdot n + \frac{\partial u}{\partial n}) u ds =$$
$$= \int\limits_{\omega} (f_i \rho_{0i} + f_3 l_0 - \mu_i l_{0,i}) dx. \tag{2.3.20}$$

Здесь Ξ^+ означает, что значения функций на Ξ берутся на положительном берегу. Рассмотрим функцию $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{V}, \tilde{v}, \tilde{\psi})$ такая, что $\tilde{V} \equiv (0,0)$, $\tilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, функция $\tilde{v} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$: $\tilde{v} = 0$ в ω. По построению очевидно, что выполнено включение $\eta \in K_\omega$. Заметим, что значения функции $\tilde{v}$ равны нулю на кривой $\Xi \backslash \overline{\gamma}$ и произвольны на γ^+. Подставим функцию η в (2.3.7) и преобразуем полученное соотношение с помощью формул (2.3.14), (2.3.15). В итоге получим

$$\int\limits_{\gamma^+} (\phi \cdot n + \frac{\partial u}{\partial n}) \tilde{v} ds \geq 0.$$

Отсюда, принимая во внимание произвольность значений $\tilde{v}$ на границе γ^+, находим

$$\phi \cdot n + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.3.21}$$

Интеграл по границе в формуле (2.3.12) можно представить следующим образом (см. [118]):

$$\int\limits_{\Xi} \sigma_{ij} n_j v_i ds = \int\limits_{\Xi} \big(\sigma_n (V \cdot n) + \sigma_{\tau i} V_{\tau i} \big) ds, \tag{2.3.22}$$

где $\sigma_n n$ и $\sigma_\tau = (\sigma_{\tau 1}, \sigma_{\tau 2})$ — нормальная и касательная составляющие вектора $\sigma n = \{\sigma_{ij} n_j\}$, при этом справедливы соотношения

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_n n_i + \sigma_{\tau i},\ \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i, \quad \tau = (-n_2, n_1),$$

$$V = (v_1, v_2), \quad v_i = (V \cdot n) n_i + V_{\tau i}, \quad i = 1, 2, \quad V_\tau = (V_{\tau 1}, V_{\tau 2}).$$

Представление вида (2.3.22) справедливо и для интеграла по границе в формуле (2.3.13). Подставим в вариационное неравенство (2.3.7) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{V}, \tilde{v}, \tilde{\psi}) \in H$ такие, что $\tilde{v} \equiv 0$, $\tilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, $\tilde{V} \equiv (0,0)$ в ω и $\tilde{V} \cdot n = 0$ на γ^+. Преобразовав полученные интегралы с помощью формул Грина, выведем

$$\int\limits_{\Xi^+} \sigma_{ij} n_j \tilde{v}_i ds = \int\limits_{\Xi^+} \big(\sigma_n (\tilde{V} \cdot n) + \sigma_{\tau i} \tilde{V}_{\tau i}\big) ds = \int\limits_{\Xi^+} \sigma_{\tau i} \tilde{V}_{\tau i} ds = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности значений $\tilde{V}$ на γ^+, заключаем, что $\sigma_\tau = (0,0)$ на γ^+. Аналогичными выкладками, подобрав пробную функцию специального вида (рассматривая ψ, удовлетворяющие $\psi \cdot n = 0$), можно получить, что $m_\tau = (0,0)$ на γ^+. Пусть теперь $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{V}, \tilde{v}, \tilde{\psi}) \in H$ такая, что $\tilde{v} \equiv 0$ в Ω_γ, $\tilde{\psi} \equiv (0,0)$, $\tilde{V} \equiv (0,0)$ в ω, $\tilde{V} \cdot n = h|\tilde{\psi} \cdot n|$, $\tilde{V} \cdot n \geq 0$ на γ^+. Легко видеть, что $\eta \in K_\omega$. Подставим ее в (2.3.7). Используя формулы Грина, находим

$$\int\limits_{\Xi^+} \big(-\sigma_n (\tilde{V} \cdot n) \pm h m_n (\tilde{\psi} \cdot n)\big) ds \geq 0.$$

Выбор функций $\tilde{V}$, $\tilde{\psi}$ позволяет из последнего неравенства извлечь соотношение

$$-h\sigma_n \geq |m_n| \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.3.23}$$

Из тождеств (2.3.17) и (2.3.20) имеем

$$-\int\limits_{\Xi^+} \sigma_{ij} n_j (u_i - \rho_{0i}) ds - \int\limits_{\Xi^+} m_{ij} n_j \big(\phi_i + l_{0,i}\big) ds -$$
$$- \Lambda \int\limits_{\Xi^+} \Big(\phi \cdot n + \frac{\partial u}{\partial n}\Big)(u - l_0) ds = 0. \tag{2.3.24}$$

Из (2.3.24), принимая во внимание равенства $\sigma_\tau = m_\tau = (0,0)$ на γ^+, (2.3.2), (2.3.21) и (2.3.23), получим

$$\sigma_n(U - \rho_0) \cdot n + m_n\big(\phi + \nabla l_0\big) \cdot n = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+.$$

В итоге, из вариационного неравенства (2.3.7) выведены уравнения равновесия (2.3.9)—(2.3.11), тождества (2.3.18), (2.3.19) и следующие краевые условия на γ^+:

$$\begin{cases} \phi \cdot n + \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \sigma_\tau = m_\tau = (0,0), \quad -h\sigma_n \geq |m_n|, \\ \\ \sigma_n(U - \rho_0) \cdot n + m_n\big(\phi + \nabla l_0\big) \cdot n = 0. \end{cases} \tag{2.3.25}$$

Можно установить и обратное — решение краевой задачи (2.3.9)—(2.3.11), (2.3.18), (2.3.19) с условиями (2.3.5), (2.3.25) является также и решением вариационной задачи (2.3.7).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Гладкая функция $\xi = (U, u, \phi)$ является решением вариационной задачи* (2.3.4) *тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи, состоящей из уравнений равновесия* (2.3.9)—(2.3.11), *соотношений* (2.3.1), (2.3.18), (2.3.19) *и условий* (2.3.5), (2.3.25).

2.3.3 Предельный переход по параметру жесткости

Как оказалось, задачу (2.3.4) можно рассматривать как предельную для семейства задач, описывающих равновесие упругих пластин, каждая из которых занимает область Ω_γ. Каждая задача, описывающая равновесие упругой пластины зависит от параметра $\lambda > 0$, с помощью которого варьируется коэффициенты жесткости в фиксированной области ω.

Пусть тензор модулей упругости $A^\lambda = \{a^\lambda_{ijkl}\}$ и коэффициент Λ^λ зависят от λ следующим образом:

$$a^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \Omega\backslash\overline{\omega}, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \omega \end{cases} ; \quad \Lambda^\lambda = \begin{cases} \Lambda \quad \text{в} \quad \Omega\backslash\overline{\omega}, \\ \lambda^{-1}\Lambda \quad \text{в} \quad \omega. \end{cases} \tag{2.3.26}$$

Определим при $i, j = 1, 2$ функции

$$m_{ij}^\lambda(\phi) = a_{ijkl}^\lambda \varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}^\lambda(U) = 3a_{ijkl}^\lambda h^{-2}\varepsilon_{kl}(U), \quad q_i^\lambda(u,\phi) = \Lambda^\lambda(u_{,i} + \phi_i).$$

Пусть билинейная форма $B_{\Omega_\gamma}^\lambda$ определяется по формуле

$$B_{\Omega_\gamma}^\lambda(\xi,\eta) = \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(m_{ij}^\lambda(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi) + \Lambda^\lambda(u_{,i} + \phi_i)(v_{,i} + \psi_i) + \sigma_{ij}^\lambda(U)\varepsilon_{ij}(V) \Big) dx.$$

Сформулируем задачу о равновесии упругой пластины содержащей трещину в вариационном виде

$$\inf_{\xi \in K} \Pi^\lambda(\xi), \tag{2.3.27}$$

где $\Pi^\lambda(\xi) = \dfrac{1}{2} B_{\Omega_\gamma}^\lambda(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\xi dx$ и

$$K = \{\xi \in H \,|\, [U]\cdot n \geq h|[\phi]\cdot n| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma\}.$$

Здесь $[g] = g^+ - g^-$ — скачок функции g на γ. Задача (2.3.27) имеет единственное решение ξ^λ для каждого $\lambda \in (0, \lambda_0)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству (см. параграф 2.1)

$$\xi^\lambda \in K, \quad B_{\Omega_\gamma}^\lambda(\xi^\lambda, \eta - \xi^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi^\lambda) dx \quad \forall \eta \in K. \tag{2.3.28}$$

При этом, если решение ξ^λ достаточно гладкое, то можно показать, что оно является также и решением следующей краевой задачи (см. параграф 2.1)

$$\sigma_{ij,j}^\lambda = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$q_{i,i}^\lambda = -f_3 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$m_{ij,j}^\lambda - q_i^\lambda = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$U^\lambda = \phi^\lambda = (0,0), \quad u^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$[U^\lambda]\cdot n \geq h|[\phi^\lambda]\cdot n|, \quad [\sigma_n^\lambda] = [m_n^\lambda] = 0, \quad \sigma_\tau^\lambda = m_\tau^\lambda = (0,0) \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial n} + \phi^\lambda \cdot n = 0, \quad \sigma_n^\lambda [U^\lambda]\cdot n + m_n^\lambda [\phi^\lambda]\cdot n = 0, \quad -h\sigma_n^\lambda \geq |m_n^\lambda| \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Здесь $\sigma_{ij}^\lambda = \sigma_{ij}^\lambda(U^\lambda)$, $m_{ij}^\lambda = m_{ij}^\lambda(\phi^\lambda)$, $q_i^\lambda = q_i^\lambda(u^\lambda, \phi^\lambda)$, величины σ_τ^λ, $\sigma_n^\lambda n$ и m_τ^λ, $m_n^\lambda n$ являются составляющими векторов $\{\sigma_{ij}^\lambda n_j\}$, $\{m_{ij}^\lambda n_j\}$ соответственно (для них справедливы формулы, аналогичные примененным в (2.3.22)). Далее обоснуем предельный переход при $\lambda \to 0$ в (2.3.28). Оказывается, что предельная задача будет в точности совпадать с (2.3.7). Сравнив два неравенства, полученные подстановкой в (2.3.28) $\eta = 2\xi^\lambda$, $\eta = 0$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(m_{ij}^\lambda \varepsilon_{ij}(\phi^\lambda) + \sigma_{ij}^\lambda \varepsilon_{ij}(U^\lambda) + (u^\lambda,_i + \phi_i^\lambda) q_i^\lambda \Big) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} F \xi^\lambda dx.$$

Отсюда, применяя (2.3.6), получаем две равномерные по λ оценки

$$\|\xi^\lambda\| \le C_3,$$
$$\frac{1}{\lambda} B_\omega(\xi^\lambda, \xi^\lambda) \le C_4. \tag{2.3.29}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что при $\lambda \to 0$

$$\xi^\lambda \to \xi_\star \quad \text{слабо в} \quad H. \tag{2.3.30}$$

Тогда, в силу (2.3.29), имеем

$$\varepsilon_{ij}(U_\star) = 0, \quad \phi_\star + \nabla u_\star = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\phi_\star) = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad i, j = 1, 2.$$

В соответствии с рассуждениями при выводе (2.3.1) и (2.3.2), из последних равенств следует существование функций $\rho_\star$, $l_\star$, таких, что

$$U_\star = \rho_\star, \quad u_\star = l_\star, \quad \phi_\star + \nabla u_\star = 0 \quad \text{на} \quad \omega, \quad \rho_\star \in R(\omega), \quad l_\star \in L(\omega).$$

Слабая сходимость $\xi^\lambda \to \xi_\star$ в H влечет, то что существует подпоследовательность (обозначаемая прежним образом) для которой $\xi^\lambda \to \xi_\star$ в $L_2(\gamma)^5$. Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать что $\xi^\lambda \to \xi_\star$ п.в. на γ при $\lambda \to 0$. Переходя к пределу в соотношении

$$[U^\lambda] \cdot n \ge h |[\phi^\lambda] \cdot n| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma^+,$$

при $\lambda \to 0$, находим

$$(U_\star - \rho_\star) \cdot n \ge h |(\phi_\star + \nabla l_\star) \cdot n| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma^+.$$

Это означает, что предельная функция $\xi_\star$ принадлежит множеству K_ω. Зафиксируем произвольную функцию $\eta \in K_\omega$. Очевидно, что ее можно подставить в качестве тестовой в (2.3.28). Получим

$$B^\lambda_{\Omega_\gamma}(\xi^\lambda, \eta - \xi^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi^\lambda)dx. \tag{2.3.31}$$

С учетом слабой сходимости (2.3.30), соотношений (2.3.26) можно осуществить переход к нижнему пределу в (2.3.31) при $\lambda \to 0$, что дает

$$\xi_\star \in K_\omega, \quad B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\xi_\star, \eta - \xi_\star) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi_\star)dx \quad \forall \eta = (V, v, \psi) \in K_\omega.$$

В силу единственности решения задачи (2.3.4) отсюда получаем, что $\xi_\star = \xi$. Таким образом, для семейства задач (2.3.27), описывающих равновесие упругих пластин, при $\lambda \to 0$ в качестве предельной получаем задачу о равновесии пластины с жестким включением (2.3.4).

2.4 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения

Интерес к изучению математических моделей тел, содержащих жесткие включения, обусловлен широким применением композитных материалов, см., например, [20, 61, 138, 176]. Как известно, различные задачи относительно тел содержащих жесткие включения можно успешно формулировать и изучать с помощью методов вариационного исчисления [55, 92, 152, 169]. В частности, теория двумерных задач теории упругости с тонкими жесткими включениями и возможным отслоением предложена в [55]. Трехмерный случай рассмотрен в [152]. Качественная связь между задачей о равновесии двумерного тела с объемным жестким включением и задачей о равновесии двумерного тела с тонким жестким включением при наличии трещины вдоль включения установлена в [169]. Аналогичный результат для пластин модели Кирхгофа-Лява установлен в [170].

В этом параграфе исследуются задачи о равновесии упругих трансверсально-изотропных пластин Тимошенко, содержащие жесткие включения. С помощью предельного перехода по геометрическому параметру (описывающему продольный размер включения) в задачах о пластине с жестким объемным включением, в качестве предельной задачи найдена корректная формулировка задачи о пластине с тонким жестким включением. Для вариационной формулировки задачи о равновесии пластины с тонким включением найдена эквивалентная, при достаточной гладкости решения, постановка в дифференциальной форме.

2.4.1 Объемное жесткое включение без отслоения

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть подобласть ω лежит строго внутри Ω, т. е. $\overline{\omega} \cap \Gamma = \emptyset$, а ее граница Ξ является достаточно гладкой (см. рис. 2.5).

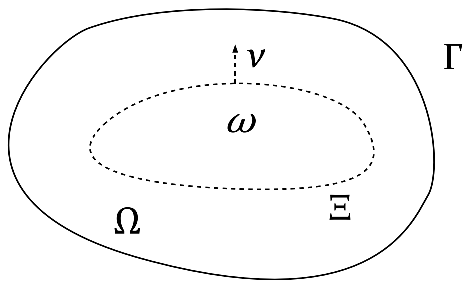

Рис. 2.5: Геометрия в срединной плоскости пластины с жестким объемным включением без отслоения.

Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h$. Выберем декартову систему координат $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы плоскость $z = 0$ соответствовала срединной плоскости, а пластина в недеформированном состоянии задавалась множеством $\Omega \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^3$. В наших рассуждениях жесткое включение будет задаваться множеством $\omega \times [-h, h]$, т. е. граница жесткого включения задается цилиндрической поверхностью $\Xi \times [-h, h]$. Упругая часть пластины соответствует области $\Omega \backslash \overline{\omega}$.

Обозначим через $\xi = \xi(x) = (W, w, \psi)$ вектор обобщенных перемещений точек срединной поверхности ($x = (x_1, x_2) \in \Omega$), $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — вдоль оси z, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ – углы поворота нормальных сечений. Для удобства будем также использовать обозначения ξ_i, $i = 1, 2..., 5$, относительно компонент вектора ξ, при этом $(\xi_1, \xi_2) = W$, $\xi_3 = w$, $(\xi_4, \xi_5) = \psi$.

В соответствии с направлением внешней (по отношению к ω) нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к Ξ, можно говорить о положительном Ξ^+ и отрицательном Ξ^- берегах кривой Ξ. В случае, когда след функции v берется на положительном берегу Ξ^+ будем писать $v^+ = v|_{\Xi^+}$, так же для отрицательного берега $v^- = v|_{\Xi^-}$. Аналогичные обозначения будем использовать относительно γ^+ и γ^-.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины,

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}),\ i, j = 1, 2,\ (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2, \qquad (2.4.1)$$

где ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijkl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\ a_{iijj} = D\text{æ},\ a_{ijij} = a_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2,$$

D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \qquad (2.4.2)$$

где $\Lambda = 2\kappa' G h$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные. Пусть $B_M(\cdot\,,\cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B_M(\eta, \bar{\eta}) = \int\limits_M \Big\{ m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) + \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(\bar{W}) \Big\} dx,$$

где M — подобласть, содержащаяся в Ω, $\eta = (W, w, \psi)$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$. Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω, имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B_\Omega(\eta, \eta) - \int\limits_\Omega F\eta dx\,, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega)^5$ — вектор, задающий внешние нагрузки [86].

Пусть $H = H_0^1(\Omega)^5$. Введем далее следующие пространства, которые будут использоваться при описании жестких свойств объемных или тонких включений в пластине

$$\begin{aligned}
&R(\mathcal{D}) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2),\ x \in \mathcal{D}\},\\
&L(\mathcal{D}) = \{l \,|\, l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ x \in \mathcal{D}\},\\
&Q(\mathcal{D}) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2,\\
&\qquad\qquad\qquad a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2),\ x \in \mathcal{D}\},
\end{aligned}$$

где b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 — некоторые вещественные числа, $\mathcal{D}$ — подмножество области Ω.

Задачу о равновесии пластины с жестким включением сформулируем в виде задачи минимизации

$$\inf_{\eta \in K_\omega} \Pi(\eta), \tag{2.4.3}$$

где

$$K_\omega = \left\{ \eta = (W, w, \psi) \in H \;\middle|\; \eta|_\omega = \zeta, \quad \zeta \in Q(\omega) \right\}$$

есть множество допустимых функций. Заметим, что включение $\eta \in H$ предполагает выполнение однородных краевых условий

$$w = 0, \quad \psi = W = (0, 0) \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{2.4.4}$$

Для функций $\eta \in K_\omega$, ввиду определенной их структуры в области ω, выполняются равенства: $\varepsilon_{ij}(W) = 0$, $\varepsilon_{ij}(\psi) = 0$, $\psi_i + w_{,i} = 0$ п.в. в области ω, $i, j = 1, 2$. Следовательно, функционал энергии $\Pi(\eta)$ может быть представлен в виде

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\eta, \eta) - \int\limits_{\Omega} F\eta dx \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K_\omega.$$

Легко показать, что множество K_ω является выпуклым и замкнутым в гильбертовом пространстве H. В силу оценки

$$B_\Omega(\eta_1, \eta_2) \leq C_1 \|\eta\| \|\overline{\eta}\| \quad \forall\, \eta, \overline{\eta} \in H,$$

с постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от $\eta \in H$ и $\overline{\eta} \in H$, симметричная билинейная форма $B_\Omega(\cdot, \cdot)$ является непрерывной над H. Коэрцитивность функционала $\Pi(\eta)$ следует из неравенства

$$B_\Omega(\eta, \eta) \geq C_2 \|\eta\|^2 \quad \forall\, \eta \in H, \tag{2.4.5}$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от η (доказательство неравенства можно найти в параграфе 2.1, см. оценку (2.1.4)). Функционал энергии $\Pi(\eta)$ является также дифференцируемым, строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу (см. параграф 2.1). Указанные свойства функционала $\Pi(\eta)$, а также выпуклость и замкнутость множества K_ω позволяют утверждать о существовании единственного решения ξ_ω задачи (2.4.3) (см. теорему 1.4.1 и лемму 1.4.3).

Симметричность, непрерывность билинейной формы $B_\Omega(\cdot, \cdot)$ и свойства множества K_ω обеспечивают (см. лемму 1.4.2) эквивалентность задачи (2.4.3) следующему вариационному равенству:

$$\xi_\omega = (U_\omega, u_\omega, \phi_\omega) \in K_\omega, \quad B_\Omega(\xi_\omega, \eta) = \int\limits_{\Omega} F\eta dx$$

$$\forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K_\omega. \tag{2.4.6}$$

2.4.2 Тонкое жесткое включение без отслоения.

Целью данного раздела является обоснование и вывод корректной постановки задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением. Вывод будет основываться с помощью предельного перехода в задаче (2.4.6) по продольному размеру объемного включения. Выберем подходящую геометрию задачи, где в качестве области жесткого включения ω выступает криволинейный прямоугольник ω_t ширины $t \in (0, t_0]$, определенный соотношением

$$\omega_t = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \in (-a, 0), \quad g(x_1) - t < x_2 < g(x_1)\}, \quad a > 0, \quad \overline{\omega}_t \subset \Omega,$$

где $g \in C^{0,1}(-a, 0)$. При этом кривая γ задается соотношениями

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \,| -a < x_1 \le 0, \quad x_2 = g(x_1)\}$$

и не зависит от параметра t (см. рис. 2.6).

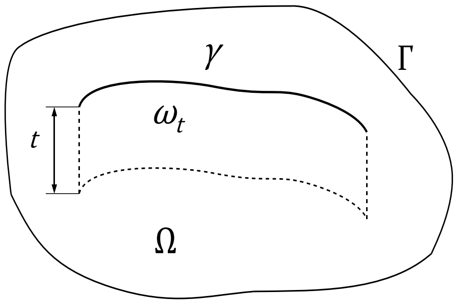

Рис. 2.6: Криволинейный прямоугольник ω_t ширины t в срединной плоскости.

Далее рассмотрим семейство вариационных задач вида (2.4.6) (см. предыдущий раздел) о равновесии пластин с жесткими включениями $\omega_t \times [-h, h]$, зависящих от положительного параметра t. Обозначим через ξ^t решение задачи

$$\xi^t \in V_t, \quad B_\Omega(\xi^t, \eta^t) = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\eta^t dx \quad \forall\, \eta^t \in V_t. \tag{2.4.7}$$

Здесь V_t — подмножество H, состоящее из всех функций $\eta = (W, w, \psi)$ для которых сужение компонент на ω_t удовлетворяет соотношениям

$$\eta|_{\omega_t} = \zeta, \quad \zeta \in Q(\omega_t).$$

Заметим, что множества V_t обладают следующим свойством $V_{t_1} \subset V_{t_2}$ при $t_1 \ge t_2 > 0$.

Пусть множество $V_0 \subset H$ состоит из всех η, сужение которых на кривой γ удовлетворяет соотношениям

$$\eta|_\gamma = \zeta, \quad \zeta \in Q(\gamma). \tag{2.4.8}$$

В дальнейших рассуждениях понадобится следующее утверждение, устанавливающее связь между множествами V_t $(t > 0)$ и V_0.

Лемма 2.4.1. *Для любой фиксированной функции $\eta_* \in V_0$ существует последовательность $\eta^t \in V_t$ сильно сходящаяся к η_* в пространстве H.*

Доказательство. Пусть $\eta_* \in V_0$. Доопределим функцию ζ_*, связанную с η_* равенством $\eta_*|_\gamma = \zeta_*$, $\zeta_* \in Q(\gamma)$, на всю область Ω так, чтобы $\zeta_* \in Q(\Omega)$. Выберем вспомогательную гладкую функцию $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, такую что $\Phi = 0$ на Γ и $\Phi = 1$ в окрестности кривой γ. Положим $\bar{\eta} = \eta - \Phi \cdot \zeta_*$. По построению справедливо включение $\bar{\eta} \in H^1_0(\Omega_\gamma)^5$. Следовательно существует последовательность $\bar{\eta}^t$, такая что

$$\bar{\eta}^t \to \bar{\eta} \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_\gamma), \quad \bar{\eta}^t = 0 \quad \text{в} \quad \omega_t.$$

Остается взять в качестве η^t последовательность, элементы которой определены равенствами

$$\eta^t = \bar{\eta}^t + \Phi \cdot \zeta_*.$$

Тогда, очевидно, имеет место сильная сходимость $\eta^t \to \eta$ при $t \to 0$ в пространстве H. Кроме того, $\eta^t \in V_t$. Лемма доказана.

Проведем выкладки, позволяющие перейти к пределу при $t \to 0$ в задаче (2.4.7). Подставляя в (2.4.7) функцию $\eta = \xi^t$, с помощью неравенства (2.4.5) получим равномерную по t оценку

$$\|\xi^t\| \leq C. \tag{2.4.9}$$

На основании (2.4.9) в силу рефлексивности пространства H из $\{\xi^t\}$ можно выделить подпоследовательность, обозначенную прежним образом, такую что

$$\xi^t \to \xi^0 \quad \text{слабо в} \quad H, \quad \xi^t \to \xi^0 \quad \text{сильно в} \quad L_2(\gamma). \tag{2.4.10}$$

Далее, выделяя при необходимости подпоследовательность, можно считать, что $\xi^t \to \xi^0$ п.в. на γ. Структура значений на γ^- каждой функции ξ^t и сходимость последовательности $\{\xi^t\}$ п.в. на γ позволяют сделать вывод о том, что числовые последовательности $\{b^t\}$, $\{a_i^t\}$, $\{c_j^t\}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$, определяющие структуру решения ξ^t в области ω_t, равномерно ограничены по абсолютной величине. Значит, при $t \to 0$ можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением), такую что

$$b^t \to b, \quad a_i^t \to a_i, \quad c_j^t \to c_j, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Для соответствующей подпоследовательности $\{\xi^t\}$ указанные числовые сходимости обуславливают справедливость соотношения

$$\xi^t|_\gamma \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\gamma).$$

Последнее выражение вместе с (2.4.10) означают, что

$$\xi^0|_\gamma = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Таким образом, ξ^0 принадлежит выпуклому и замкнутому множеству V_0. Переходя к пределу при фиксированном $\eta^t \in V_t$ в равенствах (2.4.7), находим

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \eta^t) = \int\limits_\Omega F\eta^t dx \quad \forall\, \eta^t \in V_t.$$

Пусть η — произвольная пробная функция из множества V. Согласно доказанной выше леммы существует последовательность $\tilde{\eta}^t \in V_t$ такая, что $\tilde{\eta}^t \to \eta$ сильно в H. Тогда, осуществляя предельный переход при $t \to 0$ в следующих равенствах

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \tilde{\eta}^t) = \int\limits_\Omega F\tilde{\eta}^t dx \quad \forall\, t,$$

получим

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \eta) = \int\limits_\Omega F\eta dx \quad \forall\, \eta \in V_0. \tag{2.4.11}$$

Таким образом, при стремлении к нулю параметра t, описывающего ширину жесткого включения, предельной задачей для семейства задач (2.4.7) является задача (2.4.11).

Свойства билинейной формы $B_\Omega(\cdot,\cdot)$ и множества V_0 гарантируют единственность решения ξ^0 задачи (2.4.11). Кроме того, ее можно сформулировать в виде задачи о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta\in V_0} \Pi(\eta). \tag{2.4.12}$$

На основании предыдущих рассуждений, заключаем, что задача (2.4.12) с физической точки зрения описывает равновесие пластины с тонким жестким включением без отслоения.

2.4.3 Тонкое жесткое включение с отслоением

Рассмотрим пластину, содержащую тонкое жесткое включение с отслоением на одном из берегов, другими словами, считаем, что пластина имеет сквозную вертикальную трещину, расположенную вдоль жесткого включения. Структуру решения будем задавать на кривой, соответствующей тонкому жесткому включению. На трещине будем ставить условия непроникания противоположных берегов.

Пусть γ — гладкая кривая без самопересечений, $\partial\gamma \notin \gamma$. Предположим, что кривую γ можно продолжить до замкнутой гладкой кривой Ξ, ограничивающей область ω, $\bar{\omega} \subset \Omega$ (см. рис. 2.7). Кроме того, γ также допускает продолжение до липшицевой кривой Σ, разбивающей область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ так, чтобы $\bar{\Sigma} = \partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ и $\mathrm{meas}(\Gamma \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тонкое жесткое включение бу-

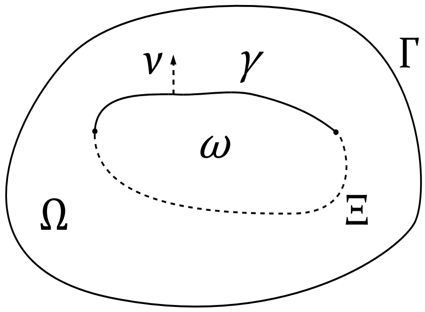

Рис. 2.7: Возможность продолжения γ до замкнутой кривой Σ.

дем моделировать с помощью цилиндрической поверхности $\gamma \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть, в соответствии с внешней нормалью ν к Ξ, γ^- и γ^+ — отрицательный и положительный берега кривой γ. Предположим, не нарушая общности, что на $\gamma^- \times [-h, h]$ пластина сцеплена с жестким включением, а отслоение имеет место на $\gamma^+ \times [-h, h]$. В соответствии с результатами предыдущего раздела, на отрицательном берегу γ зададим следующую структуру искомой функции η:

$$\eta|_\gamma = \zeta, \quad \zeta \in Q(\gamma) \quad \text{на} \quad \gamma^-. \tag{2.4.13}$$

На γ выпишем условия непроникания берегов трещины

$$[W_\nu] \geq h|[\psi_\nu]| \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{2.4.14}$$

где $W_\nu = w_i \nu_i$, $\psi_\nu = \psi_i \nu_i$, квадратные скобки $[\cdot]$ означают скачок функции: $[v] = v|_{\gamma^+} - v|_{\gamma^-}$. Вывод и обоснование условия (4.1.5) можно найти в разделе 1.5.2.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ $(\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma})$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Введем пространство $H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5$, снабженное стандартной нормой $\| \cdot \|_{H(\Omega_\gamma)}$. Функционал энергии пластины, соответствующей области Ω_γ, имеет следующий вид

$$\Pi(\Omega_\gamma; \eta) = \frac{1}{2} B_{\Omega_\gamma}(\eta, \eta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\eta dx\,, \quad \eta = (W, w, \psi).$$

Введем множество допустимых функций

$$K = \{\eta \in H(\Omega_\gamma) \mid \eta \text{ удовлетворяет } (2.4.13),\, (2.4.14)\,\}.$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с отслоившимся тонким включением сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K} \Pi(\Omega_\gamma; \eta). \tag{2.4.15}$$

Приведем рассуждения, доказывающие однозначную разрешимость задачи (2.4.15). Благодаря приведенному выше предположению о возможности разбиения области Ω с помощью кривой Σ, оценка вида (2.4.5) справедлива и в данном случае

$$B_{\Omega_\gamma}(\eta,\eta) \geq C\|\eta\|^2 \quad \forall\,\eta \in H(\Omega_\gamma), \tag{2.4.16}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от η. Очевидно, что коэрцитивность функционала $\Pi(\Omega_\gamma;\eta)$ следует из (2.4.16). Слабая полунепрерывность снизу и строгая выпуклость функционала $\Pi(\Omega_\gamma;\eta)$ могут быть установлены аналогично тому, как это сделано в параграфе 2.1.

Выпуклость множества K можно легко проверить. Докажем, что K является замкнутым множеством. В самом деле, пусть $\eta^n \in K$ и $\eta^n \to \eta$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$. Выделяя при необходимости подпоследовательность, можно считать, что $\eta^n \to \eta$ в $L_2(\gamma)$ на границе γ. Следовательно, можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением) такую, что $\eta^n \to \eta$ п.в. на γ. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах

$$[W^n_\nu] \geq h|[\psi^n_\nu]| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma,$$

получим, что для предельной функции $\eta = (W, w, \psi)$ справедливо неравенство $[W_\nu] \geq h|[\psi_\nu]|$ п.в. на γ. Далее сходимость п.в. на γ последовательности функций $\{\eta^n\}$ со следующей структурой на γ^-:

$$\eta^n|_{\gamma^-} = (b^n x_2 + c^n_1, -b^n x_1 + c^n_2, a^n_0 + a^n_1 x_1 + a^n_2 x_2, -a^n_1, -a^n_2),$$

обуславливает то, что числовые последовательности b^n, a^n_0, a^n_1, a^n_2, c^n_1, c^n_2, сходятся соответственно к некоторым числам b, a_0, a_1, a_2, c_1, c_2. Следовательно, последовательность (следов) $\{\eta^n\}$ п.в. на γ сходится к функции $(bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2)$. Это означает, что η удовлетворяет (2.4.13).

Свойства функционала энергии $\Pi(\Omega_\gamma;\eta)$ и множества K гарантируют существование единственного решения ξ задачи (2.4.15) и ее эквивалентность следующему вариационному неравенству

$$\xi \in K, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi)dx \quad \forall\,\eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.4.17}$$

Целью дальнейших рассуждений является вывод эквивалентной дифференциальной постановки задачи (2.4.15). А именно, исходя из вариационного неравенства (2.4.17), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой γ. Чтобы извлечь из неравенства (2.4.17) соотношения на внутренней границе γ, будем использовать формулы Грина. Поскольку производные функций из пространства $H^1(\Omega_\gamma)$ в общем случае не имеют следы, далее предполагаем, что решение ξ является достаточно гладким.

Сравним два неравенства, полученные подстановкой в (2.4.17) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big\{ m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + (\tilde{w},_i + \tilde{\psi}_i)q_i \Big\} dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\tilde{\eta}dx, \tag{2.4.18}$$

где $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$; U, u, ϕ — компоненты решения ξ. Из (2.4.18), учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W})dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i \tilde{w}_i dx \quad \forall\, \tilde{W} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \tilde{w},_i\, q_i dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_3 \tilde{w} dx \quad \forall\, \tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma),$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi})dx + \int\limits_{\Omega_\gamma} q_i\tilde{\psi}_i dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} \mu_i\tilde{\psi}_i dx \quad \forall\, \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2.$$

Заметив, что имеют место представления $\int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi})dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\tilde{\psi}_{i,j}dx$, $\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W})dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\tilde{w}_{i,j}dx$, из предыдущих трех равенств заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.19}$$

$$q_i,_i = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.20}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma. \tag{2.4.21}$$

Пусть $W=(w_1,w_2)\in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$. В рамках этого предположения выпишем формулы Грина (см. раздел 1.5.1) для области $\Omega\backslash\overline{\omega}$ и ω. Итак, в области $\Omega\backslash\overline{\omega}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W)dx+\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}}\sigma_{ij,j}w_idx=-\int\limits_{\Xi^+}\sigma_{ij}\nu_jw_ids-=$$

$$=-\int\limits_{\Xi^+}\big(\sigma_\nu W_\nu+\sigma_\tau W_\tau\big)ds,\qquad(2.4.22)$$

где $\sigma_\nu\nu$ и $\sigma_\tau\tau$ — нормальная и касательная составляющие вектора $\sigma\nu=\{\sigma_{ij}\nu_j\}$, при этом справедливы соотношения $\sigma_\nu=\sigma_{ij}\nu_j\nu_i$; $\sigma_\tau=\sigma_{ij}\nu_j\tau_i$; $\tau=(-\nu_2,\nu_1)$; $W_\tau=w_i\tau_i$; $W_\nu=w_i\nu_i$. Относительно области ω выполняется соотношение

$$\int\limits_{\omega}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W)dx+\int\limits_{\omega}\sigma_{ij,j}w_idx=\int\limits_{\Xi^-}\sigma_{ij}\nu_jw_ids=$$

$$=\int\limits_{\Xi^-}\big(\sigma_\nu W_\nu+\sigma_\tau W_\tau\big)ds,\qquad(2.4.23)$$

где $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ — нормаль к Ξ. Суммируя (2.4.22), (2.4.23), с учетом того, что $W^+=W^-$, $\sigma_{ij}^+\nu_j=\sigma_{ij}^-\nu_j$ на $\Xi\backslash\overline{\gamma}$ получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(W)dx+\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij,j}w_idx=$$

$$=-\Big[\int\limits_{\gamma}\sigma_{ij}\nu_jw_ids\Big]=-\Big[\int\limits_{\gamma}\big(\sigma_\nu W_\nu+\sigma_\tau W_\tau\big)ds\Big].\qquad(2.4.24)$$

Аналогично для произвольных $\psi\in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $w\in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ справедливы формулы

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi)dx+\int\limits_{\Omega_\gamma}m_{ij,j}\psi_idx=$$

$$=-\Big[\int\limits_{\gamma}m_{ij}\nu_j\psi_ids\Big]=-\Big[\int\limits_{\gamma}\big(m_\nu\psi_\nu+m_\tau\psi_\tau\big)ds\Big],\quad(2.4.25)$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}\nabla u\nabla wdx+\int\limits_{\Omega_\gamma}w\triangle udx=-\Big[\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}wds\Big],\qquad(2.4.26)$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \phi \nabla w dx + \int\limits_{\Omega_\gamma} w \mathrm{div} \phi dx = -\Big[\int\limits_{\gamma} \phi_\nu w ds \Big], \tag{2.4.27}$$

где величины m_ν, m_τ определяются так же, как σ_ν, σ_τ, (см. формулу (2.4.22)). Преобразуем (2.4.17) с помощью формул (2.4.24)–(2.4.27) к следующему виду

$$- \Big[\int\limits_{\gamma} \big\{ \sigma_\nu (W_\nu - U_\nu) + \sigma_\tau (W_\tau - U_\tau) \big\} ds \Big] -$$

$$- \Big[\int\limits_{\gamma} \big\{ m_\nu (\psi_\nu - \phi_\nu) + m_\tau (\psi_\tau - \phi_\tau) \big\} ds \Big] -$$

$$- \Lambda \Big[\int\limits_{\gamma} (\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)(w - u) ds \Big] \geq 0 \quad \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.4.28}$$

Пусть функция $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in K$ такая, что $\tilde{\eta} \in H_0^1(\Omega)^5$. Подставим в вариационное неравенство (2.4.17) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$. Сравнив полученные соотношения, выведем следующее интегральное тождество, справедливое для всех тестовых функций $\tilde{\eta}$ из пространства Соболева $H_0^1(\Omega)^5$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big\{ m_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + (\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i) q_i \Big\} dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} F \tilde{\eta} dx. \tag{2.4.29}$$

Далее, применяя формулы интегрирования по частям, с учетом уравнений равновесия (2.4.19)–(2.4.21), равенств (2.4.13), из (2.4.29) выводим

$$- \int\limits_{\gamma} [\sigma_{ij} \nu_j] \rho_i ds + \int\limits_{\gamma} [m_{ij} \nu_j] a_i ds - \Lambda \int\limits_{\gamma} \Big[\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big] l ds = 0, \tag{2.4.30}$$

для всех $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\gamma)$, $l = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \in L(\gamma)$. Учитывая независимость ρ и l в (2.4.30), имеем

$$\int\limits_{\Xi} [\sigma_{ij} \nu_j] \rho_i ds = 0 \quad \forall \rho \in R(\omega), \tag{2.4.31}$$

$$\int\limits_{\Xi} [m_{ij} \nu_j] a_i ds - \Lambda \int\limits_{\Xi} [\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}] l ds = 0 \quad \forall l \in L(\omega). \tag{2.4.32}$$

Рассмотрим функцию $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi})$ такая, что $\tilde{W} \equiv (0, 0)$, $\tilde{\psi} \equiv (0, 0)$ в Ω_γ, функция $\tilde{w} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$: $\tilde{w} = 0$ в ω. По построению очевидно, что $\eta \in K$. Заметим, что значения функции $\tilde{w}$ равны нулю на кривой $\Xi\backslash\overline{\gamma}$ и произвольны на γ^+. Подставим функцию η в (2.4.17) и преобразуем полученное соотношение с помощью формул (2.4.26), (2.4.27) и уравнения (2.4.20). В итоге получим

$$\int\limits_{\gamma^+} (\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu})\tilde{w} ds \geq 0.$$

Отсюда, принимая во внимание произвольность значений $\tilde{w}$ на границе γ^+, находим

$$\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.4.33}$$

Подставим в вариационное неравенство (2.4.17) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in H(\Omega_\gamma)$ такая, что $\tilde{w} \equiv 0$, $\tilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, $\tilde{W} \equiv (0,0)$ в ω и $\tilde{W}_\nu = 0$ на γ^+. Преобразовав полученные интегралы с помощью формул Грина, выведем

$$\int\limits_{\Xi^+} \sigma_{ij}\nu_j \tilde{w}_i ds = \int\limits_{\Xi^+} \big(\sigma_\nu \tilde{W}_\nu + \sigma_\tau \tilde{W}_\tau\big) ds = \int\limits_{\Xi^+} \sigma_\tau \tilde{W}_\tau ds = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности значений $\tilde{W}$ на γ^+ заключаем, что

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.4.34}$$

Аналогичными выкладками, подобрав пробную функцию специального вида (рассматривая функции ψ, удовлетворяющие условию $\psi_\nu = 0$), можно получить, что

$$m_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.4.35}$$

С помощью полученных равенств (2.4.30), (2.4.33), (2.4.34), (2.4.35) и вспомогательного тождества

$$[vs] = v^+(s^+ - s^-) + (v^+ - v^-)s^- = v^+[s] + [v]s^-. \tag{2.4.36}$$

Упростим соотношение (2.4.28) к следующему виду

$$-\int\limits_{\gamma} \Big(\sigma_\nu^+[W_\nu - U_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu - \phi_\nu]\Big) ds \geq 0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K.$$

Отсюда, сравнивая неравенства получающиеся при подстановке пробных функций $\eta = (0,0,0,0,0)$ и $\eta = 2\xi$, имеем

$$-\int\limits_{\gamma}(\sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu])ds \geq 0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K, \tag{2.4.37}$$

$$\int\limits_{\gamma}(\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu])ds = 0. \tag{2.4.38}$$

Пусть $\tilde{W} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $\tilde{W} = (0,0)$ в ω, $\tilde{W}_\nu^+ \geq 0$ на γ (в этом случае $\tilde{W}_\nu^+ = [\tilde{W}_\nu^+]$). Тогда имеют место следующие включения $\tilde{\eta}_1 = (h\tilde{W}, 0, \tilde{W}) \in K$, $\tilde{\eta}_2 = (h\tilde{W}, 0, -\tilde{W}) \in K$ (т.е. $\tilde{\phi}_1 = \tilde{W}$ для $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\phi}_2 = -\tilde{W}$ для $\tilde{\eta}_2$). Подставляя $\tilde{\eta}_1$ в (2.4.37), получим

$$-\int\limits_{\gamma^+}(h\tilde{W}_\nu)\sigma_\nu ds - \int\limits_{\gamma^+}(\tilde{W}_\nu)m_\nu ds \geq 0.$$

Произвольность $\tilde{W}$ позволяет вывести из последнего соотношения неравенство

$$-h\sigma_\nu \geq m_\nu \quad \text{на} \quad \gamma^+.$$

Такими же рассуждениями, подставив $\tilde{\eta}_2$ в (2.4.37), находим

$$-h\sigma_\nu \geq -m_\nu \quad \text{на} \quad \gamma^+.$$

Таким образом, из последних двух неравенств вытекает соотношение

$$-h\sigma_\nu \geq |m_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{2.4.39}$$

Подынтегральное выражение в (2.4.38) неположительно в силу включения $\xi \in K$ и неравенства (2.4.39), следовательно, верно равенство

$$\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Таким образом, решение $\xi = (U, u, \phi)$ задачи минимизации (2.4.15), при достаточной гладкости, удовлетворяет следующим соотношениям

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad i,j,k,l = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.40}$$

$$\sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad i,j,k,l = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.41}$$

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.42}$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.43}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.44}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.4.45}$$

$$\int\limits_\Xi [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i ds = 0 \quad \forall\, \rho \in R(\omega), \tag{2.4.46}$$

$$\int\limits_\Xi [m_{ij}\nu_j]a_i ds - \Lambda \int\limits_\Xi \big[\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}\big] l ds = 0 \quad \forall\, l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \in L(\omega), \tag{2.4.47}$$

$$\xi|_{\gamma^-} = \zeta, \quad \zeta \in R(\gamma), \tag{2.4.48}$$

$$\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad m_\tau = 0, \quad -h\sigma_\nu \ge |m_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma^+, \tag{2.4.49}$$

$$[U_\nu] \ge h|[\phi_\nu]|, \quad \sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{2.4.50}$$

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{2.4.51}$$

Пусть для для достаточно гладкой функции ξ справедливы уравнения состояния (2.4.40)–(2.4.42), уравнения равновесия (2.4.43)–(2.4.45), тождества (2.4.46), (2.4.47) и условия (2.4.48)– (2.4.51). Покажем, что тогда ξ является также и решением вариационной задачи (2.4.6). Умножим равенства (2.4.43) на $(w_i - u_i)$ для каждого $i = 1,2$, соответственно, затем просуммируем по i. Обе части полученного равенства проинтегрируем по Ω_γ и применим формулы Грина (2.4.24). В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(W-U)dx + \Big[\int\limits_\gamma \sigma_{ij}\nu_j(w_i - u_i)ds\Big] = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(w_i - u_i)dx. \tag{2.4.52}$$

Уравнение (2.4.44) после умножения его на $(w-u)$, интегрирования по Ω_γ и применения формул (2.4.26), (2.4.27) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} (w_{,i} - u_{,i})q_i dx + \Lambda\Big[\int\limits_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)(w-u)ds\Big] = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_3(w-u)dx. \tag{2.4.53}$$

Проведя такие же действия с уравнениями в (2.4.45) (они умножаются на $(\psi_i - \phi_i)$, $i = 1, 2$), выведем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi - \phi)dx + \Big[\int\limits_{\gamma} m_{ij}\nu_j(\psi_i - \phi_i)ds\Big] =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\gamma} (\mu_i - q_i)(\psi_i - \phi_i)dx. \qquad (2.4.54)$$

Суммируя последние уравнения (2.4.52)–(2.4.54), получим

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi, \eta - \xi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi)dx = -\Big[\int\limits_{\gamma} \sigma_{ij}\nu_j(w_i - u_i)ds\Big] -$$

$$- \Big[\int\limits_{\gamma} m_{ij}\nu_j(\psi_i - \phi_i)ds\Big] - \Lambda\Big[\int\limits_{\gamma} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)(w - u)ds\Big]. \quad (2.4.55)$$

Покажем, что для $\eta \in K$ правая часть равенства (2.4.55) неотрицательна. С учетом (2.4.36) слагаемые правой части (2.4.55), взятые с обратным знаком, можно записать в виде

$$\int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}\nu_j)^+[w_i - u_i]ds + \int\limits_{\gamma} (m_{ij}\nu_j)^+[\psi_i - \phi_i]ds +$$

$$+ \Lambda\int\limits_{\gamma} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^+[w - u]ds + \int\limits_{\gamma} [\sigma_{ij}\nu_j](w_i - u_i)^- ds +$$

$$+ \int\limits_{\gamma} [m_{ij}\nu_j](\psi_i - \phi_i)^- ds + \Lambda\int\limits_{\gamma} \Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big](w - u)^- ds. \quad (2.4.56)$$

Включения $\eta \in K$, $\xi \in K$, означают, что η и ξ на γ^- имеют заданную структуру (2.4.13). Это обстоятельство вместе с равенствами (2.4.31), (2.4.32), в свою очередь, влечет то, что сумма последних трех интегралов в (2.4.56) равна нулю. Разбивая на нормальную и касательную составляющие вектора $\sigma_{ij}\nu_j$, $m_{ij}\nu_j$, $(W - U)$ и $(\psi - \phi)$, запишем (2.4.56) в виде

$$\int\limits_{\gamma} \Big\{\sigma_\nu^+[W_\nu - U_\nu] + \sigma_\tau^+[W_\tau - U_\tau] + m_\nu^+[\psi_\nu - \phi_\nu] +$$

$$+ m_\tau^+[\psi_\tau - \phi_\tau] + \Lambda(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)^+[w - u]\Big\}ds. \quad (2.4.57)$$

Замечая, что согласно (2.4.49) на γ^+ имеют место равенства $m_\tau^+ = 0$, $\sigma_\tau^+ = 0$ и $(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)^+ = 0$, выражение (2.4.57) упрощаем к следующему виду

$$\int\limits_\gamma (\sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu])ds - \int\limits_\gamma (\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu])ds. \tag{2.4.58}$$

Согласно (2.4.50) второй интеграл в (2.4.58) равен нулю. Неположительность подынтегральной функции для первого интеграла выражения (2.4.58) следует из неравенств $[W]_\nu \geq h|[\psi_\nu]|$, $-h\sigma_\nu^+ \geq |m_\nu^+|$, выполненных на γ. В итоге для $\eta \in K$ выражение (2.4.58) неположительно. Это означает, что правая часть (2.4.55) имеет неотрицательное значение и, следовательно, справедливо вариационное неравенство (2.4.17). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Гладкая функция $\xi = (U, u, \phi) \in K$ является решением вариационной задачи* (2.4.3) *тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи* (2.4.40)–(2.4.51).

Замечание 2.4.1. *Можно показать, что задача* (2.4.12) *о пластине с жестким включением без отслоения эквивалентна дифференциальной постановке:*

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad i,j,k,l = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$\int\limits_\Xi [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i ds = 0 \quad \forall\, \rho \in R(\omega),$$

$$\int\limits_\Xi [m_{ij}\nu_j]a_i ds - \Lambda \int\limits_\Xi \Big[\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big] l ds = 0 \quad \forall\, l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \in L(\omega),$$

$$\xi|_\gamma = \zeta, \quad \zeta \in Q(\gamma),$$

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \;\; \text{на} \;\; \Gamma.$$

2.5 Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной

Изучению пластин и оболочек содержащих трещины посвящено большое число работ (см., например, [2, 29, 38, 41, 68, 79, 81, 98, 113, 121, 126]). При этом, как правило, рассматриваются вертикальные трещины — они задаются поверхностями, нормали к которым (в каждой точке поверхности) параллельны срединной плоскости пластины. В работах [29, 49, 113] исследованы нелинейные задачи о равновесии пластины модели Кирхгофа–Лява с условиями непроникания для наклонной трещины. При этом в [113] условие непроникания приведено для трещин заданных гладкой поверхностью $z = F(x_1, x_2)$, где $F(x_1, x_2)$ — функция, определенная в (срединной) плоскости (x_1, x_2). В [29] приводится вывод условия непроникания для трещины, которая мало отличается от вертикальной. Кроме того, в обеих работах используются дополнительные (относительно модели Кирхгофа–Лява) предположения о том, что перемещения во всех точках берегов трещины можно задать с помощью перемещений точек, лежащих в срединной плоскости пластины. В настоящем параграфе, так же как и в [29], вывод условия взаимного непроникания берегов трещины приведен в рамках предположения о том, что нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью. Вариационная задача о равновесии пластины формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций, которые удовлетворяют условию непроникания. Доказана однозначная разрешимость задачи. Получены соотношения, описывающие контакт противоположных берегов трещины. При условии достаточной гладкости решения задачи минимизации для исходной вариационной постановки получена эквивалентная дифференциальная формулировка. Для одномерного случая (балка с разрезом) получено аналитическое решение и исследованы его качественные свойства.

2.5.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega$, Γ_c – гладкая кривая, без самопересечений такая, что $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$, $\partial\Gamma_c \notin \Gamma_c$. Обозначим через $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_c$ вектор нормали к Γ_c. Как и в работе [29], определим поверхность

$$\Xi = \big\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, z) \,|\, |z| \le h,\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x},\ \bar{x} = x - z\nu(x)\mathrm{tg}\,\alpha(x), x \in \Gamma_c\big\},$$

где $\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$, $x \in \Gamma_c$ — функция двух переменных (см. рис. 2.8). Предположим, что нормаль $n(\bar{x}, z)$ к поверхности Ξ при фиксированном

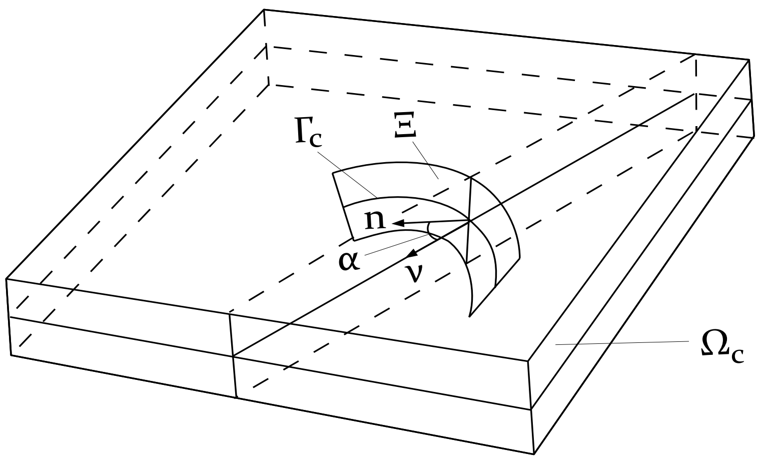

Рис. 2.8: Пластина с наклонной трещиной.

$x \in \Gamma_c$ остается неизменной, т.е.

$$n(\bar{x}, z) = n(x, 0) = (\nu(x) \cos\alpha(x), \sin\alpha(x)),$$
$$\forall \bar{x} = x - z\nu(x)\mathrm{tg}\,\alpha(x), \quad |z| \le h.$$

Заметим, что этим свойством обладают, например, поверхности Ξ, образованные с помощью плоскости или конической поверхности.

