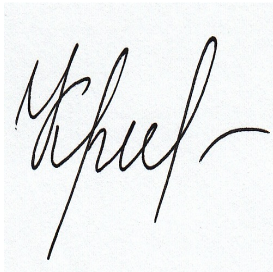
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Кригер Екатерина Николаевна

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВСЕХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белов Юрий Яковлевич

Красноярск – 2017

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Развитие современной науки не обходится без скрупулёзной экспериментальной работы, целью которой является изучение свойств различных физических процессов и явлений. Исходя из полученной в ходе эксперимента информации, исследователь строит математическую модель изучаемого процесса или явления. Во многих областях науки и техники случаются ситуации, когда исследователь сталкивается с невозможностью полностью определить все неизвестные характеристики математической модели явления или процесса. Тогда свойства исследуемого объекта изучаются путем наблюдения за его реакцией на различные внешние воздействия. То есть исследователь должен сделать заключение о свойствах объекта по измеренным в результате эксперимента их косвенным проявлениям. В этом случае говорят о задачах определения причины (характеристик процесса или явления) по известным следствиям (результатам измерений). Задачи такого типа называют обратными. Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: экономика, акустика, электроразведка, сейсмика, медицинская визуализация, навигация, материаловедение, теория неразрушающего контроля.

Интерес к обратным задачам возник в начале XX века. Первые обратные задачи были связаны с исследованиями астрофизиков и геофизиков (см. [103], [122]). Позднее выдающимися советскими математиками А. Н. Тихоновым, М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым был введён термин «обратная задача» (см. [55], [64], [120]). Тогда же оказалось, что большинство обратных задач не являются корректными по Адамару. Основы теории и практики исследования некорректных задач были заложены и развиты в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и их последователей [54], [66], [74]–[76], [119].

Важный исследовательский вклад в теорию обратных задач был сделан А. С. Алексеевым, Г. В. Алексеевым, Ю. Е. Аниконовым, Н. Я. Безнощенко, Ю. Я. Беловым, Ю. М. Березанским, А. Л. Бухгеймом, В. В. Васиным, В. Н. Враговым, Г. Даирбаевой, А. М. Денисовым, И. Е. Егоровым, В. К. Ивановым, Н. И. Иванчовым, А. Д. Искендеровым, С. И. Кабанихиным, В. Л. Камыниным, С. А. Кантором, А. И. Кожановым, С. З. Кулиевым, М. М. Лаврентьевым, С. В. Поповым, А. И. Прилепко, С. Г. Пятковым, В. Г. Романовым, Е. Г. Саватеевым, А. А. Самарским, В. В. Смагиным, А. Н. Тихоновым, Н. Н. Яненко, G. Alessandrini, J. R. Cannon, M. Choulli, P. DuChateau, H. Fujita, D. Guidetti, A. Hasanov, B. F. Jones, T. Kimura, Y. Lin, A. Lorenzi, B. D. Lowe, L. Päivärinta, B. Pektas, R. Riganti, W. Rundell, T. Suzuki, M. Yamamoto и другими ([2] – [4], [6], [7], [11], [12], [15]–[20], [22]–[24], [26], [27], [29], [31], [55], [56], [62], [64], [65], [67]–[72], [74], [86], [89], [90], [93], [94], [96], [99]–[102], [105], [108], [111]–[113], [115]–[118]).

Большую роль в различных задачах математического моделирования играют математические модели, в которых физические процессы или явления описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (см. [77], [78]). Такие модели, в частности, описывают нестационарные процессы теплопередачи и диффузии в различных материалах и средах. Обратными задачами для дифференциальных уравнений являются задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, начальных или граничных условий. Определение неизвестных элементов начально-краевых задач выполняется по разного рода дополнительной информации (условиям переопределения) [24], [64]. Различные постановки обратных задач для параболических уравнений можно найти в [17], [24], [29].

В настоящее время активно развивают это направление теории обратных задач ряд молодых математиков: К. Р. Айда-заде, М. В. Нещадим, И. В. Степанова, И. В. Фроленков, Е. Ф. Шарин, A. Ashyralyev, A. S. Erdogan, M. Kaya, H. Tanabe и другие ([2], [8], [60], [73], [79], [83], [85], [95], [96], [107]).

Различные обратные задачи для параболических уравнений, в которых неизвестными коэффициентами являлись функции, зависящие от переменных, число которых меньше, чем размерность исследуемых уравнений, исследовались в работах [9], [10], [13], [14], [30], [32], [33], [57], [59], [60], [72], [73], [85], [94], [104], [106], [117], [121]. Обратные задачи для параболических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты зависели от всех переменных, были исследованы в работах [1], [8], [23], [31], [62], [67] – [69], [84], [92], [107]. Отличия от рассматриваемых в настоящей диссертации задач состоят в том, что исследования проводились либо в классах функций, убывающих на бесконечности по выделенной переменной, либо в ограниченной по пространственным переменным области.

Численное решение некоторых обратных коэффициентных задач для параболических уравнений можно найти в работах [95], [111], [114].

Целью диссертационной работы является исследование коэффициентных обратных задач для параболических уравнений с данными Коши.

Новизна и интерес данной работы заключается в том, что задачи исследуются в классах гладких ограниченных функций, а неизвестные коэффициенты в них зависят от всех независимых переменных, входящих в уравнение.

Общий метод исследования разрешимости представленных в диссертации обратных задач состоит в следующем. Используя дополнительные условия (условия переопределения), исследуемая обратная задача приводится к неклассической прямой задаче для параболического уравнения, содержащего следы неизвестной функции и её производных. Такие уравнения часто называют «нагруженными» ([58]). Изучению некоторых классов «нагруженных» уравнений, связанных с уравнениями параболического типа, посвящены работы [25], [31], [79], [93]. Разрешимость прямой задачи для «нагруженного» уравнения исследуется на основании метода расщепления, разработанного А. А. Самарским и Н. Н. Яненко ([70], [86], [87]). Метод расщепления на дифференциальном уровне был назван Н. Н. Яненко методом слабой аппроксимации и получил развитие в работах [12], [21], [88], [91].

Структура диссертации. Настоящая диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографического списка, включающего 122 наименования, 26 из них являются работами автора по теме диссертации. Объём диссертации составляет 113 страниц.

В **первой главе** приведены обозначения, вспомогательные утверждения, теоремы и леммы, необходимые для чтения последующих глав диссертации.

Во **второй главе** в классах гладких ограниченных функций рассмотрена задача идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении с данными Коши. Неизвестный коэффициент зависит от всех переменных и представим в виде суммы или произведения функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменных. В **пункте 2.1** исследована задача идентификации коэффициента, представимого в виде суммы. В многомерном случае доказаны глобальная разрешимость и единственность решения (теорема 2.1). В двумерном случае доказана непрерывная зависимость решения задачи от входных данных (теорема 2.2) и исследовано поведение решения на бесконечности (теоремы 2.3 и 2.4). Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, и приведены решения, соответствующие этим входным данным.

В **пункте 2.2** доказана локальная разрешимость задачи идентификации коэффициента, представимого в виде произведения двух функций (теорема 2.5). Построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 2.5, и соответствующего им решения.

Основное содержание второй главы опубликовано в работах [80], [81], [97].

Третья глава посвящена исследованию в классах гладких ограниченных функций задачи идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении с данными Коши. Неизвестный коэффициент зависит от всех переменных, входящих в уравнение, и имеет вид суммы или произведения двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменных. В **пункте 3.1** доказаны существование «в малом» и единственность решения задачи идентификации коэффициента, представимого в виде суммы (теорема 3.1). Построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1, приведено решение, соответствующее этим данным.

В **пункте 3.2** рассмотрена задача определения коэффициента, представимого в виде произведения. Доказана теорема 3.2 существования решения задачи «в малом». Построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 3.2, и приведено решение, соответствующее этим входным данным.

Основные результаты третьей главы опубликованы в [53], [110].

Достоверность представленных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики, построением модельных примеров входных данных и соответствующих им решений, обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Полученные результаты являются новыми, имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач математической физики, а также при исследовании нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 26 работах, из них 5 статей в научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации ([53], [80], [81], [97], [110]), 2 статьи в переводных версиях журналов ([98], [109]), остальные работы опубликованы в сборниках материалов научных конференций ([35] – [52], [82]).

Восемнадцать работ написаны в соавторстве. И. В. Фроленкову принадлежат идеи постановок задач. В статье [80] основной вклад в доказательство оценки непрерывной зависимости от входных данных принадлежит автору, И. В. Фроленкову принадлежит решающий вклад в доказательство теорем существования и единственности решения. В работе [82] рассмотрены две задачи. Г. В. Романенко принадлежит доказательство теоремы редукции для задачи 1, теорем существования и единственности решения редуцированной задачи. Доказательство однозначной разрешимости задачи 2 в случае суммы принадлежит И. В. Фроленкову. Автору принадлежит получение оценки устойчивости по входным данным решения задачи 2 в случае суммы и доказательство локальной разрешимости задачи 2 в случае произведения. В работах [43] – [53], [81], [97], [98], [109], [110] решающий вклад в доказательство основных результатов принадлежит автору.

Доклады по теме диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

– XLII и XLIII Краевых научных студенческих конференциях по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009, 2010 гг.);

– VI Всесибирском конгрессе женщин-математиков (г. Красноярск, 2010 г.);

– XLVIII и LI Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010, 2013 гг.);

– VII, VIII и X Всероссийских научно-технических конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2011, 2012, 2014 гг.);

– Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (г. Новосибирск, 2012 г.);

– XVI и XVII Международных научных конференциях, посвящённых памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнёва (г. Красноярск, 2012, 2013 гг.);

– Международной конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (г. Новосибирск, 2013 г.);

– XII Всероссийской молодёжной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2013 г.);

– VI Общероссийской молодёжной научно-технической конференции «Молодёжь. Техника. Космос» (г. Санкт-Петербург, 2014 г.).

Все результаты, представленные в диссертации, обсуждались на семинаре «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю. Я. Белова (2010 – 2016 гг.), на Сибирском субботнем студенческом семинаре по дифференциальным уравнениям Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук А. И. Кожанова, на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук Г. В. Демиденко (г. Новосибирск, 2015 г.), а также на семинаре «Математические модели механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН профессора П. И. Плотникова (г. Новосибирск, 2017 г.).

Работы по теме диссертационного исследования были отмечены наградами Конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М. А. Лаврентьева (2010, 2013, 2014 гг.).

Автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. Я. Белову и кандидату физ.-мат. наук, доценту И. В. Фроленкову за руководство и неоценимую помощь в работе над диссертацией, а также всем участникам семинара «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета и, особенно Г. В. Романенко, за полезные советы и замечания к диссертации.

Глава 1. Вспомогательные предложения

1.1 Основные определения и теоремы

В настоящей диссертации применяются обозначения, определения и термины из монографии [12]. Приведём основные из них.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек с вещественными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, n — целое. Через (t, x) обозначим произвольную точку пространства $\mathbb{R}^{n+1} = (-\infty; +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Замыкание множества Ω обозначим как $\overline{\Omega}$.

Частную производную функции $f(x)$ порядка $|s|$ будем обозначать следующим образом:

$$D^s f(x) = D^{(s_1, s_2, \ldots, s_n)} f(x) = \frac{\partial^{|s|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}}, \tag{1.1}$$

$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — мультииндекс, $s_r \geq 0$ — целые числа, $r = 1, 2, \ldots, n$, $|s| = s_1 + \ldots + s_n$.

Рассмотрим ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество Ω и пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f(x)$ с нормой $||f||_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$. Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\big(M \subset C(\overline{\Omega})\big)$.

Теорема 1.1 (Арцела). *Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство теоремы **1.1** можно найти, например, в [34].

Лемма 1.1 (Неравенство Гронуолла). *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке $[0, t^*]$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\chi(t) \leq C + \int\limits_0^t [A + B\chi(\theta)] \, d\theta,$$

где постоянные $A, B, C \geq 0$. Тогда, если $B > 0$, то при $0 \leq t \leq t^*$ имеет место оценка

$$\chi(t) \leq Ce^{Bt} + \frac{A}{B}\left(e^{Bt} - 1\right). \tag{1.2}$$

Если $B = 0$, то

$$\chi(t) \leq C + At.$$

Доказательство неравенства (1.2) в основном повторяет доказательство леммы 1 гл. I в [63].

1.1.1 Принцип максимума для линейного параболического уравнения в неограниченной области

Рассмотрим слой H, составленный из тех точек пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых $0 < t \le T$.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\mathfrak{L}(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(t,x), \qquad (1.3)$$

где функции a_{ij}, b_i, c и f вещественны и принимают конечные значения.

Считаем, что $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0.$$

Теорема 1.2. *Пусть непрерывная и ограниченная в $\overline{H}$ функция $u(t,x)$ удовлетворяет в H уравнению* (1.3), *причём $|u(0,x)| \le M_1$, $|f(t,x)| \le M_2$, а коэффициенты a_{ij}, b_i, c удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\left|a_{ij}(t,x)\right| < M\left(r^2+1\right), \quad \left|b_i(t,x)\right| < M\sqrt{r^2+1}, \quad |c(t,x)| \le M_3, \qquad (1.4)$$

где $r = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$ и M — некоторая положительная постоянная.

Тогда всюду в $\overline{H}$

$$|u(t,x)| \le e^{M_3 t}\left(M_1 + M_2 t\right).$$

Замечание 1.1. *Из теоремы **1.2** следует единственность решения задачи Коши для уравнения* (1.3) *в области $\overline{H}$, а также непрерывная зависимость этого решения от начальной функции $\varphi(x)$ и правой части $f(t,x)$ уравнения, если рассматривать только ограниченные в $\overline{H}$ решения задачи Коши, а коэффициенты уравнения* (1.3) *подчинить условиям* (1.4).

Доказательство теоремы **1.2** приведено в [5], [28].

1.1.2 Метод слабой аппроксимации. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Приведём краткое описание метода слабой аппроксимации и одну теорему сходимости метода. Более подробно эта информация изложена в [12], [91].

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t),\ t \in [0,T],\ u(0) = u_0, \tag{1.5}$$

где $L(t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D\left(L(t)\right)$, причем при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ оператор $L(t)$ отображает $D\left(L(t)\right)$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $L = \sum\limits_{i=1}^{m} L_i$, $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{m} D\left(L_i(t)\right) \subseteq D\left(L(t)\right)$. Считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D\left(L_i(t)\right)$ в $\mathfrak{B}$ и функции $f_i(t) \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, m$.

Наряду с задачей (1.5) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{du^\tau}{dt} + L_\tau(t)u^\tau = f_\tau(t),\ t \in [0,T],\ u^\tau(0) = u_0. \tag{1.6}$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\tau,t)L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\tau,t)f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, т.е. для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ при $\tau \to 0$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\alpha_i(\tau,t) - 1\right)\, dt \to 0, \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\beta_i(\tau,t) - 1\right)\, dt \to 0.$$

Метод решения задачи (1.5), при котором в качестве приближенных решений u^τ, $\tau > 0$, берутся решения задачи (1.6) и решение u задачи (1.5) находится как предел при $\tau \to 0$ решений u^τ ($u = \lim\limits_{\tau \to 0} u^\tau$), называется методом слабой аппроксимации ([12], [87], [91]).

Если коэффициенты $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ выбрать в виде

$$\alpha_i(\tau,t) = \beta_i(\tau,t) = \begin{cases} m, & \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$, то в этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.6) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_1(t)u^\tau = mf_1(t),\ t \in (0, \tfrac{\tau}{m}] \text{ — первый дробный шаг,}$$
$$u^\tau(0) = u_0,$$
$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_2(t)u^\tau = mf_2(t),\ t \in (\tfrac{\tau}{m}, \tfrac{2\tau}{m}] \text{ — второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}], \ldots, (\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau]$. Тем самым находят решение на отрезке $[0, \tau]$ — нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$ — первом целом шаге, затем — на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0, T]$. Задачу (1.6) называют расщеплением задачи (1.5).

Рассмотрим в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t, x) | t_0 \le t \le t_1, x \in E_n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \bar{u}). \tag{1.7}$$

Здесь $u = u(t, x) = (u_1(t, x), \ldots, u_l(t, x))$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ — вектор-функции размерности l $(l \ge 0)$. Через $\bar{u} = (v_0, v_1, \ldots, v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u = (u_1, \ldots, u_l)$; v_1 — вектор, составленный из всех производных от u первого порядка по x; v_2 — вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x и так далее; v_r — вектор, составленный из производных порядка r по x от u.

Таким образом,

$$\bar{u} = \left(u_1, \ldots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \ldots, \frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right),$$

и система уравнений (1.7) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно $(r \ge 0)$.

Мы предполагаем, что $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi^i$, $\varphi_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_j^i$, $j = 1, \ldots, l$, где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.8}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}$ определены соотношением

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \le t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (1.8) слабо аппроксимирует систему (1.7).

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.9}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.7), (1.8), (1.9). Под классическими решениями уравнений (1.8) ((1.9)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.8), в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t^τ может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.8) ((1.9)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.9) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau \le \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$. Через $u^{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.9) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.9) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в $\Pi_{[t_0,t_1]}^N = \{(t, x) | t_0 \le t \le t_1, |x| \le N\}$, последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в (1.7), причем

$$\max_{\Pi_{[t_0,t_1]}^N} |\varphi_i(t, x, \bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \bar{u}^{\tau_k})| \to 0, \quad \tau_k \to 0, \ i = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия* **1**, **2**. *Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (1.7) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство теоремы **1.3** приведено в [12].

Замечание 1.2. *Рассмотрим систему уравнений* (1.7) *с вектор-функцией* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. *Из доказательства теоремы* ***1.3*** *следует, что если* $u^{\tau_k}(t,x)$ — *решение системы*

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_1, \quad t_0 + n\tau_k < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right)\tau_k, \\
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_2, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right)\tau_k < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right)\tau_k, \\
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = p\varphi_3, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right)\tau_k < t \le t_0 + (n+1)\,\tau_k,
\end{gathered}$$

где $p > 1$ — *некоторое фиксированное число, и выполняются условия* **1**, **2**, *то* $u(t,x)$ *является решением системы* (1.7) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

1.2 Единственность решения задачи Коши для одного двумерного нагруженного уравнения

Рассмотрим в области $\mathrm{P}_{[0,T]} = \{(t,y)\,|\,0 \le t \le T, y \in \mathbb{R}\}$ задачу Коши для уравнения

$$\begin{aligned}
v_t(t,y) = a_1(t)\cdot v_{yy}(t,y) + a_2(t)\cdot v_y(t,y) + a_3(t,y)\cdot v(t,y)- \\
- a_4(t,y)\cdot v_{yy}(t,d(t)) - a_5(t,y)\cdot v_y(t,d(t)), \quad (1.10)
\end{aligned}$$

с начальным условием

$$v(0,y) = r(y). \tag{1.11}$$

Предполагаем, что функции $a_1(t) \ge a_0 > 0$, $a_2(t)$, $a_3(t,y)$, $a_4(t,y)$, $a_5(t,y)$, $r(y)$ и все их производные непрерывны и ограничены в $\mathrm{P}_{[0,T]}$, $d(t)$ — некоторая гладкая и ограниченная на $[0,T]$ кривая.

Лемма 1.2. *Если решение* $v(t,y) \in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$ *задачи* (1.10), (1.11) *существует и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}v(t,y)\right| \le C,$$

то оно единственно. Здесь

$$C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)=\left\{v(t,y)\;\middle|\;v_t(t,y),\frac{\partial^k}{\partial y^k}v(t,y)\in C\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right),\ k=0,1,\ldots,4\right\}.$$

Доказательство. Пусть существуют два различных решения задачи (1.10), (1.11): $v_1(t,y)\in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$ и $v_2(t,y)\in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$. Тогда разность

$$\omega(t,y)=v_1(t,y)-v_2(t,y)\tag{1.12}$$

является решением задачи

$$\begin{aligned}\omega_t(t,y)=a_1(t)\cdot\omega_{yy}(t,y)+a_2(t)\cdot\omega_y(t,y)+a_3(t,y)\cdot\omega(t,y)-&\\ -a_4(t,y)\cdot\omega_{yy}(t,d(t))-a_5(t,y)\cdot\omega_y(t,d(t)),&\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\omega(0,y)=0.\tag{1.14}$$

Введём неотрицательные, неубывающие на $[0,T]$ функции

$$g_k(t)=\sup_{\mathrm{P}_{[0,t]}}\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}\omega(\xi,y)\right|,\ k=0,1,2.$$

В силу принципа максимума (теорема **1.2**) для уравнения (1.13) получим

$$\begin{aligned}\big|\omega(\xi,y)\big|\le exp\left(\xi\cdot\sup_{\mathrm{P}_{[0,t]}}|a_3(t,y)|\right)\times&\\ \times\left(\sup_{\mathrm{P}_{[0,t]}}|a_4(t,y)|\cdot g_2(t)+\sup_{\mathrm{P}_{[0,t]}}|a_5(t,y)|\cdot g_1(t)\right)\cdot\xi,\ (\xi,y)\in\mathrm{P}_{[0,t]},\ 0\le t\le T.&\end{aligned}$$

Справедливо неравенство

$$\big|\omega(\xi,y)\big|\le C\cdot(g_2(t)+g_1(t))\cdot t,\quad(\xi,y)\in\mathrm{P}_{[0,t]},\ 0\le t\le T.$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства $\sup\limits_{\mathrm{P}_{[0,t]}}$. В силу неотрицательности функций $g_k(t),\ k=0,1,2$, имеем

$$g_0(t)\le C\cdot\big(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\big)\cdot t,\ 0\le t\le T.\tag{1.15}$$

Дифференцируя (1.13), (1.14) один, а затем два раза по y, в силу принципа максимума для уравнений

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t \partial y^k}\omega(t,y) = a_1(t)\cdot\frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}}\omega(t,y) + a_2(t)\cdot\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\omega(t,y)+$$
$$+\sum_{m=0}^{k} C_k^m \frac{\partial^m}{\partial y^m}a_3(t,y)\cdot\frac{\partial^{k-m}}{\partial y^{k-m}}\omega(t,y) - \frac{\partial^k}{\partial y^k}a_4(t,y)\cdot\omega_{yy}(t,d(t))+$$
$$+\frac{\partial^k}{\partial y^k}a_5(t,y)\cdot\omega_y(t,d(t)),\ k=1,2,$$

получим аналогичные оценки

$$g_k(t) \le C\cdot\big(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\big)\cdot t,\ k=1,2,\ 0\le t\le T. \tag{1.16}$$

Сложим неравенства (1.15) и (1.16).

$$g_0(t)+g_1(t)+g_2(t) \le C\cdot\big(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\big)\cdot t,\ 0\le t\le T.$$

Отсюда следует, что $g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)=0$ при $t\in[0,\theta]$, где $\theta<\frac{1}{C}$. Так как $g_k(t)\ge 0$, то $\omega(t,y)=0$ при $(t,y)\in \mathrm{P}_{[0,\theta]}$. Рассуждая аналогично, для $t\in[\theta,2\theta]$ получим, что $\omega(t,y)=0$, $(t,y)\in\mathrm{P}_{[\theta,2\theta]}$. Продолжая рассуждения, через конечное число шагов в $\mathrm{P}_{[0,T]}$ справедливо $\omega(t,y)\equiv 0$. Отсюда, согласно (1.12), следует, что $v_1(t,y)=v_2(t,y)$ в $\mathrm{P}_{[0,T]}$. Таким образом, решение задачи (1.10), (1.11) единственно.

Лемма **1.2** доказана.

1.3 Единственность решения задачи Коши для одной системы нагруженных уравнений

В области $\Pi_{[0,T]}=\big\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\big\}$ рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,x_1) = b_1(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,x_1) + c_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x_1) + c(t)\cdot\psi_1(t,x_1)+$$
$$+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\left(b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,\alpha_1)+c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,\alpha_1)\right)+$$
$$+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right),$$

$\ldots$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(t,x_n) = b_n(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,x_n) + c_n(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,x_n) + c(t)\cdot\psi_n(t,x_n) +$$
$$+ (n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\left(b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,\alpha_n) + c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,\alpha_n)\right) +$$
$$+ (n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k) + c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right), \qquad (1.17)$$

с начальным условием

$$\psi_k(0,x_k) = 0,\ k = 1,2,\dots,n. \qquad (1.18)$$

Здесь $\overline{a}^k(x_k) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1},x_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)$, $\overline{a}^0 = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j = const,\ j = 1,\dots,n$. Предполагаем, что коэффициенты $b_k(t) \geq b_0 > 0$, $c_k(t)$, $c(t)$ — вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$ функции, а $\Phi_0(t,x)$ и её производные $D^s\Phi_0(t,x)$, $s = (s_1,\dots,s_n)$, $s_r = 0,1,\dots,6$, $r = 1,\dots,n$, непрерывны и ограничены в $\Pi_{[0,T]}$.

Лемма 1.3. *Если существует решение $\Psi = (\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n)$ задачи (1.17), (1.18), где функции $\psi_k(t,x_k) \in C^{1,4}_{t,x_k}\left(\Pi_{[0,T]}\right)$ ограничены вместе со своими производными по x_k до четвертого порядка включительно, то это решение единственно.*

Здесь

$$C^{1,4}_{t,x_k}\left(\Pi_{[0,T]}\right) = \left\{\psi_k(t,x_k)\ \middle|\ \frac{\partial\psi_k(t,x_k)}{\partial t} \in C\left(\Pi_{[0,T]}\right),\right.$$
$$\left.\frac{\partial^j\psi_k(t,x_k)}{\partial x_k^j} \in C\left(\Pi_{[0,T]}\right),\ j = 0,1,\dots,4\right\},\ k = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Пусть существуют два различных достаточно гладких и ограниченных решения задачи (1.17), (1.18):

$$B^1 = (\beta_1^1,\beta_2^1,\dots,\beta_n^1) \in C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right) \text{ и } B^2 = (\beta_1^2,\beta_2^2,\dots,\beta_n^2) \in C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right).$$

Разность

$$B = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = B^1 - B^2 = (\beta_1^1-\beta_1^2,\beta_2^1-\beta_2^2,\dots,\beta_n^1-\beta_n^2) \qquad (1.19)$$

является решением задачи (1.20), (1.21).

