

На правах рукописи

Лазарев Нюргун Петрович

**Краевые задачи теории трещин с неизвестными  
границами для пластин модели Тимошенко**

01.01.02 — дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова»

**Научный консультант:** доктор физико-математических наук, профессор **Хлуднев Александр Михайлович**.

**Официальные оппоненты:**

**Алексеев Геннадий Валентинович**, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, научно-исследовательская группа вычислительной аэрогидродинамики, главный научный сотрудник.

**Солдатов Александр Павлович**, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», кафедра дифференциальных уравнений, заведующий кафедрой.

**Филимонов Михаил Юрьевич**, д-р физ.-мат. наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, отдел прикладных задач, ведущий научный сотрудник.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Защита состоится 28 марта 2017 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте [www.hydro.nsc.ru](http://www.hydro.nsc.ru).

Автореферат разослан «    » февраля 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук

Рудой  
Евгений Михайлович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Как известно, развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных неразрывно связано с успехами в моделировании физических задач. Современные математические методы вариационного исчисления, функционального анализа позволяют изучать обобщенные постановки краевых задач. В частности, многие задачи механики допускают постановку в виде минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций. В последние десятилетия в работах А.М. Хлуднева, В.А. Ковтуненко, С.Е. Пастуховой, Е.М. Рудого, Т.С. Поповой, Е.В. Вторушина, Н.В. Неустроевой, Т.А. Ротановой, В.В. Щербакова, D. Knees, D. Hoemberg, H. Itou, K. Ohtsuka, A. Tani, M. Negri, G. Leugering, M. Bach, A.-M. Saendig, J. Sokolowski, A. Mielke, M. Specovius-Neugebauer, К.-Н. Hoffmann, N.D. Botkin и др. с помощью вариационного подхода изучен широкий круг нелинейных краевых задач теории трещин с граничными условиями в виде неравенств. Эти условия задаются на кривой или поверхности, соответствующей трещине, и описывают взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Отметим, что классический подход к задачам теории трещин предполагает использование линейных условий в виде равенств. Этот подход в ряде задач о деформировании тел с трещинами допускает противоречивое с физической точки зрения проникновение противоположных берегов разреза друг в друга. Поэтому, применение условий непроникания в виде неравенств при постановке соответствующей краевой задачи гарантирует более точное описание механического взаимодействия берегов трещины. Вместе с тем точность описания процессов вблизи трещин, как следствие, влечет усложнение математической модели, обусловленное нелинейностью краевых условий. Трудности в изучении задач о равновесии тел, содержащих трещины, вызваны также нерегулярностью границы области, в которой ищется решение. По сравнению с решениями задач, определенных в гладких областях, решения задач теории трещин содержат так называемые сингулярные составляющие. Теория и методы решения линейных краевых задач в областях с негладкими границами (с линейными краевыми условиями на границах) разрабатывались в работах С.А. Назарова, В.А. Кондратьева, В.Г. Мазы, В.А. Козлова, И.И. Аргатова, Р.В. Гольдштейна, А.Н. Гузя, Р. Дудучавы, В.М. Ентова, Ю.Г. Матвиенко, А.Б. Мовчана, Е.М. Морозова, Н.Ф. Морозова, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Б.А. Пламеневского, Ю.Н. Работнова, М.П. Саврука, Л.И. Слепяна, А.С. Слуцкого, Е.И. Шифрина, Г.П. Черепанова, H.D. Vui, M. Costabel, G. DalMaso, L.V. Freund, G.A. Francfort, P.Grisvard, D. Knees, J.-J. Marigo, M. Negri, M. Dauge, K. Ohtsuka, J.R. Rice и др. Математическое моделирование и исследование задач о деформировании

неоднородных тел, содержащих трещины вдоль включений, предполагает задание условий сопряжения на границе стыка разных материалов, кроме того, в случае жестких включений, задается определенная структура вектора перемещений. Описанные трудности в изучении краевых задач математической теории трещин с краевыми условиями типа неравенств обуславливают необходимость применения современного математического аппарата и разработки новых подходов и методов исследования. Уместно отметить, что имеется целый ряд нерешенных математических задач, связанных с прикладными задачами теории трещин.

К настоящему времени, начиная с 1995г., получен целый ряд важных результатов для задач о равновесии пластин модели Кирхгофа–Лява с условиями в виде неравенств. Как известно, в отличие от модели Кирхгофа–Лява, модель пластины Тимошенко позволяет учитывать поперечные сдвиги. При этом в модели Тимошенко деформирование описывается с помощью пяти скалярных функций — перемещений точек срединной плоскости и углов поворота нормальных волокон (в модели Кирхгофа–Лява деформирование описывается тремя скалярными функциями — перемещениями). Применение моделей, учитывающих поперечный сдвиг, во многих случаях позволяет наиболее точно описать реальные процессы в задачах о деформировании пластин. В связи с этим, научный интерес представляет исследование задач о равновесии пластин модели Тимошенко с неизвестной областью контакта. В диссертационной работе изучен новый класс задач для пластин модели Тимошенко с граничными условиями типа неравенств, разработан метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных неравенств, соответствующих задачам о равновесии упругих тел с жесткими включениями.

**Методы исследования.** В диссертационной работе применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы функционального анализа, вариационного исчисления, оптимального управления, теории пространств Соболева, а также методы, разработанные автором.

**Теоретическая и практическая ценность.** Методы и результаты диссертации представляют интерес для специалистов, работающих в области дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, оптимального управления, численного решения задач оптимизации форм.

Полученные результаты могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

**Обоснованность и достоверность результатов.** Обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими до-

казательствами, сравнением с другими результатами, известными автору в литературе по математическим и прикладным наукам.

**Целью диссертационной работы** является строгое математическое обоснование и анализ неклассических краевых задач для уравнений с частными производными, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин Тимошенко с трещинами и использующих нелинейные граничные условия типа Синьорини.

**На защиту выносятся:**

- Доказательство однозначной разрешимости для нелинейных краевых задач с условиями типа неравенств на внутренней границе, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин с трещиной, в том числе, пластин с трещиной вдоль жесткого или упругого включения. Для задач, сформулированных в области с негладкой границей, установлены свойства дополнительной регулярности решения.
- Доказательство существования и вывод формул производных для функционалов энергии по параметру возмущения формы негладкой области в нелинейных краевых задачах о равновесии однородной пластины с трещиной и упругой пластины с трещиной вдоль жесткого объемного включения;
- Вывод достаточных условий, при которых производная функционала энергии по параметру возмущения области может быть представлена в виде инвариантного интеграла;
- Доказательство разрешимости задач оптимального управления, в которых функции управления задаются формой трещины или размером жесткого включения;
- Метод обоснования предельного перехода в семействе вариационных задач о равновесии упругих тел с жесткими включениями по параметру, характеризующему размер включения.

**Личный вклад автора.** Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Результаты параграфа 3.1 главы 3 получены совместно с Е.М. Рудым (см. статью [14]), результаты параграфа 4.2 главы 4 получены совместно с Поповой Т.С., Семеновым Г.М. (см. [20]). Вклад указанных соавторов при получении соответствующих результатов является равным и неделимым.

**Научная новизна.** В диссертационной работе исследован новый класс нелинейных краевых задач, описывающих деформирование однородных пластин с трещинами, а также неоднородных пластин с трещинами вдоль жестких или упругих включений. Новизна обусловлена наличием граничных условий в виде неравенств. Условия задаются на кривой, соответствующей трещине, и описывают взаимное непроникание берегов трещины. Нелинейные задачи, описывающие равновесие упругих пластин с трещинами, с условиями непроникания ранее были изучены в рамках моделей двумерной теории упругости и Кирхгофа–Лява. В настоящей работе рассматриваются пластины модели Тимошенко, учитывающие, в отличие от модели Кирхгофа–Лява, поперечные сдвиги. Для указанной модели доказана однозначная разрешимость широкого класса нелинейных краевых задач в областях с негладкими границами. Проведен анализ зависимости решений и функционалов энергии пластин от изменения формы трещины и формы области (shape sensitivity analysis). На основе современных подходов разработан метод доказательства непрерывной зависимости решений задач о равновесии упругих тел от вариации размера отслоившихся жестких включений.

#### **Апробация работы.**

Результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения исследовательских проектов: Министерства образования и науки РФ № 8222 «Задачи управления формой и структурой для композитных материалов при наличии трещин отслоения» (рук. проф. А.М. Хлуднев), № 4402 «Фундаментальные теоретические основы математических моделей экологических процессов в условиях Крайнего Севера» (рук. проф. И.Е. Егоров), а также — грантов РФФИ №12-01-31076 «Математические модели упругих пластин и оболочек с односторонними ограничениями», №12-01-90808 «Задачи о равновесии пластин Тимошенко с краевыми условиями вида неравенств. Научный проект Лазарева Нюргуна Петровича из ФГАОУ ВПО СВФУ имени М.К.Аммосова, г. Якутск в ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск» (рук. Н.П. Лазарев), №10-01-00054 «Задачи равновесия упругих тел с жесткими включениями и возможным отслоением», №13-01-00017 «Иерархия тонких включений в упругих телах при наличии отслоений» (рук. проф. А.М. Хлуднев).