Предположим, что в исходном недеформированном состоянии пластина, содержащая наклонную трещину задается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \overline{\Xi}$. При этом поверхность Ξ соответствует трещине (разрезу) нулевой ширины. В срединной плоскости $z = 0$ имеем негладкую область $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$. В соответствии с направлением нормали ν выберем положительные Γ_c^+, Ξ^+ и отрицательные Γ_c^-, Ξ^- берега кривой Γ_c и поверхности Ξ.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$, $x \in \Omega_c$ вектор перемещений точек срединной поверхности, где $W = (w_1, w_2)$ и w горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)) и вертикальные перемещения, соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$, $x \in \Omega_c$.

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин [86]. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\Big), \ i,j = 1,2.$$

Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\psi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W). \tag{2.5.1}$$

Ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{iiii} = D, \ c_{iijj} = D\text{æ}, \ c_{ijij} = c_{ijji} = D(1-\text{æ})/2, \ i,j = 1,2, \ i \neq j,$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона. Для вектора поперечных сил $q = (q_1, q_2)$ выполняются следующие равенства [86]:

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1,2, \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}), \tag{2.5.2}$$

где $\Lambda = 2\kappa' G h$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

Пусть $H^1(\Omega_c)$ — пространство Соболева, $H^{1,0}(\Omega_c)$ — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем следующие обозначения:

$$H = H^{1,0}(\Omega_c)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_H.$$

Пусть $\eta = (W, w, \psi) \in H$, $\bar\eta = (\bar W, \bar w, \bar\psi) \in H$. Определим билинейную форму:

$$B(\eta, \bar\eta) = \int\limits_{\Omega_c} \Big(\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)\Big) dx.$$

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B(\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_c} F\eta dx, \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in H,$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega_c)^5$ – вектор заданных внешних нагрузок [86].

На внешней границе $\partial\Omega$ зададим краевые условия жесткого защемления:

$$\eta = (0,0,0,0,0) \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Как известно, в модели Тимошенко вектор перемещений $\chi(x,z) = (W(x,z), w(x,z))$ для точек оболочки, отстоящих от срединной поверхности на расстояние $|z| \le h$, выражаются с помощью перемещений в срединной поверхности $\chi(x,0) = \chi(x) = (W,w)$ и углов поворота нормальных сечений $\psi = \psi(x)$. При этом справедливы следующие формулы (см. параграф 1.5, формулы (1.5.1)):

$$W(x,z) = W(x) + z\psi(x), \quad w(x,z) = w(x), \quad |z| \le h, \quad x \in \Omega_c.$$

Пусть угол $\alpha(x)$ достаточно мал при всех $x \in \Gamma_c$. Предположим, что перемещения в точках $(\bar{x}, z) \in \Xi^{\pm}$ (на берегах трещины) можно выразить с помощью следов функций $W(x)$, $w(x)$, $\psi(x)$ на кривой Γ_c следующими равенствами:

$$\begin{cases} w^{\pm}(\bar{x},z) = w^{\pm}(x), \\ W^{\pm}(\bar{x},z) = W^{\pm}(x) + z\psi^{\pm}(x), \end{cases} \tag{2.5.3}$$

где $|z| \le h$, $x \in \Gamma_c$, $\bar{x} = x - z\nu(x)\operatorname{tg}\alpha(x)$.

Условие непроникания берегов трещины, заключается в том, что разность перемещений $\chi(\bar{x},z)^+$ на положительном берегу Ξ^+ и $\chi(\bar{x},z)^-$ — на Ξ^- в проекции на нормаль $n(\bar{x},z)$ должна быть неотрицательной:

$$\Big(\chi(\bar{x},z)^+ - \chi(\bar{x},z)^-\Big) \cdot (\nu(x)\cos\alpha(x), \sin\alpha(x)) \ge 0, \quad (\bar{x},z) \in \Xi.$$

С учетом (2.5.3), подставляя экстремальные значения $z = h$, $z = -h$, находим

$$[W_\nu]\cos\alpha - h|[\psi_\nu]|\cos\alpha + [w]\sin\alpha \ge 0, \quad x \in \Gamma_c,$$

где $\psi_\nu = \psi_i \nu_i$, $W_\nu = w_i \nu_i$, $[v] = v|_{\Gamma_c^+} - v|_{\Gamma_c^-}$. Разделив последнее соотношение на $\cos\alpha$, выведем условие непроникания для наклонной трещины

$$[W_\nu] + [w]\mathrm{tg}\alpha \geq h|[\psi_\nu]|, \quad x \in \Gamma_c. \tag{2.5.4}$$

Заметим, что при $\alpha \equiv 0$ неравенство (2.5.4) обращается в использованное в предыдущих параграфах условие непроникания для вертикальных трещин, содержащихся в пластинах модели Тимошенко. Если же для углов поворота вблизи трещины выполняются соотношения гипотезы "прямых нормалей" Кирхгофа–Лява: $\psi_i + w_{,i} = 0$, $i = 1, 2$, то (2.5.4) принимает вид условия непроникания для наклонной трещины в пластине Кирхгофа–Лява [29].

Задачу о равновесии пластины содержащей наклонную трещину сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K} \Pi(\eta), \tag{2.5.5}$$

где $K = \{\eta \in H \,|\, \eta = (W, w, \psi) \quad \text{удовлетворяет} \quad (2.5.4)\}$ — множество допустимых функций. Функционал $\Pi(\eta)$ является коэрцитивным, выпуклым и слабо полунепрерывным снизу в пространстве H (см. параграф 2.1). Кроме того, функционал $\Pi(\eta)$ дифференцируем. Можно показать, что множество K является выпуклым и замкнутым и, следовательно, слабо замкнутым в рефлексивном пространстве H. Указанные свойства функционала $\Pi(\eta)$ и множества K гарантируют существование единственного решения $\xi = (U, u, \phi)$, удовлетворяющего вариационному неравенству (см. параграф 2.1)

$$\xi \in K, \quad B(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_c} F(\eta - \xi) dx \quad \forall \eta \in K. \tag{2.5.6}$$

2.5.2 Формулировка в виде краевой задачи

В этом разделе мы получим формально эквивалентную дифференциальную постановку задачи (2.5.5). Для этого исходя из вариационного неравенства (2.5.6), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой Γ_c. Чтобы извлечь из неравенства (2.5.6) соотношения на внутренней границе Γ_c, будем использовать формулы Грина. Так же, как и в параграфе 1.2, предполагаем, что кривая Γ_c может быть продолжена до замкнутой достаточно гладкой кривой Σ, делящей область Ω на две области Ω_1 и Ω_2, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, с гладкими границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \partial\Omega$. Отметим, что кривая Σ может быть выбрана произвольно с точностью до наложенных на нее требований. Предположим, что решение ξ задачи (2.5.5) является достаточно гладким.

Сравним два неравенства, полученные после подстановки в (2.5.6) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\tilde{w}_i + f_3\tilde{w} + \mu_i\tilde{\psi}_i)dx \quad \forall\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5.$$

Здесь и далее $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$. Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, выводим уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_c. \tag{2.5.7}$$

Ввиду предположений о возможности продолжения Γ_c до замкнутой кривой Σ, справедлива следующая формула Грина (см. формулу (2.1.13))

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij,j}w_i dx -$$

$$- \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_{\tau i}w_{\tau i}\big)ds\Big] \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2, \tag{2.5.8}$$

где $\sigma_\nu\nu$ и $\sigma_\tau = (\sigma_{\tau 1}, \sigma_{\tau 2})$ — нормальная и касательная составляющие вектора $(\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$; $\sigma_{ij}\nu_j = \sigma_\nu\nu_i + \sigma_{\tau i}$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$, $w_{\tau i} = w_i - W_\nu\nu_i$, $i = 1, 2$. Справедливы также следующие формулы (см. формулы

(2.1.14)–(2.1.16))

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi)dx = -\int\limits_{\Omega_c} m_{ij,j}\psi_i dx -$$
$$- \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(m_\nu \psi_\nu + m_{\tau i}\psi_{\tau i}\big)ds\Big] \quad \forall \psi \in H^{1,0}(\Omega_c)^2, \qquad (2.5.9)$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \nabla u \nabla w\, dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial \nu} w\, ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \triangle u\, dx \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_c), \qquad (2.5.10)$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \phi \nabla w\, dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \phi_\nu w\, ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \mathrm{div}\phi\, dx \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_c), \qquad (2.5.11)$$

где величины m_ν, $m_{\tau i}$, $i = 1, 2$ определяются аналогично предыдущим формулам, записанным для σ_ν, $\sigma_{\tau i}$, $i = 1, 2$, см. формулу (2.5.8).

Подставляя в (2.5.6) $\eta = 0$, $\eta = 2\xi$ можно вывести два соотношения

$$B(\xi, \xi) = \int\limits_{\Omega_c} F\xi dx \quad \text{и} \quad B(\xi, \eta) \geq \int\limits_{\Omega_c} F\eta dx \quad \forall \eta \in K. \qquad (2.5.12)$$

Применяя во втором соотношении (2.5.12) формулы интегрирования по частям (2.5.8)–(2.5.11), с учетом уравнений равновесия (2.5.7), выведем

$$-\int\limits_{\Gamma_c} \Big[\big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_{\tau i} w_{\tau i}\big) + \big(m_\nu \psi_\nu + m_{\tau i}\psi_{\tau i}\big) +$$
$$+ \Lambda(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu) w\Big] ds \geq 0 \quad \forall \eta \in K. \qquad (2.5.13)$$

Выбирая в (2.5.13) пробные функции $\eta = (W, w, \psi) \in H_0^1(\Omega)^5$, для которых $[\eta] = 0$ на Γ_c, используя независимость $W_\nu, \psi_\nu, w, w_{\tau 1}, w_{\tau 2}, \psi_{\tau 1}, \psi_{\tau 2}$ получим

$$[\sigma_\nu] = [m_\nu] = [\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu] = 0, \quad [\sigma_{\tau i}] = [m_{\tau i}] = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Значит, неравенство (2.5.13) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\big(\sigma_\nu [W_\nu] + \sigma_{\tau i}[w_{\tau i}]\big) +$$
$$+ \big(m_\nu [\psi_\nu] + m_{\tau i}[\psi_{\tau i}]\big) + q_\nu [w]\Big) ds \leq 0 \quad \forall \eta \in K, \qquad (2.5.14)$$

где $q_\nu = \Lambda(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)$. Пусть теперь тестовые функции такие, что $W_\nu = 0$, $\psi_\nu = 0$, $w = 0$ на Γ_c. Тогда варьируя в (2.5.14) произвольным образом значения $[w_{\tau i}]$, $[\psi_{\tau i}]$, $i = 1, 2$ выводим

$$\sigma_{\tau i} = m_{\tau i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.5.15}$$

Введем обозначение для вспомогательной вектор-функции $p = (p_1, p_2, p_3)$, состоящей из достаточно гладких функций p_i, $i = 1, 2, 3$, определенных на Γ_c таких, что $\operatorname{supp} p_i \subset \Gamma_c$, $i = 1, 2, 3$. Как известно, существует функция $\tilde{\eta} \in H(\Omega_c)$ такая, что (см. теорему 1.2.1)

$$(p_1\nu_1, p_1\nu_2) = [\tilde{W}], \quad p_2 = [\tilde{w}], \quad (p_3\nu_1, p_3\nu_2) = [\tilde{\psi}] \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.5.16}$$

При этом на Γ_c, очевидно, выполнены равенства $[\tilde{W}_\nu] = p_1$, $[\tilde{\psi}_\nu] = p_3$.

Таким образом, при условии выполнения соотношения $p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha \geq h|p_3|$ на Γ_c, подставляя в (2.5.14) функцию $\tilde{\eta} \in H(\Omega_c)$, удовлетворяющую (2.5.16), с учетом (2.5.15) выведем

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\sigma_\nu p_1 + m_\nu p_3 + q_\nu p_2\Big) ds \leq 0. \tag{2.5.17}$$

Рассмотрим следующее представление

$$\sigma_\nu p_1 + m_\nu p_3 + q_\nu p_2 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_\nu + \frac{1}{h} m_\nu\Big)(p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha + hp_3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\sigma_\nu - \frac{1}{h} m_\nu\Big)\Big(p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha - hp_3\Big) + \Big(-\sigma_\nu \mathrm{tg}\alpha + q_\nu\Big) p_2. \tag{2.5.18}$$

Выбирая функции $p_1, p_2\ p_3$, которые удовлетворяют равенствам $p_1 = -p_2 \mathrm{tg}\alpha$, $p_3 = 0$ из (2.5.17) с учетом (2.5.18), находим

$$\sigma_\nu \mathrm{tg}\alpha = q_\nu \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.5.19}$$

С помощью (2.5.18), (2.5.19) преобразуем (2.5.17) к следующему виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Bigg(\Big(\sigma_\nu + \frac{1}{h} m_\nu\Big)(p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha + hp_3) +$$
$$+ \Big(\sigma_\nu - \frac{1}{h} m_\nu\Big)\Big(p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha - hp_3\Big)\Bigg) ds \leq 0, \tag{2.5.20}$$

при условии что p_i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют $p_1 + p_2 \mathrm{tg}\alpha \geq h|p_3|$ на Γ_c. Из (2.5.20) следует, что на Γ_c справедливы соотношения $-h\sigma_\nu - m_\nu \geq 0$, $-h\sigma_\nu + m_\nu \geq 0$ или $-h\sigma_\nu \geq |m_\nu|$ на Γ_c. Из первого соотношения (2.5.12), интегрируя по частям и принимая во внимание (2.5.15), (2.5.19), находим

$$\int\limits_{\Gamma_c} \bigg(\Big(\sigma_\nu + \frac{1}{h} m_\nu\Big)([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha + h[\phi_\nu]) + \\ + \Big(- \sigma_\nu + \frac{1}{h} m_\nu\Big)([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha - h[\phi_\nu]) \bigg) ds = 0.$$

Следовательно, на Γ_c выполняются равенства

$$\big(h\sigma_\nu + m_\nu\big)([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha + h[\phi_\nu]) = \big(m_\nu - h\sigma_\nu\big)([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha - h[\phi_\nu]) = 0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.5.1. *Пусть решение $\xi = (U, u, \phi)$ вариационной задачи* (2.5.5) *является достаточно гладким. Тогда $\xi = (U, u, \phi)$ также доставляет решение для краевой задачи состоящей из* (2.5.1), (2.5.2), (2.5.7) *и краевых условий:*

$$U = \phi = (0, 0), \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.5.21}$$

$$[\sigma_\nu] = [m_\nu] = 0, \quad \sigma_\nu \mathrm{tg}\alpha = q_\nu \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{2.5.22}$$

$$\sigma_\tau = m_\tau = (0, 0), \quad -h\sigma_\nu \geq |m_\nu| \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{2.5.23}$$

$$[U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha \geq h|[\phi_\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{2.5.24}$$

$$\Big(\sigma_\nu + \frac{1}{h} m_\nu\Big)\Big([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha + h[\phi_\nu]]\Big) = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma_c, \tag{2.5.25}$$

$$\Big(\sigma_\nu - \frac{1}{h} m_\nu\Big)\Big([U_\nu] + [u]\mathrm{tg}\alpha - h[\phi_\nu]\Big) = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.5.26}$$

Замечание 2.5.1. *Справедливо также и обратное утверждение: гладкая функция $\xi \in K$, удовлетворяющая уравнениям равновесия* (2.5.7) *и соотношениям* (2.5.1), (2.5.2), (2.5.22)–(2.5.26), *является решением задачи* (2.5.5). *Это утверждение можно доказать по аналогии с рассуждениями, использованными в параграфе 2.1.*

2.5.3 Задачи о равновесии балки с наклонным разрезом

Рассмотрим тонкую однородную балку единичной длины и толщины $2h$. Будем полагать, что сечение балки является прямоугольным. Пусть срединная линия балки занимает отрезок $(0,1)$ на оси x. В точке $y = 1/2$ имеется наклонный разрез, проходящий под углом α к вертикали (рис. 2.9). Предполагаем, что разрез не выходит на границу, т.е. $0 \le \mathrm{tg}\alpha < (2h)^{-1}$. Считаем, что функции внешних нагрузок $g(x), f(x), \mu(x)$ заданы и принадлежат пространству $L^2(0,1)$. Обозначим через $\eta = (W, w, \psi)$ обобщенный вектор перемещений, где $W(x)$ — горизонтальные, $w(x)$ — вертикальные перемещения точек срединной линии балки и $\psi(x)$ — углы поворота нормальных волокон.

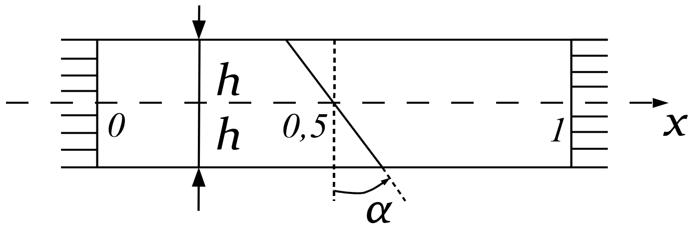

Рис. 2.9: Балка с наклонным разрезом.

На внешней границе накладывается условие жесткого защемления [10]

$$W = w = \psi = 0 \quad \text{при} \;\; x = 0, 1.$$

Условие непроникания (2.5.4) преобразуется к виду

$$[W] + [w]\mathrm{tg}\alpha \ge h|[\psi]|, \tag{2.5.27}$$

где $[s]$ – скачок функции s в точке y, т.е. $[s] = s(y+0) - s(y-0)$.

В случае балки функционал потенциальной энергии примет вид [10]

$$\Pi_b(\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(ES(W_x)^2 + EI(\psi_x)^2 + GkS(w_x+\psi)^2\big)dx - \\ - \int\limits_0^1 (gW + fw + \mu\psi)dx,$$

где S – площадь сечения, I – момент инерции (для прямоугольного сечения $I = Sh^2/3$), E и G – модули упругости, k – коэффициент сдвига.

Обозначим $\Omega_y = (0, y) \cup (y, 1)$. Введем гильбертово пространство

$$H(\Omega_y) = \left\{ (W, w, \psi) \in H^1(\Omega_y)^3 \mid \quad W = w = \psi = 0 \quad \text{ при } \ x = 0, 1 \right\}$$

и замкнутое выпуклое множество

$$K_b = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_y) \,|\, [W] + [w]\text{tg}\alpha \geq h|[\psi]|\}.$$

Задача о равновесии балки с наклонным разрезом формулируется в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K_b} \Pi_b(\eta). \tag{2.5.28}$$

С помощью неравенства Фридрихса можно доказать, что функционал $\Pi_b(\eta)$ является коэрцитивным в пространстве $H(\Omega_y)$. Кроме того нетрудно установить, что функционал $\Pi_b(\eta)$ является дифференцируемым, выпуклым и слабо полунепрерывным снизу в пространстве $H(\Omega_y)$. Указанные свойства функционала $\Pi_b(\eta)$ и множества K_b гарантируют существование единственного решения $\xi = (U, u, \phi) \in K_b$, удовлетворяющего вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega_y} \bigg(ESU_x(W_x - U_x) + EI\phi_x(\psi_x - \phi_x) + GkS(u_x + \phi)(w_x + \psi - u_x - \phi) -$$

$$- g(W - U) - f(w - u) - \mu(\psi - \phi) \bigg) dx \geq 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_b. \tag{2.5.29}$$

Свойства пространства $H(\Omega_y)$ позволяют установить с помощью формул интегрирования по частям эквивалентность задачи (2.5.29) следующей краевой задаче:

$$-ES\,U_{xx} = g \quad \text{ в } \quad \Omega_y, \tag{2.5.30}$$

$$EI\,\phi_{xx} - GkS(u_x + \phi) = \mu \quad \text{ в } \quad \Omega_y, \tag{2.5.31}$$

$$-GkS(u_{xx} + \phi_x) = f \quad \text{ в } \quad \Omega_y, \tag{2.5.32}$$

$$[U_x] = [\phi_x] = [u_x + \phi] = 0, \quad ES\,U_x(y)\text{tg}\alpha = GkS\,(u_x + \phi)(y), \tag{2.5.33}$$

$$[U] + [u]\text{tg}\alpha \geq h|[\phi]|, \quad -U_x(y) \geq \frac{h}{3}\,|\phi_x(y)|\,, \tag{2.5.34}$$

$$\big(U_x(y)+\frac{h}{3}\phi_x(y)\big)\big([U]+[u]\mathrm{tg}\alpha+h[\phi]\big)=0, \qquad (2.5.35)$$

$$\big(U_x(y)-\frac{h}{3}\phi_x(y)\big)\big([U]+[u]\mathrm{tg}\alpha-h[\phi]\big)=0, \qquad (2.5.36)$$

$$U(0)=u(0)=\phi(0)=U(1)=u(1)=\phi(1)=0. \qquad (2.5.37)$$

Заметим, что для задачи о балке эквивалентность двух формулировок доказывается без дополнительных предположений относительно гладкости решения ξ.

Построим далее точное решение задачи о равновесии балки. Построим решение задачи (2.5.30)–(2.5.37), в силу эквивалентности, оно будет также и решением задачи (2.5.29). Решение будем искать в виде суммы $\xi=\xi^0+\xi^1$, где $\xi^0=(U^0,u^0,\phi^0)$ — решение неоднородной задачи с нулевыми краевыми условиями

$$-U^0_{xx}=\hat{g},\quad l\phi^0_{xx}-(u^0_x+\phi^0)=\hat{\mu},\quad -(u^0_{xx}+\phi^0_x)=\hat{f}\ \text{в}\ \Omega_y, \qquad (2.5.38)$$

$$U^0_x(y)=\phi^0_x(y)=(u^0_x+\phi^0)(y)=0,\quad \xi^0(0)=\xi^0(1)=(0,0,0), \qquad (2.5.39)$$

где $\hat{g}=g/ES$, $l=EI/GkS$, $\hat{\mu}=\mu/GkS$, $\hat{f}=f/GkS$. Решение этой задачи $\xi^0\in H^2(\Omega_y)^3\cap H(\Omega_y)$ существует и единственно, поскольку фактически решаем две независимые задачи на $(0,y)$ и $(y,1)$:

$$\begin{array}{ll}
-U^0_{xx}=\hat{g}\ \text{в}\ (0,y), & -U^0_{xx}=\hat{g}\ \text{в}\ (y,1),\\
l\phi^0_{xx}-(u^0_x+\phi^0)=\hat{\mu}\ \text{в}\ (0,y), & l\phi^0_{xx}-(u^0_x+\phi^0)=\hat{\mu}\ \text{в}\ (y,1),\\
-(u^0_{xx}+\phi^0_x)=\hat{f}\ \text{в}\ (0,y), & -(u^0_{xx}+\phi^0_x)=\hat{f}\ \text{в}\ (y,1),\\
U^0(0)=u^0(0)=\phi^0(0)=0, & U^0(1)=u^0(1)=\phi^0(1)=0,\\
U^0_x(y)=\phi^0_x(y)=(u^0_x+\phi^0)(y)=0, & U^0_x(y)=\phi^0_x(y)=(u^0_x+\phi^0)(y)=0.
\end{array}$$

Заметим, что ξ^0 есть решение задачи о балке с разрезом, на котором не ставятся условия непроникания, а края предполагаются свободными.

Введем для удобства записи следующие константы: $\delta=12h^2$, $\quad\lambda=4h^2+\big(1+12l)\mathrm{tg}^2\alpha$. Решив задачу (2.5.38)–(2.5.39), можно вычислить следующие значения

$$\rho^{\pm}=[U^0]+[u^0]\mathrm{tg}\alpha\pm h[\phi^0],\quad r^{\pm}=[U^0]+[u^0]\mathrm{tg}\alpha\pm\frac{h\lambda}{\delta}[\phi^0].$$

Рассмотрим следующие вспомогательные функции

$$\theta(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, y), \\ (x-1)^2, & x \in (y, 1), \end{cases} \qquad \theta_x(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, y), \\ 2(x-1), & x \in (y, 1), \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2, & x \in (0, y), \\ 2x^3 - 3x^2 + 1, & x \in (y, 1). \end{cases}$$

Заметим, что функции θ, θ_x β, β_x принадлежат пространству $C^\infty(\Omega_y)$ и имеют нулевые значения при $x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\theta_{xx}(x) \equiv 2, \quad \theta_{xxx}(x) \equiv 0, \quad [\theta] = 0, \quad [\theta_x] = -2,$$
$$\beta_x(x) = 6(x^2 - x), \quad [\beta_x] = 0, \quad \beta_{xx}(x) = 6(2x-1), \quad \beta_{xxx}(x) \equiv 12,$$
$$\beta_{xxxx}(x) \equiv 0, \quad [\beta] = 1, \quad \beta_{xx}(y) = 0.$$

Теорема 2.5.2. *Функция* $\xi = (U, u, \phi)$, *определенная равенствами* $U(x) = U^0(x) + 2h^2 A\theta_x(x)$, $\phi(x) = \phi^0(x) + 6hB\theta_x(x) + tg\,\alpha A\beta_x(x)$, $u(x) = u^0(x) - 6hB\theta(x) - tg\,\alpha A\beta(x) + 6l\,tg\,\alpha A\theta_x(x)$, *является решением вариационного неравенства* (2.5.29), *где*

$$(A, B) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } \rho^+ \geq 0, \quad \rho^- \geq 0, \\ (\delta + \lambda)^{-1}(\rho^+, \rho^+), & \text{если } \rho^+ < 0, \quad r^- \geq 0, \\ (\delta + \lambda)^{-1}(\rho^-, -\rho^-), & \text{если } \rho^- < 0, \quad r^+ \geq 0, \\ \big((2\lambda)^{-1}(\rho^+ + \rho^-), (2\delta)^{-1}(\rho^+ - \rho^-)\big), & \text{если } r^+ < 0, \quad r^- < 0. \end{cases} \tag{2.5.40}$$

Доказательство. Достаточно проверить выполнение соотношений (2.5.30)–(2.5.37). Действительно, благодаря свойствам функций θ, β и ξ^0, выполнено равенство (2.5.30):

$$-U_{xx} = -U^0_{xx} - 2h^2 A\theta_{xxx} = \hat{g} \quad \text{в } \Omega_y.$$

Поскольку имеют место равенства

$$\phi_{xx}(x) = \phi^0_{xx}(x) + 6hB\theta_{xxx}(x) + A\mathrm{tg}\alpha\,\beta_{xxx}(x) = \phi^0_{xx}(x) + 12A\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$(u_x+\phi)=(u_x^0+\phi^0)+6lA\mathrm{tg}\alpha\,\theta_{xx}(x)=(u_x^0+\phi^0)+12lA\mathrm{tg}\alpha, \qquad (2.5.41)$$

то выполнено и уравнение (2.5.31). В силу равенства (2.5.41) имеем $(u_{xx}+\phi_x)=(u_{xx}^0+\phi_x^0)$, откуда и следует (2.5.32). Вычислим следующие значения для построенных функций

$$\begin{aligned}
&U_x(y)=U_x^0(y)+2h^2A\theta_{xx}(y)=4h^2A,\\
&\phi_x(y)=\phi_x^0(y)+6hB\theta_{xx}(y)+A\mathrm{tg}\alpha\,\beta_{xx}(y)=12hB,\\
&(u_x+\phi)(y)=(u_x^0+\phi^0)(y)+6lA\mathrm{tg}\alpha\,\theta_{xx}(y)=12lA\mathrm{tg}\alpha.
\end{aligned} \qquad (2.5.42)$$

Очевидно, что $[U_x]=[\phi_x]=[u_x+\phi]=0$. Из (2.5.42) следует, что

$$U_x(y)\pm\frac{h}{3}\phi_x(y)=4h^2(A\pm B), \quad ES\,U_x(y)\mathrm{tg}\alpha=GkS\,(u_x+\phi)(y).$$

По построению $[U]=[U^0]-4h^2A$, $\quad [u]=[u^0]-\big(1+12l\big)A\mathrm{tg}\,\alpha$, $\quad [\phi]=[\phi^0]-12hB$. Следовательно

$$[U]+[u]\mathrm{tg}\alpha\pm h[\phi]=\rho^\pm-\lambda A\mp\delta B.$$

Таким образом, осталось проверить соотношения (2.5.34)–(2.5.36), которые примут вид

$$\rho^+\geq\lambda A+\delta B, \quad \rho^-\geq\lambda A-\delta B, \quad -A\geq|B|,$$

$$(A+B)(\rho^+-\lambda A-\delta B)=0, \quad (A-B)(\rho^--\lambda A+\delta B)=0.$$

Рассматривая следующие возможные четыре варианта

$$\begin{array}{lllll}
1) & A+B=0, & A-B=0, & \rho^+-\lambda A-\delta B\geq0, & \rho^--\lambda A+\delta B\geq0\\
2) & A+B<0, & A-B=0, & \rho^+-\lambda A-\delta B=0, & \rho^--\lambda A+\delta B\geq0\\
3) & A+B=0, & A-B<0, & \rho^+-\lambda A-\delta B\geq0, & \rho^--\lambda A+\delta B=0,\\
4) & A+B<0, & A-B<0, & \rho^+-\lambda A-\delta B=0, & \rho^--\lambda A+\delta B=0.
\end{array}$$

находим подходящие значения A и B. Заметим, что вектор-функция $\xi^0=(U^0,u^0,\phi^0)$ однозначно определяет величины ρ^+, ρ^-, r^+, r^- и значения пары чисел (A,B). Теорема доказана.

Замечание 2.5.2. *Легко видеть, что в силу отмеченной гладкости функций ξ^0,θ,β, решение ξ принадлежит пространству $H^2(\Omega_y)^3\cap H(\Omega_y)$.*

Замечание 2.5.3. *Решив задачу* (2.5.30)–(2.5.37) *можно вычислить и остальные физические характеристики задачи. При этом следующие функции выражающие напряжения, моменты и поперечные силы*

$$\begin{aligned} &\sigma(x) = ES\,U_x(x) = ES(U_x^0(x) + 4h^2A), \\ &m(x) = EI\,\phi_x(x) = EI(\phi_x^0(x) + 12hB + 6A(2x-1)tg\alpha), \\ &q(x) = GkS(u_x + \phi)(x) = GkS(u_x^0 + \phi^0)(x) + 12EI\,Atg\alpha \end{aligned} \tag{2.5.43}$$

являются непрерывными в $(0,1)$.

Рассмотрим далее частные случаи в рамках теоремы 2.5.2. Пусть $\alpha = 0$. Тогда имеем вертикальный разрез. Применим прежнее обозначение для решения $\xi^0 = (U^0, u^0, \phi^0)$ вспомогательной задачи (2.5.38)–(2.5.39) при $\alpha = 0$. Соответствующая краевая задача (2.5.30)–(2.5.37) вариационного неравенства (2.5.29) примет вид

$$-ES\,U_{xx} = g \quad \text{в} \quad \Omega_y, \tag{2.5.44}$$

$$EI\,\phi_{xx} - GkS(u_x + \phi) = \mu \quad \text{в} \quad \Omega_y, \tag{2.5.45}$$

$$-GkS(u_{xx} + \phi_x) = f \quad \text{в} \quad \Omega_y, \tag{2.5.46}$$

$$[U_x] = [\phi_x] = 0, \quad (u_x + \phi)(y) = 0, \tag{2.5.47}$$

$$[U] \geq h|[\phi]|, \quad -U_x(y) \geq \frac{h}{3}\left|\phi_x(y)\right|, \tag{2.5.48}$$

$$\big(U_x(y) + \frac{h}{3}\phi_x(y)\big)\big([U] + h[\phi]\big) = 0, \tag{2.5.49}$$

$$\big(U_x(y) - \frac{h}{3}\phi_x(y)\big)\big([U] - h[\phi]\big) = 0, \tag{2.5.50}$$

$$U(0) = u(0) = \phi(0) = U(1) = u(1) = \phi(1) = 0. \tag{2.5.51}$$

В частном случае для $\rho^{\pm}$ и $r^{\pm}$ имеем равенства $\rho^{\pm} = [U^0] \pm h[\phi^0]$, $r^{\pm} = [U^0] \pm h[\phi^0]/3$. Из теоремы 2.5.2 вытекает следующее следствие

Следствие 2.5.1. Функция $\xi = (U, u, \phi)$ с $U(x) = U^0(x) + (A/2)\theta_x(x)$, $\phi(x) = \phi^0(x) + (3/2h)B\theta_x(x)$, $u(x) = u^0(x) - (3/2h)B\theta(x)$ является решением задачи (2.5.44)–(2.5.51). Постоянные A и B находятся по соотношениям

$$(A,B)=\begin{cases}(0,0), & \text{если}\ \ \rho^+\geq 0,\quad \rho^-\geq 0,\\ \frac14(\rho^+,\rho^+), & \text{если}\ \ \rho^+<0,\quad r^-\geq 0,\\ \frac14(\rho^-,-\rho^-), & \text{если}\ \ \rho^-<0,\quad r^+\geq 0,\\ \left(\frac12(\rho^++\rho^-),\frac16(\rho^+-\rho^-)\right), & \text{если}\ \ r^+<0,\quad r^-<0.\end{cases}$$

Пусть вертикальные нагрузки и моменты отсутствуют, т.е. $f(x)\equiv 0$, $\mu(x)\equiv 0$. Тогда $u^0(x)\equiv\phi^0(x)\equiv 0$. Следовательно, $\rho^+=\rho^-=r^+=r^-=[U^0]$, $B=0$, и справедливо

Следствие 2.5.2. Пусть $f\equiv\mu\equiv 0$. Тогда при $[U^0]\geq 0$ решение $\xi^0=(U^0,u^0,\phi^0)$ задачи (2.5.38)–(2.5.39) будет также и решением (2.5.29), т.е. $\xi{=}\xi^0$; при $[U^0]\leq 0$ решение $\xi=(U,u,\phi)$ находится по формулам:

$$\begin{aligned}&U(x)=U^0(x)+\lambda^{-1}2h^2[U^0]\theta_x(x),\\ &\phi(x)=\lambda^{-1}\mathrm{tg}\,\alpha[U^0]\beta_x(x),\\ &u(x)=-\lambda^{-1}\Big(\mathrm{tg}\,\alpha[U^0]\beta(x)-6l\mathrm{tg}\,\alpha[U^0]\theta_x(x)\Big).\end{aligned}$$

Исходя из следствия можно сделать вывод о том, что наличие только горизонтальных нагрузок g, не влечет равенство нулю значений ϕ и u. При $\alpha=0$, из $f\equiv 0$, $\mu\equiv 0$ следует, что $\phi\equiv u\equiv 0$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $f(x)\equiv\mu(x)\equiv 0$, и

$$g(x)=\begin{cases}c, & x\in(0,1/2),\\ -c, & x\in(1/2,1).\end{cases}$$

При этом $c\geq 0$ соответствует сжатию. Можно явно посчитать функцию $U^0=x(1-x)g(x)/2ES$. Ее скачок $[U^0]=-c/4ES\leq 0$ – неположителен. Согласно следствию 2.5.2 находим решение вариационного неравенства (2.5.29) в виде $\xi=(U,u,\phi)$, где

$$U(x)=\frac{c}{2ES}\begin{cases}-x^2+\left(1-\frac{\delta}{6\lambda}\right)x, & x\in(0,1/2),\\ x^2-\left(1+\frac{\delta}{6\lambda}\right)x+\frac{\delta}{6\lambda}, & x\in(1/2,1),\end{cases}$$

$$\phi(x) = -\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{4ES\lambda} 6(x^2 - x)\,, \quad x \in (0,1),$$

$$u(x) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{4ES\lambda} \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12lx, & x \in (0,1/2), \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 - 12l(x-1), & x \in (1/2,1). \end{cases}$$

При этом $[u] = c(12l+1)\mathrm{tg}\alpha \Big/ (4Eh\lambda)^{-1}$. Для растяжения ($c < 0$) получим $[U^0] > 0$, значит по следствию 2.5.2: $U(x) = U^0(x)$ и $u(x) \equiv \phi(x) \equiv 0$.

2.6 Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием

Метод фиктивных областей для задач о равновесии n-мерных ($n = 2,3$) упругих тел с нелинейными краевыми условиями типа неравенств разработан в [1, 3, 102]. В частности, в [102] доказано, что двумерную контактную задачу с условиями типа Синьорини можно получить предельным переходом в семействе задач о равновесии двумерных тел, содержащих трещины. Благодаря методу фиктивных областей доказана разрешимость задач, описывающих равновесие тел с трещинами выходящими на внешнюю границу под нулевым углом [1, 171].

В настоящем параграфе с помощью фиктивных областей изучаются задачи, моделирующие деформирование трансверсально-изотропных пластин Тимошенко. Для исходной задачи полагаем, что в недеформированном состоянии часть цилиндрической поверхности, задающей контур внешний контур пластины, граничит с жестким препятствием. На части γ границы Γ_1 области Ω_1, задающей срединную плоскость пластины, ставятся условия типа Синьорини — они описывают контакт пластины с препятствием. Вспомогательные задачи формулируются в расширенной области Ω_γ ($\Omega_1 \subset \Omega_\gamma$), они моделируют равновесие неоднородных пластин, содержащих трещины. При этом условие взаимного непроникания точек противоположных берегов трещины задается в виде неравенства на внутренней границе. С помощью метода фиктивных областей установлено, что исходную задачу можно получить с помощью предельного перехода в семействе вспомогательных задач, формулируемых в более широкой области Ω_γ. Каждая задача семейства моделирует равновесие пластины, содержащей трещину. При этом на внутренней границе, соответствующей трещине, налагаются условия непроникания противоположных берегов трещины в виде неравенств. Для вариационных формулировок, рассматриваемых задач найдены, эквивалентные дифференциальные постановки.

2.6.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega_1 \subset R^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей $\Gamma_1 = \gamma \cup \Gamma_0$, $\gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$ (см. рис. 2.10). Считаем, что кривая γ не содержит концевых точек. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ вектор внешней нормали к Γ_1. Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ определим так, чтобы множество $\Omega_1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной

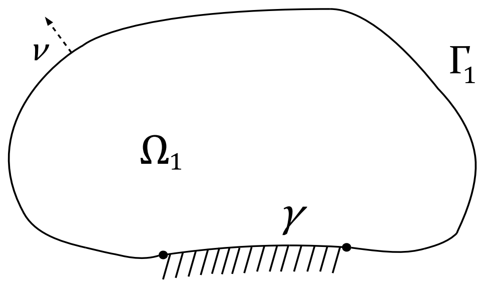

Рис. 2.10: Геометрия в срединной плоскости пластины.

поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $W = (w_1, w_2)$ и w горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)) и вертикальные перемещения, соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$.

Предполагаем, что пластина изготовлена из однородного упругого материала, который подчиняется закону Гука. Тензоры, описывающие деформацию пластины $\varepsilon(\psi) = \{\varepsilon_{ij}(\psi)\}$, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\Big), \ i,j = 1,2.$$

Для трансверсально-изотропной пластины тензоры моментов $m(\psi) = \{m_{ij}(\psi)\}$ и усилий $\sigma(W) = \{\sigma_{ij}(W)\},\ i,j = 1,2$ выражаются по формулам:

$$m_{ij}(\psi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W). \tag{2.6.1}$$

Ненулевые коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{1111} = c_{2222} = D, \quad c_{1122} = c_{2211} = D\text{æ},$$

$$c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = \frac{D(1-\text{æ})}{2}, \quad \text{æ} = const,\ 0 < \text{æ} < \frac{1}{2},$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона. Поперечные силы задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1,2, \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}), \tag{2.6.2}$$

где $\Lambda = 2\kappa' G$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные [86].

Пусть подпространство $H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_1)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ_0. Введем пространство $H_{\Gamma_0}(\Omega_1) = H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1)^5$. С учетом записанных выше выражений, определим следующую билинейную форму:

$$B_1(\eta,\bar\eta) = \int\limits_{\Omega_1}\Big(\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)\Big)dx,$$

для произвольных функций $\eta = (W,w,\psi) \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$, $\bar\eta = (\bar W,\bar w,\bar\psi) \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$.

Функционал потенциальной энергии пластины имеет вид

$$\Pi_s(\Omega_1;\eta) = \frac{1}{2}B_1(\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_1} F\eta dx\,, \quad \eta = (W,w,\psi), \tag{2.6.3}$$

где вектор $F = (f_1,f_2,f_3,\mu_1,\mu_2) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок ($F\eta = w_i f_i + w f_3 + \psi_i\mu_i$) [86].

Считаем, что на Γ_0 выполнены следующие краевые условия жесткого защемления:

$$w = 0, \quad \psi = W = (0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{2.6.4}$$

Равенства (2.6.4) можно записать в в виде

$$\eta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \qquad \text{где} \quad \eta = (W, w, \psi).$$

Будем считать, что жесткое препятствие задается цилиндрической поверхностью $\gamma \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$. Ввиду формул (1.5.1), связывающих перемещения и углы поворота нормальных волокон, нетрудно вывести условия типа Синьорини для внешней кромки пластины, контактирующей с жестким препятствием без учета сил трения

$$(w_1(z), w_2(z), w) \cdot (\nu_1, \nu_2, 0) \le 0, \quad z \in [-1,1] \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Отсюда, варьируя $z \in [-1,1]$, имеем

$$-W_\nu \ge |\psi_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma \quad (\psi_\nu = \psi_i \nu_i, \quad W_\nu = w_i \nu_i). \tag{2.6.5}$$

Задачу о равновесии пластины, контактирующей с жестким препятствием, сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K_s} \Pi_s(\Omega_1; \eta), \tag{2.6.6}$$

где

$$K_s = \{\eta \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1) \,|\, \eta = (W, w, \psi) \quad \text{удовлетворяет} \quad (2.6.5)\}$$

— множество допустимых функций. Поскольку кривая Γ_1 — гладкая (достаточно того, что $\Gamma_1 \in C^{0,1}$), в области Ω_1 справедливы неравенства Корна и Пуанкаре (см. параграф 1.3) и, как следствие, выполнено неравенство

$$B_1(\eta, \eta) \ge c_1 \|\eta\|^2_{H_{\Gamma_0}(\Omega_1)} \quad \forall \eta \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1), \tag{2.6.7}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от η (подробное доказательство аналогичного неравенства содержится в параграфе 2.1). Оценка (2.6.7) и линейность интеграла $\int\limits_{\Omega_1} F\eta dx$, как оператора в $H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$, позволяют утверждать, что функционал (2.6.3) является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу в $H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$ (см. параграф 2.1). Можно показать, что множество K_s является выпуклым и замкнутым и, следовательно, слабо замкнутым в рефлексивном пространстве $H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$. Указанные свойства задачи позволяют установить существование и единственность решения $\xi_s = (U_s, u_s, \phi_s)$ задачи (2.6.6). Кроме того, поскольку $B_1(\eta, \bar{\eta})$ — билинейный непрерывный функционал, такой что $B_1(\eta, \bar{\eta}) = B_1(\bar{\eta}, \eta)$, решение ξ_s удовлетворяет вариационному неравенству

$$\xi_s \in K_s, \quad B_1(\xi_s, \eta - \xi_s) \geq \int\limits_{\Omega_1} F(\eta - \xi_s) dx \quad \forall \eta \in K_s. \tag{2.6.8}$$

2.6.2 Вспомогательные задачи в области с разрезом

Как оказалось, задачу (2.6.8), которая эквивалентна (2.6.6), можно получить в качестве предельной для семейства задач, определенных в более широкой области по сравнению с Ω_1. При этом каждая вспомогательная задача из семейства моделирует состояние равновесия упругой неоднородной пластины с трещиной.

Расширим область Ω_1 до области Ω_γ так, как это показано на рис. 2.11, добавляя так называемую фиктивную область Ω_2. Считаем, что граница Γ_2 области Ω_2 достаточно гладкая. Расширенную область с разрезом обозначим через $\Omega_\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma \backslash \overline{\gamma}$, где $\Sigma = \mathrm{int}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, а ее внешнюю границу — через $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \backslash \Sigma$. Предположим, что $\mathrm{meas}(\Gamma \cap \Gamma_i) > 0$, $i = 1, 2$. В соответствии с направлением ν можно говорить о положительном Σ^+ и отрицательном берегах Σ^- кривой Σ; при этом для функции $v \in H^1(\Omega_\gamma)$ определены следы $v^+ = v|_{\Sigma^+}$, $v^- = v|_{\Sigma^-}$. Скачок функции v на Σ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$. Аналогичные обозначения будем применять для следов и скачков относительно γ.

В области Ω_γ сформулируем семейство вариационных задач, зависящих от положительного параметра λ, который в дальнейшем будет стремиться к нулю. Рассмотрим модель неоднородной пластины, срединная плоскость

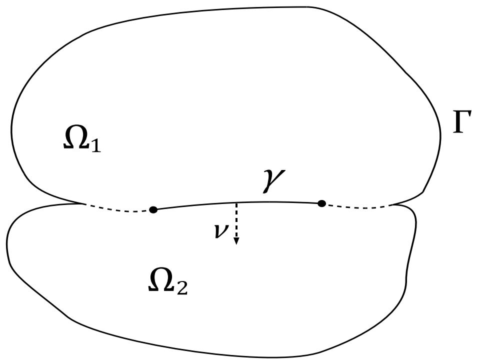

Рис. 2.11: Построение фиктивной области.

которой занимает область Ω_γ. При этом считаем, что части пластины, задаваемые (в исходном состоянии) в $\mathbb{R}^3$ множествами $\Omega_i \times [-1,1]$, $i = 1,2$, изготовлены из (вообще говоря) разных упругих трансверсально-изотропных материалов. Предположим, что упругие постоянные в области Ω_2 зависят от λ, а в области Ω_1 — фиксированные, а именно:

$$c^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} c_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega_1, \\ \lambda^{-1} c_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega_2, \end{cases} \qquad \Lambda^\lambda = \begin{cases} \Lambda & \text{в} \quad \Omega_1, \\ \Lambda\lambda^{-1} & \text{в} \quad \Omega_2. \end{cases}$$

Определим соответствующие математические объекты и соотношения для постановки новой задачи. Пусть подпространство $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ; как и выше $H_\Gamma(\Omega_\gamma) = H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^5$. Для $\eta = (W, w, \psi) \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, $\bar\eta = (\bar W, \bar w, \bar\psi) \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)$ определен билинейный непрерывный функционал

$$B^\lambda(\eta, \bar\eta) = \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\sigma^\lambda_{ij}(W)\, \varepsilon_{ij}(\bar W) + m^\lambda_{ij}(\psi)\, \varepsilon_{ij}(\bar\psi) + q^\lambda_i(w,\psi)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i) \Big) dx,$$

где $m^\lambda_{ij}(\psi) = c^\lambda_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi)$, $\sigma^\lambda_{ij}(W) = 3c^\lambda_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W)$, $q^\lambda_i(w,\psi) = \Lambda^\lambda(w_{,i} + \psi_i)$, $i = 1,2$. Заметим, что билинейную форму B^λ можно представить следующим образом:

$$B^\lambda(\eta, \bar\eta) = B_1(\eta, \bar\eta) + \lambda^{-1} B_2(\eta, \bar\eta),$$

$$B_2(\eta, \bar\eta) = \int\limits_{\Omega_2} \Big(\sigma_{ij}(W)\, \varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\, \varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i) \Big) dx,$$

с прежними формулами (2.6.1) для $\sigma_{ij}(W)$, $m_{ij}(\psi)$, $i,j=1,2$. Функционал

$$\Pi_\lambda(\Omega_\gamma;\eta)=\frac{1}{2}B^\lambda(\eta,\eta)-\int\limits_{\Omega_\gamma} F\eta dx\,,\quad \eta=(W,w,\psi)$$

задает энергию неоднородной пластины, срединная плоскость которой соответствует области с разрезом Ω_γ.

На трещине (разрезе) зададим условие, описывающее взаимное непроникание противоположных берегов трещины:

$$[W_\nu]\geq|[\psi_\nu]|\quad \text{на}\quad \gamma, \tag{2.6.9}$$

где W, ψ — компоненты вектор-функции $\eta=(W,w,\psi)$.

Задачу о равновесии пластины, содержащей трещину, сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta\in K}\Pi_\lambda(\Omega_\gamma;\eta), \tag{2.6.10}$$

где K — множество допустимых функций:

$$K=\{\eta\in H_\Gamma(\Omega_\gamma)\,|\,\eta=(W,w,\psi)\quad \text{удовлетворяет}\quad (2.6.9)\}.$$

Считая, что искомая функция принадлежит классу $H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, тем самым предполагаем следующее:

$$[\eta]=0\quad \text{на}\quad \Sigma\backslash\gamma,$$

т.е. обобщенный вектор перемещений $\eta=(W,w,\psi)$ удовлетворяет условиям склейки на $\Sigma\backslash\gamma$.

Гладкость кривой Γ_2 (достаточно того, что $\Gamma_2\in C^{0,1}$) позволяет записать следующее неравенство, аналогичное (2.6.7)

$$B_2(\eta,\eta)\geq c_2\|\eta\|^2_{H^1(\Omega_2)^5},\quad \forall\,\eta\in H^1(\Omega_2)^5,\ \ \eta=0\ \text{ на }\ \Gamma\cap\Gamma_2. \tag{2.6.11}$$

с постоянной $c_2>0$, не зависящей от η. На основе (2.6.7) и (2.6.11), для каждого фиксированного λ, выводим

$$B^\lambda(\eta,\eta)\geq c_\lambda\|\eta\|^2_{H_\Gamma(\Omega_\gamma)}\quad \forall\,\eta\in H_\Gamma(\Omega_\gamma). \tag{2.6.12}$$

Множество K замкнуто и выпукло, функционал $\Pi_\lambda(\Omega_\gamma;\eta)$ коэрцитивный, строго выпуклый, слабо полунепрерывный и дифференцируемый. Указанные свойства задачи (2.6.10) позволяют утверждать о существовании единственного решения $\xi^\lambda = (U^\lambda, u^\lambda, \phi^\lambda)$ при каждом фиксированном $\lambda > 0$ (однозначная разрешимость аналогичной задачи о равновесии однородной пластины с трещиной установлена в параграфе 2.1). Кроме того, задача (2.6.10) эквивалентна вариационному неравенству

$$\xi^\lambda \in K, \quad B^\lambda(\xi^\lambda, \eta - \xi^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi^\lambda)dx \quad \forall \eta \in K. \tag{2.6.13}$$

В следующем далее разделе 2.6.4 настоящего параграфа, выводится эквивалентная дифференциальная постановка задачи (2.6.13), в которой содержатся соотношения, характеризующие свойства решения ξ^λ на γ и всей кривой Σ.

2.6.3 Предельный переход

Установим связь между задачами (2.6.8) и (2.6.13). Оказывается, что в пределе при $\lambda \to 0$ решения ξ^λ сходятся к некоторой предельной функции $\tilde{\xi}$. При этом сужение $\tilde{\xi}$ на область Ω_1 будет в точности определять решение задачи (2.6.8).

Сравнив два неравенства, полученные подстановкой в (2.6.13) пробных функций $\eta = 0$ и $\eta = 2\xi$, получим

$$B_1(\xi^\lambda, \xi^\lambda) + \frac{1}{\lambda} B_2(\xi^\lambda, \xi^\lambda) = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\xi^\lambda dx.$$

Отсюда с учетом (2.6.11), (2.6.12) при $\lambda \in (0, \lambda_0]$ имеем оценки

$$\|\xi^\lambda\|_{H_\Gamma(\Omega_\gamma)} \leq c_3, \quad \|\xi^\lambda\|_{H(\Omega_2)} \leq c_4\lambda, \tag{2.6.14}$$

где постоянные $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ не зависят от λ. Вследствие ограниченности множества всех решений $\{\xi^\lambda\}$, $\lambda \in (0, \lambda_0]$ по норме пространства $H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением) $\{\xi^\lambda\}$ такую, что

$$\xi^\lambda \to \tilde{\xi} \quad \text{слабо в} \quad H_\Gamma(\Omega_\gamma). \tag{2.6.15}$$

В силу (2.6.14)

$$\xi^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega_2)^5. \tag{2.6.16}$$

Покажем, что функция $\tilde{\xi}|_{\Omega_1}$, являющаяся сужением $\tilde{\xi}$ на область Ω_1, будет решением задачи (2.6.6). Установим сначала, что $\tilde{\xi}|_{\Omega_1}$ принадлежит множеству K_s. Выделяя если нужно подпоследовательность, из (2.6.15) получим, что $\xi^\lambda \to \tilde{\xi}$ сильно в $L_2(\Gamma_i)^5$, $i = 1, 2$. В силу (2.6.16) имеем $\xi^\lambda \to 0$ в $L_2(\Gamma_2)^5$. Это означает, что $\tilde{\xi} = 0$ в $L_2(\Gamma_2)^5$. Сильная сходимость $\xi^\lambda \to \tilde{\xi}$ в $L_2(\Gamma_i)^5$, $i = 1, 2$ влечет (выбирая при необходимости подпоследовательности) сходимость компонент вектора ξ^λ к соответствующим компонентам $\tilde{\xi}$ п.в. на Γ_i, $i = 1, 2$. Это в свою очередь, позволяет осуществить предельный переход в неравенстве

$$[U_\nu^\lambda] \geq |[\phi_\nu^\lambda]| \quad \text{на} \quad \gamma,$$

и получить, в соответствии с равенством $\tilde{\xi} = 0$ п.в. на Γ_2, соотношение

$$-\tilde{U}_\nu \geq |\tilde{\phi}_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma^-.$$

Аналогично можно установить, что $\tilde{\xi} = 0$ на Γ_0. Таким образом, выполнено включение $\tilde{\xi}|_{\Omega_1} \in K_s$.