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\beta_1(t,x_1)=b_1(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\beta_1(t,x_1)+c_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\beta_1(t,x_1)+c(t)\cdot\beta_1(t,x_1)+\\
&+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\left(b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\beta_1(t,\alpha_1)+c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\beta_1(t,\alpha_1)\right)+\\
&+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\beta_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\beta_k(t,\alpha_k)\right),\\
&\dots\\
&\frac{\partial}{\partial t}\beta_n(t,x_n)=b_n(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\beta_n(t,x_n)+c_n(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\beta_n(t,x_n)+c(t)\cdot\beta_n(t,x_n)+\\
&+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\left(b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\beta_n(t,\alpha_n)+c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\beta_n(t,\alpha_n)\right)+\\
&+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\beta_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\beta_k(t,\alpha_k)\right),
\end{aligned}\tag{1.20}$$

$$\beta_k(0,x_k)=0,\ k=1,2,\dots,n.\tag{1.21}$$

Введём неотрицательные, неубывающие на $[0,T]$ функции

$$p_k^l(t)=\sup_{(\xi,x)\in\Pi_{[0,t]}}\left|\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\beta_k(\xi,x_k)\right|,\ l=0,1,2,\ k=1,2,\dots,n.\tag{1.22}$$

В силу принципа максимума для уравнений системы (1.20), справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&\big|\beta_1(\xi,x_1)\big|\le C\cdot\big(p_1^2(t)+p_1^1(t)\big)\cdot t+C\cdot\sum_{k=2}^{n}\big(p_k^2(t)+p_k^1(t)\big)\cdot t,\\
&\big|\beta_2(\xi,x_2)\big|\le C\cdot\big(p_2^2(t)+p_2^1(t)\big)\cdot t+C\cdot\sum_{k=1,k\neq 2}^{n}\big(p_k^2(t)+p_k^1(t)\big)\cdot t,\\
&\dots\\
&\big|\beta_n(\xi,x_n)\big|\le C\cdot\big(p_n^2(t)+p_n^1(t)\big)\cdot t+C\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\big(p_k^2(t)+p_k^1(t)\big)\cdot t,\\
&0\le\xi\le t,\ 0\le t\le T,\ x_k\in\mathbb{R}^1,k=1,2,\dots,n.
\end{aligned}\tag{1.23}$$

Продифференцируем k-е уравнение системы (1.20) один, а затем два раза по x_k, $k=1,2,\ldots,n$. В силу принципа максимума для уравнений

$$\frac{\partial^{l+1}}{\partial t \partial x_1^l}\beta_1(t,x_1) = b_1(t)\cdot\frac{\partial^{l+2}}{\partial x_1^{l+2}}\beta_1(t,x_1)+$$
$$+\,c_1(t)\cdot\frac{\partial^{l+1}}{\partial x_1^{l+1}}\beta_1(t,x_1)+c(t)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_1^{l}}\beta_1(t,x_1)+$$
$$+\,(n-1)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_1^{l}}\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\left(b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\beta_1(t,\alpha_1)+c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\beta_1(t,\alpha_1)\right)+$$
$$+\,(n-2)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_1^{l}}\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\beta_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\beta_k(t,\alpha_k)\right),$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial^{l+1}}{\partial t \partial x_n^l}\beta_n(t,x_n) = b_n(t)\cdot\frac{\partial^{l+2}}{\partial x_n^{l+2}}\beta_n(t,x_n)+$$
$$+\,c_n(t)\cdot\frac{\partial^{l+1}}{\partial x_n^{l+1}}\beta_n(t,x_n)+c(t)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_n^{l}}\beta_n(t,x_n)+$$
$$+\,(n-1)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_n^{l}}\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\left(b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\beta_n(t,\alpha_n)+c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\beta_n(t,\alpha_n)\right)+$$
$$+\,(n-2)\cdot\frac{\partial^{l}}{\partial x_n^{l}}\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\beta_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\beta_k(t,\alpha_k)\right),$$
$$l=1,2,$$

получим аналогичные оценки

$$\begin{gathered}
\left|\frac{\partial^l}{\partial x_1^l}\beta_1(\xi,x_1)\right| \le C\cdot\big(p_1^{l+2}(t)+p_1^{l+1}(t)\big)t + C\cdot\sum_{k=2}^{n}\big(p_k^2(t)+p_k^1(t)\big)t,\\
\ldots\\
\left|\frac{\partial^l}{\partial x_n^l}\beta_n(\xi,x_n)\right| \le C\cdot\big(p_n^{l+2}(t)+p_n^{l+1}(t)\big)t + C\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\big(p_k^2(t)+p_k^1(t)\big)t,\\
0\le\xi\le t,\ 0\le t\le T,\ x_k\in\mathbb{R}^1, k=1,2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{1.24}$$

Возьмём $\sup\limits_{(\xi,x)\in\Pi_{[0,t]}}$ от обеих частей неравенств (1.23), (1.24), сложим их и, в силу неотрицательности функций (1.22), получим

$$\sum_{l=0}^{2}\sum_{k=1}^{n}p_k^l(t) \le C\cdot t\cdot\sum_{l=0}^{2}\sum_{k=1}^{n}p_k^l(t),\ 0\le t\le T.$$

Отсюда следует, что при $t \in [0, \theta]$, где $\theta < \frac{1}{C}$, выполняется: $\sum\limits_{l=0}^{2}\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^l(t) = 0$.

В силу неотрицательности функций (1.22) справедливо

$$\beta_k(t, x_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ x_k \in \mathbb{R}^1,\ 0 \le t \le \theta.$$

Рассуждая аналогично, для $t \in [\theta, 2\theta]$ получим, что

$$\beta_k(t, x_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ x_k \in \mathbb{R}^1,\ \theta \le t \le 2\theta.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, через конечное число шагов имеем

$$\beta_k(t, x_k) \equiv 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ x_k \in \mathbb{R}^1,\ 0 \le t \le T.$$

Из последнего неравенства и обозначений (1.19) следует, что $\beta_k^1 = \beta_k^2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $x_k \in \mathbb{R}^1$, $0 \le t \le T$. Следовательно, решение задачи (1.17), (1.18) единственно во всей области $\Pi_{[0,T]}$.

Лемма **1.3** доказана.

Глава 2. Задачи идентификации коэффициентов, зависящих от всех переменных, при функции источника

2.1 Коэффициент представим в виде суммы

2.1.1 Многомерный случай

2.1.1.1 Постановка задачи

В полосе $\widetilde{G}_{[0,T]} = \{(t,x) \,|\, 0 \le t \le T,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ рассматривается задача Коши для многомерного параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x)\right) + f(t,x) \cdot \lambda(t,x),\ (t,x) \in \widetilde{G}_{(0,T]}, \tag{2.1}$$

$$L\left(u(t,x)\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,x) + c(t) u(t,x), \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Коэффициенты $b_k(t) \ge b_0 > 0$, $c_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, $c(t)$ — вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$ функции.

Наряду с функцией $u(t,x)$ необходимо также определить функцию

$$\lambda(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t, x_k). \tag{2.4}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t, \overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(t, x_k),\ k = \overline{1,n}, \tag{2.5}$$

где $\overline{a}^k(x_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, x_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{a}^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j = const$, $j = \overline{1,n}$, выполнены условия согласования

$$u_0(\overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(0, x_k),\ k = \overline{1,n}, \tag{2.6}$$

$$\varphi_1(t, \alpha_1) = \varphi_2(t, \alpha_2) = \cdots = \varphi_n(t, \alpha_n), \tag{2.7}$$

и условия

$$\left| f(t, \overline{a}^k(x_k)) \right| \ge \delta_k > 0,\ t \in [0,T],\ x_k \in \mathbb{R},\ \delta_k = const,\ k = \overline{1,n}. \tag{2.8}$$

Относительно функций $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\varphi_k(t,x_k), k = \overline{1,n}$, определённых в $\widetilde{G}_{[0,T]}, \mathbb{R}^n$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношения (2.9)–(2.11), и удовлетворяют им.

$$\left|D^s f(t,x)\right| \le C,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,6,\ r=\overline{1,n},\ (t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}, \quad (2.9)$$

$$\left|D^s u_0(x)\right| \le C,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,6,\ r=\overline{1,n}, \quad (2.10)$$

$$\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x_k^j}\varphi_k(t,x_k)\right| \le C,\ i=0,1; j=0,1,\ldots,6; k=\overline{1,n}, t\in[0,T], x_k\in\mathbb{R}, \quad (2.11)$$

здесь D^s из (1.1).

2.1.1.2 Приведение обратной задачи к прямой

Теперь приведём обратную задачу (2.1)–(2.5) к вспомогательной прямой. Сначала в уравнении (2.1) положим $x=\overline{a}^0$ и выразим коэффициент при функции источника

$$\lambda_1(t,\alpha_1)+\lambda_2(t,\alpha_2)+\ldots+\lambda_n(t,\alpha_n)=\frac{u_t(t,\overline{a}^0)-L\left(u(t,\overline{a}^0)\right)}{f(t,\overline{a}^0)}. \quad (2.12)$$

Затем в (2.1) последовательно полагая $x=\overline{a}^1(x_1)$, $x=\overline{a}^2(x_2)$ и так далее до $x=\overline{a}^n(x_n)$, получаем следующие n уравнений:

$$\lambda_1(t,x_1)+\lambda_2(t,\alpha_2)+\ldots+\lambda_n(t,\alpha_n)=\frac{u_t(t,\overline{a}^1(x_1))-L\left(u(t,\overline{a}^1(x_1))\right)}{f(t,\overline{a}^1(x_1))},$$
$$\lambda_1(t,\alpha_1)+\lambda_2(t,x_2)+\ldots+\lambda_n(t,\alpha_n)=\frac{u_t(t,\overline{a}^2(x_2))-L\left(u(t,\overline{a}^2(x_2))\right)}{f(t,\overline{a}^2(x_2))},$$
$$\ldots$$
$$\lambda_1(t,\alpha_1)+\ldots+\lambda_{n-1}(t,\alpha_{n-1})+\lambda_n(t,x_n)=\frac{u_t(t,\overline{a}^n(x_n))}{f(t,\overline{a}^n(x_n))}-\frac{L\left(u(t,\overline{a}^n(x_n))\right)}{f(t,\overline{a}^n(x_n))}.$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$\frac{u_t(t,\overline{a}^1(x_1))-L\left(u(t,\overline{a}^1(x_1))\right)}{f(t,\overline{a}^1(x_1))}+\cdots+\frac{u_t(t,\overline{a}^n(x_n))-L\left(u(t,\overline{a}^n(x_n))\right)}{f(t,\overline{a}^n(x_n))}=$$
$$=\sum_{k=1}^n\lambda_k(t,x_k)+(n-1)\cdot\sum_{k=1}^n\lambda_k(t,\alpha_k). \quad (2.13)$$

Затем в (2.13) подставим выражение (2.12).

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t,x_k)=\frac{u_t(t,\overline{a}^1(x_1))-L\left(u(t,\overline{a}^1(x_1))\right)}{f(t,\overline{a}^1(x_1))}+\dots+$$
$$+\frac{u_t(t,\overline{a}^n(x_n))-L\left(u(t,\overline{a}^n(x_n))\right)}{f(t,\overline{a}^n(x_n))}-(n-1)\cdot\frac{u_t(t,\overline{a}^0)-L\left(u(t,\overline{a}^0)\right)}{f(t,\overline{a}^0)}.$$

Заметим, что из условий переопределения (2.5) следует, что $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}u(t,\overline{a}^k(x_k))=\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,x_k)$, $k=1,2,\dots,n$. Следовательно, получаем выражение на неизвестный коэффициент в следующем виде:

$$\lambda(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t,x_k)=g(t,x)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n}b_k(t)u_{x_kx_k}(t,\overline{a}^i(x_i))+\sum\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n}c_k(t)u_{x_k}(t,\overline{a}^i(x_i))}{f(t,\overline{a}^i(x_i))},\quad(2.14)$$

где функция $g(t,x)$ известна и имеет вид

$$g(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_k(t,x_k)-b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,x_k)-c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,x_k)}{f(t,\overline{a}^k(x_k))}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{c(t)\varphi_k(t,x_k)}{f(t,\overline{a}^k(x_k))}+(n-1)\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\Big)}{f(t,\overline{a}^0)}-$$
$$-(n-1)\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,\alpha_1)-c(t)\varphi_1(t,\alpha_1)}{f(t,\overline{a}^0)}.\quad(2.15)$$

Введём следующие обозначения:

$$\Phi_0(t,x)=-\frac{f(t,x)}{f(t,\overline{a}^0)},\ \Phi_k(t,x)=-\frac{f(t,x)}{f(t,\overline{a}^k(x_k))},\ k=\overline{1,n},\quad(2.16)$$

$$G(t,x)=f(t,x)\cdot g(t,x).\quad(2.17)$$

Подставляем (2.14) в (2.1), учитывая обозначения (2.15) – (2.17), переходим к прямой задаче для уравнения

$$u_t=L\left(u(t,x)\right)+\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(t,x)\cdot\Bigg(\sum_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n}b_k(t)u_{x_kx_k}(t,\overline{a}^i(x_i))+$$

$$+\sum_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n} c_k(t)u_{x_k}(t,\overline{a}^{\,i}(x_i))\Bigg) + G(t,x),\ (t,x)\in \widetilde{G}_{(0,T]}, \tag{2.18}$$

с начальным условием (2.3).

2.1.1.3 Существование решения прямой задачи

Докажем разрешимость прямой задачи. Для этого воспользуемся методом слабой аппроксимации ([12], [87]). Расщепим уравнение (2.18) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в следах неизвестной функции.

$$u_t^\tau = 3\cdot L\left(u^\tau(t,x)\right),\ j\tau < t \le \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.19}$$

$$u_t^\tau = 3\cdot\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(t,x)\cdot\Bigg(\sum_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n} b_k(t)u^\tau_{x_kx_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,i}(x_i))+$$

$$+\sum_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{n} c_k(t)u^\tau_{x_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,i}(x_i))\Bigg),\ \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \tag{2.20}$$

$$u_t^\tau = 3\cdot G(t,x),\ \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (j+1)\tau, \tag{2.21}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x), \tag{2.22}$$

$$j = 0,1,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&U_s(0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^s u_0(x)\right|,\\
&U_s^\tau(t) = \sup_{j\tau<\xi\le t}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^s u^\tau(\xi,x)\right|,\ j\tau<t\le(j+1)\tau,\\
&s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r = 0,1,\ldots,6,\ r=1,\ldots,n,\\
&U(0) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,\ldots,6,\\ r=1,\ldots,n}} U_s(0),\quad U^\tau(t) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,\ldots,6,\\ r=1,\ldots,n}} U_s^\tau(t).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Справедливы утверждения:

1. $\left|D^s u^\tau(\xi,x)\right| \le U_s^\tau(t) \le U^\tau(t),\ j\tau<\xi\le t\le(j+1)\tau;$ (2.24)

2. функции $U_s^\tau(t), U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $(j\tau,(j+1)\tau]$.

Полуинтервал $\big(j\tau, (j+1)\tau\big]$ будем называть j-м целым шагом, а полуинтервал $\left(\left(j+\frac{r-1}{3}\right)\tau,\ \left(j+\frac{r}{3}\right)\tau\right]$ — r-м дробным шагом j-го целого шага, $r=1,2,3$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x)$ задачи (2.19)–(2.22).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($j=0$). На первом дробном шаге, при $t \in \left(0,\frac{\tau}{3}\right]$ рассматриваем уравнение (2.19) с начальным условием (2.22).

По принципу максимума для задачи Коши имеем

$$\big|u^\tau(\xi,x)\big| \le e^{C\xi}\cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|u_0(x)\big|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right]. \tag{2.25}$$

Применяя к уравнению (2.19) и начальному условию (2.22) операцию дифференцирования D^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_r=0,1,\ldots,6$, $r=1,\ldots,n$, получим

$$\big|D^s u^\tau(\xi,x)\big| \le e^{C\xi}\cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|D^s u_0(x)\big|,\ \ 0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right]. \tag{2.26}$$

Возьмём $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ сначала от правых, затем от левых частей неравенств (2.25) и (2.26). Далее от обеих частей полученных соотношений возьмём $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, сложим их и, согласно обозначений (2.23), получим

$$U^\tau(t) \le e^{C\tau}\cdot U(0),\ \ 0<t\le \tfrac{\tau}{3}. \tag{2.27}$$

На втором дробном шаге, $t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right]$, рассматривается уравнение (2.20) с начальным условием

$$u^\tau\,\Big|_{t=\frac{\tau}{3}} = u^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x\right).$$

Проинтегрируем уравнение (2.20) по временной переменной. Справедливо неравенство

$$\big|u^\tau(\xi,x)\big| \le \big|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x\right)\big| + 3\cdot\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\big|\Phi_i(\theta,x)\big|\times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{n}\big|b_k(\theta)\big|\cdot\big|u^\tau_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,i}(x_i))\big| + \sum_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{n}\big|c_k(\theta)\big|\cdot\big|u^\tau_{x_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,i}(x_i))\big|\right)d\theta.$$

Из условий (2.8), (2.9), (2.16) следует, что функции $\Phi_k(t,x)$, $k=0,1,\ldots,n$, являются ограниченными и имеют ограниченные производные $D^s\Phi_k(t,x)$,

$k=\overline{1,n}$, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_r=0,1,\ldots,6$, $r=\overline{1,n}$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau(\xi,x)\right|\le\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x\right)\right|+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n}\sup_{0<\theta\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x)\right|+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sup_{0<\theta\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau_{x_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x)\right|\right)d\theta. \quad (2.28)$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные, и независящие от параметра расщепления τ.

Применим операцию дифференцирования D^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_r=0,1,\ldots,6$, $r=1,\ldots,n$, к уравнению (2.20):

$$D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^\tau_t(t,x)=3\cdot\sum_{l_1=0}^{s_1}C_{s_1}^{l_1}\cdot D^{(l_1,s_2,\ldots,s_n)}\Phi_1(t,x)\times$$
$$\times\frac{\partial^{s_1-l_1}}{\partial x_1^{s_1-l_1}}\left(\sum_{k=2}^{n}b_k(t)u^\tau_{x_kx_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^1(x_1))+\sum_{k=2}^{n}c_k(t)u^\tau_{x_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^1(x_1))\right)+$$
$$+3\cdot\sum_{l_2=0}^{s_2}C_{s_2}^{l_2}\cdot D^{(s_1,l_2,\ldots,s_n)}\Phi_2(t,x)\times$$
$$\times\frac{\partial^{s_2-l_2}}{\partial x_2^{s_2-l_2}}\left(\sum_{\substack{k=1,\\k\ne2}}^{n}b_k(t)u^\tau_{x_kx_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^2(x_2))+\sum_{\substack{k=1,\\k\ne2}}^{n}c_k(t)u^\tau_{x_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^2(x_2))\right)+$$
$$+\cdots+3\cdot\sum_{l_n=0}^{s_n}C_{s_n}^{l_n}\cdot D^{(s_1,\ldots,s_{n-1},l_n)}\Phi_n(t,x)\cdot\frac{\partial^{s_n-l_n}}{\partial x_n^{s_n-l_n}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}b_k(t)u^\tau_{x_kx_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^n(x_n))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}c_k(t)u^\tau_{x_k}(t-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^n(x_n))\right).$$

Проинтегрируем последнее уравнение по временной переменной, получим справедливость неравенства

$$\left|D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^\tau(\xi,x)\right|\le\left|D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^\tau(\tfrac{\tau}{3},x)\right|+\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left[3\cdot\sum_{l_1=0}^{s_1}C_{s_1}^{l_1}\cdot\left|D^{(l_1,s_2,\ldots,s_n)}\Phi_1(\theta,x)\right|\times\right.$$
$$\times\left(\sum_{k=2}^{n}\left|b_k(\theta)\right|\cdot\left|\frac{\partial^{s_1-l_1}}{\partial x_1^{s_1-l_1}}u^\tau_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^1(x_1))\right|+\right.$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\bigl|c_k(\theta)\bigr|\cdot\left|\frac{\partial^{s_1-l_1}}{\partial x_1^{s_1-l_1}}u^{\tau}_{x_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,1}(x_1))\right|\Biggr)+3\cdot\sum_{l_2=0}^{s_2}C_{s_2}^{l_2}\cdot\bigl|D^{(s_1,l_2,\ldots,s_n)}\Phi_2(\theta,x)\bigr|\times$$

$$\times\Biggl(\sum_{\substack{k=1,\\k\neq 2}}^{n}\bigl|b_k(\theta)\bigr|\cdot\left|\frac{\partial^{s_2-l_2}}{\partial x_2^{s_2-l_2}}u^{\tau}_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,2}(x_2))\right|+$$

$$+\sum_{\substack{k=1,\\k\neq 2}}^{n}\bigl|c_k(\theta)\bigr|\cdot\left|\frac{\partial^{s_2-l_2}}{\partial x_2^{s_2-l_2}}u^{\tau}_{x_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,2}(x_2))\right|\Biggr)+\cdots+3\cdot\sum_{l_n=0}^{s_n}C_{s_n}^{l_n}\cdot\bigl|D^{(s_1,\ldots,s_{n-1},l_n)}\Phi_n(\theta,x)\bigr|\times$$

$$\times\Biggl(\sum_{k=1}^{n-1}\bigl|b_k(\theta)\bigr|\cdot\left|\frac{\partial^{s_n-l_n}}{\partial x_n^{s_n-l_n}}u^{\tau}_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,n}(x_n))\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\bigl|c_k(\theta)\bigr|\cdot\left|\frac{\partial^{s_n-l_n}}{\partial x_n^{s_n-l_n}}u^{\tau}_{x_kx_k}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\overline{a}^{\,n}(x_n))\right|\Biggr)\Biggr]\,d\theta.$$

В силу ограниченности производных функций $\Phi_k(t,x)$, $k=0,1,\ldots,n$, справедливо неравенство

$$\sup_{0<\xi\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\bigl|D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^{\tau}(\xi,x)\bigr|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\bigl|D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x)\bigr|+$$

$$+C\cdot\int_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sup_{0<\theta\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\bigl|D^{(s_1,\ldots,s_n)}u^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x)\bigr|\,d\theta. \quad (2.29)$$

Складываем оценки (2.28), (2.29). Учитывая обозначения (2.23), (2.24) и оценку (2.27), в силу неубывания функции $U^{\tau}(t)$, получаем неравенство

$$U^{\tau}(t)\leq e^{C\tau}\cdot U(0)+C\cdot\int_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}U^{\tau}(\tfrac{\tau}{3})\,d\theta,\ t\in\bigl(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\bigr].$$

Справедлива оценка

$$U^{\tau}(t)\leq e^{C\tau}\cdot U(0)+C\cdot e^{C\tau}\cdot U(0)\cdot\tau,\ t\in\bigl(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\bigr]. \quad (2.30)$$

На третьем дробном шаге нулевого целого шага, $t\in\bigl(\frac{2\tau}{3},\tau\bigr]$, рассматривается уравнение (2.21) с начальным условием

$$u^{\tau}\bigm|_{t=\frac{2\tau}{3}}=u^{\tau}\left(\tfrac{2\tau}{3},x\right).$$

Интегрируя обе части уравнения (2.21) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до t, получим, что справедливо следующее неравенство:

$$\left|u^\tau(\xi,x)\right| \le \left|u^\tau\left(\tfrac{2\tau}{3},x\right)\right| + 3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\left|G(\theta,x)\right|d\theta,\ \tfrac{2\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{2\tau}{3},\tau\right]. \tag{2.31}$$

Берём от обеих частей неравенства (2.31) сначала $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$:

$$\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|u^\tau(\tfrac{2\tau}{3},x)\right| + 3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{0<\theta\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|G(\theta,x)\right|d\theta. \tag{2.32}$$

В силу условий (2.8), (2.9), (2.11) функция $G(t,x)$ и её производные нужных порядков непрерывны и ограничены в $\widetilde{G}_{[0,T]}$. Применяем операцию дифференцирования D^s, $s=(s_1,\dots,s_n)$, $s_r=0,1,\dots,6$, $r=1,\dots,n$, к уравнению (2.21), берём от полученного выражения сначала $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, получаем

$$\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^{(s_1,\dots,s_n)}u^\tau(\xi,x)\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^{(s_1,\dots,s_n)}u^\tau(\tfrac{2\tau}{3},x)\right| +$$
$$+3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{0<\theta\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^{(s_1,\dots,s_n)}G(\theta,x)\right|d\theta. \tag{2.33}$$

Складывая (2.32), (2.33), с учетом (2.23), (2.24), (2.30) и свойств определённого интеграла, получаем

$$U^\tau(t)\le e^{C\tau}\cdot U(0)+C\cdot e^{C\tau}\cdot U(0)\cdot\tau+C\tau,\ t\in(0,\tau].$$

Отсюда,

$$U^\tau(t)\le C\tau\left(U(0)\cdot e^{C\tau}+1\right)+U(0)\cdot e^{C\tau}+1-1=\left(U(0)\cdot e^{C\tau}+1\right)\cdot(C\tau+1)-1.$$

Следовательно, выполняется оценка

$$U^\tau(t)\le (U(0)+1)\cdot e^{C\tau}-1,\ \forall t\in(0,\tau]. \tag{2.34}$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t\in(\tau,2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$U^\tau(t)\le (U(\tau)+1)\cdot e^{C\tau}-1\le\left[\text{в силу (2.34)}\right]\le (U(0)+1)\cdot e^{C\tau}\cdot e^{C\tau}-1.$$

Таким образом, $U^\tau(t)\le (U(0)+1)\cdot e^{2C\tau}-1,\ \forall t\in(0,2\tau]$.

Проделав аналогичные рассуждения на втором целом временном шаге, получим оценку: $U^\tau(t) \le (U(0)+1)\cdot e^{3C\tau} - 1,\ \forall t \in (0, 3\tau]$.

Через конечное число шагов имеем

$$U^\tau(t) \le (U(0)+1)\cdot e^{CN\tau} - 1 = (U(0)+1)\cdot e^{CT} - 1 \le C,\ \forall t \in \Big((N-1)\tau, N\tau\Big].$$

Справедливо следующее соотношение:

$$U^\tau(t) \le (U(0)+1)\cdot e^{CT} - 1 \le C,\ \forall t \in [0, T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\Big|D^s u^\tau(t,x)\Big| \le C,\ s = (s_1, \ldots, s_n),\ s_r = 0, 1, \ldots, 6,\ r = \overline{1,n},\ (t,x) \in \widetilde{G}_{[0,T]}. \quad (2.35)$$

Из оценок (2.35) следует, что правые части уравнений (2.19)–(2.21) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений ограничены равномерно по τ.

$$\Big|u_t^\tau(t,x)\Big| \le C,\ (t,x) \in \widetilde{G}_{[0,T]}.$$

Применяя к уравнениям (2.19)–(2.21) операцию дифференцирования D^s, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_r = 0, 1, \ldots, 4$, $r = \overline{1,n}$, и учитывая оценки (2.35), получим

$$\Big|D^s u_t^\tau(t,x)\Big| \le C,\ s = (s_1, \ldots, s_n),\ s_r = 0, 1, \ldots, 4,\ r = \overline{1,n},\ (t,x) \in \widetilde{G}_{[0,T]}. \quad (2.36)$$

Оценки (2.35), (2.36) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности (т. **1.1**). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи (2.19)–(2.22) сходится вместе с производными $D^s u^\tau(t,x)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_r = 0, 1, \ldots, 4$, $r = 1, \ldots, n$, к функции $u(t,x) \in C^{0,4,\ldots,4}_{t,x_1,\ldots,x_n}\left(\widetilde{G}^M_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (т. **1.3**) является решением задачи (2.18), (2.3), причём $u(t,x) \in C^{1,4,\ldots,4}_{t,x_1,\ldots,x_n}\left(\widetilde{G}^M_{[0,T]}\right)$, где $M > 0$ — целая постоянная,

$$\widetilde{G}^M_{[0,T]} = \left\{(t,x)\ \middle|\ 0 \le t \le T,\ |x_i| \le M,\ i = 1, \ldots, n\right\},$$

$$C^{p,q_1,\ldots,q_n}_{t,x_1,\ldots,x_n}\left(\widetilde{G}^M_{[0,T]}\right) = \left\{u(t,x)\ \middle|\ \frac{\partial^m u}{\partial t^m}, \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_n} u}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_n^{s_n}} \in C\left(\widetilde{G}^M_{[0,T]}\right),\right.$$
$$\left. m = 0, 1, \ldots, p,\ s_r = 0, 1, \ldots, q_r,\ r = 1, \ldots, n\right\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной M решение $u(t,x)$ задачи (2.18), (2.3) принадлежит классу $C^{1,4,\dots,4}_{t,x_1,\dots,x_n}\left(\widetilde{G}_{[0,T]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}$:

$$\left|D^s u(t,x)\right| \le C,\ s=(s_1,\dots,s_n),\ s_r=0,1,\dots,4,\ r=1,\dots,n. \tag{2.37}$$

Из выражения (2.18), с учетом условий (2.8)–(2.11), (2.37), следует, что $u(t,x)$, $\lambda(t,x)$ принадлежат классу

$$\widetilde{Z}(T)=\left\{u(t,x),\lambda(t,x)\ \middle|\ u\in C^{1,4,\dots,4}_{t,x_1,\dots,x_n}\big(\widetilde{G}_{[0,T]}\big),\lambda(t,x)\in C^{0,2,\dots,2}_{t,x_1,\dots,x_n}\big(\widetilde{G}_{[0,T]}\big)\right\},$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,\dots,4,\\ r=1,\dots,n}}\left|D^s u(t,x)\right| + \sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\dots,n}}\left|D^s \lambda(t,x)\right| \le C,\ (t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}. \tag{2.38}$$

2.1.1.4 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x),\lambda(t,x)$, где $\lambda(t,x)$ определяется соотношением (2.14) и удовлетворяет условию (2.4), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x)$ — решение прямой задачи, то при подстановке $u(t,x)$ в (2.1) и (2.3), получим тождества.