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных научных конференциях, среди которых:

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016);
- Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных» (Москва, 2016);
- 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied

Mathematics (Istanbul, Turkey, 2015);

— VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 115-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015);

— III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», посвященная 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова (Новосибирск, 2014);

— Международная конференция «Успехи механики сплошных сред» (УМСС'2014), приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2014);

— Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 2011, 2014);

— Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.» (Новосибирск, 2013);

— The International Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Актуальные проблемы механики) (Санкт-Петербург, 2013);

— Суперкомпьютерные технологии математического моделирования (Якутск, 2013);

— IX Всероссийская конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск, 2012);

— II Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», посвященная 85-летию со дня рождения профессора О.В. Соснина (Новосибирск, 2011).

Результаты работы были представлены на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН В.В. Пухначева (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. В.К. Андреева (ИВМ СО РАН); д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева (ИГиЛ СО РАН), д.ф.-м.н. И.Е. Егорова (СВФУ).

**Публикации.** Содержание и результаты диссертации полностью отражены в 22 статьях. Все статьи опубликованы в рекомендованных ВАКом для защиты докторских диссертаций рецензируемых научных журналах. Результаты работ в соавторстве получены авторами совместно, при равном вкладе и являются неделимыми.

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 184 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 295 страницах текста.

**Во введении** приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, его научная новизна, методы исследования, теоретическая и практическая ценность, даны сведения об апробации работы, изложено основное содержание.

**Первая глава** содержит некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа, уравнений математической физики, теории пространств Соболева, вариационного исчисления. В том числе приводятся неравенства Корна и Пуанкаре–Фридрихса, общие теоремы о разрешимости вариационных задач и операторных уравнений, формулы Грина, утверждения для пространств, определенных в области с разрезом. Основные положения и гипотезы математической теории упругих пластин модели Тимошенко и Кирхгофа–Лява, предположения для модели пластины с трещиной также приводятся в этой главе. Последний параграф главы посвящен виду краевых условий закрепления на внешней кромке пластины и выводу условия взаимного непроникания противоположных берегов трещины пластины.

В первом параграфе **второй главы** доказана однозначная разрешимость нелинейной краевой задачи, описывающей равновесие пластины с трещиной. Деформирование пластины описывается с помощью модели Тимошенко. На кривой, соответствующей трещине, задаются условия непроникания в виде неравенства. Из исходной вариационной постановки выведены уравнения равновесия, а также, при условии дополнительной гладкости решения, соотношения, которые характеризуют механику контактного взаимодействия берегов трещины. Установлены свойства дополнительной гладкости решения. Приведем далее формулировку задачи и доказанные утверждения.

Пусть  $\Omega \subset R^2$  — ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\Gamma_c \subset \Omega$ ,  $\Omega_c = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_c$ ,  $\Gamma_c = \{(x, y) | y = \psi(x), 0 < x < l\}$ ,  $\psi(x)$  — достаточно гладкая функция,  $\bar{\Gamma}_c \cap \Gamma = \emptyset$ . Нормаль к кривой  $\Gamma_c$  обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ . Считаем, что срединная поверхность пластины совпадает с областью  $\Omega_c$ . Предположим, что пластина содержит сквозную вертикальную трещину, которая описывается в срединной плоскости кривой  $\Gamma_c$ . Это означает, что поверхность трещины можно задать в виде  $(x, y) \in \Gamma_c, -h \leq z \leq h$ , где  $|z|$  — расстояние до срединной поверхности пластины, а  $2h$  — толщина пластины. Обозначим через  $\chi = (W, w)$  вектор перемещений точек срединной поверхности, где  $W = (w_1, w_2)$  и  $w$  горизонтальные и вертикальные перемещения, соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ . Считаем один из берегов разреза положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением  $\nu$ . В случае, когда след функции  $v$  берется на положительном берегу  $\Gamma_c^+$ , применим обозначение  $v^+ = v|_{\Gamma_c^+}$ , аналогично

для отрицательного берега  $v^- = v|_{\Gamma_c^-}$ . Скачок функции на  $\Gamma_c$  обозначим через  $[v] = v^+ - v^-$ . Введем обозначения для тензоров описывающих деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2,$$

$$(v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}), \quad x_1 = x, \quad x_2 = y.$$

Тензоры моментов  $m(\psi) = \{m_{ij}(\psi)\}$ , и усилий  $\sigma(W) = \{\sigma_{ij}(W)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , выражаются по формулам:

$$m_{ij}(\psi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad (1)$$

где ненулевые коэффициенты тензора  $c_{ijkl}$  определяются соотношениями:

$$c_{1111} = c_{2222} = D, \quad c_{1122} = c_{2211} = D\alpha,$$

$$c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = \frac{D(1 - \alpha)}{2}, \quad \alpha = const, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $\alpha$  — коэффициент Пуассона. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где  $\Lambda = 2\kappa'Gh$ ,  $\kappa'$  — коэффициент сдвига,  $G$  — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины. На внешней границе зададим краевые условия, которые описывают жесткое защемление

$$\psi = W = 0, \quad w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Пусть подпространство  $H^{1,0}(\Omega_c)$  пространства Соболева  $H^1(\Omega_c)$  состоит из функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ . Введем обозначения следующих пространств

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c)^5.$$

Определим следующую билинейную форму  $B(\eta, \bar{\eta}) = \int_{\Omega_c} b(\eta, \bar{\eta}) dx$ , где

$$b(\eta, \bar{\eta}) = \{\sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(\psi) \varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + q_i(w, \psi)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i)\}.$$

Функционал потенциальной энергии пластины имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B(\eta, \eta) - \int_{\Omega_c} F\eta dx,$$

функция  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in L_2(\Omega_c)^5$  описывает воздействие внешних нагрузок. Всюду используем правило суммирования по повторяющимся индексам.

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины имеет вид

$$[W_\nu] \geq h|[\psi_\nu]| \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (3)$$

Рассмотрим следующее множество допустимых функций

$$K = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_c) \mid \eta \text{ удовлетворяет (3)}\}.$$

Задачу о равновесии пластины сформулируем в виде задачи минимизации функционала энергии  $\Pi(\eta)$  на выпуклом и замкнутом множестве  $K$

$$\min_{\eta \in K} \Pi(\eta). \quad (4)$$

Методами вариационного анализа доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.1.** ([1]) *Вариационная задача (4) имеет единственное решение  $\xi = (U, u, \phi) \in K$ .*

При условии дополнительной гладкости решения, например, если имеет место включение  $\xi \in H^2(\Omega_c)^5$ , то на  $\Gamma_c$  определены следующие функции

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(U) &= \sigma_{ij}(U)\nu_j\nu_i, & \sigma_\tau(U) &= (\sigma_{\tau 1}(U), \sigma_{\tau 2}(U)), \\ m_\nu(\phi) &= m_{ij}(\phi)\nu_j\nu_i, & m_\tau(\phi) &= (m_{\tau 1}(\phi), m_{\tau 2}(\phi)), \\ \sigma_{\tau i}(U) &= \sigma_{ij}(U)\nu_j - \sigma_\nu(U)\nu_i, & m_{\tau i}(\phi) &= m_{ij}(\phi)\nu_j - m_\nu(\phi)\nu_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad \text{где}$$

$\tau$  — касательный единичный вектор к кривой  $\Gamma_c$ . При условии указанной дополнительной гладкости решения  $\xi$ , задача допускает дифференциальную постановку. А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.2.** ([1]) *Гладкая функция  $\xi = (U, u, \phi)$  является решением вариационной задачи (4) тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи состоящей из уравнений равновесия*

$$m_{ij,j}(\phi) - q_i(u, \phi) = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{в } \Omega_c, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij,j}(U) = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в } \Omega_c, \quad (6)$$

$$q_{i,i}(u, \phi) = -f_3 \quad \text{в } \Omega_c \quad (7)$$

*и краевых условий*

$$U = \phi = (0, 0), \quad u = 0 \quad \text{на внешней границе } \Gamma, \quad (8)$$

$$[U_\nu] \geq h|[\phi_\nu]|, \quad [\sigma_\nu(U)] = [m_\nu(\phi)] = 0, \quad \sigma_\tau(U) = m_\tau(\phi) = (0, 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu = 0, \quad \sigma_\nu(U)[U_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu] = 0, \quad -\sigma_\nu(U) \geq \frac{|m_\nu(\phi)|}{h} \quad (10)$$

на внутренней границе  $\Gamma_c$ .

Далее приведем два результата о регулярности решений при различных предположениях. Предположим сначала, что раскрытие трещины в некоторой окрестности  $\mathcal{O}(\bar{x}^0)$  точки  $\bar{x}^0 = (x^0, y^0) \in \Gamma_c$  является нулевым. Это условие можно записать в виде

$$[\xi] = (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на} \quad \mathcal{O}(x^0) \cap \Gamma_c,$$

где  $\xi$  — решение задачи (4). Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.1.3.** ([1]) Пусть  $F \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^5$  и  $[\xi] = (0, 0, 0, 0, 0)$  на  $\mathcal{O}(\bar{x}^0) \cap \Gamma_c$ . Тогда  $\xi \in C^\infty(\mathcal{O}(\bar{x}^0))^5$ .