Для пробной функции $\eta \in K$ такой, что $\eta{=}0$ в Ω_2, вариационное неравенство (2.6.13) можно переписать в виде

$$B_1(\xi^\lambda, \eta) \geq B_1(\xi^\lambda, \xi^\lambda) + \frac{1}{\lambda} B_2(\xi^\lambda, \xi^\lambda) - \int\limits_{\Omega_2} F\xi^\lambda dx + \int\limits_{\Omega_1} F(\eta - \xi^\lambda) dx. \tag{2.6.17}$$

Переходя к нижнему пределу при $\lambda \to 0$ в обеих частях (2.6.17), в силу (2.6.15), (2.6.16), найдем

$$B_1(\tilde{\xi}, \eta) \geq B_1(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) + \int\limits_{\Omega_1} F(\eta - \tilde{\xi}) dx + \lim_{\lambda \to 0} \inf \frac{1}{\lambda} B_2(\xi^\lambda, \xi^\lambda). \tag{2.6.18}$$

Последнее слагаемое в (2.6.18) неотрицательно в силу (2.6.11) и, значит, справедливо соотношение

$$B_1(\tilde{\xi}, \bar{\eta}) \geq B_1(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) + \int\limits_{\Omega_1} F(\bar{\eta} - \tilde{\xi})dx \quad \forall \bar{\eta} \in K_s. \tag{2.6.19}$$

При выводе (2.6.19) использовалось также то, что продолжая нулем в Ω_2 произвольную функцию $\bar{\eta} \in K_s$, получаем функцию $\eta \in K$ такую, что $\eta = 0$ в Ω_2. Заметим, что выражение (2.6.19) с точностью до обозначений есть (2.6.13). В силу единственности решения неравенства (2.6.13) заключаем, что $\tilde{\xi}|_{\Omega_1} = \xi_s$. Можно доказать, что любая последовательность решений ξ^λ сходится слабо к $\tilde{\xi}$. В самом деле, предположим противное. Пусть существует $\epsilon > 0$ и $f^* \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)^*$, а также последовательность $\{\lambda_n\}$, такие что при $n \to \infty$ $\lambda_n \to 0$ и

$$|\langle \xi^{\lambda_n}, f^* \rangle - \langle \tilde{\xi}, f^* \rangle| \geq \epsilon. \tag{2.6.20}$$

Легко видеть, что последовательность $\{\xi^{\lambda_n}\}$ также ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся слабо к $\tilde{\xi}$ последовательность. Последнее противоречит неравенству (2.6.20). Таким образом, в рамках предыдущих предположений имеет место следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Функции ξ^λ, доставляющие решения задач* (2.6.10)*, при $\lambda \to 0$ слабо сходятся в пространстве $H_\Gamma(\Omega_\gamma)$ к функции $\tilde{\xi}$, сужение которой на область Ω_1 является решением задачи* (2.6.6).

2.6.4 Эквивалентная краевая задача

В данном разделе исследуется свойства решения (2.6.13), в частности, выводятся краевые условия на Σ, индуцируемые вариационной постановкой. Поскольку, в рамках содержания этого раздела λ считается фиксированным, для удобства будем опускать индекс λ во всех обозначениях, т.е. $\xi = \xi^\lambda$, $m_{ij} = m_{ij}^\lambda$ и т.д. Далее будем предполагать, что $\Gamma_i \in C^{1,1}$, $i = 1, 2$.

Сравним два неравенства, полученные после подстановки в (2.6.13) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i(\tilde{w},_i + \tilde{\psi}_i)\Big) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\tilde{w}_i + f_3\tilde{w} + \mu_i\tilde{\psi}_i) dx.$$

Здесь и далее $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$. Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i\tilde{w}_i dx \quad \forall\, \tilde{W} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} (m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i\tilde{\psi}_i) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} \mu_i\tilde{\psi}_i dx \quad \forall\, \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \tilde{w},_i\, q_i dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_3\tilde{w} dx \quad \forall\, \tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma).$$

Замечая, что имеют место представления $\int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij}\tilde{\psi}_{i,j} dx$, $\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}\tilde{w}_{i,j} dx$, из предыдущих трех равенств заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.6.21}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2.6.22}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma. \tag{2.6.23}$$

Очевидно, что из (2.6.21)–(2.6.23) следуют включения

$$\sigma_{ij,j} \in L^2(\Omega_\gamma),\ m_{ij,j} \in L^2(\Omega_\gamma),\ \triangle u \in L^2(\Omega_\gamma), \quad i = 1, 2. \tag{2.6.24}$$

В силу (2.6.24) и гладкости Γ_1, однозначно определены следы $\overline{\sigma}_\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, $\overline{\sigma}_{\tau i} \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, $i = 1, 2$ и для всех $W = (w_1, w_2) \in H^1(\Omega_1)^2$ справедлива формула Грина (см. теорему 1.5.2)

$$\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W) dx = -\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij,j} w_i dx + \langle \overline{\sigma}_\nu, W_\nu \rangle_{\Gamma_1} + \langle \overline{\sigma}_{\tau i}, w_{\tau i} \rangle_{\Gamma_1}, \tag{2.6.25}$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_1}$ означают двойственность между $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ и $H^{1/2}(\Gamma_1)$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ — касательный к Γ_1 единичный вектор, $w_{\tau i} = w_i - W_\nu \nu_i$, $i = 1, 2$.

Наряду с пространствами вида $H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i=1,2$, рассмотрим пространства $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$ с нормой, определенной выражением (см. параграф 1.2)

$$\|v\|^2_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)} = \|v\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)} + \int\limits_{\Sigma} \frac{v^2}{\rho} ds, \quad \rho = \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Sigma).$$

Заметим следующую связь пространства $H^{1/2}(\Gamma_i)$ (с фиксированным $i \in \{1,2\}$) и $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$: функция $g \in H^{1/2}_{00}(\Sigma)$, тогда и только тогда, когда функция $\overline{g}$ определенная соотношениями

$$\overline{g} = \begin{cases} g, & \mathbf{x} \in \Sigma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_i \backslash \Sigma, \end{cases}$$

принадлежит $H^{1/2}(\Gamma_i)$ (см. лемму 1.2.1). В соответствии с последним замечанием, для функции, удовлетворяющей соотношению $W=(0,0)$ на $\Gamma_1 \cap \Gamma$, включения $W_\nu \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $w_{\tau i} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $i=1,2$, позволяют установить, что $W_\nu \in H^{1/2}_{00}(\Sigma)$, $w_{\tau i} \in H^{1/2}_{00}(\Sigma)$, $i=1,2$ (см. теорему 1.2.2).

Таким образом, обозначив через σ^-_ν, $\sigma^-_{\tau i}$, $i=1,2$ (значок минус вверху означает, что следы относительно Σ^-) сужения функционалов $\overline{\sigma}_\nu, \overline{\sigma}_{\tau i}, i=1,2$ на функциях из $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$, перепишем равенство (2.6.25) в виде

$$\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W) dx = -\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij,j} w_i dx +$$

$$+ \langle \sigma^-_\nu, W_\nu \rangle^{00}_{\Sigma^-} + \langle \sigma^-_{\tau i}, w_{\tau i} \rangle^{00}_{\Sigma^-} \quad \forall\, W \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{2.6.26}$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle^{00}_\Sigma$ означают двойственность между $H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$ и $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$. Применяя аналогичные рассуждения, можно установить существование следов $m^-_\nu \in H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$, $m^-_{\tau i} \in H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$, $i=1,2$. Справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega_1} m_{ij} \varepsilon_{ij}(\psi) dx = -\int\limits_{\Omega_1} m_{ij,j} \psi_i dx +$$

$$+ \langle m^-_\nu, \psi_\nu \rangle^{00}_{\Sigma^-} + \langle m^-_{\tau i}, \psi_{\tau i} \rangle^{00}_{\Sigma^-} \quad \forall\, \psi \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{2.6.27}$$

где $\psi_{\tau i} = \psi_i - \psi_\nu \nu_i$, $i=1,2$. В пространстве $H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$, благодаря включениям (2.6.24), так же определены операторы $\frac{\partial u}{\partial \nu}^{*-}$, ϕ^{*-}_ν, при этом для произвольных

$w \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$, справедливы соотношения:

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla u \nabla w dx = -\int\limits_{\Omega_1} w \triangle u dx + \langle \frac{\partial u}{\partial \nu}^{*-}, w\rangle^{00}_{\Sigma^-}, \tag{2.6.28}$$

$$\int\limits_{\Omega_1} \phi \nabla w dx = -\int\limits_{\Omega_1} w \operatorname{div}\phi dx + \langle \phi^{*-}_\nu, w\rangle^{00}_{\Sigma^-}. \tag{2.6.29}$$

Приведем теперь формулы интегрирования по частям для Ω_2. В силу (2.6.24) в пространстве $H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$ определены операторы:

$$\sigma^+_\nu, \qquad m^+_\nu, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}^{*+}, \quad \phi^{*+}_\nu; \quad \sigma^+_{\tau i}, \quad m^+_{\tau i}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку для части Σ внешняя нормаль к Γ_2 совпадает с $-\nu$, имеют место следующие формулы

$$\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W) dx = -\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij,j} w_i dx -$$

$$- \langle \sigma^+_\nu, W_\nu\rangle^{00}_{\Sigma^+} - \langle \sigma^+_{\tau i}, w_{\tau i}\rangle^{00}_{\Sigma^+} \quad \forall\, W \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{2.6.30}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} m_{ij} \varepsilon_{ij}(\psi) dx = -\int\limits_{\Omega_2} m_{ij,j} \psi_i dx -$$

$$- \langle m^+_\nu, \psi_\nu\rangle^{00}_{\Sigma^+} - \langle m^+_{\tau i}, \psi_{\tau i}\rangle^{00}_{\Sigma^+} \quad \forall\, \psi \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{2.6.31}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \nabla u \nabla w dx = -\int\limits_{\Omega_2} w \triangle u dx - \langle \frac{\partial u}{\partial \nu}^{*+}, w\rangle^{00}_{\Sigma^+} \quad \forall\, w \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{2.6.32}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \phi \nabla w dx = -\int\limits_{\Omega_2} w \operatorname{div}\phi dx - \langle \phi^{*+}_\nu, w\rangle^{00}_{\Sigma^+} \quad \forall\, w \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma). \tag{2.6.33}$$

Выберем в неравенстве (2.6.13) пробные функции в виде $\eta = (U + \tilde{W}, u, \phi)$, $\tilde{W} \in H^1_0(\Omega)^2$ $(\Omega = \Omega_\gamma \cup \overline{\gamma})$. Далее преобразовав полученное неравенство с учетом (2.6.21), (2.6.26), (2.6.30), придем к уравнениям

$$\langle \sigma^-_\nu, \tilde{W}_\nu\rangle^{00}_{\Sigma^-} + \langle \sigma^-_{\tau i}, \tilde{w}_{\tau i}\rangle^{00}_{\Sigma^-} - \langle \sigma^+_\nu, \tilde{W}_\nu\rangle^{00}_{\Sigma^+} - \langle \sigma^+_{\tau i}, \tilde{w}_{\tau i}\rangle^{00}_{\Sigma^+} =$$

$$= \langle \sigma^-_\nu - \sigma^+_\nu, \tilde{W}_\nu\rangle^{00}_{\Sigma} + \langle \sigma^-_{\tau i} - \sigma^+_{\tau i}, \tilde{w}_{\tau i}\rangle^{00}_{\Sigma} \geq 0. \tag{2.6.34}$$

Поскольку функция $\tilde{W}$ произвольная, $\tilde{W}_\nu$, $\tilde{w}_{\tau i}$, $i = 1, 2$, независимы, то (2.6.34) равносильно соотношениям

$$\langle \sigma^-_\nu - \sigma^+_\nu, g\rangle^{00}_{\Sigma} = \langle \sigma^-_{\tau i} - \sigma^+_{\tau i}, g\rangle^{00}_{\Sigma} = 0 \quad \forall g \in H^{1/2}_{00}(\Sigma), \quad i = 1, 2. \tag{2.6.35}$$

Подставим теперь в (2.6.13) для пробную функцию $\eta = (U, u, \phi + \tilde{\psi})$, $\tilde{\psi} \in H_0^1(\Omega)^2$. Для полученного неравенства применим соотношения (2.6.22), (2.6.27), (2.6.31), что позволяет вывести следующие соотношения

$$\langle m_\nu^- - m_\nu^+, g\rangle_\Sigma^{00} = \langle m_{\tau i}^- - m_{\tau i}^+, g\rangle_\Sigma^{00} = 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\Sigma), \quad i = 1, 2. \qquad (2.6.36)$$

Можно так же вывести равенство

$$\langle q_\nu^-, g\rangle_\Sigma^{00} - \langle q_\nu^+, g\rangle_\Sigma^{00} = 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\Sigma), \qquad (2.6.37)$$

где $q_\nu^- = \Lambda^-(\frac{\partial u}{\partial \nu}^{*-} + \phi_\nu^{*-})$, $q_\nu^+ = \Lambda^+(\frac{\partial u}{\partial \nu}^{*+} + \phi_\nu^{*+})$ со следующими обозначениями: $\Lambda^- = \Lambda$, $\Lambda^+ = \lambda^{-1}\Lambda$. Для этого нужно взять в (2.6.13) пробную функцию $\eta = (U, u + \tilde{w}, \phi)$, с $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ и преобразовать с помощью (2.6.23), (2.6.28), (2.6.29), (2.6.32), (2.6.33).

В соответствии с (2.6.35)–(2.6.37) в пространстве $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ определим операторы

$$\sigma_\nu, \quad m_\nu, \quad q_\nu, \quad \sigma_{\tau i}, \quad m_{\tau i}, \quad i = 1, 2, \qquad (2.6.38)$$

по формулам

$$\langle \sigma_\nu, g\rangle_\gamma^{00} = \langle \sigma_\nu^\pm, \overline{g}\rangle_\Sigma^{00},$$

$$\langle m_\nu, g\rangle_\gamma^{00} = \langle m_\nu^\pm, \overline{g}\rangle_\Sigma^{00},$$

$$\langle q_\nu, g\rangle_\gamma^{00} = \langle q_\nu^\pm, \overline{g}\rangle_\Sigma^{00},$$

$$\langle \sigma_{\tau i}, g\rangle_\gamma^{00} = \langle \sigma_{\tau i}^\pm, \overline{g}\rangle_\Sigma^{00}, \quad i = 1, 2,$$

$$\langle m_{\tau i}, g\rangle_\gamma^{00} = \langle m_{\tau i}^\pm, \overline{g}\rangle_\Sigma^{00}, \quad i = 1, 2,$$

для всех $g \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$, $\overline{g} = g$ на γ, $\overline{g} = 0$ на $\Sigma\backslash\gamma$, $\overline{g} \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ (скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma^{00}$ — означают двойственность $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ и $H_{00}^{1/2}(\gamma)$).

Рассмотрим пробную функцию вида $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ такую, что $\tilde{\eta} \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, $\tilde{W}_\nu = 0$, $\tilde{\psi}_\nu = 0$, $\tilde{w} = 0$. Подставим η в (2.6.13), используя по отношению к областям Ω_1 и Ω_2 формулы (2.6.26), (2.6.27), (2.6.30), (2.6.31), получим

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}\tilde{w}_i dx + \langle \sigma_{\tau i}, \tilde{w}_{\tau i}\rangle_{\Sigma^-}^{00} - \langle \sigma_{\tau i}, \tilde{w}_{\tau i}\rangle_{\Sigma^+}^{00} - \int\limits_{\Omega_\gamma} m_{ij,j}\tilde{\psi}_i dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\gamma} q_i\tilde{\psi}_i dx + \langle m_{\tau i}, \tilde{\psi}_{\tau i}\rangle_{\Sigma^-}^{00} - \langle m_{\tau i}, \tilde{\psi}_{\tau i}\rangle_{\Sigma^+}^{00} \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\tilde{w}_i + \mu_i\tilde{\psi}_i) dx.$$

Отсюда применяя равенства (2.6.21), (2.6.22) обозначения для скачков, находим

$$-\langle \sigma_{\tau i}, [\tilde{w}_{\tau i}] \rangle_{\Sigma}^{00} - \langle m_{\tau i}, [\tilde{\psi}_{\tau i}] \rangle_{\Sigma}^{00} \geq 0. \tag{2.6.39}$$

Обращая внимание на то, что $[\psi] = (0,0)$, $[W] = (0,0)$ на $\Sigma \backslash \gamma$, можно преобразовать соотношение (2.6.39) к следующему виду

$$-\langle \sigma_{\tau i}, [\tilde{w}_{\tau i}] \rangle_{\gamma}^{00} - \langle m_{\tau i}, [\tilde{\psi}_{\tau i}] \rangle_{\gamma}^{00} \geq 0.$$

Следовательно, в силу произвольности и независимости $\tilde{w}_{\tau i}$, $\tilde{\psi}_{\tau i}$, $i = 1,2$, получим

$$\langle \sigma_{\tau i}, g_i \rangle_{\gamma}^{00} = \langle m_{\tau i}, g_i \rangle_{\gamma}^{00} = 0 \quad \forall\, g \in H_{00}^{1/2}(\gamma)^2, \quad g_i \nu_i = 0. \tag{2.6.40}$$

Подставим в (2.6.13) пробную функцию вида $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, такую что $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, $\tilde{W} = (0,0)$, $\tilde{\psi} = (0,0)$ в Ω_γ, с произвольной $\tilde{w} \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)$. С помощью формул (2.6.23), (2.6.28), (2.6.29), (2.6.32) и (2.6.33), можно вывести

$$\langle q_\nu, g \rangle_{\gamma}^{00} = 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\gamma). \tag{2.6.41}$$

Преобразуем неравенство (2.6.13) с помощью формул Грина (2.6.26)–(2.6.33), уравнений равновесия (2.6.21)–(2.6.23), равенств (2.6.35)– (2.6.37), (2.6.40), (2.6.41) к следующему виду

$$\langle \sigma_\nu, [W_\nu - U_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} + \langle m_\nu, [\psi_\nu - \phi_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} \leq 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.6.42}$$

Поскольку нулевая вектор-функция $\eta_0 \equiv 0$ удовлетворяет включению $\eta_0 \in K$, а также в силу включения $2\xi \in K$, из (2.6.42) нетрудно вывести два соотношения

$$\langle \sigma_\nu, [U_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} + \langle m_\nu, [\phi_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} = 0, \tag{2.6.43}$$

$$\langle \sigma_\nu, [W_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} + \langle m_\nu, [\psi_\nu] \rangle_{\gamma}^{00} \leq 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.6.44}$$

Пусть $W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $[W_\nu] \geq 0$ на γ. Тогда имеют место включения $\hat{\eta} = (W, 0, W) \in K$, $\check{\eta} = (W, 0, -W) \in K$ (т.е. $\hat{\psi} = W$ для $\hat{\eta}$ и $\check{\psi} = -W$ для $\check{\eta}$).

Сравнив два неравенства, получающиеся из (2.6.44) по отношению к $\hat{\eta}$, $\check{\eta}$, имеем

$$\langle \sigma_\nu \pm m_\nu, [W_\nu] \rangle_\gamma^{00} \le 0 \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2, \quad [W_\nu] \ge 0.$$

Отсюда в силу (условной) произвольности W, находим

$$\langle \sigma_\nu \pm m_\nu, g \rangle_\gamma^{00} \le 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\gamma), \quad g \ge 0. \tag{2.6.45}$$

Таким образом, из вариационной постановки (2.6.13) получены уравнения равновесия (2.6.21)–(2.6.23), а также соотношения (2.6.35)–(2.6.37), (2.6.40), (2.6.41), (2.6.43), (2.6.45) для операторов следа (2.6.38), однозначно определяемых с помощью решения ξ. Можно показать и обратное, что функция $\hat{\xi} \in H_\Gamma(\Omega_\gamma)$, удовлетворяющая (2.6.1), (2.6.2), (2.6.9), (2.6.21)–(2.6.23), (2.6.35)–(2.6.37), (2.6.40), (2.6.41), (2.6.43), (2.6.45), будет также решением вариационной задачи (2.6.13), т.е. $\hat{\xi} = \xi$. Для этого достаточно умножить уравнения равновесия (2.6.21)–(2.6.23) на соответствующие компоненты вектора $(\eta - \hat{\xi})$, $\eta \in K$, затем проинтегрировать по Ω_γ и преобразовать с учетом формул Грина, уравнений равновесия и соотношений для операторов следа заданных в $H_{00}^{-1/2}(\Sigma)$, $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$.

Заметим, что если решение ξ задачи (2.6.13) является гладким, то операторы следа могут быть представлены в виде следов на γ следующих функций:

$$\sigma_\nu^\pm = \sigma_{ij}^\pm \nu_j \nu_i, \quad m_\nu^\pm = m_{ij}^\pm \nu_j \nu_i, \quad q_\nu^\pm = \Lambda^\pm (\frac{\partial u}{\partial \nu}^\pm + \phi_\nu^\pm), \tag{2.6.46}$$

$$\sigma_{\tau i}^\pm = \sigma_{ij}^\pm \nu_j - \sigma_\nu^\pm \nu_i, \quad m_{\tau i}^\pm = m_{ij}^\pm \nu_j - m_\nu^\pm \nu_i, \quad i = 1, 2. \tag{2.6.47}$$

Более того, в этом случае решение ξ является решением следующей краевой задачи, состоящей из (2.6.1), (2.6.2), (2.6.21)–(2.6.23) и граничных условий (см. теорему 2.1.1)

$$\xi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$[\sigma_\nu] = [m_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu = \sigma_{\tau i} = m_{\tau i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \gamma^\pm,$$

$$[U_\nu] \ge |[\phi_\nu]|, \quad |m_\nu| \le -\sigma_\nu, \quad m_\nu[\phi_\nu] + \sigma_\nu[U_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Рассмотрим теперь задачу (2.6.6), эквивалентную (2.6.8). Для удобства в обозначении решения задачи (2.6.6) опустим индекс, т.е. $\xi_s = \xi$. Аналогичными рассуждениями, варьируя пробные функции в вариационном неравенстве (2.6.8), можно показать, что (2.6.8) эквивалентна следующей дифференциальной постановке, в которой требуется найти функцию $\xi \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$, удовлетворяющую соотношениям теории упругости (2.6.1), (2.6.2), условию непроникания Синьорини (2.6.5), а также соотношениям

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

$$\langle \sigma_{\tau i}, g_i \rangle_\gamma^{00} = \langle m_{\tau i}, g_i \rangle_\gamma^{00} = 0 \quad \forall\, g \in H_{00}^{1/2}(\gamma)^2, \quad g_i \nu_i = 0, \tag{2.6.48}$$

$$\langle q_\nu, g \rangle_\gamma^{00} = 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\gamma), \tag{2.6.49}$$

$$\langle \sigma_\nu, U_\nu \rangle_\gamma^{00} + \langle m_\nu, \phi_\nu \rangle_\gamma^{00} = 0, \tag{2.6.50}$$

$$\langle \sigma_\nu \pm m_\nu, g \rangle_\gamma^{00} \le 0 \quad \forall g \in H_{00}^{1/2}(\gamma), \quad g \ge 0, \tag{2.6.51}$$

где операторы следа σ_ν, m_ν, q_ν, $\sigma_{\tau i}$, $m_{\tau i}$, $i = 1, 2$, определяются аналогично (2.6.38).

Отметим, что соотношения (2.6.48)–(2.6.51) записаны относительно берега γ^-.

В том случае, если решение $\xi \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1)$ неравенства (2.6.8) является гладким, можно показать, что условия (2.6.48)–(2.6.51) преобразуются к следующим граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu = \sigma_{\tau i} = m_{\tau i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad |m_\nu| \le -\sigma_\nu \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{2.6.52}$$

$$-U_\nu \ge |\phi_\nu|, \quad m_\nu \phi_\nu + \sigma_\nu U_\nu = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{2.6.53}$$

где σ_ν, m_ν, $\sigma_{\tau i}$, $m_{\tau i}$, $i = 1, 2$, в (2.6.52), (2.6.53) понимаются в смысле (2.6.46), (2.6.47).

В заключение отметим, что метод фиктивных областей для задачи Синьорини может принимать различные формы в зависимости от выбора фиктивной области Ω_2. Наряду с выбором области Ω_2, указанным на рис. 2.11, аналогичные утверждения имеют место и для других случаев выбора Ω_2 таких, как указано на рис. 2.12 и рис. 2.13. В случае рис. 2.12 во вспомогатель-

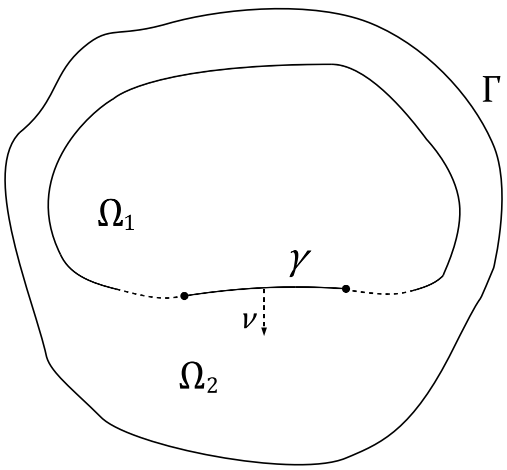

Рис. 2.12: Способ построения фиктивной области.

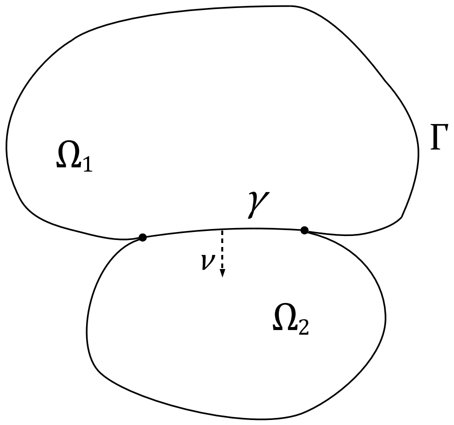

Рис. 2.13: Способ построения фиктивной области.

ной задаче, рассматриваемой в Ω_γ, внешняя граница области Ω_γ совпадает с внешней границей области Ω_2, где задаются краевые условия Дирихле. Ясно, что в случае рис. 2.13 вспомогательная задача с параметром λ, рассматриваемая на множестве $\Omega_\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$, будет контактной задачей с краевыми условиями вида (2.6.9) на $\gamma = \Sigma = \mathrm{int}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

2.7 Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину

В настоящем параграфе исследуется задача о равновесии упругой трансверсально—изотропной пологой оболочки Тимошенко. В соответствии с [11, 86] оболочку будем называть пологой, если $d \leq l/5$, где d — стрела подъема, l — наименьший характерный размер оболочки. Предполагается, что оболочка содержит сквозную трещину, при этом в исходном недеформированном состоянии один из берегов трещины может выступать над другим. На кривой, описывающей трещину задано нелинейное краевое условие. В параграфе установлена однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии оболочки, содержащей трещину. Из вариационной постановки задачи получена система краевых условий, определяющая соответствующую краевую задачу. Показана локальная бесконечная дифференцируемость решения при дополнительных условиях "нулевого" раскрытия трещины и бесконечной гладкости функций, описывающих кривизны оболочки и воздействие внешних нагрузок.

2.7.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\Gamma_c \subset \Omega$, $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$, $\Gamma_c = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 = g(x_1), 0 < x_1 < a\}$, $a > 0$, $g(x_1)$ — достаточно гладкая функция, $\partial\Omega \cap \overline{\Gamma}_c = \emptyset$, (x_1, x_2) — декартовы координаты в R^2. Нормаль в плоскости (x_1, x_2) к кривой Γ_c обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Будем считать, что геометрия срединной поверхности оболочки ничем не отличается от обычной евклидовой геометрии на плоскости (т.е. применим подход, использованный в [11] применительно к модели Кирхгофа-Лява). Рассмотрим модель пологой оболочки постоянной толщины $2h$, срединную поверхность которой зададим с помощью области $\Omega_c \times \{0\} \subset R^3$. Предположим, что оболочка содержит вертикальную трещину, которую можно задать как часть цилиндрической поверхности, (локально) перпендикулярной срединной поверхности и проходящей через кривую Γ_c. Считаем один из берегов кривой Γ_c и трещины положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Предположим, что в исходном недеформированном состоянии оболочки, отрицательный берег трещины выступает над положительным на расстояние $l = l(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_c$, $l(x) \in C_0^1(\Gamma_c)$ — заданная функция, такая что $0 \leq l(x) < 2h$ (см. рис. 2.14). При этом важно, что функция $l(x)$ обращается в нуль на концах кривой Γ_c. Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной

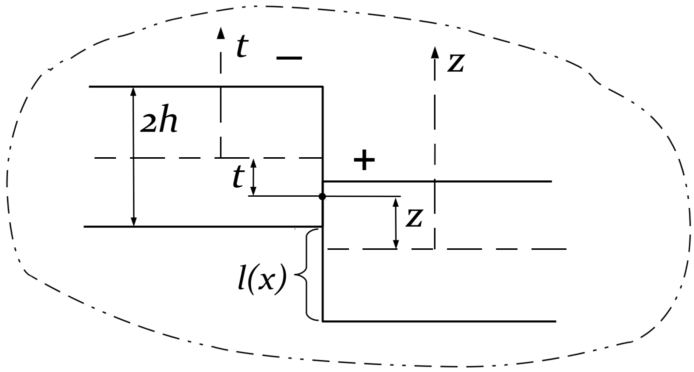

Рис. 2.14: Сечение оболочки вертикальной плоскостью.

поверхности, где $W = (w_1, w_2)$ и w горизонтальные и вертикальные перемещения, соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$. В случае, когда след некоторой функции v берется на положительном (относительно нормали ν) берегу Γ_c^+, применим обозначение $v^+ = v|_{\Gamma_c^+}$, аналогично для отрицательного берега $v^- = v|_{\Gamma_c^-}$, скачок функции v на Γ_c найдем по формуле $[v] = v^+ - v^-$.

Для пологой трансверсально—изотропной оболочки, справедливы следующие соотношения теории упругости [86]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad v,_i = \frac{\partial v}{\partial x_i},$$
$$e_{ij}(\chi) = \varepsilon_{ij}(W) + k_{ij}w, \quad i, j = 1, 2,$$

где $k_{ij} \in C^1(\Omega_c) \cap L_\infty(\Omega_c)$ – кривизны оболочки. Тензоры моментов $m(\psi) = \{m_{ij}(\psi)\}$, и усилий $\sigma(\chi) = \{\sigma_{ij}(\chi)\},\ i, j = 1, 2$ выражаются по формулам:

$$m_{ij} = m_{ij}(\psi) = c_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\psi), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\chi) = 3h^{-2}c_{ijrl}e_{rl}(\chi), \quad i, j, r, l = 1, 2,$$

где ненулевые коэффициенты тензора c_{ijrl} определяются соотношениями:

$$c_{iiii} = D,\ c_{iijj} = D\text{æ},\ c_{ijij} = c_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j,$$

постоянная D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$ (всюду используем правило суммирования по повторяющимся индексам). Поперечные силы определим следующим образом:

$$q_i = q_i(w, \psi) = \Lambda(w,_i + \psi_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2\kappa' Gh$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной поверхности оболочки.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_c)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_c)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_c)}$. Через $H(\Omega)$ обозначим следующее пространство $H(\Omega) = H_0^1(\Omega)^5$.

Определим билинейные формы $b(\cdot,\cdot)$, $B(\cdot,\cdot)$ соотношениями:

$$b(\eta,\bar\eta) = \int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)dx,$$

$$B(\eta,\bar\eta) = b(\eta,\bar\eta) + \int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(\chi)e_{ij}(\bar\chi)dx\,,$$

где $\eta = (W, w, \psi)$, $\chi = (W, w)$; $\bar\eta = (\bar W, \bar w, \bar\psi)$, $\bar\chi = (\bar W, \bar w)$. Рассмотрим следующий функционал энергии деформированной оболочки, описываемой перемещениями $\chi = (W, w)$ и углами поворота нормальных сечений ψ:

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B(\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_c} F\eta dx\,, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in L^2(\Omega)^5$ — заданный вектор внешних нагрузок [86].

На внешней границе области Ω_c зададим однородные краевые условия

$$w = 0, \quad \psi = W = (0,0) \ \text{ на } \ \partial\Omega. \tag{2.7.1}$$

Выведем теперь условие типа Синьорини, описывающее взаимное непроникание берегов трещины, на внутренней границе Γ_c. При этом, будем использовать выкладки, аналогичные примененным ранее при выводе условия непроникания для оболочек Кирхгофа—Лява, содержащих трещины [149]. Как известно, в модели Тимошенко перемещения $\chi_z = (W_z, w_z)$ для точек оболочки, отстоящих от срединной поверхности на расстояние $|z| \le h$, выражаются с помощью перемещений в срединной поверхности $\chi_0(x) = \chi(x) = (W, w)$ и углов поворота нормальных сечений $\psi = \psi(x)$. При этом справедливы следующие формулы [86]:

$$W_z(x,z) = W(x) + z\psi(x), \quad w_z(x,z) = w(x), \quad |z| \le h, \quad x \in \Omega_c\,. \tag{2.7.2}$$

Согласно предположениям относительно геометрии трещины и формулам (2.7.2), составляющие вектора перемещений $\chi_z^+ = (W_z^+, w_z^+)$, для точек положительного берега трещины можно выразить по формулам

$$\begin{aligned} W_z^+(x,z) = W^+(x) + z\psi^+(x), \quad w_z^+(x,z) = w(x),& \\ z \in \big[-h, h\big], \quad x \in \Gamma_c\,.& \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Заметим, что с помощью ограничений $z \in \big[-(h-l), h\big]$ в (2.7.3), задаются перемещения тех точек положительного берега трещины, которые могут контактировать с отрицательным берегом (см. рис. 2.14). Для вектора перемещений $\chi_t^- = (W_t^-, w_t^-)$ точек отрицательного берега справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} W_t^-(x,t) = W^-(x) + t\psi^-(x), \quad w_t^-(x,t) = w(x),& \\ t \in \big[-h, h\big], \quad x \in \Gamma_c\,.& \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Аналогично, если в формуле (2.7.4) взять $t \in \big[-h, h-l\big]$, то получим формулы для перемещений точек отрицательного берега, которые могут иметь контакт с противоположным берегом. Для исходного недеформированного состояния оболочки, зададим точки отрицательного и положительного берегов трещины с помощью координат (x^-, t), (x^+, z), соответственно, где $t, z \in [-h, h]$, $x^-, x^+ \in \Gamma_c$. При этом, легко видеть (см. рис. 2.14), что в соответствующих точках возможного контакта имеют место соотношения $x^- = x^+ = x$, $t = z - l$.

Возьмем теперь в формуле (2.7.4) $t = z - l$ и выпишем условие неотрицательности скачка вектора перемещений $(\chi_z^+ - \chi_{(z-l)}^-)$ вдоль нормали $\nu_z = (\nu_1, \nu_2, 0)$ к поверхности трещины:

$$(\chi_z^+ - \chi_{(z-l)}^-) \cdot (\nu_1, \nu_2, 0) = [W_\nu] + z[\psi_\nu] + l\psi_\nu^- \ge 0, \;\; z \in \big[-(h-l), h\big] \text{ на } \Gamma_c\,,$$

через W_ν, ψ_ν обозначены скалярные произведения $W_\nu = w_i\nu_i$, $\psi_\nu = \psi_i\nu_i$, соответственно. Подставляя значения $z = h$ и $z = -(h - l(x))$ получим следующее условие, описывающее недопустимость взаимного проникания точек противоположных берегов трещины:

$$\begin{cases} [W_\nu] + h[\psi_\nu] + l\psi_\nu^- \geq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,, \\ [W_\nu] - (h-l)[\psi_\nu] + l\psi_\nu^- \geq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,. \end{cases} \tag{2.7.5}$$

Заметим, что если в (2.7.5) дополнительно связать значения функций ψ и w соотношениями модели Кирхгофа—Лява, а именно $\psi_i = -w_{,i}$, $i = 1, 2$, то в частном случае, при $l \equiv 0$, мы получим известное условие: $[W_\nu] \geq h|[\dfrac{\partial w}{\partial \nu}]|$, описывающее непроникание берегов трещины оболочки Кирхгофа—Лява см. [96, 149, 153].

Рассмотрим множество допустимых функций

$$K = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_c)|\ \eta \text{ удовлетворяет } (2.7.5)\}.$$

В силу линейности левой части обеих неравенств в (2.7.5), множество K является выпуклым. Нетрудно убедиться также в замкнутости множества K. Задача о равновесии оболочки формулируется следующим образом. Требуется найти функцию, доставляющую минимум функционала энергии над множеством K:

$$\inf_{\eta \in K} \Pi(\eta). \tag{2.7.6}$$

2.7.2 Однозначная разрешимость задачи

Для того чтобы показать разрешимость задачи (2.7.6), установим свойства функционала энергии $\Pi(\eta)$ и множества K. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.7.1. *Функционал полной энергии оболочки $\Pi(\eta)$ является коэрцитивным в $H(\Omega_c)$.*

Доказательство. С помощью неравенства Пуанкаре и неравенства Корна $\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx \geq c_1\|\psi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2}$ (см. параграф 1.3), можно вывести неравенство

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx + \Lambda \int\limits_{\Omega_c} (w,_i + \psi_i)(w,_i + \psi_i)dx \geq$$

$$\geq c_2(\|\psi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \|w\|^2_{H^1(\Omega_c)}), \quad (2.7.7)$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$, не зависящей от ψ и w. Далее, положительная определенность тензора c_{ijrl} влечет очевидное неравенство

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(\chi)e_{ij}(\chi)dx \geq 0. \quad (2.7.8)$$

Предположим, что функционал энергии не является коэрцитивным, т.е. при условии $\|\eta\| \to \infty$ имеем, что $\Pi(\eta) \nrightarrow \infty$. Это означает, что для некоторой постоянной $c_3 > 0$ найдется последовательность η_n такая, что $\|\eta_n\| \to \infty$ для которой $\Pi(\eta_n) \leq c_3$. В силу (2.7.7) и неравенства (2.7.8) найдется постоянная $c_4 > 0$, доставляющая оценку $\|\psi_n\| + \|w_n\| \leq c_4$.

Оценим далее значения $\Pi(\eta_n)$. Для удобства далее будем опускать индекс n. Принимая во внимание равенство $e_{ij}(\chi) = \varepsilon_{ij}(W) + k_{ij}w$, представим второе слагаемое билинейной формы $B(\, , \,)$ следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(\chi)e_{ij}(\chi)dx = \int\limits_{\Omega_c} \Big(c_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W)\varepsilon_{ij}(W) + c_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W)k_{ij}w\Big)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_c} \Big(w^2 c_{ijrl}k_{rl}k_{ij} + c_{ijrl}k_{rl}w\varepsilon_{ij}(W)\Big)dx. \quad (2.7.9)$$

Оценим теперь слагаемые функционала $\Pi(\eta)$. В силу неравенства Корна имеем $\int\limits_{\Omega_c} c_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W)\varepsilon_{ij}(W)dx \geq c_5\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2}$, с некоторой положительной постоянной c_5. Сумму модулей остальных слагаемых функционала $\Pi(\eta)$, согласно предположению и равенству (2.7.9), можно оценить сверху величиной $A + B\|W\|_{H^1(\Omega_c)^2}$, где A, B — положительные постоянные, не зависящие от W. В итоге, справедливо следующее неравенство:

$$\Pi(\eta) \geq \frac{c_5}{2}\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} - (A + B\|W\|_{H^1(\Omega_c)^2}).$$

Легко видеть, что $\Pi(\eta) \to \infty$ при $\|W\|_{H^1(\Omega_c)^2} \to \infty$. Противоречие. Следовательно, функционал $\Pi(\eta)$ является коэрцитивным. Теорема доказана.

Как сумма билинейных и линейных форм, функционал $\Pi(\eta)$ является дифференцируемым. Слабая полунепрерывность и выпуклость функционала энергии следуют из справедливости неравенства

$$(\Pi'_{\eta_1} - \Pi'_{\eta_0})(\eta_1 - \eta_0) \geq 0\,, \quad \eta_1,\ \eta_0 \in H(\Omega_c).$$

Таким образом, функционал энергии $\Pi(\eta)$ и множество K удовлетворяют условиям теоремы о существовании решения задачи минимизации (2.7.6), (см. теорему 1.4.1). Обозначим через $\xi = (U, u, \phi)$ решение задачи (2.7.6), для удобства применим обозначение $q_i = \Lambda(u_{,i} + \phi_i)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\zeta)$, $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $i, j = 1, 2$, $\zeta = (U, u)$.

Функционал энергии $\Pi(\eta)$ является выпуклым и дифференцируемым, а множество K выпукло и замкнуто, следовательно, задача (2.7.6) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$B(\xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_c} F(\eta - \xi) dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.7.10}$$

Докажем теперь, что решение единственно. Для этого предположим, что существуют два решения ξ_1 и ξ_2. Подставляя их в вариационное неравенство (2.7.10) и суммируя, нетрудно получить для разности $\tilde{\xi} = \xi_1 - \xi_2 = (\tilde{U}, \tilde{u}, \tilde{\phi})$ следующее соотношение

$$B(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \leq 0. \tag{2.7.11}$$

Отсюда принимая во внимание оценку вида (2.7.7), находим

$$c_2(\|\tilde{\psi}\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \|\tilde{w}\|^2_{H^1(\Omega_c)}) + \int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}(\tilde{\chi}) e_{ij}(\tilde{\chi}) dx \leq 0. \tag{2.7.12}$$

В силу неотрицательности норм и последнего интеграла в (2.7.12), получаем, что все три слагаемые в неравенстве (2.7.12) равны нулю. Значит, $\tilde{\psi} = (0, 0)$, $\tilde{w} = 0$ в области Ω_c. Это, в свою очередь, влечет, что $\tilde{W} = 0$ в области Ω_c. Противоречие. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.7.2. *Задача* (2.7.6) *имеет единственное решение.*

Выведем далее уравнения равновесия. Подставляя в последнее вариационное неравенство пробные функции вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega_c)^5$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + q_i(\tilde{w},_i + \tilde{\psi}_i) + \\ + k_{ij}\sigma_{ij}\tilde{w} \Big) dx = \int\limits_{\Omega_c} F\tilde{\eta} dx. \tag{2.7.13}$$

Учитывая независимость между $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$, из (2.7.13) получим

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i \tilde{w}_i dx \quad \forall \tilde{W} \in C_0^\infty(\Omega_c)^2,$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(\tilde{w},_i q_i + k_{ij}\sigma_{ij}\tilde{w} \Big) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_3 \tilde{w} dx \quad \forall \tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega_c),$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i\tilde{\psi}_i \Big) dx = \int\limits_{\Omega_c} (f_4\tilde{\psi}_1 + f_5\tilde{\psi}_2) dx \quad \forall \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_c)^2.$$

Заметив, что имеют место представления $\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) dx = \int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\tilde{\psi}_{i,j} dx$, $\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) dx = \int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\tilde{w}_{i,j} dx$, из предыдущих трех равенств заключаем, что в области Ω_c в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.7.14}$$

$$q_i,_i - k_{ij}\sigma_{ij} = -f_3, \tag{2.7.15}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2. \tag{2.7.16}$$

2.7.3 Краевые условия на кривой Γ_c

В этом разделе мы получим эквивалентную дифференциальную постановку задачи (2.7.6). Для этого исходя из вариационного неравенства (2.7.10), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем полный набор краевых условий на кривой Γ_c. Чтобы извлечь из неравенства (2.7.10) соотношения на внутренней границе Γ_c, будем использовать формулы Грина.

Так же, как и в разделе 2.1.3, предполагаем, что кривая Γ_c может быть продолжена до замкнутой достаточно гладкой кривой Σ, делящей область Ω на две области Ω_1 и Ω_2, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, с гладкими границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \partial\Omega$. Кривую Σ можно считать, не нарушая общности, такой, что ее внешняя нормаль по отношению к области Ω_1 совпадает с нормалью ν на Γ_c. В соответствии с предположениями, обозначим через ν и τ нормальный и касательный векторы к Σ, соответственно. Отметим, что кривая Σ может быть выбрана произвольно с точностью до наложенных на нее требований. Далее будем применять формулы Грина по отношению к областям Ω_1 и Ω_2.

Поскольку производные функций из пространства $H^1(\Omega_c)$ в общем случае не имеют следы, мы в этом разделе предполагаем достаточную гладкость ξ.

Для любой подобласти $S \subset \Omega_c$ с достаточно гладкой границей ∂S справедлива следующая формула Грина (см. теорему 1.5.2)

$$\int\limits_S \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_S \sigma_{ij,j} w_i dx +$$
$$+\int\limits_{\partial S} \big(\sigma_n W_n + \sigma_{\mu i} W_{\mu i}\big) ds \quad \forall W \in H^1(S)^2, \qquad (2.7.17)$$

где $n = (n_1, n_2)$ — нормаль к ∂S, $\sigma_n n$ и $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1}, \sigma_{\mu 2})$ — нормальная и касательная составляющие вектора $(\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j)$:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_n n_i + \sigma_{\mu i},\ \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i, \quad \mu = (-n_2, n_1),$$

$$W = (w_1, w_2), \quad w_i = W_n n_i + W_{\mu i}, \quad i = 1, 2, \quad W_\mu = (W_{\mu 1}, W_{\mu 2}).$$

Для области Ω_1, из формулы (2.7.17) получим

$$\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij,j} w_i dx +$$
$$+\int\limits_{\Sigma} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_{\tau i} W_{\tau i}\big) ds \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.7.18)$$

Возьмем в формуле (2.7.17) вместо S область Ω_2. С учетом того, что для функции W принадлежащей $H^{1,0}(\Omega_c)^2$ выполняется равенство $W = (0, 0)$

на внешней границе $\partial\Omega$, а внешняя нормаль к Σ по отношению к Ω_2 равна $(-\nu)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij,j}w_i dx -$$

$$- \int\limits_{\Sigma} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_{\tau i}W_{\tau i}\big)ds \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.7.19)$$

Уместно заметить, что в (2.7.18) значения следов подынтегральных функций в интеграле по кривой Σ берутся по отношению к Σ^-, а в формуле (2.7.19) к Σ^+. Обозначим через $\sigma_\nu^\pm$, $\sigma_{\tau i}^\pm$, $i = 1, 2$ следы функций σ_ν и $\sigma_{\tau i}$, $i = 1, 2$ на $\Sigma^\pm$.

Сложим равенства (2.7.18) и (2.7.19), с учетом того, что $\sigma_\nu^+ = \sigma_\nu^-$, $\sigma_{\tau i}^+ = \sigma_{\tau i}^-$, $i = 1, 2$ на $\Sigma \setminus \overline{\Gamma}_c$ и применяя обозначения для скачков, получим

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(W)dx = -\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij,j}w_i dx -$$

$$- \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_{\tau i}W_{\tau i}\big)ds\Big] \quad \forall W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.7.20)$$

Аналогично для произвольных $\psi \in H^{1,0}(\Omega_c)^2$, $w \in H^{1,0}(\Omega_c)$ справедливы формулы

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi)dx = -\int\limits_{\Omega_c} m_{ij,j}\psi_i dx - \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(m_\nu\psi_\nu + m_{\tau i}\psi_{\tau i}\big)ds\Big], \qquad (2.7.21)$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \nabla u \nabla w dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial \nu} w ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \triangle u dx, \qquad (2.7.22)$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \phi \nabla w dx = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \phi_\nu w ds\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w \phi_{i,i} dx. \qquad (2.7.23)$$

где величины m_ν, $m_{\tau i}$, $i = 1, 2$ определяются аналогично предыдущим формулам, записанным для σ_ν, $\sigma_{\tau i}$, $i = 1, 2$, (см. формулу (2.7.17)).

Используя приведенные формулы (2.7.20)–(2.7.23), выведем краевые условия на кривой Γ_c. Из вариационного неравенства (2.7.10) можно получить следующее интегральное тождество, справедливое для всех $\eta = (W, w, \psi) \in K$, с функциями W, ψ, удовлетворяющими $[W_\nu] = 0$ на Γ_c, $\psi_\nu = 0$ на $\Gamma_c^\pm$:

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(W) + k_{ij}\sigma_{ij}w + q_i(w,_i + \psi_i) \Big) dx = \int\limits_{\Omega_c} F\eta dx. \qquad (2.7.24)$$

В самом деле, сравнив два неравенства, полученные из (2.7.10) подстановкой тестовых функций двух видов $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in K$, $[\tilde{W}_\nu] = 0$ на Γ_c, $\tilde{\psi}_\nu = 0$ на $\Gamma_c^\pm$, затем, приняв для удобства обозначение $\tilde{\eta} = \eta$, выведем (2.7.24). Возьмем теперь в равенстве (2.7.24) функцию $\eta = (W, w, \psi) \in K$ такую, что $W = (0, 0)$, $\psi = (0, 0)$, в итоге придем к соотношению

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(q_i(w,_i) + k_{ij}\sigma_{ij}w \big) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_3 w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \qquad (2.7.25)$$

Применяя формулы Грина (2.7.22), (2.7.23), с учетом (2.7.15) и равенства $q_i = \Lambda(u,_i + \phi_i)$, $i = 1, 2$, из тождества (2.7.25) выводим следующее равенство:

$$\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big) w ds \Big] = \int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big)^{+} w^+ ds -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_c} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big)^{-} w^- ds = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \qquad (2.7.26)$$

Поскольку для $w \in H_0^1(\Omega)$ выполняется $w^+ = w^-$ на Γ_c, из равенства (2.7.26) следует, что

$$\Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big] = \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big)^{+} - \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big)^{-} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Аналогично, используя независимость значений W_τ, W_ν ψ_τ, w и применяя формулы Грина в формуле (2.7.24), можно убедиться в справедливости следующих соотношений

$$[\sigma_\tau] = [m_\tau] = (0, 0), \quad [\sigma_\nu] = \Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu \Big] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,. \qquad (2.7.27)$$

Выведем далее равенства

$$\sigma_{\tau i} = 0, \quad m_{\tau i} = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,. \qquad (2.7.28)$$

В самом деле, пусть в вариационном неравенстве (2.7.10) взята пробная функция η такая, что $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, 0, 0, 0)$, $\tilde{W}_\nu = 0$. Учитывая произвольность знака функции $\tilde{\eta}$, благодаря равенствам (2.7.14), (2.7.20) получим $\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i}\tilde{W}_{\tau i} ds\Big] = \int\limits_{\Gamma_c} \sigma_{\tau i}[\tilde{W}_{\tau i}] ds = 0$. Откуда в силу произвольности значений $\tilde{W}_{\tau i}$, $i = 1, 2$, следует первая часть соотношений (2.7.28). Аналогично, взяв пробную функцию $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ такую, что $\tilde{\eta} = (0, 0, 0, \tilde{\psi})$, $\tilde{\psi}_\nu = 0$ устанавливаем вторую часть равенств (2.7.28). Наконец, взяв в (2.7.10) пробную функцию вида $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, такую что $\tilde{\eta} = (0, 0, \tilde{w}, 0, 0)$ с произвольной функцией $\tilde{w} \in H^{1,0}(\Omega_c)$, нетрудно убедиться в справедливости оставшегося последнего равенства в (2.7.28).

Благодаря выведенным равенствам (2.7.27), (2.7.28), вариационное неравенство (2.7.10) с помощью формул (2.7.20)–(2.7.23) преобразовывается к виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\sigma_\nu[W_\nu - U_\nu] + m_\nu^+(\psi_\nu - \phi_\nu)^+ - \\ - m_\nu^-(\psi_\nu - \phi_\nu)^-\Big) ds \le 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.7.29}$$

Из последнего неравенства извлечем систему соотношений

$$m_\nu^- = m_\nu^+ - l\sigma_\nu, \quad h\sigma_\nu - m_\nu^+ \le 0, \quad (h-l)\sigma_\nu + m_\nu^+ \le 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{2.7.30}$$

Сравнив неравенства, полученные из (2.7.29) для тестовых функций $\eta = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\eta = 2\xi$, выведем интегральное тождество

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu[U_\nu] + m_\nu^+\phi_\nu^+ - m_\nu^-\phi_\nu^-\big) ds = 0. \tag{2.7.31}$$

Из (2.7.29) и (2.7.31) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu[W_\nu] + m_\nu^+\psi_\nu^+ - m_\nu^-\psi_\nu^-\big) ds \le 0 \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.7.32}$$

Подставим в (2.7.32) пробную функцию $\eta = (W, w, \psi)$ со следующим строением: $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$ такая, что $\psi_\nu = 0$ на $\Sigma \setminus \Gamma_c$, а функция $W \in H^{1,0}(\Omega_c)^2$

удовлетворяет равенству $[W_\nu] = -l\psi_\nu^+$ $(\psi_\nu^+ = \psi_\nu^-)$ на Γ_c. В итоге получим $\int\limits_{\Gamma_c} \big(-\sigma_\nu l\psi_\nu^+ + m_\nu^+\psi_\nu^+ - m_\nu^-\psi_\nu^+\big)ds \le 0$. Отсюда, поскольку функция ψ_ν^+ может быть выбрана произвольно, с точностью до наложенных на нее условий, выведем первое соотношение в (2.7.30):

$$m_\nu^- = m_\nu^+ - l\sigma_\nu \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,. \tag{2.7.33}$$

С учетом (2.7.33), неравенство (2.7.32) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu] + l\sigma_\nu\psi_\nu^-\big)ds \le 0 \quad \forall\eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{2.7.34}$$

Возьмем в (2.7.34) следующую специальную пробную функцию $\eta = (W, w, \psi) \in K$ такую, что $\psi_\nu^- = 0$, $[\psi_\nu] \le 0$, $[W_\nu] = -h[\psi_\nu]$ на Γ_c. В результате (2.7.34) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(-\sigma_\nu h[\psi_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu]\big)ds \le 0. \tag{2.7.35}$$

Замечая условную произвольность функций $[\psi_\nu]$ в (2.7.35), выведем второе соотношение из (2.7.30). Подставив в (2.7.34) другую пробную функцию $\eta = (W, w, \psi)$, удовлетворяющую соотношениям $\psi_\nu^- = 0$, $[\psi_\nu] \ge 0$, $[W_\nu] = (h - l)[\psi_\nu]$ на Γ_c, аналогичными рассуждениями, можно установить справедливость последнего соотношения из (2.7.30).