Докажем выполнение условий переопределения (2.5). Будем последовательно полагать в (2.18) $x=\overline{a}^0$, $x=\overline{a}^1(x_1)$, $x=\overline{a}^2(x_2)$ и так далее до $x=\overline{a}^n(x_n)$. Учитывая условия согласования входных данных (2.6), (2.7), получим систему уравнений

$$u_t(t,\overline{a}^1(x_1))-\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x_1)=b_1(t)\cdot\left(u_{x_1x_1}(t,\overline{a}^1(x_1))-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi_1(t,x_1)\right)+$$
$$+c_1(t)\cdot\left(u_{x_1}(t,\overline{a}^1(x_1))-\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(t,x_1)\right)+c(t)\cdot\Big(u(t,\overline{a}^1(x_1))-\varphi_1(t,x_1)\Big)+$$
$$+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\Bigg(b_1(t)u_{x_1x_1}(t,\overline{a}^0)-b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi_1(t,\alpha_1)+$$
$$+c_1(t)u_{x_1}(t,\overline{a}^0)-c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(t,\alpha_1)\Bigg)+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\times$$
$$\times\left(\sum_{k=2}^{n}\left[b_k(t)u_{x_kx_k}(t,\overline{a}^0)-b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]+\right.$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left[c_k(t)u_{x_k}(t,\overline{a}^0)-c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]\Bigg),$$

$\ldots$

$$u_t(t,\overline{a}^n(x_n))-\frac{\partial}{\partial t}\varphi_n(t,x_n)=b_n(t)\cdot\left(u_{x_nx_n}(t,\overline{a}^n(x_n))-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi_n(t,x_n)\right)+$$

$$+c_n(t)\left(u_{x_n}(t,\overline{a}^n(x_n))-\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n(t,x_n)\right)+c(t)\Big(u(t,\overline{a}^n(x_n))-\varphi_1(t,x_n)\Big)+$$

$$+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\Bigg(b_n(t)u_{x_nx_n}(t,\overline{a}^0)-b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi_n(t,\alpha_n)+$$

$$+c_n(t)u_{x_n}(t,\overline{a}^0)-c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n(t,\alpha_n)\Bigg)+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{k=1}^{n-1}\left[b_k(t)u_{x_kx_k}(t,\overline{a}^0)-b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left[c_k(t)u_{x_k}(t,\overline{a}^0)-c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]\Bigg).$$

Имеет место следующая система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,x_1)=b_1(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,x_1)+c_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x_1)+c(t)\cdot\psi_1(t,x_1)+$$

$$+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\left(b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,\alpha_1)+c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,\alpha_1)\right)+$$

$$+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right),$$

$$\ldots \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(t,x_n)=b_n(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,x_n)+c_n(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,x_n)+c(t)\cdot\psi_n(t,x_n)+$$

$$+(n-1)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\left(b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,\alpha_n)+c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,\alpha_n)\right)+$$

$$+(n-2)\cdot\Phi_0(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right),$$

$$\psi_k(0,x_k)=0,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{2.40}$$

Здесь

$$\psi_k(t,x_k) = u(t,\overline{a}^k(x_k)) - \varphi_k(t,x_k),\ k=1,2,\ldots,n. \tag{2.41}$$

Пусть $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ — вектор решений задачи (2.39), (2.40). Вектор $\Psi_0 = (0,0,\ldots,0)$ является решением задачи (2.39), (2.40). Задача (2.39), (2.40) удовлетворяет условиям леммы **1.3**, в силу которой это решение единственно. Так как задача (2.39), (2.40) имеет только нулевое решение, то из обозначений (2.41) следует, что условия переопределения выполнены.

Следовательно, пара функций $u(t,x)$, $\lambda(t,x)$ является решением исходной обратной задачи (2.1)–(2.5).

2.1.1.5 Единственность решения задачи

Пусть выполняются условия (2.6)–(2.11), (2.38) и существуют два классических решения задачи (2.1)–(2.5): $\big\{u(t,x),\lambda(t,x)\big\}$ и $\big\{\widetilde{u}(t,x),\widetilde{\lambda}(t,x)\big\}$. Пара функций $\big\{u(t,x),\ \lambda(t,x)\big\}$ — решение, определяемое соотношением (2.14) и удовлетворяющее условию (2.4), а пара $\left\{\widetilde{u}(t,x),\widetilde{\lambda}(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{\lambda}_k(t,x_k)\right\}$ — некоторое другое решение задачи (2.1)–(2.5), удовлетворяющее условию (2.38). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$u_t(t,x) = L\left(u(t,x)\right) + f(t,x)\cdot\lambda(t,x),\quad u(0,x) = u_0(x),$$

$$\widetilde{u}_t(t,x) = L\left(\widetilde{u}(t,x)\right) + f(t,x)\cdot\widetilde{\lambda}(t,x),\quad \widetilde{u}(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,\overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(t,x_k),\ \widetilde{u}(t,\overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(t,x_k),\ k=\overline{1,n}.$$

Введём обозначения

$$w(t,x) = u(t,x) - \widetilde{u}(t,x),\ \gamma(t,x) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k(t,x_k) = \lambda(t,x) - \widetilde{\lambda}(t,x).$$

Пара функций $w(t,x),\gamma(t,x)$ является решением задачи Коши

$$w_t(t,x) = L\left(w(t,x)\right) + f(t,x)\cdot\gamma(t,x), \tag{2.42}$$

$$w(0,x) = 0,\ w(t,\overline{a}^k(x_k)) = 0,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{2.43}$$

Последовательно полагаем в уравнении (2.42) $x = \overline{a}^0$, $x = \overline{a}^1(x_1)$, $x = \overline{a}^2(x_2)$ и так далее до $x = \overline{a}^n(x_n)$. Используя (2.43), выражаем искомый коэффициент при функции $f(t,x)$:

$$\gamma(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(t,x_k)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} b_k(t)w_{x_kx_k}(t,\overline{a}^i(x_i))+\sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} c_k(t)w_{x_k}(t,\overline{a}^i(x_i))}{f(t,\overline{a}^i(x_i))}.$$

Подставляя последнее выражение в (2.42), получим

$$w_t=L\left(w(t,x)\right)+\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(t,x)\cdot\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} b_k(t)w_{x_kx_k}(t,\overline{a}^i(x_i))+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} c_k(t)w_{x_k}(t,\overline{a}^i(x_i))\right),\quad (2.44)$$

$$w(0,x)=0. \quad (2.45)$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на $[0,T]$ функции

$$V_s(t)=\sup_{(\xi,x)\in\widetilde{G}_{[0,t]}}\left|D^s w(\xi,x)\right|,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,2,\ r=1,\ldots,n.$$

Учитывая (2.8), (2.38), в силу принципа максимума для уравнения (2.44) получим справедливость неравенства

$$\left|w(\xi,x)\right|\leq C\cdot e^{C\xi}\cdot\xi\cdot\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\ldots,n}} V_s(t),\ 0<\xi\leq t,(t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}.$$

Отсюда, в силу неотрицательности функций $V_s(t)$ и свойств экспоненты, следует

$$V_0(t)\leq C\cdot t\cdot\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\ldots,n}} V_s(t),\ 0\leq t\leq T. \quad (2.46)$$

Применяя к уравнению (2.44) и начальному условию (2.45) операцию дифференцирования D^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_r=0,1,2$, $r=1,\ldots,n$, в силу принципа максимума для уравнений

$$D^{(s_1,\dots,s_n)}w_t(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) D^{(s_1,\dots,s_n)} w_{x_k x_k}(t,x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} c_k(t) D^{(s_1,\dots,s_n)} w_{x_k}(t,x) + c(t)\cdot D^{(s_1,\dots,s_n)} w(t,x) +$$
$$+ \sum_{l_1=0}^{s_1} C_{s_1}^{l_1}\cdot D^{(l_1,s_2,\dots,s_n)}\Phi_1(t,x)\cdot \frac{\partial^{s_1-l_1}}{\partial x_1^{s_1-l_1}} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k(t) w_{x_k x_k}(t,\overline{a}^1(x_1)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{n} c_k(t) w_{x_k}(t,\overline{a}^1(x_1)) \right) + \dots + \sum_{l_n=0}^{s_n} C_{s_n}^{l_n}\cdot D^{(s_1,\dots,s_{n-1},l_n)}\Phi_n(t,x) \times$$
$$\times \frac{\partial^{s_n-l_n}}{\partial x_n^{s_n-l_n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k(t) w_{x_k x_k}(t,\overline{a}^n(x_n)) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k(t) w_{x_k}(t,\overline{a}^n(x_n)) \right),$$

получим аналогичные оценки

$$V_s(t) \le C\cdot t\cdot \sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\dots,n}} V_s(t),\ \ 0\le t\le T. \tag{2.47}$$

Сложим (2.46) и (2.47), имеем

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\dots,n}} V_s(t) \le C\cdot t\cdot \sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\dots,n}} V_s(t),\ 0\le t\le T.$$

Отсюда следует, что при $t\in[0,\xi]$, где $\xi<\frac{1}{C}$, выполняется

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\dots,n}} V_s(t) = 0.$$

Значит, $w(t,x) = 0$ при $(t,x)\in \widetilde{G}_{[0,\xi]}$. Повторяя рассуждения для $t\in[\xi,2\xi]$, получим, что $w(t,x)=0$ при $(t,x)\in\widetilde{G}_{[0,2\xi]}$. Через конечное число шагов докажем, что $w(t,x)\equiv 0$ в $\widetilde{G}_{[0,T]}$. То есть $u(t,x)=\widetilde{u}(t,x)$ во всей полосе $\widetilde{G}_{[0,T]}$.

Из (2.42) и (2.43) следует выполнение соотношения

$$f(t,x)\cdot\gamma(t,x) = 0. \tag{2.48}$$

Рассмотрим (2.48) при $x=\overline{a}^0$, $x=\overline{a}^1(x_1)$, $x=\overline{a}^2(x_2)$, … , $x=\overline{a}^n(x_n)$.

$$
\begin{aligned}
&f(t,\overline{a}^0)\cdot\big(\gamma_1(t,\alpha_1)+\ldots+\gamma_n(t,\alpha_n)\big)=0,\\
&f(t,\overline{a}^1(x_1))\cdot\big(\gamma_1(t,x_1)+\gamma_2(t,\alpha_2)+\ldots+\gamma_n(t,\alpha_n)\big)=0,\\
&\ldots\\
&f(t,\overline{a}^n(x_n))\cdot\big(\gamma_1(t,\alpha_1)+\ldots+\gamma_{n-1}(t,\alpha_{n-1})+\gamma_n(t,x_n)\big)=0.
\end{aligned}
$$

В силу (2.8) выполняются следующие соотношения:

$$
\gamma_1(t,\alpha_1)+\gamma_2(t,\alpha_2)+\ldots+\gamma_n(t,\alpha_n)=0, \tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1(t,x_1)+\gamma_2(t,\alpha_2)+\ldots+\gamma_n(t,\alpha_n)=0\\
&\gamma_1(t,\alpha_1)+\gamma_2(t,x_2)+\ldots+\gamma_n(t,\alpha_n)=0,\\
&\ldots\\
&\gamma_1(t,\alpha_1)+\ldots+\gamma_{n-1}(t,\alpha_{n-1})+\gamma_n(t,x_n)=0.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Сложим равенства (2.50): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(t,x_k)+(n-1)\cdot\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(t,\alpha_k)=0$. Отсюда, в силу уравнения (2.49), $\gamma(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k(t,x_k)=0$. То есть $\lambda(t,x)=\widetilde{\lambda}(t,x)$ в $G_{[0,T]}$.

Таким образом, доказана единственность решения $u(t,x)$, $\lambda(t,x)$ обратной задачи (2.1)–(2.5) в классе $\widetilde{Z}(T)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 ([97]). *Пусть выполняются условия* (2.6)–(2.11). *Тогда в классе* $\widetilde{Z}(T)$ *существует единственное решение* $u(t,x)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (2.1)–(2.5), *удовлетворяющее соотношению* (2.38).

2.1.2 Двумерный случай

Рассмотрим частный случай задачи (2.1)–(2.5), а именно, задачу идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении с данными Коши. Неизвестный коэффициент в задаче зависит, как и в задаче (2.1)–(2.5), от всех переменных, входящих в уравнение, и представим в виде суммы двух функций.

2.1.2.1 Постановка задачи

В полосе $G_{[0,T]}=\big\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\big\}$ рассматривается задача

Коши для параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \tag{2.51}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{2.52}$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \tag{2.53}$$

Пусть $L\left(u(t,x,z)\right) = u_{xx}(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z)$. Это выражение получается из соотношения (2.2) при $n=2$, $b_1(t)=b_2(t)=1$, $c_1(t)=c_2(t)=c(t)=0$.

Заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x),\ \ u(t,\beta,z) = \psi(t,z),\ \ \alpha,\beta = const. \tag{2.54}$$

Функции $f(t,x,z), u_0(x,z), \varphi(t,x), \psi(t,z)$ — вещественные, конечнозначные, заданные в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно. Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x),\ \ u_0(\beta,z) = \psi(0,z),\ \ \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \tag{2.55}$$

и условия

$$\left|f(t,\beta,z)\right| \geq \delta_1 > 0,\ \left|f(t,x,\alpha)\right| \geq \delta_2 > 0,\ \ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ \ \delta_1,\delta_2 = const. \tag{2.56}$$

Относительно входных данных $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (2.57), и удовлетворяют ему при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \leq C,\ \ l_1,l_2 = 0,1,\ \ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6. \tag{2.57}$$

Аналогично задаче (2.1)–(2.5), с помощью условий переопределения (2.54) получаем выражение на неизвестный коэффициент при функции $f(t,x,z)$ в следующем виде:

$$\lambda(t,x,z) = g(t,x,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}, \tag{2.58}$$

где $g(t,x,z)$ — известная функция, имеющая вид

$$g(t,x,z) = \frac{\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)}{f(t,\beta,z)} + \frac{\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)}{f(t,x,\alpha)} - \\ - \frac{\psi_t(t,\alpha) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Подставляя выражение (2.58) в уравнение (2.51), переходим к прямой задаче для уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + \Phi_1(t,x,z)\cdot u_{xx}(t,\beta,z) + \Phi_2(t,x,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + \\ + G(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]},$$

с начальным условием (2.52).

Здесь:

$$\begin{aligned} &G(t,x,z) = f(t,x,z)\cdot g(t,x,z), \\ &\Phi_1(t,x,z) = -\frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)},\ \Phi_2(t,x,z) = -\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Из теоремы **2.1** следует, что существует единственное решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ задачи (2.51)–(2.54) в классе

$$Z(T) = \Big\{u(t,x,z), \lambda(t,x,z)\ \Big|\ u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)\Big\},$$

где

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right) = \Big\{u(t,x,z)\ \Big|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G_{[0,T]}\right), \\ k = 0,1,\ldots,l, k_1 = 0,1,\ldots,l_1, k_2 = 0,1,\ldots,l_2\Big\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right| \le C,\ (t,x,z) \in G_{[0,T]}. \tag{2.60}$$

Указанный результат опубликован в работе [80]. Решающий вклад в доказательство теорем существования и единственности решения задачи (2.51)–(2.54) принадлежит И. В. Фроленкову.

2.1.2.2 Непрерывная зависимость решения от входных данных

Докажем, что решение задачи (2.51)–(2.54) непрерывно зависит от входных данных, то есть что малые изменения во входных данных влекут за собой малые изменения в решении.

Рассмотрим в $G_{[0,T]}$ две задачи Коши, удовлетворяющие теореме **2.1**:

$$u_t^i = u_{xx}^i + u_{zz}^i + f^i(t,x,z)\cdot\lambda^i(t,x,z),$$

$$\lambda^i(t,x,z) = \lambda_1^i(t,x) + \lambda_2^i(t,z),$$

$$u^i(0,x,z) = u_0^i(x,z),$$

$$u^i(t,x,\alpha) = \varphi^i(t,x),\ u^i(t,\beta,z) = \psi^i(t,z),$$

где $i = 1,2;\ \alpha,\beta$ — некоторые фиксированные постоянные.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &U = u^1 - u^2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1^1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^1 - \lambda_2^2,\\ &F = f^1 - f^2, \quad U_0 = u_0^1 - u_0^2, \quad \Phi = \varphi^1 - \varphi^2, \quad \Psi = \psi^1 - \psi^2. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Вычтем из задачи при i=1 задачу при i=2. Согласно обозначений (2.61), получим задачу

$$U_t = U_{xx} + U_{zz} + F\cdot\lambda^1 + f^2\cdot\Lambda, \tag{2.62}$$

$$U(0,x,z) = U_0(x,z), \tag{2.63}$$

$$U(t,x,\alpha) = \Phi(t,x),\ U(t,\beta,z) = \Psi(t,z). \tag{2.64}$$

Полагая в уравнении (2.62) $x = \beta, z = \alpha$ и используя (2.64), получаем выражение для неизвестного коэффициента в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Lambda(t,x,z) = &-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \\ &- \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &- \frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Подставляя выражение (2.65) в уравнение (2.62), получаем задачу Коши для уравнения

$$U_t(t,x,z) = U_{xx}(t,x,z) + U_{zz}(t,x,z) + F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z) +$$

$$+ f^2(t,x,z)\cdot\Bigg(-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)}+\frac{\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)}-$$
$$-\frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)}+\frac{\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)}-$$
$$-\frac{\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}\Bigg), \quad (2.66)$$

с начальным условием (2.63).

Воспользуемся методом слабой аппроксимации ([12], [87]). Расщепим уравнение (2.66) на три дробных шага и линеаризуем сдвигом по времени на $\frac{\tau}{3}$ в членах, содержащих следы неизвестных функций

$$U_t^\tau = 3\cdot\left(U_{xx}^\tau + U_{zz}^\tau\right),\ n\tau < t \le \left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \quad (2.67)$$

$$U_t^\tau = -3\cdot A_1(t,x,z)\cdot U_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right) - 3\cdot A_2(t,x,z)\cdot U_{zz}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right),$$
$$\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \quad (2.68)$$

$$U_t^\tau = 3\cdot F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z) + 3\cdot K(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \quad (2.69)$$

$$U^\tau(0,x,z) = U_0(x,z), \quad (2.70)$$

$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T,$$

здесь функции $K(t,x,z)$, $A_i(t,x,z)$, $i = 1,2,3$, известны и заданы следующими соотношениями:

$$A_1(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,z)},\ A_2(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,x,\alpha)},\ A_3(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,\alpha)},$$
$$K(t,x,z) = A_1(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)\Big)+$$
$$+A_2(t,x,z)\cdot\Big(\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)\Big)-$$
$$-A_3(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big).$$

Как и выше, далее под n-м целым шагом будем понимать полуинтервал $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$, а под j-м дробным шагом n-го целого шага — полуинтервал $\Big(\left(n+\frac{j-1}{3}\right)\tau, \left(n+\frac{j}{3}\right)\tau\Big]$, $j = 1,2,3$.

Рассмотрим нулевой целый шаг, $n = 0$. На первом дробном шаге, при $t \in \left(0,\frac{\tau}{3}\right]$, рассматривается уравнение (2.67) с начальным условием (2.70).

По теореме принципа максимума для задачи Коши (т. **1.2**) получаем

$$\left|U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\le t, t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right]. \qquad (2.71)$$

Дифференцируя уравнение (2.67) по x и по z от одного до четырёх раз, получаем

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right],$$

$$k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \qquad (2.72)$$

Берём от неравенств (2.71), (2.72) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$. Суммируя, приходим к неравенству

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right]. \qquad (2.73)$$

На втором дробном шаге, $t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right]$, рассмотрим уравнение (2.68):

$$U_t^\tau(t,x,z) = -3\cdot A_1(t,x,z)\cdot U_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right) - 3\cdot A_2(t,x,z)\cdot U_{zz}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right).$$

Интегрируя (2.68) по временной переменной, приходим к следующему соотношению:

$$U^\tau(\xi,x,z) = U^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x,z\right) - 3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} A_1(\theta,x,z)\cdot U_{xx}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\,d\theta-$$

$$-3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} A_2(\theta,x,z)\cdot U_{zz}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right)\,d\theta,\ \tfrac{\tau}{3}<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right].$$

В силу условий (2.56), (2.57) и обозначений, функции $A_1(t,x,z)$, $A_2(t,x,z)$ и их производные по x и по z до четвёртого порядка включительно непрерывны и ограничены. Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x,z\right)\right| + C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|U_{xx}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|U^{\tau}_{zz}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right)\right|d\theta,\ \tfrac{\tau}{3}<\xi\leq t, t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right]. \tag{2.74}$$

Дифференцируем уравнение (2.68) по x и по z от одного до четырёх раз, затем интегрируем полученное соотношение по временной переменной. В силу ограниченности производных функций $A_1(t,x,z)$, $A_2(t,x,z)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leq\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}\left(\tfrac{\tau}{3},x,z\right)\right|+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{3}<\xi\leq t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right],\ k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \tag{2.75}$$

Берём от неравенств (2.74), (2.75) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{3}<\xi\leq t}$. Суммируя, приходим к оценке

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{3}<\xi\leq t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leq\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\sup_{\frac{\tau}{3}<\xi\leq t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\sup_{\frac{\tau}{3}<\xi\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta. \tag{2.76}$$

Рассмотрим третий дробный шаг, $t\in\left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$. Уравнение (2.69) перепишем в следующем виде:

$$U^{\tau}_t(t,x,z)=3\cdot F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z)+3\cdot A_1(t,x,z)\cdot\Big[\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-$$

$$-F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)\Big]+3\cdot A_2(t,x,z)\cdot\Big[\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-$$

$$-F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)\Big]-3\cdot A_3(t,x,z)\cdot\Big[\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-$$

$$-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big]. \tag{2.77}$$

Проинтегрируем уравнение (2.77) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, $0<\xi\leq t$, $t\in\left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$. Справедлива следующая оценка:

$$\Big|U^{\tau}(\xi,x,z)\Big|\leq \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|U^{\tau}\left(\tfrac{2\tau}{3},x,z\right)\Big|+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|F(\theta,x,z)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Psi_t(\theta,z)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Psi_{zz}(\theta,z)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|F(\theta,\beta,z)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_t(\theta,x)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_{xx}(\theta,x)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|F(\theta,x,\alpha)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Psi_t(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|F(\theta,\beta,\alpha)\Big|\,d\theta,\ t\in\left(\tfrac{2\tau}{3},\tau\right],\ \tfrac{2\tau}{3}<\xi\leq t. \quad (2.78)$$

Продифференцируем уравнение (2.77) по x и по z от одного до четырёх раз. В силу теоремы **2.1** функция $\lambda^1(t,x,z)$ и её производные по x и по z до четвёртого порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,T]}$. Проинтегрируем полученное выражение по временной переменной. Справедливы следующие оценки при $0<\xi\leq t,\ t\in\left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leq\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\tfrac{2\tau}{3},x,z)\right|+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}F(\theta,x,z)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(\theta,z)\right|d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(\theta,z)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(\theta,\beta,z)\right|d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_t(\theta,x)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(\theta,x)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(\theta,x,\alpha)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Psi_t(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\Big|\,d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|F(\theta,\beta,\alpha)\Big|\,d\theta,\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \quad (2.79)$$

В неравенствах (2.78) и (2.79) возьмём от обеих частей сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}$. Сложив полученные оценки, имеем

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}\left(\tfrac{2\tau}{3},x,z\right)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}F(\theta,x,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(\theta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(\theta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(\theta,\beta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_t(\theta,x)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(\theta,x)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(\theta,x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+ C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\Big|\Psi_t(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta + C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\Big|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\Big|\,d\theta +$$

$$+ C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\Big|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta + C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\Big|F(\theta,\beta,\alpha)\Big|\,d\theta,\ t\in\left(\tfrac{2\tau}{3},\tau\right].$$

Учитывая оценку (2.76) на предыдущем шаге, для всех $t\in\left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$ получим справедливое неравенство

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right| + C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\Bigg(||F||_4+||\Psi||_5+||\Phi||_6\Bigg)\,d\theta +$$

$$+ C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{3}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\right)d\theta,\ t\in(\tfrac{2\tau}{3};\tau]. \quad (2.80)$$

Здесь и далее имеют место следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
||U(t,x,z)||_1 &= \sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U(\xi,x,z)\right|,\\
||\Lambda(t,x,z)||_2 &= \sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Lambda(\xi,x,z)\right|,\\
||U_0(x,z)||_3 &= \sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\\
||F(t,x,z)||_4 &= \sum_{k_1,k_2=0}^{6}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}F(\xi,x,z)\right|,\\
||\Psi(t,z)||_5 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial z^{j}}\Psi(\xi,z)\right|,\\
||\Phi(t,x)||_6 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial x^{j}}\Phi(\xi,x)\right|.
\end{aligned} \quad (2.81)$$

Функции $U\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, $\Lambda\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, $U_0\in C^{6,6}_{x,z}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $F\in C^{0,6,6}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, $\Psi\in C^{1,6}_{t,z}\left([0,T]\times\mathbb{R}\right)$, $\Phi\in C^{1,6}_{t,x}\left([0,T]\times\mathbb{R}\right)$ ограничены в $G_{[0,T]}$

вместе с производными, входящими в (2.81). Выражения (2.81) являются нормами в соответствующих пространствах гладких ограниченных функций.

