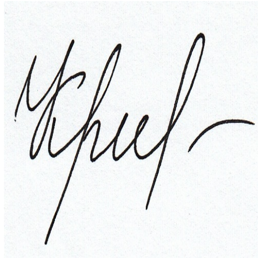
На правах рукописи



Кригер Екатерина Николаевна

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВСЕХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор **Белов Юрий Яковлевич**.

Официальные оппоненты:

Попов Сергей Вячеславович, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой.

Семенко Евгений Вениаминович, д-р физ.-мат. наук, проф., Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный педагогический университет», кафедра алгебры и математического анализа, профессор.

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Защита состоится «____» _______________ 2017 г. в _______ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» _______________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы. Развитие современной науки не обходится без скрупулёзной экспериментальной работы, целью которой является изучение свойств различных физических процессов и явлений. Исходя из полученной в ходе эксперимента информации, исследователь строит математическую модель изучаемого процесса или явления.

Большую роль в различных задачах математического моделирования играют математические модели, в которых физические процессы или явления описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Такие модели, в частности, описывают нестационарные процессы теплопередачи и диффузии в различных материалах и средах. Обратными задачами для дифференциальных уравнений являются задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, начальных или граничных условий. Определение неизвестных элементов начально-краевых задач выполняется по разного рода дополнительной информации (условиям переопределения)[1].

Первыми работами, посвящёнными обратным задачам для параболических уравнений, были работы Ю. Е. Аниконова[2], Н. Я. Безнощенко, А. И. Прилепко[3], М. М. Лаврентьева, В. Г. Васильева, В. Г. Романова[4], А. Н. Тихонова[5], J. R. Cannon[6], H. Fujita[7], B. F. Jones[8], A. Lorenzi[9] и их учеников. Большой вклад в решение начально-краевых обратных задач для параболических уравнений внесли Ю. Я. Белов[10], Г. Даирбаева[11], С. И. Кабанихин[12],

[1]Романов, В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973. 252 с.

[2]Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978. 120 с.

[3]Безнощенко Н. Я., Прилепко А. И. Обратные задачи для уравнений параболического типа // В кн.: Проблемы мат. физ. и выч. мат-ки. М.: Наука, 1977. С. 51–63.

[4]Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 66 с.

[5]Тихонов А. Н. Об устойчивости в обратных задачах // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195–198.

[6]Cannon J. R. Determination of an unknown coefficients in a parabolic differential equations // Duke. Math. J. – 1963. – V. 30. – № 2. – P. 313–323.

[7]Fujita H. Direct and inverse problems for parabolic equations // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 1983. – V. 7. – № 1. – P. 32–40.

[8]Jones B. F. The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Pt. 1. Existense and uniqueness // J. Math. and Mech. – 1962. – V. 11. – № 6. – P. 907–918.

[9]Lorenzi A. Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ricerche Mat. – 1983. – V. 32. – № 2. – P. 263–284.

[10]Белов Ю. Я., Кантор С. А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. 236 с.

[11]Даирбаева Г., Акжалова А. Ж. Об одном приближенном методе решения задачи восстановления коэффициента двумерного квазилинейного уравнения теплопроводности // Вычисл. технологии. – 2001. – Т. 6. – № 6. – С. 32–38.

[12]Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи: учеб. для студ. высш. уч. завед. Новосибирск: Сиб. науч. изд., 2009. 457 с.

В. Л. Камынин[13], А. И. Кожанов[14], И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов[15], А. А. Самарский[16], Н. Н. Яненко[17], M. Choulli, M. Yamamoto[18], P. DuChateau, A. Hasanov, B. Pektas[19], B. D. Lowe, W. Rundell[20] и другие. В настоящее время активно развивают это направление теории обратных задач ряд молодых математиков: К. Р. Айда-заде[21], М. В. Нещадим[22], И. В. Фроленков[23], A. Ashyralyev, A. S. Erdogan[24], M. Kaya[25], H. Tanabe[26] и другие.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является исследование коэффициентных обратных задач для параболических уравнений с данными Коши.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми. Новизна и интерес работы заключается в том, что задачи исследуются в классах гладких ограниченных функций, а неизвестные коэффициенты в них зависят от всех переменных.