Для всех $\eta \in K$, в силу полученных неравенств (2.7.30), справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}(h\sigma_\nu - m_\nu^+)([W_\nu] - (h-l)[\psi_\nu] + l\psi_\nu^-) &+ \\ + (\sigma_\nu(h-l) + m_\nu^+)([W_\nu] + h[\psi_\nu] + l\psi_\nu^-) &= \\ = (2h-l)\big(\sigma_\nu[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu] + l\sigma_\nu\psi_\nu^-\big) \le 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,.\end{aligned} \tag{2.7.36}$$

Поскольку в левой части (2.7.36) стоит сумма с неположительным знаком, из равенства (2.7.31) выводим, что

$$\sigma_\nu[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu] + l\sigma_\nu\phi_\nu^- = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c\,. \tag{2.7.37}$$

Заметим, что равенство (2.7.37) в силу (2.7.36) эквивалентно следующим соотношениям выполненным на Γ_c:

$$\begin{cases} (h\sigma_\nu - m_\nu^+)([U_\nu] - (h-l)[\phi_\nu] + l\phi_\nu^-) = 0, \\ (\sigma_\nu(h-l) + m_\nu^+)([U_\nu] + h[\phi_\nu] + l\phi_\nu^-) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, из вариационного неравенства (2.7.10) следует дифференциальная постановка, состоящая из уравнений равновесия (2.7.14)–(2.7.16), краевых условий (2.7.1) на внешней границе Γ и (2.7.5), (2.7.27), (2.7.28), (2.7.30), (2.7.37) на внутренней границе Γ_c.

Пусть теперь $\xi = (U, u, \phi)$ — решение дифференциальной постановки задачи, функции $q_i = \Lambda(u_{,i} + \phi_i)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\zeta)$, $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $i, j = 1, 2$ однозначно определяются решением ξ. Предположим, что имеют место соотношения (2.7.14)–(2.7.16), краевые условия (2.7.1) на Γ и (2.7.5), (2.7.27), (2.7.28), (2.7.30), (2.7.37) на Γ_c. Покажем, что тогда ξ является решением задачи (2.7.6).

Умножим равенства (2.7.14) на $(w_i - u_i)$ для каждого $i = 1, 2$, соответственно, затем просуммируем по i и проинтегрируем по Ω_c. Для каждой подобласти Ω_i, $i = 1, 2$, применяя формулы Грина, выведем

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(W - U)dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i(w_i - u_i)dx - \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\sigma_\nu(W_\nu - U_\nu) + \\ + \sigma_{\tau i}(W_{\tau i} - U_{\tau i})\Big)ds\Big] \quad \forall W = (w_1, w_2) \in H^{1,0}(\Omega_c)^2. \quad (2.7.38)$$

Заметим, что в последнем равенстве $\sigma_{\tau i}$, $i = 1, 2$, согласно (2.7.28), равно нулю. Умножим далее (2.7.16) на $(\psi_i - \phi_i)$ равенства, соответствующие $i = 1, 2$, просуммируем по i, а затем проинтегрируем по области Ω_c. Применяя формулу Грина (2.7.21), с учетом того, что $m_{\tau i} = 0$ на Γ_c при $i = 1, 2$, получим

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\psi - \phi)dx + \Big[\int\limits_{\Gamma_c} m_\nu(\psi_\nu - \phi_\nu)ds\Big] + \\ + \int\limits_{\Omega_c} q_i(\psi_i - \phi_i)dx = \int\limits_{\Omega_c} f_{3+i}(\psi_i - \phi_i)dx, \qquad (2.7.39)$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^{1,0}(\Omega_c)^2$. Повторяя аналогичные рассуждения для равенства (2.7.15), использовав формулы интегрирования (2.7.22), (2.7.23) и краевые условия (2.7.27), (2.7.28), имеем

$$\int\limits_{\Omega_c} \Big(q_i(w_{,i} - u_{,i}) + k_{ij}\sigma_{ij}(w-u) \Big) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_c} f_3(w-u)dx \quad \forall w \in H^{1,0}(\Omega_c). \qquad (2.7.40)$$

Просуммировав (2.7.38)–(2.7.40) с учетом соотношений (2.7.27), (2.7.28) и (2.7.30), выведем

$$B(\xi, \eta - \xi) - \int\limits_{\Omega_c} F(\eta - \xi)dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu([W_\nu - U_\nu] + l\psi_\nu^- - l\phi_\nu^-) + m_\nu^+[\psi_\nu - \phi_\nu] \big) ds. \quad (2.7.41)$$

Возьмем теперь в (2.7.41) тестовую функцию $\eta = (W, w, \psi) \in K$ и покажем, что правая часть равенства (2.7.41) неотрицательна. Поскольку в силу (2.7.37) выполнено равенство

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu([U_\nu] + l\phi_\nu^-) + m_\nu^+[\phi_\nu] \big) ds = 0,$$

остается показать, что $\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_\nu([W_\nu] + l\psi_\nu^-) + m_\nu[\psi_\nu] \big) ds \leq 0$ для всех $\eta \in K$. Последнее следует, очевидно из (2.7.30) и (2.7.36). В итоге, для $\eta \in K$ правая, а следовательно и левая части равенства (2.7.41) неотрицательны. Это означает справедливость вариационного неравенства (2.7.10). Заметим эквивалентность задачи (2.7.6) и неравенства (2.7.10). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.7.3. *Гладкая функция $\xi = (U, u, \phi)$ является решением вариационной задачи (2.7.6) тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи состоящей из уравнений равновесия (2.7.14)–(2.7.16) и краевых условий*

$$U = \phi = (0,0), \quad u = 0 \quad \textit{на внешней границе} \quad \Gamma,$$

$$[\sigma_\nu]=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}+\phi_\nu=0, \quad \sigma_\tau=m_\tau=(0,0), \quad \sigma_\nu([U_\nu]+l\phi_\nu^-)+m_\nu^+[\phi_\nu]=0,$$

$$m_\nu^-=m_\nu^+-\sigma_\nu l, \quad \sigma_\nu h-m_\nu^+\le 0, \quad \sigma_\nu(h-l)+m_\nu^+\le 0,$$

$$\begin{cases} [U_\nu]+h[\phi_\nu]+l\phi_\nu^-\ge 0, \\ [U_\nu]-(h-l)[\phi_\nu]+l\phi_\nu^-\ge 0 \quad \textit{на внутренней границе} \quad \Gamma_c\,. \end{cases}$$

2.7.4 Гладкость решения в случае нулевого раскрытия трещины

В этом разделе рассматривается вопрос о регулярности решений. Предположим, что $l\equiv 0$ на Γ_c. До сих пор предполагалось, что берега трещины могут расходиться. Пусть теперь раскрытие трещины в некоторой окрестности точки $x^0=(x_1^0,x_2^0)\in\Gamma_c$ является нулевым. Это условие можно записать в виде:

$$[\xi]=(0,0,0,0,0) \quad \text{на} \quad \mathcal{O}(x^0)\cap\Gamma_c\,.$$

Докажем, что в этом случае, при дополнительном условии бесконечной дифференцируемости функций F, k_{ij}, $i,j=1,2$ в этой же окрестности $\mathcal{O}(x^0)$ решение ξ также состоит из бесконечно гладких функций в $\mathcal{O}(x^0)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.7.4. *Пусть $F\in C^\infty(\mathcal{O}(x^0))^5$, $k_{ij}\in C^\infty(\mathcal{O}(x^0))$, $i,j=1,2$ и $[\xi]=(0,0,0,0,0)$ на $\mathcal{O}(x^0)\cap\Gamma_c$. Тогда $\xi\in C^\infty(\mathcal{O}(x^0))$.*

Доказательство. По условию теоремы имеют место соотношения $[U]=[\phi]=(0,0)$, $[u]=0$ на $\mathcal{O}(x^0)\cap\Gamma_c$. Следовательно (см. [65]),

$$u_i,\ \phi_i,\ u\in H^1(\mathcal{O}(x^0)), \quad i=1,2.$$

Для начала рассмотрим уравнение (2.7.14), установим, что оно выполняется также в области $\mathcal{O}(x^0)$. Из уравнения (2.7.24) взяв в качестве $\eta=(W,w,\psi)$ пробные функции с $\psi=(0,0)$, $w=0$ находим

$$\int\limits_{\Omega_c} w_{i,j}\sigma_{ij}dx=\int\limits_{\Omega_c} f_iw_idx \quad \forall w_i\in H_0^1(\Omega), \quad i=1,2. \tag{2.7.42}$$

Преобразуем последние равенства для произвольной функции θ, принадлежащей пространству $C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0))$. С учетом того, что θ равна нулю вне окрестности $\mathcal{O}(x^0)$, а также принимая во внимание тот факт, что в силу включения $U \in H^1(\mathcal{O}(x^0))^2$ справедливы соотношения $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U) \in L^2(\mathcal{O}(x^0))$, $i = 1, 2$, (2.7.42) трансформируем к следующему виду:

$$\int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} \sigma_{ij}\, \theta,_j \, dx = \int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\, \theta,_j \, dx = \int\limits_{\Omega_c} f_i \theta dx = \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} f_i \theta dx \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0)).$$

Данные соотношения при $i = 1, 2$ и определяют выполнение равенств (2.7.14) в смысле распределений в области $\mathcal{O}(x^0)$. Аналогично из (2.7.24) получим

$$\int\limits_{\Omega_c} q_i\, \theta,_i \, dx = \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} q_i\, \theta,_i \, dx = \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} f_3 \theta dx - \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} k_{ij} \sigma_{ij} \theta dx.$$

Из равенства

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(m_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\psi) + q_i \psi_i\big) dx = \int\limits_{\Omega_c} f_{3+i} \psi_i dx,$$

справедливого (в случае $l \equiv 0$) для всех $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$, подстановкой финитных гладких функций, получим

$$\int\limits_{\Omega_c} \big(m_{ij}\, \theta,_j + q_i \theta\big) dx = \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} \big(m_{ij}\, \theta,_j + q_i \theta\big) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{O}(x^0)} f_{3+i} \theta dx, \quad i = 1, 2, \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0)).$$

Последние соотношения означают, что уравнения (2.7.15), (2.7.16) выполняются в смысле распределений в области $\mathcal{O}(x^0)$. Представим уравнения (2.7.14)–(2.7.16), выполненные в $\mathcal{O}(x^0)$, следующим образом

$$M(U) = -(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2), \tag{2.7.43}$$

$$N(u) = -f_3 - \Lambda \phi_{i,i} + k_{ij} \sigma_{ij}\,, \tag{2.7.44}$$

$$L(\phi) = \Lambda \nabla u - (f_4, f_5). \tag{2.7.45}$$

Здесь функции $\widehat{f}_i = f_i - (c_{ijrl} k_{rl} u),_j \in L_2(\Omega_c)$, $i = 1, 2$; L, M, N — эллиптические операторы.

Далее используем результаты о внутренней гладкости решений эллиптических уравнений [54]. Покажем, что

$$u_i,\ \phi_i,\ u \in H^l_{loc}(\mathcal{O}(x^0)), \quad i = 1, 2, \tag{2.7.46}$$

для произвольного $l = 1, 2, ...$ В самом деле, из (2.7.45) следует, что $\phi_i \in H^2_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$, $i = 1, 2$. Уравнение (2.7.43) влечет $u_i \in H^2_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$, $i = 1, 2$. С учетом установленных включений правая часть в (2.7.44) принадлежит $H^1_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$, отсюда, в свою очередь, вытекает, что $u \in H^3_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$. Аналогично, поскольку правые части в (2.7.43) и (2.7.45) принадлежат $H^2_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$ имеем включения $u_i,\ \phi_i \in H^4_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$, $i = 1, 2$. Далее из (2.7.44) снова можно повысить гладкость функции $u \in H^5_{loc}(\mathcal{O}(x^0))$. Продолжая описанную схему, устанавливаем справедливость (2.7.46). Согласно теоремам вложения (см. [65]) заключаем, что

$$\phi_i,\ u_i,\ u \in C^k(\mathcal{O}(x^0)) \quad i = 1, 2, \text{ для всех } k = 1, 2, ...$$

Откуда и следует утверждение теоремы.

Аналогичное утверждение для оболочек Кирхгофа–Лява с $l \equiv 0$ было доказано в работе [112].

Глава 3

Метод регулярных возмущений в нелинейных задачах о равновесии пластины Тимошенко

3.1 Асимптотика функционала энергии пластины Тимошенко, содержащей криволинейную трещину

В параграфе рассматривается модель, описывающая равновесие упругой однородной трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину. На кривой, соответствующей трещине, налагается условие в виде неравенства, описывающее взаимное проникание противоположных берегов трещины. Для семейства вариационных задач о равновесии пластин, зависящих от параметра ε, исследуется зависимость функционалов энергии и решений задач ξ^ε от вариации геометрии пластины в срединной плоскости. Изменение геометрии пластины задается с помощью семейства гладких отображений, зависящих от ε. При этом значение параметра $\varepsilon = 0$ соответствует исходной невозмущенной области. Получена оценка, описывающая характер сильной сходимости решений ξ^ε к ξ^0 при $\varepsilon \to 0$. Выведена формула для производной функционала энергии при $\varepsilon = 0$.

В частном случае, полученная формула для производной, когда гладкое возмущение задает квазистатический рост трещины, представляет интерес с точки зрения известного в механике разрушения критерия Гриффитса [82, 123].

Дифференцируемость функционалов энергии для краевых задач с односторонними ограничениями изучена во многих работах, см., например, [42, 96, 97, 122, 153, 163]. В работе [163] для плоской задачи теории упругости, используя производные функционала энергии, построена модель квазистатического роста трещины согласно критерию разрушения Гриффитса как для линеаризованной, так и для нелинейной задачи о трещине в условиях непроникания ее берегов. Отметим также статью [96], где получена формула производной функционала энергии пластины Кирхгофа–Лява с трещиной, относительно общего возмущения.

Для пластины модели Тимошенко с условиями непроникания в работах [42, 44, 51] автора диссертационной работы были найдены производные функционала энергии относительно параметра возмущения длины трещины. При этом в [42] предполагалось, что трещина возмущается вдоль плоскости. В настоящем параграфе рассмотрен общий случай гладкого возмущения в срединной плоскости.

Результаты этого параграфа получены совместно с Е.М. Рудым и опубликованы в статье [167].

3.1.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, кривая Γ_0 находится строго внутри области Ω. Будем считать, что относительно Ω, Γ_0 выполнено следующее.

Предположение 3.1.1. *Пусть набор* $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) область Ω *может быть разбита на две подобласти* Ω_1 *и* Ω_2 *с границами* $\partial\Omega_1$ *и* $\partial\Omega_2$*, так, чтобы* $\Gamma_0 \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$*;*

(б) границы $\partial\Omega_1$ *и* $\partial\Omega_2$ *липшицевы;*

(в) кривая Γ_0 задается с помощью уравнения $\Sigma(x_1, x_2) = 0$, $\Sigma \in C^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, не имеет самопересечений, в каждой точке Γ_0 определен вектор нормали.

Обозначим через $\nu_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$ вектор единичной нормали к кривой Γ_0, т.е.

$$\nu_0 = \frac{\nabla\Sigma}{|\nabla\Sigma|}, \quad x \in \Gamma_0.$$

Толщину пластины для простоты примем равной $2h = 2$. Пусть $\Omega_0 = \Omega\backslash\overline{\Gamma}_0$ — область с разрезом. Выберем декартовы координаты $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы множество $\Omega_0 \times [-1, 1]$ соответствовало пластине с трещиной в исходном недеформированном состоянии. Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $U = (u_1, u_2)$ — горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)), а u — вертикальные перемещения. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$. Обобщенный вектор перемещений $\xi = (U, u, \phi)$. Для удобства будем также использовать обозначения ξ_i, $i = 1, 2..., 5$ для компонент вектора ξ, при этом $(\xi_1, \xi_2) = U$, $\xi_3 = u$, $(\xi_4, \xi_5) = \phi$.

Определим функциональное пространство, в котором будет исследоваться задача равновесия. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_0)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$.

Предполагаем, что пластина является трансверсально-изотропной. Тензоры, описывающие деформацию пластины $\varepsilon(\phi) = \{\varepsilon_{ij}(\phi)\}$, $\varepsilon(U) = \{\varepsilon_{ij}(U)\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big),\ i, j = 1, 2.$$

Тензоры моментов $m(\phi) = \{m_{ij}(\phi)\}$, и усилий $\sigma(U) = \{\sigma_{ij}(U)\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются по формулам:

$$m_{ij}(\phi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U).$$

Ненулевые коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{1111} = c_{2222} = D, \quad c_{1122} = c_{2211} = D\text{æ},$$

$$c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = \frac{D(1-\text{æ})}{2}, \quad \text{æ} = const,\ 0 < \text{æ} < \frac{1}{2},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона [86]. Поперечные силы в модели Тимошенко выражаются формулами

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \tag{3.1.1}$$

где $\Lambda = 2\kappa' Gh$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, k', G — постоянные, ; $v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Определим следующую билинейную форму:

$$B_0(\xi,\eta) = \int\limits_{\Omega_0} \Big\{ \sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(U) +$$

$$+ m_{ij}(\phi)\,\varepsilon_{ij}(\psi) + \Lambda(u_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \psi_i) \Big\} dx, \tag{3.1.2}$$

для произвольных функций $\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0)$, $\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0)$. Заметим, что для билинейной формы справедлива оценка

$$B_0(\xi,\xi) \geq c\|\xi\|^2_{H(\Omega_0)} \quad \forall\, \xi \in H(\Omega_0), \tag{3.1.3}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ (см. параграф 2.1).

Функционал потенциальной энергии пластины имеет вид:

$$\Pi(\Omega_0;\xi) = \frac{1}{2} B_0(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\,\xi dx, \qquad \xi = (U, u, \phi),$$

$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$ – вектор заданных внешних нагрузок [86].

Считаем, что на внешней границе выполнены следующие краевые условия:

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.1.4}$$

которые описывают защемление пластины по внешним краям. В соответствии с направлением ν_0 можно говорить о положительном Γ_0^+ и отрицательном берегах Γ_0^- кривой (разреза) Γ_0; при этом для функции $v \in H^{1,0}(\Omega_0)$ определены следы $v^+ = v|_{\Gamma_0^+}$, $v^- = v|_{\Gamma_0^-}$, а также скачок функции $[v] = v^+ - v^-$.

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины пластины имеет вид

$$[U]\nu_0 \geq |[\phi]\nu_0| \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{3.1.5}$$

Вывод и обоснование условия (3.1.5) можно найти в разделе 1.5.2. Введем множество допустимых функций

$$K_0(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu_0 \geq |[\phi]\nu_0| \text{ п.в. на } \Gamma_0\}.$$

Задачу о равновесии пластины сформулируем как задачу минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_0; \xi)$ на множестве допустимых функций $K_0(\Omega_0)$:

$$\inf_{\xi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \xi). \tag{3.1.6}$$

Известно, что задача (3.1.6) имеет единственное решение $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$, принадлежащее множеству $K_0(\Omega_0)$ и эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. параграф 2.1)

$$B_0(\xi_0, \eta - \xi_0) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_0) dx \quad \forall \eta \in K_0(\Omega_0). \tag{3.1.7}$$

Определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ рассмотрим функцию

$$\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x)) \quad \text{такую, что}$$

$$\Phi_{\varepsilon i}(x) \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = x.$$

При фиксированном $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ применим преобразование координат

$$y = \Phi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \tag{3.1.8}$$

по отношению к Ω, Γ_0. В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \backslash \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Отметим, что ввиду предположений относительно Φ_ε, преобразование (3.1.8) для малых ε является взаимно-однозначным, т.е. существует обратное преобразование $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1}(y) = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}(y), \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}(y))$ [121]. Далее, не нарушая общности, будем считать, что указанное свойство взаимной однозначности выполняется для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Кроме того, предположим, что имеют место включения $\Phi_{\varepsilon i}^{-1}(y) \in C^1([0,\varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2))$, $i = 1, 2$.

Предположение 3.1.2. *Для каждого фиксированного* $\varepsilon \in ([0, \varepsilon_0)$ *набор* $\{\Phi_\varepsilon(\Omega), \Phi_\varepsilon(\partial\Omega), \Gamma_\varepsilon\}$ *удовлетворяет условиям предположения 3.1.1.*

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Согласно взаимной однозначности преобразования (3.1.8), строгой положительности его якобиана (будет показано ниже) и предполагаемой гладкости Φ_ε, отображение (3.1.8) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, т.е. если $\xi(x) \in H(\Omega_0)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) \in H(\Omega_\varepsilon)$ и наоборот, если $\xi(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$. Пусть ν^ε — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу Γ_ε. Аналогично множеству $K_0(\Omega_0)$ введем множество допустимых функций для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_\varepsilon) \,|\, [U]\nu^\varepsilon \geq |[\phi]\nu^\varepsilon| \text{ п.в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Несмотря на то, что пространства $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ взаимно однозначно переходят друг в друга при отображении (3.1.8), множества $K_0(\Omega_0)$ и $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ не обладают в общем случае таким свойством. Это связано с тем, что, вообще говоря, единичная нормаль ν_0 к Γ_0 не переходит в единичную нормаль ν^ε к Γ_ε.

Сформулируем далее семейство задач зависящих от параметра $\varepsilon \in ([0, \varepsilon_0)$. Функционал энергии для возмущенной области определим выражением

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi) = \frac{1}{2} B_\varepsilon(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F\,\xi dy\,, \quad \xi = (U, u, \phi),$$

где билинейная форма задается соотношением

$$B_\varepsilon(\xi, \eta) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big\{\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi)\,\varepsilon_{ij}(\psi) + \Lambda(u_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \psi_i)\Big\} dy.$$

Так же как для исходной задачи (3.1.6), следующая задача о минимизации функционала энергии в возмущенной области

$$\inf_{\xi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \xi), \tag{3.1.9}$$

имеет решение $\xi^\varepsilon = (U^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$B_\varepsilon(\xi^\varepsilon, \eta - \xi^\varepsilon) \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F(\eta - \xi^\varepsilon) dy \quad \forall \eta \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon). \tag{3.1.10}$$

Основная цель настоящего параграфа – найти производную функционала энергии по параметру ε, описывающему возмущение области Ω_0, т.е. вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}, \tag{3.1.11}$$

где ξ_0, ξ^ε – решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно.

3.1.2 Вспомогательные утверждения и формулы

С целью найти предел (3.1.11) в интегралах по области Ω_ε функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)$ будем преобразовывать соответствующие интегралы с учетом имеющейся гладкости отображения (3.1.8). Чтобы получить подходящие представления для этих интегралов, понадобятся формулы, уточняющие зависимость функций $\Phi_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \in ([0, \varepsilon_0)$ и их производных от параметра ε.

Итак, обозначим через

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

транспонированную матрицу Якоби преобразования (3.1.8). В силу гладкости отображения, справедливы формулы:

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{2,\infty}(\mathcal{D})]^2} = o(\varepsilon), \tag{3.1.12}$$

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x} = \mathbb{I} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_2(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_2(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}(\mathcal{D})]^4} = o(\varepsilon), \tag{3.1.13}$$

где $\mathcal{D}$ — произвольная область в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{I}$ — единичная матрица,

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x))^t = \frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Из (3.1.12) следует, что якобиан $j_\varepsilon(x)$ преобразования (3.1.8) можно представить в виде

$$j_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{div} V + r_3(\varepsilon, x), \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{D})} = o(\varepsilon),$$

откуда следует, что для малых ε якобиан $j_\varepsilon(x)$ строго положительный. Положим $\mathbb{Y}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1}$, тогда

$$\mathbb{Y}_\varepsilon(x) = \mathbb{I} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_4(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_4(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}(\mathcal{D})]^4} = o(\varepsilon). \qquad (3.1.14)$$

Используя введенные выше обозначения, преобразование производных можно написать в матричном виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^t; \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t. \end{aligned} \qquad (3.1.15)$$

Здесь и далее (в настоящем параграфе) через "$\cdot$" будем обозначать произведение соответствующих матриц (в данном случае имеем умножение вектор-строки на матрицу), индекс t наверху обозначает операцию транспонирования.

При использовании преобразования (3.1.8) для функций $\xi(y) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ получим функции $\tilde{\xi}(x) = \xi(\Phi_\varepsilon(x))$, для которых справедливо неравенство

$$[\tilde{U}]\nu_\varepsilon \geq |[\tilde{\phi}]\nu_\varepsilon|, \quad x \in \Gamma_0, \quad \text{где} \quad \nu_\varepsilon(x) = \nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)).$$

Таким образом, ввиду взаимной однозначности пространств $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, при отображении (3.1.8), множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ перейдет взаимно-однозначно в множество

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \,|\, [U]\nu_\varepsilon \geq |[\phi]\nu_\varepsilon| \text{ п.в. на } \Gamma_0\}.$$

Поскольку для нормали ν^ε имеем соотношения

$$\nu^\varepsilon = (\frac{\partial\hat{\Sigma}}{\partial y_1}, \frac{\partial\hat{\Sigma}}{\partial y_2})\Big/|(\frac{\partial\hat{\Sigma}}{\partial y_1}, \frac{\partial\hat{\Sigma}}{\partial y_2})|, \quad \hat{\Sigma}(y) = \Sigma(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_\varepsilon,$$

с учетом формул (3.1.15) для нормали ν_ε выпишем

$$\nu_\varepsilon = (\frac{\partial\Sigma}{\partial x_1}, \frac{\partial\Sigma}{\partial x_2}) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t\Big/|(\frac{\partial\Sigma}{\partial x_1}, \frac{\partial\Sigma}{\partial x_2}) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t| = \nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t/|\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t| \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \quad (3.1.16)$$

Заметим, что якобиан отображения (3.1.8) отличен от нуля и, следовательно, $|\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t| \neq 0$. В итоге получим, что множество $K_\varepsilon(\Omega_0)$ можно записать в следующем эквивалентном виде

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \,|\, [U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) \geq |[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)| \text{ п.в. на } \Gamma_0\}.$$

Преобразуем неравенство

$$[U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) \geq |[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)| \text{ п.в. на } \Gamma_0, \qquad (3.1.17)$$

входящее в определении множества $K_\varepsilon(\Omega_0)$, с учетом формул:

$$[U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) = [U] \cdot (\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)^t = [U] \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon \cdot \nu_0^t,$$

$$[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) = [\phi] \cdot (\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)^t = [\phi] \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon \cdot \nu_0^t$$

и разложения (3.1.14). В итоге выведем

$$[U] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[U] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon}\right) \cdot \nu_0^t \geq$$

$$\geq \left|[\phi] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[\phi] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon}\right) \cdot \nu_0^t\right| \quad \text{п.в. на } \Gamma_0. \quad (3.1.18)$$

Осуществим замену переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах неравенства (3.1.10). В результате получим

$$3\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U_\varepsilon) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; W - U_\varepsilon) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; \phi_\varepsilon) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; \psi - \phi_\varepsilon) dx +$$

$$+ \Lambda \int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \phi_{i\,\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial(w - u_\varepsilon)}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + (\psi_i - \phi_{i\,\varepsilon})\right) dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon(\eta - \xi_\varepsilon) dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_\varepsilon(\Omega_0), \qquad (3.1.19)$$

где $\xi_\varepsilon(x) = \xi^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$, $F_\varepsilon(x) = F(\Phi_\varepsilon(x))$, $x \in \Omega_0$, $E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U)$ — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(\mathbb{M}; U) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathbb{M}_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathbb{M}_{ik}\big), \quad \mathbb{M} = (\mathbb{M}_{ij})_{i=1,j=1}^{2,2} \text{ — матрица.}$$

Замечание 3.1.1. *В силу взаимной однозначности отображения множеств $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_\varepsilon(\Omega_0)$ функция ξ_ε является решением вариационного неравенства* (3.1.19).

Благодаря (3.1.12), (3.1.13), можно получить следующие представления для интегралов, входящих в неравенство (3.1.19):

$$3\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; W) dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) + \varepsilon A_1(V; U; W))\, dx + o(\varepsilon) R_1(U, W), \qquad (3.1.20)$$

$$\Lambda\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \phi_i\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \psi_i\right) dx = \Lambda\int\limits_{\Omega_0}\Big((\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i) +$$
$$+ \varepsilon A_2(V; \xi; \eta)\Big) dx + o(\varepsilon) R_2(\xi; \eta), \qquad (3.1.21)$$

$$\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon \xi dx = \int\limits_{\Omega_0} (F\xi + \varepsilon \mathrm{div}(V f_i)\xi_i)\, dx + o(\varepsilon) R_3(\xi), \qquad (3.1.22)$$

где

$$A_1(V; U; W) = \mathrm{div} V \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) -$$
$$- \sigma_{ij}(U) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; W\right) - \sigma_{ij}(W) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right), \qquad (3.1.23)$$

$$A_2(V; \xi; \eta) = \mathrm{div} V(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i) - (\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)\Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i} +$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\Big) - (\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\right), \qquad (3.1.24)$$

а R_1, R_2, R_3 — некоторые ограниченные полилинейные формы, $\xi, \eta \in H(\Omega_0)$:

$$|R_1(U, W)| \le r(\varepsilon)\|\xi\|\|\eta\|, \quad |R_2(\xi, \eta)| \le r(\varepsilon)\|\xi\|\|\eta\|,$$

$$|R_3(\xi)| \le r(\varepsilon)\|\xi\|, \quad 0 \le r(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Заметим, что при разложении второго интеграла из (3.1.19) можно использовать выражение вида (3.1.20). Полученные разложения по ε применим при преобразовании функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi)$, связанной с заменой переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах по области Ω_ε. В результате получим новый функционал энергии

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi) = \frac{1}{2}B_0(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\,\xi dx + \frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_{\Omega_0}\big(A_1(V,U,U) + \Lambda A_2(V,\xi,\xi) + \\ + 3^{-1}A_1(V,\phi,\phi)\big)dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(Vf_i)\xi_i dx + o(\varepsilon)R_4(\xi), \qquad (3.1.25)$$

где через $R_4(\xi)$ обозначена равномерно ограниченная по ε функция.

Из неравенства, полученного подстановкой в (3.1.19) тестовой функций $\eta = 2\xi_\varepsilon$, с помощью разложений (3.1.20)–(3.1.22) и неравенства (3.1.3) получим равномерную оценку

$$\|\xi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \le c. \qquad (3.1.26)$$

Приведем в качестве леммы следующее утверждение, устанавливающее связь между множествами $K_\varepsilon(\Omega_0)$ и $K_0(\Omega_0)$.

Лемма 3.1.1. *Пусть $\xi_0 \in K_0(\Omega_0)$ — решение невозмущенной задачи* (3.1.6), $\xi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ *— решение задачи* (3.1.19). *Тогда для достаточно малых ε существуют функции λ_ε^1 и λ_ε^2 такие, что*

$$\xi_\varepsilon^1 = \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \xi_\varepsilon^2 = \xi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0). \qquad (3.1.27)$$

При этом справедливы следующие оценки

$$\|\lambda_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \le c, \quad i = 1,2, \qquad (3.1.28)$$

где c не зависит от ε.

Доказательство. Применим рассуждения, аналогичные использованным ранее в [96]. Рассмотрим матричное уравнение

$$U \cdot B = b_1, \qquad (3.1.29)$$

$$B = \mathbb{I} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right), \quad b_1 = U_0 \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right),$$

где $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$ решение задачи (3.1.6). Элементы матрицы B принадлежат пространству $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, а вектор b_1 – пространству $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Кроме того, для всех достаточно малых ε определитель $|B|$ матрицы B отличен от нуля в Ω_0. Следовательно, уравнение (3.1.29) имеет единственное решение для почти всех $x \in \Omega_0$. Пусть W^1_ε является решением данного уравнения. Покажем, что $W^1_\varepsilon \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Действительно, элементы матрицы B принадлежат $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, поэтому они принадлежат пространству $C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ [131]. Отсюда следует, что $|B| \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Из того, что $|B|(x)$ не обращается в нуль при всех $x \in \Omega_0$, заключаем, что $1/|B| \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, поэтому $1/|B| \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ [131]. Следовательно элементы обратной матрицы B^{-1} принадлежат пространству $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Вектор-функция b_1 из пространства $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$, поэтому решение W^1_ε системы (3.1.29) тоже будет из $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$.

Наряду с (3.1.29) рассмотрим уравнение

$$U \cdot B = b_2, \tag{3.1.30}$$

$$b_2 = \phi_0 \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right).$$

Справедливо включение $b_2 \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. С помощью выкладок, аналогичным проведенным выше для (3.1.29), нетрудно вывести что (3.1.30) имеет единственное решение $\psi^1_\varepsilon \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$.

Положим $\lambda^1_\varepsilon = (W^1_\varepsilon, 0, \psi^1_\varepsilon)$. Проверим выполнение для $\xi^1_\varepsilon = \xi_0 + \varepsilon\lambda^1_\varepsilon$ неравенства (3.1.18). Принимая во внимание то, что W^1_ε, ψ^1_ε являются решениями соответствующих матричных уравнений (3.1.29) и (3.1.30), а также то, что ξ_0 принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$, будем иметь следующую цепочку равенств и неравенств

$$[U^1_\varepsilon] \cdot \nu^t_0 - \varepsilon[U^1_\varepsilon] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right) \cdot \nu^t_0 = [U_0] \cdot \nu^t_0 +$$

$$+\varepsilon[W^1_\varepsilon] \cdot \nu^t_0 - \varepsilon[U_0] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right) \cdot \nu^t_0 - \varepsilon^2[W^1_\varepsilon] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right) \cdot \nu^t_0 =$$

$$= [U_0]\cdot\nu_0^t + \varepsilon[W_\varepsilon^1]\cdot\left(\mathbb{I}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\nu_0^t -$$

$$-\varepsilon[U_0]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nu_0^t = [U_0]\nu_0 \ge |[\phi_0]\nu_0| =$$

$$= \left|[\phi_0]\cdot\nu_0^t + \varepsilon[\psi_\varepsilon^1]\cdot\left(\mathbb{I}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\nu_0^t -\right.$$

$$\left.-\varepsilon[\phi_0]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nu_0^t\right| =$$

$$= \left|[\phi_\varepsilon^1]\cdot\nu_0^t - \varepsilon[\phi_\varepsilon^1]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nu_0^t\right| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0.$$

Отсюда, в соответствии с (3.1.18) следует, что $\xi_\varepsilon^1 = \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ для всех достаточно малых ε.

Построим теперь функции λ_ε^2. Пусть $\lambda_\varepsilon^2 = (W_\varepsilon^2, 0, \psi_\varepsilon^2)$.

$$W_\varepsilon^2 = U_\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right), \quad \psi_\varepsilon^2 = \phi_\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right). \tag{3.1.31}$$

Построенная функция λ_ε^2 очевидно принадлежит $H(\Omega_0)$. Покажем, что $\xi_\varepsilon^2 = (U_\varepsilon^2, u_\varepsilon^2, \phi_\varepsilon^2) = \xi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2$ удовлетворяет неравенству

$$[U_\varepsilon^2]\nu_0 \ge |[\phi_\varepsilon^2]\nu_0| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0.$$

В самом деле,

$$[U_\varepsilon^2]\nu_0 = [U_\varepsilon]\cdot\nu_0^t - \varepsilon[W_\varepsilon^2]\cdot\nu_0^t = [U_\varepsilon]\cdot\nu_0^t - \varepsilon[U_\varepsilon]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nu_0^t \ge$$

$$\ge \left|[\phi_\varepsilon]\cdot\nu_0^t - \varepsilon[\psi_\varepsilon]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{r_4(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nu_0^t\right| = \left|[\phi_\varepsilon^2]\nu_0\right| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0.$$

Оценки (3.1.28) для λ_ε^1 справедливы в силу свойств матрицы B и вектора b_1, а для λ_ε^2 следуют из (3.1.26). Лемма доказана.

Теорема 3.1.1. *Пусть* ξ_ε *— решение задачи* (3.1.19), ξ_0 *— решение задачи* (3.1.6). *Тогда*

$$\|\xi_0 - \xi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \le c\sqrt{\varepsilon}, \tag{3.1.32}$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* ε.

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в справедливости (3.1.32), достаточно оценить с помощью (3.1.3), (3.1.26) и разложений (3.1.20)–(3.1.22) сумму двух неравенств, полученных подстановкой в вариационные неравенства пробных функций специального вида (3.1.27). При этом в вариационное неравенство (3.1.7) подставляем ξ_ε^1, а в (3.1.19) — функцию ξ_ε^2. Теорема доказана.

Лемма 3.1.2. *При $\varepsilon \to 0$ справедливы следующие сходимости*

$$\lambda_\varepsilon^1 \to \lambda_0, \quad \lambda_\varepsilon^2 \to \lambda_0 \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0),$$

где $\lambda_0 = (U_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, 0, \phi_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x})$.

Доказательство. В соответствии с построением функции W_ε^1, имеем

$$W_\varepsilon^1 = B^{-1} \cdot b_1,$$

где

$$B = \mathbb{I} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right), \quad b_1 = U_0 \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \right).$$

С учетом свойств функции $r_4(\varepsilon, x)$ (см. формулу (3.1.22)) очевидно, что при $\varepsilon \to 0$ имеем $W_\varepsilon^1 \to U_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ сильно в $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Аналогичные рассуждения можно провести и для ψ_ε^1. Таким образом, $\lambda_\varepsilon^1 = (W_\varepsilon^1, 0, \psi_\varepsilon^1) \to (U_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, 0, \phi_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}) = \lambda_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для сходимости $\lambda_\varepsilon^2 \to \lambda_0$ достаточно вспомнить соответствующие формулы (3.1.31) и сильную сходимость $\xi_\varepsilon \to \xi_0$ при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана.

3.1.3 Вывод формулы для производной функционала энергии

Для того, чтобы вычислить производную функционала энергии по параметру возмущения области ε необходимо найти предел (3.1.11). Итак, в силу леммы 3.1.1 имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} \leq$$
$$\leq \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}. \qquad (3.1.33)$$

Найдем предел, стоящий в правой части (3.1.33). Принимая во внимание утверждения теоремы 3.1.1, леммы 3.1.2, ограниченность R_4 в формуле (3.1.25), получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} =$$
$$= B_0(\xi_0,\lambda_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \Big(A_1(V,U_0,U_0) + \Lambda A_2(V,\xi_0,\xi_0) +$$
$$+ 3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\Big)dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx - \int\limits_{\Omega_0} F\lambda_0 dx.$$

Согласно лемме 3.1.1 справедливо соотношение

$$\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} \geq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon},$$

и поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} \geq$$
$$\geq \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (3.1.34)$$

Используя при нахождении предела в правой части (3.1.34) теорему 3.1.1, лемму 3.1.2, с помощью (3.1.25), выведем

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon} =$$
$$= B_0(\xi_0,\lambda_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \Big(A_1(V,U_0,U_0) + \Lambda A_2(V,\xi_0,\xi_0) +$$
$$+ 3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\Big)dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx - \int\limits_{\Omega_0} F\lambda_0 dx.$$

Получили, что верхний и нижний пределы справа при $\varepsilon \to 0$ выражения

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}$$

оцениваются сверху и снизу соответственно одной и той же константой. Подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1.2. *Производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)$ по параметру ε возмущения области Ω_0 существует и задается формулой*

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(A_1(V,U_0,U_0)+\Lambda A_2(V,\xi_0,\xi_0)+3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\big)dx-$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}div(Vf_i)\xi_{0i}dx+B_0(\xi_0,\lambda_0)-\int\limits_{\Omega_0}F\lambda_0dx, \qquad (3.1.35)$$

где $\xi_0=(U_0,u_0,\phi_0)$ — решение задачи (3.1.6), $\lambda_0=(U_0\cdot\frac{\partial V}{\partial x},0,\phi_0\cdot\frac{\partial V}{\partial x})$ *и* A_1, A_2 *определяются формулами* (3.1.23), (3.1.24).

Замечание 3.1.2. *Можно показать, что в частном случае, когда возмущение имеет вид $y=x+\varepsilon(\theta(x),0)$, $\theta(x)\in C_0^{1,1}(\Omega)$, а трещина задается прямолинейным отрезком $\Gamma_0=\{(x_1,x_2)|\,0\le x_1\le l, x_2=0\}$, $l>0$ (см. [42]), сумма последних двух слагаемых в* (3.1.35) *равна нулю. В этом случае выражение* (3.1.35) *обращается в формулу для производной по длине трещины, полученной ранее в [42].*

3.2 Инвариантные интегралы в задаче о равновесии пластины Тимошенко с условиями типа Синьорини на трещине

В параграфе рассматривается модель, описывающая равновесие упругой однородной трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину. На кривой, соответствующей трещине, налагается условие в виде неравенства, описывающее взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Для семейства вариационных задач о равновесии пластин, зависящих от параметра ε, проводится анализ зависимости функционала энергии от вариации геометрии пластины в срединной плоскости. Изменение геометрии пластины задается с помощью семейства гладких отображений, зависящих от ε. При этом значение параметра $\varepsilon=0$ соответствует исходной невозмущенной области. С помощью выбора подходящих отображений и геометрических характеристик пластины с трещиной установлена возможность представления производной функционала энергии (при $\varepsilon = 0$) в виде инвариантного интеграла.

Инвариантные интегралы широко используются при исследовании сингулярностей различных физических полей [6, 82, 123, 124]. Общий подход к получению инвариантных интегралов в задачах теории упругости разрабатывался в [162]. В изучении моделей пластин, учитывающих поперечный сдвиг, инвариантные интегралы использовались, например, в [178, 183]. Отметим, что в этих работах на трещине задавались линейные условия вида равенств. В [183] получены соотношения, связывающие коэффициенты интенсивности напряжений и значения инвариантных интегралов.

3.2.1 Задача равновесия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, кривая Γ_0 содержится в области Ω. Полагаем, что Γ_0 не содержит своих концевых точек $\partial\Gamma_0$. Будем считать, что относительно Ω, $\partial\Omega$ и Γ_0 выполнено следующее.

Предположение 3.2.1. *Пусть набор* $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) кривая Γ_0 *может быть продолжена до кривой* Γ*, разбивающей область* Ω *на две подобласти* Ω_1 *и* Ω_2 *с границами* $\partial\Omega_1$ *и* $\partial\Omega_2$*, так, чтобы* $\bar{\Gamma} = \partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ *и* $meas(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$*;*

(б) границы $\partial\Omega_1$ *и* $\partial\Omega_2$ *липшицевы;*

(в) кривая Γ *не имеет самопересечений;*

(г) множество $\Omega_0 = \Omega\backslash\bar{\Gamma}_0$ *является связным* ($\bar{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$)*.*

Условие *(г)*, в частности, означает, что кривая Γ_0 не может выходить на внешнюю границу $\partial\Omega$ обеими концевыми точками. В силу условия *(а)*, п. в. на Γ_0 можно определить вектор единичной нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. В соответствии с направлением ν можно говорить о положительном Γ_0^+ и отрицательном берегах Γ_0^- кривой Γ_0.

Предположим, что трансверсально-изотропная однородная пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ представляло собой проекцию пластины со сквозной трещиной на срединную плоскость $z = 0$. При этом кривая Γ_0 соответствует трещине в пластине. Это означает, что сквозная трещина моделируется цилиндрической поверхностью: $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_0, -1 \le z \le 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $U = (u_1, u_2)$ — горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)), а u — вертикальные перемещения. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$. Обобщенный вектор перемещений $\xi = (U, u, \phi)$. Будем считать, в соответствии положениями классической теории упругости, что величины χ, ϕ являются бесконечно малыми. Для удобства будем также использовать обозначения ξ_i, $i = 1, 2, ..., 5$ для компонент вектора ξ, при этом $(\xi_1, \xi_2) = U$, $\xi_3 = u$, $(\xi_4, \xi_5) = \phi$.

Определим функциональное пространство, в котором будет исследоваться задача равновесия. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_0)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$.

Тензоры, описывающие деформацию пластины $\varepsilon(\phi) = \{\varepsilon_{ij}(\phi)\}$, $\varepsilon(U) = \{\varepsilon_{ij}(U)\}$ выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big),\ i, j = 1, 2.$$

Тензоры моментов $m(\phi) = \{m_{ij}(\phi)\}$, и усилий $\sigma(U) = \{\sigma_{ij}(U)\},\ i, j = 1, 2$, записываются по формулам:

$$m_{ij}(\phi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U). \tag{3.2.1}$$

Ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{iiii} = D,\ c_{iijj} = D\text{æ},\ c_{ijij} = c_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2,\ i, j = 1, 2,\ i \ne j,$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона [86], $0 < æ < 1/2$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Для вектора поперечных сил $q = (q_1, q_2)$ выполняются следующие равенства [86]:

$$q_i(u, \phi) = \Lambda(u,_i + \phi_i), \quad i = 1, 2, \quad (u,_i = \frac{\partial u}{\partial x_i})$$

где $\Lambda = 2\kappa' G$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

С учетом записанных выше выражений, определим следующую билинейную форму:

$$B_0(\xi, \eta) = \int\limits_{\Omega_0} b(\xi, \eta) dx,$$

$$b(\xi, \eta) = \big\{\sigma_{ij}(W)\, \varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi)\, \varepsilon_{ij}(\psi) + q_i(u, \phi)(w,_i + \psi_i)\big\},$$

для произвольных функций $\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0)$, $\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0)$. Заметим, что предположение 3.2.1 обеспечивает выполнение неравенства Корна и обобщенного неравенства Пуанкаре во всей области Ω_0. С помощью указанных неравенств можно вывести оценку

$$B_0(\xi, \xi) \geq c\|\xi\|^2 \quad \forall\, \xi \in H(\Omega_0), \tag{3.2.2}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ (см. параграф 2.1).

Функционал потенциальной энергии пластины, занимающей область Ω_0 имеет вид:

$$\Pi(\Omega_0; \xi) = \frac{1}{2} B_0(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\, \xi dx, \qquad \xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0),$$

вектор $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [86].

Считаем, что на внешней границе выполнены следующие краевые условия:

$$u = 0, \quad \phi = U = (0, 0) \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

которые описывают защемление пластины по внешним краям. Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины пластины имеет вид

$$[U]\nu \geq |[\phi]\nu| \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{3.2.3}$$

где квадратные скобки $[\cdot]$ означают скачок функции: $[v] = v|_{\Gamma_0^+} - v|_{\Gamma_0^-}$. Введем множество допустимых функций

$$K_0(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu \geq |[\phi]\nu| \text{ п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с условием непроникания берегов трещины сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\xi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \xi). \tag{3.2.4}$$

Известно, что задача (3.2.4) имеет единственное решение $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0(\Omega_0)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству (см. параграф 2.1)

$$B_0(\xi_0, \eta - \xi_0) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_0) dx \quad \forall \eta \in K_0(\Omega_0). \tag{3.2.5}$$

Более того, задачи (3.2.4) и (3.2.5) эквивалентны. Сравнивая два неравенства, полученные после подстановки в (3.2.5) тестовых функций вида $\eta = \xi_0 + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi_0 - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega_0)^5$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_0} \Big(\sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + m_{ij}(\phi_0)\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i(u_0, \phi_0)(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i) \Big) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} (f_i \tilde{w}_i + f_3 \tilde{w} + f_{3+i} \tilde{\psi}_i) dx \quad \forall \tilde{\eta} \in C_0^\infty(\Omega_0)^5.$$

Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, выводим уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(U_0) = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_0, \tag{3.2.6}$$

$$m_{ij,j}(\phi_0) - q_i(u_0, \phi_0) = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_0, \tag{3.2.7}$$

$$q_{i,i}(u_0, \phi_0) = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_0. \tag{3.2.8}$$

Определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение

$$\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x)), \quad \text{такое что}$$

$$\Phi_{\varepsilon i}(x) \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = x.$$

При фиксированном $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ применим преобразование координат

$$y = \Phi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \tag{3.2.9}$$

по отношению к Ω, $\partial\Omega$, Γ_0. В результате (при $\varepsilon \neq 0$) получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ с границей $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega)\backslash\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Отметим, что ввиду предположений относительно Φ_ε, для малых ε существует обратное преобразование $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1}(y) = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}(y), \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}(y))$, $\Phi_{\varepsilon i}^{-1}(y) \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2))$, $i = 1, 2$ [121]. Кроме того, при малых ε преобразование (3.2.9) и обратное к нему устанавливают взаимно однозначное соответствие между Ω и $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ [121]. Далее не нарушая общности, будем считать, что указанные свойства взаимной однозначности и гладкости отображения Φ_ε^{-1} выполняются для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Предположение 3.2.2. *Для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ набор $\{\Phi_\varepsilon(\Omega), \Phi_\varepsilon(\partial\Omega), \Gamma_\varepsilon\}$ удовлетворяет условиям предположения 3.2.1.*

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Согласно взаимной однозначности преобразования (3.2.9), строгой положительности его якобиана (будет показано ниже) и предполагаемой гладкости Φ_ε, отображение (3.2.9) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, т. е. если $\xi(x) \in H(\Omega_0)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) \in H(\Omega_\varepsilon)$ и наоборот, если $\xi(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$. Пусть ν^ε — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу Γ_ε. Определим множество допустимых функций для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_\varepsilon) \,|\, [U]\nu^\varepsilon \geq |[\phi]\nu^\varepsilon| \text{ п. в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Несмотря на то, что пространства $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ взаимно однозначно переходят друг в друга при отображении (3.2.9), множества $K_0(\Omega_0)$ и $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ не обладают в общем случае таким свойством. Это связано с тем, что, вообще говоря, единичная нормаль ν к Γ_0 не переходит в единичную нормаль ν^ε к Γ_ε. Далее будем считать, что преобразование Φ_ε и геометрия Γ_0 и Γ_ε таковы, что при всех допустимых ε выполнено

$$\nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)) = \nu(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{3.2.10}$$

Соотношение (3.2.10) будет выполнено, например, при $\nu^\varepsilon = \nu = \text{const}$ с произвольным преобразованием Φ_ε или в том случае, когда нормали ν^ε, ν зависят только от x_1 (x_2) и $\nu^\varepsilon = \nu$ с отображениями, удовлетворяющими равенству $\Phi_{\varepsilon 1} = x_1$ ($\Phi_{\varepsilon 2} = x_2$) [25]. Выполнение условия (3.2.10) приводит к тому, что множество $K_0(\Omega_0)$, при отображении (3.2.9), переходит взаимно однозначно в множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$.

Сформулируем далее семейство задач, зависящих от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Функционал энергии для возмущенной области определим выражением

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi) = \frac{1}{2} B_\varepsilon(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F\,\xi dy, \quad \xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_\varepsilon),$$

где билинейная форма задается соотношением $B_\varepsilon(\xi, \eta) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(\xi, \eta) dy$.

Так же как для исходной задачи (3.2.4), следующая задача о минимизации функционала энергии в возмущенной области

$$\inf_{\xi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \xi)$$

имеет решение $\xi^\varepsilon = (U^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$B_\varepsilon(\xi^\varepsilon, \eta - \xi^\varepsilon) \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F(\eta - \xi^\varepsilon) dy \quad \forall \eta \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon). \tag{3.2.11}$$

Выведем далее производную функционала энергии по параметру ε, описывающему возмущение области Ω_0, т.е. вычислим предел

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}, \tag{3.2.12}$$

где ξ_0, ξ^ε — решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно.

3.2.2 Вспомогательные утверждения и формулы

С целью найти предел (3.2.12), в последующих выкладках осуществим замену переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах вариационного неравенства (3.2.11) и функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)$. Затем полученные выражения преобразуем с учетом гладкости отображения (3.2.9). При этом понадобятся формулы, уточняющие зависимость функции $\Phi_\varepsilon(x)$ и ее производных от параметра ε.

Итак, обозначим через

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_{\varepsilon 1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_{\varepsilon 2}}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial \Phi_{\varepsilon 1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_{\varepsilon 2}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

транспонированную матрицу Якоби преобразования (3.2.9). В силу заданной гладкости функции $\Phi_\varepsilon(x)$ для любой ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, справедливы формулы:

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}(\mathcal{D})]^2} = o(\varepsilon), \qquad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x} = \mathbb{I} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_2(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_2(\varepsilon, x)\|_{[L^\infty(\mathcal{D})]^4} = o(\varepsilon), \qquad (3.2.14)$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица,

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x)) = \frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Из (3.2.13) следует, что якобиан $j_\varepsilon(x)$ преобразования (3.2.9) можно представить в виде

$$j_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon \operatorname{div}(V) + r_3(\varepsilon, x), \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{L^\infty(\mathcal{D})} = o(\varepsilon),$$

откуда следует, что для малых ε якобиан $j_\varepsilon(x)$ строго положительный. Положим $\mathbb{Y}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1}$, тогда

$$\mathbb{Y}_\varepsilon(x) = \mathbb{I} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_4(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_4(\varepsilon, x)\|_{[L^\infty(\mathcal{D})]^4} = o(\varepsilon). \qquad (3.2.15)$$

Используя введенные выше обозначения, формулы преобразования производных можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\Big(\frac{\partial \Phi_{\varepsilon i}}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \frac{\partial}{\partial y_k}=\mathbb{Y}_{\varepsilon ki}\frac{\partial}{\partial x_i},\tag{3.2.16}$$

где $\mathbb{Y}_{\varepsilon ki}$ — элементы матрицы $\mathbb{Y}_{\varepsilon}$. Осуществим замену переменных $y=\Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах неравенства (3.2.11). В результате получим

$$3\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon;U_\varepsilon)E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon;W-U_\varepsilon)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon;\phi_\varepsilon)E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon;\psi-\phi_\varepsilon)dx+$$

$$+\Lambda\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij}+\phi_{\varepsilon\, i}\right)\left(\frac{\partial(w-u_\varepsilon)}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij}+(\psi_i-\phi_{\varepsilon\, i})\right)dx\geq$$

$$\geq\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon(\eta-\xi_\varepsilon)dx\quad\forall\eta=(W,w,\psi)\in K_0(\Omega_0),\tag{3.2.17}$$

где $\xi_\varepsilon(x)=\xi^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$, $F_\varepsilon(x)=F(\Phi_\varepsilon(x))$, $x\in\Omega_0$, $E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon;U)$ — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(\mathbb{M};U)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathbb{M}_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathbb{M}_{ik}\Big),\quad \mathbb{M}=(\mathbb{M}_{ij})_{i=1,j=1}^{2,2}\ -\ \text{матрица.}$$

Замечание 3.2.1. *В силу взаимной однозначности отображения множеств $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_0(\Omega_0)$ функция ξ_ε является решением вариационного неравенства* (3.2.17).