Из оценок (2.73), (2.76), (2.80) следует

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\leq t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \leq \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z) \right| +$$

$$+ C\cdot \int_0^\tau \left(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 + \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\leq t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \right) d\theta,$$

$$t \in (0;\tau].$$

Применим лемму Гроноулла (л. **1.1**).

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\leq t\leq\tau} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \leq \Big(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 \Big) \cdot \Big(e^{C\tau} - 1 \Big) +$$

$$+ e^{C\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z) \right|,\ 0 < t \leq \tau. \quad (2.82)$$

На первом целом шаге, при $t \in (\tau; 2\tau]$ имеем

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{\tau<\xi\leq t\leq 2\tau} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \leq \Big(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 \Big) \cdot \Big(e^{C\tau} - 1 \Big) +$$

$$+ e^{C\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\leq t\leq\tau} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \leq \Big[\text{учитывая (2.82)}\Big] \leq$$

$$\leq \Big(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 \Big) \cdot \Big(e^{2C\tau} - 1 \Big) + e^{2C\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z) \right|.$$

Повторяя рассуждения конечное число раз, при $t \in \Big((N-1)\tau; N\tau\Big]$ получим следующее соотношение:

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(N-1)\tau<\xi\leq t\leq T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) \right| \leq$$

$$\leq e^{NC\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z) \right| + \Big(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 \Big) \cdot \Big(e^{NC\tau} - 1 \Big) =$$

$$= e^{CT} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z) \right| + \Big(||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6 \Big) \cdot \Big(e^{CT} - 1 \Big) \leq$$

$$\leq C\cdot\left(\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+||F||_4+||\Psi||_5+||\Phi||_6\right).$$

Таким образом, согласно обозначений (2.81), получаем, что имеют место равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}U^{\tau}(t,x,z)\right|\leq C\cdot\Big(||U_0||_3+||F||_4+||\Psi||_5+||\Phi||_6\Big),$$

$$k_1,k_2=0,1,\ldots,4,(t,x,z)\in G_{[0,T]}. \quad (2.83)$$

Из оценок (2.83) следует, что правые части уравнений (2.67)–(2.69) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений ограничены равномерно по τ.

$$\left|U^{\tau}_t(t,x,z)\right|\leq C\cdot\Big(||U_0||_3+||F||_4+||\Psi||_5+||\Phi||_6\Big),\ (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Дифференцируя уравнения (2.67)–(2.69) по x и z и учитывая (2.83), получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}U^{\tau}_t(t,x,z)\right|\leq C\cdot\Big(||U_0||_3+||F||_4+||\Psi||_5+||\Phi||_6\Big),\ k_1,k_2=0,1,2. \quad (2.84)$$

Оценки (2.83), (2.84) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности (т. **1.1**). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $U^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $U^{\tau}(t,x,z)$ решений задачи (2.67)–(2.70) сходится вместе с производными по x и по z до второго порядка включительно к функции $U(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (т. **1.3**) является решением задачи (2.66), (2.63), причём $U(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,T]}\right)$, где $M>0$ — целая постоянная,

$$G^M_{[0,T]}=\left\{(t,x,z)\ \middle|\ 0\leq t\leq T,\ |x|\leq M,\ |z|\leq M\right\},$$

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,T]}\right)=\left\{U(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k U}{\partial t^k},\frac{\partial^{k_1+k_2}U}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\in C\left(G^M_{[0,T]}\right),\right.$$
$$\left.k=0,1,\ldots,l,k_1=0,1,\ldots,l_1,k_2=0,1,\ldots,l_2\right\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной M решение $U(t,x,z)$ задачи (2.66), (2.63) принадлежит классу $C^{1,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}U(t,x,z)\right| \le C \cdot \Big(||U_0||_3 + ||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6\Big),\ k_1, k_2 = 0, 1, 2.$$

Из (2.61) следует, что для решения $U(t,x,z)$ выполняются условия переопределения (2.64). Следовательно, пара функций $\Big\{U(t,x,z), \Lambda(t,x,z)\Big\}$ является решением задачи (2.62)–(2.64).

Для всех $t \in (0,T]$ справедливо следующее соотношение:

$$||U||_1 \le C \cdot \Big(||U_0||_3 + ||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6\Big).$$

Из (2.57) и (2.65) следует оценка

$$||U||_1 + ||\Lambda||_2 \le C \cdot \Big(||U_0||_3 + ||F||_4 + ||\Psi||_5 + ||\Phi||_6\Big),$$

то есть, согласно (2.61),

$$\begin{aligned} &||u^1 - u^2||_1 + ||\lambda^1 - \lambda^2||_2 \le \\ &\qquad \le C \cdot \Big(||u_0^1 - u_0^2||_3 + ||f^1 - f^2||_4 + ||\psi^1 - \psi^2||_5 + ||\varphi^1 - \varphi^2||_6\Big). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Теорема 2.2 ([80])**.** *Пусть выполняются условия* (2.55)–(2.57), (2.60)*. Тогда решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *задачи* (2.51)–(2.54) *непрерывно зависит от входных данных, и в* $G_{[0,T]}$ *выполняется оценка* (2.85)*.*

Замечание 2.1. *Из теорем **2.1**, **2.2** следует, что задача* (2.51)–(2.54) *является корректной по Адамару (см. [24], [29]).*

2.1.2.3 Поведение решения при $\mathbf{t} \to +\infty$

Рассмотрим в $G_{[0,T]}$ задачу Коши для уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + a(t)u + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \tag{2.86}$$

с начальным условием (2.52).

Наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция $\lambda(t,x,z)$, представимая в виде (2.53).

Считаем, что $a(t)$ — вещественная, конечнозначная функция, заданная в $[0,T]$. Для функции $u(t,x,z)$ заданы условия переопределения (2.54). Выполнены условия (2.55) – (2.57) на входные данные.

Задача (2.86), (2.52)–(2.54) является частным случаем задачи (2.1)–(2.5) (при $n = 2$, $b_1(t) = b_2(t) = c_1(t) = c_2(t) = 1$, $c(t) = a(t)$) и поэтому, в силу теоремы **2.1** её решение существует, единственно в классе

$$Z(T) = \Big\{u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\Big|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)\Big\}$$

и удовлетворяет соотношению (2.38).

Используя условия переопределения (2.54), из уравнения (2.86) получаем выражение на неизвестный коэффициент

$$\lambda(t,x,z) = p(t,x,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z) + u_x(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha) + u_z(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}, \quad (2.87)$$

где $p(t,x,z)$ — известная функция, имеющая следующий вид:

$$\begin{aligned} p(t,x,z) = {} & \frac{\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z) - \psi_z(t,z) - a(t)\psi(t,z)}{f(t,\beta,z)} + \\ & + \frac{\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x) - \varphi_x(t,x) - a(t)\varphi(t,x)}{f(t,x,\alpha)} - \\ & - \frac{\psi_t(t,\alpha) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha) - \varphi_x(t,\beta) - \psi_z(t,\alpha) - a(t)\psi(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Подставляя (2.87) в (2.86), переходим к прямой задаче для уравнения

$$\begin{aligned} u_t = {} & u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + a(t)u + \Phi_1(t,x,z) \cdot \Big(u_{xx}(t,\beta,z) + u_x(t,\beta,z)\Big) + \\ & + \Phi_2(t,x,z) \cdot \Big(u_{zz}(t,x,\alpha) + u_z(t,x,\alpha)\Big) + P(t,x,z), \ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

с начальным условием (2.52), где $P(t,x,z) = f(t,x,z) \cdot p(t,x,z)$, а функции $p(t,x,z)$, $\Phi_1(t,x,z)$, $\Phi_2(t,x,z)$ заданы, соответственно, в (2.88) и (2.59).

Будем исследовать поведение решения задачи (2.86), (2.52)–(2.54) в области $G_{[0,+\infty)}$ при стремлении временной переменной к бесконечности.

Считаем, что в $G_{[0,+\infty)}$ выполнены условия (2.54)–(2.57). Покажем, что в $G_{[0,+\infty)}$ решение задачи (2.89), (2.52) ограничено константой, которая не зависит от T. Пусть имеют место соотношения

$$a(t) \le -A < 0, \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} A + B < 1, \text{ где } B = {} & \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{\theta\in[0;+\infty)} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Phi_1(\theta,x,z)\right| + \\ & + \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{\theta\in[0;+\infty)} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Phi_2(\theta,x,z)\right|. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Для исследования будем использовать метод слабой аппроксимации (см. [12], [87]). Расщепим уравнение (2.89) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в следах неизвестных функций. Получим задачу

$$u_t^\tau = 3\cdot\left(u_{xx}^\tau + u_{zz}^\tau + u_x^\tau + u_z^\tau + a(t)u^\tau\right),\ n\tau < t \le \left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.92}$$

$$u_t^\tau = 3\cdot\Big(u_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(t,x,z) + u_x^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(t,x,z) + $$
$$+ u_{zz}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right)\cdot\Phi_2(t,x,z) + u_z^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha\right)\cdot\Phi_2(t,x,z)\Big),$$
$$\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \tag{2.93}$$

$$u_t^\tau = 3\cdot P(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{2.94}$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{2.95}$$

$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Рассмотрим нулевой целый временной шаг. На первом дробном шаге, при $t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right]$ исследуем уравнение (2.92) с начальным условием (2.95).

Сделаем замену: $u^\tau(t,x,z) = e^{-3At}v^\tau(t,x,z)$. Получим следующую задачу:

$$v_t^\tau = 3\cdot\left(v_{xx}^\tau + v_{zz}^\tau + v_x^\tau + v_z^\tau\right) + 3\left(a(t)+A\right)v^\tau, \tag{2.96}$$

$$v^\tau(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2.97}$$

По теореме принципа максимума (т. **1.2**),

$$\left|v^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right].$$

Дифференцируя (2.96) и (2.97) по x и z 1 и 2 раза, в силу принципа максимума получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}v^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$
$$0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right],\ k_1,k_2 = 0,1,2.$$

Берём от обеих частей этого неравенства $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем суммируем

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}v^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$
$$k_1,k_2 = 0,1,2.$$

Произведём обратную замену: $v^\tau(t,x,z) = e^{3At}u^\tau(t,x,z)$. Имеет место следующая оценка:

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi,x,z) \right| \le e^{-3A\xi} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right|,$$
$$k_1,k_2 = 0,1,2.$$

Справедливы соотношения

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{\tau}{3},x,z) \right| \le e^{-A\tau} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right|, \tag{2.98}$$

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{\tau}{3},x,z) \right| \le e^{-A\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right|,$$
$$k_1,k_2 = 0,1,2.$$

На втором дробном шаге рассмотрим уравнение (2.93). Интегрируя его по временной переменной и учитывая (2.98), получим

$$\begin{aligned}
\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \le e^{-A\tau} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right| + \\
+ 3 \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{t} \Bigg(\left|u^\tau_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z\right)\right| \cdot \left|\Phi_1(\theta,x,z)\right| + \left|u^\tau_{x}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z\right)\right| \cdot \left|\Phi_1(\theta,x,z)\right| + \\
+ \left|u^\tau_{zz}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha\right)\right| \cdot \left|\Phi_2(\theta,x,z)\right| + \left|u^\tau_{z}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha\right)\right| \cdot \left|\Phi_2(\theta,x,z)\right| \Bigg) \, d\theta.
\end{aligned}$$

Продифференцируем (2.93) по x и z 1 и 2 раза, а затем проинтегрируем полученное соотношение по временной переменной. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi,x,z) \right| \le \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{\tau}{3},x,z) \right| + \\
+ 3 \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} \Bigg(\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \left| \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} \Phi_1(\theta,x,z) \right| \cdot \left| \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) \right| + \\
+ \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \left| \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} \Phi_1(\theta,x,z) \right| \cdot \left| \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} u^\tau_{x}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) \right| +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \left| \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} \Phi_2(\theta, x, z) \right| \cdot \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} u_{zz}^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha) \right| +$$
$$+\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \left| \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} \Phi_2(\theta, x, z) \right| \cdot \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} u_{z}^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha) \right| \Bigg) \, d\theta,$$
$$k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right].$$

Учитывая обозначение B из (2.91) и соотношение (2.98), имеем

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z) \right| \le e^{-A\tau} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right| +$$
$$+ 3B \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, z) \right| d\theta, \ k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right]. \tag{2.99}$$

Берём $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$ от обеих частей неравенства (2.99) и суммируем

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z) \right| \le e^{-A\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right| +$$
$$+ 3B \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, z) \right| d\theta, \ k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right].$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{2\tau}{3}, x, z) \right| \le e^{-A\tau} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right| +$$
$$+ 3B \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, z) \right| d\theta, \ k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right]. \tag{2.100}$$

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{2\tau}{3}, x, z) \right| \le e^{-A\tau} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right| +$$
$$+ 3B \cdot \int_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, z) \right| d\theta, \ k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right].$$

На третьем дробном шаге, при $t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]$, рассмотрим уравнение (2.94). Проинтегрируем обе части уравнения по временной переменной. Получим

$$\left|u^\tau(\xi, x, z)\right| \le \left|u^\tau\left(\tfrac{2\tau}{3}, x, z\right)\right| + 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \left|P(\theta, x, z)\right| d\theta,\ \tfrac{2\tau}{3} < \xi \le t,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right].$$

Продифференцируем (2.94) по x и z от 1 до 2 раз, затем проинтегрируем полученное соотношение. Справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z)\right| \le \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau\left(\tfrac{2\tau}{3}, x, z\right)\right| +$$

$$+ 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} P(\theta, x, z)\right| d\theta,\ k_1, k_2 = 0, 1, 2,\ \tfrac{2\tau}{3} < \xi \le t,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right].$$

Учитывая (2.100), взяв $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$ и просуммировав, получим оценку

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z)\right| \le e^{-A\tau} \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z)\right| +$$

$$+ 3B \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, z\right)\right| d\theta + 3 \cdot C_1 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} d\theta,$$

где $C_1 = \sum\limits_{k_1,k_2=0}^{2} \sup\limits_{\theta\in[0;+\infty)} \sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\dfrac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} P(\theta, x, z)\right|$.

Отсюда следует, что $U(t) \le e^{-A\tau} \cdot U(0) + B \cdot U(0)\tau + C_1\tau$.

Через конечное число шагов, для $t \in ((N-1)\tau, N\tau]$, при выполнении условия $0 < A + B < 1$ из (2.91), получим

$$U(t) \le U(0) \cdot \left(e^{-A\tau} + B\tau\right)^N + C_1\tau \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(e^{-A\tau} + B\tau\right)^{n-1} \le$$

$$\le (A \ge 1,\ 0 < \tau < 1) \le U(0) \cdot (A + B)^N + \frac{C_1}{1 - (A + B)} = D.$$

То есть, при $t \in (0, T]$ выполняется соотношение

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z)\right| \le D.$$

Далее снова рассмотрим задачу (2.92)–(2.95). Будем оценивать $|u^\tau|$. Рассматриваем n-й целый временной шаг. На первом дробном шаге n-го целого шага исследуем уравнение (2.92). Справедливо соотношение

$$\Big|u^\tau(\xi,x,z)\Big| \leq e^{-3A\xi}\cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|u^\tau(n\tau,x,z)\Big| \leq e^{-3A\xi}\times$$
$$\times \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(n\tau,x,z)\right| \leq e^{-3A\xi}\cdot D,\ n\tau < t \leq \left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau.$$

Отсюда следует

$$\Big|u^\tau\left(\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau,x,z\right)\Big| \leq e^{-3A\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau}\cdot D.$$

На втором дробном шаге рассматриваем уравнение (2.93). Имеет место оценка

$$\Big|u^\tau\left(\left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau,x,z\right)\Big| \leq e^{-3A\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau}\cdot D+$$
$$+3\cdot D\cdot \int\limits_{\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau}^{\left(n+\frac{2}{3}\right)\tau}\left(\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_1(\theta,x,z)\Big| + \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_2(\theta,x,z)\Big|\right)d\theta.$$

На третьем дробном шаге имеем уравнение (2.94). Справедливо неравенство

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leq D\cdot e^{-3A\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau} + 3\cdot \int\limits_{\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau}^{\xi}\left[D\cdot\left(\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_1(\theta,x,z)\Big|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_2(\theta,x,z)\Big|\right)+\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|P(\theta,x,z)\Big|\right]d\theta. \quad (2.101)$$

При $n=N-1$, $t\in\big((N-1)\tau,N\tau\big]$ выполняется

$$|u^\tau(t,x,z)| \leq D\cdot e^{-3A\left(N-1+\frac{1}{3}\right)\tau} + 3\cdot \int\limits_{\left(N-1+\frac{1}{3}\right)\tau}^{N\tau}\left[D\cdot\left(\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_1(\theta,x,z)\Big|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|\Phi_2(\theta,x,z)\Big|\right)+\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|P(\theta,x,z)\Big|\right]d\theta.$$

Отсюда,

$$|u^\tau(t,x,z)| \le D + 3\cdot \int\limits_0^T \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Bigg(D\cdot|f(\theta,x,z)|\cdot\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right) +$$

$$+ \frac{|f(\theta,x,z)|}{\delta_1}\cdot\Big(|\psi_t(\theta,z)| + |\psi_{zz}(\theta,z)| + |\psi_z(\theta,z)| - A|\psi(\theta,z)| + |\psi_t(\theta,\alpha)| +$$

$$+ |\varphi_{xx}(\theta,\beta)| + |\psi_{zz}(\theta,\alpha)| + |\varphi_x(\theta,\beta)| + |\psi_z(\theta,\alpha)| - A|\psi(\theta,\alpha)|\Big) +$$

$$+ \frac{|f(\theta,x,z)|}{\delta_2}\cdot\Big(|\varphi_t(\theta,x)| + |\varphi_{xx}(\theta,x)| + |\varphi_x(\theta,x)| - A|\varphi(\theta,x)|\Big)\Bigg)\,d\theta.$$

Таким образом, в $G_{[0,+\infty)}$ имеет место

$$|u^\tau(t,x,z)| \le D + 3\cdot \int\limits_0^{+\infty} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Bigg(D\cdot|f(\theta,x,z)|\cdot\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right) +$$

$$+ |f(\theta,x,z)|\cdot|p(\theta,x,z)|\Bigg)\,d\theta.$$

Пусть выполняется

$$\int\limits_0^{+\infty} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big(\Big(1+\big|f(\theta,x,z)\big|\Big)\cdot\big|p(\theta,x,z)\big|\Big)\,d\theta \le C. \tag{2.102}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\big|u^\tau(t,x,z)\big| + \big|u^\tau_{xx}(t,x,z)\big| + \big|u^\tau_{zz}(t,x,z)\big| + \big|u^\tau_x(t,x,z)\big| + \big|u^\tau_z(t,x,z)\big| \le C,$$

$$(t,x,z)\in G_{[0,+\infty)}.$$

Следовательно,

$$\big|u^\tau(T,x,z)\big| + \big|u^\tau_{xx}(T,x,z)\big| + \big|u^\tau_{zz}(T,x,z)\big| + \big|u^\tau_x(T,x,z)\big| + \big|u^\tau_z(T,x,z)\big| \le C,$$

$$(t,x,z)\in G_{[0,+\infty)}.$$

Так как ранее доказано, что при любом фиксированном $T>0$ при $\tau\to 0$ имеет место равномерная в $G_{[0,T]}$ сходимость подпоследовательности u^{τ_k} последовательности u^τ решений задачи (2.92)–(2.95) вместе с производными по x и z до шестого порядка включительно к решению $u(t,x,z)$ задачи (2.89), (2.52), то имеет место оценка

$$\big|u(T,x,z)\big| + \big|u_{xx}(T,x,z)\big| + \big|u_{zz}(T,x,z)\big| + \big|u_x(T,x,z)\big| + \big|u_z(T,x,z)\big| \le C.$$

Следовательно, выполняется

$$\big|u(t,x,z)\big| + \big|u_{xx}(t,x,z)\big| + \big|u_{zz}(t,x,z)\big| + \big|u_x(t,x,z)\big| + \\ + \big|u_z(t,x,z)\big| \le C,\ (t,x,z) \in G_{[0,+\infty)}. \quad (2.103)$$

Так как $\lambda(t,x,z)$ и $u(t,x,z)$ связаны соотношением (2.87), то из оценки (2.103) следует справедливость неравенства

$$\big|\lambda(t,x,z)\big| \le C,\ (t,x,z) \in G_{[0,+\infty)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.3 ([38], [46]). *Пусть в* $G_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия на входные данные* (2.55)–(2.57), (2.90), (2.91), (2.102). *Тогда для решения задачи* (2.86), (2.52)–(2.54) *в* $G_{[0,+\infty)}$ *справедливо неравенство*

$$\big|u(t,x,z)\big| + \big|\lambda(t,x,z)\big| \le C.$$

Исследуем вопрос стабилизации решения задачи (2.86), (2.52)–(2.54) в области $G_{[0,+\infty)}$. Рассмотрим задачу (2.92)–(2.95). На третьем дробном шаге n-го целого временного шага справедливо неравенство (2.101). Используя (2.56), получаем

$$\big|u^\tau(t,x,z)\big| \le e^{-3A(n+\frac{1}{3})\tau} \cdot D + 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{A}{3}(n-k)\tau} \times \\ \times \int\limits_{(n+\frac{1}{3})\tau}^{(n+1)\tau} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left(D\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right) \cdot \big|f(\theta,x,z)\big| + \big|f(\theta,x,z)\big| \cdot \big|p(\theta,x,z)\big| \right) d\theta. \quad (2.104)$$

Пусть в $G_{[0,+\infty)}$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} f(t,x,z) \right| \le \frac{M_1}{1+t^r},\ M_1 > 0,\ r > 1, \\ \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} p(t,x,z) \right| \le \frac{M_2}{1+t^s},\ M_2 > 0,\ s > 1. \end{gathered} \quad (2.105)$$

Тогда из (2.104), с учетом (2.105), следует

$$\big|u^\tau(t,x,z)\big| \le e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \big|u_0(x,z)\big| +$$

$$+3\cdot\sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{A}{3}(n-k)\tau}\int\limits_{(k+\frac{1}{3})\tau}^{(k+1)\tau} D\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right)\cdot\frac{M_1}{1+\theta^r}+\frac{M_2}{1+\theta^r+\theta^s+\theta^{r+s}}\,d\theta\le$$

$$\le e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+$$

$$+E\cdot\sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{A}{3}(n-k)\tau}\cdot\int\limits_{(k+\frac{1}{3})\tau}^{(k+1)\tau}\frac{1}{1+\theta^r}+\frac{1}{1+\theta^r+\theta^s+\theta^{r+s}}\,d\theta, \quad (2.106)$$

где $E=3\cdot\max\{DM_1\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right),M_2\}$.

Рассмотрим подынтегральное выражение в (2.106). Имеют место оценки:

$$E\cdot\int\limits_{(k+\frac{1}{3})\tau}^{(k+1)\tau}\frac{1}{1+\theta^r}\,d\theta\le E\cdot\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{1}{1+\theta^r}\,d\theta\le\frac{E\tau}{1+(k\tau)^r}. \quad (2.107)$$

$$E\cdot\int\limits_{(k+\frac{1}{3})\tau}^{(k+1)\tau}\frac{1}{1+\theta^r+\theta^s+\theta^{r+s}}\,d\theta\le\frac{E\tau}{1+(k\tau)^r+(k\tau)^s+(k\tau)^{r+s}}. \quad (2.108)$$

Учитывая, что $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть от деления n на 2, отметим некоторые свойства:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+1\ge\frac{n}{2},\quad\left[\frac{n}{2}\right]+1\le\frac{n}{2}+1,\quad n-\left[\frac{n}{2}\right]\le\left[\frac{n}{2}\right]+1\le\frac{n}{2}+1,$$

$$n-\left[\frac{n}{2}\right]\ge\left[\frac{n}{2}\right]\ge\frac{n}{2}-1.$$

Согласно (2.107), (2.108), перепишем соотношение (2.106), выделяя $\left[\frac{n}{2}\right]$ членов суммы:

$$|u^\tau(t,x,z)|\le e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+$$

$$+E\tau\cdot\sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{A}{3}(n-k)\tau}\cdot\left(\frac{1}{1+(k\tau)^r}+\frac{1}{1+(k\tau)^r+(k\tau)^s+(k\tau)^{r+s}}\right)=$$

$$=e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+E\tau\cdot\left(e^{-\frac{A}{3}n\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\frac{A}{3}(n-1)\tau}}{1+\tau^r}+\ldots+\frac{e^{-\frac{A}{3}(n-\left[\frac{n}{2}\right])\tau}}{1+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\tau\right)^r}+\frac{e^{-\frac{A}{3}(n-\left[\frac{n}{2}\right]-1)\tau}}{1+\left(\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\tau\right)^r}+\ldots+\frac{1}{1+n\tau^r}+S\right),$$

где S — это расписанное выражение $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\frac{A}{3}(n-k)\tau}}{1+(k\tau)^r+(k\tau)^s+(k\tau)^{r+s}}$.

Оценим следующие соотношения:

$$e^{-\frac{A}{3}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\tau}+e^{-\frac{A}{3}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-2\right)\tau}+\ldots+1\le\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\cdot 1=n-\left[\frac{n}{2}\right];$$

$$1+\frac{1}{1+\tau^r}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\tau\right)^r}\le 1+\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\tau^r}=\frac{1+\tau^r+\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\tau^r}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\tau^r}+1+\frac{1}{\tau^r}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\frac{1}{\tau^r}}=\frac{\frac{1}{\tau^r}\cdot\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)+1}{\frac{1}{\tau^r}+1}\le\frac{\left(\frac{1}{\tau^r}+1\right)\cdot\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)}{\frac{1}{\tau^r}+1}=1+\left[\frac{n}{2}\right];$$

$$1+\frac{1}{1+\tau^r+\tau^s+\tau^{r+s}}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\tau\right)^r+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\tau\right)^s+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\tau\right)^{r+s}}\le$$

$$\le 1+\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\tau^r+\tau^s+\tau^{r+s}}=\frac{1+\tau^r+\tau^s+\tau^{r+s}+\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\tau^r+\tau^s+\tau^{r+s}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\tau^{r+s}}+\frac{1}{\tau^s}+\frac{1}{\tau^r}+1+\frac{1}{\tau^{r+s}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{\frac{1}{\tau^{r+s}}+\frac{1}{\tau^s}+\frac{1}{\tau^r}+1}\le\frac{\left(\frac{1}{\tau^{r+s}}+\frac{1}{\tau^s}+\frac{1}{\tau^r}+1\right)\cdot\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)}{\frac{1}{\tau^{r+s}}+\frac{1}{\tau^s}+\frac{1}{\tau^r}+1}=1+\left[\frac{n}{2}\right].$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|u^\tau(t,x,z)\right|\le e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+$$

$$+E\tau\cdot\left[e^{-\frac{A}{3}(n-\left[\frac{n}{2}\right])\tau}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\frac{n-\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\left(\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\tau\right)^r}+e^{-\frac{A}{3}(n-\left[\frac{n}{2}\right])\tau}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{n-\left[\frac{n}{2}\right]}{1+\left(\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\tau\right)^r+\left(\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\tau\right)^s+\left(\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\tau\right)^{r+s}}\right]\le$$

$$\le e^{-\frac{A}{3}(n+1)\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+E\tau\cdot\left[e^{-\frac{A}{3}(\frac{n}{2}-1)\tau}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{\frac{n}{2}+1}{1+\left(\frac{n}{2}\tau\right)^r}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{A}{3}(\frac{n}{2}-1)\tau}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{\frac{n}{2}+1}{1+\left(\frac{n}{2}\tau\right)^r+\left(\frac{n}{2}\tau\right)^s+\left(\frac{n}{2}\tau\right)^{r+s}}\right].$$

На третьем дробном шаге $(N-1)$-го целого временного шага, то есть при $n=N$, $t\in(T-\frac{\tau}{3},T]$, выполнено

$$\left|u^\tau(t,x,z)\right|\le e^{-\frac{A}{3}T+\tau}\cdot\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|+E\cdot\left[e^{-\frac{A}{3}\left(\frac{T}{2}-\tau\right)}\cdot\left(\frac{T}{2}+\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{T}{2}+\tau}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^r}+e^{-\frac{A}{3}\left(\frac{T}{2}-\tau\right)}\cdot\left(\frac{T}{2}+\tau\right)+\frac{\frac{T}{2}+\tau}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^r+\left(\frac{T}{2}\right)^s+\left(\frac{T}{2}\right)^{r+s}}\right]\le$$

$$\leq (\text{так как } \tau < 1) \leq e^{-\frac{A}{3}T} \cdot \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right| + E \cdot \left[e^{-\frac{A}{3}\left(\frac{T}{2}-1\right)} \cdot \left(\frac{T}{2}+1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{T}{2}+1}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^r} + e^{-\frac{A}{3}\left(\frac{T}{2}-1\right)} \cdot \left(\frac{T}{2}+1\right) + \frac{\frac{T}{2}+1}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^r + \left(\frac{T}{2}\right)^s + \left(\frac{T}{2}\right)^{r+s}}\right] = \nu(T),$$

постоянная $\nu(T) \to 0$ при $T \to +\infty$.