Предположим теперь, что выполнено следующее дополнительное условие на геометрию  $\Gamma_c$ : пересечение  $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(\bar{x}^0)$  границы  $\Gamma_c$  с некоторой окрестностью точки  $\bar{x}^0 = (x^0, y^0) \in \Gamma_c$  параллельно оси  $Ox$ . В рамках этого предположения установлено, что решение  $\xi$  задачи (4) имеет локальную гладкость выше, чем гладкость, доставляемая вариационной постановкой. А именно, доказана следующая теорема

**Теорема 2.1.4** ([1]) Пусть выполнены указанные предположения относительно  $\Gamma_c$ . Тогда найдется положительное число  $\delta$  и шар  $R_\delta(\bar{x}^0)$  радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\bar{x}^0$  для которого имеет место следующее включение

$$\xi \in H^2(R_\delta(\bar{x}^0) \cap \Omega_c)^5$$

для достаточно малых  $\delta$ .

В следующем параграфе изучена задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига. Упругое включение моделируется с помощью области  $\omega$ , которая содержится строго внутри области  $\Omega$ , т.е.  $\bar{\omega} \subset \Omega$ . Трещина расположена на части границы упругого включения и описывается в срединной плоскости кривой  $\gamma \subset \partial\omega$ , где  $\partial\omega$  — граница области  $\omega$ . Задача формулируется в области с разрезом  $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$ . При этом в области  $\omega$  применяется модель Кирхгофа–Лява, а в области  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  — модель Тимошенко для трансверсально-изотропного материала. Вариационная задача о равновесии пластины формулируется в виде минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций

$$K = \{ \eta = (W, w, \psi) \in H \mid w_{,i} + \psi_i = 0 \text{ в } \omega, \ i = 1, 2; [W_\nu] \geq |[\psi_\nu]| \text{ на } \gamma \},$$

$$H = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5, \quad H^{1,0}(\Omega_\gamma) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\gamma) \mid u = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\}.$$

Для этой задачи доказана однозначная разрешимость и, при условии достаточной гладкости решения, найдена эквивалентная дифференциальная постановка [9].

В параграфе 2.3 исследуется задача о равновесии упругой пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину на границе жесткого включения. Область  $\omega$  с гладкой границей  $\Xi$  задает проекцию жесткого включения на срединную плоскость ( $\bar{\omega} \subset \Omega$ ). Предполагается, что  $\Xi$  состоит из двух частей  $\gamma$  и  $\Xi \setminus \gamma$ . Трещина в пластине моделируется кривой  $\gamma$ . Нормаль к  $\gamma$  обозначим через  $n$ . В области  $\omega$  задается определенная структура искомой функции, которая характеризует жесткие свойства включения. А именно, рассматриваются функции  $\eta = (W, w, \psi)$ , определенные в области  $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$ , сужения которых на область  $\omega$  удовлетворяет равенствам:

$$W = \rho, \quad w = l, \quad \psi + \nabla w = 0 \quad \text{на } \omega, \quad \rho \in R(\omega), \quad l \in L(\omega), \quad (11)$$

где пространства  $R(\omega)$  и  $L(\omega)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = (-bx_1 + c_1, bx_2 + c_2), \quad x \in \omega\}, \\ L(\omega) &= \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x \in \omega\}, \quad a_0, b, c_i, a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Множество допустимых функций для этой задачи состоит из функций пространства Соболева  $H^1(\Omega_\gamma)^5$ , которые обращаются в нуль на внешней границе области  $\Omega_\gamma$ , удовлетворяют соотношениям (11) и неравенству  $[W]n \geq |[\psi]n|$  на  $\gamma$ . Задача о равновесии пластины с жестким включением формулируется в виде минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины, содержащей трещину. Из вариационной постановки задачи получены уравнения равновесия и система краевых условий, определяющая эквивалентную дифференциальную постановку задачи. Для семейства задач о равновесии упругих пластин с трещиной установлено, что при стремлении параметра жесткости к бесконечности в области  $\omega$ , в пределе получается задача о равновесии пластины с жестким включением [7].

Краевые задачи для гладкой области  $\Omega$  и области с разрезом  $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$  с заданной структурой решения на липшицевой кривой  $\gamma$  изучены в параграфе 2.4. Эти задачи моделируют равновесие пластин с тонким жестким включением и формулируются в вариационном виде. При этом множество допустимых функций состоит из функций пространства Соболева, следы которых на кривой  $\gamma$  принадлежат следующему линейному пространству

$$Q(\gamma) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2), \quad x \in \gamma\},$$

где  $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2$  — некоторые вещественные числа,  $\gamma \subset \Omega$ . Доказана однозначная разрешимость для линейной задачи, сформулированной в гладкой области, и нелинейной задачи, поставленной с применением граничного условия в виде неравенства в области с разрезом. При условии дополнительной

гладкости соответствующих решений, для исходных вариационных формулировок задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки. Для семейства линейных задач установлена качественная связь между задачами с заданной структурой решений в областях  $\omega_t$  специального вида с липшицевыми границами  $\partial\omega_t$  ( $t \in (0, t_0]$ ) и задачей, в которой структура решения задана на кривой  $\gamma \subset \partial\omega_t$ ,  $\forall t \in (0, t_0]$  (см. [13]).

В параграфе 2.5 изучена задача для пластины с наклонной трещиной, условие непроникания в которой имеет вид

$$[W_\nu] \cos \alpha - h|\psi_\nu| \cos \alpha + [w] \sin \alpha \geq 0, \quad x \in \Gamma_c,$$

где  $\alpha = \alpha(x)$  ( $x \in \Gamma_c$ ) — функция, описывающая угол наклона,  $\nu$  — нормаль к кривой  $\Gamma_c$ . Для исходной вариационной задачи доказана однозначная разрешимость и найдена соответствующая эквивалентная дифференциальная постановка. Также получены результаты для балки с наклонной трещиной [12].

В параграфе 2.6 исследуется нелинейная задача о равновесии пластины с условиями типа Синьорини на части границы. С помощью метода фиктивных областей установлено, что исходную задачу можно получить с помощью предельного перехода в семействе вспомогательных задач, формулируемых в более широкой области. Каждая задача семейства моделирует равновесие пластины, содержащей трещину. Для вариационных формулировок рассматриваемых задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки. Пусть  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная односвязная область с гладкой границей  $\Gamma_1 = \gamma \cup \Gamma_0$ ,  $\gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$ ,  $meas(\Gamma_0) > 0$  (см. рис. 1). Считаем, что кривая  $\gamma$  не содержит конечных точек. Обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  вектор внешней нормали к  $\Gamma_1$ . Трехмерное декартово пространство  $\{x_1, x_2, z\}$  выберем так, чтобы множество  $\Omega_1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  соответствовало срединной плоскости пластины.

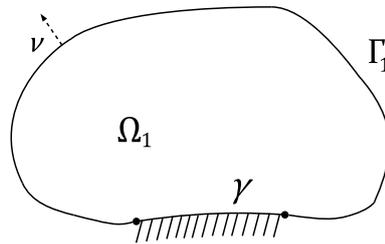


Рис. 1: Геометрия в срединной плоскости пластины.

Пусть подпространство  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1)$  пространства Соболева  $H^1(\Omega_1)$  состоит из функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma_0$ . Введем пространство  $H_{\Gamma_0}(\Omega_1) =$

$H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1)^5$ . Определим следующую билинейную форму:

$$B_1(\eta, \bar{\eta}) = \int_{\Omega_1} \left( \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(\psi) \varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) \right) dx,$$

для произвольных функций  $\eta = (W, w, \psi) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1)$ ,  $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi}) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1)$ . Функционал потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi_s(\Omega_1; \eta) = \frac{1}{2} B_1(\eta, \eta) - \int_{\Omega_1} F \eta dx, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где вектор  $F \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)^5$  описывает внешние нагрузки.

Жесткое препятствие задается цилиндрической поверхностью  $\gamma \times [-1, 1]$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Условие возможного контакта с жестким препятствием запишем в виде

$$-W_\nu \geq |\psi_\nu| \quad \text{на } \gamma \quad (\psi_\nu = \psi_i \nu_i, \quad W_\nu = w_i \nu_i). \quad (12)$$

Задача о равновесии пластины, контактирующей с жестким препятствием, формулируется следующим образом:

$$\inf_{\eta \in K_s} \Pi_s(\Omega_1; \eta), \quad (13)$$

где  $K_s = \{\eta \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1) \mid W_\nu \geq |\psi_\nu| \quad \text{на } \gamma\}$  — множество допустимых функций. Установлено, что вариационная задача (13) имеет единственное решение  $\xi_s = (U_s, u_s, \phi_s)$ .

Как оказалось, задача (14) является предельной для семейства задач, определенных в более широкой области по сравнению с  $\Omega_1$ . При этом каждая вспомогательная задача из семейства моделирует состояние равновесия упругой неоднородной пластины с трещиной.