Методы исследования. Общий метод исследования разрешимости представленных в диссертации обратных задач состоит в следующем. Используя дополнительные условия (условия переопределения), исследуемая обратная задача приводится к неклассической прямой задаче для параболического уравнения, содержащего следы неизвестной функции и её производных. Такие уравнения часто называют «нагруженными»[27]. Разрешимость

---

[13]Камынин В. Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с условием финального переопределения // Мат. заметки. – 2003. – Т. 72. – № 2. – С. 217–227.

[14]Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44. – № 4. – С. 694–716.

[15]Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

[16]Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 787–811.

[17]Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1967. 197 с.

[18]Choulli M., Yamamoto M. Global existence and stability for an inverse coefficient problem for a semilinear parabolic equation // Archiv der Mathematik. – 2011. – V. 97. – № 6. – P. 587–597.

[19]Hasanov A., DuChateau P., Pektas B. An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2006. – V. 14. – № 4. – P. 1–29.

[20]Lowe B. D., Rundell W. Coefficient recovery in a parabolic equation from input sources // Collection: Inverse problems in diffusion processes (Lake St. Wolfgang, 1994). Philadelphia, PA: SIAM, 1995. P. 120–129.

[21]Айда-заде К. Р., Кулиев С. З. О численном решении одного класса обратных задач для разрывных динамических систем // Автомат. и телемех. – 2012. – № 5. – С. 25–38.

[22]Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В. Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений 2-го порядка // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 40–49.

[23]Фроленков И. В., Белов Ю. Я. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Некласс. уравнения мат. физ.: сб. науч. статей; Отв. ред. А. И. Кожанов. – Новосибирск: Изд. Института мат., 2012. – С. 262–279.

[24]Erdogan A. S., Ashyralyev A. Stability of Implicit Difference Scheme for Solving the Identification Problem of a Parabolic Equation // Numerical Analysis and Its Applications. Lecture Notes in Computer Science. – 2013. – V. 8236. – P. 271–278.

[25]Kaya M. Determination of the unknown source term in a linear parabolic problem from the measured data at the final time // Applications of Mathematics. – 2014. – V. 59. – № 6. – P. 715–728.

[26]Favini A. A., Lorenzi A., Tanabe H. General Approach to Identification Problems // New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations. Springer INdAM Series. – 2014. – V. 10. – P. 107–119.

[27]Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

прямой задачи для «нагруженного» уравнения исследуется на основании метода слабой аппроксимации, разработанного А. А. Самарским[28] и Н. Н. Яненко[29].

На защиту выносятся:

– Доказательство однозначной разрешимости задачи идентификации функции источника в многомерном параболическом уравнении с данными Коши в случае, когда неизвестный коэффициент имеет вид суммы n функций.

– Доказательство непрерывной зависимости решения от входных данных и вывод оценок решения при $t \to \infty$ для задачи идентификации коэффициента, представимого в виде суммы двух функций, при функции источника в двумерном параболическом уравнении с данными Коши.

– Доказательство локальной разрешимости задачи идентификации функции источника в двумерном параболическом уравнении, когда неизвестный коэффициент представим в виде произведения двух функций.

– Доказательство существования и единственности решения задачи Коши для двумерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, представимым в виде суммы двух функций, при нелинейном члене.

– Доказательство разрешимости «в малом» задачи идентификации коэффициента, представимого в виде произведения двух функций, при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении с данными Коши.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики, построением модельных примеров входных данных и соответствующих им решений, обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач математической физики, а также при исследовании нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта РФФИ № 12-01-31033 «Исследование корректности специального класса нагруженных параболических уравнений с данными Коши методом слабой аппроксимации. Исследование свойств решений» под руководством И. В. Фроленкова, государственного задания Министерства образования и науки РФ № 01201157182 «Задачи определения нескольких коэффициентов для уравнений в частных производных» и государственного задания Министерства образования и науки РФ № 1.7694.2013 «Задачи определения коэффициентов в многомерных уравнениях с частными производными» под руководством Ю. Я. Белова.