Имеет место соотношение

$$\left|u^\tau(t,x,z)\right| \leq \nu(T), \ \forall t \in [0,T]\,.$$

Проводя аналогичные рассуждения для производных функции $u(t,x,z)$, получим

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^\tau(t,x,z)\right| \leq \nu(T), \ \forall t \in [0,T]\,.$$

Справедливо неравенство

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^\tau(T,x,z)\right| \leq \nu(T).$$

Ранее доказано, что при любом фиксированном $T > 0$ при $\tau \to 0$ имеет место равномерная в $G_{[0,T]}$ сходимость подпоследовательности u^{τ_k} последовательности u^τ решений задачи (2.92)–(2.95) вместе с производными по x и по z до 6-го порядка включительно к решению $u(t,x,z)$ задачи (2.89), (2.52). Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u(T,x,z)\right| \leq \nu(T).$$

Стоящее справа выражение стремится к нулю при $T \to +\infty$. Следовательно, имеет место

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u(t,x,z)\right| \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{2.109}$$

Так как $u(t,x,z)$ и $\lambda(t,x,z)$ связаны соотношением (2.87), то из соотношения (2.109) и условий на входные данные (2.56), (2.57), (2.105) следует неравенство

$$\left|\lambda(t,x,z)\right| \leq \left|p(t,x,z)\right| + \frac{\left|u_{xx}(t,\beta,z)\right| + \left|u_x(t,\beta,z)\right|}{\left|f(t,\beta,z)\right|} + \frac{\left|u_{zz}(t,x,\alpha)\right|}{\left|f(t,x,\alpha)\right|} +$$

$$+ \frac{\left|u_z(t,x,\alpha)\right|}{\left|f(t,x,\alpha)\right|} \leq \frac{M_2}{1+t^s} + \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right) \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t,x,z)\right|.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\lambda(t,x,z)\right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{M_2}{1+t^s}+\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right)\cdot\lim_{t\to+\infty}\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4 ([38], [46])**.** *Пусть в* $G_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (2.55) – (2.57), (2.90), (2.91), (2.105)*. Тогда решение задачи* (2.86), (2.52)–(2.54) *в* $G_{[0,+\infty)}$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\lambda(t,x,z)\right|\right) = 0.$$

2.1.2.4 Пример

Пример 2.1. *В полосе* $G_{[0,T]} = \left\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$ *рассматривается задача Коши для параболического уравнения*

$$u_t = u_{xx}+u_{zz}+ae^t\cdot\lambda(t,x,z),\ t\in(0,T],\ (x,z)\in\mathbb{R}^2, \tag{2.110}$$

с начальным условием $u(0,x,z)=u_0(x,z)=b+c\cos x+d\cos z$.

Здесь $a\neq 0$, b, c, d *— некоторые постоянные. Наряду с функцией* $u(t,x,z)$ *необходимо определить также функцию* $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$.

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha)=\varphi(t,x)=b\cos t+c\cos x+d\cos\alpha,\ \ \alpha=const,$$

$$u(t,\beta,z)=\psi(t,z)=b\cos t+c\cos\beta+d\cos z,\ \ \beta=const.$$

Выполняются условия согласования

$$u_0(x,\alpha)=\varphi(0,x)=b+c\cos x+d\cos\alpha,$$

$$u_0(\beta,z)=\psi(0,z)=b+c\cos\beta+d\cos z,$$

$$\varphi(t,\beta)=\psi(t,\alpha)=b\cos t+c\cos\beta+d\cos\alpha.$$

Условия (2.56) *на функцию* $f=ae^t$ *выполнены при* $\delta_1=\delta_2=|a|$.

Функции $f(t, x, z)$, $u_0(x, z)$, $\varphi(t, x)$, $\psi(t, z)$ *удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных* (2.57).

Тогда могут быть найдены функции $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x, z)$*:*

$$u(t, x, z) = b \cos t + c \cos x + d \cos z,$$

$$\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z) = \frac{-b \sin t + c \cos x}{ae^t} + \frac{d \cos z}{ae^t}.$$

Подставляя найденные функции в (2.110)*, получаем верное тождество.*

Пример 2.1 показывает, что множество решений обратной задачи (2.51)–(2.54) не пусто.

2.2 Коэффициент представим в виде произведения

2.2.1 Постановка задачи

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \tag{2.111}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{2.112}$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z). \tag{2.113}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \tag{2.114}$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \tag{2.115}$$

где $\alpha,\beta = const$, выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \tag{2.116}$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \tag{2.117}$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \tag{2.118}$$

и следующие условия на входные данные:

$$\big|\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big| \ge \delta_0 > 0,\ \forall\, t \in [0,T], \tag{2.119}$$

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \ge \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \ge \delta_2 > 0,\ \forall\,(t,x,z) \in G_{[0,T]}, \tag{2.120}$$

здесь δ_0, δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Относительно входных данных предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (2.121), и удовлетворяют ему при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le C,\ l_1,l_2 = 0,1,\ k_1,k_2 = 0,1,\dots,6. \tag{2.121}$$

2.2.2 Приведение к прямой задаче

Приведём исследуемую обратную задачу (2.111)–(2.115) к вспомогательной прямой. Для этого сначала в уравнении (2.111) положим $x = \beta$, затем $z = \alpha$. Перемножим полученные равенства

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)\cdot\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,x,\alpha)-u_{xx}(t,x,\alpha)-u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\times$$
$$\times\frac{u_t(t,\beta,z)-u_{xx}(t,\beta,z)-u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}. \quad (2.122)$$

Далее в уравнении (2.111) возьмём $x = \beta$ и $z = \alpha$.

$$\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,\beta,\alpha)-u_{xx}(t,\beta,\alpha)-u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}. \quad (2.123)$$

Теперь подставим $\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha)$ из (2.123) в (2.122).

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{f(t,\beta,\alpha)\cdot\big(u_t(t,\beta,z)-u_{xx}(t,\beta,z)-u_{zz}(t,\beta,z)\big)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)}\times$$
$$\times\frac{u_t(t,x,\alpha)-u_{xx}(t,x,\alpha)-u_{zz}(t,x,\alpha)}{u_t(t,\beta,\alpha)-u_{xx}(t,\beta,\alpha)-u_{zz}(t,\beta,\alpha)}.$$

В силу условий переопределения (2.114), (2.115) получим выражение на коэффициент при $f(t,x,z)$ в следующем виде:

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)\cdot\big[\varphi_t(t,\beta)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)\big]}\times$$
$$\times\Big([\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)]\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)]-u_{zz}(t,x,\alpha)\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)]-$$
$$-u_{xx}(t,\beta,z)\cdot[\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)]+u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)\Big). \quad (2.124)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&M(t,x,z) = \frac{f(t,x,z)\cdot f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)\cdot\big[\varphi_t(t,\beta)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)\big]},\\
&M_1(t,x,z) = M(t,x,z)\cdot\big[\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)\big],\\
&M_2(t,x,z) = M(t,x,z)\cdot\big[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)\big],\\
&M_3(t,x,z) = M(t,x,z)\cdot\big[\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)\big]\cdot\big[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)\big].
\end{aligned} \quad (2.125)$$

Подставим выражение (2.124) в уравнение (2.111) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t = u_{xx}+u_{zz}+M(t,x,z)\cdot u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)-M_1(t,x,z)\cdot u_{xx}(t,\beta,z)-$$
$$-M_2(t,x,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)+M_3(t,x,z),\ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \quad (2.126)$$

с начальным условием (2.112).

2.2.3 Существование решения прямой задачи

Для доказательства разрешимости прямой задачи (2.126), (2.112) применим метод слабой аппроксимации ([12], [87]). Расщепим уравнение (2.126) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в следах неизвестных функций

$$u^\tau_t = 3\cdot\left(u^\tau_{xx}(t,x,z)+u^\tau_{zz}(t,x,z)\right),\ n\tau < t \le \left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.127}$$

$$u^\tau_t = 3\cdot M(t,x,z)\cdot u^\tau_{xx}(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\cdot u^\tau_{zz}(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha),$$
$$\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \tag{2.128}$$

$$u^\tau_t = -3\cdot\Big(M_1(t,x,z)\cdot u^\tau_{xx}(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)+M_2(t,x,z)\cdot u^\tau_{zz}(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)-$$
$$-\,M_3(t,x,z)\Big),\ \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{2.129}$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{2.130}$$

$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
&U_{k_1,k_2}(0) = \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,\\
&U^\tau_{k_1,k_2}(t) = \sup_{n\tau<\xi\le t}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right|,\\
&n\tau < t \le (n+1)\tau,\ \ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,\\
&U(0) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}(0),\quad U^\tau(t) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6}U^\tau_{k_1,k_2}(t).
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Справедливы следующие свойства:

1. $\left|\dfrac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\dfrac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le U^\tau_{k_1,k_2}(t) \le U^\tau(t),\ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,$

$$\xi\in(n\tau,t],\ \ t\in(n\tau,(n+1)\tau]; \tag{2.132}$$

2. функции $U^\tau_{k_1,k_2}(t)$, $U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $(n\tau,(n+1)\tau]$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (2.127)–(2.130).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге, при $t \in \left(0, \frac{\tau}{3}\right]$ рассматриваем уравнение (2.127) с начальным условием (2.130).

В силу принципа максимума для задачи Коши (теорема **1.2**) имеем

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \leq \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\leq t,\ t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right]. \tag{2.133}$$

Дифференцируя уравнение (2.127) и начальное условие (2.130) по x и по z от 1 до 6 раз, в силу принципа максимума получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leq \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$
$$0<\xi\leq t,\ \ t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right],\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \tag{2.134}$$

Согласно (2.131), (2.133), (2.134), получим неравенство

$$U^\tau(t)\leq U(0),\ \ t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right]. \tag{2.135}$$

На втором дробном шаге, $t \in \left(\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}\right]$, рассматриваем уравнение (2.128) с начальным условием

$$u^\tau\left.\right|_{t=\frac{\tau}{3}} = u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x,z\right).$$

Проинтегрируем уравнение (2.128) по временной переменной. Справедливо неравенство

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \leq \left|u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x,z\right)\right| +$$
$$+\,3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left|M(\theta,x,z)\right|\cdot\left|u^\tau_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\cdot\left|u^\tau_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta. \tag{2.136}$$

Далее считаем, что $C > 1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант из (2.119) – (2.121), ограничивающих входные данные, и независящие от параметра расщепления τ.

Из условий (2.119) – (2.121), (2.125) следует, что функция $M(t,x,z)$ является ограниченной и имеет ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (2.136) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем

$\sup\limits_{\frac{\tau}{3}<\xi\le t}$. Учитывая (2.131) и (2.132), получаем оценку

$$U_{0,0}^{\tau}(t) \le U_{0,0}(0) + C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} U_{2,0}^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\cdot U_{0,2}^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta. \qquad (2.137)$$

Продифференцируем (2.128) по x и z. Затем полученное выражение проинтегрируем по временной переменной. Получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)+$$
$$+3\cdot\sum_{i=0}^{k_2}\sum_{j=0}^{k_1}C_{k_2}^{i}\cdot C_{k_1}^{j}\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi}\frac{\partial^{j+i}}{\partial x^{j}\partial z^{i}}M(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}u_{xx}^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\times$$
$$\times\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u_{zz}^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\,d\theta,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right].$$

Справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z)\right| \le \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)\right|+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}u_{xx}^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\cdot\sum_{j=0}^{k_1}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u_{zz}^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta\le$$
$$\le\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)\right|+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{k_1,k_2=0}^{6}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\times$$
$$\times\sum_{k_1,k_2=0}^{6}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right].$$

В последнем соотношении берём сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{3}<\xi\le t}$ и, учитывая (2.131) и (2.132), получаем оценки на $U_{k_1,k_2}^{\tau}(t)$, $k_1,k_2=0,1,\ldots,6$:

$$U_{k_1,k_2}^{\tau}(t)\le U_{k_1,k_2}(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{k_1,k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta. \qquad (2.138)$$

Складывая оценки (2.137) и (2.138), с учётом (2.135) имеем

$$U^{\tau}(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\left(U^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\right)^2 d\theta,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right]. \qquad (2.139)$$

На третьем дробном шаге, $t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]$, рассматривается уравнение (2.129) с начальным условием

$$u^\tau \big|_{t=\frac{2\tau}{3}} = u^\tau\left(\tfrac{2\tau}{3}, x, z\right).$$

Проинтегрируем уравнение (2.129) по временной переменной. Справедливо следующее неравенство:

$$\left|u^\tau(\xi, x, z)\right| \le \left|u^\tau(\tfrac{2\tau}{3}, x, z)\right| + 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left|M_1(\theta, x, z)\right| \cdot \left|u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z)\right| d\theta +$$

$$+ 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left|M_2(\theta, x, z)\right| \cdot \left|u^\tau_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha)\right| d\theta + 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left|M_3(\theta, x, z)\right| d\theta,$$

$$\tfrac{2\tau}{3} < \xi \le t,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right]. \quad (2.140)$$

Из условий (2.119) – (2.121), (2.125) следует, что функции $M_1(t, x, z)$, $M_2(t, x, z)$ и $M_3(t, x, z)$ являются ограниченными и имеют ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (2.140) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}$. Учитывая (2.131) и (2.132), получим оценку

$$U^\tau_{0,0}(t) \le U^\tau_{0,0}\left(\tfrac{2\tau}{3}\right) + C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} U^\tau_{2,0}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right) d\theta +$$

$$+ C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} U^\tau_{0,2}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right) d\theta + C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} d\theta. \quad (2.141)$$

Продифференцируем (2.129) по x и z от одного до 6 раз, затем проинтегрируем полученное выражение по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, $\frac{2\tau}{3} < \xi \le t$, $t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]$. Имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^\tau(\tfrac{\tau}{3}, x, z) -$$

$$- 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \sum_{i=0}^{k_2} C^i_{k_2} \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}} M_1(\theta, x, z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial x^{k_2-i}} u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z)\, d\theta -$$

$$- 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \cdot \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} M_2(\theta, x, z) \cdot \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} u_{zz}^{\tau}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha)\, d\theta +$$

$$+ 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} M_3(\theta, x, z)\, d\theta,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6,\ \tfrac{2\tau}{3} < \xi \le t,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right].$$

Отсюда, в силу (2.131) и (2.132), следует

$$U_{k_1,k_2}^{\tau}(t) \le U_{k_1,k_2}^{\tau}\left(\tfrac{2\tau}{3}\right) + C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right)\, d\theta + C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} d\theta. \tag{2.142}$$

Складывая оценки (2.141) и (2.142) и учитывая (2.139), получаем

$$U^{\tau}(t) \le U(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}} \Big(U^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right)\Big)^2 d\theta + C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\tau} \Big(U^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right) + 1\Big)\, d\theta,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right].$$

В силу неубывания функции $U^{\tau}(t)$, из свойств определённого интеграла следует

$$U^{\tau}(t) \le U(0) + C \cdot \int\limits_{0}^{\tau} \mathcal{P}_2\Big(U^{\tau}(\theta)\Big)\, d\theta,\ t \in (0, \tau], \tag{2.143}$$

где $\mathcal{P}_2(\chi) = \widetilde{C} \cdot \left(\chi^2 + \chi + 1\right)$ — полином второй степени, $\widetilde{C}$ — константа, не зависящая от τ.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathcal{P}_2\big(\omega(t)\big), \quad \omega(0) = U(0). \tag{2.144}$$

По теореме Коши [61] решение $\omega(t)$ задачи (2.144) существует на некотором интервале $[0, t_*]$, где $0 < t_* \le T$ зависит от C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ принадлежит классу $C^1\big([0, t_*]\big)$ и монотонно возрастает на интервале $[0, t_*]$. Из (2.143), (2.144) следует, что если для некоторого $0 < t_0 \le t$ справедливо $U^{\tau}(t_0) \le \omega(t_0)$, то $U^{\tau}(t) \le \omega(t),\ t \in [t_0, t_*]$. Так как $U^{\tau}(0) \le \omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует, что $U^{\tau}(t) \le \omega(\tau)$, $t \in [0, \tau]$.

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим, что $U^{\tau}(t) \le \omega(2\tau)$, $t \in [0, 2\tau]$.

Через конечное число шагов: $U^\tau(t) \leq \omega(t_*) \leq C$, $t \in [0, t_*]$.

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6,\ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}. \tag{2.145}$$

Из оценок (2.145) следует, что правые части уравнений (2.127)–(2.129) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений ограничены равномерно по τ.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}.$$

Дифференцируя уравнения (2.127)–(2.129) по x и z, в силу (2.145) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4,\ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}. \tag{2.146}$$

Оценки (2.145), (2.146) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности (т. **1.1**). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (2.127)–(2.130) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z) \in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (т. **1.3**) является решением задачи (2.126), (2.112), причём $u(t,x,z) \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, где $M > 0$ — целая постоянная,

$$G^M_{[0,t_*]} = \left\{(t,x,z)\ \middle|\ 0 \leq t \leq t_*,\ |x| \leq M,\ |z| \leq M\right\},$$

$$C^{\,l,\,l_1,\,l_2}_{t,\,x,\,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right) = \left\{u(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G^M_{[0,t_*]}\right),\right.$$
$$\left. k = 0, 1, \ldots, l,\ k_1 = 0, 1, \ldots, l_1,\ k_2 = 0, 1, \ldots, l_2\right\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной M решение $u(t,x,z)$ задачи (2.126), (2.112) принадлежит классу $C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,t_*]}$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \tag{2.147}$$

Из (2.124) и (2.126), в силу условий (2.119)–(2.121), (2.147) следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ принадлежат классу

$$Z(t_*) = \Big\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\Big|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big) \Big\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t,x,z) \right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \lambda(t,x,z) \right| \le C, \; (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}. \quad (2.148)$$

2.2.4 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (2.124) и удовлетворяет условию (2.113), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи, то при подстановке $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ в (2.111) и (2.112) получим тождества.

Докажем выполнение условия переопределения (2.114). Для этого положим в (2.126) $z = \alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} u_t(t,x,\alpha) &= u_{xx}(t,x,\alpha) + u_{zz}(t,x,\alpha) + \frac{1}{\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)} \times \\ &\times \Big(u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot \big[\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)\big] - u_{zz}(t,x,\alpha) \times \\ &\times \big[\psi_t(t,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big] + \big[\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)\big] \cdot \big[\psi_t(t,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big] \Big). \end{aligned}$$

Домножая данное уравнение на $\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)$ и приводя подобные, преобразовываем его к виду

$$\begin{aligned} & u_{zz}(t,x,\alpha) \cdot \big[u_{xx}(t,\beta,\alpha) - \varphi_{xx}(t,\beta)\big] + \big[\psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)\big] \times \\ &\quad \times \big[u_t(t,x,\alpha) - \varphi_t(t,x) - u_{xx}(t,x,\alpha) + \varphi_{xx}(t,x)\big] + \\ &+ \varphi_{xx}(t,\beta) \cdot \big[u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha)\big] - u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot \big[\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)\big] = 0. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$Q^1(t,x) = u(t,x,\alpha) - \varphi(t,x). \quad (2.149)$$

В силу (2.116) справедливо следующее равенство:

$$Q^1(0,x) = u(0,x,\alpha) - \varphi(0,x) = 0.$$

Используя обозначения (2.149), получим

$$\big(\varphi_{xx}(t,\beta)+\psi_{zz}(t,\alpha)-\psi_t(t,\alpha)\big)\cdot Q_t^1(t,x)=\big(\varphi_{xx}(t,\beta)+\psi_{zz}(t,\alpha)-\psi_t(t,\alpha)\big)\times$$
$$\times Q_{xx}^1(t,x)+\big(-u_{zz}(t,x,\alpha)+\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)\big)\cdot Q_{xx}^1(t,\beta),$$

$$Q^1(0,x)=0.$$

Согласно условию (2.119), имеем

$$Q_t^1(t,x)=Q_{xx}^1(t,x)-S(t,x)\cdot Q_{xx}^1(t,\beta),\quad Q^1(0,x)=0. \tag{2.150}$$

Из условий (2.119), (2.121), (2.147) следует, что функция

$$S(t,x)=\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)-\varphi_t(t,x)+\varphi_{xx}(t,x)}{\varphi_{xx}(t,\beta)+\psi_{zz}(t,\alpha)-\psi_t(t,\alpha)}$$

и её производные непрерывны и ограничены. Следовательно, задача (2.150) удовлетворяет условиям леммы **1.2** (где $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=S(t,x)$, $a_5=0$, $d(t)=\beta$, $r=0$), согласно которой решение задачи (2.150) единственно. Решением является функция $Q^1(t,x)\equiv 0$. Таким образом, из (2.149) следует выполнение условия переопределения (2.114).

Выполнение условия переопределения (2.115) доказывается аналогичным образом, учитывая условия согласования (2.117), (2.118). Из выполнения условий (2.114), (2.115) следует, что пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ является решением обратной задачи (2.111)–(2.115).

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.5 ([81], [98]). *Пусть выполнены условия* (2.116) – (2.121) *на входные данные. Тогда существует константа t_*, $0<t_*\le T$, зависящая от постоянных δ_0, δ_1, δ_2, C из* (2.119) – (2.121), *такая, что в классе $Z(t_*)$ решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)$ обратной задачи* (2.111)–(2.115) *существует и удовлетворяет соотношению* (2.148).

2.2.5 Пример

Пример 2.2. *В полосе $G_{[0,T]}=\big\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения*

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+(\sin x+2)\cdot\lambda(t,x,z),\ t\in(0,T],\ (x,z)\in\mathbb{R}^2, \tag{2.151}$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z) = \sin x \cdot \sin z$, *где наряду с функцией* $u(t,x,z)$ *необходимо определить также функцию* $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z)$.

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x) = e^t \cdot \sin x \cdot \sin\alpha,\ \ \alpha = const,$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z) = e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin z,\ \ \beta = const,$$

выполняются условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x) = \sin x \cdot \sin\alpha, \quad u_0(\beta,z) = \psi(0,z) = \sin\beta \cdot \sin z,$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha) = e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha.$$

Проверим выполнение условия (2.119). *Для этого подставим в него заданные функции* $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$:

$$\left|e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha\right| =$$
$$= \left|3 \cdot e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha\right| \geq 3 > 0,\ \ \forall t \in [0,T],\ \ \sin\beta\sin\alpha \neq 0.$$

Таким образом, условие (2.119) *выполняется при* $\delta_0 = 3$ *для* $t \in [0,T]$ *и для*

$$\alpha,\beta \neq \begin{cases} 2\pi k, & k = 0,2,4,6,\ldots, \\ 0, & k = 1,3,5,7,\ldots. \end{cases}$$

Проверим выполнение условия (2.120):

$$\left|f(t,\beta,z)\right| = \left|\sin\beta + 2\right| \geq 1 > 0,\ \ \left|f(t,x,\alpha)\right| = \left|\sin x + 2\right| \geq 1 > 0,$$
$$\forall\, t \in [0,T],\ \ \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие выполнено при $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Функции $f(t,x,z) = (\sin x + 2)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ *удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных* (2.121).

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = e^t \cdot \sin x \cdot \sin z,$$

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z) = \frac{3 \cdot e^t \cdot \sin x}{\sin x + 2} \cdot \sin z.$$

Подставляя найденное решение в (2.151), *получаем верное тождество.*

Пример 2.2 показывает, что множество решений задачи (2.111)–(2.120) не пусто.

Глава 3. Задачи идентификации коэффициентов, зависящих от всех переменных, при нелинейном члене

3.1 Коэффициент представим в виде суммы

3.1.1 Постановка задачи

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + u^p \cdot \lambda(t,x,z) + f(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \tag{3.1}$$

$$L\left(u(t,x,z)\right) = \alpha_1(t) \cdot u_{xx}(t,x,z) + \alpha_2(t) \cdot u_{zz}(t,x,z) + \\ + \beta_1(t) \cdot u_x(t,x,z) + \beta_2(t) \cdot u_z(t,x,z), \tag{3.2}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

Здесь $p \ge 1$ — целая постоянная. Функции $\alpha_k(t) \ge \alpha_0 > 0$, $\beta_k(t)$, $k = 1,2,$ — вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$.

