ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Кригер Екатерины Николаевны на тему «Некоторые задачи идентификации коэффициентов, зависящих от всех переменных, при младших членах в параболических уравнениях», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация Кригер Е.Н. посвящена исследованию активно развивающейся области современной математики — разрешимости линейных и нелинейных коэффициентных обратных задач для параболических уравнений второго порядка с данными Коши и с внутренними точечными условиями переопределения. Отметим актуальность данной тематики как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика, акустика, геофизика, биология, экология, медицина, навигация, материаловедение, теория не разрушенного контроля. Различные постановки обратных задач и ряд результатов для дифференциальных уравнений параболического типа можно найти в классических работах О.М. Алифанова, Ю.Е. Аниконова, Н.Я. Безнощенко, А.Л. Бухгейма, А.М. Денисова, М.М. Лаврентьева, А.И. Прилепко, С.Г. Пяткова, В.Г. Романова, J.R. Cannon, A.Lorenzi и ряда других авторов. Большой вклад в исследование обратных задач для параболических уравнений также внесли Ю.Е. Аниконов, Ю.Я. Белов, Б.А. Бубнов, В.В. Васин, Н.И. Иванчов, С.И. Кабанихин, В.Л. Камынин, А.И. Кожанов, С.З. Кулиев, А.Ш. Любанова, Е.Г. Саватеев, В.Е. Федоров, И.В. Фроленков, M. Choulli, A. Hasanov, V. Isakov, M. Yamomoto и другие.

Основное внимание в диссертации Кригер Е.Н. уделено коэффициентным многомерным обратным задачам для параболических уравнений с данными Коши, причем неизвестные коэффициенты в них зависят от всех независимых переменных, входящих в уравнение, и задачи исследуются в классах гладких ограниченных функций.

Диссертационная работа состоит из трех глав. В первой главе приводятся обозначения, вспомогательные утверждения (теорема Арцела, неравенство Гронуолла, принцип максимума для линейного параболического уравнения, метод слабой аппроксимации, теорема сходимости).

Вторая глава посвящена задаче нахождения функции источника специального вида в многомерном параболическом уравнении с данными Коши, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Рассмотрены два случая представления искомого коэффициента при функции источника. В первом случае неизвестный коэффициент представим в виде суммы функций, каждая из которых зависит от временной и одной из пространственных переменных. Условия переопределения задаются как значения решения на наборе двумерных плоскостей. Показана теорема существования, получена теорема единственности и оценки устойчивости. В частном случае, при $n = 2$, исследовано поведение решения при $t \to \infty$. Во втором случае неизвестный коэффициент представим в виде произведения двух функций. В этом случае получена локальная по времени теорема существования решений. Согласно общему методу исследования сначала, используя дополнительные условия переопределения, обратная задача Коши сводится к прямой задаче Коши для нагруженного уравнения, т.е. для уравнения, которое содержит следы неизвестной функции и ее производных. Разрешимость прямой задачи Коши для нагруженного уравнения доказывается с помощью метода расщепления — метода слабой аппроксимации, разработанного А.А.Самарским, Н.Н.Яненко (1962, 1964). Предельный переход основан на соответствующих априорных оценках в функциональном пространстве гладких функций. Единственность решения обратной задачи Коши устанавливается в силу принципа максимума задачи Коши для параболического уравнения в классе ограниченных функций.

Третья глава посвящена исследованию задачи определения коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении. Искомое уравнение имеет вид

$$u_t - L_0 u = u^p \lambda(t, x, z) + f(t, x, z), \tag{1}$$

где L_0 — эллиптический оператор второго порядка по переменным (x, z) с коэффициентами, зависящими только от t. Коэффициент $\lambda = \lambda(t, x, z)$ неизвестен и представим в виде либо сумм двух неизвестных функций $\lambda = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$, либо в виде их произведения $\lambda = \lambda_1(t, x) \cdot \lambda_2(t, z)$. Условиями переопределения являются значения решения на двух перпендикулярных прямых, лежащих в пространственной области. Когда неизвестный коэффициент представим в виде произведения функций, рассматриваются также условия переопределения, заданные на гладких кривых. Результатами главы являются локальные по времени теоремы существования и единственности решений. Исследования аналогичны результатам первой главы.