[28] Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 787–811.

[29] Яненко Н. Н. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. – 1964. – Т. 5. – № 6. – С. 1431–1434.

Апробация работы. Доклады по теме диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях: XLII и XLIII Краевых научных студенческих конференциях по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009, 2010 гг.); VI Всесибирском конгрессе женщин-математиков (г. Красноярск, 2010 г.); XLVIII и LI Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010, 2013 гг.); VII, VIII и X Всероссийских научно-технических конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука» (г. Красноярск, 2011, 2012, 2014 гг.); Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (г. Новосибирск, 2012 г.); XVI и XVII Международных научных конференциях, посвящённых памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнёва (г. Красноярск, 2012, 2013 гг.); Международной конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (г. Новосибирск, 2013 г.); XII Всероссийской молодёжной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2013 г.); VI Общероссийской молодёжной научно-технической конференции «Молодёжь. Техника. Космос» (г. Санкт-Петербург, 2014 г.).

Все результаты, представленные в диссертации, обсуждались на семинаре «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю. Я. Белова (2010 – 2016 гг.), на Сибирском субботнем студенческом семинаре по дифференциальным уравнениям Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук А. И. Кожанова, на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук Г. В. Демиденко (г. Новосибирск, 2015 г.), а также на семинаре «Математические модели механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН профессора П. И. Плотникова (г. Новосибирск, 2017 г.). Работы по теме диссертации были отмечены наградами Конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М. А. Лаврентьева (2010, 2013, 2014 гг.).

Публикации и личный вклад. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из них 5 статей в научных журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертации ([1] – [5]), 2 статьи в переводных версиях журналов ([24], [26]), остальные работы опубликованы в сборниках материалов научных конференций, в том числе международных и всероссийских.

Восемнадцать работ написаны в соавторстве. И. В. Фроленкову принадлежат идеи постановок задач. В статье [1] основной вклад в доказательство оценки непрерывной зависимости от входных данных принадлежит автору, И. В. Фроленкову принадлежит решающий вклад в доказательство теорем существования и единственности решения. В работе [12] рассмотрены две задачи. Г. В. Романенко принадлежит доказательство теоремы редукции для задачи 1, теорем существования и единственности решения редуцированной задачи. Доказательство однозначной разрешимости задачи 2 в случае суммы принадлежит И. В. Фроленкову. Автору принадлежит получение оценки устойчивости по входным данным решения задачи 2 в случае суммы и доказательство локальной разрешимости задачи 2 в случае произведения. В остальных совместных работах решающий вклад в доказательство основных результатов принадлежит автору.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографического списка, включающего 122 наименования. Объём диссертации составляет 113 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дано обоснование актуальности и научной новизны диссертационной работы, а также перечислены сходства и различия с исследованными ранее работами других учёных.

В **первой главе** приведены обозначения, вспомогательные утверждения, теоремы и леммы, необходимые для чтения последующих глав диссертации.

Во **второй главе** исследована задача идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении с данными Коши. Рассмотрены два случая представления искомого коэффициента при функции источника. В первом случае неизвестный коэффициент представим в виде суммы функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменных. Во втором случае неизвестный коэффициент представим в виде произведения двух функций.

Случай 1. В полосе $\widetilde{G}_{[0,T]} = \big\{(t,x)\,|\,0 \le t \le T,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\big\}$ исследуется задача Коши для многомерного параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x)\right) + f(t,x)\cdot\lambda(t,x),\ (t,x) \in \widetilde{G}_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$L\left(u(t,x)\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,x) + c(t)u(t,x), \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Коэффициенты $b_k(t) \ge b_0 > 0$, $c_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, $c(t)$ — вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$. Наряду с функцией $u(t,x)$ необходимо определить функцию

$$\lambda(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t, x_k). \tag{4}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t, \overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(t, x_k),\ k = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $\overline{a}^k(x_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, x_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{a}^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j = const$, $j = \overline{1,n}$, выполнены условия согласования

$$u_0(\overline{a}^k(x_k)) = \varphi_k(0, x_k), k = \overline{1,n},\ \varphi_1(t,\alpha_1) = \varphi_2(t,\alpha_2) = \cdots = \varphi_n(t,\alpha_n), \tag{6}$$