Наряду с функцией $u(t,x,z)$ необходимо определить также функцию вида

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \tag{3.4}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \tag{3.5}$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \tag{3.6}$$

где α, β — константы, и выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \tag{3.7}$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \tag{3.8}$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha). \tag{3.9}$$

Полагаем, что имеют место следующие ограничения:

$$\left|\varphi(t,x)\right| \ge \delta_1 > 0,\ \left|\psi(t,z)\right| \ge \delta_2 > 0,\ \forall\,(t,x,z) \in G_{[0,T]},\ \delta_1,\delta_2 = const. \tag{3.10}$$

Относительно функций $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$, определённых в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они и их производные непрерывны и удовлетворяют следующему соотношению:

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le C,\ l_1,l_2=0,1,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ (t,x,z)\in G_{[0,T]}. \tag{3.11}$$

3.1.2 Приведение обратной задачи к прямой

Приведём обратную задачу (3.1)–(3.6) к вспомогательной прямой. Для этого в уравнении (3.1) положим $x=\beta$ и выразим коэффициент при младшем члене. Затем аналогичным образом преобразуем (3.1) при $z=\alpha$. Складывая полученные выражения, учитывая результат одновременной подстановки $x=\beta$, $z=\alpha$ в (3.1) и условия переопределения (3.5), (3.6), получим выражение на неизвестный коэффициент в следующем виде:

$$\lambda(t,x,z) = g(t,x,z) - \frac{\alpha_1(t)\cdot u_{xx}(t,\beta,z) + \beta_1(t)\cdot u_x(t,\beta,z)}{\psi^p(t,z)} - \\ - \frac{\alpha_2(t)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + \beta_2(t)\cdot u_z(t,x,\alpha)}{\varphi^p(t,x)}, \tag{3.12}$$

где

$$g(t,x,z) = \frac{\psi_t(t,z) - \alpha_2(t)\cdot\psi_{zz}(t,z) - \beta_2(t)\cdot\psi_z(t,z) - f(t,\beta,z)}{\psi^p(t,z)} + \\ + \frac{\varphi_t(t,x) - \alpha_1(t)\cdot\varphi_{xx}(t,x) - \beta_1(t)\cdot\varphi_x(t,x) - f(t,x,\alpha)}{\varphi^p(t,x)} - \frac{\varphi_t(t,\beta) - f(t,\beta,\alpha)}{\varphi^p(t,\beta)} + \\ + \frac{\alpha_1(t)\cdot\varphi_{xx}(t,\beta) + \alpha_2(t)\cdot\psi_{zz}(t,\alpha) + \beta_1(t)\cdot\varphi_x(t,\beta) + \beta_2(t)\cdot\psi_z(t,\alpha)}{\varphi^p(t,\beta)}. \tag{3.13}$$

Подставим выражение (3.12) в уравнение (3.1) и перейдём к прямой задаче для уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + \mu_1(t,x)\cdot u^p(t,x,z)\cdot\big(\alpha_2(t)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + \beta_2(t)\cdot u_z(t,x,\alpha)\big) + \\ + \mu_2(t,z)\cdot u^p(t,x,z)\cdot\big(\alpha_1(t)\cdot u_{xx}(t,\beta,z) + \beta_1(t)\cdot u_x(t,\beta,z)\big) + \\ + u^p(t,x,z)\cdot g(t,x,z) + f(t,x,z),\ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \tag{3.14}$$

с начальным условием (3.3), где $\mu_1(t,x)$ и $\mu_2(t,z)$ известны и имеют вид

$$\mu_1(t,x) = -\frac{1}{\varphi^p(t,x)},\ \mu_2(t,z) = -\frac{1}{\psi^p(t,z)}. \tag{3.15}$$

3.1.3 Существование решения прямой задачи

Докажем разрешимость прямой задачи (3.14), (3.3). Для этого воспользуемся методом слабой аппроксимации ([12], [87]). Расщепим уравнение (3.14) на два дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{2}$ в нелинейных членах и следах неизвестных функций.

$$u_t^\tau = 2\cdot L\left(u^\tau(t,x,z)\right),\ n\tau < t \le \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau; \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered}u_t^\tau = 2\cdot\mu_1(t,x)\cdot\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\right)^p\cdot\left(\alpha_2(t)\cdot u_{zz}^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)+\beta_2(t)\cdot u_z^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\right)+\\ +2\cdot\mu_2(t,z)\cdot\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\right)^p\cdot\left(\alpha_1(t)\cdot u_{xx}^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)+\beta_1(t)\cdot u_x^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\right)+\\ +2\cdot\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\right)^p\cdot g(t,x,z)+2\cdot f(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau < t \le (n+1)\tau;\end{gathered} \tag{3.17}$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{3.18}$$

$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&U_{k_1,k_2}(0) = \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,\\ &U_{k_1,k_2}^\tau(t) = \sup_{n\tau<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right|,\ n\tau < t \le (n+1)\tau,\\ &k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$U(0) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}(0),\quad U^\tau(t) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^\tau(t).$$

Справедливы утверждения

1. $\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le U_{k_1,k_2}^\tau(t) \le U^\tau(t),\ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,$

$$n\tau < \xi \le t,\ n\tau < t \le (n+1)\tau; \tag{3.20}$$

2. функции $U_{k_1,k_2}^\tau(t), U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $\left(n\tau,(n+1)\tau\right]$.

Здесь и далее n-м целым шагом будем называть полуинтервал $\big(n\tau, (n+1)\tau\big]$, а j-м дробным шагом ($j = 1, 2$) n-го целого шага — полуинтервал $\Big(\big(n + \frac{j-1}{2}\big)\tau, \big(n + \frac{j}{2}\big)\tau\Big]$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t, x, z)$ задачи (3.16)–(3.18).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге, при $t \in \big(0, \frac{\tau}{2}\big]$ рассматриваем уравнение (3.16) с начальным условием (3.18).

По теореме принципа максимума для задачи Коши (т. **1.2**) имеем

$$\big|u^\tau(\xi, x, z)\big| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \big|u_0(x, z)\big|,\ 0 < \xi \le t,\ t \in \big(0, \tfrac{\tau}{2}\big]\,. \tag{3.21}$$

Дифференцируя уравнение (3.16) и начальное условие (3.18) по x и по z от 1 до 6 раз, в силу принципа максимума получим при $0 < \xi \le t$, $t \in \big(0, \frac{\tau}{2}\big]$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z)\right|,\ k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 6. \tag{3.22}$$

Возьмём от обеих частей неравенств (3.21) и (3.22) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, сложим их и, согласно (3.19), (3.20), получим оценку

$$U^\tau(t) \le U(0),\ 0 < t \le \tfrac{\tau}{2}. \tag{3.23}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t \in \Big(\frac{\tau}{2}, \tau\Big]$. Исследуется уравнение (3.17) с начальным условием

$$u^\tau\ \Big|_{t=\frac{\tau}{2}} = u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2}, x, z\right).$$

Проинтегрируем уравнение (3.17) по временной переменной. Справедливо неравенство

$$\big|u^\tau(\xi, x, z)\big| \le \Big|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2}, x, z\right)\Big| + 2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} \Big|\big(u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{2}, x, z)\big)^p\Big| \cdot \big|g(\theta, x, z)\big|\,d\theta +$$

$$+\,2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} \big|\mu_2(\theta, z)\big| \cdot \Big|\big(u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{2}, x, z)\big)^p\Big| \cdot \Big(\big|\alpha_1(\theta)\big| \cdot \Big|u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{2}, \beta, z)\Big| +$$

$$+|\beta_1(\theta)|\cdot\Big|u^\tau_x(\theta-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\Big|\Big)\,d\theta+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\big|\mu_1(\theta,x)\big|\cdot\Big|\big(u^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^p\Big|\times$$

$$\times\Big(|\alpha_2(\theta)|\cdot\Big|u^\tau_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\Big|+|\beta_2(\theta)|\cdot\Big|u^\tau_z(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\Big|\Big)\,d\theta+$$

$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\big|f(\theta,x,z)\big|\,d\theta,\ \tfrac{\tau}{2}<\xi\le t,\ t\in\Big(\tfrac{\tau}{2},\tau\Big]. \quad (3.24)$$

Из условий (3.10), (3.11), (3.13), (3.15) следует, что функции $\mu_1(t,x)$, $\mu_2(t,z)$, $g(t,x,z)$, $f(t,x,z)$ и их производные по x и по z до 6 порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,T]}$. Возьмём от обеих частей неравенства (3.24) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{2}<\xi\le t}$. Учитывая (3.10) и (3.11), при $\frac{\tau}{2}<\xi\le t$, $t\in\Big(\frac{\tau}{2},\tau\Big]$ получим оценку

$$\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le t}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi,x,z)\big|\le\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\tfrac{\tau}{2},x,z)\big|+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\Big(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi,x,z)\big|\Big)^p\cdot\Big(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{z\in\mathbb{R}}\big|u^\tau_{xx}(\xi-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\big|+$$

$$\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{z\in\mathbb{R}}\big|u^\tau_x(\xi-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\big|\Big)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\Big(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi,x,z)\big|\Big)^p\times$$

$$\times\Big(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{z\in\mathbb{R}}\big|u^\tau_{zz}(\xi-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\big|+\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|u^\tau_z(\xi-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\big|\Big)\,d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\Bigg(\Big(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi,x,z)\big|\Big)^p+1\Bigg)\,d\theta. \quad (3.25)$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ — некоторые независящие от параметра расщепления τ постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от p, констант C, δ_1, δ_2 из (3.10), (3.11) и констант, ограничивающих $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$, $k=1,2$.

Из (3.25), с учётом обозначений (3.19) и условия (3.20), получим

$$U^\tau_{0,0}(t)\le U_{0,0}(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\big(U^\tau_{0,0}(\theta)\big)^p\cdot\big(U^\tau_{2,0}(\theta)+U^\tau_{1,0}(\theta)\big)\,d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\big(U^{\tau}_{0,0}(\theta)\big)^{p}\cdot\big(U^{\tau}_{0,2}(\theta)+U^{\tau}_{0,1}(\theta)\big)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(1+\big(U^{\tau}_{0,0}(\theta)\big)^{p}\Big)\,d\theta. \qquad (3.26)$$

Обозначим результат дифференцирования функции $(u^{\tau}(t,x,z))^{p}$ k_1 раз по x и k_2 раз по z через $\Delta^{\tau}_{k_1,k_2}(t,x,z)$, $k_1,k_2=0,1,\ldots,6$, то есть

$$\Delta^{\tau}_{0,0}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)=\big(u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^{p},$$
$$\Delta^{\tau}_{1,0}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)=p\cdot\big(u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^{p-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z),$$
$$\Delta^{\tau}_{0,1}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)=p\cdot\big(u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^{p-1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z),$$
$$\Delta^{\tau}_{1,1}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)=p\cdot(p-1)\cdot\big(u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\times$$
$$\frac{\partial}{\partial z}u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)+p\cdot\big(u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big)^{p-1}\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial z}u^{\tau}(t-\tfrac{\tau}{2},x,z),$$

и т.д. до $\Delta^{\tau}_{6,6}(t-\frac{\tau}{2},x,z)$.

В силу (3.19), (3.20) справедливо неравенство

$$\left|\Delta^{\tau}_{k_1,k_2}(t,x,z)\right|\le p^{k_1+k_2}\cdot(U^{\tau}(t))^{p},\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \qquad (3.27)$$

Продифференцируем уравнение (3.17) по x и z от одного до шести раз. Затем проинтегрируем полученное выражение по временной переменной. Согласно (3.27) имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{2},x,z)\right|+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}f(\theta,x,z)\right|d\theta+$$
$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\sum_{i=0}^{k_2}C^{i}_{k_2}\cdot p^{k_1+k_2}\cdot\big(U^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{2})\big)^{p}\cdot\sum_{m=0}^{k_2-i}C^{m}_{k_2-i}\cdot\left|\frac{\partial^{m}}{\partial z^{m}}\mu_2(\theta,z)\right|\times$$
$$\times\left(\big|\alpha_1(\theta)\big|\cdot\left|\frac{\partial^{k_2-i-m}}{\partial z^{k_2-i-m}}u^{\tau}_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\right|+\big|\beta_1(\theta)\big|\cdot\left|\frac{\partial^{k_2-i-m}}{\partial z^{k_2-i-m}}u^{\tau}_{x}(\theta-\tfrac{\tau}{2},\beta,z)\right|\right)d\theta+$$
$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1}C^{j}_{k_1}\cdot p^{k_1+k_2}\cdot\big(U^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{2})\big)^{p}\cdot\sum_{l=0}^{k_1-j}C^{l}_{k_1-j}\cdot\left|\frac{\partial^{l}}{\partial x^{l}}\mu_1(\theta,x)\right|\times$$
$$\times\left(\big|\alpha_2(\theta)\big|\cdot\left|\frac{\partial^{k_1-j-l}}{\partial x^{k_1-j-l}}u^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\right|+\big|\beta_2(\theta)\big|\cdot\left|\frac{\partial^{k_1-j-l}}{\partial x^{k_1-j-l}}u^{\tau}_{z}(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,\alpha)\right|\right)d\theta+$$

$$+ 2 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} \sum_{r=0}^{k_1} \sum_{q=0}^{k_2} C_{k_1}^r \cdot C_{k_2}^q \cdot p^{k_1+k_2} \cdot \big(U^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{2})\big)^p \cdot \left| \frac{\partial^{k_1-r+k_2-q}}{\partial x^{k_1-r} \partial z^{k_2-q}} g(\theta, x, z) \right| d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{2} < \xi \le t,\ t \in \Big(\tfrac{\tau}{2}, \tau\Big],\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6. \quad (3.28)$$

Возьмём от обеих частей неравенства (3.28) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{2}<\xi\le t}$. Учитывая (3.10), (3.11), (3.19), (3.20), получим оценку

$$U_{k_1,k_2}^\tau(t) \le U_{k_1,k_2}(0) + C \cdot p^{k_1+k_2} \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} (U^\tau(\theta))^p \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^\tau(\theta)\, d\theta +$$

$$+ C \cdot p^{k_1+k_2} \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} (U^\tau(\theta))^p \, d\theta,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6. \quad (3.29)$$

Складывая (3.26) и (3.29), с учетом оценки (3.23) получаем

$$U^\tau(t) \le U(0) + C \cdot p^{12} \cdot \int\limits_0^\tau \mathcal{P}_{p+1}\Big(U^\tau(\theta)\Big)\, d\theta. \quad (3.30)$$

где $\mathcal{P}_{p+1}(\chi) = \widetilde{C} \cdot \big(\chi^{p+1} + \chi^p + \ldots + \chi + 1\big)$ — полином степени $p+1$, $\widetilde{C}$ — ненулевая, не зависящая от τ константа.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathcal{P}_{p+1}\big(\omega(t)\big), \qquad \omega(0) = U(0). \quad (3.31)$$

По теореме Коши [61] решение $\omega(t)$ задачи (3.31) существует на некотором интервале $[0, t_*]$, где $t_* \in (0, T]$ зависит от C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ монотонно возрастает на интервале $[0, t_*]$ и $\omega(t) \in C^1\big([0, t_*]\big)$. Из (3.30), (3.31) следует, что если для некоторого $0 < t_0 \le t$ справедливо $U^\tau(t_0) \le \omega(t_0)$, то при $t \in [t_0, t_*]$ выполняется $U^\tau(t) \le \omega(t)$.

Так как $U^\tau(0) \le \omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует, что на нулевом целом шаге справедлива оценка: $U^\tau(t) \le \omega(\tau)$, $t \in [0, \tau]$. На первом целом временном шаге, при $t \in (\tau, 2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим, что $U^\tau(t) \le \omega(2\tau)$, $t \in [0, 2\tau]$. Через конечное число шагов имеем: $U^\tau(t) \le \omega(t_*) \le C$, $t \in [0, t_*]$.

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(t,x,z)\right| \le C,\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \tag{3.32}$$

Из оценок (3.32) следует, что правые части уравнений (3.16), (3.17) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \le C,\ \ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}.$$

Дифференцируя уравнения (3.16), (3.17) по x и z, в силу (3.32) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right| \le C,\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,4,\ \ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \tag{3.33}$$

Оценки (3.32), (3.33) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности (т. **1.1**). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (3.16)–(3.18) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (т. **1.3**) является решением вспомогательной прямой задачи (3.14), (3.3), причём $u(t,x,z)\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, где $M>0$ — целая постоянная,

$$G^M_{[0,t_*]} = \left\{(t,x,z)\ \middle|\ 0\le t\le t_*,\ |x|\le M,\ |z|\le M\right\},$$

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right) = \left\{u(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u\in C\left(G^M_{[0,t_*]}\right),\right.$$
$$\left. k=0,1,\ldots,l,\ k_1=0,1,\ldots,l_1,\ k_2=0,1,\ldots,l_2\right\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной M решение $u(t,x,z)$ задачи (3.14), (3.3) принадлежит классу $C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| \le C,\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \tag{3.34}$$

Из (3.12) и (3.14), с учетом условий (3.10), (3.11) и оценки (3.34), следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ принадлежат классу

$$Z(t_*) = \Big\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\Big|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big) \Big\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t,x,z) \right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \lambda(t,x,z) \right| \le C, \; (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}. \quad (3.35)$$

3.1.4 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (3.12) и удовлетворяет условию (3.4), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи (3.14), (3.3), то при подстановке $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ в (3.1) и (3.3) получим тождества.

Докажем выполнение условий переопределения (3.5), (3.6). Положим в уравнении (3.14) $z = \alpha$, получим

$$\begin{aligned} u_t(t,x,\alpha) - \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,x))^p} \cdot \varphi_t(t,x) = \alpha_1(t) \cdot u_{xx}(t,x,\alpha) + \beta_1(t) \cdot u_x(t,x,\alpha) - \\ - \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,x))^p} \cdot \Big(\alpha_1(t) \cdot \varphi_{xx}(t,x) + \beta_1(t) \cdot \varphi_x(t,x) \Big) + \alpha_2(t) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + \\ + \beta_2(t) \cdot u_z(t,x,\alpha) - \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,x))^p} \cdot \Big(\alpha_2(t) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + \beta_2(t) \cdot u_z(t,x,\alpha) \Big) - \\ - \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,\beta))^p} \cdot \Big(\alpha_1(t) \cdot u_{xx}(t,\beta,\alpha) + \beta_1(t) \cdot u_x(t,\beta,\alpha) - \alpha_1(t) \cdot \varphi_{xx}(t,\beta) - \\ - \beta_1(t) \cdot \varphi_x(t,\beta) \Big) + f(t,x,\alpha) - \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,x))^p} \cdot f(t,x,\alpha). \quad (3.36) \end{aligned}$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,x))^p} = \frac{(u(t,x,\alpha))^p - (\varphi(t,x))^p + (\varphi(t,x))^p}{(\varphi(t,x))^p} = \\ = 1 + \big(u(t,x,\alpha) - \varphi(t,x)\big) \cdot \frac{u^{p-1} + u^{p-2} \cdot \varphi + u^{p-3} \cdot \varphi^2 + \ldots + u \cdot \varphi^{p-2} + \varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}. \end{aligned}$$

Подставим преобразованное выражение в уравнение (3.36).

$$u_t(t,x,\alpha) - \varphi_t(t,x) - A_1(t,x) \cdot \Big(u(t,x,\alpha) - \varphi(t,x) \Big) =$$

$$= \alpha_1(t)\cdot\Big(u_{xx}(t,x,\alpha)-\varphi_{xx}(t,x)\Big)+\beta_1(t)\cdot\Big(u_x(t,x,\alpha)-\varphi_x(t,x)\Big)-$$
$$-A_2(t,x)\cdot\Big(u(t,x,\alpha)-\varphi(t,x)\Big)-A_3(t,x)\cdot\Big(u(t,x,\alpha)-\varphi(t,x)\Big)-$$
$$-A_4(t,x)\cdot\alpha_1(t)\cdot\Big(u_{xx}(t,\beta,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)\Big)-A_4(t,x)\cdot\beta_1(t)\cdot\Big(u_x(t,\beta,\alpha)-\varphi_x(t,\beta)\Big)-$$
$$-A_5(t,x)\cdot\Big(u(t,x,\alpha)-\varphi(t,x)\Big),$$

где

$$A_1(t,x)=\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}\cdot\varphi_t(t,x);$$
$$A_2(t,x)=\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}\times$$
$$\times\Big(\alpha_1(t)\cdot\varphi_{xx}(t,x)+\beta_1(t)\cdot\varphi_x(t,x)\Big);$$
$$A_3(t,x)=\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}\times$$
$$\times\Big(\alpha_2(t)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)+\beta_2(t)\cdot u_z(t,x,\alpha)\Big);$$
$$A_4(t,x)=\frac{(u(t,x,\alpha))^p}{(\varphi(t,\beta))^p};$$
$$A_5(t,x)=\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}\cdot f(t,x,\alpha).$$

Введём обозначение: $\nu^1(t,x)=u(t,x,\alpha)-\varphi(t,x)$. Из условия согласования (3.7) следует, что $\nu^1(0,x)=u(0,x,\alpha)-\varphi(0,x)=u_0(x,\alpha)-\varphi(0,x)=0$.

Функция $\nu^1(t,x)$ является решением следующей задачи:

$$\nu^1_t(t,x)=\alpha_1(t)\cdot\nu^1_{xx}(t,x)+\beta_1(t)\cdot\nu^1_x(t,x)+F_1(t,x)\cdot\nu^1(t,x)-$$
$$-A_4(t,x)\cdot\alpha_1(t)\cdot\nu^1_{xx}(t,\beta)-A_4(t,x)\cdot\beta_1(t)\cdot\nu^1_x(t,\beta), \quad (3.37)$$

$$\nu^1(0,x)=0, \quad (3.38)$$

здесь $F_1(t,x)=A_1(t,x)-A_2(t,x)-A_3(t,x)-A_5(t,x)$.

Из выполнения условий (3.10), (3.11) и неравенства (3.35) следует, что функции $F_1(t,x)$, $A_4(t,x)$ и их производные до второго порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,t_*]}$. Значит, задача (3.37), (3.38) удовлетворяет условиям леммы **1.2** (при $a_1=\alpha_1(t)$, $a_2=\beta_1(t)$, $a_3=F_1(t,x)$, $a_4=A_4(t,x)\cdot\alpha_1(t)$, $a_5=A_4(t,x)\cdot\beta_1(t)$, $d(t)=\beta$, $r=0$). В силу леммы **1.2** решение задачи (3.37), (3.38) единственно. Таким решением является функция $\nu^1(t,x)=0$. Следовательно, $u(t,x,\alpha)=\varphi(t,x)$. Таким образом, доказано выполнение условия переопределения (3.5). Рассуждая аналогичным образом, учитывая условия согласования (3.8), (3.9), доказываем выполнение условия переопределения (3.6).

Следовательно, пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ является решением обратной задачи (3.1)–(3.6).

3.1.5 Единственность решения обратной задачи

Пусть выполняются условия (3.7) – (3.11) и существуют два классических решения задачи (3.1) – (3.6): $\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\}$, $\{\widetilde{u}(t,x,z),\widetilde{\lambda}(t,x,z)\}$. Пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ — решение задачи (3.1) – (3.6), где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (3.12) и удовлетворяет условию (3.4). А функции $\widetilde{u}(t,x,z)$, $\widetilde{\lambda}(t,x,z)=\widetilde{\lambda}_1(t,x)+\widetilde{\lambda}_2(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (3.1) – (3.6), которое удовлетворяет условиям (3.4) и (3.35).

В $G_{[0,t_*]}$ справедливы следующие соотношения:

$$u_t(t,x,z)=L\left(u(t,x,z)\right)+\left(u(t,x,z)\right)^p\cdot\lambda(t,x,z)+f(t,x,z),$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\ u(t,x,\alpha)=\varphi(t,x),\ u(t,\beta,z)=\psi(t,z).$$

$$\widetilde{u}_t(t,x,z)=L\left(\widetilde{u}(t,x,z)\right)+\left(\widetilde{u}(t,x,z)\right)^p\cdot\widetilde{\lambda}(t,x,z)+f(t,x,z),$$

$$\widetilde{u}(0,x,z)=u_0(x,z),\ \widetilde{u}(t,x,\alpha)=\varphi(t,x),\ \widetilde{u}(t,\beta,z)=\psi(t,z).$$

Функции $h(t,x,z)=u(t,x,z)-\widetilde{u}(t,x,z)$ и $\sigma(t,x,z)=\sigma_1(t,x)+\sigma_2(t,z)=$ $=\lambda(t,x,z)-\widetilde{\lambda}(t,x,z)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$h_t(t,x,z)=L\left(h(t,x,z)\right)+K(t,x,z)\cdot h(t,x,z)+\left(u(t,x,z)\right)^p\cdot\sigma(t,x,z), \tag{3.39}$$

$$h(0,x,z)=0,\ h(t,x,\alpha)=0,\ h(t,\beta,z)=0. \tag{3.40}$$

Здесь являются известными функции $\left(u(t,x,z)\right)^p$ и

$$K(t,x,z)=\widetilde{\lambda}(t,x,z)\cdot\left(u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\widetilde{u}+u^{p-3}\cdot\widetilde{u}^2+\ldots+u\cdot\widetilde{u}^{p-2}+\widetilde{u}^{p-1}\right).$$

Последовательно полагаем в уравнении (3.39) $x=\beta$, $z=\alpha$. Используя (3.40), выражаем коэффициент $\sigma(t,x,z)$:

$$\begin{aligned}\sigma_1(t,x)+\sigma_2(t,z)=&-\frac{\alpha_2(t)\cdot h_{zz}(t,x,\alpha)+\beta_2(t)\cdot h_z(t,x,\alpha)}{u^p(t,x,\alpha)}-\\&-\frac{\alpha_1(t)\cdot h_{xx}(t,\beta,z)+\beta_1(t)\cdot h_x(t,\beta,z)}{u^p(t,\beta,z)}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Подставляя выражение (3.41) в уравнение (3.39), получим

$$h_t = L\left(h(t,x,z)\right) + K(t,x,z)\cdot h(t,x,z) + N_1(t,x,z)\cdot\Big(\alpha_2(t)\cdot h_{zz}(t,x,\alpha)+$$

$$+\beta_2(t)\cdot h_z(t,x,\alpha)\Big) + N_2(t,x,z)\cdot\Big(\alpha_1(t)\cdot h_{xx}(t,\beta,z)+\beta_1(t)\cdot h_x(t,\beta,z)\Big), \quad (3.42)$$

$$h(0,x,z) = 0, \quad (3.43)$$

здесь $N_1(t,x,z) = -\dfrac{u^p(t,x,z)}{\varphi^p(t,x)},\ N_2(t,x,z) = -\dfrac{u^p(t,x,z)}{\psi^p(t,z)}$.

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на $[0,t_*]$ функции

$$p_{k_1,k_2}(t) = \sup_{G_{[0,t]}}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}h(\xi,x,z)\right|,\ k_1,k_2 = 0,1,2,\ 0\le t\le t_*.$$

Учитывая условия (3.10), (3.11), (3.35), в силу принципа максимума для уравнения (3.42) получим справедливость неравенства

$$\big|h(\xi,x,z)\big| \le C\cdot t\cdot\big(p_{0,2}(t)+p_{0,1}(t)+p_{2,0}(t)+p_{1,0}(t)\big),$$

$$0<\xi\le t,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}.$$

Отсюда, в силу неотрицательности функций $p_{k_1,k_2}(t)$, $k_1,k_2 = 0,1,2$, следует

$$p_{0,0}(t) \le C\cdot t\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{2}p_{k_1,k_2}(t),\ 0<t\le t_*. \quad (3.44)$$

Дифференцируя (3.42), (3.43) один, а затем два раза по x и по z, согласно принципу максимума для параболических уравнений

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}h_t(t,x,z) = \alpha_1(t)\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+2}}{\partial x^{k_1+2}\partial z^{k_2}}h(t,x,z) + \alpha_2(t)\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2+2}}h(t,x,z)+$$

$$+\beta_1(t)\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+1}}{\partial x^{k_1+1}\partial z^{k_2}}h(t,x,z) + \beta_2(t)\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+1}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2+1}}h(t,x,z)+$$

$$+\sum_{r=0}^{k_1}\sum_{q=0}^{k_2}C_{k_1}^{r}\cdot C_{k_2}^{q}\cdot\frac{\partial^{r+q}}{\partial x^r\partial z^q}K(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-r+k_2-q}}{\partial x^{k_1-r}\partial z^{k_2-q}}h(t,x,z)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k_1}C_{k_1}^{j}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}N_1(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Big(\alpha_2(t)\cdot h_{zz}(t,x,\alpha)+\beta_2(t)\cdot h_z(t,x,\alpha)\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k_2}C_{k_2}^{i}\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}N_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Big(\alpha_1(t)\cdot h_{xx}(t,\beta,z)+\beta_1(t)\cdot h_x(t,\beta,z)\Big),$$

$k_1, k_2 = 0, 1, 2$, получим аналогичные оценки

$$p_{k_1,k_2}(t) \leq C \cdot t \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t),\ k_1, k_2 = 0, 1, 2,\ 0 < t \leq t_*. \tag{3.45}$$

Сложим (3.44) и (3.45), получим

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t) \leq C \cdot t \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t),\ 0 < t \leq t_*.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{k_1,k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t) = 0$ при $t \in [0, \eta]$, $\eta < \frac{1}{C}$.