Расширим область  $\Omega_1$  до области  $\Omega_\gamma$  так, как это показано на рис. 2, добавляя так называемую фиктивную область  $\Omega_2$ . Считаем, что граница  $\Gamma_2$  области  $\Omega_2$  достаточно гладкая. Расширенную область с разрезом обозначим через  $\Omega_\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma \setminus \bar{\gamma}$ , где  $\Sigma = \text{int}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ , а ее внешнюю границу — через  $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \Sigma$ . Предположим, что  $\text{meas}(\Gamma \cap \Gamma_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

В области  $\Omega_\gamma$  сформулируем семейство вариационных задач, зависящих от положительного параметра  $\lambda$ , который в дальнейшем будет стремиться к нулю. Предположим, что коэффициенты упругости в области  $\Omega_2$  зависят от  $\lambda$ , а в области  $\Omega_1$  — фиксированные, а именно:

$$c_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} c_{ijkl} & \text{в } \Omega_1, \\ \lambda^{-1} c_{ijkl} & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \Lambda^\lambda = \begin{cases} \Lambda & \text{в } \Omega_1, \\ \Lambda \lambda^{-1} & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

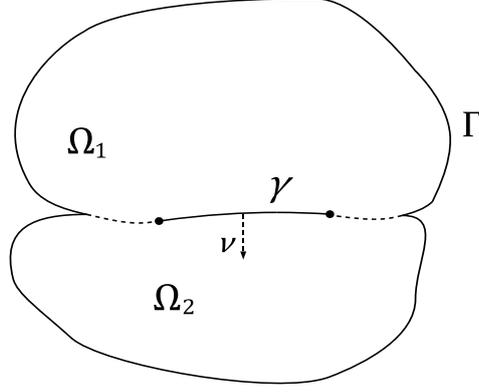


Рис. 2: Построение фиктивной области.

Пусть подпространство  $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$  пространства Соболева  $H^1(\Omega_{\gamma})$  состоит из функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ ; как и выше  $H_{\Gamma}(\Omega_{\gamma}) = H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})^5$ . Функционал

$$\Pi_{\lambda}(\Omega_{\gamma}; \eta) = \frac{1}{2} B^{\lambda}(\eta, \eta) - \int_{\Omega_{\gamma}} F \eta dx, \quad \eta = (W, w, \psi)$$

задает энергию неоднородной пластины, где

$$B^{\lambda}(\eta, \bar{\eta}) = \int_{\Omega_{\gamma}} \left( \sigma_{ij}^{\lambda}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}^{\lambda}(\psi) \varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + q_i^{\lambda}(w, \psi) (\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) \right) dx,$$

$m_{ij}^{\lambda}(\psi) = c_{ijkl}^{\lambda} \varepsilon_{kl}(\psi)$ ,  $\sigma_{ij}^{\lambda}(W) = 3c_{ijkl}^{\lambda} \varepsilon_{kl}(W)$ ,  $q_i^{\lambda}(w, \psi) = \Lambda^{\lambda}(w_{,i} + \psi_i)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Задачу о равновесии пластины, содержащей трещину сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K} \Pi_{\lambda}(\Omega_{\gamma}; \eta), \quad (14)$$

где  $K = \{\eta \in H_{\Gamma}(\Omega_{\gamma}) \mid [W_{\nu}] \geq |[\psi_{\nu}]| \text{ на } \gamma\}$  — множество допустимых функций. Нетрудно показать, что задача (14) имеет единственное решение  $\xi^{\lambda} = (U^{\lambda}, u^{\lambda}, \phi^{\lambda})$  при каждом фиксированном  $\lambda > 0$ .

Доказана следующая теорема, устанавливающая качественную связь между задачами (13) и (14).

**Теорема 2.6.1.** ([8]) *Функции  $\xi^{\lambda}$ , доставляющие решения задач (14), при  $\lambda \rightarrow 0$  слабо сходятся в пространстве  $H_{\Gamma}(\Omega_{\gamma})$  к функции  $\tilde{\xi}$ , сужение которой на область  $\Omega_1$  является решением задачи (13), т.е.  $\tilde{\xi}|_{\Omega_1} = \xi_s$ .*

Кроме того, для вариационной задачи (14) без каких либо предположений относительно гладкости ее решения, найдена эквивалентная дифференциальная постановка, в которой часть краевых условий выражена в виде соотношений для элементов пространства Соболева с нецелым индексом.

В последнем параграфе второй главы сформулирована модель, описывающая равновесие полой оболочки с трещиной. Особенностью данной нелинейной модели, по сравнению с ранее изученными моделями полых оболочек является то, что в исходном состоянии берега трещины могут выступать друг над другом. Для нелинейной вариационной задачи установлена единственность решения в классе соболевских функций; найдена дифференциальная постановка, эквивалентная исходной при дополнительной гладкости решения. При дополнительных условиях «нулевого» раскрытия трещины и бесконечной гладкости функций, описывающих кривизны оболочки и воздействие внешних нагрузок доказана локальная бесконечная дифференцируемость функции решения.

В первом параграфе **третьей главы** рассматривается задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей криволинейную трещину. На берегах трещины заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенств (условия типа Синьорини). С помощью достаточно гладкого возмущения, определенного в срединной плоскости пластины, задается вариация геометрии пластины. Выведена формула производной функционала энергии пластины по отношению к параметру возмущения. Толщина пластины в этой главе для простоты принимается равной  $2h = 2$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , кривая  $\Gamma_0$  находится строго внутри области  $\Omega$ . Область  $\Omega_0$  введем равенством  $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_0$ . Обозначим через  $\nu_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$  вектор единичной нормали к кривой  $\Gamma_0$ . Определим функциональное пространство, в котором будет исследоваться задача равновесия. Пусть подпространство  $H^{1,0}(\Omega_0)$  пространства Соболева  $H^1(\Omega_0)$  состоит из функций, обращающихся в нуль на  $\partial\Omega$ . Введем пространство  $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5$ , снабженное стандартной нормой  $\|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$ . Определим следующую билинейную форму:

$$B_0(\xi, \eta) = \int_{\Omega_0} \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\mu) + \Lambda(u_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \mu_i) \} dx.$$

Пусть вектор  $F \in C^1(\bar{\Omega})^5$  описывает внешние нагрузки. Задача формулируется в вариационном виде — в виде минимизации функционала

$$\Pi(\Omega_0; \xi) = \frac{1}{2} B_0(\xi, \xi) - \int_{\Omega_0} F \xi dx, \quad \xi = (U, u, \phi)$$

на множестве  $K_0(\Omega_0) = \{ \xi \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu_0 \geq |[\phi]\nu_0| \text{ п.в. на } \Gamma_0 \}$ , т.е. требуется найти такую функцию  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0(\Omega_0)$ , что

$$\Pi(\Omega_0; \xi_0) = \inf_{\xi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \xi). \quad (15)$$

В соответствии с результатами второй главы известно, что задача (15) имеет единственное решение  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0(\Omega_0)$  и может быть сформулирована в дифференциальном виде (см. (5)–(10)).

Определим возмущенную область. Для малого параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  рассмотрим возмущение

$$\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x)), \quad \text{такое что}$$

$$\Phi_{\varepsilon i}(x) \in C^1([0, \varepsilon_0]; W_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = x.$$

При фиксированном  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  применим преобразование координат

$$y = \Phi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

по отношению к  $\Omega_0$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_0$ . В результате получим возмущенную область  $\Phi_\varepsilon(\Omega)$  и возмущенный разрез  $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$ . Определим возмущенную область с разрезом как  $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$ . Отметим, что ввиду предположений относительно  $\Phi_\varepsilon$ , преобразование (16) для малых  $\varepsilon$  является взаимно однозначным, т.е. существует обратное преобразование  $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$ , где  $\Phi_\varepsilon^{-1}(y) = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}(y), \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}(y))$ . Далее, не нарушая общности, будем считать, что указанное свойство взаимной однозначности выполняется для всех  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ . Кроме того, предположим, что функции  $\Phi_{\varepsilon i}^{-1}(y)$ ,  $i = 1, 2$ , принадлежат пространству  $C^1([0, \varepsilon_0]; W_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2))$ .

Аналогично пространству  $H(\Omega_0)$  определим пространство  $H(\Omega_\varepsilon)$ . Согласно взаимной однозначности преобразования (16), строгой положительности его якобиана и предполагаемой гладкости  $\Phi_\varepsilon$ , отображение (16) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами  $H(\Omega_0)$  и  $H(\Omega_\varepsilon)$ , т.е. если  $\xi(x) \in H(\Omega_0)$ , то  $\xi(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) \in H(\Omega_\varepsilon)$  и наоборот, если  $\xi(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$ , то  $\xi(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$ . Пусть  $\nu^\varepsilon$  — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу  $\Gamma_\varepsilon$ . Аналогично множеству  $K_0(\Omega_0)$  введем множество допустимых функций для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_\varepsilon) \mid [U]\nu^\varepsilon \geq |[\phi]\nu^\varepsilon| \text{ п.в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Несмотря на то, что пространства  $H(\Omega_0)$  и  $H(\Omega_\varepsilon)$  взаимно однозначно переходят друг в друга при отображении (16), множества  $K_0(\Omega_0)$  и  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  не обладают в общем случае таким свойством. Это связано с тем, что, вообще говоря, единичная нормаль  $\nu_0$  к кривой  $\Gamma_0$  не переходит в единичную нормаль  $\nu^\varepsilon$  к  $\Gamma_\varepsilon$ .

Сформулируем далее семейство задач зависящих от параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ . Функционал энергии для возмущенной области определим выражением

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi) = \frac{1}{2} B_\varepsilon(\xi, \xi) - \int_{\Omega_\varepsilon} F \xi dy, \quad \xi = (U, u, \phi),$$

где билинейная форма задается соотношением

$$B_\varepsilon(\xi, \eta) = \int_{\Omega_\varepsilon} \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(U) + m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\mu) + \Lambda(u, i + \phi_i)(w, i + \mu_i) \} dy.$$

Так же как для исходной задачи (15), следующая задача о минимизации функционала энергии в возмущенной области

$$\inf_{\xi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \xi),$$

имеет единственное решение  $\xi^\varepsilon = (U^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ .

Для того, чтобы найти производную функционала энергии по форме области необходимо вычислить предел

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \xi_0)}{\varepsilon}, \quad (17)$$

где  $\xi_0, \xi^\varepsilon$  – решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно. Обозначим прообраз множества  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  при отображении (16) в пространстве  $H(\Omega_0)$  через

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{ \xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \mid [U]\nu_\varepsilon \geq |[\phi]\nu_\varepsilon| \text{ п.в. на } \Gamma_0 \}.$$

Здесь  $\nu_\varepsilon(x) = \nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$  – преобразованный вектор нормали к возмущенной трещине,  $x \in \Gamma_0$ . Связь между множествами  $K_0(\Omega_0)$  и  $K_\varepsilon(\Omega_0)$  устанавливает следующая лемма.

**Лемма 3.1.1.** ([14]) Пусть  $\xi_0 \in K_0(\Omega_0)$  – решение невозмущенной задачи (15),  $\xi_\varepsilon = \xi^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$  – решение возмущенной задачи, отображенное на невозмущенную область. Тогда для достаточно малых  $\varepsilon$  существуют функции  $\lambda_\varepsilon^1$  и  $\lambda_\varepsilon^2$ , такие что

$$\xi_\varepsilon^1 = \xi_0 + \varepsilon \lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \xi_\varepsilon^2 = \xi_\varepsilon - \varepsilon \lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0).$$

При этом справедливы следующие оценки

$$\|\lambda_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \leq c, \quad i = 1, 2,$$

где  $c$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Далее доказывается теорема, характеризующая непрерывную зависимость решений семейства задач минимизации от параметра  $\varepsilon$ .

**Теорема 3.1.1.** ([14]) Имеет место следующая оценка

$$\|\xi_0 - \xi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \leq c\sqrt{\varepsilon},$$

где константа  $c$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Функции  $\lambda_\varepsilon^1$  и  $\lambda_\varepsilon^2$ , найденные с помощью леммы 3.1.1, также сходятся сильно в  $H(\Omega_0)$ . А именно, справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.1.2.** ([14]) При  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы следующие сходимости

$$\lambda_\varepsilon^1 \rightarrow \lambda_0, \quad \lambda_\varepsilon^2 \rightarrow \lambda_0, \quad \text{сильно в } H(\Omega_0),$$

где  $\lambda_0 = (V_{1,i}u_{0i}, V_{2,i}u_{0i}, 0, V_{1,i}\phi_{0i}, V_{2,i}\phi_{0i})$ .

Одним из основных результатов диссертации является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 3.1.2.** ([14]) Производная функционала энергии  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  по параметру  $\varepsilon$  возмущения области  $\Omega_0$  существует и задается формулой

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (A_1(V, U_0, U_0) + \Lambda A_2(V, \xi_0, \xi_0) + 3^{-1} A_1(V, \phi_0, \phi_0)) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) \xi_{0i} dx + B_0(\xi_0, \lambda_0) - \int_{\Omega_0} F \lambda_0 dx, \end{aligned}$$

где  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$  — решение задачи (15),  $\lambda_0 = (V_{1,i}u_{0i}, V_{2,i}u_{0i}, 0, V_{1,i}\phi_{0i}, V_{2,i}\phi_{0i})$  и  $A_1, A_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A_1(V; U_0; U_0) &= \operatorname{div} V \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(U_0) - 2 \sigma_{ij}(U_0) E_{ij} \left( \frac{\partial V}{\partial x}; U_0 \right), \\ A_2(V; \xi_0; \xi_0) &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \phi_{0i} \right) \left( \operatorname{div} V \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \phi_{0i} \right) - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \\ E_{ij} \left( \frac{\partial V}{\partial x}; U_0 \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_k} V_{k,j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} V_{k,i} \right). \end{aligned}$$

Во втором параграфе третьей главы найдены достаточные условия, при которых производная функционала энергии представима в виде инвариантных интегралов. Кроме того, показано, что производная функционала может существовать и при более слабых предположениях относительно гладкости функции  $\Phi_\varepsilon(x)$ . А именно, достаточно предположить, что функция  $\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x))$ , задающая возмущение, имеет меньшую гладкость  $\Phi_{\varepsilon i}(x) \in C^1([0, \varepsilon_0]; W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ ,  $i = 1, 2$  и  $\Phi_0(x) = x$ . Однако при этом дополнительно требуется, чтобы при отображении единичная нормаль  $\nu_0$  к  $\Gamma_0$  переходила в единичную нормаль  $\nu^\varepsilon$  к  $\Gamma_\varepsilon$ . Это означает, что преобразование  $\Phi_\varepsilon$  и геометрия  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_\varepsilon$  таковы, что при всех допустимых  $\varepsilon$  выполнено равенство

$$\nu^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)) = \nu(x) \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (18)$$

Соотношение (18) будет выполнено, например, при  $\nu^\varepsilon = \nu = \text{const}$  с произвольным преобразованием  $\Phi_\varepsilon$  или в том случае, когда нормали  $\nu^\varepsilon, \nu$  зависят только от  $x_1$  ( $x_2$ ) и  $\nu^\varepsilon = \nu$  с отображениями, удовлетворяющими равенству

$\Phi_{\varepsilon 1} = x_1$  ( $\Phi_{\varepsilon 2} = x_2$ ). Выполнение условия (18) приводит к тому, что множество  $K_0(\Omega_0)$ , при отображении (16), переходит взаимно однозначно в множество  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ . В рамках указанных предположений производная (17) выражается формулой

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \{ A_1(V, U_0, U_0) + A_2(V, \xi_0, \xi_0) + \\ & + 3^{-1} A_1(V, \phi_0, \phi_0) \} dx - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) \xi_{0i} dx, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$  — решение задачи (15).

В частном случае, когда  $\Gamma_0$  — часть прямой, а возмущения  $\Phi_\varepsilon$  описывают параллельный перенос  $\Gamma_0$  в направлении произвольного фиксированного вектора  $p = (p_1, p_2)$ , доказано, что производная функционала энергии (19) представима в виде следующего инвариантного интеграла

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = & \int_L \left\{ \frac{1}{2} (p \cdot n) b(\xi_0, \xi_0) - \sigma_{ij}(U_0) n_j \left( \frac{\partial u_{0i}}{\partial p} \right) - \right. \\ & \left. - m_{ij}(\phi_0) n_j \left( \frac{\partial \phi_{0i}}{\partial p} \right) - q_i(u_0, \phi_0) n_i \left( \frac{\partial u_0}{\partial p} \right) \right\} dl, \end{aligned}$$

где  $L$  — кривая без самопересечений, ограничивающая некоторую область  $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$ , для которой  $\bar{\mathcal{O}}_L(\Gamma_0) \subset \Omega$ ,  $\bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{O}_L(\Gamma_0)$  и  $F = (0, 0, 0, 0, 0)$  в  $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$ .

В другом частном случае, когда вдоль оси  $Ox$  возмущается концевая точка  $x^0$  кривой  $\Gamma_0$  инвариантный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = & \int_L \left( \frac{1}{2} n_1 b(\xi_0, \xi_0) - \sigma_{ij}(U_0) n_j u_{0i,1} - \right. \\ & \left. - m_{ij}(\phi_0) n_j \phi_{0i,1} - q_i(u_0, \phi_0) n_i u_{0,1} \right) dl, \end{aligned}$$

где  $L$  — кривая без самопересечений, ограничивающая некоторую малую окрестность  $\mathcal{O}_L(x^0)$ , для которой  $F = (0, 0, 0, 0, 0)$  в  $\mathcal{O}_L(x^0)$  [11].

Последний параграф третьей главы посвящен анализу чувствительности функционала энергии в задаче о равновесии пластины с трещиной вдоль жесткого включения к изменению формы области. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Предположим, что область  $\omega_0$  лежит строго внутри  $\Omega$ , т.е.  $\bar{\omega}_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$  и ее граница  $\partial\omega_0$  является достаточно гладкой. Обозначим через  $\nu_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$ ,  $\tau_0 = (\tau_{01}, \tau_{02})$  единичные векторы внешней нормали и касательной к  $\partial\omega_0$ , соответственно. Будем считать, что  $\partial\omega_0$  состоит из двух частей  $\gamma_0$  и  $\partial\omega_0 \setminus \gamma_0$ , причем  $\partial\gamma_0 \notin \gamma_0$ . Дифференциальная постановка задачи о равновесии пластины с трещиной вдоль жесткого включения формулируется следующим образом. Требуется найти функции  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$ ,  $\zeta_0$ , определенные в областях  $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{\gamma}_0$  и  $\omega_0$ , соответственно, такие что

$$\sigma_{ij,j}(U_0) = -f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}_0, \quad (20)$$

$$q_{i,i}(u_0, \phi_0) = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \bar{\omega}_0, \quad (21)$$

$$m_{ij,j}(\phi_0) - q_i(u_0, \phi_0) = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \bar{\omega}_0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Xi} \sigma_{ij}(U_0) n_j \rho_i ds - \int_{\Xi} m_{ij}(\phi_0) n_j \alpha_i ds - \Lambda \int_{\Xi} (\phi_0 \nu_0 + \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}) \delta ds = \\ & = \int_{\omega} (f_i \rho_i + f_3 \delta + f_{3+i} \alpha_i) dx \quad \forall \zeta(x) = (\rho, \delta, \alpha) \in R(\omega_0), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\xi_0|_{\omega_0} = \zeta_0 \quad \text{на} \quad \omega_0, \quad \zeta_0 \in R(\omega_0), \quad (24)$$

$$\phi_0^+ \cdot \nu_0 + \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu_0} = 0, \quad \sigma_{\tau_0}^+(U_0) = m_{\tau_0}^+(\phi_0) = (0, 0) \quad \text{на} \quad \gamma_0, \quad (25)$$

$$-\sigma_{\nu_0}^+(U_0) \geq |m_{\nu_0}^+(\phi_0)|, \quad \sigma_{\nu_0}^+[U_0] \nu_0 + m_{\nu_0}^+[\phi] \nu_0 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \quad (26)$$

$$u_0 = 0, \quad \phi_0 = U_0 = (0, 0) \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (27)$$