Благодаря соотношениям (3.2.13)–(3.2.16), можно получить следующие представления для интегралов, входящих в неравенство (3.2.17):

$$3\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon;U)E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon;W)dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}\left\{\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)+\varepsilon A_1(V,U,W)\right\}dx+R_1(U,W),\tag{3.2.18}$$

$$\Lambda\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij}+\phi_i\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\mathbb{Y}_{\varepsilon ij}+\psi_i\right)dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}\Big\{q_i(u,\phi)(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i)+\varepsilon A_2(V,\xi,\eta)\Big\}dx+R_2(\xi,\eta), \tag{3.2.19}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon \xi dx=\int\limits_{\Omega_0}\left\{F\xi+\varepsilon\mathrm{div}(Vf_i)\xi_i\right\}dx+R_3(\xi), \tag{3.2.20}$$

где

$$A_1(V,U,W)=\mathrm{div}(V)\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W)-$$
$$-\sigma_{ij}(U)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x};W\right)-\sigma_{ij}(W)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x};U\right), \tag{3.2.21}$$

$$A_2(V,\xi,\eta)=\mathrm{div}(V)q_i(u,\phi)(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i)-q_i(u,\phi)\Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\Big)-q_i(w,\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\right). \tag{3.2.22}$$

Для остаточных членов в (3.2.18)–(3.2.20) справедливы оценки

$$|R_1(U,W)|\le r(\varepsilon)\|\xi\|\|\eta\|,\quad |R_2(\xi,\eta)|\le r(\varepsilon)\|\xi\|\|\eta\|,$$

$$|R_3(\xi)|\le r(\varepsilon)\|\xi\|,\quad 0\le r(\varepsilon)=o(\varepsilon).$$

Заметим, что при разложении второго интеграла из левой части (3.2.17), можно использовать выражение вида (3.2.18). Легко видеть, что если $\xi=(U,u,\phi)\in H(\Omega_0)$, $\eta=(W,w,\psi)\in H(\Omega_0)$, то функции $A_1(V,U,W)$, $A_1(V,\phi,\psi)$, $A_2(V,\xi,\eta)$ интегрируемы по области Ω_0, более того, справедливы оценки

$$\|A_1(V,U,W)\|_{L^1(\Omega_0)}\le C\|\xi\|\|\eta\|,\quad \|A_1(V,\phi,\psi)\|_{L^1(\Omega_0)}\le C\|\xi\|\|\eta\|,$$

$$\|A_2(V,\xi,\eta)\|_{L^1(\Omega_0)}\le C\|\xi\|\|\eta\|, \tag{3.2.23}$$

с некоторой постоянной $C>0$ не зависящей от ξ, η, ε.

Осуществим преобразования в интегралах неравенства (3.2.17) с помощью формул (3.2.18)–(3.2.20). Потом, в полученном соотношении, применим оценки (3.2.23), а также оценки для остаточных членов R_i, $i = 1,2,3$. В результате получим следующее неравенство

$$B_0(\xi_\varepsilon, \eta - \xi_\varepsilon) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_\varepsilon)dx -$$

$$- |\varepsilon| C(\|\eta\| + \|\xi_\varepsilon\|)(\|\xi_\varepsilon\| + 1) \quad \forall \eta \in K_0(\Omega_0), \qquad (3.2.24)$$

с некоторой не зависящей от ε постоянной $C > 0$.

Проведем замену переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi)$. А затем применим разложения по ε (3.2.18)–(3.2.20). В результате получим новый функционал энергии $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi)$, определенный в пространстве $H(\Omega_0)$:

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi) = \frac{1}{2} B_0(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\,\xi dx + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_0} \big\{ A_1(V, U, U) +$$

$$+ A_2(V, \xi, \xi) + 3^{-1} A_1(V, \phi, \phi) \big\} dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) \xi_i dx + R_4(\xi), \qquad (3.2.25)$$

$$|R_4(\xi)| \leq r(\varepsilon)(\|\xi\|^2 + \|\xi\|), \quad 0 \leq r(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Из неравенства, полученного подстановкой в (3.2.24) тестовой функций $\eta = \frac{1}{2}\xi_\varepsilon$, с помощью (3.2.2) получим равномерную оценку

$$\|\xi_\varepsilon\| \leq c. \qquad (3.2.26)$$

Теорема 3.2.1. *Пусть* ξ_ε *— решение задачи* (3.2.17), ξ_0 *— решение задачи* (3.2.4). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\xi_0 - \xi_\varepsilon\| \leq c\sqrt{\varepsilon}, \qquad (3.2.27)$$

где константа c *не зависит от* ε.

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в справедливости (3.2.27), достаточно сложить два неравенства, полученные подстановкой пробных функций в вариационные неравенства и применить оценки (3.2.2), (3.2.26). При этом в вариационное неравенство (3.2.5) подставляем ξ_ε, а в (3.2.24) — функцию ξ_0. Теорема доказана.

Из теоремы 3.2.1 и оценки (3.2.26) вытекает очевидное следствие.

Следствие 3.2.1. *При* $\varepsilon \to 0$ *функции* $\xi_\varepsilon = (U_\varepsilon, u_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ *сходятся к функции* $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$ *сильно в* $H(\Omega_0)$. *Справедливы также следующие сходимости:*

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U_\varepsilon\right) \to E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U_0\right) \quad \textit{сильно в} \quad L_2(\Omega_0), \quad i,j = 1,2,$$

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; \phi_\varepsilon\right) \to E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; \phi_0\right) \quad \textit{сильно в} \quad L_2(\Omega_0), \quad i,j = 1,2,$$

$$A_1(V, U_\varepsilon, U_\varepsilon) \to A_1(V, U_0, U_0) \quad \textit{сильно в} \quad L_1(\Omega_0),$$

$$A_1(V, \phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \to A_1(V, \phi_0, \phi_0) \quad \textit{сильно в} \quad L_1(\Omega_0),$$

$$A_2(V, \xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \to A_1(V, \xi_0, \xi_0) \quad \textit{сильно в} \quad L_1(\Omega_0).$$

3.2.3 Вывод формулы для производной функционала энергии

Для того чтобы вычислить производную функционала энергии по параметру возмущения ε, необходимо найти предел (3.2.12). Итак, в силу замечания 3.2.1 имеем

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) = \inf_{\xi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \xi) = \inf_{\xi \in K_0(\Omega_0)} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi) = \Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_\varepsilon).$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} \leq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_0) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_0) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}. \qquad (3.2.28)$$

Найдем предел, стоящий в правой части (3.2.28). Принимая во внимание ограниченность R_4 в формуле (3.2.25), получаем

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_0) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \xi_0) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left\{ A_1(V, U_0, U_0) + A_2(V, \xi_0, \xi_0) + 3^{-1} A_1(V, \phi_0, \phi_0) \right\} dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) \xi_{0i} dx.$$

Поскольку ξ_0 доставляет минимум функционала $\Pi(\Omega_0;\xi)$, справедливо следующее неравенство $\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon) \geq \Pi(\Omega_0;\xi_0)$ и, как следствие, выполняется соотношение

$$\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} \geq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Отсюда, переходя к пределу, находим

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon} \geq \liminf_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{3.2.29}$$

Используя при нахождении предела в правой части (3.2.29) следствие 3.2.1, ограниченность R_4 в формуле (3.2.25), выведем

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left\{A_1(V,U_0,U_0)+A_2(V,\xi_0,\xi_0)+3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\right\}dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx.$$

Таким образом, нижний предел для дроби $\left\{\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\right\}$ оценивается снизу той же константой, которой сверху оценивается верхний предел. Следовательно, предел (справа) существует и равен этой константе. Подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2.2. *Производная (справа) функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)$ по параметру ε возмущения области Ω_0 существует и задается формулой*

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left\{A_1(V,U_0,U_0)+A_2(V,\xi_0,\xi_0)+\right.$$

$$\left.+\,3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\right\}dx - \int\limits_{\Omega_0} div(Vf_i)\xi_{0i}dx, \tag{3.2.30}$$

где $\xi_0 = (U_0,u_0,\phi_0)$ — решение задачи (3.2.4), *а A_1, A_2 определяются формулами* (3.2.21), (3.2.22).

Замечание 3.2.2. *Для двух разных возмущений Φ^1_ε, Φ^2_ε, переводящих область с разрезом Ω_0 в одну и ту же возмущенную область Ω_ε при всех ε,* *соответствующие производные функционала энергии равны. Это следует из того, что решения ξ^ε и функционал энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)$ не зависят от выбора функции возмущения Φ_ε.*

Замечание 3.2.3. *В частном случае, когда возмущение имеет вид $y = x + \varepsilon(\theta(x), 0)$, $\theta(x) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, а трещина задается прямолинейным отрезком $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) |\, 0 < x_1 < l, x_2 = 0\}$, $l > 0$, выражение* (3.2.30) *обращается в формулу для производной по длине трещины, полученную ранее в [42].*

3.2.4 Инвариантные интегралы

В этом разделе выполняя преобразования для правой части (3.2.30), получим инвариантные интегралы по замкнутым кривым. При этом, как и в работах относительно двумерных тел с трещинами [25, 121], эти кривые ограничивают области, в которых внешние нагрузки равны нулю.

Справедлива следующая лемма об интегрировании по частям [25, 98].

Лемма 3.2.1. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей ∂D, такова, что $D \subset \Omega$; функция $W = (w_1, w_2)$ принадлежит пространству $H^2(D)^2$. Тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_D A_1(V, W, W) dx = 2 \int\limits_D (V \nabla w_i) \sigma_{ij,j}(W) dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial D} \sigma_{ij}(W) \Big(\frac{1}{2} (Vn) \varepsilon_{ij}(W) - n_j (V \nabla w_i) \Big) dl, \qquad (3.2.31)$$

где n — внешняя единичная нормаль к ∂D.

Заметим, что умножив обе стороны (3.2.31) на 1/3, с учетом зависимостей (3.2.1), можно получить следующую формулу

$$3^{-1} \int\limits_D A_1(V, W, W) dx = 2 \int\limits_D (V \nabla w_i) m_{ij,j}(W) dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial D} m_{ij}(W) \Big(\frac{1}{2} (Vn) \varepsilon_{ij}(W) - n_j (V \nabla w_i) \Big) dl. \qquad (3.2.32)$$

Понадобится еще одна формула интегрирования по частям. Предположим, что выполнены следующие включения $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^2(D)^2$, $w \in H^2(D)$, где область D удовлетворяет условиям леммы 3.2.1. С помощью классических формул Грина, можно показать, что справедливо следующее соотношение

$$\int\limits_D A_2(V,\eta,\eta)dx = 2\int\limits_D \Big\{ q_{i,i}(w,\psi)(V\nabla w) - (V\nabla\psi_i)q_i(w,\psi)\Big\}dx+$$

$$+2\int\limits_{\partial D} q_i(w,\psi)\Big(\frac{1}{2}(Vn)(w_{,i}+\psi_i) - n_i(V\nabla w)\Big)dl. \qquad (3.2.33)$$

Пусть область $G \subset \Omega$ такая, что область $\Omega_0 \cap G$ имеет липшицеву границу. Кроме того, предположим, что для этой области G, решение ξ_0 задачи (3.2.4) принадлежит $H^2(\Omega_0 \cap G)^5$. Представим формулу (3.2.30), выражающую производную функционала энергии, в виде суммы двух интегралов по множествам $\Omega_0 \cap G$ и $\Omega_0 \backslash G$. Затем проинтегрируем по частям интегралы по области $\Omega_0 \cap G$. Не нарушая общности, через n будем обозначать единичную внешнюю нормаль к границе той области, относительно которой применяется формулы интегрирования по частям. С учетом формул (3.2.31)–(3.2.33), получим

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \big\{A_1(V,U_0,U_0) + A_2(V,\xi_0,\xi_0)+$$

$$+ 3^{-1}A_1(V,\phi_0,\phi_0)\big\}dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx = I_1 + I_2 + I_3 + I(V), \qquad (3.2.34)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_0 \cap G} \Big\{ (V\nabla u_{0i})(\sigma_{ij,j}(U_0) + f_i) + (q_{i,i}(u_0, \phi_0) + f_3)(V\nabla u_0) +$$
$$+ (V\nabla \phi_{0i})(m_{ij,j}(\phi_0) - q_i(u_0,\phi_0) + f_{3+i}) \Big\} dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0 \setminus G} \big\{ A_1(V, U_0, U_0) + A_2(V, \xi_0, \xi_0) + 3^{-1} A_1(V, \phi_0, \phi_0) \big\} dx,$$

$$I_3 = -\int\limits_{\partial(\Omega_0 \cap G)} f_i \xi_{0i}(Vn) dl - \int\limits_{\Omega_0 \setminus G} \operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i} dx,$$

$$I(V) = \int\limits_{\partial(\Omega_0 \cap G)} \Big\{ \sigma_{ij}(U_0)\Big(\frac{1}{2}(Vn)\varepsilon_{ij}(U_0) - n_j(V\nabla u_{0i})\Big) +$$
$$+ m_{ij}(\phi_0)\Big(\frac{1}{2}(Vn)\varepsilon_{ij}(\phi_0) - n_j(V\nabla \phi_{0i})\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2}(Vn)(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \phi_{0i}) q_i(u_0, \phi_0) - q_i(u_0,\phi_0) n_i (V\nabla u_0) \Big\} dl.$$

Заметим, что в силу уравнений равновесия (3.2.6)–(3.2.8) интеграл I_1 равен нулю.

Рассмотрим теперь конкретные случаи выбора набора $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$, функции F, области G и векторного поля V, которые после преобразования интегралов в правой части (3.2.34) приведут к инвариантным интегралам. Во всех примерах нам придется выбирать окрестности S_1, S_2 с липшицевыми границами ∂S_1, ∂S_2. С целью получения инвариантных интегралов будем использовать отображения, описывающие возмущение сдвига и возмущение вершины трещины.

Возмущение сдвига. Пусть кривая $\bar{\Gamma}_0$ является прямолинейным отрезком, лежащим на прямой $(x-a)\nu = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы кривая Γ_0 находилась строго внутри Ω. Пусть набор $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ удовлетворяет условиям предположения 3.2.1. Рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ с носителем в малой окрестности S_1 кривой Γ_0 (полагаем, что $\bar{S}_1 \subset \Omega$). Предположим, что во всех точках окрестности S_2 кривой Γ_0 (S_2 такая, что $\bar{\Gamma}_0 \subset S_2$) значение функции ζ равно единице (см. рис. 3.1). Для

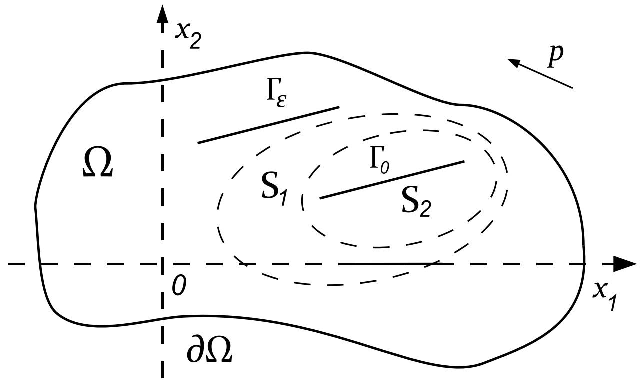

Рис. 3.1: Окрестности S_1 и S_2 для прямолинейной трещины Γ_0.

произвольного фиксированного вектора $p = (p_1, p_2)$ рассмотрим возмущение

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\zeta p. \tag{3.2.35}$$

При этом Γ_0 отображается в кривую Γ_ε — часть прямой $(y - \varepsilon p - a)\nu = 0$, область Ω при отображении не меняется, т.е. $\Omega = \Phi_\varepsilon(\Omega)$. Возмущенная область с трещиной примет вид $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Для преобразования (3.2.35) соответствующее векторное поле V выражается равенством $V = (p_1\zeta, p_2\zeta)$. По построению, предположение 3.2.2 выполняется для малых ε. Поскольку $\nu^\varepsilon = \nu = const$, то справедливо и условие (3.2.10). Рассмотрим область $G_1 = S_1\backslash\bar{S}_2$. Эта область имеет липшицевую границу $\partial S_1 \cup \partial S_2$. Кроме того, согласно результатам о внутренней регулярности решений вариационных задач, решение ξ_0 принадлежит $H^2(\Omega_0 \cap G_1)^5$ [109]. Преобразуем теперь формулу (3.2.34) для $V = (p_1\zeta, p_2\zeta)$, взяв в качестве G область $G_1 = S_1\backslash\bar{S}_2$. С учетом свойств функции ζ в S_2 производные от $V_i = p_i$, $i = 1, 2$ обращаются в нуль, а в $\Omega_0\backslash S_1$ справедливо равенство $V = (0, 0)$. Это означает, что интеграл I_2 равен нулю.

Пусть функция внешних нагрузок удовлетворяет равенству

$$F = (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{в} \quad S_2. \tag{3.2.36}$$

Границу области $\Omega_0 \cap G_1$ можно представить в виде $\partial(\Omega_0 \cap G_1) = \partial S_1 \cup \partial S_2$. Легко видеть, что свойства функции V вместе с равенством (3.2.36) приводят к тому, что выражение I_3 равно нулю. Таким образом, замечая, что $V = (0, 0)$

на ∂S_1, формулу (3.2.34) запишем в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\partial S_2} \Big\{\frac{1}{2}(pn)b(\xi_0,\xi_0) - \sigma_{ij}(U_0)n_j(\frac{\partial u_{0i}}{\partial p}) -$$

$$-m_{ij}(\phi_0)n_j(\frac{\partial \phi_{0i}}{\partial p}) - q_i(u_0,\phi_0)n_i(\frac{\partial u_0}{\partial p})\Big\}dl. \qquad (3.2.37)$$

Поскольку производная функционала, в соответствии с замечанием 3.2.2, не зависит от выбора срезающей функции ζ, то интеграл (3.2.37) не зависит от замкнутой кривой ∂S_2. Это означает, что в формуле (3.2.37) вместо ∂S_2 можно взять произвольную достаточно гладкую замкнутую кривую L без самопересечений, ограничивающую некоторую область $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$, для которой $\bar{\mathcal{O}}_L(\Gamma_0) \subset \Omega$, $\bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{O}_L(\Gamma_0)$ и $F = (0,0,0,0,0)$ в $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$.

Инвариантный интеграл вида (3.2.37) существует и для кривой Γ_0, лежащей строго внутри Ω, которая описывается уравнением $x_2 = g(x_1)$ ($x_1 = g(x_2)$), с достаточно гладкой функцией g. В этом случае выбираем отображение сдвига $\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\zeta p$ в направлении вектора $p = (0,1)$ ($p = (1,0)$). Тогда условие (3.2.10) выполняется. Далее, с целью получения инвариантного интеграла, как и выше, требуем выполнение условий предположения 3.2.1 и равенства $F = (0,0,0,0,0)$ в окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0)$ кривой Γ_0.

Возмущение вершины трещины. Предположим, что область Ω делится кривой без самопересечений Ξ на две подобласти Ω_1 и Ω_2 так, чтобы $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \bar{\Xi}$, $\mathrm{meas}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1,2$. Потребуем также чтобы границы областей Ω_1 и Ω_2 были липшицевыми. Кривая Ξ на плоскости (x_1,x_2) задается функцией $g \in C^{0,1}(-l_0,l_1)$ так, что $\Xi = \{(x_1,x_2)\,|\,x_2 = g(x_1),\ -l_0 < x_1 < l_1\}$, $\quad l_0 > 0$, $l_1 > 1$, где функция g удовлетворяет равенству $g = 0$ на интервале $I_\delta = (1-\delta, 1+\delta)$ с некоторым фиксированным $\delta > 0$. Пусть $\Gamma_0 = \{(x_1,x_2)\,|\,x_2 = g(x_1),\ a < x_1 < 1\}$, где $-l_0 \le a \le 0$. Отметим, что когда $a = -l_0$ кривая Γ_0 выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$.

Очевидно, что набор $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ удовлетворяет условиям предположения 3.2.1. Выберем срезающую функцию $\zeta(x) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ финитную в области Ω и такую, что $0 \le \zeta \le 1$ для всех $x \in \Omega$. Далее полагаем, что носитель функции $\operatorname{supp}\zeta$ содержится в окрестности $S_1 \subset \bar{S}_1 \subset \Omega \cap (I_\delta \times \mathbb{R})$ точки $x^0 = (1,0)$, и $\zeta = 1$ в некоторой окрестности S_2 точки x^0. Кроме того, потребуем, чтобы области $\Omega_0 \cap G_2 \cap \{(x_1,x_2)\,|\,x_2 > 0\}$, $\Omega_0 \cap G_2 \cup \{(x_1,x_2)\,|\,x_2 < 0\}$ имели липшицевые границы, где $G_2 = S_1 \backslash \bar{S}_2$, см. рис. 3.2. Рассмотрим отоб-

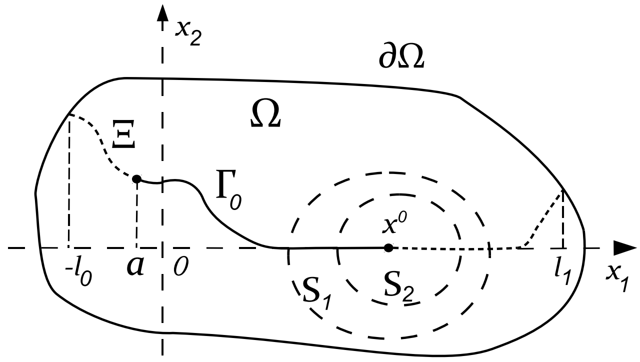

Рис. 3.2: Окрестности S_1 и S_2 вершины трещины x^0.

ражение

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon(\zeta, 0), \quad V = (\zeta, 0), \tag{3.2.38}$$

с положительным параметром ε. Заметим, что при отображении (3.2.38) кривая Γ_0 (для малых ε) отображается в кривую Γ_ε, которая вблизи точки x^0 лежит на прямой $x_2 = 0$. Таким образом, преобразование (3.2.38) соответствует развитию (подрастанию) трещины по направлению прямой $x_2 = 0$. Как и в предыдущем случае (при возмущении сдвига), область Ω при отображении не меняется, т. е. $\Omega = \Phi_\varepsilon(\Omega)$. Возмущенная область с трещиной примет вид $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Предположение 3.2.2 выполняется в силу свойств кривой Ξ. Как известно, решение ξ_0 задачи (3.2.4) обладает дополнительной локальной гладкостью в области $\Omega_0 \cap G_2$, а именно, справедливо включение $\xi_0 \in H^2(\Omega_0 \cap G_2)$ (см. параграф 2.1, теорему 2.1.3). Осуществим преобразования в формуле (3.2.34), рассматриваемой относительно $V = (\zeta, 0)$ и $G = G_2$. Во-первых, заметим, что граница области $\Omega_0 \cap G_2$ состоит из четырех частей:

$$\partial S_1, \quad \partial S_2, \quad (S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^+, \quad (S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^-.$$

Как и в первом случае, интеграл I_2 равен нулю. В самом деле, в области S_2

производные от $V_1 = 1$, $V_2 = 0$ обращаются в нуль, а в $\Omega_0 \backslash S_1$ выполняется равенство $V = (0, 0)$.

Пусть функция внешних нагрузок удовлетворяет равенству

$$F = (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{в} \quad S_2. \tag{3.2.39}$$

В этом случае для функции $V = (\zeta, 0)$ выполнено равенство $Vn = \zeta n_1$. Таким образом, для суммы интегралов I_3 имеем

$$I_3 = \int\limits_{\partial S_1} \zeta n_1 f_i \xi_{0i} dl + \int\limits_{(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^+} \zeta n_1 f_i \xi_{0i} dl +$$

$$+ \int\limits_{(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^-} \zeta n_1 f_i \xi_{0i} dl + \int\limits_{\partial S_2} \zeta n_1 f_i \xi_{0i} dl - \int\limits_{\Omega_0 \backslash G_2} \operatorname{div}(V f_i) \xi_{0i} dx. \tag{3.2.40}$$

Первые три интеграла в (3.2.40) равны нулю вследствие того, что на ∂S_1 функция ζ обращается в нуль, на границах $(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^{\pm}$ выполняется равенство $n_1 = 0$. Последние два слагаемых в (3.2.40) равны нулю в силу (3.2.39) и равенства $V = (0, 0)$ в $\Omega_0 \backslash S_1$. В итоге, выражение I_3 равно нулю. Таким образом, замечая, что $\zeta = 0$ на ∂S_1, $\zeta = 1$ на ∂S_2, формулу (3.2.34) для области G_2 запишем в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\partial S_2} \Big(\frac{1}{2} n_1 b(\xi_0, \xi_0) - \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} -$$

$$- m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} - q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1} \Big) dl + \int\limits_{(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^{\pm}} \Big(- \zeta \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} -$$

$$- \zeta m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} - \zeta q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1} \Big) dl. \tag{3.2.41}$$

Проведем рассуждения, позволяющие установить, что интегралы в (3.2.41) по $(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^{\pm}$ равны нулю. Вследствие ограниченности функции ζ, очевидно, что для подынтегральной функции второго слагаемого в (3.2.41) выполнено неравенство

$$| - \zeta \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} - \zeta m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} - \zeta q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1} | \leq$$

$$\leq | \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} + m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} + q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1} | \quad \text{на} \quad (S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^{\pm}.$$

Произвольность выбора функции ζ, в частности, означает, что граница ∂S_1 может быть взята так, чтобы мера интервала $(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0$ была сколь угодно малой. В то же время левая часть (3.2.41) не зависит от выбора функции ζ. Это позволяет утверждать, что интегралы по $(S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^{\pm}$ равны нулю в силу локальной дополнительной гладкости ξ_0 в области $\Omega_0 \cap G_2$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Итак, для второго случая инвариантный интеграл имеет вид

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\partial S_2} \Big(\frac{1}{2} n_1 b(\xi_0, \xi_0) - \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} - \\ - m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} - q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1}\Big) dl. \qquad (3.2.42)$$

В соответствии с замечанием 3.2.1, правая часть (3.2.42) не зависит от выбора срезающей функции ζ. Следовательно, интеграл (3.2.42) не зависит от выбора замкнутой кривой ∂S_2. Это означает, что в формуле (3.2.42) вместо ∂S_2 можно взять произвольную достаточно гладкую замкнутую кривую L без самопересечений, ограничивающую некоторую малую окрестность $\mathcal{O}_L(x^0)$, для которой $\bar{\mathcal{O}}_L(x^0) \subset \Omega \cap (I_\delta \times \mathbb{R})$, $F = (0, 0, 0, 0, 0)$ в $\mathcal{O}_L(x^0)$.

3.3 Производная функционала энергии для пластины с трещиной вдоль жесткого включения

В параграфе рассматривается модель, описывающая равновесие упругой однородной трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину на границе жесткого включения (см. параграф 2.3). На кривой, соответствующей трещине, налагается условие в виде неравенства, описывающее взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Для семейства вариационных задач о равновесии пластин, зависящих от параметра ε, исследуется зависимость функционалов энергии и решений ξ^ε от вариации геометрии пластины в срединной плоскости. Изменение геометрии пластины задается с помощью семейства гладких отображений, зависящих от ε. При этом значение параметра $\varepsilon = 0$ соответствует исходной невозмущенной области. Установлено, что при $\varepsilon \to 0$ решения ξ^ε обладают свойством непрерывности, получены соответствующие оценки. Выведена формула для производной функционала энергии при $\varepsilon = 0$.

В частном случае, когда гладкое возмущение задает квазистатический рост трещины, полученная формула для производной, представляет интерес с точки зрения известного в механике разрушения критерия Гриффитса [82, 123].

3.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Пусть подобласть ω_0 лежит строго внутри Ω, т.е. $\overline{\omega}_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$, а ее граница $\partial\omega_0$ является достаточно гладкой. Будем считать, что $\partial\omega_0$ состоит из двух частей γ_0 и $\partial\omega_0 \backslash \gamma_0$, причем $\partial\gamma_0 \notin \gamma_0$. Полагаем, что кривая γ_0 имеет в каждой точке нормаль, не имеет самопересечений и задается уравнением

$$\Sigma(x_1, x_2) = 0, \quad \text{где} \quad \Sigma \in C^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2). \tag{3.3.1}$$

Потребуем, чтобы область Ω могла быть разбита продолжением γ_0 на две области Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами. Последнее условие является достаточным, чтобы в нелипшицевой области $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\gamma}_0$ выполнялось неравенство Корна. Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы множество $\{\Omega_0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. При этом кривая γ_0 задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma_0, -1 \le z \le 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. В наших рассуждениях жесткое включение будет задаваться множеством $\omega_0 \times [-1, 1]$, т.е. граница жесткого включения задается цилиндрической поверхностью $\partial\omega_0 \times [-1, 1]$. Упругая часть пластины соответствует области $\Omega \backslash \overline{\omega}_0$.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($x \in \Omega_0$), $U = (u_1, u_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, u — вдоль оси z. Углы поворота нормальных сечений введем с помощью $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$, $x \in \Omega_0$. В соответствии с направлением внешней (по отношению к ω_0) нормали $\nu_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$ к $\partial\omega_0$, можно говорить о положительном ${\partial\omega_0}^+$ и отрицательном ${\partial\omega_0}^-$ берегах кривой $\partial\omega_0$. В случае, когда след функции v берется на положительном (со стороны области $\Omega\backslash\overline{\omega}_0$) берегу ${\partial\omega_0}^+$, будем писать $v^+ = v|_{{\partial\omega_0}^+}$, так же для отрицательного берега $v^- = v|_{{\partial\omega_0}^-}$. Скачок $[v]$ функции v на кривой $\partial\omega_0$ находится по формуле: $[v] = v|_{{\partial\omega_0}^+} - v|_{{\partial\omega_0}^-}$. Аналогичные обозначения будем использовать для следов на γ_0^+ и γ_0^-.

Изгибные и тангенциальные деформации выражаются по формулам [86]:

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U), \quad i,j,k,l = 1,2.$$

Ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijkl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\ a_{iijj} = D\text{æ},\ a_{ijij} = a_{ijji} = D(1-\text{æ})/2,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(u, \phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1,2, \tag{3.3.2}$$

где Λ — коэффициент, описывающий упругие свойства пластины относительно поперечного сдвига [86], индекс после запятой означает соответствующую производную: $v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Дифференциальная постановка задачи о равновесии пластины с трещиной вдоль жесткого включения формулируется следующим образом. Требуется найти функции $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$, ζ_0, определенные в областях $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\gamma}_0$ и ω_0, соответственно, такие что

$$\sigma_{ij,j}(U_0) = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}_0, \tag{3.3.3}$$

$$q_{i,i}(u_0, \phi_0) = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}_0, \tag{3.3.4}$$

$$m_{ij,j}(\phi_0) - q_i(u_0, \phi_0) = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}_0, \tag{3.3.5}$$

$$-\int\limits_{\Xi} \sigma_{ij}(U_0) n_j \rho_i ds - \int\limits_{\Xi} m_{ij}(\phi_0) n_j \alpha_i ds - \Lambda \int\limits_{\Xi} (\phi_0 \nu_0 + \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}) \delta ds =$$

$$= \int\limits_{\omega} (f_i \rho_i + f_3 \delta + f_{3+i} \alpha_i) dx \quad \forall \zeta(x) = (\rho, \delta, \alpha) \in R(\omega_0), \tag{3.3.6}$$

$$\xi_0|_{\omega_0} = \zeta_0 \text{ на } \omega_0, \quad \zeta_0 \in R(\omega_0), \tag{3.3.7}$$

$$\phi_0^+ \cdot \nu_0 + \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu_0} = 0, \quad \sigma_{\tau_0}^+(U_0) = m_{\tau_0}^+(\phi_0) = (0, 0) \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{3.3.8}$$

$$-\sigma_{\nu_0}^+(U_0) \geq |m_{\nu_0}^+(\phi_0)|, \quad \sigma_{\nu_0}^+[U_0]\nu_0 + m_{\nu_0}^+[\phi]\nu_0 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{3.3.9}$$

$$u_0 = 0, \quad \phi_0 = U_0 = (0, 0) \text{ на } \partial\Omega, \tag{3.3.10}$$

В формулировке (3.3.3)–(3.3.10) приняты следующие обозначения:

$$\sigma_{\nu_0}(U) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0j}\nu_{0i}, \quad \sigma_{\tau_0}(U_0) = (\sigma_{\tau_0 1}(U_0), \sigma_{\tau_0 2}(U_0)),$$
$$m_{\nu_0}(\phi_0) = m_{ij}(\phi_0)\nu_{0j}\nu_{0i}, \quad m_{\tau_0}(\phi_0) = (m_{\tau_0 1}(\phi_0), m_{\tau_0 2}(\phi_0)),$$
$$\sigma_{\tau_0 i}(U_0) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0j} - \sigma_{\nu_0}(U_0)\nu_{0i},$$
$$m_{\tau_0 i}(\phi_0) = m_{ij}(\phi_0)\nu_{0j} - m_{\nu_0}(\phi_0)\nu_{0i}, \ i = 1, 2,$$

τ_0 — касательный единичный вектор к кривой γ_0; в соответствии с целью параграфа считаем, что функция внешних нагрузок $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ принадлежит пространству $C^1(\bar{\Omega})^5$; пространство $R(\omega_0)$, характеризующее жесткие свойства включения, определено соотношениями (см. параграф 2.3)

$$R(\omega_0) = \{\zeta(x) = (\rho, \delta, \alpha) \,|\, \rho = x \cdot \mathbb{S} + C,$$
$$\delta = a + x\beta, \quad \alpha = -\beta, \quad x \in \omega_0\}, \tag{3.3.11}$$

где $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрическая матрица, $C = (c_1, c_2)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ – вектора из $\mathbb{R}^2$, числа $a, s, c_1, c_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ являются произвольными. Здесь и далее в рамках настоящего параграфа через "$\cdot$" будем обозначать произведение соответствующих матриц (в данном случае имеем умножение вектор-строки на матрицу).

Для того, чтобы дать вариационную формулировку задачи (3.3.3)–(3.3.10) введем билинейную форму $B_G(\cdot\,,\cdot)$ следующим равенством

$$B_G(\xi,\eta) = \int\limits_G \big\{\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi)\,\varepsilon_{ij}(\psi) + \\ + \Lambda(u,_i + \phi_i)(w,_i + \psi_i)\big\}dx, \quad (3.3.12)$$

где $G \subset \Omega$, $\xi = (U, u, \phi)$, $\eta = (W, w, \psi)$.

Функционал потенциальной энергии пластины с жестким включением имеет следующий вид (см. параграф 2.3):

$$\Pi(\Omega_0;\xi) = \frac{1}{2}B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\,\xi dx, \qquad \xi = (U, u, \phi),$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок.

Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \Big\{ u \in H^1(\Omega_0) \ \Big| \ u = 0 \text{ п.в. на } \partial\Omega \Big\}, \quad H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5.$$

Заметим, что для билинейной формы справедливо неравенство

$$B_{\Omega_0}(\xi,\xi) \ge c\|\xi\|^2_{H(\Omega_0)} \quad \forall\, \xi \in H(\Omega_0), \quad (3.3.13)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ (см. неравенство (2.1.4)).

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины пластины имеет вид

$$[U]\nu_0 \ge |[\phi]\nu_0| \quad \text{на} \quad \gamma_0. \quad (3.3.14)$$

Введем множество допустимых функций

$$K_0(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0)\,|\,\xi_{|\omega_0} \in R(\omega_0), \\ [U]\nu_0 \ge |[\phi]\nu_0| \text{ п.в. на } \gamma_0\}.$$

Включение $\xi_{|\omega_0} \in R(\omega_0)$ означает, что сужение функции ξ на область ω_0 принадлежит пространству $R(\omega_0)$. Тогда вариационная задача формулируется как задача минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_0;\xi)$ на множестве допустимых допустимых функций $K_0(\Omega_0)$:

$$\inf_{\xi\in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0;\xi). \tag{3.3.15}$$

Известно, что задача минимизации (3.3.15) имеет единственное решение $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0(\Omega_0)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству (см. параграф 2.3):

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_0, \eta-\xi_0) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta-\xi_0)dx \quad \forall \eta \in K_0(\Omega_0). \tag{3.3.16}$$

Определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение

$$\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x)), \quad \text{такое что}$$

$$\Phi_{\varepsilon i}(x) \in C^1([0,\varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad i=1,2 \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = x.$$

При фиксированном $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ применим преобразование координат

$$y = \Phi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \tag{3.3.17}$$

по отношению к Ω, $\partial\Omega$, γ_0. В результате получим области $\Phi_\varepsilon(\Omega)$, $\omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\omega_0)$ и кривую $\gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega)\setminus\overline{\gamma}_\varepsilon$. Отметим, что ввиду предположений относительно Φ_ε, преобразование (3.3.17) для малых ε является взаимно-однозначным, т.е. существует обратное преобразование $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1}(y) = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}(y), \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}(y))$. Далее, не нарушая общности, будем считать, что указанное свойство взаимной однозначности выполняется для всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Кроме того, предположим, что имеют место включения $\Phi_{\varepsilon i}^{-1}(y) \in C^1([0,\varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2))$, $i=1,2$.

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Согласно взаимной однозначности преобразования (3.3.17), строгой положительности его якобиана (будет показано ниже) и предполагаемой гладкости Φ_ε, отображение (3.3.17) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, т.е. если $\xi(x) \in H(\Omega_0)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) \in H(\Omega_\varepsilon)$ и наоборот, если $\xi(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $\xi(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$. Пусть $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу γ_ε. Аналогично множеству $K_0(\Omega_0)$ введем множество допустимых функций для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_\varepsilon) \,|\, \xi_{|\omega_\varepsilon} \in R(\omega_\varepsilon),$$
$$[U]\nu^\varepsilon \geq |[\phi]\nu^\varepsilon| \text{ п.в. на } \gamma_\varepsilon\},$$

где пространство $R(\omega_\varepsilon)$ определяется соотношениями:

$$R(\omega_\varepsilon) = \{\zeta(y) = (\rho, \delta, \alpha) \,|\, \rho = y \cdot \mathbb{S} + C, \quad \delta = a + y\beta,$$
$$\alpha = -\beta, \quad y \in \omega_\varepsilon\}, \tag{3.3.18}$$

как и выше, $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрическая матрица, C, $\beta \in \mathbb{R}^2$, $a, s \in \mathbb{R}$.

Несмотря на то, что пространства $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ взаимно однозначно переходят друг в друга при отображении (3.3.17), множества $K_0(\Omega_0)$ и $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ не обладают в общем случае таким свойством. Это связано с тем, что, вообще говоря, единичная нормаль ν_0 к γ_0 не переходит в единичную нормаль ν^ε к γ_ε. Кроме того, очевидно, что $R(\omega_0)$ не отображается в $R(\omega_\varepsilon)$.

Сформулируем далее семейство задач зависящих от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Функционал энергии для возмущенной области определим выражением

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi) = \frac{1}{2} B^\varepsilon_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\omega}_\varepsilon}(\xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F\, \xi dy\,, \quad \xi = (U, u, \phi),$$

где билинейная форма задается соотношением

$$B^\varepsilon_G(\xi, \eta) = \int\limits_G \big\{\sigma_{ij}(W)\, \varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi)\, \varepsilon_{ij}(\psi) +$$
$$+ \Lambda(u_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \psi_i)\big\} dy, \quad G \subset \Omega_\varepsilon.$$

Так же как для исходной задачи (3.3.15), следующая задача о минимизации функционала энергии в возмущенной области

$$\inf_{\xi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \xi), \tag{3.3.19}$$

имеет решение $\xi^\varepsilon = (U^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$B^\varepsilon_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\omega}_\varepsilon}(\xi^\varepsilon, \eta - \xi^\varepsilon) \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F(\eta - \xi^\varepsilon) dy \quad \forall \eta \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon). \tag{3.3.20}$$

Основная цель настоящего параграфа — найти производную функционала энергии по параметру ε, описывающему возмущение области Ω_0, т.е. вычислить предел

$$G = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}, \tag{3.3.21}$$

где ξ_0, ξ^ε – решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно.

3.3.2 Вспомогательные утверждения и формулы

С целью вычислить предел (3.3.21) в интегралах по области Ω_ε функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)$ будем преобразовывать соответствующие интегралы с учетом имеющейся гладкости отображения (3.3.17). Чтобы получить подходящие представления для этих интегралов, понадобятся формулы, уточняющие зависимость функции $\Phi_\varepsilon(x)$ и ее производных от параметра ε.

Итак, обозначим через

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1_\varepsilon}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi^2_\varepsilon}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial \Phi^1_\varepsilon}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi^2_\varepsilon}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

транспонированную матрицу Якоби преобразования (3.3.17). Обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ произвольную ограниченную область. В силу гладкости отображения, справедливы формулы:

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \tag{3.3.22}$$

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x} = \mathbb{I} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_2(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \tag{3.3.23}$$

где $V(x) = (V_1(x), V_2(x)) = \frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$, а остаточные члены при $\varepsilon \to 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{2,\infty}(\mathcal{D})]^2} = o(\varepsilon), \quad \|r_2(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}(\mathcal{D})]^{2\times 2}} = o(\varepsilon).$$

Из (3.3.22) следует, что якобиан $j_\varepsilon(x)$ преобразования (3.3.17) можно представить в виде

$$j_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{div} V + r_3(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{D})} = o(\varepsilon),$$

откуда следует, что для малых ε якобиан $j_\varepsilon(x)$ строго положительный. Положим $\mathbb{Y}_\varepsilon = \mathbb{Y}(\varepsilon, x) = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1}$, согласно (3.3.23), находим

$$\mathbb{Y}_\varepsilon = \mathbb{I} - \varepsilon \mathbb{T}_\varepsilon \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \tag{3.3.24}$$

где

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_4(\varepsilon, x)}{\varepsilon}\right), \quad \|r_4(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}(\mathcal{D})]^{2\times 2}} = o(\varepsilon).$$

Используя введенные выше обозначения, преобразование производных можно написать в матричном виде

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^t; \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t, \end{gathered} \tag{3.3.25}$$

индекс t наверху обозначает операцию транспонирования.

При использовании преобразования (3.3.17) для функций $\xi(y) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ получим функции $\tilde{\xi}(x) = \xi(\Phi_\varepsilon(x))$, для которых справедливо неравенство

$$[\tilde{U}]\nu_\varepsilon \geq |[\tilde{\phi}]\nu_\varepsilon|, \quad x \in \gamma_0, \quad \text{где} \quad \nu_\varepsilon(x) = \nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)).$$

Таким образом, ввиду взаимной однозначности пространств $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, при отображении (3.3.17), множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ перейдет взаимно-однозначно в множество

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \,|\, \xi_{|\omega_0} \in R_\varepsilon(\omega_0), \\ [U]\nu_\varepsilon \geq |[\phi]\nu_\varepsilon| \text{ п.в. на } \gamma_0\}, \end{aligned}$$

где $R_\varepsilon(\omega_0)$ — пространство, в которое переходит $R(\omega_\varepsilon)$ при преобразовании (3.3.17). Пользуясь разложением (3.3.22), $R_\varepsilon(\omega_0)$ можно записать в следующем виде

$$R_\varepsilon(\omega_0) = \{\zeta(x) = (\rho, \delta, \alpha) \,|\, \rho = x \cdot \mathbb{S} + C + \varepsilon \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon}\right) \cdot \mathbb{S},$$

$$\delta = a + x\beta + \varepsilon \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon}\right) \beta, \quad \alpha = -\beta, \quad x \in \omega_0\}, \qquad (3.3.26)$$

где $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$, C, $\beta \in \mathbb{R}^2$, $a, s \in \mathbb{R}$.

Поскольку для нормали ν^ε имеем соотношения

$$\nu^\varepsilon = (\frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial y_1}, \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial y_2}) \Big/ |(\frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial y_1}, \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial y_2})|, \quad \hat{\Sigma}(y) = \Sigma(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_\varepsilon,$$

с учетом формул (3.3.25) для нормали ν_ε выпишем

$$\nu_\varepsilon = (\frac{\partial \Sigma}{\partial x_1}, \frac{\partial \Sigma}{\partial x_2}) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t \Big/ |(\frac{\partial \Sigma}{\partial x_1}, \frac{\partial \Sigma}{\partial x_2}) \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t| = \nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t / |\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t|. \qquad (3.3.27)$$

Заметим, что якобиан отображения (3.3.17) отличен от нуля и, следовательно, $|\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t| \neq 0$. В итоге получим, что множество $K_\varepsilon(\Omega_0)$ можно записать в следующем эквивалентном виде

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \,|\, \xi_{|\omega_0} \in R_\varepsilon(\omega_0),$$

$$[U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) \geq |[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)| \text{ п.в. на } \gamma_0\}.$$

Преобразуем неравенство

$$[U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) \geq |[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0, \qquad (3.3.28)$$

входящее в определении множества $K_\varepsilon(\Omega_0)$, с учетом формул:

$$[U](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) = [U] \cdot (\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)^t = [U] \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon \cdot \nu_0^t,$$

$$[\phi](\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t) = [\phi] \cdot (\nu_0 \cdot {\mathbb{Y}_\varepsilon}^t)^t = [\phi] \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon \cdot \nu_0^t$$

и разложения (3.3.24). В итоге выведем

$$[U] \cdot \nu_0^t - \varepsilon [U] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t \geq \left| [\phi] \cdot \nu_0^t - \varepsilon [\phi] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t \right| \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0. \qquad (3.3.29)$$

Таким образом, множество $K_\varepsilon(\Omega_0)$ можно определить как множество функций, для которых $\xi \in H(\Omega_0)$, $\xi_{|\omega_0} \in R_\varepsilon(\omega_0)$ и, кроме того, выполняется (3.3.29). Осуществим замену переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах неравенства (3.3.20). В результате получим

$$3 \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} j_\varepsilon a_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U_\varepsilon) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; W - U_\varepsilon) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} j_\varepsilon a_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; \phi_\varepsilon) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; \psi - \phi_\varepsilon) dx +$$

$$+ \Lambda \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} j_\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \phi_{\varepsilon\, i} \right) \left(\frac{\partial (w - u_\varepsilon)}{\partial x_j} \mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + (\psi_i - \phi_{\varepsilon\, i}) \right) dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon (\eta - \xi_\varepsilon) dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_\varepsilon(\Omega_0), \tag{3.3.30}$$

где $\xi_\varepsilon(x) = \xi^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$, $F_\varepsilon(x) = F(\Phi_\varepsilon(x))$, $x \in \Omega_0$, $E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U)$ — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(\mathbb{M}; U) = \frac{1}{2} \big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathbb{M}_{j\,k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \mathbb{M}_{ik} \big), \quad \mathbb{M} = (\mathbb{M}_{ij})_{i=1,j=1}^{2,2} \text{ — матрица.}$$

Замечание 3.3.1. *В силу взаимной однозначности отображения множеств $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_\varepsilon(\Omega_0)$ функция ξ_ε является решением вариационного неравенства* (3.3.30).

Благодаря (3.3.22), (3.3.23), можно получить следующие представления для интегралов, входящих в неравенство (3.3.30):

$$3 \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} j_\varepsilon a_{ijkl} E_{kl}(\mathbb{Y}_\varepsilon; U) E_{ij}(\mathbb{Y}_\varepsilon; W) dx = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(W) +$$

$$+ \varepsilon A_1(V; U; W))\, dx + o(\varepsilon) \acute{R}_1(U, W), \tag{3.3.31}$$

$$\Lambda \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} j_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \phi_i \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \mathbb{Y}_{\varepsilon ij} + \psi_i \right) dx =$$

$$= \Lambda \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \Big(\big(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i \big) \big(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i \big) + \varepsilon A_2(V; \xi; \eta) \Big) dx + o(\varepsilon) \acute{R}_2(\xi; \eta), \tag{3.3.32}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon F_\varepsilon \xi dx = \int\limits_{\Omega_0} \left(F\xi + \varepsilon \mathrm{div}(Vf_i)\xi_i\right) dx + o(\varepsilon)\acute{R}_3(\xi), \tag{3.3.33}$$

где

$$A_1(V;U;W) = \mathrm{div} V \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) -$$
$$- \sigma_{ij}(U) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; W\right) - \sigma_{ij}(W) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right), \tag{3.3.34}$$

$$A_2(V;\xi;\eta) = \mathrm{div} V (\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i) - (\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)\Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i} +$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\Big) - (\frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\right), \tag{3.3.35}$$

а $\acute{R}_1$, $\acute{R}_2$, $\acute{R}_3$ — некоторые ограниченные полилинейные формы, для которых справедливы следующие равномерные по ε оценки

$$|\acute{R}_i(\xi,\eta)| \le c\|\eta\|_{H(\Omega_0)}\|\xi\|_{H(\Omega_0)}, \quad i = 1,2, \quad |\acute{R}_3(\xi)| \le c\|\eta\|_{H(\Omega_0)}.$$

Для удобства введем обозначения

$$A_4(V;\xi;\eta) = A_1(V;U;W) + \frac{1}{3}A_1(V;\phi;\psi) + \Lambda A_2(V;\xi;\eta), \tag{3.3.36}$$

$$\acute{R}_4(\xi,\eta) = \acute{R}_1(U,W) + \frac{1}{3}\acute{R}_1(\phi,\psi) + \acute{R}_2(\xi;\eta),$$

Включения $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $i,j = 1,2$, $F \in C^1(\bar{\Omega})^5$ гарантируют выполнение неравенств

$$|\int\limits_{\Omega_0} A_4(V,\xi,\eta)dx| \le c\|\xi\|_{H(\Omega_0)}\|\eta\|_{H(\Omega_0)}, \tag{3.3.37}$$

$$|\int\limits_{\Omega_0} \mathrm{div}(Vf_i)\xi_i dx| \le c\|\xi\|_{H(\Omega_0)}, \tag{3.3.38}$$

с независящей от ε постоянной c. Кроме того, на основании оценок для $\acute{R}_i$, $i = 1,2$, справедливы неравенства

$$|\acute{R}_4(\xi,\eta)| \le c\|\eta\|_{H(\Omega_0)}\|\xi\|_{H(\Omega_0)}, \quad |\acute{R}_3(\xi)| \le c\|\xi\|_{H(\Omega_0)}.$$

Заметим, что при разложении второго интеграла из (3.3.30) можно использовать выражение вида (3.3.31). Полученные разложения по ε применим при преобразовании функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi)$, связанной с заменой переменных $y = \Phi_\varepsilon(x)$ в интегралах по области Ω_ε. В результате получим новый функционал энергии

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi) = \frac{1}{2}B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_0} F\,\xi dx + \frac{1}{2}\varepsilon \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} A_4(V;\xi;\xi)dx -$$

$$-\varepsilon \int\limits_{\Omega_0} \mathrm{div}(Vf_i)\xi_i dx + o(\varepsilon)\acute{R}_4(\xi,\xi) - o(\varepsilon)\acute{R}_3(\xi). \tag{3.3.39}$$

Из неравенства, полученного подстановкой в (3.3.30) тестовой функций $\eta = (0,0,0,0,0)$, с помощью разложений (3.3.31)–(3.3.33) и неравенства (3.3.13), находим

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon) + \varepsilon \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} A_4(V,\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)dx + o(\varepsilon)\acute{R}_4(\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_0} \left(F\xi_\varepsilon + \varepsilon \mathrm{div}(Vf_i)\xi_{\varepsilon i}\right) dx + o(\varepsilon)\acute{R}_3(\xi_\varepsilon). \tag{3.3.40}$$

Учитывая ограниченность $\acute{R}_3$, $\acute{R}_4$, неравенства (3.3.13), (3.3.37), (3.3.38) из (3.3.40) получим равномерную оценку

$$\|\xi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \leq c. \tag{3.3.41}$$

Приведем две леммы, устанавливающее связь между множествами $K_\varepsilon(\Omega_0)$ и $K_0(\Omega_0)$.