Доказано, что $h(t, x, z) = 0$ при $(t, x, z) \in G_{[0,\eta]}$. Повторяя рассуждения для $t \in [\eta, 2\eta]$, получим, что $h(t, x, z) = 0$, $(t, x, z) \in G_{[0,2\eta]}$. Через конечное число шагов имеем: $h(t, x, z) \equiv 0$ в $G_{[0,t_*]}$. То есть $u(t, x, z) = \widetilde{u}(t, x, z)$ в $G_{[0,t_*]}$.

Из (3.39) и (3.40) для $\sigma(t, x, z)$ следует выполнение соотношения

$$(u(t, x, z))^p \cdot \sigma(t, x, z) = 0. \tag{3.46}$$

Рассматривая (3.46) при $x = \beta$ и $z = \alpha$, используя условия переопределения (3.5), (3.6) и условие согласования (3.9), в $G_{[0,t_*]}$ получим

$$(\psi(t, z))^p \cdot \big(\sigma_1(t, \beta) + \sigma_2(t, z)\big) = 0, \quad (\varphi(t, x))^p \cdot \big(\sigma_1(t, x) + \sigma_2(t, \alpha)\big) = 0,$$

$$(\varphi(t, \beta))^p \cdot \big(\sigma_1(t, \beta) + \sigma_2(t, \alpha)\big) = 0.$$

Согласно (3.10), выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_1(t, \beta) + \sigma_2(t, z) = 0, \tag{3.47}$$

$$\sigma_1(t, x) + \sigma_2(t, \alpha) = 0, \tag{3.48}$$

$$\sigma_1(t, \beta) + \sigma_2(t, \alpha) = 0. \tag{3.49}$$

Сложим (3.47) и (3.48), с учетом (3.49) получим, что $\sigma_1(t, x) + \sigma_2(t, z) = 0$, то есть $\lambda(t, x, z) = \widetilde{\lambda}(t, x, z)$, $(t, x, z) \in G_{[0,t_*]}$.

Таким образом, доказано, что решение $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x, z)$ обратной задачи (3.1)–(3.6) единственно в классе $Z(t_*)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 ([53], [109])**.** *Пусть выполняются условия* (3.7)–(3.11) *на входные данные. Тогда существует константа* t_**,* $0 < t_* \leq T$*, зависящая от степени* *p и постоянных, ограничивающих входные данные, такая, что в классе $Z(t_*)$ существует единственное решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$ обратной задачи* (3.1)–(3.6), *удовлетворяющее соотношению* (3.35).

3.1.6 Пример

Для исследованной задачи построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы **3.1**, и приведено решение, соответствующее этим данным. Пример показывает, что исследованный класс задач не пуст.

Пример 3.1. *В полосе $G_{[0,T]} = \left\{(t,x,z) \,|\, 0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения*

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + u \cdot \lambda(t,x,z) + \sin 2x \cdot (\cos z + A)\,,\ (t,x,z) \in G_{(0,T]},\quad (3.50)$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z) = (\cos z + A) \cdot (\sin x + B)$.

Здесь A, $B > 1$ – некоторые постоянные. Наряду с функцией $u(t,x,z)$ необходимо определить также функцию $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$.

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x) = (A + \cos\alpha) \cdot (B + \sin(t+x))\,,$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z) = (A + \cos z) \cdot (B + \sin(t+\beta))\,,$$

где $\alpha, \beta = const$, выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x) = (A + \cos\alpha) \cdot (B + \sin x)\,,$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z) = (A + \cos z) \cdot (B + \sin\beta)\,,$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha) = (A + \cos\alpha) \cdot (B + \sin(t+\beta))\,.$$

Условия (3.10) *на входные данные выполнены при $\delta_1 = \delta_2 = (A-1)\cdot(B-1)$. Функции $f(t,x,z) = \sin 2x \cdot (\cos z + A)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных* (3.11).

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = (A + \cos z) \cdot (B + \sin(t+x))\,,$$

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z) = \frac{\sin(t+x) - \sin 2x}{B + \sin(t+x)} + \frac{\cos z + \sin z}{A + \cos z}.$$

Подставляя полученные функции в (3.50), *получим верное тождество.*

3.2 Коэффициент представим в виде произведения

3.2.1 Постановка задачи

В полосе $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + u^p \cdot \lambda(t,x,z) + f(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \tag{3.51}$$

$$L\left(u(t,x,z)\right) = \alpha_1(t) \cdot u_{xx}(t,x,z) + \alpha_2(t) \cdot u_{zz}(t,x,z) + \\ + \beta_1(t) \cdot u_x(t,x,z) + \beta_2(t) \cdot u_z(t,x,z), \tag{3.52}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.53}$$

Здесь степень $p \ge 1$ — целая постоянная, коэффициенты $\alpha_k(t) \ge \alpha_0 > 0$, $\beta_k(t)$, $k = 1,2$, являются вещественнозначными, непрерывными и ограниченными на $[0,T]$ функциями.

Наряду с функцией $u(t,x,z)$ необходимо определить также функцию

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z). \tag{3.54}$$

Пусть функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет условиям переопределения

$$u\big(t,x,a(t)\big) = \varphi(t,x), \tag{3.55}$$

$$u\big(t,b(t),z\big) = \psi(t,z), \tag{3.56}$$

где кривые $a(t)$, $b(t) \in C^1([0,T])$, и выполнены условия согласования

$$u_0\big(x,a(0)\big) = \varphi(0,x), \tag{3.57}$$

$$u_0\big(b(0),z\big) = \psi(0,z), \tag{3.58}$$

$$\varphi\big(t,b(t)\big) = \psi\big(t,a(t)\big). \tag{3.59}$$

Относительно функций $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$, определённых в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (3.60), и удовлетворяют ему при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| +$$
$$+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \leq C,\ l_1,l_2=0,1,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \quad (3.60)$$

Пусть также имеют место следующие ограничения на входные данные:

$$\big|\varphi(t,x)\big| \geq \delta_1 > 0,\ \big|\psi(t,z)\big| \geq \delta_2 > 0,\ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]}, \quad (3.61)$$

$$\Big|\varphi_t\big(t,b(t)\big) - \alpha_1(t)\cdot\varphi_{xx}\big(t,b(t)\big) - \alpha_2(t)\cdot\psi_{zz}\big(t,a(t)\big) - \beta_1(t)\cdot\varphi_x\big(t,b(t)\big) -$$
$$-\beta_2(t)\cdot\psi_z\big(t,a(t)\big)\cdot\big(1+a'(t)\big) - f\big(t,b(t),a(t)\big)\Big| \geq \delta_3,\ \forall t\in[0,T], \quad (3.62)$$

где δ_1, δ_2, δ_3 — некоторые постоянные.

3.2.2 Приведение обратной задачи к прямой

Приведём обратную задачу (3.51)–(3.56) к вспомогательной прямой. Положим $x=b(t)$ в уравнении (3.51) и выразим коэффициент при нелинейном члене. Затем аналогичным образом преобразуем (3.51) при $z=a(t)$. Перемножая полученные соотношения, учитывая результат одновременной подстановки $x=b(t)$, $z=a(t)$ в (3.51) и условия переопределения (3.55), (3.56), получим выражение на неизвестный коэффициент в следующем виде:

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) =$$
$$= A_0(t)\cdot\Big(A_1(t,x) + A_2(t,x)\cdot u_{zz}(t,x,a(t)) + A_3(t,x)\cdot u_z(t,x,a(t))\Big)\times$$
$$\times\Big(B_1(t,z) + B_2(t,z)\cdot u_{xx}(t,b(t),z) + B_3(t,z)\cdot u_x(t,b(t),z)\Big), \quad (3.63)$$

где функции $A_0(t)$, $A_i(t,x)$, $B_i(t,z)$, $i=1,2,3$, известны и имеют вид

$$\begin{aligned}
&A_1(t,x) = \frac{\varphi_t(t,x)-\alpha_1(t)\varphi_{xx}(t,x)-\beta_1(t)\varphi_x(t,x)-f(t,x,a(t))}{\varphi^p(t,x)};\\
&B_1(t,z) = \frac{\psi_t(t,z)-\alpha_2(t)\psi_{zz}(t,z)-\beta_2(t)\psi_z(t,z)-f(t,b(t),z)}{\psi^p(t,z)};\\
&A_0(t) = \frac{\varphi^p(t,b(t))}{æ(t)};\ A_2(t,x) = -\frac{\alpha_2(t)}{\varphi^p(t,x)};\ B_2(t,z) = -\frac{\alpha_1(t)}{\psi^p(t,z)};\\
&A_3(t,x) = -\frac{\beta_2(t)\cdot(1+a'(t))}{\varphi^p(t,x)};\ B_3(t,z) = -\frac{\beta_1(t)\cdot(1+b'(t))}{\psi^p(t,z)};
\end{aligned} \quad (3.64)$$

$$
\begin{aligned}
æ(t) = \varphi_t(t, b(t)) - \alpha_1(t) \cdot \varphi_{xx}(t, b(t)) - \alpha_2(t) \cdot \psi_{zz}(t, a(t)) - \\
- \beta_1(t) \cdot \varphi_x(t, b(t)) - \beta_2(t) \cdot \psi_z(t, a(t)) \cdot (1 + a'(t)) - f(t, b(t), a(t)).
\end{aligned}
$$

Теперь подставим выражение (3.63) в уравнение (3.51) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$
u_t(t, x, z) = L\left(u(t, x, z)\right) + \lambda(t, x, z) \cdot u^p(t, x, z) + f(t, x, z), \ (t, x, z) \in G_{(0,T]}, \quad (3.65)
$$

с начальным условием (3.53) и коэффициентом $\lambda(t, x, z)$ в виде (3.63).

3.2.3 Существование решения прямой задачи

Разрешимость прямой задачи (3.65), (3.53) будем доказывать при помощи метода слабой аппроксимации ([12], [87]). Расщепим уравнение (3.65) на два дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{2}$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах.

$$
u_t^\tau = 2 \cdot L\left(u^\tau(t, x, z)\right), \ n\tau < t \le \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau; \quad (3.66)
$$

$$
\begin{aligned}
u_t^\tau = 2 \cdot \left(u^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, x, z)\right)^p \cdot M^\tau\left(t, x, z, u^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, x, z)\right) + 2 \cdot f(t, x, z), \\
\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau < t \le (n+1)\tau; \quad (3.67)
\end{aligned}
$$

$$
u^\tau(0, x, z) = u_0(x, z). \quad (3.68)
$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$, $N\tau = T$, а коэффициент M^τ имеет вид

$$
\begin{aligned}
& M^\tau\left(t, x, z, u^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, x, z)\right) = \\
& = A_0(t) \cdot \Big(A_1(t, x) + A_2(t, x) \cdot u_{zz}^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, x, a(t)) + A_3(t, x) \cdot u_z^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, x, a(t))\Big) \times \\
& \times \Big(B_1(t, z) + B_2(t, z) \cdot u_{xx}^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, b(t), z) + B_3(t, z) \cdot u_x^\tau(t - \tfrac{\tau}{2}, b(t), z)\Big). \quad (3.69)
\end{aligned}
$$

Введём следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
& U_{k_1,k_2}(0) = \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right|, \\
& U_{k_1,k_2}^\tau(t) = \sup_{n\tau < \xi \le t} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(\xi, x, z) \right|, \ n\tau < t \le (n+1)\tau, \\
& k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6, \\
& U(0) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}(0), \quad U^\tau(t) = \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^\tau(t).
\end{aligned}
\quad (3.70)
$$

Справедливы утверждения

1. $\left|\dfrac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\dfrac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le U^\tau_{k_1,k_2}(t) \le U^\tau(t),\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,$

$$n\tau<\xi\le t,\ n\tau<t\le(n+1)\tau; \quad (3.71)$$

2. функции $U^\tau_{k_1,k_2}(t), U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (3.66)–(3.68).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n=0$). На первом дробном шаге, при $t\in\big(0,\frac{\tau}{2}\big]$ рассматриваем уравнение (3.66) с начальным условием (3.68).

По теореме принципа максимума для задачи Коши (теорема **1.2**) имеем

$$\big|u^\tau(\xi,x,z)\big| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u_0(x,z)\big|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{2}\big]\,. \quad (3.72)$$

Дифференцируя уравнение (3.66) и начальное условие (3.68) по x и по z от 1 до 6 раз, в силу принципа максимума получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$

$$0<\xi\le t,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{2}\big],\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \quad (3.73)$$

Возьмём от обеих частей неравенств (3.72) и (3.73) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, сложим их и, согласно (3.70), (3.71), получим

$$U^\tau(t)\le U(0),\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{2}\big]. \quad (3.74)$$

На втором дробном шаге, $t\in\big(\frac{\tau}{2},\tau\big]$, рассматривается уравнение (3.67) с начальным условием

$$u^\tau\,\Big|_{t=\frac{\tau}{2}} = u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2},x,z\right).$$

Проинтегрируем уравнение (3.67) по временной переменной. Справедливо неравенство

$$\big|u^\tau(\xi,x,z)\big| \le \big|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2},x,z\right)\big| + 2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\big(\big|u^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big|\big)^p\times$$

$$\times\Big|M^\tau\left(\theta,x,z,u^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,z)\right)\Big|\,d\theta+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\big|f(\theta,x,z)\big|\,d\theta,\ \tfrac{\tau}{2}<\xi\le t,\ t\in\Big(\tfrac{\tau}{2},\tau\Big]. \quad (3.75)$$

Из условий (3.60)–(3.62), обозначений (3.64) и непрерывной дифференцируемости функций $a(t)$, $b(t)$ следует, что функции $A_0(t)$, $A_i(t,x)$, $B_i(t,z)$, $i=1,2,3$, и их производные по x и по z до 6 порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,T]}$. Возьмём от обеих частей неравенства (3.75) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{2}<\xi\le t}$. Получим оценку

$$\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le t}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi,x,z)\big|\le\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2},x,z\right)\big|+$$
$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|f(\xi,x,z)\big|\,d\theta+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left(\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u^\tau(\xi-\tfrac{\tau}{2},x,z)\big|\right)^p\times$$
$$\times\sup_{\frac{\tau}{2}<\xi\le\theta}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|M^\tau\left(\xi,x,z,u^\tau(\xi-\tfrac{\tau}{2},x,z)\right)\Big|\,d\theta,\ \tfrac{\tau}{2}<\xi\le t,\ t\in\Big(\tfrac{\tau}{2},\tau\Big]. \quad (3.76)$$

Из (3.76), с учетом обозначений (3.69), (3.70), условий (3.60)–(3.62), (3.71) и непрерывной дифференцируемости функций $a(t)$, $b(t)$, получим

$$U^\tau_{0,0}(t)\le U_{0,0}(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(U^\tau_{0,0}(\theta-\tfrac{\tau}{2})\right)^p\cdot\Big(1+U^\tau_{0,2}(\theta-\tfrac{\tau}{2})+U^\tau_{0,1}(\theta-\tfrac{\tau}{2})\Big)\times$$
$$\times\Big(1+U^\tau_{2,0}(\theta-\tfrac{\tau}{2})+U^\tau_{1,0}(\theta-\tfrac{\tau}{2})\Big)\,d\theta. \quad (3.77)$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ — некоторые независящие от параметра расщепления τ постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от степени p, констант C, δ_1, δ_2, δ_3 из (3.60) – (3.62) и констант, ограничивающих функции $a(t)$, $b(t)$, $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$, $k=1,2$.

Обозначим результат дифференцирования функции $(u^\tau(t,x,z))^p$ k_1 раз по x и k_2 раз по z через $\Delta^\tau_{k_1,k_2}(t,x,z)$, $k_1,k_2=0,1,\ldots,6$, то есть

$$\Delta^\tau_{0,0}(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)=\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\right)^p,$$
$$\Delta^\tau_{1,0}(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)=p\cdot\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\right)^{p-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z),$$
$$\Delta^\tau_{0,1}(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)=p\cdot\left(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\right)^{p-1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z),$$

$$\Delta^\tau_{1,1}(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)=p\cdot(p-1)\cdot\big(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\big)^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial z}u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)+p\cdot\big(u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)\big)^{p-1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,z),$$

и так далее до $\Delta^\tau_{6,6}(t-\tfrac{\tau}{3},x,z)$.

В силу (3.70), (3.71) для всех $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$ справедливо

$$\left|\Delta^\tau_{k_1,k_2}(t,x,z)\right|\leq p^{k_1+k_2}\cdot(U^\tau(t))^p\,,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \tag{3.78}$$

Продифференцируем (3.67) по x и z от одного до шести раз, проинтегрируем полученное выражение по временной переменной и, учитывая обозначения (3.69) и неравенство (3.78), получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right|\leq\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau(\tfrac{\tau}{2},x,z)\right|+$$
$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}A_0(t)\cdot\sum_{r=0}^{k_1}\sum_{q=0}^{k_2}C^r_{k_1}\cdot C^q_{k_2}\cdot p^{r+q}\cdot\big(U^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{2})\big)^p\cdot\Bigg(\left|\frac{\partial^{k_1-r}}{\partial x^{k_1-r}}A_1(\theta,x)\right|+$$
$$+\sum_{m_1=0}^{k_1-r}C^{m_1}_{k_1-r}\left|\frac{\partial^{m_1}}{\partial x^{m_1}}A_2(\theta,x)\right|\cdot\left|\frac{\partial^{k_1-r-m_1}}{\partial x^{k_1-r-m_1}}u^\tau_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,a(\theta))\right|+$$
$$+\sum_{m_1=0}^{k_1-r}C^{m_1}_{k_1-r}\cdot\left|\frac{\partial^{m_1}}{\partial x^{m_1}}A_3(\theta,x)\right|\cdot\left|\frac{\partial^{k_1-r-m_1}}{\partial x^{k_1-r-m_1}}u^\tau_{z}(\theta-\tfrac{\tau}{2},x,a(\theta))\right|\Bigg)\times$$
$$\times\Bigg(\left|\frac{\partial^{k_2-q}}{\partial z^{k_2-q}}B_1(\theta,z)\right|+\sum_{m_2=0}^{k_2-q}C^{m_2}_{k_2-q}\left|\frac{\partial^{m_2}}{\partial z^{m_2}}B_2(\theta,z)\right|\cdot\left|\frac{\partial^{k_2-q-m_2}}{\partial x^{k_2-q-m_2}}u^\tau_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{2},b(\theta),z)\right|+$$
$$+\sum_{m_2=0}^{k_2-q}C^{m_2}_{k_2-q}\cdot\left|\frac{\partial^{m_2}}{\partial z^{m_2}}B_3(\theta,z)\right|\cdot\left|\frac{\partial^{k_2-q-m_2}}{\partial x^{k_2-q-m_2}}u^\tau_{x}(\theta-\tfrac{\tau}{2},b(\theta),z)\right|\Bigg)\,d\theta+$$
$$+2\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}f(\theta,x,z)\right|d\theta,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{\tau}{2}<\xi\leq t,\ t\in\Big(\tfrac{\tau}{2},\tau\Big]. \tag{3.79}$$

Возьмём от обеих частей неравенства (3.79) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{2}<\xi\leq t}$. Учитывая, что $a(t)$, $b(t)\in C^1([0,T])$ и имеют место условия (3.60)–(3.62) и обозначения (3.70), (3.71), получим оценку

$$U^\tau_{k_1,k_2}(t)\leq U_{k_1,k_2}(0)+C\cdot p^{k_1+k_2}\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(\big(U^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{2})\big)^p+1\Big)\,d\theta+$$

$$+ C \cdot p^{k_1+k_2} \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big(U^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{2})\big)^p \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U^\tau_{k_1,k_2}(\theta - \tfrac{\tau}{2})\, d\theta +$$

$$+ C \cdot p^{k_1+k_2} \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big(U^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{2})\big)^p \cdot \left(\sum_{k_1,k_2=0}^{6} U^\tau_{k_1,k_2}(\theta - \tfrac{\tau}{2})\right)^2 d\theta,$$

$$k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6,\ t \in \left(\tfrac{\tau}{2}, \tau\right]. \quad (3.80)$$

Складывая неравенства (3.77) и (3.80), учитывая свойства функции $U^\tau(t)$ и оценку (3.74), имеем

$$U^\tau(t) \le U(0) + C \cdot p^{12} \cdot \int\limits_0^\tau \mathcal{P}_{p+2}\Big(U^\tau(\theta)\Big)\, d\theta,\ t \in (0, \tau]. \quad (3.81)$$

где $\mathcal{P}_{p+2}(\chi) = \widetilde{C} \cdot \big(\chi^{p+2} + \chi^{p+1} + \chi^p + \ldots + \chi + 1\big)$ — полином степени $p+2$, $\widetilde{C}$ — ненулевая, не зависящая от τ константа.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathcal{P}_{p+2}\big(\omega(t)\big), \qquad \omega(0) = U(0). \quad (3.82)$$

В силу теоремы Коши [61] решение $\omega(t)$ задачи (3.82) существует на некотором интервале $[0, t_*]$, где $t_* \in (0, T]$ зависит от константы C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ является монотонно возрастающей на интервале $[0, t_*]$ и принадлежит классу $C^1\big([0, t_*]\big)$.

Из (3.81), (3.82) следует, что если для некоторого $0 < t_0 \le t$ справедливо $U^\tau(t_0) \le \omega(t_0)$, то для $t \in [t_0, t_*]$ выполняется $U^\tau(t) \le \omega(t)$. Так как $U^\tau(0) \le \omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует, что $U^\tau(t) \le \omega(\tau)$, $t \in [0, \tau]$.

На первом целом временном шаге, при $t \in (\tau, 2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим, что $U^\tau(t) \le \omega(2\tau)$, $t \in [0, 2\tau]$.

Через конечное число шагов имеем: $U^\tau(t) \le \omega(t_*) \le C$, $t \in [0, t_*]$.

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z)\right| \le C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6, (t, x, z) \in G_{[0, t_*]}. \quad (3.83)$$

Из оценок (3.83) следует, что правые части уравнений (3.66), (3.67) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений ограничены равномерно по τ, то есть

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \le C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}.$$

Дифференцируя уравнения (3.66), (3.67) по x и z, в силу (3.83) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right| \le C,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,4,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \tag{3.84}$$

Оценки (3.83), (3.84) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности (т. **1.1**). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (3.66)–(3.68) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (т. **1.3**) является решением задачи (3.65), (3.53), причём $u(t,x,z)\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)$, где $M>0$ — целая постоянная,

$$G^M_{[0,t_*]}=\left\{(t,x,z)\ \middle|\ 0\le t\le t_*,\ |x|\le M,\ |z|\le M\right\},$$

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G^M_{[0,t_*]}\right)=\left\{u(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u,\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u\in C\left(G^M_{[0,t_*]}\right),\right.$$
$$\left.k=0,1,\ldots,l,k_1=0,1,\ldots,l_1,k_2=0,1,\ldots,l_2\right\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной M решение $u(t,x,z)$ задачи (3.65), (3.53) принадлежит классу $C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$.

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| \le C,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \tag{3.85}$$

Из (3.63) и (3.65), с учетом непрерывной дифференцируемости функций $a(t)$, $b(t)$, условий (3.60)–(3.62) и оценки (3.85), следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ принадлежат классу

$$Z(t_*)=\left\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \middle|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big),\lambda(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big)\right\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\leq C. \qquad (3.86)$$

3.2.4 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (3.63) и удовлетворяет условию (3.54), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи (3.65), (3.53), то при подстановке $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$ в (3.51) и (3.53), получим тождества.

Докажем выполнение условий переопределения (3.55), (3.56).

Положим в (3.65) $z=a(t)$. Проводя необходимые преобразования и учитывая, что

$$\frac{(u(t,x,a(t)))^p}{(\varphi(t,x))^p}=\frac{(u(t,x,a(t)))^p-(\varphi(t,x))^p+(\varphi(t,x))^p}{(\varphi(t,x))^p}=$$
$$=1+\big(u(t,x,a(t))-\varphi(t,x)\big)\cdot\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p},$$

имеем

$$u_t(t,x,a(t))+u_z(t,x,a(t))\cdot a'(t)-\varphi_t(t,x)=\alpha_1(t)\cdot\Big(u_{xx}(t,x,a(t))-\varphi_{xx}(t,x)\Big)+$$
$$+\beta_1(t)\cdot\Big(u_x(t,x,a(t))-\varphi_x(t,x)\Big)+D_1(t,x)\cdot\Big(u(t,x,a(t))-\varphi(t,x)\Big)-$$
$$-D_2(t,x)\cdot\alpha_1(t)\cdot\Big(u_{xx}(t,b(t),a(t))-\varphi_{xx}(t,b(t))\Big)+$$
$$+D_3(t,x)\cdot\beta_1(t)\cdot\Big(u_x(t,b(t),a(t))-\varphi_x(t,b(t))\Big),$$

где

$$D_0(t)=\psi_t(t,a(t))-\alpha_2(t)\cdot\psi_{zz}(t,a(t))-\beta_2(t)\cdot\psi_z(t,a(t))-f(t,b(t),a(t))-$$
$$-\alpha_1(t)\cdot u_{xx}(t,b(t),a(t))-\beta_1(t)\cdot u_x(t,b(t),a(t))\cdot(1+b'(t))\,;$$
$$D_1(t,x)=\frac{1}{D_0(t)}\cdot\frac{u^{p-1}+u^{p-2}\cdot\varphi+u^{p-3}\cdot\varphi^2+\ldots+u\cdot\varphi^{p-2}+\varphi^{p-1}}{(\varphi(t,x))^p}\times$$
$$\times\Big(A_1(t,x)\cdot\varphi^p(t,x)-\alpha_2(t)\cdot u_{zz}(t,x,a(t))-\beta_2(t)\cdot u_z(t,x,a(t))\cdot(1+a'(t))\Big)\times$$
$$\times\Big(B_1(t,a(t))\cdot\psi^p(t,a(t))-\alpha_1(t)\cdot u_{xx}(t,b(t),a(t))-$$
$$-\beta_1(t)\cdot u_x(t,b(t),a(t))\cdot(1+b'(t))\Big);$$

$$D_2(t,x) = \frac{u_t(t,x,a(t)) - L\left(u(t,x,a(t))\right) - f(t,x,a(t))}{D_0(t)};$$
$$D_3(t,x) = D_2(t,x)\cdot\left(1+b'(t)\right),$$

функции $A_1(t,x)$, $B_1(t,z)$ из (3.64).