Здесь пространство  $R(\omega_0)$  определено соотношениями

$$\begin{aligned} R(\omega_0) = \{ \zeta(x) = (\rho, \delta, \alpha) \mid \rho = (-x_2 s + c_1, x_1 s + c_2), \\ \delta = a + x\beta, \quad \alpha = -\beta, \quad x \in \omega_0 \}, \end{aligned}$$

где  $C = (c_1, c_2)$  и  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  – вектора из  $\mathbb{R}^2$ , числа  $a, s, c_1, c_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  являются произвольными;  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$ . Слабая вариационная постановка задачи (20)–(27) формулируется в пространстве  $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5$ , где

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \left\{ u \in H^1(\Omega_0) \mid u = 0 \text{ п.в. на } \partial\Omega \right\}.$$

Минимизируется функционал энергии пластины

$$\Pi(\Omega_0; \xi) = \frac{1}{2} B_{\Omega_0}(\xi, \xi) - \int_{\Omega_0} F \xi dx, \quad \xi = (U, u, \phi),$$

на множестве допустимых функций

$$K_0(\Omega_0) = \{ \xi = (U, u, \phi) \in H(\Omega_0) \mid [U] \nu_0 \geq |[\phi] \nu_0| \text{ на } \gamma_0, \quad \xi|_{\omega_0} \in R(\omega_0) \}.$$

В соответствии с результатами параграфа 2.3 задача

$$\inf_{\xi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \xi) \quad (28)$$

имеет единственное решение  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in H(\Omega_0)$ . Возмущение будем задавать с помощью функции  $\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x))$ , зависящей от малого параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  и удовлетворяющей следующим свойствам:

$$\Phi_{\varepsilon i}(x), \Phi_{\varepsilon i}^{-1}(x) \in C^1([0, \varepsilon_0); W_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = x.$$

Далее строится семейство краевых задач о равновесии пластины, зависящее от параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ , в возмущенных областях  $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \bar{\gamma}_\varepsilon$ ,  $\gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\gamma_0)$ , в которых структура решения задана в области  $\omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\omega)$ . Каждая задача имеет решение  $\xi^\varepsilon$ , определенное в области  $\Omega_\varepsilon$ . Установлено свойство непрерывной зависимости семейства решений, а также доказана следующая теорема.

**Теорема 3.3.2.** ([15]) *Производная функционала энергии  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  по параметру  $\varepsilon$  возмущения области  $\Omega_0$  существует и задается формулой*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \xi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_0} (A_1(V, U_0, U_0) + \Lambda A_2(V, \xi_0, \xi_0) + \\ & + 3^{-1} A_1(V, \phi_0, \phi_0)) dx - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) \xi_{0i} dx + B_{\Omega \setminus \bar{\omega}_0}(\xi_0, \lambda_0) - \int_{\Omega_0} F \lambda_0 dx, \end{aligned}$$

где  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0)$  — решение задачи (28), а функция  $\lambda_0$  определяется специальным образом, с помощью линейного непрерывного оператора поднятия  $L : H^{1/2}(\partial\Omega \cup \partial\omega_0)^2 \rightarrow H^1(\Omega \setminus \bar{\omega}_0)^2$ .

**В четвертой главе** изучены задачи о разрешимости оптимального управления геометрической формой областей, описывающих жесткие включения и задача о существовании оптимальной формы трещины. В первом параграфе главы исследуются задачи о равновесии пластин с трещиной вдоль жесткого включения. При этом рассматриваются случаи объемного жесткого включения и тонкого жесткого включения. Деформирование упругой части пластины описывается с помощью модели Тимошенко. Проводится анализ зависимости решений и производной функционала энергии от вариации размера жестких включений. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества задается производной функционала энергии пластины, а управляющий параметр описывает размер включения.

Сформулируем семейство задач, описывающих равновесие неоднородных пластин с трещиной на границе жесткого объемного включения. Для простоты предположим, что толщина пластины является постоянной и равной  $2h = 2$ . Пусть область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ограничена гладкой кривой  $\Gamma$ . Предположим, что гладкая незамкнутая кривая  $\Upsilon$  лежит строго внутри области  $\Omega$  т.е.  $\bar{\Upsilon} \subset \Omega$ ;  $\Upsilon$  состоит из двух кривых  $\gamma$  и  $\gamma_c$  таких, что  $\Upsilon = \gamma \cup \gamma_c$ ,  $\gamma \cap \gamma_c = \emptyset$ ,  $\operatorname{meas}(\gamma) > 0$ ,  $\operatorname{meas}(\gamma_c) > 0$ . Рассмотрим семейство односвязных областей  $\omega_t$ ,  $t \in (0, t_0]$  удовлетворяющих следующим свойствам:

- а) границы  $\partial\omega_t$  являются липшицевыми;
- б)  $\omega_{t'} \subset \omega_t$ ,  $\bar{\omega}_t \subset \Omega$  для всех  $t, t' \in (0, t_0]$ ,  $t' < t$ ;
- в) для любого фиксированного  $t' \in (0, t_0)$  и любой окрестности  $\mathcal{O}$  области  $\bar{\omega}_{t'}$  существует число  $t_{\mathcal{O}} > t'$  такое, что  $\omega_t \subset \mathcal{O}$  для всех  $t \in [t', t_{\mathcal{O}}]$ ;

- d)  $\gamma \subset \partial\omega_t$ ,  $\gamma_c \cap \bar{\omega}_t = \emptyset$  для всех  $t \in (0, t_0]$ ;
- e) для любой окрестности  $\mathcal{O}$  кривой  $\gamma$  существует число  $t_{\mathcal{O}} > 0$  такое, что  $\omega_t \subset \mathcal{O}$  для всех  $t \in (0, t_{\mathcal{O}}]$ ;
- f)  $\bigcup_{t < t'} \omega_t = \omega_{t'}$  для всех  $t' \in (0, t_0]$ ,
- g) существует область  $\mathcal{E}$  с липшицевой границей  $\partial\mathcal{E}$ , такая, что  $\bar{\mathcal{E}} \subset \Omega$ ,  $\Upsilon \subset \partial\mathcal{E}$ ,  $\omega_{t_0} \subset \mathcal{E}$ , границы односвязных областей  $\mathcal{E} \setminus \bar{\omega}_t$  являются липшицевыми для всех  $t \in (0, t_0]$ .

В качестве примера, удовлетворяющего **a)**-**g)**, приведем следующее семейство областей

$$\omega_t = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in (-a, 0), \quad g(x_1) - t < x_2 < g(x_1)\}, \quad a > 0, \quad \bar{\omega}_t \subset \Omega,$$

где  $g \in C^{0,1}(-a, 0)$ . При этом кривая  $\gamma$  задается соотношениями  $\gamma = \{(x_1, x_2) \mid -a < x_1 \leq 0, \quad x_2 = g(x_1)\}$ , а кривая  $\gamma_c$  — как ее продолжение (см. рис. 3). Трехмерное декартово пространство  $\{x_1, x_2, z\}$  выберем так, чтобы

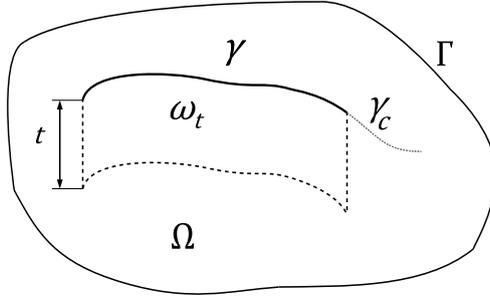


Рис. 3: Пример областей  $\omega_t$ .

множество  $\{\Omega_0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  соответствовало срединной плоскости пластины. При этом кривая  $\Upsilon$  задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями  $x = (x_1, x_2) \in \Upsilon$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ , где  $|z|$  — расстояние до срединной плоскости. Для фиксированного  $t \in (0, t_0]$  жесткое включение будет задаваться множеством  $\omega_t \times [-1, 1]$ ; а упругая часть пластины соответствует области  $\Omega_0 \setminus \bar{\omega}_t$ . Обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  нормаль к  $\Upsilon$ .