Лемма 3.3.1. *Для произвольной функции* $U \in H^{1,0}(\Omega_0)^2$ *найдутся функции* $P_\varepsilon = P_\varepsilon(U) \in H^{1,0}(\Omega_0)^2$, *удовлетворяющие свойствам:*

(i) существует постоянная c, не зависящая от ε, для которой

$$\|P_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)^2} \leq c, \quad i = 1,2;$$

(ii) имеет место равенство

$$[U + \varepsilon P_\varepsilon]\cdot \nu_0^t - \varepsilon[U + \varepsilon P_\varepsilon]\cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t = [U_0]\cdot \nu_0^t \quad \textit{на} \quad \gamma_0,$$

где $\mathbb{T}_\varepsilon = \mathbb{T}_\varepsilon(\varepsilon, x)$ — матрица, определенная в (3.3.24);

(iii) в области ω_0 выполняется равенство $P_\varepsilon = (0,0)$.

Доказательство. Поскольку U содержится в $H^{1,0}(\Omega_0)^2$, то следы функции U на берегах γ_0^+ и γ_0^- принадлежат пространству $H^{1/2}(\gamma_0)^2$, кроме того имеем $[U] \in H^{1/2}(\gamma_0)^2$, $[U] = (0,0)$ на $\partial\omega_0 \backslash \bar{\gamma}_0$ (см. теорему 1.2.1 параграфа 1.2).

С помощью линейного непрерывного оператора поднятия $L : H^{1/2}(\partial\Omega \cup \partial\omega_0)^2 \to H^1(\Omega\backslash\bar{\omega}_0)^2$, найдем функцию $\widetilde{h} = L\hat{h} \in H^1(\Omega\backslash\bar{\omega}_0)^2$, где

$$\hat{h} = \begin{cases} [U], \quad \text{на} \quad \partial\omega_0, \\ (0,0) \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

Продолжим найденную функцию $\widetilde{h}$ в область ω_0 нулем. Обозначим полученную функцию через $\hat{U}$. Так как $\hat{U} = (0,0)$ на $\partial\omega_0\backslash\bar{\gamma}$, то $\hat{U}$ принадлежит $H^1(\Omega_0)^2$ [65]. В соответствии с предыдущими выкладками, в силу непрерывности операторов следа и поднятия, определен линейный непрерывный оператор $\hat{L} : H^1(\Omega_0)^2 \to H^1(\Omega_0)^2$ для которого

$$\hat{L}(U) = \hat{U}. \tag{3.3.43}$$

Отметим следующие свойства функции $\hat{U} = \hat{L}(U)$:

$$\hat{U} = (0,0) \quad \text{в} \quad \omega_0, \quad \hat{U} = [U] \quad \text{на} \quad \gamma_0^+, \quad \hat{U} = (0,0) \quad \text{на} \quad \gamma_0^-. \tag{3.3.44}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$P \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon = b_\varepsilon, \quad b_\varepsilon = \hat{U} \cdot \mathbb{T}_\varepsilon. \tag{3.3.45}$$

Элементы матрицы $\mathbb{Y}_\varepsilon$ принадлежат пространству $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, а вектор b_ε – пространству $H^{1,0}(\Omega_0)^2$. Как известно (см. [96]), уравнение (3.3.45) имеет единственное решение $P_\varepsilon = b \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon{}^{-1} \in H^{1,0}(\Omega_0)^2$. Равномерная ограниченность P_ε в пространстве $H^{1,0}(\Omega_0)^2$ следует из ограниченности оператора поднятия и матрицы $\mathbb{Y}_\varepsilon{}^{-1}$ [96].

Справедливость (ii) следует из следующей цепочки соотношений

$$[U + \varepsilon P_\varepsilon] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[U + \varepsilon P_\varepsilon] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t = [U] \cdot \nu_0^t + \varepsilon[P_\varepsilon] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[U] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t -$$

$$-\varepsilon^2[P_\varepsilon] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t = [U] \cdot \nu_0^t + \varepsilon[P_\varepsilon] \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon \cdot \nu_0^t - \varepsilon[U] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t = [U] \cdot \nu_0^t \quad \text{на} \quad \gamma_0.$$

В силу (3.3.44), для P_ε выполняется свойство *(iii)*.

Лемма 3.3.2. *Пусть $\xi_0 \in K_0(\Omega_0)$ — решение невозмущенной задачи* (3.3.15), $\xi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ *— решение задачи* (3.3.30). *Тогда для достаточно малых ε существуют функции $\lambda_\varepsilon^1 \in H(\Omega_0)$ и $\lambda_\varepsilon^2 \in H(\Omega_0)$ такие, что*

$$\xi_\varepsilon^1 = \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \xi_\varepsilon^2 = \xi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0). \tag{3.3.46}$$

При этом справедливы следующие оценки

$$\|\lambda_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \le c, \quad i = 1, 2, \tag{3.3.47}$$

где c не зависит от ε.

Доказательство. По условию в области ω_0 функция ξ_0 имеет специальный вид:

$$U_0 = x \cdot \mathbb{S}_0 + C_0, \quad u_0 = a_0 + x\beta_0, \quad \phi_0 = -\beta_0.$$

Установим сначала существование функций $\lambda_\varepsilon^1 = (W_\varepsilon^1, w_\varepsilon^1, \psi_\varepsilon^1)$. Применяя лемму 3.3.1 с функцией $U = U_0$, получим функцию $P_\varepsilon(U_0)$, которая удовлетворяет свойствам *(i)–(iii)*. Положим $W_\varepsilon^1 = P_\varepsilon(U_0) + Q_\varepsilon^1$, где $Q_\varepsilon^1 = \theta(V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_0$, θ — гладкая финитная функция такая, что $\theta = 1$ при $x \in \omega_0$, $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$. По построению $Q_\varepsilon^1 \in H_0^1(\Omega)^2 \cap C^1(\mathbb{R}^2)^2$, $[Q_\varepsilon^1] = (0,0)$ на γ_0. В области ω_0 справедливы соотношения

$$U_0 + \varepsilon W_\varepsilon^1 = U_0 + \varepsilon Q_\varepsilon^1 = (x \cdot \mathbb{S}_0 + C_0) + \varepsilon(V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_0.$$

Снова с помощью леммы 3.3.1 для $U = \phi_0$, подберем функцию $P_\varepsilon(\phi_0)$, удовлетворяющую свойствам *(i)–(iii)*. Положим $\psi_\varepsilon^1 = P_\varepsilon(\phi_0)$. В таком случае в области ω_0, согласно свойству *(iii)*, выполняется равенство $\phi_0 + \varepsilon\psi_\varepsilon^1 = \phi_0 = -\beta_0$.

Положим $w_\varepsilon^1 = \theta(\beta_0 V + \frac{r_1\beta_0}{\varepsilon})$. По построению, $\xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1$ принадлежит $R_\varepsilon(\omega_0)$ (см. соотношения (3.3.26)). Кроме того, в соответствии с леммой 3.3.1, имеем

$$[U_0 + \varepsilon W_\varepsilon^1] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[U_0 + \varepsilon W_\varepsilon^1] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t = [U_0]\nu_0 \ge |[\phi_0]\nu_0| =$$

$$= \Big|[\phi_0 + \varepsilon\psi_\varepsilon^1] \cdot \nu_0^t - \varepsilon[\phi_0 + \varepsilon\psi_\varepsilon^1] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t\Big| \quad \text{на} \quad \gamma_0.$$

Построим теперь функции вида $\lambda_\varepsilon^2 = (W_\varepsilon^2, w_\varepsilon^2, \psi_\varepsilon^2)$. Пусть $\hat{U}_\varepsilon = \hat{L}(U_\varepsilon)$, где оператор $\hat{L}$ определен в (3.3.43). По построению

$$\hat{U}_\varepsilon = (0,0) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0, \quad [\hat{U}_\varepsilon] = [U_\varepsilon] \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0. \tag{3.3.48}$$

Положим $W_\varepsilon^2 = P_\varepsilon^2 + Q_\varepsilon^2$, с функциями

$$P_\varepsilon^2 = \hat{U}_\varepsilon \cdot \mathbb{T}_\varepsilon, \quad Q_\varepsilon^2 = \theta \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon,$$

где $\mathbb{S}_\varepsilon$ — кососимметрическая матрица, соответствующая U^ε (относительно возмущенной задачи), θ — та же финитная функция, которая использовалась выше при построении функции Q_ε^1.

Подберем функцию ψ_ε^2. Пусть $\hat{\phi}_\varepsilon = \hat{L}(\phi_\varepsilon)$. Как и выше в (3.3.44), имеем

$$\hat{\phi}_\varepsilon = (0,0) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0, \quad [\hat{\phi}_\varepsilon] = [\phi_\varepsilon] \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0. \tag{3.3.49}$$

Выберем в качестве ψ_ε^2 функцию $\hat{\phi}_\varepsilon \cdot \mathbb{T}_\varepsilon$.

Наконец, с помощью ранее определенной функции θ, следующим равенством определим

$$w_\varepsilon^2 = \theta \left(\beta_\varepsilon V + \frac{\beta_\varepsilon r_1}{\varepsilon} \right).$$

По построению компоненты функции $\xi_\varepsilon^2 = \xi_\varepsilon - \varepsilon \lambda_\varepsilon^2$ в области ω_0 принимают значения вида

$$U_\varepsilon - \varepsilon W_\varepsilon^2 = U_\varepsilon - \varepsilon (P_\varepsilon^2 + Q_\varepsilon^2) = U_\varepsilon - \varepsilon \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon =$$

$$= x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon + \varepsilon \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon - \varepsilon \left(V + \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon = x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon,$$

$$u_\varepsilon - \varepsilon w_\varepsilon^2 = a_\varepsilon + x\beta_\varepsilon + \varepsilon(\beta_\varepsilon V + \frac{\beta_\varepsilon r_1}{\varepsilon}) - \varepsilon(\beta_\varepsilon V + \frac{\beta_\varepsilon r_1}{\varepsilon}) = a_\varepsilon + x\beta_\varepsilon,$$

$$\phi_\varepsilon - \varepsilon \psi_\varepsilon^2 = \phi_\varepsilon = -\beta_\varepsilon.$$

Таким образом, сужение функции ξ_ε^2 на области ω_0 принадлежит $R_\varepsilon(\omega_0)$. Кроме того, на кривой γ_0 справедливы соотношения

$$[U_\varepsilon^2]\nu_0 = [U_\varepsilon] \cdot \nu_0^t - \varepsilon [U_\varepsilon] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t \geq \left| [\phi_\varepsilon] \cdot \nu_0^t - \varepsilon [\phi_\varepsilon] \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \nu_0^t \right| = \left| [\phi_\varepsilon^2] \nu_0 \right|.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3.1. *Пусть* ξ_ε *— решение задачи* (3.3.30), ξ_0 *— решение задачи* (3.3.15). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *имеет место сходимость* $\xi_\varepsilon \to \xi_0$ *в* $H(\Omega_0)$, *более того, справедлива оценка*

$$\|\xi_0 - \xi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \le c\sqrt{\varepsilon}, \tag{3.3.50}$$

где константа c *не зависит от* ε.

Доказательство. Построенные в лемме 3.3.1 функции $\xi_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ и $\xi_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$ подставим в качестве тестовых функций в вариационные неравенства (3.3.30) и (3.3.16) соответственно и просуммируем. В итоге, воспользовавшись разложениями (3.3.31)—(3.3.33), находим

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_\varepsilon - \xi_0, \xi_\varepsilon - \xi_0) \le \varepsilon B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon^1) - \varepsilon B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_0, \lambda_\varepsilon^2) +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} \Big(A_4(V, \xi_\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 - \xi_\varepsilon) + F(\lambda_\varepsilon^2 - \lambda_\varepsilon^1) - \operatorname{div}(V f_i)(\xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 - \xi_\varepsilon)_i \Big) dx +$$
$$+ o(\varepsilon)\acute{R}_4(\xi_\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 - \xi_\varepsilon) + o(\varepsilon)\acute{R}_3(\xi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 - \xi_\varepsilon).$$

В силу (3.3.41), (3.3.47) из последнего неравенства находим

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_\varepsilon - \xi_0, \xi_\varepsilon - \xi_0) \le \varepsilon c, \tag{3.3.51}$$

где $c > 0$ не зависит от ε. Для $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in R(\omega_0)$ и $\xi_\varepsilon = (U_\varepsilon, u_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in R_\varepsilon(\omega_0)$ справедливы соотношения

$$\varepsilon_{ij}(U_0) = \varepsilon_{ij}(\phi_0) = (u_{0,i} + \phi_{0i}) = 0, \quad \varepsilon_{ij}(U_\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon_{ij}\left((V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon \right),$$
$$\varepsilon_{ij}(\phi_\varepsilon) = 0, \quad (u_{\varepsilon,i} + \phi_{\varepsilon i}) = \varepsilon(\beta V)_{,i} + (\beta r_1)_{,i} \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0.$$

Отсюда следует, что имеет место равенство

$$B_{\Omega_0}(\xi_\varepsilon - \xi_0, \xi_\varepsilon - \xi_0) = B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_\varepsilon - \xi_0, \xi_\varepsilon - \xi_0) + \varepsilon^2 R_5(\varepsilon), \tag{3.3.52}$$

где

$$R_5(\varepsilon) = \int\limits_{\omega_0} \sigma_{ij}\left((V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon \right) \varepsilon_{ij}\left((V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon \right) dx +$$
$$+ \Lambda \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\omega_0} \left((\beta V)_{,i} + \frac{(\beta r_1)_{,i}}{\varepsilon} \right)^2 dx.$$

Для достаточно малых ε можно оценить $R_5(\varepsilon)$ в (3.3.52). Действительно, заметим, что из (3.3.41) можно вывести оценку $|s_\varepsilon| \le c$, где s_ε — элементы матрицы $\mathbb{S}_\varepsilon$. Вместе с этим, из (3.3.22) легко видеть равномерную ограниченность модулей $|\frac{(\beta r_1)_{,i}}{\varepsilon}|$. Таким образом, $|R_5(\varepsilon)| \le c$ для всех достаточно малых ε. В итоге, применяя (3.3.13), (3.3.51) и (3.3.52), выводим необходимую оценку (3.3.50). Теорема доказана.

Следствие 3.3.1. *При $\varepsilon \to 0$ имеют место сходимости*

$$s_\varepsilon \to s_0, \quad a_\varepsilon \to a_0 \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}, \quad \beta_\varepsilon \to \beta_0, \quad C_\varepsilon \to C_0 \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^2,$$

где s_ε, a_ε, C_ε, β_ε задают структуру ξ_ε в ω_ε.

Доказательство. Очевидно, из (3.3.50) следует, что $U_\varepsilon \to U_0$ в $H^1(\omega_0)^2$. В области ω_0 справедливы представления:

$$U_\varepsilon = (x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon) + \varepsilon(V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon, \quad U_0 = (x \cdot \mathbb{S}_0 + C_0).$$

В силу того, что $\|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{2,\infty}(\omega_0)]^2} = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и оценки $|s_\varepsilon| \le c$, справедливой для элементов матрицы $\mathbb{S}_\varepsilon$ при малых ε, легко видеть, что при $\varepsilon \to 0$

$$U_\varepsilon \to x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon \quad \text{в} \quad H^1(\omega_0)^2.$$

Это означает, на основании сходимости $U_\varepsilon \to U_0$ в $H^1(\omega_0)^2$, что линейные функции $l_\varepsilon(x) = x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon$ также сходятся, а именно,

$$l_\varepsilon(x) = x \cdot \mathbb{S}_\varepsilon + C_\varepsilon \to l_0(x) = x \cdot \mathbb{S}_0 + C_0 \quad \text{в} \quad H^1(\omega_0)^2,$$

при $\varepsilon \to 0$. Для линейных функций такая сходимость может быть только в том случае, когда $s_\varepsilon \to s_0$ в $\mathbb{R}$, $C_\varepsilon \to C_0$ в $\mathbb{R}^2$ при $\varepsilon \to 0$. Подобными рассуждениями можно доказать и сходимости $a_\varepsilon \to a_0$ в $\mathbb{R}$, $\beta_\varepsilon \to \beta_0$ в $\mathbb{R}^2$ при $\varepsilon \to 0$. Следствие доказано.

Лемма 3.3.3. *Пусть $\lambda_0 = (W_0, w_0, \psi_0)$, где $W_0 = P_0 + Q_0$,*

$$P_0 = \hat{U}_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q_0 = \theta V \cdot \mathbb{S}_0, \quad \psi_0 = \hat{\phi}_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, \quad w_0 = \theta(\beta_0 V). \qquad (3.3.53)$$

функции $\hat{U}_0$, $\hat{\phi}_0$ получены как и выше с помощью оператора $\hat{L}$, определенного с помощью (3.3.43). *Тогда при $\varepsilon \to 0$ справедливы следующие сходимости*

$$\lambda_\varepsilon^1 \to \lambda_0, \quad \lambda_\varepsilon^2 \to \lambda_0 \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0).$$

Доказательство. Сначала докажем для $\lambda_\varepsilon^2 = (W_\varepsilon^2, w_\varepsilon^2, \psi_\varepsilon^2)$. Имеем $W_\varepsilon^2 = P_\varepsilon^2 + Q_\varepsilon^2$, с

$$P_\varepsilon^2 = \hat{U}_\varepsilon \cdot \mathbb{T}_\varepsilon, \quad Q_\varepsilon^2 = \theta\left(V + \frac{r_1}{\varepsilon}\right) \cdot \mathbb{S}_\varepsilon.$$

Непрерывность оператора $\hat{L}$ и сходимость $\xi_\varepsilon \to \xi_0$ при $\varepsilon \to 0$ обуславливает следующую сходимость $\hat{U}_\varepsilon \to U_0$. Кроме того, согласно (3.3.24) при $\varepsilon \to 0$, имеем $\mathbb{T}_\varepsilon = \mathbb{T}_\varepsilon(\varepsilon, x) \to \frac{\partial V}{\partial x}$ в $[W^{1,\infty}(\Omega_0)]^{2\times 2}$. Значит при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $P_\varepsilon^2 \to P_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)^2$. В силу следствия 3.3.1, $Q_\varepsilon^2 \to Q_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)^2$. Приводя для $\psi_\varepsilon^2 = \hat{\phi}_\varepsilon \cdot \mathbb{T}_\varepsilon$ рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для $P_\varepsilon^2 = \hat{U}_\varepsilon \cdot \mathbb{T}_\varepsilon$, убеждаемся в том, что $\psi_\varepsilon^2 \to \psi_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)^2$. Наконец для $w_\varepsilon^2 = \theta\left(\beta_\varepsilon V + \frac{\beta_\varepsilon r_1}{\varepsilon}\right)$, вспоминая следствие 3.3.1 и свойства остаточного члена r_1 (см. формулы (3.3.22)), получим $w_\varepsilon^2 \to w_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)$.

Рассмотрим теперь $\lambda_\varepsilon^1 = (W_\varepsilon^1, w_\varepsilon^1, \psi_\varepsilon^1)$. Известно, что $W_\varepsilon^1 = P_\varepsilon(U_0) + Q_\varepsilon^1(U_0)$, где $Q_\varepsilon^1(U_0) = \theta(V + \frac{r_1}{\varepsilon}) \cdot \mathbb{S}_0$ и

$$P_\varepsilon(U_0) = \hat{U}_0 \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \mathbb{Y}_\varepsilon{}^{-1} = \hat{U}_0 \cdot \mathbb{T}_\varepsilon \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}.$$

Поскольку

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \mathbb{T}_\varepsilon(\varepsilon, x) \to \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x} \to \mathbb{I} \quad \text{в} \quad [W^{1,\infty}(\Omega_0)]^{2\times 2},$$

то при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $P_\varepsilon(U_0) \to P_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)^2$. Сходимость $Q_\varepsilon^1(U_0) \to Q_0$ в пространстве $H^{1,0}(\Omega_0)^2$ при $\varepsilon \to 0$ следует из (3.3.22). Так как $\psi_\varepsilon^1 = P_\varepsilon(\phi_0)$, то проводя такие же рассуждения как и для $P_\varepsilon(U_0)$, выведем $\psi_\varepsilon^1 \to \psi_0$ $H^{1,0}(\Omega_0)^2$ при $\varepsilon \to 0$. Для $w_\varepsilon^1 = \theta(\beta_0 V + \frac{r_1 \beta_0}{\varepsilon})$ принимая во внимание соотношение $\|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{2,\infty}(\Omega_0)]^2} = o(\varepsilon)$, легко вывести необходимую сходимость $w_\varepsilon^1 \to w_0$ в $H^{1,0}(\Omega_0)$. Лемма доказана.

3.3.3 Вывод формулы для производной функционала энергии

Для того чтобы вычислить производную функционала энергии по длине трещины необходимо найти предел (3.3.21).

Итак, в силу леммы 3.3.2 имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}=\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\le$$

$$\le\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\le$$

$$\le\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}.\quad(3.3.54)$$

Найдем предел, стоящий в правой части (3.3.54). Принимая во внимание утверждения теоремы 3.3.1, леммы 3.3.3, ограниченность $\acute{R}_4$ в формуле (3.3.39), получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_0+\varepsilon\lambda^1_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}=$$

$$=B_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0)+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}A_4(V,\xi_0,\xi_0)dx-\int\limits_{\Omega_0}\mathrm{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx-\int\limits_{\Omega_0}F\lambda_0dx.$$

Согласно лемме 3.3.1 справедливо соотношение

$$\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\ge\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon},$$

и поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\ge$$

$$\ge\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon}.\quad(3.3.55)$$

Используя при нахождении предела в правой части (3.3.55) теорему 3.3.1, лемму 3.3.3, с помощью (3.3.39), выведем

$$\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\xi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_\varepsilon-\varepsilon\lambda^2_\varepsilon)}{\varepsilon}=$$

$$= B_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0} A_4(V,\xi_0,\xi_0)dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx - \int\limits_{\Omega_0} F\lambda_0 dx.$$

Таким образом, нижний предел выражения $\left\{\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\xi_0)}{\varepsilon}\right\}$ оценивается снизу той же константой, которой оценивается верхний предел этой функции. Подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3.2. *Производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)$ *по параметру* ε *возмущения области* Ω_0 *существует и задается формулой*

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0} A_4(V,\xi_0,\xi_0)dx - \\ &- \int\limits_{\Omega_0} div(Vf_i)\xi_{0i}dx + B_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0) - \int\limits_{\Omega_0} F\lambda_0 dx, \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

где $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$ *— решение задачи* (3.3.15)*, функции* λ_0 *и* A_4*, определяются формулами* (3.3.53)*,* (3.3.36) *соответственно.*

Далее приведем рассуждения с помощью которых можно преобразовать формулу (3.3.56), так чтобы в формулу не входила вспомогательная функция λ_0. Для этого предположим, что решение является достаточно гладким ξ_0. В этом случае, применяя обобщенную формулу Грина и соотношения (3.3.3)–(3.3.10), представим значение билинейной формы $B_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} B_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0) = &-\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}\sigma_{ij,j}(U_0)w_{0i} - \int\limits_{\partial\omega_0^+}(\sigma_{\nu_0}(U_0)W_0\nu_0 + \sigma_{\tau_0 i}(U_0)w_{0\tau_0 i})ds - \\ &- \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0} m_{ij,j}(\phi_0)\psi_{0i} - \int\limits_{\partial\omega_0^+}(m_{\nu_0}(\phi_0)\psi_0\nu_0 + m_{\tau_0 i}(\phi_0)\psi_{0\tau_0 i})ds - \\ &- \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0} q_{i,i}(\phi_0,u_0)w_0 - q_i(\phi_0,u_0)\psi_{0i} - \int\limits_{\partial\omega_0^+} q(\phi_0,u_0)\nu_0 w_0 ds, \end{aligned}$$

где $w_{0\tau_0 i} = w_{0i} - (W_0\nu_0)\nu_{0i}$, $\psi_{0\tau_0 i} = \psi_{0i} - (\psi_0\nu_0)\nu_{0i}$, $i = 1,2$. Это представление вместе с уравнениями равновесия (3.3.3)–(3.3.5) позволяет написать следующее равенство

$$B_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}(\xi_0,\lambda_0) - \int\limits_{\Omega_0} F\lambda_0 dx = -\int\limits_{\omega_0} F\lambda_0 dx - \int\limits_{\partial\omega_0^+}(\sigma_{\nu_0}(U_0)W_0\nu_0 + \sigma_{\tau_0 i}(U_0)w_{0\tau_0 i})ds -$$

$$-\int\limits_{\partial\omega_0^+}(m_{\nu_0}(\phi_0)\psi_0\nu_0+m_{\tau_0 i}(\phi_0)\psi_{0_{\tau_0 i}})ds-\int\limits_{\partial\omega_0^+}q(\phi_0,u_0)\nu_0 w_0 ds. \qquad (3.3.57)$$

Далее заметим, что для функции $\lambda_0=(W_0,w_0,\psi_0)$ на границе $\partial\omega_0$ справедливы следующие равенства

$$W_0=P_0+Q_0=\hat{U_0}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\mathbb{S}_0,\quad \psi_0=\hat{\phi}_0\cdot\frac{\partial V}{\partial x},\quad w_0=\beta_0 V,$$

при этом $\hat{U_0}=(0,0)$, $\hat{\phi}_0=(0,0)$ на $(\partial\omega_0\backslash\overline{\gamma}_0)^+$ и $\hat{U_0}=U_0$, $\hat{\phi}_0=\phi_0$ на γ_0^+. В области ω_0, в соответствии с построением функции $\lambda_0=(W_0,w_0,\psi_0)$, имеем следующие представления

$$W_0=V\cdot\mathbb{S}_0,\quad \psi_0=(0,0),\quad w_0=\beta_0 V \quad \text{в} \quad \omega_0. \qquad (3.3.58)$$

Принимая во внимание свойства функции λ_0 на γ_0, равенства (3.3.58) и краевые условия (3.3.8)–(3.3.9), правую часть (3.3.57) преобразуем к виду

$$-\int\limits_{\partial\omega_0^+}(\sigma_{\nu_0}(U_0)(V\cdot\mathbb{S}_0)\nu_0+\sigma_{\tau_{00}i}(U_0)(V\cdot\mathbb{S}_0)_{\tau_0 i})ds-$$
$$-\int\limits_{\gamma_0^+}\sigma_{\nu_0}(U_0)\Big(U_0\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\nu_0 ds-\int\limits_{\gamma_0^+}m_{\nu_0}(\phi_0)\Big(\phi_0\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\nu_0 ds-$$
$$-\int\limits_{\partial\omega_0^+}q(\phi_0,u_0)\nu_0(\beta_0 V)ds-\int\limits_{\omega_0}(f_1,f_2)(V\cdot\mathbb{S}_0)+f_3(\beta_0 V)dx.$$

Таким образом, формула для производной (3.3.56), при условии гладкости решения ξ_0, может быть представлена в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}_0}A_4(V,\xi_0,\xi_0)dx-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(Vf_i)\xi_{0i}dx-$$
$$-\int\limits_{\partial\omega_0^+}(\sigma_{\nu_0}(U_0)(V\cdot\mathbb{S}_0)\nu_0+\sigma_{\tau_0 i}(U_0)(V\cdot\mathbb{S}_0)_{\tau_0 i})ds-$$
$$-\int\limits_{\gamma_0^+}\sigma_{\nu_0}(U_0)\Big(U_0\cdot\tfrac{\partial V}{\partial x}\Big)\nu_0 ds-\int\limits_{\gamma_0^+}m_{\nu_0}(\phi_0)\Big(\phi_0\cdot\tfrac{\partial V}{\partial x}\Big)\nu_0 ds-$$
$$-\int\limits_{\partial\omega_0^+}q(\phi_0,u_0)\nu_0(\beta_0 V)ds-\int\limits_{\omega_0}(f_1,f_2)(V\cdot\mathbb{S}_0)+f_3(\beta_0 V)dx.$$

3.3.4 Производная функционала энергии по длине трещины

Рассмотрим случай, представляющий интерес с точки зрения приложений. А именно, рассмотрим возмущение кривой, описывающей трещину. В этом случае значение производной функционала энергии по отношению к длине трещины, в соответствии с критерием разрушения Гриффитса, имеет решающую роль при прогнозировании роста трещины. Предположим, что кривая $\partial\omega_0$, моделирующая границу жесткого включения, содержит семейство кривых

$$\gamma_\varepsilon = \{(x_1, x_2)\,|\,x_2 = g(x_1), \quad 0 < x_1 < l + \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_1).$$

Функция $g \in H^3(x_m, x_M)$, где $x_m = \inf\limits_{(x_1,x_2)\in\Omega} x_1$, $x_M = \sup\limits_{(x_1,x_2)\in\Omega} x_1$. При этом параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ будет задавать возмущение трещины. Как и ранее, кривая γ_0 соответствует исходной невозмущенной трещине.

Рассмотрим гладкую срезающую функцию ϑ с носителем вблизи вершины трещины $(l; g(l))$. Более того, предположим, что $\vartheta = 1$ в малой окрестности точки $(l; g(l))$.

Зафиксируем ε. Свойства функций g и ϑ, позволяют взаимно-однозначно отобразить исходную область с разрезом $\Omega_0 = \Omega\backslash\overline{\gamma}_0$ на возмущенную область $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\overline{\gamma}_\varepsilon$ с помощью следующего гладкого отображения $y = \Phi^g_\varepsilon(x)$:

$$\begin{cases} y_1 = \Phi^g_{\varepsilon 1}(x) = x_1 + \varepsilon\vartheta(x), \\ y_2 = \Phi^g_{\varepsilon 2}(x) = x_2 + g(x_1 + \varepsilon\vartheta(x)) - g(x_1), \end{cases} \tag{3.3.59}$$

где $x \in \Omega_0$, $y \in \Omega_\varepsilon$. Как и выше будем считать, что функции $\Phi^g_{\varepsilon i}(x)$, $(\Phi^g_{\varepsilon i})^{-1}(y)$, $i = 1, 2$, принадлежат пространству $C^1([0, \varepsilon_0); W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2))$.

Преобразование (3.3.59) эквивалентно следующему

$$y = x + \varepsilon V + r(\varepsilon, x)$$

с векторным полем

$$V(x) = (\vartheta, g'(x_1)\vartheta). \tag{3.3.60}$$

Таким образом, для возмущения, описывающего распространение трещины, производная по параметру ε вычисляется по формуле (3.3.56), где функция

V находится по формуле (3.3.60). Тогда производная по длине трещины в данном случае находится по формуле

$$\Pi'(l) = \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (g^2(s)+1)^{-1/2}, \tag{3.3.61}$$

где

$$s = \int_0^l \sqrt{(g'(t))^2+1}dt$$

— длина трещины γ_0. Следует отметить, что производная функционала энергии (3.3.61) не зависит от функции ϑ, это следует из (3.3.21).

Глава 4

Задачи оптимального управления

4.1 Оптимальное управление размером включения в задаче о равновесии пластины Тимошенко с трещиной вдоль жесткого включения

Широкое применение композитных материалов диктует растущий интерес в изучении и совершенствовании математических моделей, описывающих деформирование тел с включениями. Общность вариационных методов позволяет успешно формулировать и исследовать различные задачи для тел с жесткими и упругими включениями (см., например [55, 76, 127, 159, 168, 181]).

Известно, что наличие в деформируемом теле инородных включений может стать причиной возникновения больших концентраций напряжений. При этом механические и геометрические свойства включений часто оказывают влияние на возможность появления трещин и развития уже существующих трещин.

В исследовании задач для различных моделей упругих тел с жесткими включениями и трещинами, применяются как линейные, так и нелинейные граничные условия (см. [20, 55, 97, 138, 147, 157, 184]). Вариационные подходы используются в [55, 76, 127, 154, 168, 181] и др. В частности, теория двумерных задач теории упругости с тонкими жесткими включениями и возможным отслоением предложена в [55]. Трехмерный случай рассмотрен в

[152]. Анализ зависимости решения задачи равновесия от вариации формы тонкого жесткого включения в упругом двумерном теле с трещиной, выходящей за пределы включения, проведен в [158]. Что касается случая объемных включений, доказано существование оптимальной формы включения в семействе задач о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и объемным жестким включением [157]. Для двумерной статической задачи найдена производная функционала энергии упругого тела с трещиной вдоль тонкого жесткого включения [181]. Относительно пластины модели Кирхгофа-Лява, содержащей тонкое жесткое включение, изучены два случая, когда включение сцеплено с упругой частью пластины и второй — когда трещина расположена вдоль границы жесткого включения [117]. При этом для первого случая установлено, что задача с тонким (двумерным) жестким включением является предельной для семейства задач с объемным (трехмерным) жестким включением.

В настоящем параграфе исследуются задачи о равновесии пластины Тимошенко с жестким включением. В формулировках задач объемное включение задается трехмерной областью, а тонкое включение — двумерной поверхностью. Для всех задач предполагается, что часть трещины расположена на поверхности включения, а другая часть трещины находится в упругой среде. Формулируется задача оптимального управления, в которой производная функционала энергии по отношению к параметру возмущения трещины выступает в роли функционала качества, а управляющий параметр характеризует размер включения. Доказана разрешимость задачи оптимального управления.

Кроме того, установлена качественная связь между задачами о равновесии пластин с жесткими включениями разного размера. В частности, доказано, что решения семейства задач о равновесии пластин с объемным жестким включением сходятся сильно в пространстве Соболева к решению задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением при стремлении параметра размера (толщины) включения к нулю.

4.1.1 Постановка семейства вариационных задач о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе жесткого включения

Сформулируем семейство задач, описывающих равновесие неоднородных пластин с трещиной на границе жесткого объемного включения. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладкой кривой Γ. Предположим, что гладкая незамкнутая кривая Υ лежит строго внутри области Ω т.е. $\overline{\Upsilon} \subset \Omega$; Υ состоит из двух кривых γ и γ_c таких, что $\Upsilon = \gamma \cup \gamma_c$, $\gamma \cap \gamma_c = \emptyset$, $\mathrm{meas}(\gamma) > 0$, $\mathrm{meas}(\gamma_c) > 0$. Считаем, что кривую Υ можно продолжить до кривой Σ, делящей область Ω на две области Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, так, чтобы $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Это предположение достаточно для выполнения неравенств Корна и Пуанкаре в негладкой области $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\Upsilon}$. Рассмотрим семейство односвязных областей ω_t, $t \in (0, t_0]$ удовлетворяющих следующим свойствам:

a) границы $\partial\omega_t$ являются гладкими, при этом справедливо включение $\partial\omega_t \in C^{0,1}$;

b) $\omega_{t'} \subset \omega_t$, $\overline{\omega}_t \subset \Omega$ для всех $t, t' \in (0, t_0]$, $t' < t$;

c) для любого фиксированного $t' \in (0, t_0)$ и любой окрестности $\mathcal{O}$ области $\overline{\omega}_{t'}$ существует число $t_{\mathcal{O}} > t'$ такое, что $\omega_t \subset \mathcal{O}$ для всех $t \in [t', t_{\mathcal{O}}]$;

d) $\gamma \subset \partial\omega_t$, $\gamma_c \cap \overline{\omega}_t = \emptyset$ для всех $t \in (0, t_0]$;

e) для любой окрестности $\mathcal{O}$ кривой γ существует число $t_{\mathcal{O}} > 0$ такое, что $\omega_t \subset \mathcal{O}$ для всех $t \in (0, t_{\mathcal{O}}]$;

f) $\bigcup\limits_{t<t'} \omega_t = \omega_{t'}$ для всех $t' \in (0, t_0]$.

g) существует область $\mathcal{E}$ с липшицевой границей $\partial\mathcal{E}$, такая, что $\overline{\mathcal{E}} \subset \Omega$, $\Upsilon \subset \partial\mathcal{E}$, $\omega_{t_0} \subset \mathcal{E}$, границы односвязных областей $\mathcal{E} \backslash \overline{\omega}_t$ являются липшицевыми для всех $t \in (0, t_0]$.

В качестве примера приведем следующее семейство областей

$$\omega_t = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \in (-a, 0), \quad g(x_1) - t < x_2 < g(x_1)\}, \quad a > 0, \quad \overline{\omega}_t \subset \Omega,$$

где $g \in C^{0,1}(-a, 0)$. При этом кривая γ задается соотношениями

$\gamma = \{(x_1, x_2) \mid -a < x_1 \leq 0, \quad x_2 = g(x_1)\}$, а кривая γ_c — как ее продолжение см. рис. 4.1. Для простоты предположим, что толщина пластины является

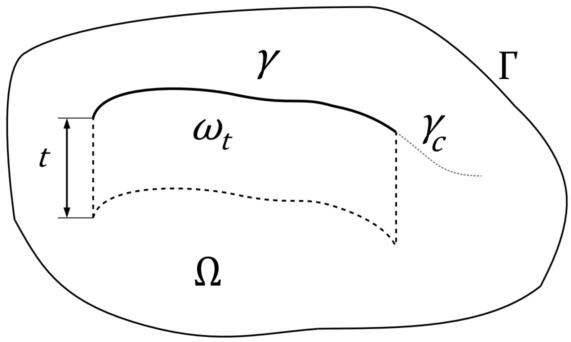

Рис. 4.1: Пример областей ω_t.

постоянной и равной $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы множество $\{\Omega_0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Кривая Υ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \Upsilon$, $-1 \leq z \leq 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. Для фиксированного $t \in (0, t_0]$ жесткое включение будет задаваться множеством $\omega_t \times [-1, 1]$; а упругая часть пластины соответствует области $\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_t$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ нормаль к Υ. Выбор нормали позволяет ввести положительный Υ^+ и отрицательный Υ^- берега кривой Υ. Скачок функции v на Υ найдем по формуле $[v] = v|_{\Upsilon^+} - v|_{\Upsilon^-}$.

Обозначим через $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$ вектор обобщенных перемещений точек срединной поверхности ($x = (x_1, x_2) \in \Omega_0$), $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — вдоль оси z, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ – углы поворота нормальных сечений. Для удобства будем также использовать обозначения η_i, $i = 1, 2..., 5$ для компонент вектора η, при этом $(\eta_1, \eta_2) = W$, $\eta_3 = w$, $(\eta_4, \eta_5) = \psi$.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины,

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \; i, j = 1, 2, \; (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2. \qquad (4.1.1)$$

Ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijkl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\, a_{iijj} = D\text{æ},\, a_{ijij} = a_{ijji} = D(1-\text{æ})/2,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$ [86]. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1,2, \tag{4.1.2}$$

где Λ — коэффициент, описывающий упругие свойства пластины относительно поперечного сдвига [86]. Пусть $B(\mathcal{G},\cdot,\cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(\mathcal{G},\eta,\bar\eta) = \int\limits_{\mathcal{G}} \{m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i) + \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(\bar W)\}dx,$$

где $\mathcal{G}$ подобласть с гладкой границей области Ω, $\eta = (W,w,\psi)$, $\bar\eta = (\bar W,\bar w,\bar\psi)$.

Функционал энергии имеет вид

$$\Pi(\Omega_0;\eta) = \frac{1}{2}B(\Omega_0,\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_0} F\eta dx\,, \quad \eta = (W,w,\psi),$$

где $F = (f_1,f_2,f_3,\mu_1,\mu_2) \in C^1(\Omega)^5$ — вектор, задающий внешние нагрузки. Пусть $H^1(\Omega_0)$ — пространство Соболева, $H^{1,0}(\Omega_0)$ — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе Γ. Введем следующие обозначения:

$$H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5\,, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}.$$

С помощью неравенств Корна и Пуанкаре можно доказать следующую оценку

$$B(\Omega_0,\eta,\eta) \geq c\|\eta\|^2 \quad \forall \eta \in H(\Omega_0), \tag{4.1.3}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от η (см. неравенство (2.1.4) параграфа 2.1).

Наличие жесткого включения приводит к тому, что перемещения и углы поворота описываются в области ω_t функциями специального вида. Введем пространство, характеризующее свойства жесткого включения (см. соотношения в выражении (2.3.1) параграфа 2.3)

$$R(\omega_t) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = $$
$$= (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); \quad x \in \omega_t\}, \qquad (4.1.4)$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины без учета сил трения пластины имеет вид:

$$[W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon. \qquad (4.1.5)$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с объемным жестким включением сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K_t} \Pi(\Omega_0; \eta), \qquad (4.1.6)$$

где

$$K_t = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0) \;\Big|\; [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon, \; \eta|_{\omega_t} \in R(\omega_t)\}$$

— множество допустимых функций. Заметим, что включение $\eta \in H(\Omega_0)$ означает выполнение однородных краевых условий на внешней границе:

$$w = 0, \quad \psi = W = (0, 0) \;\; \text{на} \;\; \Gamma. \qquad (4.1.7)$$

Известно, что задача (4.1.6) имеет единственное решение $\xi_t \in K_t$ и эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. параграф 2.3)

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_0, \xi_t, \eta - \xi_t) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_t)dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_t. \qquad (4.1.8)$$

Наряду с задачей о равновесии пластины с объемным жестким включением, рассмотрим задачу о равновесии пластины с тонким жестким включением, которое описывается с помощью следующей цилиндрической поверхности $x = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leq z \leq 1$. Введем сначала следующие обозначения:

$$R(\gamma) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2,$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); \quad x \in \gamma\}, \qquad (4.1.9)$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;

$$K_0 = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0) \,|\, [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon; \quad \eta|_{\gamma^-} \in R(\gamma)\}.$$

Сформулируем задачу в вариационном виде. Требуется найти функцию $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0$ такую, что

$$\Pi(\Omega_0; \xi_0) = \inf_{\eta \in K_0} \Pi(\Omega_0; \eta). \tag{4.1.10}$$

Задача (4.1.10) имеет единственное решение $\xi_0 \in K_0$, удовлетворяющее вариационному неравенству (см. (2.4.17))

$$\xi_0 \in K_0, \quad B(\Omega_0, \xi_0, \eta - \xi_0) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_0) dx \quad \forall \eta \in K_0. \tag{4.1.11}$$

4.1.2 Задача оптимального управления

Для того чтобы определить функционал качества, рассмотрим два вспомогательных семейства задач. Прежде сделаем дополнительные предположения. Положим для простоты, что γ_c — часть прямой, а именно, $\gamma_c = (0, 1) \times \{0\}$. Кроме того, будем считать, что существует окрестность $\mathcal{O} \subset \Omega$ точки $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $\omega_t \cap \mathcal{O} = \emptyset$, для всех $t \in (0, t_0]$. Пусть δ — неотрицательный параметр возмущения; введем обозначение $\gamma_c^\delta = (0, 1 + \delta) \times \{0\}$. Далее будем считать, что для всех $\delta \in [0, \delta_0]$ справедливо включение $\gamma_c^\delta \backslash \gamma_c \subset \mathcal{O}$. Возмущенную область обозначим через $\Omega_\delta = \Omega \backslash \overline{\Upsilon}_\delta$, где $\Upsilon_\delta = \gamma \cup \gamma_c^\delta$ (см. рис. 4.2.) По аналогии с предыдущими обозначениями введем пространство

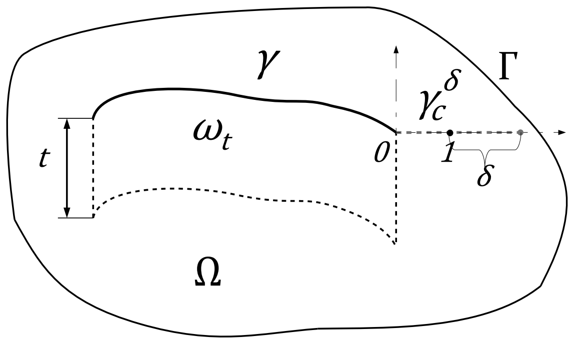

Рис. 4.2: Прямолинейное возмущение трещины.

$H(\Omega_\delta)$. Рассмотрим функционал энергии

$$\Pi(\Omega_\delta;\eta) = \frac{1}{2}B(\Omega_\delta,\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_\delta} F\eta dx\,, \quad \eta = (W,w,\psi). \tag{4.1.12}$$

Сформулируем задачу, описывающую равновесие пластины с возмущенной трещиной Υ_δ, которая проходит вдоль жесткого включения, заданного с помощью области ω_t, $t\in(0,t_0]$. Требуется найти функцию $\xi_t^\delta \in K_t^\delta$ такую, что

$$\Pi(\Omega_\delta;\xi_t^\delta) = \inf_{\eta\in K_t^\delta}\Pi(\Omega_\delta;\eta), \tag{4.1.13}$$

где множество допустимых функций имеет вид

$$K_t^\delta = \{\eta\in H(\Omega_\delta)\,|\,[W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon_\delta;\, \eta|_{\omega_t}\in R(\omega_t)\}.$$

Применяя подобные рассуждения, рассмотрим также семейство вспомогательных задач для пластины с тонким жестким включением. Требуется найти функцию $\xi_0^\delta\in K_0^\delta$ такую, что

$$\Pi(\Omega_\delta;\xi_0^\delta) = \inf_{\eta\in K_0^\delta}\Pi(\Omega_\delta;\eta), \tag{4.1.14}$$

где $K_0^\delta = \{\eta\in H(\Omega_\delta)\,|\,[W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon_\delta;\;\eta|_{\gamma^-}\in R(\gamma)\}$.

Ввиду прямолинейности γ_c^δ, основываясь на результатах о существовании производной функционала энергии пластины Тимошенко по отношению к параметру δ, описывающему возмущение плоской трещины (см. [42]), можно вывести следующую формулу производной функционала энергии для семейства задач (4.1.13)

$$G(t,\xi_t^0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta;\xi_t^\delta) - \Pi(\Omega_0;\xi_t^0)}{\delta} =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0}\Big\{\frac{1}{2}\theta_{,1}b(\xi_t^0,\xi_t^0) - \big(\sigma_{ij}(U_t^0)u^0_{ti,1}\theta_{,j} +$$
$$+m_{ij}(\phi_t^0)\phi^0_{ti,1}\theta_{,j} + q_i(u_t^0,\phi_t^0)u^0_{t,1}\theta_{,i} + (\theta F)_{,1}\,\xi_t^0\big)\Big\}dx, \tag{4.1.15}$$

где $\xi_t^0 = (U_t^0,u_t^0,\phi_t^0)$, $U_t^0 = (u_{t1}^0,u_{t2}^0)$ и $u^0_{ti,1} = \dfrac{\partial u^0_{ti}}{\partial x_1}$, $i=1,2$. Также существует производная функционала энергии по отношению к параметру δ при $\delta\to 0$

для семейства задач (4.1.14):

$$G(0,\xi_0^0)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta;\xi_0^\delta)-\Pi(\Omega_0;\xi_0^0)}{\delta}=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\left\{\frac{1}{2}\theta_{,1}b(\xi_0^0,\xi_0^0)-\big(\sigma_{ij}(U_0^0)u_{0i,1}^0\theta_{,j}+\right.$$
$$\left.+m_{ij}(\phi_0^0)\phi_{0i,1}^0\theta_{,j}+q_i(u_0^0,\phi_0^0)u_{0,1}^0\theta_{,i}+(\theta F)_{,1}\,\xi_0^0\big)\right\}dx,\quad (4.1.16)$$

где $\xi_0^0=(U_0^0,u_0^0,\phi_0^0)$, $U_0^0=(u_{01}^0,u_{02}^0)$ и $u_{0i,1}^0=\dfrac{\partial u_{0i}^0}{\partial x_1}$, $i=1,2$. В формулах (4.1.15), (4.1.16) значение производной функционала энергии не зависит от выбора гладкой функции θ, удовлетворяющей свойствам $\mathrm{supp}(\theta)\subset\mathcal{O}_1$, $\theta=1$ в $\mathcal{O}_2$; где $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_1$ — некоторые окрестности точки $(1,0)\in\mathbb{R}^2$, $\mathcal{O}_2\subset\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}$. Заметим, что фактически в интегралах (4.1.15), (4.1.16) интегрирование ведется по носителю $\mathrm{supp}(\theta)$.

Замечание 4.1.1. *Формулы* (4.1.15) *и* (4.1.16) *получены в условиях предположения о том, что возмущаемая часть трещины расположена в упругой среде (т.е.* $meas(\gamma_c)>0$*). В случае* $meas(\gamma_c)=0$ *обоснование существования и вывод формулы производной функционала представляет собой более сложную задачу и требует отдельного исследования.*

Поскольку производная $G(t,\xi_t^0)$ зависит от параметра $t\in[0,t_0]$, задающего размер области ω_t, мы можем взять ее в качестве функционала качества, а параметр t — в роли управляющего параметра. Как известно, значение производной функционала энергии играет решающую роль в формулировке критерия разрушения Гриффитса: развитие (распространение) трещины происходит в том случае, когда производная по параметру возмущения трещины достигает критического значения; в противном случае трещина остается без изменений [82, 123]. Нас интересует следующая задача, которая с физической точки зрения может интерпретироваться как задача о существовании наиболее безопасного размера включения. Требуется найти значение $t^*\in[0,t_0]$, такое что

$$G(t^*,\xi_{t^*})=\sup_{t\in[0,t_0]}G(t,\xi_t).\qquad (4.1.17)$$

Теорема 4.1.1. *Задача оптимального управления* (4.1.17) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности сегмента $[0, t_0]$, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$, такую что

$$t_{n_k} \to t^* \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad t^* \in [0, t_0].$$

Не нарушая общности, предположим, что $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k. Поскольку, в противном случае, должна найтись подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$, такая что $t_{n_l} \equiv t^*$ и, следовательно, $G(t^*, \xi_{t^*})$ — решение задачи (4.1.17). Итак, рассмотрим случай подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$, удовлетворяющей $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k. Принимая во внимание доказанную ниже лемму 4.1.2, выводим, что решения ξ_k задач (4.1.6), соответствующие параметрам t_{n_k}, сходятся сильно к ξ_{t^*} в пространстве $H(\Omega_0)$ при $k \to \infty$. Это позволяет установить следующую сходимость

$$G(t_{n_k}, \xi_k) \to G(t^*, \xi_{t^*}).$$

Поэтому получим, что

$$G(t^*, \xi_{t^*}) = \sup_{t \in [0, t_0]} G(t, \xi_t).$$

Теорема доказана.

Далее докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 4.1.1. *Пусть* $t^* \in [0, t_0)$ *— фиксированный параметр, а последовательность чисел* $\{t_n\} \subset [t^*, t_0]$ *сходится к* t^* *при* $n \to \infty$. *Тогда для произвольной функции* $\eta \in K_{t^*}$ *существует подпоследовательность* $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность функций* $\{\eta_k\}$ *такие, что* $\eta_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $\eta_k \to \eta$ *слабо в* $H(\Omega_0)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Очевидно, что если существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $t_{n_k} = t^*$, то утверждение леммы выполнено для $\eta_k \equiv \eta$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, далее мы предполагаем, что $t_n > t^*$ для достаточно больших n. Пусть $\zeta^* = \eta|_{\omega_{t^*}} = (b^* x_2 + c_1^*, -b^* x_1 + c_2^*, a_0^* + a_1^* x_1 + a_2^* x_2, -a_1^*, -a_2^*)$ — ограничение функции η в ω_{t^*} для случая $t^* > 0$. В другом случае, когда $t^* = 0$ и функция η имеет заданную структуру на γ^-, мы применим такое же обозначение т.е. $\zeta^* = \eta|_{\gamma^-}$ на γ^-. Доопределим функцию ζ^* на всю область Ω с помощью равенства:

$$\zeta^* = (b^* x_2 + c_1^*, -b^* x_1 + c_2^*, a_0^* + a_1^* x_1 + a_2^* x_2, -a_1^*, -a_2^*), \quad x \in \Omega.$$

Зафиксируем произвольное значение $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим следующие вспомогательную задачу. Требуется найти $\eta_t \in K_t'$ такую, что

$$p(\eta_t) = \inf_{\chi \in K_t'} p(\chi), \tag{4.1.18}$$

где $p(\chi) = B(\Omega_0, \chi - \eta, \chi - \eta)$,

$$K_t' = \{\chi \in H(\Omega_0) \,|\quad \chi = \eta \quad \text{на} \quad \Upsilon^\pm, \ \chi|_{\omega_t} = \zeta^*\}.$$

Легко видеть, что функционал $p(\chi)$ строго выпуклый, коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу в пространстве $H(\Omega_0)$. Кроме того, легко проверить, что множество K_t' выпукло и замкнуто в $H(\Omega_0)$. Эти свойства гарантируют существование единственного решения η_t задачи (4.1.18) (см. теорему 1.4.1 и лемму 1.4.3). Поскольку функционал $p(\chi)$ выпуклый и дифференцируемый в пространстве $H(\Omega_0)$, задача (4.1.18) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\eta_t \in K_t', \quad B(\Omega_0, \eta_t - \eta, \chi - \eta_t) \geq 0 \quad \forall \chi \in K_t'. \tag{4.1.19}$$

В силу свойства **b**), решение η_{t_0} задачи (4.1.19), соответствующее параметру $t = t_0$, принадлежит множествам K_t' с любым параметром $t' \in (0, t_0]$. Подставляя η_{t_0} в качестве пробной функции в неравенство (4.1.19), получим

$$B(\Omega_0, \eta_t - \eta, \eta_{t_0}) + B(\Omega_0, \eta, \eta_t) \geq B(\Omega_0, \eta_t, \eta_t) \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Используя неравенство (4.1.3), из последнего соотношения выводим следующую равномерную оценку:

$$\|\eta_t\| \leq c \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Последнее означает, что можно извлечь из $\{\eta_{t_n}\}$ подпоследовательность $\eta_{t_{n_k}}$ (ее далее будем обозначать через $\{\eta_k\}$) такую, что $\{\eta_k\}$ слабо сходится к некоторой функции $\widetilde{\eta}$ в $H(\Omega_0)$. Пусть, для удобства, обозначение $\{t_k\}$ означает следующую последовательность $t_k = t_{n_k}$.