Введём обозначение: $\nu^1(t,x) = u(t,x,a(t)) - \varphi(t,x)$. Отсюда получаем, что $\nu^1_t(t,x) = u_t(t,x,a(t)) + u_z(t,x,a(t))\cdot a'(t) - \varphi_t(t,x)$. Из условия согласования (3.57) следует $\nu^1(0,x) = u(0,x,a(0)) - \varphi(0,x) = u_0(x,a(0)) - \varphi(0,x) = 0$.

Таким образом, функция $\nu^1(t,x)$ является решением следующей задачи:

$$\nu^1_t(t,x) = \alpha_1(t)\cdot\nu^1_{xx}(t,x) + \beta_1(t)\cdot\nu^1_x(t,x) + D_1(t,x)\cdot\nu^1(t,x) - \\ - D_2(t,x)\cdot\alpha_1(t)\cdot\nu^1_{xx}(t,b(t)) - D_3(t,x)\cdot\beta_1(t)\cdot\nu^1_x(t,b(t)), \quad (3.87)$$

$$\nu^1(0,x) = 0. \quad (3.88)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций $a(t)$, $b(t)$, условий (3.60)–(3.62) и неравенства (3.86), функции $D_1(t,x)$, $D_2(t,x)$, $D_3(t,x)$ и их производные по x до второго порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,t_*]}$. Значит, задача (3.87), (3.88) удовлетворяет условиям леммы **1.2** (где $a_1 = \alpha_1(t)$, $a_2 = \beta_1(t)$, $a_3 = D_1(t,x)$, $a_4 = D_2(t,x)\cdot\alpha_1(t)$, $a_5 = D_3(t,x)\cdot\beta_1(t)$, $d = a(t)$, $r = 0$). Из леммы **1.2** следует единственность решения задачи (3.87), (3.88). Решением является функция $\nu^1(t,x) = 0$. Следовательно, $u(t,x,a(t)) = \varphi(t,x)$. Таким образом, доказано выполнение условия переопределения (3.55).

Аналогичным образом, учитывая условия согласования (3.58), (3.59), доказывается выполнение условия переопределения (3.56).

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 ([110])**.** *Пусть выполняются условия* (3.57)–(3.62). *Тогда существует константа t_*, $0 < t_* \le T$, зависящая от степени p и постоянных, ограничивающих входные данные, такая, что в классе $Z(t_*)$ существует решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)$ обратной задачи* (3.51)–(3.56), *удовлетворяющее соотношению* (3.86).

3.2.5 Пример

Для рассмотренной задачи построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы **3.2**, и соответствующего им решения.

Пример 3.2. *В полосе* $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\}$ *рассматривается задача Коши для параболического уравнения*

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + u \cdot \lambda(t,x,z) - 2\cos x \cdot (\cos z + A)\,,\ (t,x,z) \in G_{(0,T]},\quad (3.89)$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z) = e^x\,(\sin z + A)$.

Здесь $A = const > 1$. *Наряду с функцией* $u(t,x,z)$ *необходимо определить также функцию* $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z)$. *Пусть* $a(t) = t$, $b(t) = t+2$. *Функции* $a(t)$, $b(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0,T]$. *Заданы условия переопределения*

$$u(t,x,a(t)) = \varphi(t,x) = e^{t+x} \cdot (\sin t + A)\,,$$

$$u(t,b(t),z) = \psi(t,z) = e^{2t+2} \cdot (\sin z + A)\,,$$

выполнены условия согласования

$$u_0(x,a(0)) = \varphi(0,x) = A \cdot e^x,\ u_0(b(0),z) = \psi(0,z) = e^2 \cdot (\sin z + A)\,,$$

$$\varphi(t,b(t)) = \psi(t,a(t)) = e^{2t+2} \cdot (\sin t + A)\,.$$

Функции $f(t,x,z) = -2\cos x \cdot (\cos z + A)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ *удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных* (3.60).

Проверим выполнение условий (3.61):

$$\big|\varphi(t,x)\big| = \big|e^{t+x}\big| \cdot \big|\sin t + A\big| \ge \varepsilon \cdot (A-1) > 0,\ 0 < \varepsilon \ll 1,\ \forall\, t \in [0,T], \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$\big|\psi(t,z)\big| = \big|e^{2t+2}\big| \cdot \big|\sin z + A\big| \ge e^2 \cdot (A-1) > 0,\ \forall\, t \in [0,T], \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Затем проверим выполнение условия (3.62):

$$\Big|e^{2t+2}\,(\sin t + \cos t + A) - e^{2t+2}\,(\sin t + A) + e^{2t+2}\sin t - e^{2t+2}\,(\sin t + A) -$$
$$- 2e^{2t+2}\cos t + 2\cos(t+2)\,(\cos t + A)\Big| \ge \Big|(A + \cos t) \cdot \big(e^{2t+2} - 2\cos(t+2)\big)\Big| \ge$$
$$\ge (A-1) \cdot (e^2 - 2) > 0,\ \forall t \in [0,T].$$

Таким образом, условие (3.61) выполняется при $\delta_1 = \varepsilon \cdot (A-1)$, $\delta_2 = e^2 \cdot (A-1)$, *а условие (3.62) выполняется при* $\delta_3 = (A-1) \cdot (e^2 - 2)$.

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = e^{t+x} \cdot (\sin z + A)\,,$$

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z) = -\left(1 - \frac{2\cos x}{e^{t+x}}\right) \cdot \frac{\cos z + A}{\sin z + A}.$$

Подставляя найденные функции в (3.89), *получим верное тождество.*

Заключение

В ходе диссертации получены следующие результаты:

1. Доказана однозначная глобальная разрешимость задачи идентификации функции источника в многомерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы n функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной.

2. Для задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении с данными Коши, когда неизвестный коэффициент имеет вид суммы двух функций, доказана непрерывная зависимость решения от входных данных и исследовано поведение решения при стремлении временной переменной к бесконечности.

3. Доказана локальная разрешимость задачи Коши для двумерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при функции источника, который имеет вид произведения двух функций.

4. Для задачи определения коэффициента при нелинейном члене $u^p(t,x,z)$ в двумерном параболическом уравнении с данными Коши в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы функций, зависящих от временной и одной пространственной переменной, доказана теорема существования и единственности решения «в малом».

5. Доказана локальная разрешимость задачи идентификации коэффициента, представимого в виде произведения двух функций, при нелинейном члене $u^p(t,x,z)$ в двумерном параболическом уравнении с данными Коши.

6. Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем существования и единственности, приведены решения, соответствующие этим данным.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и имеют теоретическую значимость. Они могут быть использованы для построения общей теории обратных задач.

Список литературы

[1] Абылкаиров, У. У. Задача идентификации функций источника для параболического уравнения / У. У. Абылкаиров, С. Е. Айтжанов // Тезисы Международной конференции «Проблемы современной математики и механики». – Алматы, 2005. – С. 52 – 53.

[2] Айда-заде, К. Р. О численном решении одного класса обратных задач для разрывных динамических систем / К. Р. Айда-заде, С. З. Кулиев // Автомат. и телемех. – 2012. – № 5. – С. 25 – 38.

[3] Алексеев, А. С. Определение траектории движения импульса в обратной задаче для волнового уравнения / А. С. Алексеев, А. Г. Меграбов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. – Т. 17. – № 6. – С. 1508 – 1522.

[4] Алексеев, Г. В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г. В. Алексеев, И. С. Вахитов, О. В. Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52. – № 12. – С. 2190 – 2205.

[5] Андреев, В. К. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. К. Андреев, Ю. Я. Белов, Н. Н. Лазарева, Т. Н. Шипина. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2005. – 128 с.

[6] Аниконов, Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Ю. Е. Аниконов. – Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.

[7] Аниконов, Ю. Е. Некоторые вопросы аналитической теории идентификации / Ю. Е. Аниконов. – Новосибирск, 2013. – 19 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 288).

[8] Аниконов, Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. электрон. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 45 – 64.

[9] Афиногенова, О. А. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / О. А. Афиногено-

ва, Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 424. – № 4. – С. 439 – 441.

[10] Баранов, С. Н. О задаче идентификации нескольких коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения / С. Н. Баранов, Ю. Я. Белов // Дальневост. матем. журн. – 2004. – Т. 5. – № 1. – С. 30 – 40.

[11] Безнощенко, Н. Я. Обратные задачи для уравнений параболического типа. В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики / Н. Я. Безнощенко, А. И. Прилепко. – М.: Наука, 1977. – С. 51 – 63.

[12] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. – 236 с.

[13] Белов, Ю. Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – № 5. – С. 583 – 585.

[14] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой / Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Спец. выпуск журнала «Вычислительные технологии», посвященный 85-летию академика Н. Н. Яненко. – 2006. – Т. 11. – Ч. 1. – С. 46 – 54.

[15] Березанский, Ю. М. Об однозначности определения уравнения Шредингера / Ю. М. Березанский // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93. – № 4. – С. 591 – 594.

[16] Будак, Б. М. Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами / Б. М. Будак, А. Д. Искендеров // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 1. – С. 20 – 23.

[17] Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 184 с.

[18] Васин, В. В. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач / В. В. Васин, В. П. Танана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – Т. 15. – № 1. – С. 19 – 29.

[19] Васин, И. А. Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений / И. А. Васин, В. Л. Камынин // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 4. – С. 750 – 766.

[20] Врагов, В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В. Н. Врагов. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983. – 84 с.

[21] Гегечкори, З. Г. О сходимости метода слабой аппроксимации / З. Г. Гегечкори, Г. В. Демидов // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4. – № 2. – С. 43 – 50.

[22] Гласко, В. Б. Об одной обратной задаче теплопроводности / В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, И. Н. Шкляров, А. Н. Тихонов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 3. – С. 768 – 774.

[23] Даирбаева, Г. Об одном приближенном методе решения задачи восстановления коэффициента двумерного квазилинейного уравнения теплопроводности / Г. Даирбаева, А. Ж. Акжалова // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6. – № 6. – С. 32 – 38.

[24] Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

[25] Дженалиев, М. Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов. – Алматы: FЫЛЫМ, 2010.

[26] Егоров, И. Е. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000.

[27] Иванов, В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному / В. К. Иванов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20. – № 6. – С. 793 – 818.

[28] Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17. – № 3. – С. 3 – 146.

[29] Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[30] Камынин, В. Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с условием финального переопределения / В. Л. Камынин // Мат. заметки. – 2003. – Т. 72. – № 2. – С. 217 – 227.

[31] Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44. – № 4. – С. 694 – 716.

[32] Кожанов, А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А. И. Кожанов // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – № 5. – С. 1054 – 1071.

[33] Кожанов, А. И. О разрешимости некоторых новых обратных задач для параболических уравнений / А. И. Кожанов // Материалы третьей молодеж. междунар. науч. школы-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск, 2011. – С. 30 – 31.

[34] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функциального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 6-е изд. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

[35] Кригер, Е. Н. Об идентификации функции источника параболического уравнения в двумерном случае / Е. Н. Кригер // Труды XLII краевой науч. студ. конф. по матем. и комп. наукам. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – С. 30 – 31.

[36] Кригер, Е. Н. Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // Труды XLIII краевой науч. студ. конф. по матем. и комп. наукам. – Красноярск: ИПК СФУ, 2010. – С. 61 – 66.

[37] Кригер, Е. Н. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // М 57 Молодёжь и наука: в 3 т.: материалы конф. Т.1 / отв. за выпуск О.А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – С. 79 – 84.

[38] Кригер, Е. Н. Исследование поведения решения задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении на бесконечности [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М75 Молодёжь и наука: сб. материалов VIII Всерос. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых, посвящ. 155-летию со дня рожд. К. Э. Циолковского, № заказа 7880 / отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2012. URL: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2012/thesis/s021/s021-036.pdf

[39] Кригер, Е. Н. Идентификация функции источника специального вида в многомерном параболическом уравнении [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М75 Молодежь и наука: сб. материалов IX Всерос. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых с междунар. участием, посвящ. 385-летию со дня основания г. Красноярска, № заказа 2394 / отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2013. URL: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/thesis/s062/s062-003.pdf

[40] Кригер, Е. Н. Задача идентификации функции источника специального вида в многомерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // Материалы 51-й Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. – С. 87.

[41] Кригер, Е. Н. Об одной задаче Коши для многомерного нагруженного параболического уравнения специального вида [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М75 Молодежь и наука: сб. материалов X Юбилейной Всерос. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых с междунар. участием, посвящ. 80-летию образования Красноярского края, № заказа 1644 / отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2014. URL: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d02/s09/s09_006.pdf

[42] Кригер, Е. Н. О единственности двух задач Коши для нагруженного уравнения и системы нагруженных уравнений специально-

го вида [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // П827 Проспект Свободный-2015: материалы науч. конф., посвящ. 70-летию Великой Победы (15–25 апр. 2015 г.); отв. ред. Е. И. Костоглодова. – Электрон. данные. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. – С. 9 – 12. URL: http://nocmu.sfu-kras.ru/direction/src/естественнонаучное/Математика,%20информатика%20Дифференциальные%20уравнения.pdf

[43] Кригер, Е. Н. Задача идентификации функции источника в параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // VI Всесиб. конгресс женщин-математиков (в день рожд. С. В. Ковалевской): Матер. Всерос. конф., 15–17 янв. 2010 г. – Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 238 – 240.

[44] Кригер, Е. Н. Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении/ Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков// Матер. XLVIII Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Матем. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – С. 45.

[45] Кригер, Е. Н. Задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Матер. XLIX Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Матем. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. – С. 50.

[46] Кригер, Е. Н. О стабилизации решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. акад. М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, Россия, 5 – 12 авг. 2012: тез. докладов. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 87 – 88.

[47] Кригер, Е. Н. О двух обратных задачах идентификации функции источника специального вида в двумерном уравнении теплопроводности / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (7 – 9 нояб. 2012, г. Красноярск): в 2 ч.; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. – Ч. 1. – С. 111 – 112.

[48] Кригер, Е. Н. Задача идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Междунар. конф., посвящ. 105-летию со дня рожд. С. Л. Соболева (Новосибирск, 18 – 24 авг. 2013 г.): Тез. докладов. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. – С. 176.

[49] Кригер, Е. Н. О задачах идентификации некоторых коэффициентов специального вида в параболических уравнениях / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Пятая междунар. молодеж. науч. школа-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Россия, 8 – 13 окт. 2013 г.): тез. докладов. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2013. – С. 55.

[50] Кригер, Е. Н. О некоторых задачах идентификации коэффициента специального вида в полулинейном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Т 78 Труды Математ. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы двенадцатой молодеж. науч. школы-конф. «Лобачевские чтения – 2013» (Казань, 24 – 29 окт., 2013 г.). – Казань: Казан. ун-т, 2013. – Т. 47. – С. 89 – 91.

[51] Кригер, Е. Н. Об одной задаче идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в полулинейном уравнении теплопроводности / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XVII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (12 – 14 нояб. 2013 г., Красноярск): в 2 ч.; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2013. – Ч. 2. – С. 106 – 107.

[52] Кригер, Е. Н. Исследование одного многомерного нагруженного уравнения теплопроводности специального вида в неограниченной области / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Молодежь. Техника. Космос: труды VI Общерос. молодеж. науч.-техн. конф. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2014. – С. 54 – 55.

[53] Кригер, Е. Н. Об одной задаче идентификации коэффициента в двумерном полулинейном параболическом уравнении с данными Коши / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 22 – 37.

[54] Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962. – 96 с.

[55] Лаврентьев, М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск: Наука, 1969. – 66 с.

[56] Лаврентьев, М. М. Теоремы единственности нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая // Доклады Академии наук. – 1973. – Т. 208. – № 3. – С. 531.

[57] Майнагашева, А. С. Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения / А. С. Майнагашева, И. В. Фроленков // VI Всесиб. конгресс женщин-математиков (в день рожд. С. В. Ковалевской): Матер. Всерос. конф., 15 – 17 янв. 2010 г. – Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 268 – 271.

[58] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

[59] Полынцева, С. В. Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / С. В. Полынцева // Неклассические уравнения математической физики: Труды междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. – С. 221 – 231.

[60] Полынцева, С. В. Об одной задаче идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / С. В. Полынцева // Тезисы Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. акад. М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 5 – 12 авг. 2012 г. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. – С. 98 – 99.

[61] Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1982. – 331 с.

[62] Пятков, С. Г. Некоторые обратные задачи для параболических уравнений / С. Г. Пятков // Фундамент. и прикл. матем. – 2006. – Т. 12. – № 4. – С. 187 – 202.

[63] Рождественский, Б. М. Системы квазилинейных уравнений / Б. М. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 668 с.

[64] Романов, В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений / В. Г. Романов. – Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 1973. – 252 с.

[65] Романов, В. Г. Об одной обратной задаче для уравнения параболического типа / В. Г. Романов // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19. – Вып. 4. – С. 595 – 600.

[66] Романов, В. Г. Устойчивость в братных задачах / В. Г. Романов. – М.: Научный мир, 2005. – 304 с.

[67] Саватеев, Е. Г. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / Е. Г. Саватеев // Доклады Академии Наук. – 1995. – Т. 340. – № 5. – С. 595 – 596.

[68] Саватеев, Е. Г. О задаче определения функции источника и коэффициента параболического уравнения / Е. Г. Саватеев // Доклады Академии Наук. – 1995. – Т. 344. – № 5. – С. 597 – 598.

[69] Саватеев, Е. Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения / Е. Г. Саватеев // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 177 – 185.

[70] Самарский, А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области / А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 787 – 811.

[71] Смагин, В. В. О скорости сходимости проекционно-разностных методов для гладко разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78. – № 6. – С. 907 — 918.

[72] Соловьев, В. В. О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения / В. В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1577 – 1583.

[73] Степанова, И. В. Об одной обратной начально-краевой задаче / И. В. Степанова // Вестник Красноярского гос. университета. Серия Физ.-мат. науки. – 2006. – № 1. – С. 138 – 141.

[74] Тихонов, А. Н. Об устойчивости в обратных задачах / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195 – 198.

[75] Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501 – 504.

[76] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для вузов по спец. «Прикладная математика» / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 3-е изд., испр. – Москва: Наука, 1986. – 287 с.

[77] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[78] Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

[79] Фроленков, И. В. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Ю. Я. Белов // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. статей; Отв. ред. А. И. Кожанов. – Новосибирск: Изд. Института мат., 2012. – С. 262 – 279.

[80] Фроленков, И. В. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Журнал СФУ. Серия матем. и физ. – 2010. – Т. 3. – № 4. – С. 556 – 564.

[81] Фроленков, И. В. О существовании решения задачи идентификации коэффициента специального вида при функции источника / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Вестник НГУ. Серия матем., мех., информ. – 2013. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 120 – 134.

[82] Фроленков, И. В. Некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер, Г. В. Романенко // Труды Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011 г.). – №гос. регистр. 0321101160, ФГУП НТЦ «Информрегистр». – Новосибирск, 2011. URL: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/ fulltext/ 39501/ 46385/ Frolenkov(NikNik2010).pdf

[83] Фроленков, И. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15. – № 2. – С. 139 – 146.

[84] Черепанова, О. Н. Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении / О. Н. Черепанова, Т. Н. Шипина // Журнал СФУ. Сер. матем. и физ. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 370 – 375.

[85] Шарин, Е. Ф. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с разрывными коэффициентами / Е. Ф. Шарин // Матер. третьей Молодеж. междунар. науч. школы-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск, 2011. – С. 80 – 81.

[86] Яненко, Н. Н. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений / Н. Н. Яненко // Сиб. матем. журн. – 1964. – Т. 5. – № 6. – С. 1431 – 1434.

[87] Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. – 197 с.

[88] Яненко, Н. Н. Исследование задачи Коши методом слабой аппроксимации / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167. – № 6. – С. 1242 – 1244.

[89] Alessandrini, G. Stability for the crack determination problem / G. Alessandrini // Inverse Problems in Mathematical Physics. Lecture Notes in Physics. – 1993. – V. 422. – P. 1 – 8.

[90] Anikonov, Yu. E. On one method of investigation of inverse problems / Yu. E. Anikonov, M. Yamamoto // Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform. – 2007. – V. 7. – № 4. – P. 3 – 8.

[91] Belov, Yu. Ya. On Estimates of Solutions of the Split Problems for Some Multi-Dimensional Partial Differential Equations / Yu. Ya. Belov // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2009. – V. 2. – № 3. – P. 258–270.

[92] Belov, Yu. Ya. The Problem of Determining a Coefficient in the Parabolic Equation and Some Properties of Its Solution / Yu. Ya. Belov, T. N. Shipina // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – V. 9. – № 1. – P. 31 – 48.

[93] Cannon, J. R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations / J. R. Cannon, Y. Lin // J. Ill-Posed and Inverse Problems. – 1988. – V. 4. – № 1. – P. 595 – 606.

[94] Choulli, M. Global existence and stability for an inverse coefficient problem for a semilinear parabolic equation / M. Choulli, M. Yamamoto // Archiv der Mathematik. – 2011. – V. 97. – № 6. – P. 587 – 597.

[95] Erdogan, A. S. Stability of Implicit Difference Scheme for Solving the Identification Problem of a Parabolic Equation / A. S. Erdogan, A. Ashyralyev // Numerical Analysis and Its Applications. Lecture Notes in Computer Science. – 2013. – V. 8236. – P. 271 – 278.

[96] Favini, A. A. General Approach to Identification Problems / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations. Springer INdAM Series. – 2014. – V. 10. – P. 107 – 119.

[97] Frolenkov, I. V. An Identification Problem of Coefficient in the Special Form at Source Function for Multi-Dimensional Parabolic Equation with Cauchy Data / I. V. Frolenkov, E. N. Kriger // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – V. 6. – № 2. – P. 186 – 199.

[98] Frolenkov, I. V. Existence of a Solution of the Problem of Identification of a Coefficient at the Source Function / I. V. Frolenkov, E. N. Kriger // New York: J. of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 203. – № 4. – P. 464 – 477.

[99] Fujita, H. Direct and inverse problems for parabolic equations / H. Fujita // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 1983. – V. 7. – № 1. – P. 32 – 40.

[100] Guidetti, D. On Linear Elliptic and Parabolic Problems in Nikol'skij Spaces / D. Guidetti // Parabolic Problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. – 2011. – V. 80. – P. 275 – 300.

[101] Hasanov, A. Some new classes of inverse coefficient problems in nonlinear mechanics / A. Hasanov // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – V. 18. – № 1. – P. 20 – 33.

[102] Hasanov, A. An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation / A. Hasanov, P. DuChateau, B. Pektas // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2006. – V. 14. – № 4. – P. 1 – 29.

[103] Herglotz, G. Uber die Elastizitat der Erde bei Borucksichtigung inter Variablen Dichte / G. Herglotz // Zeit schr. fur Math. und Phys. – 1905. – Bd. 52. – № 3. – S. 275 – 299.

[104] Ivanchov, M. I. Inverse problem of simultaneous determination of two coefficients in a parabolic equation / M. I. Ivanchov. – Ukrainian Mathematical Journal. – 2000. – V. 52. – № 3. – P. 379 – 387.

[105] Jones, B. F. The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Pt. 1. Existense and uniqueness / B. F. Jones // J. Math. and Mech. – 1962. – V. 11. – № 6. – P. 907 – 918.

[106] Kanca, F. The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions / F. Kanca // J. of Inequalities and Applications. – 2013. – V. 108. – DOI 10.1186/1029-242X-2013-108.

[107] Kaya, M. Determination of the unknown source term in a linear parabolic problem from the measured data at the final time / M. Kaya // Applications of Mathematics. – 2014. – V. 59. – № 6. – P. 715 – 728.

[108] Kimura, T. A parabolic inverse problem arising in a mathematical model for chromatography / T. Kimura, T. Suzuki // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1993. – V. 53. – № 6. – P. 1747 – 1761.

[109] Kriger, E. N. An Identification Problem of Coefficient for Two-Dimensional Semilinear Parabolic Equation with the Cauchy Data / E. N. Kriger, I. V. Frolenkov // Russian Mathematics. – 2015. – V. 59.– № 5. – P. 17 – 31. – DOI 10.3103/S1066369X15050035.

[110] Kriger, E. N. An Identification Problem of Nonlinear Lowest Term Coefficient in the Special Form for Two-Dimensional Semilinear Parabolic Equation / E. N. Kriger, I. V. Frolenkov // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – V. 9. – № 2. – P. 180 – 191.

[111] Lesnic, D. Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions / D. Lesnic, S. A. Yousefi, M. I. Ivanchov // Journal of Applied Mathematics and Computing . – 2013. – V. 41.– № 1–2. – P. 301 – 320.

[112] Lorenzi, A. Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation / A. Lorenzi // Ricerche Mat. – 1983. – V. 32. – № 2. – P. 263 – 284.

[113] Lowe, B. D. Coefficient recovery in a parabolic equation from input sources. Collection: Inverse problems in diffusion processes (Lake St. Wolfgang, 1994) / B. D. Lowe, W. Rundell // Philadelphia, PA: SIAM. – 1995. – P. 120 – 129.

[114] Mola, G. Recovering the Reaction Coefficient in a Linear Parabolic Equation / G. Mola // New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations. Springer INdAM Series. – 2014. – V. 10. – P. 371 – 399.

[115] Päivärinta, L. Analytic Methods for Inverse Scattering Theory / L. Päivärinta // New Analytic and Geometric Methods Inverse Problems. – 2004. – P. 165 – 185.

[116] Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin // New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000. – 709 p.

[117] Prilepko, A. I. An inverse problem for a parabolic equation with final overdetermination / A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko // Ill-Posed and Inverse Problems, S. I. Kabanikhin and V. G. Romanov (Eds). – Utrecht: VSP, 2002. – P. 317 – 353.

[118] Riganti, R. Solution of an Inverse Problem for the Nonlinear Heat Equation / R. Riganti, E. Savateev // Comm. in Partial Differential Equation. – 1994. – V. 19. – № 9,10. – P. 1611 – 1628.

[119] Tikhonov, A. N. Solutions of Ill-Posed Problems / A. N. Tikhonov. – New York: Winston, 1977. – 272 p.

[120] Tychonoff, A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur / A. Tychonoff // Матем. сб. – 1935. – Т. 42. – № 2. – С. 199 – 216.

[121] Wang, W. Two-dimensional parabolic inverse source problem with final overdetermination in reproducing kernel space / W. Wang, M. Yamamoto, B. Han // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2014. – V. 35. – P. 469 – 482.

[122] Wiechert, E. Uber Erdbebenwellen Gotingen / E. Wiechert, K. Zoeppritz // Nachr. Koningl. Geselschaft. – 1907. – № 4. – S. 415 – 549.