Пусть  $H^1(\Omega_0)$  — пространство Соболева,  $H^{1,0}(\Omega_0)$  — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе  $\Gamma$ . Введем следующие обозначения:

$$H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}.$$

Билинейную форму  $B(G, \cdot, \cdot)$  определим равенством

$$B(G, \eta, \bar{\eta}) = \int_G \{m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) + \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(\bar{W})\} dx,$$

где  $G$  подобласть с гладкой границей области  $\Omega$ ,  $\eta = (W, w, \psi)$ ,  $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$ . Функционал энергии пластины представляется формулой

$$\Pi(\Omega_0; \eta) = \frac{1}{2}B(\Omega_0, \eta, \eta) - \int_{\Omega_0} F\eta dx, \quad \eta = (W, w, \psi), \quad F \in C^1(\Omega)^5.$$

Наличие жесткого включения приводит к тому, что перемещения и углы поворота описываются в области  $\omega_t$  функциями специального вида. Введем пространство, характеризующее свойства жесткого включения,

$$R(\omega_t) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); x \in \omega_t\},$$

где  $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Задача о равновесии пластины Тимошенко с трещиной вдоль объемного жесткого включения сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in K_t} \Pi(\Omega_0; \eta), \quad (29)$$

где  $K_t = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0) \mid [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \text{ на } \Upsilon, \eta|_{\omega_t} \in R(\omega_t)\}$  — множество допустимых функций. Задача (29) имеет единственное решение  $\xi_t \in K_t$ .

Наряду с задачей о равновесии пластины с объемным жестким включением, рассмотрим задачу о равновесии пластины с тонким жестким включением, которое описывается с помощью следующей цилиндрической поверхности  $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -1 \leq z \leq 1$ . Введем сначала следующие обозначения:

$$R(\gamma) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); x \in \gamma\},$$

где  $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ;

$$K_0 = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_0) \mid [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \text{ на } \Upsilon; \eta|_{\gamma^-} \in R(\gamma)\}.$$

Следующая вариационная задача о равновесии пластины с трещиной и жестким включением

$$\Pi(\Omega_0; \xi_0) = \inf_{\eta \in K_0} \Pi(\Omega_0; \eta). \quad (30)$$

имеет единственное решение  $\xi_0 = (U_0, u_0, \phi_0) \in K_0$ .

Рассматривается следующий функционал качества  $G(t, \xi_t)$ , определенный в интервале  $t \in [0, t_0]$  и зависящий от решения  $\xi_t$  задачи (29) при  $t > 0$ , и от решения  $\xi_0$  задачи (30) при  $t = 0$ :

$$G(t, \xi_t) = \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2}\theta_{,1}b(\xi_t, \xi_t) - (\sigma_{ij}(U_t)u_{ti,1}\theta_{,j} + m_{ij}(\phi_t)\phi_{ti,1}\theta_{,j} + q_i(u_t, \phi_t)u_{t,1}\theta_{,i} + (\theta F)_{,1}\xi_t) \right\} dx,$$

где  $\xi_t = (U_t, u_t, \phi_t)$ ,  $U_t = (u_{t1}, u_{t2})$  и  $u_{ti,1} = \frac{\partial u_{ti}}{\partial x_1}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\theta$  — гладкая функция, удовлетворяющей свойствам  $\text{supp}(\theta) \subset \mathcal{O}_1$ ,  $\theta = 1$  в  $\mathcal{O}_2$ ;  $\mathcal{O}_2$  и  $\mathcal{O}_1$  — некоторые окрестности точки  $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ .

Поскольку производная  $G(t, \xi_t^0)$  зависит от параметра  $t \in [0, t_0]$ , задающего размер области  $\omega_t$ , мы можем взять ее в качестве функционала качества, а параметр  $t$  — в роли управляющего параметра. Как известно, значение производной функционала энергии играет решающую роль в формулировке критерия разрушения Гриффитса: развитие (распространение) трещины происходит в том случае, когда производная по параметру возмущения трещины достигает критического значения. Нас интересует следующая задача, которая с физической точки зрения может интерпретироваться как задача о существовании наиболее безопасного размера включения. Требуется найти значение  $t^* \in [0, t_0]$  такое, что

$$G(t^*, \xi_{t^*}^0) = \sup_{t \in [0, t_0]} G(t, \xi_t). \quad (31)$$

Доказана следующая теорема.

**Теорема 4.1.1.** ([22]) *Задача оптимального управления (31) имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство теоремы основано на обосновании предельного перехода при  $t \rightarrow t^*$ ,  $t^* \in [0, t_0]$ ,  $t \in (0, t_0]$  в семействе вариационных задач (29), (30). Возможность такого предельного перехода обеспечивается справедливостью следующих лемм.

**Лемма 4.1.1.** ([22]) Пусть  $t^* \in [0, t_0)$  — фиксированный параметр, а последовательность чисел  $\{t_n\} \subset [t^*, t_0]$  сходится к  $t^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для произвольной функции  $\eta \in K_{t^*}$  существует подпоследовательность  $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$  и последовательность функций  $\{\eta_k\}$  такие, что  $\eta_k \in K_{t_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\eta_k \rightarrow \eta$  слабо в  $H(\Omega_0)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Лемма 4.1.2.** ([22]) Пусть  $t^* \in [0, t_0]$  — фиксированное число. Тогда имеет место сильная сходимост  $\xi_t \rightarrow \xi_{t^*}$  в пространстве  $H(\Omega_0)$  при  $t \rightarrow t^*$ , где  $\xi_t$  — решение задачи (29), соответствующее параметру  $t \in (0, t_0]$ , а  $\xi_{t^*}$  является решением задачи (29) при  $t^* > 0$  и задачи (30) — при  $t^* = 0$ .

Леммы 4.1.1. и 4.1.2. устанавливают качественную связь между задачами о равновесии пластин с жесткими включениями разного размера. В частности, доказано, что задача о равновесии пластины с тонким жестким включением является предельной для семейства задач о равновесии пластин с объемным жестким включением. Отметим, что предложенный в леммах 4.1.1. и 4.1.2. способ обоснования предельного перехода разработан автором диссертационной работы и может быть применен для других моделей тел с жесткими

включениями [17, 21]. Результаты параграфа являются одним из центральных результатов настоящей диссертации.

В параграфе 4.2 исследуется задача о контакте пластины, содержащей жесткое включение. Предполагается, что пластина может вступать в механический контакт по внешней жесткой части пластины. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ . Предположим, что гладкие кривые  $\gamma$  и  $\gamma_0$  лежат на  $\Gamma$  и удовлетворяют соотношениям:  $\text{meas}(\gamma) > 0$ ,  $\text{meas}(\gamma_0) > 0$ ,  $\bar{\gamma} \cap \bar{\gamma}_0 = \emptyset$ . Рассмотрим семейство односвязных областей  $\omega_t \subset \Omega$ ,  $t \in (0, t_0]$  границы которых содержат кривую  $\gamma$  при  $t \in (0, t_0]$ . Кроме того, для семейства областей  $\omega_t$ ,  $t \in (0, t_0]$  предполагаются выполненными предположения вида **a)–g)**. В частности, можно рассмотреть области  $\omega_t$ ,  $t \in (0, t_0]$  (см. рис. 4),

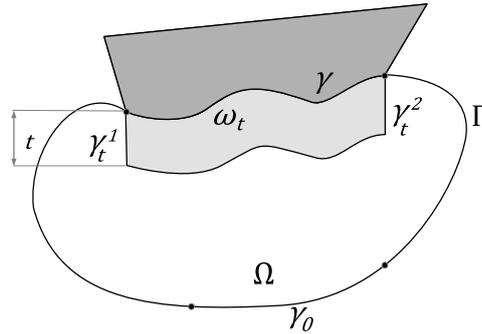


Рис. 4: Пример областей  $\omega_t$ .

ограниченные кривыми  $\partial\omega_t = \gamma \cup \gamma_t \cup \gamma_t^1 \cup \gamma_t^2$ , где

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(x_1, x_2) \mid -a < x_1 < 0, \quad x_2 = g(x_1)\}, \\ \gamma_t &= \{(x_1, x_2) \mid -a < x_1 < 0, \quad x_2 = g(x_1) - t\}, \quad g \in C^{0,1}[0, 1], \end{aligned}$$

сегменты  $\gamma_t^1$ ,  $\gamma_t^2$  являются прямолинейными отрезками, параллельными оси координат  $Ox_2$ . Для этого примера параметр толщины областей по отношению к оси  $Ox_2$  равен  $t$ . Функционал энергии имеет вид:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2}B(\Omega, \chi, \chi) - \int_{\Omega} F\chi d\Omega, \quad \chi = (W, w, \psi), \quad F \in L^2(\Omega)^5.$$

Используются следующие пространства Соболева

$$H_{\gamma_0}^{1,0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \gamma_0 \right\}, \quad H(\Omega) = H_{\gamma_0}^{1,0}(\Omega)^5.$$

Введем пространство, характеризующее свойства жесткого включения:

$$R(\omega_t) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); \quad x \in \omega_t\},$$

где  $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

Задачу о контакте пластины с жестким препятствием сформулируем в следующем виде

$$\inf_{\chi \in K_t} \Pi(\chi), \quad (32)$$

где  $K_t = \{\chi = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \mid -W\nu \geq |\psi\nu| \text{ на } \gamma, \chi|_{\omega_t} \in R(\omega_t)\}$  — множество допустимых функций. Решение  $\xi_t$  этой задачи единственно.