Покажем, что $\widetilde{\eta} = \eta$. Далее мы должны различать два случая относительно значения t^*, а именно, случаи $t^* > 0$ и $t^* = 0$. Пусть сначала $t^* > 0$. Тогда, по построению $(\eta_k - \eta) \in H_0^1(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5$. Следовательно, ввиду слабой замкнутости $H_0^1(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5$ заключаем, что $(\widetilde{\eta} - \eta) \in H_0^1(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5$. Рассмотрим пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = \eta_k \pm \alpha$, где α — произвольная функция из пространства $C_0^{\infty}(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5$, продолженная нулем на область Ω_0. В силу свойства **c**) заметим, что $\chi_k^{\pm} \in K'_{t_k}$ для достаточно больших k. Подставим далее функции χ_k^{+} и χ_k^{-}, $k = 1, 2, ...$, в качестве тестовых в вариационные неравенства (4.1.19), соответствующие значениям t_k. В результате, имеем

$$\eta_k \in K'_{t_k}, \quad B(\Omega_0, \eta_k - \eta, \alpha) = 0. \tag{4.1.20}$$

Переходя к пределу в (4.1.20) при $k \to \infty$ с фиксированной функцией α, получим

$$B(\Omega_0, \widetilde{\eta} - \eta, \alpha) = B(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*}, \widetilde{\eta} - \eta, \alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in C_0^{\infty}(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5.$$

Плотность $C_0^{\infty}(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})$ в $H_0^1(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})$ влечет равенство $\widetilde{\eta} - \eta = 0$ в $H_0^1(\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_{t^*})^5$. Наконец, по построению равенство $\widetilde{\eta} = \eta$ выполнено в ω_{t^*}. Значит, $\widetilde{\eta} = \eta$ в $H(\Omega_0)$. Таким образом, существует последовательность $\{\eta_k\}$ такая, что $\eta_k \in K_{t_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть $t^* = 0$. По построению имеем $(\eta_k - \eta) \in H_0^1(\Omega_0)^5$ и, следовательно, соотношение $(\widetilde{\eta} - \eta) \in H_0^1(\Omega_0)^5$ выполнено. Выберем пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = \eta_k \pm \alpha$, где $\alpha \in C_0^{\infty}(\Omega_0)^5$. Свойство **e**) влечет, что для достаточно больших k справедливо следующее включение $\chi_k^{\pm} \in K'_{t_k}$. Подставляя эти функции в неравенства (4.1.19), соответствующие значениям t_k, извлекаем

$$\eta_k \in K'_{t_k}, \quad B(\Omega_0, \eta_k - \eta, \alpha) = 0. \tag{4.1.21}$$

Зафиксируем функцию α в (4.1.21) и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В итоге находим

$$B(\Omega_0, \widetilde{\eta} - \eta, \alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in C_0^\infty(\Omega_0)^5. \tag{4.1.22}$$

Плотность $C_0^\infty(\Omega_0)$ в $H_0^1(\Omega_0)$ позволяет получить из (4.1.22) следующее равенство $\widetilde{\eta} - \eta = 0$ в $H(\Omega_0)$. Это означает, что $\widetilde{\eta} = \eta$ в $H(\Omega_0)$. Итак, и во втором случае имеем последовательность $\{\eta_k\}$, удовлетворяющую соотношениям: $\eta_k \in K_{t_k}$, $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega_0)$. Лемма доказана.

Сформулируем теперь следующее утверждение.

Лемма 4.1.2. *Пусть $t^* \in [0, t_0]$ — фиксированное число. Тогда имеет место сильная сходимость $\xi_t \to \xi_{t^*}$ в пространстве $H(\Omega_0)$ при $t \to t^*$, где ξ_t — решение задачи (4.1.6), соответствующее параметру $t \in (0, t_0]$, а ξ_{t^*} является решением задачи (4.1.6) при $t^* > 0$ и задачи (4.1.10) — при $t^* = 0$.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что существуют число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, t_0]$ такие, что $t_n \to t^*$, $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon_0$, где $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, являются решениями задач (4.1.6), соответствующих параметрам t_n.

Поскольку $\eta^0 \equiv 0 \in K_t$ для всех $t \in [0, t_0]$, мы можем подставить $\eta = \eta^0$ в (4.1.8) для любого фиксированного $t \in (0, t_0]$ и в неравенство (4.1.11) при $t = 0$. Это влечет соотношение

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_0, \xi_t, \xi_t) \leq \int\limits_{\Omega_0} F\xi_t dx \quad \forall\, t \in [0, t_0].$$

Отсюда, используя соотношение (4.1.3), выводим равномерную по $t \in [0, t_0]$ оценку

$$\|\xi_t\| \leq c$$

с постоянной $c > 0$ независящей от t. Следовательно, заменяя ξ_n ее подпоследовательностью в случае необходимости, можно считать, что ξ_n сходится к некоторой функции $\tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega_0)$.

Далее покажем, что $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$. В самом деле, имеем $\xi_n|_{\omega_{t_n}} = \zeta_n \in R(\omega_{t_n})$. В соответствии с теоремами вложения Соболева [56], найдутся подпоследовательности, обозначенные прежним образом такие, что

$$\xi_n|_{\omega_{t^*}} \to \tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \quad \text{сильно в } L_2(\omega_{t^*})^5 \text{ при } n \to \infty, \tag{4.1.23}$$

$$\xi_n|_{\Upsilon} \to \tilde{\xi}|_{\Upsilon} \quad \text{сильно в } L_2(\Upsilon)^5 \text{ при } n \to \infty. \tag{4.1.24}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ п.в. в ω_{t^*} при $n \to \infty$. Это позволяет заключить, что каждая из числовых последовательностей $\{b_n\}$, $\{c_{1n}\}$, $\{c_{2n}\}$, $\{a_{0n}\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, определяющих структуру ζ_n в областях ω_{t_n}, ограничена по абсолютной величине. Поэтому, мы можем извлечь сходящиеся числовые подпоследовательности (с сохранением обозначений):

$$b_n \to b, \quad a_{0n} \to a_0, \quad c_{in} \to c_i, \quad a_{in} \to a_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Снова рассмотрим два случая: $t^* = 0$ и $t^* > 0$. В первом случае для последовательности $\{\xi_n\}$, соответствующей выбранным числовым последовательностям $\{b_n\}$, $\{c_{1n}\}$, $\{c_{2n}\}$, $\{a_{0n}\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, выполняется

$$\xi_n|_{\gamma^-} \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \tag{4.1.25}$$

сильно в $L_2(\gamma)^5$ при $n \to \infty$. Последнее вместе с (4.1.23) приводит к равенству

$$\tilde{\xi} = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{п.в. на} \quad \gamma^-.$$

Это означает, что $\tilde{\xi}|_{\gamma^-} \in R(\gamma)$.

Исследуем второй случай. Для последовательности $\{t_n\}$ найдется либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, сходящаяся слева к t^*, либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Если существует подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то можно легко установить следующую сильную сходимость

$$\xi_k|_{\omega_{t^*}} \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \tag{4.1.26}$$

в пространстве $L_2(\omega_{t^*})^5$ при $k \to \infty$. Таким образом, из (4.1.26) и (4.1.23) устанавливаем, что имеет место включение $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Предположим теперь, что существует сходящаяся слева подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, т.е. $t_k < t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_k \to t^*$ при $k \to \infty$. В рамках этого предположения, для фиксированного $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующего значения $t' = t_{k'}$, свойство **b**) влечет следующую сильную сходимость

$$\xi_k|_{\omega_{t'}} \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \qquad (4.1.27)$$

в пространстве $L_2(\omega_{t'})^5$ при $k \to \infty$. Определим функцию $\mathcal{L}$ в ω_{t^*} следующим равенством $\mathcal{L} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. В силу (4.1.27) следует, что $u_k \to \mathcal{L}$ сильно в $L^2(\omega_{t'})$. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега и свойств **b**), **f**), для любого положительного $\epsilon > 0$ можно выбрать номер $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующее число $t' = t_{k'}$, такие что

$$\|\mathcal{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|\tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}.$$

Далее, используя дважды неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}\|u_k - \mathcal{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} &\le \|u_k\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|\mathcal{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} \le \\ &\le \|\tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|\mathcal{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \\ &< 2\sqrt{\epsilon} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})}.\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|u_k - \mathcal{L}\|^2_{L^2(\omega_{t^*})} &= \|u_k - \mathcal{L}\|^2_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_k - \mathcal{L}\|^2_{L^2(\omega_{t'})} \\ &< (2\sqrt{\epsilon} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})})^2 + \|u_k - \mathcal{L}\|^2_{L^2(\omega_{t'})}. \qquad (4.1.28)\end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что для достаточно больших k имеют место неравенства

$$\|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|u_k - \mathcal{L}\|_{L^2(\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon},$$

следовательно, правая часть соотношения (4.1.28) меньше чем 10ϵ. Таким образом, $u_k \to \mathcal{L}$ сильно в $L^2(\omega_{t^*})$. Далее, принимая во внимание (4.1.23), выводим $\tilde{u}|_{\omega_{t^*}} = \mathcal{L}$ в ω_{t^*}.

Аналогично можно получить, что

$$\tilde{U}|_{\omega_{t^*}} = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_{t^*},$$
$$\tilde{\phi}|_{\omega_{t^*}} = (-a_1, -a_2) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_{t^*}.$$

Значит, справедливо включение $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$. В итоге, для всех возможных случаев имеем $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Остается показать, что $\tilde{\xi}$ удовлетворяет неравенству $[\tilde{U}]\nu \geq |[\tilde{\phi}]\nu|$ на Υ. Ввиду сходимости (4.1.24), мы можем извлечь еще раз подпоследовательности и считать, что $\xi_n|_\Upsilon \to \tilde{\xi}|_\Upsilon$ п.в. на $\Upsilon^\pm$. Этот факт позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах

$$[U_n]\nu \geq |[\phi_n]\nu| \quad \text{на} \quad \Upsilon.$$

В результате, имеем $[\tilde{U}]\nu \geq |[\tilde{\phi}]\nu|$ на Υ. Последнее обеспечивает включение $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$.

Целью последующих рассуждений является доказательство справедливости равенства $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$ и существования сильно сходящейся к ξ_{t^*} в пространстве $H(\Omega_0)$ последовательности решений $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n = 1, 2....$ Заметим, что для сходящейся к t^* последовательности $\{t_n\}$ существует либо подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$, такая что $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$, либо подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$, удовлетворяющая $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для первого случая имеем подпоследовательность $\{t_{n_l}\} \subset (0, t_0]$ со свойством $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Это означает, что $t^* > 0$. Для удобства будем обозначать эту последовательность через $\{t_n\}$. Поскольку $t_n \leq t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$, в силу свойства **b**), произвольная тестовая функция η из множества K_{t^*} принадлежит также множеству K_{t_n}. Это свойство позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах с тестовой функцией $\eta \in K_{t^*}$:

$$\xi_n \in K_{t_n}, \quad B(\Omega_0, \xi_n, \eta - \xi_n) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \xi_n)dx, \quad t_n \in (0, t^*].$$

Принимая во внимание слабую сходимость $\xi_n \to \tilde{\xi}$ в $H(\Omega_0)$, предельное неравенство примет вид

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \tilde{\xi}) dx \quad \forall\, \eta \in K_{t^*}.$$

Ввиду произвольности $\eta \in K_{t^*}$ последнее неравенство является вариационным. Поэтому, из него вытекает, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Чтобы завершить доказательство для первого случая, нужно установить сильную сходимость $\xi_n \to \xi_{t^*}$. Подставляя $\eta = 2\xi_t$ и $\eta = 0$ в вариационные неравенства (4.1.8) для $t \in (0, t_0]$, получим

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_0, \xi_t, \xi_t) = \int\limits_{\Omega_0} F\xi_t dx \quad \forall\, t \in (0, t_0]. \tag{4.1.29}$$

Последнее равенство вместе с (4.1.8) гарантируют, что следующее неравенство

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_0, \xi_t, \eta) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\eta dx \quad \forall \eta \in K_t \tag{4.1.30}$$

выполнено для всех $t \in (0, t_0]$. В силу слабой сходимости $\xi_n \to \xi_{t^*}$ в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$ и соотношения (4.1.29) находим

$$\lim_{n\to\infty} B(\Omega_0, \xi_n, \xi_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} F\xi_n dx = \int\limits_{\Omega_0} F\xi_{t^*} dx = B(\Omega_0, \xi_{t^*}, \xi_{t^*}).$$

Ввиду эквивалентности норм (см. замечание 4.1.1) последняя цепочка означает, что $\xi_n \to \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$. Таким образом, в первом случае мы получили противоречие к исходному предположению: $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим второй случай, т.е. предположим, что элементы подпоследовательности $\{t_{n_m}\}$ удовлетворяют $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Для удобства будем обозначать ее через $\{t_n\}$. Итак, $t_n \to t^*$ и $t_n > t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание результаты, полученные в начале доказательства, выведем, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$. Сначала докажем, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ сильно в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$. Ввиду слабой сходимости $\xi_n \to \tilde{\xi}$ в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$, из (4.1.29) извлекаем

$$\lim_{n\to\infty} B(\Omega_0, \xi_n, \xi_n) = \int\limits_{\Omega_0} F\tilde{\xi} dx. \tag{4.1.31}$$

Затем, для фиксированного $t \in (0, t_0]$, подставляя пробные функции вида $\eta = \xi_{t'} \in K_{t'} \subset K_t$ с произвольными числами $t' \in (0, t_0]$, $t' \geq t$ в вариационное неравенство (4.1.30), соответствующее параметру t, получим

$$B(\Omega_0, \xi_t, \xi_{t'}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\xi_{t'} dx.$$

Отсюда можно сделать заключение, что для всех t_n и t_m удовлетворяющих $t_n \leq t_m$ выполнено следующее неравенство

$$B(\Omega_0, \xi_n, \xi_m) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\xi_m dx. \tag{4.1.32}$$

Зафиксируем произвольное значение $m \in \mathbb{N}$ в (4.1.32) и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве. В итоге получим

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \xi_m) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\xi_m dx. \tag{4.1.33}$$

Затем, переходя к пределу в (4.1.33) при $m \to \infty$, находим

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\tilde{\xi} dx.$$

Отсюда с помощью формулы (4.1.31) и слабой полунепрерывности функционала, определяемого билинейной формой $B(\Omega_0, \cdot, \cdot)$, выводим следующие соотношения

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\tilde{\xi} dx = \lim_{n\to\infty} B(\Omega_0, \xi_n, \xi_n) \geq B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}).$$

Значит,

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = \lim_{n\to\infty} B(\Omega_0, \xi_n, \xi_n).$$

Снова используя эквивалентность норм (см. замечание 4.1.1), извлекаем, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ сильно в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$.

В соответствии с леммой 4.1.1 для всех $\eta \in K_{t^*}$ найдется подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\eta_k\}$, такие что $\eta_k \in K_{t_k}$ и $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega_0)$ при $k \to \infty$.

Свойства, установленные для сходящихся последовательностей $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_n\}$, позволяют перейти к пределу при $k \to \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (4.1.8) для t_k и тестовых функций η_k:

$$B(\Omega_0, \xi_k, \eta_k - \xi_k) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta_k - \xi_k) dx.$$

В результате находим

$$B(\Omega_0, \tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \tilde{\xi}) dx \quad \forall\, \eta \in K_{t^*}.$$

Однозначная разрешимость данного вариационного неравенства влечет, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Таким образом, во всех случаях существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \to t^*$, $\xi_k \to \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_0)$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.1.1 и лемма 4.1.2 устанавливают качественную связь между задачами о равновесии пластин с жесткими включениями разного размера.

В частности, доказано, что задача о равновесии пластины с тонким жестким включением является предельной для семейства задач о равновесии пластин с объемным жестким включением.

4.2 Оптимальный размер жесткого включения в задаче о контакте пластины с жестким препятствием

Исследуется задача о контакте пластины, содержащей жесткое включение. Предполагаем, что пластина может вступать в механический контакт по внешней жесткой части пластины. На внешней границы области пластины задаются условия непроникания типа Синьорини и однородные условия жесткого защемления. Деформирование упругой части пластины описывается моделью Тимошенко. Проводится анализ зависимости решения от размера жесткого включения. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества характеризует отклонение вектора обобщенных перемещений от заданных функций, а управляющий параметр моделирует размер жесткого включения.

В настоящее время при создании конструкций и изделий различного назначения широкое применение находят композитные материалы. На практике упрочнение конструкций часто достигается ребрами жесткости по внешнему контуру. В данном параграфе рассматривается модель описывающая контакт пластины с жестким включением по внешнему контуру. Изучение контактных задач для композитов представляет важное направление исследований см., например [148, 179, 180]. Известно, что классический подход к контактным задачам предполагает известную зону контакта [91, 160]. В отличие от этого подхода, для математических моделей с нелинейными краевыми условиями типа Синьорини область контакта заранее не известна [4, 134, 165, 167]. Общность вариационных методов позволяет решать различные задачи для упругих тел и пластин с включениями, см., например, [55, 76, 127, 154, 168, 181].

В настоящем параграфе исследуется задача о контакте пластины, содержащей жесткое включение. Предполагаем, что пластина может вступать в механический контакт по внешней жесткой части пластины. На внешней границы области пластины задаются условия непроникания типа Синьорини и однородные условия жесткого защемления. В формулировках задач объемное включение задается трехмерной областью, а тонкое включение — двумерной поверхностью. Проводится анализ зависимости решения от размера жесткого включения. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества характеризует отклонение вектора обобщенных перемещений от заданных функций, а управляющий параметр моделирует размер жесткого включения.

Установлена качественная связь между контактными задачами для пластин с жестким объемным включением и пластин, содержащих жесткие тонкие включения. А именно, доказана сильная сходимость решений семейства задач для объемных жестких включений к решению задачи для тонкого жесткого включения при стремлении параметра размера к нулю.

Результаты настоящего параграфа получены совместно с Поповой Т.С., Семеновой Г.М. и опубликованы в статье [172].

4.2.1 Контактные задачи для пластин с жесткими включениями

Предположим, что неоднородная пластина с жестким включением. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. Предположим, что гладкие кривые γ и γ_0 лежат на Γ и удовлетворяют соотношениям: $\mathrm{meas}(\gamma) > 0$, $\mathrm{meas}(\gamma_0) > 0$, $\bar{\gamma} \cap \bar{\gamma}_0 = \emptyset$.

Рассмотрим семейство односвязных областей $\omega_t \subset \Omega$, $t \in (0, t_0]$ со следующими свойствами:

a) границы $\partial\omega_t$ являются липшицевыми $\partial\omega_t \in C^{0,1}$;

b) $\gamma = \partial\omega_t \cap \Gamma$ для всех $t \in (0, t_0]$;

c) $\omega_t \subset \omega_{t'}$, для всех $t, t' \in (0, t_0]$, $t < t'$;

d) для любого фиксированного $\hat{t} \in (0, t_0)$ и любой окрестности $\mathcal{O}$ области $\overline{\omega}_t$ существует $t_{\mathcal{O}} > \hat{t}$ такое, что $\omega_t \subset \mathcal{O}$ для всех $t \in [\hat{t}, t_{\mathcal{O}}]$;

e) для любой окрестности $\mathcal{O}$ кривой γ существует $t_{\mathcal{O}} > 0$ такое, что $\omega_t \subset \mathcal{O}$ для всех $t \in (0, t_{\mathcal{O}}]$;

f) $\bigcup\limits_{t<t'} \omega_t = \omega_{t'}$ для всех $t' \in (0, t_0]$.

g) области $\Omega \backslash \bar{\omega}_t$ являются липшицевыми для всех $t \in (0, t_0]$.

В качестве примера такого семейства, приведем следующие области ω_t, $t \in (0, t_0]$ ограниченные кривыми $\partial\omega_t = \gamma \cup \gamma_t \cup \gamma_t^1 \cup \gamma_t^2$, где

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \,|\, -a < x_1 < 0, \quad x_2 = g(x_1)\},$$
$$\gamma_t = \{(x_1, x_2) \,|\, -a < x_1 < 0, \quad x_2 = g(x_1) - t\}, \quad g \in C^{0,1}[0,1],$$

сегменты γ_t^1, γ_t^2 являются прямолинейными отрезками, параллельными оси координат Ox_2. (см. рис. 4.3). Для этого примера параметр толщины областей по отношению к оси Ox_2 равен t.

Пусть декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ такое, что множество $\{\Omega\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствует срединной плоскости пластины. Зафиксируем пара-

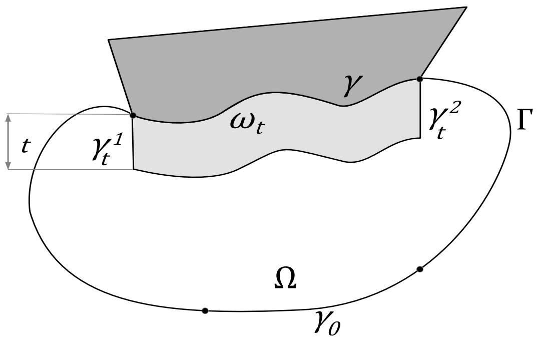

Рис. 4.3: Пример областей ω_t.

метр $t \in (0, t_0]$. Жесткое включение будем моделировать с помощью множества $\omega_t \times [-1, 1]$. При этом граница жесткого включения задается с помощью цилиндрической поверхности $\partial\omega_t \times [-1, 1]$. Упругая часть пластины соответствует множеству $\Omega \backslash \overline{\omega}_t$. Толщина пластины считается постоянной и равной 2.

Обозначим через $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$ вектор обобщенных перемещений точек срединной поверхности ($x = (x_1, x_2) \in \Omega_0$), $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — вдоль оси z, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ – углы поворота нормальных сечений. Для удобства будем также использовать обозначения η_i, $i = 1, 2..., 5$ для компонент вектора η, при этом $(\eta_1, \eta_2) = W$, $\eta_3 = w$, $(\eta_4, \eta_5) = \psi$.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}),\ i, j = 1, 2,\ (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2. \tag{4.2.1}$$

Ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijkl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\ a_{iijj} = D æ,\ a_{ijij} = a_{ijji} = D(1 - æ)/2,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2,$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < æ < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \tag{4.2.2}$$

где Λ — коэффициент, описывающий упругие свойства пластины относительно поперечного сдвига [86]. Пусть $B(G, \cdot\,, \cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(G,\chi,\bar{\chi}) = \int\limits_G \{m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{v}_{,i} + \bar{\psi}_i) + \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(\bar{W})\}dx,$$

для некоторой области $G \subset \Omega$, $\chi = (W, w, \psi)$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$. Функционал энергии пластины имеет вид

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2}B(\Omega,\chi,\chi) - \int\limits_\Omega F\chi dx\,, \quad \chi = (W, w, \psi),$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega)^5$ — вектор задающий внешние нагрузки.

Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}_{\gamma_0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \;\middle|\; v = 0 \text{ на } \gamma_0 \right\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}_{\gamma_0}(\Omega)^5\,, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega)}.$$

Наличие жесткого включения приводит к тому, что перемещения и углы поворота описываются в области ω_t функциями специального вида. Введем пространство, характеризующее свойства жесткого включения (см. соотношения в выражении (2.3.1) параграфа 2.3)

$$\begin{aligned} R(\omega_t) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = \\ = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2);\ x \in \omega_t\}, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Условие непроникания для пластины, контактирующей с жестким препятствием, имеет вид (см. формулу (2.6.5) параграфа 2.6)

$$-W\nu \geq |\psi\nu| \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{4.2.4}$$

Сформулируем задачу о контакте пластины с жестким препятствием

$$\inf_{\chi\in K_t} \Pi(\chi), \tag{4.2.5}$$

где множество допустимых функций задается соотношениями

$$K_t = \{\chi = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \;\Big|\; -W\nu \geq |\psi\nu| \quad \text{на} \quad \gamma,\ \chi|_{\omega_t} \in R(\omega_t)\}.$$

Заметим, что включение $\chi \in H(\Omega)$ означает выполнение следующих условий:

$$w = 0, \quad \psi = W = (0,0) \ \text{ на } \ \gamma_0. \tag{4.2.6}$$

Можно показать, что множество K_t является замкнутым и выпуклым $H(\Omega)$ (см. параграф 2.3). Благодаря оценке

$$B(\Omega, \chi, \bar{\chi}) \leq c_1 \|\chi\| \|\bar{\chi}\|,$$

с постоянной $c_1 > 0$ не зависящей от функций $\chi \in H(\Omega)$, $\bar{\chi} \in H(\Omega)$, симметричная билинейная форма $B(\Omega, \chi, \bar{\chi})$ непрерывна в $H(\Omega)$. Коэрцитивность функционала $\Pi(\chi)$ следует из неравенства

$$B(\Omega, \chi, \chi) \geq c\|\chi\|^2, \quad \chi \in H(\Omega), \tag{4.2.7}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от χ (см. параграф 2.1).

Замечание 4.2.1. *В соответствии со свойством* **g**), *для фиксированного* $t \in (0, t_0]$ *следующее неравенство*

$$B(\Omega \backslash \bar{\omega}_t, \chi, \chi) \geq c_t \|\chi\|^2_{H^1_0(\Omega \backslash \bar{\omega}_t)^5}, \quad \chi \in H^1_0(\Omega \backslash \bar{\omega}_t)^5$$

выполнено с постоянной $c_t > 0$ *не зависящей от* χ.

Функционал $\Pi(\chi)$ является также дифференцируемым, строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу. Эти свойства функционала вместе со свойствами множества K_t позволяют установить существование единственного решения $\xi_t = (U_t, u_t, \phi_t) \in K_t$ задачи (4.2.5) (см. теорему 1.4.1 и лемму 1.4.3).

Свойства функционала энергии, а также свойства множества K_t доставляют (см. лемму 1.4.2) эквивалентность задачи (4.2.5) следующему вариационному неравенству

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega, \xi_t, \chi - \xi_t) \geq \int\limits_{\Omega} F(\chi - \xi_t) dx \quad \forall \chi = (W, w, \psi) \in K_t. \tag{4.2.8}$$

Наряду с задачей о равновесии пластины с объемным жестким включением, рассмотрим задачу о равновесии пластины с тонким жестким включением, которое описывается с помощью следующей цилиндрической поверхности $x = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leq z \leq 1$. Введем сначала следующие обозначения:

$$R(\gamma) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = \\ = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); \quad x \in \gamma\}, \quad (4.2.9)$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;

$$K_0 = \{\chi = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \,|\, -W\nu \geq |\psi\nu| \text{ на } \gamma; \quad \chi|_\gamma \in R(\gamma)\}.$$

Приведем вариационную формулировку задачи. Требуется найти функцию $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0$ такую, что

$$\Pi(\xi_0) = \inf_{\chi \in K_0} \Pi(\chi). \qquad (4.2.10)$$

Принимая во внимание свойства функционала $\Pi(\chi)$, а также замкнутость и выпуклость множества K_0 (см. параграф 2.4), устанавливаем, что задача (4.2.10) имеет единственное решение ξ_0, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\xi_0 \in K_0, \quad B(\Omega, \xi_0, \chi - \xi_0) \geq \int\limits_\Omega F(\chi - \xi_0)dx \quad \forall\, \chi \in K_0. \qquad (4.2.11)$$

4.2.2 Задача оптимального управления

Рассмотрим следующий функционал качества

$$J(t) = \|\xi_t - \xi^*\|_{H(\Omega)}\,, \quad t \in [0, t_0],$$

где ξ^* — заданная функция, а ξ_t является решением задачи (4.2.5) при $t > 0$ и ξ_0 – решение задачи (4.2.10). Задача оптимального управления формулируется в виде

$$\sup_{t \in [0, t_0]} J(t). \qquad (4.2.12)$$

Теорема 4.2.1. *Задача оптимального управления* (4.2.12) *имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. В силу ограниченности сегмента $[0, t_0]$, мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$, такую что

$$t_{n_k} \to t^* \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad t^* \in [0, t_0].$$

Не нарушая общности предположим, что $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k. В противном случае, существует последовательность $\{t_{n_l}\}$, такая что $t_{n_l} \equiv t^*$, и, следовательно, t^* доставляет решение задачи (4.2.12). Рассмотрим случай последовательности $\{t_{n_k}\}$ удовлетворяющей неравенству $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k. Принимая во внимание доказанную ниже лемму 4.2.2, имеем, что последовательность решений ξ_k задач (4.2.5), соответствующих параметрам t_{n_k} сходятся к ξ_{t^*} сильно в пространстве $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Это позволяет установить сходимость

$$J(t_{n_k}) \to J(t^*).$$

Это означает, что

$$J(t^*) = \sup_{t \in [0, t_0]} J(t).$$

Теорема доказана.

Далее докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 4.2.1. *Пусть $t^* \in [0, t_0)$ фиксированное число, а последовательность $\{t_n\} \subset [t^*, t_0]$ сходится к t^* при $n \to \infty$. Тогда для произвольной функции $\eta \in K_{t^*}$ существует подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\eta_k\}$ такая, что $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$, $\eta_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbf{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $t_{n_k} = t^*$, то утверждение леммы выполнено для $\eta_k \equiv \eta$, $k \in \mathbb{N}$.

Следовательно, далее мы предполагаем, что $t_n > t^*$ для достаточно больших n. Пусть $\zeta^* = \eta|_{\omega_{t^*}} = (b^* x_2 + c_1^*, -b^* x_1 + c_2^*, a_0^* + a_1^* x_1 + a_2^* x_2, -a_1^*, -a_2^*)$

— ограничение функции η в ω_{t^*} для случая $t^* > 0$. В другом случае, когда $t^* = 0$ и функция η имеет заданную структуру на γ^-, мы применим такое же обозначение т.е. $\zeta^* = \eta|_{\gamma^-}$ на γ^-. Доопределим функцию ζ^* на всю область Ω с помощью равенства:

$$\zeta^* = (b^* x_2 + c_1^*, -b^* x_1 + c_2^*, a_0^* + a_1^* x_1 + a_2^* x_2, -a_1^*, -a_2^*), \quad x \in \Omega.$$

Зафиксируем произвольное значение $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим следующие вспомогательную задачу. Требуется найти $\eta_t \in K_t'$ такую, что

$$\eta_t \in K_t', \quad p(\eta_t) = \inf_{\chi \in K_t'} p(\chi), \tag{4.2.13}$$

где $p(\chi) = B(\Omega, \chi - \eta, \chi - \eta)$,

$$K_t' = \{\chi = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \mid \quad \chi = \eta \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \gamma, \ \chi|_{\omega_t} = \zeta^*\}.$$

Легко видеть, что функционал $p(\chi)$ коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу на пространстве $H(\Omega)$. Легко проверить, что множество K_t' является замкнутым и выпуклым в $H(\Omega)$. Эти свойства гарантируют существование решения задачи (4.2.13). Более того, ее решение η_t единственно (см. теорему 1.4.1 и лемму 1.4.3).

Поскольку функционал $p(\chi)$ выпуклый и дифференцируемый в пространстве $H(\Omega_0)$, задача (4.2.13) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\eta_t \in K_t', \quad B(\Omega, \eta_t - \eta, \chi - \eta_t) \geq 0 \quad \forall \chi \in K_t'. \tag{4.2.14}$$

В силу свойства **b**), решение η_{t_0} задачи (4.2.14), соответствующее параметру $t = t_0$, принадлежит множествам K_t' с любым параметром $t' \in (0, t_0]$. Подставляя η_{t_0} в качестве пробной функции в неравенство (4.2.14), получим

$$B(\Omega, \eta_t - \eta, \eta_{t_0}) + B(\Omega, \eta, \eta_t) \geq B(\Omega, \eta_t, \eta_t) \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Применяя в последнем соотношении неравенство (4.2.7) получим следующую оценку:

$$\|\eta_t\| \leq c \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Следовательно, мы можем извлечь из последовательности $\{\eta_{t_n}\}$ подпоследовательность $\eta_{t_{n_k}}$ (ее далее будем обозначать через $\{\eta_k\}$) такую, что $\{\eta_k\}$ слабо сходится к некоторой функции $\widetilde{\eta}$ в $H(\Omega)$. Пусть, для удобства, обозначение $\{t_k\}$ означает следующую последовательность $t_k = t_{n_k}$.

Покажем, что $\widetilde{\eta} = \eta$. Далее мы должны различать два случая относительно значения t^*, а именно, случаи $t^* > 0$ и $t^* = 0$. Пусть сначала $t^* > 0$. Тогда, по построению $(\eta_k - \eta) \in H_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5$. Следовательно, ввиду слабой замкнутости $H_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5$ имеем $(\widetilde{\eta} - \eta) \in H_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5$. Рассмотрим пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = \eta_k \pm \theta$, где θ — произвольная функция из пространства $C_0^{\infty}(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5$, продолженная нулем в Ω. Ввиду свойства **d**), заключаем, что $\chi_k^{\pm} \in K_{t_k}$ для достаточно больших k. Подставим далее элементы последовательностей $\{\chi_k^{+}\}$ и $\{\chi_k^{-}\}$ в качестве тестовых функций в неравенства (4.2.14) соответствующие t_k. В результате получим

$$\eta_k \in K'_{t_k}, \quad B(\Omega, \eta_k - \eta, \theta) = 0. \tag{4.2.15}$$

Зафиксируем функцию θ. Переходя к пределу при (4.2.15), находим

$$B(\Omega, \widetilde{\eta} - \eta, \theta) = B(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*}, \widetilde{\eta} - \eta, \theta) = 0 \quad \forall\, \theta \in C_0^{\infty}(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5.$$

Отсюда, в силу плотности $C_0^{\infty}(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})$ в $H_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})$ и замечания 4.2.1, выводим, что $\widetilde{\eta} - \eta = 0$ в $H_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega}_{t^*})^5$. Наконец, по построению, равенство $\widetilde{\eta} = \eta$ выполнено в ω_{t^*}. Следовательно, $\widetilde{\eta} = \eta$ в $H(\Omega)$. Таким образом, существует последовательность $\{\eta_k\}$ такая, что $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$, $\eta_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть $t^* = 0$. По построению имеем $(\eta_k - \eta) \in H_0^1(\Omega)^5$ и, следовательно, соотношение $(\widetilde{\eta} - \eta) \in H_0^1(\Omega)^5$ выполнено. Выберем пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = \eta_k \pm \theta$, где $\theta \in C_0^{\infty}(\Omega)^5$. Заметим, что свойство **d**) влечет, что для достаточно больших k справедливо следующее включение $\chi_k^{\pm} \in K_{t_k}$. Подставляя эти функции в неравенства (4.2.14) соответствующие значениям t_k, извлекаем

$$\eta_k \in K'_{t_k}, \quad B(\Omega, \eta_k - \eta, \theta) = 0. \tag{4.2.16}$$

Зафиксируем функцию θ в (4.2.16) и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В итоге находим

$$B(\Omega, \widetilde{\eta} - \eta, \theta) = 0 \quad \forall\, \theta \in C_0^\infty(\Omega)^5. \tag{4.2.17}$$

Плотность $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ позволяет получить из (4.2.17) равенство $\widetilde{\eta} - \eta = 0$ в $H(\Omega)$. Значит, $\widetilde{\eta} = \eta$ в $H(\Omega)$. Поэтому, и во втором случае имеем последовательность $\{\eta_k\}$ удовлетворяющую соотношениям: $\eta_k \in K_{t_k}$ и $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega)$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 4.2.2. *Пусть $t^* \in [0, t_0]$ — фиксированное число. Тогда $\xi_t \to \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega)$ при $t \to t^*$, где ξ_t — это решение задачи* (4.2.5), *соответствующее $t \in (0, t_0]$, а ξ_{t^*} является решением, соответствующим* (4.2.5) *при $t^* > 0$ и задачи* (4.2.10) *для $t^* = 0$.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что существуют число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, t_0]$ такие, что $t_n \to t^*$, $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon_0$, где $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, являются решениями задач (4.2.5) с параметрами t_n.

Поскольку $\chi^0 \equiv 0 \in K_t$ для всех $t \in [0, t_0]$, мы можем подставить $\chi = \chi^0$ в (4.2.8) для всех $t \in (0, t_0]$ и в неравенство (4.2.11) при $t = 0$. Это влечет выполнение следующего соотношения

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega, \xi_t, \xi_t) \leq \int\limits_\Omega F \xi_t dx, \quad \forall\, t \in [0, t_0].$$

Отсюда, используя (4.2.7), выводим равномерную по $t \in [0, t_0]$ оценку

$$\|\xi_t\| \leq c,$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от t. Следовательно, заменяя ξ_n ее подпоследовательностью в случае необходимости, можно считать, что ξ_n сходится к некоторой функции $\tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega)$.

Теперь покажем, что $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$. В самом деле, имеем $\xi_n|_{\omega_{t_n}} = \zeta_n \in R(\omega_{t_n})$. В соответствии с теоремами вложения Соболева (выделяя, если нужно, подпоследовательность), находим

$$\xi_n|_{\omega_{t^*}} \to \tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \quad \text{сильно } L_2(\omega_{t^*})^5 \text{ при } n \to \infty, \tag{4.2.18}$$

$$\xi_n| \to \tilde{\xi}|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^5 \text{ при } n \to \infty. \tag{4.2.19}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ п.в. в ω_{t^*} при $n \to \infty$. Это позволяет заключить, что каждая из числовых последовательностей $\{b_n\}$, $\{c_{1n}\}$, $\{c_{2n}\}$, $\{a_{0n}\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, определяющих структуру ζ_n в областях ω_{t_n} ограничена по абсолютной величине. Поэтому, мы можем извлечь сходящиеся числовые подпоследовательности (с сохранением обозначений):

$$b_n \to b, \quad a_{0n} \to a_0, \quad c_{in} \to c_i, \quad a_{in} \to a_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Снова рассмотрим два случая: $t^* = 0$ и $t^* > 0$. В первом случае для последовательности $\{\xi_n\}$, соответствующей выбранным числовым последовательностям $\{b_n\}$, $\{c_{1n}\}$, $\{c_{2n}\}$, $\{a_{0n}\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, выполняется

$$\xi_n|_\gamma \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \tag{4.2.20}$$

сильно в $L_2(\gamma)^5$ при $n \to \infty$. Последнее вместе с (4.2.18) приводит к равенству

$$\tilde{\xi} = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{п.в. на} \quad \gamma.$$

Это означает, что $\tilde{\xi}|_\gamma \in R(\gamma)$.

Исследуем второй случай. Для последовательности $\{t_n\}$ найдется либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, сходящаяся слева к t^*, либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Если существует подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то можно легко установить следующую сильную сходимость

$$\xi_k|_{\omega_{t^*}} \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \tag{4.2.21}$$

сильно в $L_2(\omega_{t^*})^5$ при $k \to \infty$. Следовательно, из (4.2.21) и (4.2.18) устанавливаем, что имеет место включение $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Предположим теперь, что существует сходящаяся слева подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, т.е. $t_k < t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_k \to t^*$ при $k \to \infty$. В рамках этого предположения, для фиксированного $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующего значения $t' = t_{k'}$, свойство **c**) влечет следующую сильную сходимость

$$\xi_k|_{\omega_{t'}} \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \tag{4.2.22}$$

в пространстве $L_2(\omega_{t'})^5$ при $k \to \infty$. Определим функцию $l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ в ω_{t^*}. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега и свойств **c**), **f**), для любого положительного $\epsilon > 0$ можно выбрать номер $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующее число $t' = t_{k'}$, такие что

$$\|l\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|\tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}.$$

Далее, используя дважды неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}
\|u_k - l\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} &\le \|u_k\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|l\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} \le \\
&\le \|\tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|l\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \\
&< 2\sqrt{\epsilon} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})}.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\|u_k - l\|^2_{L^2(\omega_{t^*})} &= \|u_k - l\|^2_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_k - l\|^2_{L^2(\omega_{t'})} \\
&< (2\sqrt{\epsilon} + \|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})})^2 + \|u_k - l\|^2_{L^2(\omega_{t'})}.
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что для достаточно больших k имеют место неравенства

$$\|u_k - \tilde{u}\|_{L^2(\omega_{t^*})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|u_k - l\|_{L^2(\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}.$$

Значит, правая часть соотношения (4.2.23) меньше чем 10ϵ. Таким образом, $u_k \to l$ сильно в $L^2(\omega_{t^*})$. Далее, принимая во внимание (4.2.18) выводим равенство $\tilde{u}|_{\omega_{t^*}} = l$ в ω_{t^*}.

Аналогично можно получить, что

$$\tilde{U}|_{\omega_{t^*}} = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_{t^*},$$

$$\tilde{\phi}|_{\omega_{t^*}} = (-a_1, -a_2) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_{t^*}.$$

Следовательно, справедливо включение $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$. В итоге, для всех возможных случаев имеем $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Остается показать, что $\tilde{\xi}$ удовлетворяет неравенству $-\tilde{U}\nu \geq |\tilde{\phi}\nu|$ на γ. Ввиду сходимости (4.2.19), мы можем извлечь еще раз подпоследовательности и считать, что $\xi_n|_\gamma \to \tilde{\xi}|_\gamma$ п.в. на γ. Этот факт позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах

$$-U_n\nu \geq |\phi_n\nu| \quad \text{на} \quad \gamma.$$

В результате, имеем $-\tilde{U}\nu \geq |\tilde{\phi}\nu|$ на γ. Последнее обеспечивает включение $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$.

Целью последующих рассуждений является доказательство справедливости равенства $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$ и существования сильно сходящейся к ξ_{t^*} в пространстве $H(\Omega)$ последовательности решений $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n = 1, 2....$ Заметим, что для сходящейся к t^* последовательности $\{t_n\}$ существует либо подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$, такая что $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$, либо подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$, удовлетворяющая $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для первого случая имеем подпоследовательность $\{t_{n_l}\} \subset (0, t_0]$ со свойством $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Это означает, что $t^* > 0$. Для удобства будем обозначать эту последовательность через $\{t_n\}$. Поскольку $t_n \leq t^*$, в силу свойства **b**), произвольная тестовая функция $\chi \in K_{t^*}$ из множества K_{t^*} принадлежит также множеству K_{t_n}. Это свойство позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах с тестовой функцией $\chi \in K_{t^*}$:

$$\xi_n \in K_{t_n}, \quad B(\Omega, \xi_n, \chi - \xi_n) \geq \int\limits_\Omega F(\chi - \xi_n)dx, \quad t_n \in (0, t^*].$$

Принимая во внимание слабую сходимость ξ_n к $\tilde{\xi}$,, предельное неравенство примет вид

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \chi - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_\Omega F(\chi - \tilde{\xi})dx \quad \forall\, \chi \in K_{t^*}.$$

Ввиду произвольности $\chi \in K_{t^*}$ последнее неравенство является вариационным. Поэтому, из него вытекает, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Чтобы завершить доказательство для первого случая, нужно установить сильную сходимость $\xi_n \to \xi_{t^*}$.

Подставляя $\chi = 2\xi_t$ and $\chi = 0$ в вариационные неравенства (4.2.8) для $t \in (0, t_0]$, получим

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega, \xi_t, \xi_t) = \int\limits_{\Omega} F \xi_t dx \quad \forall\, t \in (0, t_0]. \tag{4.2.24}$$

Последнее равенство вместе с (4.2.8) гарантируют, что следующее неравенство

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega, \xi_t, \chi) \geq \int\limits_{\Omega} F \chi dx \quad \forall \chi \in K_t \tag{4.2.25}$$

выполнено для всех $t \in (0, t_0]$. В силу слабой сходимости $\xi_n \to \xi_{t^*}$ в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$, находим

$$\lim_{n\to\infty} B(\Omega, \xi_n, \xi_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} F \xi_n dx = \int\limits_{\Omega} F \xi_{t^*} dx = B(\Omega, \xi_{t^*}, \xi_{t^*}).$$

Ввиду эквивалентности норм (см. замечание 4.2.1), последняя цепочка означает, что $\xi_n \to \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$. Таким образом, в первом случае мы получили противоречие к исходному предположению: $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим второй случай, т.е. предположим, что элементы подпоследовательности $\{t_{n_m}\}$ удовлетворяют $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Для удобства будем обозначать ее через $\{t_n\}$. Итак, $t_n \to t^*$ и $t_n > t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание результаты, полученные в начале доказательства, получим, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$. Сначала докажем, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ сильно в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$. Ввиду слабой сходимости $\xi_n \to \tilde{\xi}$ в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$, из (4.2.24) извлекаем

$$\lim_{n\to\infty} B(\Omega, \xi_n, \xi_n) = \int\limits_{\Omega} F \tilde{\xi} dx. \tag{4.2.26}$$

Затем, для фиксированного $t \in (0, t_0]$, подставляя пробные функции вида $\chi = \xi_{t'} \in K_{t'} \subset K_t$ с произвольными числами $t' \in (0, t_0]$, $t' \geq t$ в вариационное неравенство (4.2.25), соответствующее параметру t, получим

$$B(\Omega, \xi_t, \xi_{t'}) \geq \int\limits_{\Omega} F \xi_{t'} dx.$$

Отсюда, можно сделать заключение, что для всех t_n и t_m, удовлетворяющих $t_n \le t_m$ выполнено следующее неравенство

$$B(\Omega, \xi_n, \xi_m) \geq \int\limits_{\Omega} F\xi_m dx. \tag{4.2.27}$$

Зафиксируем произвольное значение $m \in \mathbb{N}$ в (4.2.27) и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве. В итоге получим

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \xi_m) \geq \int\limits_{\Omega} F\xi_m dx. \tag{4.2.28}$$

Затем, переходя к пределу в (4.2.28) при $m \to \infty$, находим

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega} F\tilde{\xi} dx.$$

Отсюда с помощью формулы (4.2.26) и слабой полунепрерывности функционала, определяемого билинейной формой $B(\Omega, \cdot, \cdot)$, выводим следующие соотношения

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega} F\tilde{\xi} dx = \lim_{n\to\infty} B(\Omega, \xi_n, \xi_n) \geq B(\Omega, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}).$$

Это означает, что имеет место равенство

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = \lim_{n\to\infty} B(\Omega, \xi_n, \xi_n).$$

Снова используя эквивалентность норм (см. замечание 4.2.1), извлекаем, что $\xi_n \to \tilde{\xi}$ сильно в $H(\Omega)$ при $n \to \infty$.

В соответствии с леммой 4.2.1 для всех $\eta \in K_{t^*}$ найдется подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\eta_k\}$, такие что $\eta_k \in K_{t_k}$ и $\eta_k \to \eta$ слабо в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Свойства, установленные для сходящихся последовательностей $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_n\}$, позволяют перейти к пределу при $k \to \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (4.2.8) для t_k и тестовых функций η_k:

$$B(\Omega, \xi_k, \eta_k - \xi_k) \geq \int\limits_{\Omega} F(\eta_k - \xi_k) dx.$$

В результате находим

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega} F(\eta - \tilde{\xi}) dx \quad \forall\, \eta \in K_{t^*}.$$

Однозначная разрешимость данного вариационного неравенства влечет, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Таким образом, во всех случаях существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \to t^*$, $\xi_k \to \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega)$. Противоречие. Лемма доказана.

4.3 Существование экстремальной формы трещины с условием непроникания в задаче о равновесии пластины Тимошенко

В данном параграфе рассматривается вариационная задача о равновесии упругой пластины (модели Тимошенко), содержащей трещину. При этом на кривой, описывающей трещину, задаются краевые условия вида неравенств. Исследуется зависимость решений указанной задачи от формы кривой, задающей трещину. Установлена слабая сходимость решений в пространстве Соболева при стремлению к нулю параметра, описывающего возмущение прямолинейной трещины. Этот результат позволяет доказать существование экстремальной кривой, доставляющей экстремум для функционала качества, описывающего деформацию пластины.

При (малом) варьировании формы прямолинейной трещины, положение ее вершин, углов излома и кривизны при вершинах считаются фиксированными. Это геометрическое допущение позволяет обосновать существование экстремальной формы трещины в задаче управления функционалом качества. Возможная неединственность экстремального решения является известным фактом в теории управления формой. При варьировании вершины и угла излома трещины возникает задача о разрушении. Соответствующая постановка в классе задач оптимального управления для трещин с условиями непроникания дана в [151]. Исследование возмущения областей с негладкими границами, в частности трещин проводились в работах [72, 136, 177] и др.

4.3.1 Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ, $\Gamma_\delta \subset \Omega$, $\Omega_\delta = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_\delta$, $\Gamma_\delta = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 = \delta g(x_1), 0 < x_1 < 1\}$, δ — некоторое число из интервала $[0, \delta_0]$, $g(x_1) \in H_0^2(0,1)$, $\bar{\Gamma}_\delta \cap \Gamma = \varnothing$ (см. рис. 4.4). Нормаль к

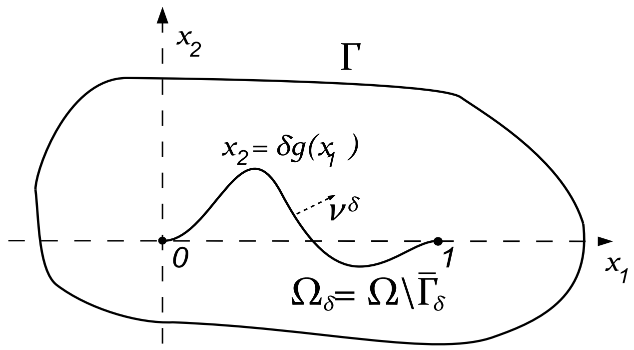

Рис. 4.4: Геометрия в срединной плоскости пластины.

кривой к Γ_δ обозначим через ν^δ. Считаем, что срединная поверхность пластины совпадает с областью Ω_δ. Для простоты толщину пластины считаем постоянной и равной 2. Предположим, что пластина содержит вертикальную трещину, которая описывается в срединной плоскости кривой Γ_δ. Это означает, что поверхность трещины можно задать в виде $(x_1, x_2) \in \Gamma_\delta, -1 \leq z \leq 1$, где $|z|$ – расстояние до срединной поверхности пластины, а 2 – толщина пластины. Пусть (U, u) — вектор перемещений точек срединной поверхности, где $U = (u_1, u_2)$ и u горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\phi = \phi(x_1, x_2) = (\phi_1, \phi_2)$. Считаем один из берегов разреза положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением ν^δ. В случае, когда след функции v берется на положительном берегу, применяем обозначение v^+, аналогично для отрицательного берега. Скачок функции на Γ_δ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Введем далее тензоры, описывающие деформацию пластины:

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ i,j = 1,2, \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i})$$

Тензор моментов обозначим через $m_{ij},\ i,j = 1,2$:

$$m_{11}(\phi) = D(\varepsilon_{11}(\phi) + æ\varepsilon_{22}(\phi)),$$

$$m_{22}(\phi) = D(\varepsilon_{22}(\phi) + æ\varepsilon_{11}(\phi)),$$

$$m_{12}(\phi) = m_{21}(\phi) = D(1 - æ)\varepsilon_{12}(\phi),$$

тензор усилий $\sigma_{ij},\ i,j = 1,2$ имеет вид:

$$\sigma_{11}(U) = N(\varepsilon_{11}(U) + æ\varepsilon_{22}(U)),$$

$$\sigma_{22}(U) = N(\varepsilon_{22}(U) + æ\varepsilon_{11}(U)),$$

$$\sigma_{12}(U) = \sigma_{21}(U) = N(1 - æ)\varepsilon_{12}(U), \quad æ = const,\ 0 < æ < \frac{1}{2}.$$

Поперечные силы в данной модели записываются следующим образом

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i), \quad i = 1,2,$$

где Λ — коэффициент, описывающий упругие свойства пластины относительно поперечного сдвига [86].

Заметим, что согласно [86], материальные параметры D, N, Λ для трансверсально-изотропной пластины являются постоянными. Возьмем далее значение этих множителей равными 1 — данное предположение упрощает некоторые алгебраические действия, сохраняя при этом качественные свойства математической модели (поскольку мы не варьируем указанные материальные параметры).

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Введем пространство $H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta)^5$ с нормой $\|\cdot\|_\delta = \|\cdot\|_{H(\Omega_\delta)}$.

С учетом записанных выше выражений, для произвольных функций $\xi = (U,u,\phi) \in H(\Omega_\delta)$, $\bar{\xi} = (\bar{U},\bar{u},\bar{\phi}) \in H(\Omega_\delta)$, определим следующую билинейную форму:

$$B_\delta(\xi,\bar{\xi}) = \int\limits_{\Omega_\delta} \Big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar{U}) + (u,_i + \phi_i)(\bar{u},_i + \bar{\phi}_i) \Big) dx.$$

Функционал потенциальной энергии пластины введем с помощью билинейной формы

$$\Pi_\delta(\xi) = \frac{1}{2} B_\delta(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_\delta} F\xi dx, \quad \xi = (U,u,\phi),$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3, 0, 0) \in L^2(\Omega)^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [86].

На внешней границе зададим краевые условия, описывающие жесткое защемление

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \ \text{ на } \ \Gamma.$$

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины на Γ_δ имеет вид:

$$[U]\nu^\delta \geq |[\phi]\nu^\delta| \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta. \tag{4.3.1}$$

Заметим, что полученное неравенство (4.3.1) в случае углов ϕ, соответствующих модели Кирхгофа–Лява, т.е. при $\phi = -\nabla u$, преобразовывается в известное условие непроникания [150, 153]. Более того, в этом случае, функционал энергии $\Pi_\delta(\xi)$ также переходит в функционал, соответствующий функционалу потенциальной энергии пластины Кирхгофа–Лява [150]. Рассмотрим множество допустимых функций

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\xi = (U,u,\phi) \in H(\Omega_\delta) |\ \xi \text{ удовлетворяет (4.3.1)}\}.$$

Для каждого фиксированного $\delta \in [0, \delta_0]$, сформулируем задачу о равновесии пластины, содержащей трещину, в виде задачи минимизации функционала энергии $\Pi_\delta(\xi)$ над множеством $K_\delta(\Omega_\delta)$:

$$\min_{\bar{\xi} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi_\delta(\bar{\xi}). \tag{4.3.2}$$

Можно показать, что для каждого фиксированного $\delta \in [0, \delta_0]$, решение $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta, \phi^\delta)$ задачи (4.3.2) существует и единственно (см. параграф 2.1).