В заключении сформулированы полученные в диссертации основные результаты. Основной методом, использованным в диссертационной работе, является метод слабой аппроксимации. Неизвестные функции ищутся в пространствах непрерывных функций вида $C^{1,4}_{t,\vec{x}}$.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Доказана однозначная глобальная разрешимость задачи идентификации функции источника в многомерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы n функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной. В частном случае двух пространственных переменных доказана непрерывная зависимость решения от входных данных, и исследовано поведение решения при стремлении временной переменной к бесконечности.

2. Доказана локальная разрешимость задачи Коши для двумерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при функции источника, который имеет вид произведения двух функций.

3. Для задачи определения коэффициента при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы функций или их произведения, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной, доказаны теоремы существования и единственности решения в малом по времени.

4. Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем существования и единственности, приведены решения, соответствующие этим данным.

Перечислим замечания к диссертационной работе, которые в основном носят редакционный характер.

1. Сначала отметим некоторые опечатки и небрежности в работе. В автореферате и во введении диссертационной работы нет определения решения задачи, которое построена с помощью метода слабой аппроксимации. На странице 14 на 13 строке сверху пропущена ссылка на уравнение ((1.9)).

В формулах (1.7), (1.8) и между ними используется вектор-функции $\varphi_i, \varphi_{i,\tau}$. С другой стороны, в определении (3, 4 строчки снизу на стр. 13) φ_j — скалярная величина (компонента вектора φ). Таким образом, произошла путаница с индексами (получилось, что в равенстве (1.7) с одной стороны скалярная величина, а с другой — векторная).

2. При доказательстве существования решений обратных задач на страницах 30, 47, 69, 80, 94 вывод выполнения условий теоремы Арцела (теоремы 1.1) о компактности из полученных оценок описан недостаточно подробно, и нет ссылок на соответствующие работы.

3. В замечании 1.2 на стр. 15 не указано: если $u^{\tau_k}(t, x)$ — решение системы, то что представляет собой функция $u(t, x)$?

4. Нет никакого комментария о том, почему в диссертации неизвестные коэффициенты в параболических уравнениях, которые зависят от всех независимых переменных, входящих в уравнение, представимы лишь в виде суммы функций в многомерном случае или произведения двух функций в двумерном случае. Являются ли именно такие виды уравнений необходимыми с точки зрения приложений? В диссертации надо было привести примеры обратных задач, входящих в класс рассматриваемых в работе и возникающих при описании реальных физических процессов.

5. На странице 25 приводится расщепленная система в соответствии со схемой метода дробных шагов, и в уравнении (2.20) делается сдвиг аргумента $t - \frac{\tau}{3}$. Не совсем понятно, допускает ли такой сдвиг сама схема, и сохранится ли сходимость приближенного решения, построенного в соот-

ветствии с этой схемой, к решению исходной задачи?

6. Не совсем понятно, зачем использовать метод слабой аппроксимации, когда можно все получить, например, с использованием теоремы о неподвижной точке, применимы также метод продолжения по параметру и ряд других методов. Это немного упростило бы рассуждения и позволило бы уменьшить гладкость данных.

Работа оформлена очень аккуратно. Замечание 1 является редакционным, а остальные замечания, приведенные выше, не влияют на общую положительную оценку работы. В целом диссертация написана на достаточно высоком математическом уровне, представляет собой цельную научную работу на актуальную тему. Полученные в диссертации результаты строго обоснованы и являются новыми. Автореферат диссертации Кригер Е.Н. соответствует содержанию диссертации. Основные результаты опубликованы, степень апробации результатов диссертации хорошая.

Считаю, что диссертационная работа «Некоторые задачи идентификации коэффициентов, зависящих от всех переменных, при младших членах в параболических уравнениях» соответствует всем требованиям п.9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Кригер Екатерина Николаевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

31 июля 2017 г.

Доктор физ.-мат. наук
по специальности 01.01.02,
профессор кафедры
математического анализа
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет
имени М.К. Аммосова» Попов Сергей Вячеславович

ЗАВЕРЯЮ
Зам. начальника УРПиКП СВФУ
Пономарев
«31» июля 2017 г.

Служебный адрес: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», Институт математики и информатики, кафедра математического анализа, ул. Белинского, дом 58, г. Якутск, 677000, Республика Саха (Якутия), Россия. Телефон: +7(9142)267940. Электронная почта: guspopov@mail.ru

Домашний адрес: Попов С.В., ул. Автодорожная, КИЗ ЯГУ, дом 44, кв.1, г. Якутск, 677007, Республика Саха (Якутия), Россия.