Рассмотрим также задачу о равновесии пластины с тонким жестким включением, которое описывается с помощью следующей цилиндрической поверхности  $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -1 \leq z \leq 1$ . Требуется найти  $\xi_0 \in K_0$ , такое что

$$\Pi(\xi_0) = \inf_{\chi \in K_0} \Pi(\chi), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} K_0 &= \{\chi = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \mid -W\nu \geq |\psi\nu| \text{ на } \gamma; \chi|_{\gamma} \in R(\gamma)\}, \\ R(\gamma) &= \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); x \in \gamma\}, \\ b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача (33) имеет единственное решение. Рассмотрим следующий функционал качества

$$J(t) = \|\xi_t - \xi^*\|_{H(\Omega)}, \quad t \in [0, t_0],$$

где  $\xi^*$  — заданная функция, а  $\xi_t$  является решением задачи (32) при  $t > 0$  и  $\xi_0$  — решение задачи (33). Задача оптимального управления формулируется в следующем виде. Требуется найти значение  $t^* \in [0, t_0]$  такое, что

$$J(t^*) = \sup_{t \in [0, t_0]} J(t). \quad (34)$$

Основной результат параграфа — доказательство разрешимости задачи (34) (см. [20]).

В последнем параграфе 4.3 четвертой главы исследуется зависимость решений задачи о равновесии пластины (5)–(10) от формы кривой, задающей трещину. Предполагается, что для любой функции  $g$ , принадлежащей множеству  $\mathcal{G}$ , кривая  $\Gamma_g = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = g(x_1), 0 < x_1 < 1\}$  задает форму трещины, где  $\mathcal{G}$  — замкнутое, выпуклое и ограниченное в  $H_0^2(0, 1)$  множество. Введем обозначения:  $\Omega_g = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_g$ ,  $\nu^g$  — нормаль к графику  $\Gamma_g$ ,  $\Omega$  — область с гладкой границей  $\Gamma$ .

Пусть  $H(\Omega_g) = H^{1,0}(\Omega_g)^5$ , где подпространство  $H^{1,0}(\Omega_g)$  пространства Соболева  $H^1(\Omega_g)$  состоит из функций, обращающихся в нуль на границе  $\Gamma$ . Функционал потенциальной энергии пластины:

$$\Pi_g(\xi) = \frac{1}{2} B_g(\xi, \xi) - \int_{\Omega_g} F \xi dx, \quad \text{где}$$

$$B_g(\xi, \bar{\xi}) = \int_{\Omega_g} \left( m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(\bar{U}) + (u_{,i} + \phi_i)(\bar{u}_{,i} + \bar{\phi}_i) \right) dx.$$

Для любого фиксированного  $g \in \mathcal{G}$  существует единственное решение  $\xi^g$  задачи

$$\min_{\bar{\xi} \in K_g(\Omega_g)} \Pi_g(\bar{\xi}),$$

где  $K_g(\Omega_g) = \{\xi \in H(\Omega_g) \mid [U]\nu^g \geq |[\phi]\nu^g| \text{ на } \Gamma_g\}$ . Рассмотрим функционал качества

$$J(g) = \|\xi^g - \xi_0\|_{L^2(\Omega_g)^5},$$

где  $\xi_0 \in C^{0,1}(\bar{\Omega})^5$  заданная функция. Задачу об оптимальной форме трещины сформулируем следующим образом:

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} J(g). \quad (35)$$

С физической точки зрения данная задача интерпретируется как задача о существовании формы трещины  $g$ , доставляющей решение  $\xi^g$  с максимальным отклонением от заданных деформаций  $\xi^0$ . Основным результатом параграфа является доказательство разрешимости задачи (35) [3].

### Основные научные результаты диссертации:

- Доказана однозначная разрешимость для нелинейных краевых задач с условиями типа неравенств на внутренней границе, описывающих равновесие однородных и неоднородных пластин с трещиной, в том числе, пластин с трещиной вдоль жесткого или упругого включения. Для задач о равновесии однородной пластины и полой оболочки, сформулированных в области с негладкой границей, установлены свойства дополнительной регулярности решения. Доказано, что задача о контакте пластины с жестким препятствием является предельной для семейства вспомогательных задач о равновесии пластины с трещиной.
- Для нелинейной задачи о равновесии пластины с трещиной выведена формула производной функционала энергии по параметру возмущения области, а также установлена непрерывная зависимость решений от изменения области. Доказана возможность представления производной функционала энергии пластины с трещиной в виде инвариантного интеграла по произвольному замкнутому контуру. Построен ряд примеров с определенной геометрией пластины и заданным видом функции возмущения области, для которых производная функционала энергии представляется в виде инвариантного интеграла.

- Для нелинейной модели пластины с трещиной, расположенной вдоль жесткого включения, доказано существование производной функционала энергии по параметру общего возмущения, найдена выражающая ее формула и установлена непрерывная зависимость решений от изменения области. Получены специальные представления формулы для производной в случае дополнительной гладкости решения.
- В задаче о равновесии пластины установлена сходимости решений при стремлении к нулю параметра, описывающего возмущение прямолинейной трещины. Доказано существование экстремальной кривой, доставляющей экстремум для функционала качества, описывающего отклонение от заданных обобщенных перемещений.
- Разработан метод исследования непрерывной зависимости решений нелинейных краевых задач о равновесии упругих тел от вариации размера жестких включений. С помощью этого метода доказано, что решения задач о пластине с объемным жестким включением сходятся к решению задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением. Доказана разрешимость задач оптимального управления размером жесткого включения в упругих пластинах с разными функционалами качества.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] *Лазарев, Н.П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011. – Т. 14. – № 4. – С. 32–43.
- [2] *Лазарев, Н.П.* Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2011. – Т. 14. – № 4. – С. 381–392.
- [3] *Лазарев, Н.П.* Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко / Н.П. Лазарев // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2011. – Т. 11. – вып. 4. – С. 49–62.
- [4] *Лазарев, Н.П.* Оптимальное управление внешними нагрузками в задаче о равновесии упругой пластины Тимошенко с условиями непроникания на трещине / Н.П. Лазарев // Матем. заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18. – вып. 2. – С. 99–111.
- [5] *Лазарев, Н.П.* Задача о равновесии полой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15. – № 3. – С. 58–69.

- [6] *Лазарев, Н.П.* Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину / Н.П. Лазарев // ПМТФ. – 2012. – Т. 53. – № 2. – С. 175–185.
- [7] *Lazarev, N.P.* An Equilibrium Problem for the Timoshenko-type Plate Containing a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion / N.P. Lazarev // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2013. – Т.6. – № 1. – С. 53–62.
- [8] *Лазарев, Н.П.* Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием / Н.П. Лазарев // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2013. – Т. 13. – № 1. – С. 91–104.
- [9] *Лазарев, Н.П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига / Н.П. Лазарев // ПМТФ. – 2013. – Т. 54. – № 2. – С. 179–189.
- [10] *Лазарев, Н.П.* Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной / Н.П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 98–108.
- [11] *Лазарев, Н.П.* Инвариантные интегралы в задаче о равновесии пластины Тимошенко с условиями типа Синьорини на трещине / Н.П. Лазарев // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2013. – № 6(107) – С. 100–115.
- [12] *Лазарев, Н.П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной / Н.П. Лазарев // ПМТФ. – 2013. – Т. 54. – № 4. – С. 171–181.
- [13] *Лазарев, Н.П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения / Н.П. Лазарев // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2014. – № 1. – С. 32–45.
- [14] *Lazarev, N.P.* Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition / N.P. Lazarev, E.M. Rudoy // Z. Angew. Math. Mech. – 2014. – Vol. 94. – No. 9. – P. 730–739.
- [15] *Lazarev, N.P.* Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion / N.P. Lazarev // Z. Angew. Math. Phys. – 2015. – Vol. 66. – No. 4. – P. 2025–2040.
- [16] *Лазарев, Н.П.* Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко [Электронный ресурс] / Н.П. Лазарев, Н.В. Неустроева, Н.А. Николаева // Сиб.

электрон. матем. изв. – 2015. – Т. 12. – С. 300–308. – Режим доступа: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=semr&paperid=587&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=semr&paperid=587&option_lang=rus).

- [17] *Lazarev, N.P.* Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate // *Boundary Value Problems* – 2015. – Mode of access: <http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2015/1/180> – Date of access: 06.10.2015. – DOI:10.1186/s13661-015-0437-y.
- [18] *Лазарев, Н.П.* Производная функционала энергии по длине криволинейного наклонного разреза в задаче о равновесии пластины Тимошенко / Н.П. Лазарев // *ПМТФ*. – 2015. – Т. 56. – № 6. – С. 119–131.
- [19] *Lazarev, N.P.* Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle / N.P. Lazarev, H. Itou, N.V. Neustroeva // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 2016 – Vol. 33. – No. 1. – P. 63–80.
- [20] *Lazarev, N.* Existence of an optimal size of a rigid inclusion for an equilibrium problem of a Timoshenko plate with Signorini-type boundary condition / N. Lazarev, T. Popova, G. Semenova // *Journal of Inequalities and Applications* – 2016. – Mode of access: <http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2016/1/18> – Date of access: 16.01.2016. – DOI:10.1186/s13660-015-0954-3.
- [21] *Lazarev, N.P.* Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack / N.P. Lazarev // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2016. – Vol. 96. – No. 4. – P. 509–518.
- [22] *Лазарев, Н.П.* Оптимальное управление размером жесткого включения в задаче о равновесии неоднородной пластины тимошенко с трещиной / Н.П. Лазарев // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. – 2016. – Т. 16. – № 1. – С. 90–105.