4.3.2 Анализ зависимости решений от возмущения формы кривой, описывающей трещину

В этом разделе рассматривается семейство вариационных задач, соответствующих разным параметрам $\delta \in [0, \delta_0]$. Для каждого параметра из указанного интервала существует решение $\xi^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$. При этом устанавливается, что решение ξ^0 можно получить как слабый предел последовательности $\mu^{\delta_n} \in H(\Omega_0)$, построенной на основе ξ^δ. С физической точки зрения, исследуется зависимость деформаций упругой пластины от вариаций геометрии трещины.

Для того, чтобы исследовать сходимость при $\delta \to 0$, используем отображение области Ω_δ на Ω_0. При этом, конечно, считается, что график $x_2 = \delta g(x_1)$ лежит в области Ω для всех $0 \le \delta \le \delta_0$. Продолжим нулем функцию g вне интервала $(0,1)$, затем выберем области Ω_1, Ω_2, такие что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega$, $\Gamma_\delta \subset \Omega_1$ для всех достаточно малых δ, а функция ζ удовлетворяет свойствам: $\zeta \equiv 1$ в области Ω_1, $\zeta \equiv 0$ в области $\Omega \backslash \Omega_2$. Рассмотрим следующее преобразование координат:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 - \delta g(y_1)\zeta(y_1, y_2), \end{cases} \qquad (y_1, y_2) \in \Omega_\delta \quad (x_1, x_2) \in \Omega_0. \tag{4.3.3}$$

Очевидно, что якобиан $q_\delta(y_1, y_2) = 1 - \delta g(y_1) \frac{\partial \zeta(y_1, y_2)}{\partial y_2}$ данного преобразования сходится к 1 при $\delta \to 0$.

С помощью преобразования (4.3.3) для функций $\xi^\delta \in H(\Omega_\delta)$ определим следующие функции $\mu^\delta = (W^\delta, w^\delta, \psi^\delta) \in H(\Omega_0)$:

$$W^\delta(x_1, x_2) = U^\delta(y_1, y_2), \quad w^\delta(x_1, x_2) = u^\delta(y_1, y_2), \quad \psi^\delta(x_1, x_2) = \phi^\delta(y_1, y_2).$$

В качестве вспомогательного материала нам понадобятся следующие ниже формулы для производных и две леммы о постоянных в неравенствах Корна и Пуанкаре. Для произвольной функции $v(y_1, y_2) \in H^{1,0}(\Omega_\delta)$ имеют место формулы, выражающие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1} &= \frac{\partial \tilde{\upsilon}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{\upsilon}}{\partial x_2} \cdot \delta \left(g \frac{\partial \zeta}{\partial y_1} + \zeta \frac{\partial g}{y_1} \right), \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial y_2} &= \frac{\partial \tilde{\upsilon}}{\partial x_2} \left(1 - \delta g \frac{\partial \zeta}{\partial y_2} \right), \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

где $\tilde{\upsilon} = \tilde{\upsilon}(x_1, x_2) = \upsilon(y_1, y_2)$.

Лемма 4.3.1. *Пусть число $c_0 > 0$ задано формулой:*

$$c_0 = \inf_{V \in H^{1,0}(\Omega_0)^2} \frac{\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(V) \varepsilon_{ij}(V) dx}{||V||^2_{H^1(\Omega_0)^2}}.$$

Тогда найдется такое число δ_1, что для всех $\delta \in (0, \delta_1)$ и

$$c_\delta = \inf_{V \in H^{1,0}(\Omega_\delta)^2} \frac{\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(V) \varepsilon_{ij}(V) dy}{||V||^2_{H^1(\Omega_\delta)^2}}$$

выполняется неравенство: $c_\delta > \dfrac{c_0}{2}$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу неравенства Корна, число $c_0 > 0$ существует. Предположим, что утверждение леммы 4.3.1 неверно, это означает, что найдется такая последовательность δ_n, сходящаяся к 0, для которой имеет место неравенство

$$c_{\delta_n} \leq \frac{c_0}{2}.$$

Далее, для удобства будем опускать индекс n. По определению нижней границы, для каждого $\delta \in [0, \delta_0]$ найдется функция $V^\delta \in H^{1,0}(\Omega_\delta)^2$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(V^\delta) \varepsilon_{ij}(V^\delta) dy \leq (c_\delta + \delta) ||V^\delta||^2_{H^1(\Omega_\delta)^2}. \tag{4.3.5}$$

Обозначим через V_δ функцию, определенную в области Ω_0 с помощью преобразования (4.3.3) следующим образом $V_\delta(x_1, x_2) = V^\delta(y_1, y_2)$.

Далее, осуществим замену переменных в интегралах левой и правой части неравенства (4.3.5), с учетом формул для производных (4.3.4) и оценки $q_\delta^{-1} <$

$\dfrac{5}{4}$ для малых δ, имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(V_\delta)\varepsilon_{ij}(V_\delta)q_\delta^{-1}dx + \delta \int\limits_{\Omega_0} R_1(x_1, x_2, D^\beta V_\delta)dx <$$

$$< (c_\delta + \delta)\Big(\frac{5}{4}||V_\delta||^2_{H^1(\Omega_0)^2} + \delta \int\limits_{\Omega_0} R_2(x_1, x_2, D^\beta V_\delta)dx\Big), \qquad (4.3.6)$$

функции R_1, R_2 определяются согласно формулам (4.3.4). Отметим, что функции R_1 и R_2 состоят из конечного числа слагаемых вида $\delta^m \cdot Q \cdot D^\beta V_\delta \cdot D^\gamma V_\delta$, где β, γ — мультииндексы, $|\beta| \leq 1$, $|\gamma| \leq 1$, $m \in \{0, 1\}$, а Q — некоторая функция, ограниченная независящей от δ постоянной. Последние рассуждения, совместно с неравенством $\dfrac{3}{4} < q_\delta^{-1}$, позволяют извлечь из (4.3.6) следующие оценки

$$\frac{3c_0}{4}||V_\delta||^2_{H^1(\Omega_0)^2} < \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(V_\delta)\varepsilon_{ij}(V_\delta)q_\delta^{-1}dx,$$

$$\frac{3c_0}{4}||V_\delta||^2_{H^1(\Omega_0)^2} < ||V_\delta||^2_{H^1(\Omega_0)^2} \cdot \Big[(c_\delta + \delta)\frac{5}{4} + \delta A_1 +$$

$$+ \delta^2 A_2 + (c_\delta + \delta)\Big(\delta A_3 + \delta^2 A_4\Big)\Big], \qquad (4.3.7)$$

где A_i, $i = \overline{1, 4}$ — постоянные, не зависящие от параметра δ. Поделив обе части неравенства (4.3.7) на $||V_\delta||^2_{H^1(\Omega_0)^2}$, получим

$$\frac{3c_0}{4} < (c_\delta + \delta)\frac{5}{4} + \delta A_1 + \delta^2 A_2 + (c_\delta + \delta)\Big(\delta A_3 + \delta^2 A_4\Big). \qquad (4.3.8)$$

Поскольку по предположению $0 < c_\delta \leq \dfrac{c_0}{2}$ для малых δ, из (4.3.8) выведем

$$\frac{3c_0}{4} < (\frac{c_0}{2} + \delta)\frac{5}{4} + O(\delta).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{5}{8}$ — противоречие.
Лемма доказана.

Имеет место аналогичное утверждение и для неравенства Пуанкаре.

Лемма 4.3.2. *Пусть число $c_0 > 0$ задано формулой:*

$$p_0 = \inf_{v \in H^{1,0}(\Omega_0)} \frac{\int\limits_{\Omega_0} \nabla v \nabla v dx}{||v||^2_{H^1(\Omega_0)}}.$$

Тогда найдется такое число δ_2, что для всех $\delta \in (0, \delta_2)$ и

$$p_\delta = \inf_{v \in H^{1,0}(\Omega_\delta)} \frac{\int\limits_{\Omega_\delta} \nabla v \nabla v dy}{||v||^2_{H^1(\Omega_\delta)}}$$

справедливо неравенство: $p_\delta > \dfrac{p_0}{2}$.

Лемму 4.3.2 можно доказать по аналогии с доказательством леммы 4.3.1.

Целью дальнейших рассуждений является доказательство существования последовательности μ^{δ_n} слабо сходящейся к ξ^0 в пространстве $H(\Omega_0)$. Для этого ввиду рефлексивности $H(\Omega_0)$ достаточно доказать, что $\|\mu^\delta\|_0 \leq C$ с некоторой постоянной $C > 0$, независящей от δ. Сначала установим равномерную ограниченность норм $\|\xi^\delta\|_\delta$ для малых δ.

В силу свойств множества $K_\delta(\Omega_\delta)$ и функционала $\Pi_\delta(\xi)$, задача (4.3.2) эквивалентна вариационному неравенству

$$B_\delta(\xi^\delta, \bar{\xi} - \xi^\delta) \geq \int\limits_{\Omega_\delta} F(\bar{\xi} - \xi^\delta) dy \quad \forall \bar{\xi} \in K_\delta(\Omega_\delta). \tag{4.3.9}$$

Положим в вариационном неравенстве (4.3.9) $\bar{\xi} = 2\xi^\delta$, а затем $\bar{\xi} = 0$, в итоге получим, что для всех $\delta \in [0, \delta_0]$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \Big(m_{ij}(\phi^\delta)\varepsilon_{ij}(\phi^\delta) + \sigma_{ij}(U^\delta)\varepsilon_{ij}(U^\delta) + \\ + (u,_i^\delta + \phi_i{}^\delta)(u,_i^\delta + \phi_i{}^\delta) \Big) dy = \int\limits_{\Omega_\delta} F\xi^\delta dy. \tag{4.3.10}$$

Из равенства (4.3.10), по аналогии с выводом неравенства (2.1.4) можно получить следующую равномерную оценку

$$\|\xi^\delta\|_\delta \leq C,$$

для всех $\delta \in [0, \delta_3)$.

Покажем далее ограниченность норм $\|\mu^\delta\|_0$. Для этого достаточно оценить составляющие $W^\delta,\ w^\delta,\ \psi^\delta$ вектора μ^δ. Осуществив замену переменных (4.3.3) в соответствующих интегралах квадрата нормы $\|u^\delta\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}$, получим

$$\|u^\delta\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} = \|w^\delta \cdot q_\delta^{-1/2}\|^2_{H^1(\Omega_0)} + \delta \int\limits_{\Omega_0} R_3(x_1, x_2, D^\beta w^\delta) dx, \tag{4.3.11}$$

где функция R_3 имеет сходный с функциями $R_1,\ R_2$ вид. Заметим, что для оценки интеграла от функции R_3 в (4.3.11) можно использовать такие же рассуждения, которые были приведены относительно оценок интегралов от функций R_1, R_2 в (4.3.6). Используя также неравенство $\dfrac{3}{4} < q_\delta^{-1}$, из (4.3.11) выведем

$$\frac{3}{4}\|w^\delta\|^2_{H^1(\Omega_0)} \le \|u^\delta\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} + (\delta A + \delta^2 B) \cdot \|w^\delta\|^2_{H^1(\Omega_0)},$$

для достаточно малых δ, с постоянными A, B. Следовательно, существует число $\bar{\delta} > 0$ и постоянная $C > 0$, для которых выполнено

$$||w^\delta||_{H^1(\Omega_0)} \le C \quad \forall \delta \in [0, \bar{\delta}]. \tag{4.3.12}$$

Аналогично можно получить следующие равномерные по δ оценки:

$$\|W^\delta\|_{H^1(\Omega_0)^2} \le C, \quad \|\psi^\delta\|_{H^1(\Omega_0)^2} \le C. \tag{4.3.13}$$

Таким образом, для достаточно малых δ, на основе последних двух оценок, имеем

$$\|\mu^\delta\|_0 \le C.$$

Отсюда, выбирая при необходимости подпоследовательность, можно считать, что при $\delta \to 0$

$$\mu^\delta \to \mu^0 \ \text{ слабо в } \ H(\Omega_0). \tag{4.3.14}$$

Заметим, что для решения ξ^δ справедливо неравенство (4.3.1), а после преобразования (4.3.3), для $\mu^\delta = \xi^\delta$ соответствующее неравенство перепишется в виде

$$[W^\delta]\nu^\delta \ge |[\psi^\delta]\nu^\delta| \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{4.3.15}$$

где $\nu^\delta = (-\delta\frac{\partial g}{\partial y_1}, 1)$. Обозначим через $K_\delta(\Omega_0)$ множество, состоящее из всех функций $\bar{\mu} \in H(\Omega_0)$, удовлетворяющих неравенству (4.3.15).

Докажем следующее утверждение, устанавливающее связь между $K_\delta(\Omega_0)$ и $K_0(\Omega_0)$.

Лемма 4.3.3. *Для любого фиксированного* $\bar{\mu} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi}) \in K_0(\Omega_0)$ *существует последовательность* $\bar{\mu}^\delta \in K_\delta(\Omega_0)$ *такая, что при* $\delta \to 0$

$$\bar{\mu}^\delta \ \to \ \bar{\mu} \quad \textit{сильно в} \ \ H(\Omega_0).$$

Доказательство. По условию леммы выполнено включение $\bar{\mu} \in H(\Omega_0)$, а также справедливо неравенство

$$[\bar{w}_2] \geq |[\bar{\psi}_2]| \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \ \text{ где } \ \bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2), \ \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2).$$

Определим функцию $\bar{\mu}^\delta = (\bar{W}^\delta, \bar{w}^\delta, \bar{\psi}^\delta)$ области Ω_0 следующим образом:

$$\bar{w}^\delta = \bar{w}, \ \ \bar{w}_1^\delta = \bar{w}_1, \ \ \bar{\psi}_1^\delta = \bar{\psi}_1, \ \ \bar{w}_2^\delta = \bar{w}_2 + \delta\bar{w}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}, \ \ \bar{\psi}_2^\delta = \bar{\psi}_2 + \delta\bar{\psi}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}.$$

Включение $\bar{\mu}^\delta \in H(\Omega_0)$ очевидно. Неравенство (4.3.15) справедливо в силу выполнения следующих тождеств:

$$\bar{W}^\delta\nu^\delta = (\bar{w}_1, \bar{w}_2 + \delta\bar{w}_1\frac{\partial g}{\partial y_1})(-\delta\frac{\partial g}{\partial y_1}, 1) = \bar{w}_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_0,$$

$$\bar{\psi}^\delta\nu^\delta = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2 + \delta\bar{\psi}_1\frac{\partial g}{\partial y_1})(-\delta\frac{\partial g}{\partial y_1}, 1) = \bar{\psi}_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_0.$$

Следовательно, $\bar{\mu}^\delta \in K_\delta(\Omega_0)$. Для того, чтобы установить сильную сходимость, выпишем следующие разности:

$$\bar{W}^\delta - \bar{W} = (0, \delta\bar{w}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}), \ \ \bar{\psi}^\delta - \bar{\psi} = (0, \delta\bar{\psi}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}), \ \ \bar{w}^\delta - \bar{w} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Значит, для нормы разности, при $\delta \to \ 0$ имеем

$$||\bar{\mu}^\delta - \bar{\mu}||_0^2 = ||\delta\bar{w}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}||^2_{H^1(\Omega_0)} + ||\delta\bar{\psi}_1\frac{\partial g}{\partial y_1}||^2_{H^1(\Omega_0)} \ \to \ 0.$$

Лемма доказана.

Перепишем теперь неравенство (4.3.9) в переменных x_1, x_2. Сходимость (4.3.14) и утверждение леммы 4.3.3 позволяют осуществить предельный переход при $\delta \to 0$ в преобразованном неравенстве (4.3.9). При этом в силу произвольности функции $\bar{\mu} \in K_0(\Omega_0)$ получается, что предельная функция $\mu^0 = (W^0, w^0, \psi^0) \in K_0(\Omega_0)$ является решением вариационного неравенства

$$B_0(\mu^0, \bar{\mu} - \mu^0) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\bar{\mu} - \mu^0)dx \quad \forall \bar{\mu} \in K_0(\Omega_0). \tag{4.3.16}$$

В силу единственности решения вариационного равенства (4.3.16) заключаем, что $\xi^0 = \mu^0$.

Далее, предположив, что найдется последовательность δ_n, сходящаяся к нулю, для которой μ^{δ_n} не сходится слабо к μ^0, мы получим противоречие в связи с единственностью решения вариационного неравенства. Это означает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3.1. *Любая последовательность μ^{δ_n} построенная с помощью формул* (4.3.3) *из семейства решений ξ^δ задач* (4.3.2)*, сходится слабо в $H(\Omega_0)$ к $\mu^0 = \xi^0$ при $\delta_n \to 0$.*

4.3.3 Оптимальная форма трещины

Результаты предыдущего раздела позволяют нам исследовать задачу об оптимальной форме кривой, описывающей трещину. Сформулируем ее следующим образом. Пусть $\mathcal{G} \subset H_0^2(0,1)$ замкнутое, выпуклое и ограниченное множество. Предположим, что для любого $g \in \mathcal{G}$ кривая Γ_g задается с помощью функции $x_2 = g(x_1)$ и описывает форму трещины (т.е. точки графика функции $g(x_1)$ лежат внутри Ω). Введем необходимые обозначения аналогичные предыдущим: $\Omega_g = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_g$, ν^g — нормаль к графику Γ_g.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_g)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_g)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Введем также

$$H(\Omega_g) = H^{1,0}(\Omega_g)^5.$$

Как и ранее, для произвольной функции $g \in \mathcal{G}$ определим $\|\cdot\|_g = \|\cdot\|_{H(\Omega_g)}$ и дополнительно $\|\cdot\|_{0,g} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega_g)^5}$. Для произвольных $\xi = (U, u, \phi) \in$

$H(\Omega_g)$, $\bar{\xi} = (\bar{U}, \bar{u}, \bar{\phi}) \in H(\Omega_g)$ определим билинейную форму

$$B_g(\xi,\bar{\xi}) = \int\limits_{\Omega_g} \Big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(\bar{U}) + (u_{,i} + \phi_i)(\bar{u}_{,i} + \bar{\phi}_i) \Big) dx,$$

функционал потенциальной энергии пластины:

$$\Pi_g(\xi) = \frac{1}{2} B_g(\xi,\xi) - \int\limits_{\Omega_g} F\xi dx.$$

Условие непроникания на внутренней границе Γ_g примет вид:

$$[U]\nu^g \geq |[\phi]\nu^g| \quad \text{на} \quad \Gamma_g. \tag{4.3.17}$$

Рассмотрим множество допустимых функций

$$K_g(\Omega_g) = \{\xi \in H(\Omega_g) |\ \xi \text{ удовлетворяет } (4.3.17)\}.$$

Для любого фиксированного $g \in \mathcal{G}$ существует единственное решение ξ^g задачи

$$\min_{\bar{\xi} \in K_g(\Omega_g)} \Pi_g(\bar{\xi}).$$

Рассмотрим функционал качества

$$J(g) = \|\xi^g - \xi_0\|_{L^2(\Omega_g)^5},$$

где $\xi_0 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})^5$ заданная функция. Задачу об оптимальной форме трещины сформулируем следующим образом:

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} J(g). \tag{4.3.18}$$

С физической точки зрения данная задача интерпретируется как задача о существовании формы трещины g, доставляющей решение ξ^g с максимальным отклонением от заданных (нежелательных) деформаций ξ^0. Для пластин и оболочек Кирхгофа–Лява задачи аналогичные (4.3.18) исследованы в [150, 153]. Заметим также, что задача (4.3.18) относится к задачам об оптимизации и анализу чувствительности форм (см., например [96, 182]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3.2. *Пусть выполнены предыдущие предположения. Тогда существует решение задачи* (4.3.18).

Доказательство. Пусть $g^n \in \mathcal{G}$ — максимизирующая последовательность. Согласно свойству множества $\mathcal{G}$, последовательность g^n ограничена в $H_0^2(0,1)$. Не нарушая общности, предположим, что при $n \to \infty$

$$g^n \;\to\; g \quad \text{слабо в } \; H_0^2(0,1), \quad g \in \mathcal{G},$$

$$|(g^n)' - g'| < 1/n \quad \text{в} \quad (0,1).$$

Для любого n существует решение $\xi^n(y_1, y_2) = (U^n, u^n, \phi^n)$ вариационного неравенства

$$B_{g^n}(\xi^n, \bar{\xi} - \xi^n) \geq \int\limits_{\Omega_{g^n}} F(\bar{\xi} - \xi^n) dy \quad \forall \bar{\xi} \in K_{g^n}(\Omega_{g^n}). \tag{4.3.19}$$

Продолжим функции g и g^n нулем вне $(0,1)$. Области Ω_1, Ω_2 и функция ζ могут быть выбраны как выше в разделе 4.3.2. Преобразование переменных введем по формуле

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + (g(y_1) - g^n(y_1))\zeta(y_1, y_2). \tag{4.3.20}$$

Заметим далее, что преобразование (4.3.20) можно представить следующим образом:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 - \frac{1}{n}\rho^n(y_1)\zeta(y_1, y_2),$$

где $\rho^n = n(g - g^n)$ — ограниченная функция в $C^1[0,1]$. В этом случае, имеем взаимно-однозначное отображение между Ω_{g^n} и Ω_g с положительным якобианом $q_n = 1 - \frac{1}{n}\rho^n \frac{\partial \zeta}{\partial y_2}$.

Оставшаяся часть доказательства аналогична рассуждениям доказательства теоремы 4.3.1. Получаем априорные оценки $\|\xi^n\|_{g^n} \leq C$ для достаточно больших n, потом оценки $\|\mu^n\|_g \leq C$, для полученных преобразованием (4.3.20) функций $\mu^n = \xi^n$ с постоянной $C > 0$, независящей от n. Выделяем подпоследовательность, обозначенную прежним образом μ^n, слабо сходящуюся в пространстве $H(\Omega_g)$ к $\mu^0 \in K_g(\Omega_g)$. Можно считать, что $\mu^n \to \mu^0$ сильно в $L^2(\Omega_g)^5$ при $n \to \infty$.

Заметим далее, что для любого $\bar{\xi} \in K_g(\Omega_g)$ найдется последовательность $\bar{\xi}^n \in K_{g^n}(\Omega_g)$ сходящаяся сильно к ξ в пространстве $H(\Omega_g)$ при $n \to \infty$. Этот факт можно доказать в соответствии с леммой 4.3.3. Предыдущие рассуждения позволяют нам перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (4.3.19). В итоге получим, что справедливо соотношение:

$$B_g(\mu^0, \bar{\xi} - \mu^0) \geq \int_{\Omega_g} F(\bar{\xi} - \mu^0) dx \quad \forall \bar{\xi} \in K_g(\Omega_g).$$

Это означает, что функция $\mu^0 = \xi^g$ соответствует графику $x_2 = g(x_1)$. Пусть теперь $\xi_{0n}(x_1, x_2) = \xi_0(y_1, y_2)$. Благодаря предыдущим аргументам имеем

$$\sup_{\bar{g} \in \mathcal{G}} J(\bar{g}) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{\|\xi^n - \xi_0\|_{L^2(\Omega_{g^n})^5}\} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{\|q_n^{-1/2}(\mu^n - \xi_{0n})\|_{L^2(\Omega_g)^5}\} =$$

$$= \|\xi^g - \xi_0\|_{L^2(\Omega_g)^5} = J(g).$$

Следовательно, полученная функция g доставляет максимальное значение для функционала $J(g)$ над множеством $\mathcal{G}$ и, таким образом, является решением задачи (4.3.18). Теорема доказана.

Заметим, что вместо задачи (4.3.18) можно было рассмотреть следующую задачу:

$$\inf_{g \in \mathcal{G}} J(g),$$

которая с физической точки зрения интерпретируется как задача о существовании формы трещины, доставляющей деформации ξ^g с минимальным отклонением от заданных ξ_0.

Заключение: основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказана однозначная разрешимость для нелинейных краевых задач с условиями типа неравенств на внутренней границе, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин с трещиной, в том числе, пластин с трещиной вдоль жесткого или упругого включения. Для задач о равновесии однородной пластины и пологой оболочки, сформулированных в области с негладкой границей, установлены свойства дополнительной регулярности решения. Доказано, что задача о контакте пластины с жестким препятствием является предельной для семейства вспомогательных задач о равновесии пластины с трещиной.

2. Для нелинейной задачи о равновесии пластины с трещиной выведена формула производной функционала энергии по параметру возмущения области, а также установлена непрерывная зависимость решений от изменения области. Доказана возможность представления производной функционала энергии пластины с трещиной в виде инвариантного интеграла по произвольному замкнутому контуру. Построен ряд примеров с определенной геометрией пластины и заданным видом функции возмущения области, для которых производная функционала энергии представляется в виде инвариантного интеграла.

3. Для нелинейной модели пластины с трещиной, расположенной вдоль жесткого включения, доказано существование производной функциона-

ла энергии по параметру общего возмущения, найдена выражающая ее формула и установлена непрерывная зависимость решений от изменения области. Получены специальные представления формулы для производной в случае дополнительной гладкости решения.

4. В задаче о равновесии пластины установлена сходимость решений при стремлению к нулю параметра, описывающего возмущение прямолинейной трещины. Доказано существование экстремальной кривой, доставляющей экстремум для функционала качества, описывающего отклонение от заданных обобщенных перемещений.

5. Разработан метод исследования непрерывной зависимости решений нелинейных краевых задач о равновесии упругих тел от вариации размера жестких включений. С помощью этого метода доказано, что решения задач о пластине с объемным жестким включением сходится к решению задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением. Доказана разрешимость задач оптимального управления размером жесткого включения в упругих пластинах с разными функционалами качества.

Литература

[1] Алексеев, Г.В. Трещина в упругом теле выходящая на границу под нулевым углом / Г.В. Алексеев, А.М. Хлуднев // Вестник Новосиб. гос. ун-та Серия: Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 2. – С. 15–29.

[2] Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.

[3] Андерссон, Л.-Е. Трещина, выходящая на контактную границу. Метод фиктивных областей и инвариантные интегралы / Л.-Е. Андерссон, А.М. Хлуднев. // Сиб. журн. индустр. матем. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 15–29.

[4] Аргатов, И.И. Условия равновесия твердого тела на шероховатой плоскости при осесимметричном распределении нормальных давлений / И.И. Аргатов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 2. – С. 15–26.

[5] Аннин, Б.Д. О численной реализации вариационного неравенства в задачах динамики упругопластических тел / Б.Д. Аннин, В.М. Садовский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36, № 9 – С. 177–191.

[6] Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара: Изд-во "Самарский университет". 2001. – 562 с.

[7] Байоки, К. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей / К. Байоки, А. Капело. пер. с англ. под ред. В.И. Агошкова. – М.: Наука, 1988. – 448 с.

[8] Бураго, Ю.Д. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами / Бураго Ю.Д, Мазья В.Г. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1967. – Т. 3. – С. 3—152.

[9] Вабищевич, П.В. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / Вабищевич П.В. – М.: Изд-во Моск. университета, 1991. – 156 с.

[10] Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу; пер. с англ.: В.В. Кобелева, А.П. Сейраняна; под ред. Н.В. Баничука. М.: Мир, 1987.– 542 с.

[11] Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее применение / В.З. Власов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

[12] Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

[13] Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З. Галимов. – Казань: Изд-во КГУ, 1975. – 325 с.

[14] Главачек, И. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас и др; пер. со словац. Ю.А. Кузнецова, А.В. Лапина; ред Н.И. Бахвалов. – М.: Мир, 1986. – 270 с.

[15] Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер; пер. с фр. А.С. Кравчук; под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

[16] Гольдштейн, Р.В. Качественные методы в механике сплошных сред / Р.В. Гольдштейн, В.М. Ентов; отв. ред. Н. Х. Арутюнян. – М.: Наука, 1989. — 224 с.

[17] Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон; пер. с англ. В.Э. Наумова, А.А. Спектора; под ред. Р.В. Гольдштейна. – М.: Мир, 1989. – 509 с.

[18] Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс; пер. с фр. С.Ю. Прищепионка, С.К. Рожковской; под ред. С.К. Годунова. – М. : Наука, 1980. — 383 с.

[19] Жилин, П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин / П.А. Жилин // Изв . РАН. Механика твердого тела. – 1992. – №3. – С. 48—64.

[20] Ильина, И.И. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды / И.И. Ильина, В.В. Сильвестров // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 153–166.

[21] Иваньшин, Н.А. Решение задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два ненулевых угла / Н.А. Иваньшин, Е.А. Широкова // Прикл. математика и механика. – 1995, – Т. 59, вып. 3, С. 524–528.

[22] Карпов, Г.Н. О применении метода потенциала к двумерным задачам упругого равновесия области с нерегулярной границей / Г.Н. Карпов, Н.В. Курносов, В.З. Партон // Проблемы прочности. – 1982. – №7. – С. 3–5.

[23] Като, Т. Теория возмущения линейных операторов / Т. Като; пер. с англ. Г. А. Воропаевой и др.; под ред. В. Н. Маслова. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[24] Козлов, В.А. Асимптотика решения уравнения Пуассона вблизи вершины трещины с нелинейными краевыми условиями на берегах / В.А. Козлов, А.М. Хлуднев. // ДАН. – 2006. – Т. 411, № 5. – С. 583–586.

[25] Ковтуненко, В.А. Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов / В.А. Ковтуненко // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, № 1. – С. 109–123.

[26] Ковтуненко, В.А. Метод численного решения упругой задачи о контакте / В.А. Ковтуненко // Прикл. механика и техн. физика. – 1994. – Т. 35, № 5. – С. 142-146.

[27] Ковтуненко, В.А. Итерационный метод штрафа для задачи с ограничениями на внутренней границе / В.А. Ковтуненко // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т. 37, № 3. – С. 587–591.

[28] Ковтуненко, В.А. Численное решение задачи о контакте упругопластической балки для модели Тимошенко / В.А. Ковтуненко // Известия АН. Механика твердого тела. – 1996. –№ 5. – С. 79–84.

[29] Ковтуненко, В.А. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом / В.А. Ковтуненко, А.Н. Леонтьев, А.М. Хлуднев // Прикл. механика и техн. физика. – 1998. – Т. 39, № 2. – С. 164–174.

[30] Ковтуненко, В.А. Вариационные методы в теории трещин с ограничениями : дис. . . . д-ра. физ.-мат. наук : 01.02.04. / Ковтуненко Виктор Анатольевич. Новосибирск – 2007. – 372 с.

[31] Кондратьев, В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В.А. Кондратьев // Тр. Московск. матем. общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.

[32] Кравчук, А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: МГАПИ, 1997. – 340 с.

[33] Кравчук, А.С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А.С. Кравчук // ПММ. – 2009. – Т.79, вып. 3. – С. 492–502.

[34] Купрадзе, В.Д. Методы потенциала в теории упругости / В.Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.

[35] Лазарев, Н.П. Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину / Н.П. Лазарев // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2003. – Т.3, вып. 2. – С. 62–73.

[36] Лазарев, Н.П. Метод гладких областейв задачах двумерной теории упругости для области с негладким разрезом / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 103–113.

[37] Лазарев, Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011. – Т. 14, № 4. – С. 32–43.

[38] Лазарев, Н.П. Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину / Н.П. Лазарев // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2011. – Т. 14, № 4. – С. 381–392.

[39] Лазарев, Н.П. Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко / Н.П. Лазарев // Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика. – 2011. – Т. 11, вып. 4. – С. 49-62.

[40] Лазарев, Н.П. Оптимальное управление внешними нагрузками в задаче о равновесии упругой пластины Тимошенко с условиями непроникания на трещине / Н.П. Лазарев // Математические заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, вып. 2. – С. 99–111.

[41] Лазарев, Н.П. Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15. № 3. – С. 58–69.

[42] Лазарев, Н.П. Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину / Н.П. Лазарев // Прикл. механика и техн. физика. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 175–185.

[43] Лазарев, Н.П. Инвариантные интегралы в задаче о равновесии пластины Тимошенко с условиями типа Синьорини на трещине / Н.П. Лазарев // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. – 2013. № 6(107) – С. 100–115.

[44] Лазарев, Н.П. Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 98–108.

[45] Лазарев, Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига / Н.П. Лазарев // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, – № 2. – С. 179–189.

[46] Лазарев, Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной / Н.П. Лазарев // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 171–181.

[47] Лазарев, Н.П. Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием / Н.П. Лазарев // Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 91–104.

[48] Лазарев, Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения / Н.П. Лазарев // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2014. –№ 1. – С. 32–45.

[49] Лазарев, Н.П. Оптимальный угол наклона плоской трещины в задаче о равновесии пластины Кирхгофа-Лява / Н. П. Лазарев // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22. № 1. – С. 62–68.

[50] Лазарев, Н.П. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко [Электронный ресурс]/ Н.П. Лазарев, Н.В. Неустроева, Н.А. Николаева // Сиб. электрон. матем. изв., 12 (2015), 300–308. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=semr&paperid=587&option_lang=rus.

[51] Лазарев, Н.П. Производная функционала энергии по длине криволинейного наклонного разреза в задаче о равновесии пластины Тимошенко / Н.П. Лазарев // Прикл. механика и техн. физика. – 2015. – Т. 56, – №6. – С. 119–131.

[52] Левин, В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.

[53] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс; пер. с фр. Л.Р. Волевича; под ред. О.А. Олейник. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

[54] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес; пер. с фр. Л.С. Франка; под ред. В.В. Грушина. – М.: Мир, 1971. — 371 с.

[55] Лойгеринг, Г. О равновесии упругих тел, содержащих тонкие жесткие включения / Г. Лойгеринг, А.М. Хлуднев // Докл. АН. – 2010. – Т. 43, №1. – С. 1–4.

[56] Мазья, В.Г. Пространства С.Л. Соболева / В.Г. Мазья. – Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1985. – 415 с.

[57] Мазья, В.Г. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек / В.Г. Мазья, С.А. Назаров // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1987. – Т. 50. – С. 79–129.

[58] Мазья, В.Г. Теоремы вложения и продолжения для функций в нелипшецевых областях / Мазья В.Г., Поборчий С.В. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. университета, 2006. – 400 с.

[59] Мазья, В.Г. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области / В.Г. Мазья, С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский. – Тбилиси: Изд-во Тбил. университета, 1981. – 206 с.

[60] Мазья, В.Г. Об асимптотике функции напряжений вблизи вершины трещины в задаче кручения при установившейся ползучести / В.Г. Мазья, А.С. Слуцкий, В.Л. Фомин // Изв. РАН. МТТ. – 1986. – №4. – С. 170–176.

[61] Марченко, В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов; АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур. – Киев : Наук. думка, 1974. – 279 с.

[62] Матвиенко, Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2006. — 328 с.

[63] Механика контактных взаимодействий / под ред.: И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с.

[64] Механика твердых деформируемых тел / [Гос. ком. Совета Министров СССР по науке и технике АН СССР. ВИНИТИ]. – М. : [ВИНИТИ], 1973 – . - (Итоги науки и техники). Т. 5 : Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М.: [ВИНИТИ], 1973. - 272 с.

[65] Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

[66] Михайлов, Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами / Б.К. Михайлов. – Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1980. – 196 с.

[67] Мовчан, А.Б. Приращение коэффициентов интенсивности напряжений при удлинении криволинейной трещины / А.Б. Мовчан, С.А. Назаров, О.Р. Полякова // Механика твердого тела. – 1992. – №1. – С. 84–93.

[68] Морозов, Н.Ф. Математические вопросы теории трещин / Н.Ф. Морозов. – М.: Наука, 1984. — 256 с.

[69] Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. Наука, 1966.– 707 с.

[70] Назаров, С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Том 1. Понижение размерности и интегральные оценки / С.А. Назаров. – Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. – 408 с.

[71] Назаров, С.А. Сценарии квазистатического роста трещин при слабом искривлении и изломе / С.А. Назаров // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 3. – С. 507–525.

[72] Назаров, С.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей / С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский. – М.: Наука, 1991. – 336 с.

[73] Назаров, С.А. Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков / С.А. Назаров, О.Р. Полякова // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С. 104–119.

[74] Назаров, С.А. Об одном свойстве решений нелинейных уравнений равновесия вблизи особенности / С.А. Назаров, А.С. Слуцкий // Изв. вузов. Матем. – 1982. – № 9. – С. 36–39.

[75] Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / под общ. ред. Гузя А.Н.; АН УССР. Ин-т механики. - Киев: Наук. думка, 1990. – Т. 1. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / Каминский А.А. — 309 с.

[76] Неустроева, Н.В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин / Н.В. Неустроева // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, №4. – С. 92–105.

[77] Неустроева, Н.В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением / Н.В. Неустроева // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2009. – Т.9, Вып. 4. – С. 51–64.

[78] Олейник, О.А. Математические задачи теории сильно неоднородных сред / О.А. Олейник , Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.

[79] Осадчук, В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В.А. Осадчук. – Киев.: Наукова думка, 1985. — 224 с.

[80] Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос ; пер. с англ.: И.Р. Шаблинской, Р.А. Арутюнова; под ред. В.Ф. Демьянова. – М.: Мир, 1989. — 494 с.

[81] Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.

[82] Партон, В.З. Механика упруго-пластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 505 с.

[83] Партон, В.З. Интегральные уравнения теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1977. — 312 с.

[84] Партон, В.З. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

[85] Пастухова, С.Е. Об усреднении одного вариационного неравенства для упругого тела с периодически расположенными трещинами / С.Е. Пастухова // Матем. сб. – 2000. Т 191, № 2. – С. 149–164.

[86] Пелех, Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.

[87] Пелех, Б.Л. Обобщенная теория оболочек / Б.Л. Пелех. – Львов : Вища школа, 1978. – 159 с.

[88] Попова, Т.С. О регулярности решения задачи равновесия для пластины с трещиной / Т.С. Попова // Математические заметки ЯГУ. – 1996. – Т. 3, вып. 2. С. 124–132.

[89] Пугачев, В.С. Лекции по функциональному анализу / В.С. Пугачев. – М.: Изд-во МАИ, 1996. – 744 с.

[90] Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учеб. пособие для вузов. / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

[91] Развитие теории контактных задач в СССР / Б.Л. Абрамян, В.М. Александров, Ю.А. Аменадзе и др.; отв. ред. Л.А. Галин. Ин-т пробл. механики (Москва). - М.: Наука, 1976. – 493 с.

[92] Ротанова, Т.А. Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу / Т.А. Ротанова // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2011. – № 3. – С. 99–107.

[93] Рудой, Е.М. Формула Гриффитса для пластины с трещиной / Е.М. Рудой // Сиб. журн. индустр. матем. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 155–161.

[94] Рудой, Е.М. Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной / Е.М. Рудой // Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 466–477.

[95] Рудой, Е.М. Дифференцирование функционалов энергии в трехмерной теории упругости для тел, содержащих поверхностные трещины / Е.М. Рудой // Сиб. журнал индустр. матем. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 106–116.

[96] Рудой, Е.М. Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом / Е.М. Рудой // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 430–445.

[97] Рудой, Е.М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова-Райса для пластины с жестким включением и трещиной / Е.М. Рудой // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. – Т. 10, вып. 2. – С. 98–117.

[98] Рудой, Е.М. Инвариантные интегралы в плоской задаче теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами / Е.М. Рудой // Сиб. журнал индустр. матем. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 99–109.

[99] Рудой, Е.М. Производная по форме области интеграла энергии в теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами / Е.М. Рудой // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12, № 2. – С. 108–122.

[100] Сеа, Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа; ред. А.Ф. Кононенко, Н.И. Моисеев, пер. с фр. Л.Г. Гурин. – М.: Мир, 1973. — 244 с.

[101] Слепян, Л.И. Механика трещин / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1981. – 296 с.

[102] Степанов, В.Д. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини / В.Д. Степанов, А.М. Хлуднев // Сиб. мат. журн. – 2003. – Т. 44, № 6. – С. 1350–1364.

[103] Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова. – М.: Физматлит, 2009. – 336 с.

[104] Темам, Р. Математические задачи теории пластичности / Р. Темам; пер.с фр. А.И.Штерн. – М.: Наука, 1991. — 288 с.

[105] Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам; пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка; под ред. Б.Г. Кузнецова и Н.Н. Яненко. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

[106] Товстик, П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек / П.Е. Товстик // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т.8, № 3. – С. 72–85.

[107] Уральцева, Н.Н. О регулярности решений вариационных неравенств / Н.Н. Уральцева // Успехи мат. наук. – 1987. – Т. 42, вып. 6(258). – С. 151–174.

[108] Федерер, Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер; пер. с англ.: С.П. Байбородова, Л.Д. Иванова, В.В. Трофимова; под ред. А.Г. Витушкина; доп.: Л.Д. Иванов, А.Т. Фоменко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, — 760 с.

[109] Фикера, Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера; пер. с англ. Т.Д. Вентцель; под ред. Г.С. Михлина. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

[110] Фридман, А. Вариационные принципы и задачи со свободным границами / А. Фридман; пер. с англ. Т.Н. Рожковской; под ред. Н.Н. Уральцевой. – М.: Наука, 1990. – 535 с.

[111] Хлуднев, А.М. Об экстремальных формах разрезов в пластине / А.М. Хлуднев // Известия РАН, МТТ. – 1992. – № 1. – С. 170–176.

[112] Хлуднев, А.М. Контактная задача для пологой оболочки с трещиной / А.М. Хлуднев // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, № 2. – С. 318–326.

[113] Хлуднев, А.М. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину / А.М. Хлуднев // Прикл. механика и техн. физика. – 1997. Т. 38, № 5. – С. 117–121.

[114] Хлуднев, А.М. О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину / А.М. Хлуднев // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 5. – С. 882–894.

[115] Хлуднев, А.М. Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной / А.М. Хлуднев // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 1388–1400.

[116] Хлуднев, А.М. Теория трещин с возможным контактом берегов / А.М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.

[117] Хлуднев, А.М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением / А.М. Хлуднев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 114–126.

[118] Хлуднев, А.М. Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной / А.М. Хлуднев // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 1388–1400.

[119] Хлуднев, А.М. Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу / А.М. Хлуднев // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 42–58.

[120] Хлуднев, А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине : препринт №1-09 / А.М. Хлуднев; Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева. – Новосибирск, – 2009. – 17 с.

[121] Хлуднев, А.М. Задачи теории упругости в негладких областях / А.М. Хлуднев М.: Физматлит, 2010. – 252 с.

[122] Хлуднев, А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине / А.М. Хлуднев // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 5. – С. 98–110.

[123] Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

[124] Черепанов, Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения / Г.П. Черепанов. – М.: Недра, 1987. – 308 с.

[125] Черноусько, Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. — 236 с.

[126] Шацкий, И.П. Влияние закрытия коллинеарных трещин на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек / И.П. Шацкий, Н.В. Маковийчук // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, № 3. – С. 159–166.

[127] Щербаков, В.В. Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа–Лява / В.В. Щербаков // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 142–151.

[128] Щербаков, В.В. Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах / В.В Щербаков // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, – № 1. – С. 138–147.

[129] Щербаков, В.В. Управление жесткостью тонких включений в упругих телах с криволинейными трещинами / В.В Щербаков // Вестник Новосиб. гос. ун-та Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1. – С. 135–149.

[130] Эванс, Л.К. Уравнения с частными производными / Л.К. Эванс; пер. с англ. Т.Н. Рожковской; под ред. Н.Н. Уральцевой. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с.

[131] Эванс, Л.К. Теория меры и тонкие свойства функций / Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи; пер. с англ. Рожковской Т.Н.; под ред. Уральцевой Н.Н. – Новосибирск: Научная книга, 2002. – 216 с.

[132] Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам; пер. с англ. В. М. Тихомирова. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

[133] Adams, R. Sobolev Spaces / R. Adams, J. Fournier – 2nd ed. – New York: Academic Press, 2003. – 305 p.

[134] Argatov, I. Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers: Asymptotic ModelsSpringer / I. Argatov, G. Mishuris – Springer, 2015. — 335 p.

[135] Arnold, D.N. On the range of applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love plate bending models / D.N. Arnold, A.L. Madureira, S. Zhang // J. Elasticity 2002 Vol. 67, No. 3. – P. 171-–185.

[136] Brokate, M. On crack propagation shapes in elastic bodies / M. Brokate, A.M. Khludnev // Z. Angew. Math. Phys. – 2004. – Vol. 55, No. 2. P. 318–329.

[137] Bui, H.D. Fracture Mechanics. Inverse Problems and Solutions / H.D. Bui. – Dordrecht: Springer, 2006. – 375 p.

[138] Dal Corso, F. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I. Full-field solution and asymptotics / F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei // J. Mech. Phys. Solids. – 2008. – Vol. 56. – P. 815–838.

[139] Dauge, M. Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains: Smoothness and Asymptotics of Solutions / M. Dauge. – Berlin and etc., Springer-Verlag, 1988. — 261 p.

[140] Delfour, M.C. Shapes and geometries: analysis, differential calculus and optimization / M.C. Delfour, J.-P. Zolesio. – Philadelphia: SIAM, 2001. — 461 p.

[141] Duduchava, R. The Winer-Hopf method for systems of pseudodifferential equations with application to crack problem / R. Duduchava, W. Wendland // Integral. Equaton. Oper. – 1995. Vol. 23, No. 3. – P. 295-334.

[142] Freund, L.B. Dynamic fracture mechanics / L.B. Freund. – New York: Cambridge University Press, 1990. — 578ṗ.

[143] Grisvard, P. Elliptic problems in nonsmooth domains / P. Grisvard. – Boston-London-Melbourne: Pitman, 1985. — 410 p.

[144] Haug, E.J. Design sensitivity analysis of structural systems / Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. – Orlando: Academic Press Inc., 1986. — 381 p.

[145] Hoemberg, D. On safe crack shapes in elastic bodies / D. Hoemberg, A.M. Khludnev // Europ. J. Mech. A/Solids. – 2002. – Vol. 21, P. 991–998.

[146] Hoffmann, K.-H. Fictitious domain method for the Signorini problem in a linear elasticity / K.-H. Hoffmann, A.M. Khludnev // Adv. Math. Sci. Appl. – 2004. – Vol. 14, No. 2. – P. 465–481.

[147] Itou, H. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity / H. Itou, A.M. Khludnev, E.M. Rudoy et al. // Z. Angew. Math. Mech. – 2012. Vol. 92, No. 9. – P. 716–730.

[148] Kaczynski, A. On 3D punch problems for a periodic two-layered elastic halfepace / A. Kaczynski, S.J. Matysiak // J. Theor. Appl. Mech.Vol. – 2001. Vol 39, No. 3. – P. 523–538.

[149] Khludnev A.M. Extreme crack shapes in a shallow shell / A.M. Khludnev // Adv. Mat. Sci. Appl. – 1997. – Vol. 7, No. 1. – P. 213–221.

[150] Khludnev, A.M. Modelling and control in solid mechanics / A.M. Khludnev, J. Sokolowski. – Birkhauser, Basel. 1997. — 366 p.

[151] Khludnev, A.M. Evolution of a crack with kink and non-penetration / A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko, A. Tani // J. Math. Soc. Japan. – 2008. Vol. 60, No. 4. – P. 1219–1253.

[152] Khludnev, A.M., Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions / A.M. Khludnev , A.A. Novotny, J. Sokolowski, Zochowski A. // Journal Mechanics and Physics of Solids. – 2009. – Vol. 57, No. 10. – P. 1718–1732.

[153] Khludnev, A.M. Analysis of cracks in solids / A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko. – Southampton, Boston: WIT-Press, 2000. – 386 p.

[154] Khludnev, A. Optimal control of inclusion and crack shapes in elastic bodies / A. Khludnev, G. Leugering, M. Specovius-Neugebauer // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2012. – Vol. 155, No. 1. – P. 54–78.

[155] Khludnev, A.M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body / A.M. Khludnev, M. Negri. // Z. Angew. Math. Mech. – 2012. – V. 92, No. 5. P. 341–354.

[156] Khludnev, A.M. Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates / A.M. Khludnev // Europ. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 32, P. 69–75.

[157] Khludnev, A.M. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks / A.M. Khludnev, M. Negri // Z. Angew. Math. Phys. – 2013. – Vol. 64, No. 1. – P. 179–191.

[158] Khludnev, A.M. Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies / A.M. Khludnev // Arch. Appl. Mech. – 2013. – Vol. 83, No. 10. – P. 1493–1509.

[159] Khludnev, A.M. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies [Electronic resource] / A.M. Khludnev, L. Faella, T.S. Popova // Mathematics and Mechanics of Solids. –2015. – Mode of access: http://mms.sagepub.com/content/early/2015/08/03/ 1081286515594655.abstract. — Date of access: 10.08.2015. – DOI: 10.1177/1081286515594655.

[160] Kikuchi, N. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods / N. Kikuchi, J.T. Oden — Philadelphia: SIAM, 1988. — 495 p.

[161] Knees, D. Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints / D. Knees, A. Schroder // Math. Meth. Appl. Sci. – 2012. – Vol. 35, No. 15. – P. 1859–1884.

[162] Knowles, J.K. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics / J.K. Knowles, E. Sternberg // Archive for rational mechanics and analysis. – 1972. Vol. 44, No. 3. – C. 187–211.

[163] Kovtunenko, V.A. Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration / V.A. Kovtunenko // IMA J. Appl. Math. – 2006. No. 71. – P. 635–657.

[164] Kravchuk, A.S. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics / Kravchuk A.S., Neittaanmaki P.J. – Dordrecht: Springer, 2007. — 329 p.

[165] Kunisch, K. Generalized Newton methods for the 2D-Signorini contact problem with friction in function space / K. Kunisch, G. Stadler // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 39, No. 4. – P. 827–854.

[166] Lazarev, N.P. An Equilibrium Problem for the Timoshenko-type Plate Containing a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion / N.P. Lazarev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2013. – Vol.6, No. 1. – P. 53–62.

[167] Lazarev, N.P. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition / N.P. Lazarev, E.M. Rudoy // Z. Angew. Math. Mech. – 2014. – Vol. 94, No. 9. – P. 730–739.

[168] Lazarev, N.P. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion / N.P. Lazarev // Z. Angew. Math. Phys. – 2015. – Vol. 66. No. 4, P. 2025–2040.

[169] Lazarev, N.P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack / N.P. Lazarev // Z. Angew. Math. Mech. – 2016. – Vol. 96. No. 4, P. 509–518.

[170] Lazarev, N.P. Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate // Boundary Value Problems – 2015. – Mode of access: http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2015/1/180 — Date of access: 06.10.2015. – DOI:10.1186/s13661-015-0437-y.

[171] Lazarev, N.P. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle / N.P. Lazarev, H. Itou, N.V. Neustroeva // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. – 2016 – Vol. 33. No. 1, P. 63–80.

[172] Lazarev, N. Existence of an optimal size of a rigid inclusion for an equilibrium problem of a Timoshenko plate with Signorini-type boundary condition / N. Lazarev, T. Popova, G. Semenova // Journal of Inequalities and Applications – 2016. – Mode of access: http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2016/1/18 — Date of access: 16.01.2016. – DOI:10.1186/s13660-015-0954-3

[173] Lewy, H. On the regularity of the solution of a variational inequality / H. Lewy, G. Stampacchia // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1969. – Vol. 22, No. 2. – P. 153–188.

[174] Maz'ya, V.G. Asymptotic solution to the Dirichlet problem for a two-dimensional Riccatti's type equation near a corner point / V.G. Maz'ya, A.S. Slutskii // Asymptotic Analysis. – 2004. – Vol. 39, No. 2. – P. 169–185.

[175] Maz'ya, V.G. Differentiable functions on bad domains / V.G. Maz'ya, S.V. Poborchi. – Singapore: World Scientific Pub Co Inc, 1997. – 495 p.

[176] Misseroni, D. Stress concentration near stiff inclusions: validation of rigid inclusion model and boundary layers by means of photoelasticity / D. Misseroni, F. Dal Corso, S. Shahzad et al. // Eng. Fract. Mech. – 2014. – Vol. 121-122. – P. 87–97.

[177] Movchan, A.B. Mathematical modelling of solids with nonregular boundaries. CRC Mathematical modelling series / Movchan A.B., Movchan N.V. – New York: Boca Raton, – 1995. – 325 c.

[178] Naganarayana, B.P. Energy-release-rate evaluation for delamination growth prediction in multi-plate model of a laminate composite / B.P. Naganarayana, S.N. Atluri // Computational Mechanics. – 1995. – Vol. 15, No. 5. – P. 443–459.

[179] Prisyazhnyuk, V.K. Numerical solution of a contact problem for multilayered composite structural systems / V.K. Prisyazhnyuk // Mech. Compos. Mater. – 1995. – Vol. 31, No. 2. – P. 174–178.

[180] Rabinovich, V.L. Unilateral contact problem for finite bodies - parallel implementation / V.L. Rabinovich, S.R. Sipcic // Computational Mechanics. – 1994. Vol. 13, No. 6. – P. 414–426.

[181] Rudoy, E.M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body / E.M. Rudoy // Z. Angew. Math. Phys. – 2015. – Vol. 66, No. 4,– P. 1923–1937.

[182] Sokolowski, J. Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis / J. Sokolowski, J.P. Zolesio – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992. — 254 p.

[183] Sosa, H. On invariant integrals in analysis of cracked plates /H. Sosa, G. Herrmann // International Journal of Fracture. – 1989. – Vol. 40. – P. 111–126.

[184] Xiao, Z.M. Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion / Z.M. Xiao, B.J. Chen // International Journal of Fracture. – 2001. – Vol. 108. – P. 193–205.