и условия

$$\left|f(t,\overline{a}^k(x_k))\right| \geq \delta_k > 0,\ t\in[0,T],\ x_k\in\mathbb{R},\ \delta_k = const,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Относительно функций $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\varphi_k(t,x_k), k = \overline{1,n}$, определённых в $\widetilde{G}_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношения (8)–(10), и удовлетворяют им.

$$\left|D^s f(t,x)\right| \leq C,\ s=(s_1,\ldots,s_n), s_r = 0,1,\ldots,6, r=\overline{1,n}, (t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}, \tag{8}$$

$$\left|D^s u_0(x)\right| \leq C,\ s=(s_1,\ldots,s_n), s_r = 0,1,\ldots,6, r=\overline{1,n}, x\in\mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial^{i+j}\varphi_k(t,x_k)}{\partial t^i \partial x_k^j}\right| \leq C,\ i=0,1; j=0,1,\ldots,6; k=\overline{1,n}; t\in[0,T], x_k\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 ([3]). *Пусть выполняются условия* (6)–(10)*. Тогда в классе*

$$\widetilde{Z}(T) = \left\{u(t,x),\lambda(t,x)\ \middle|\ u\in C^{1,4,\ldots,4}_{t,x_1,\ldots,x_n}\big(\widetilde{G}_{[0,T]}\big), \lambda(t,x)\in C^{0,2,\ldots,2}_{t,x_1,\ldots,x_n}\big(\widetilde{G}_{[0,T]}\big)\right\}$$

существует единственное решение $u(t,x)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (1)–(5)*, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,\ldots,4,\\ r=1,\ldots,n}} \left|D^s u(t,x)\right| + \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,2,\\ r=1,\ldots,n}} \left|D^s \lambda(t,x)\right| \leq C,\ (t,x)\in\widetilde{G}_{[0,T]}. \tag{11}$$

Здесь $C^{p,q_1,\ldots,q_n}_{t,x_1,\ldots,x_n}\left(\widetilde{G}_{[0,T]}\right) = \left\{u(t,x)\ \middle|\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}, \dfrac{\partial^{s_1+\cdots+s_n}u}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_n^{s_n}} \in C\left(\widetilde{G}_{[0,T]}\right),\ m = 0,1,\ldots,p,\right.$ $\left. s_r = 0,1,\ldots,q_r,\ r=1,\ldots,n\right\}$.

Далее в полосе $G_{[0,T]} = \left\{(t,x,z)\,|\,0\leq t\leq T,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$ исследуется частный случай задачи (1)–(5). Рассматривается задача Коши для двумерного параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \tag{12}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{13}$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \tag{14}$$

Здесь $L\left(u(t,x,z)\right) = u_{xx}(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z)$. Это выражение получается из соотношения (2) при $n=2$, $b_1(t)=b_2(t)=1$, $c_1(t)=c_2(t)=c(t)=0$.

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x),\ u(t,\beta,z) = \psi(t,z),\ \alpha,\beta = const, \tag{15}$$

выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha)=\varphi(0,x),\ u_0(\beta,z)=\psi(0,z),\ \varphi(t,\beta)=\psi(t,\alpha), \tag{16}$$

и условия

$$\big|f(t,\beta,z)\big|\ge\delta_1>0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big|\ge\delta_2>0,\ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ \delta_1,\delta_2=const. \tag{17}$$

Относительно функций $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$, заданных в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (18), и удовлетворяют ему при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right|+\left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right|+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|+$$
$$+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right|\le C,\ l_1,l_2=0,1,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \tag{18}$$

Из теоремы 2.1 следует, что существует единственное решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ обратной задачи (12)–(15) в классе

$$Z(T)=\Big\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \Big|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big),\lambda(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)\Big\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C,(t,x,z)\in G_{[0,T]}. \tag{19}$$

Здесь $C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)=\Big\{u(t,x,z)\ \Big|\ \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k},\ \dfrac{\partial^{k_1+k_2}u}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\in C\big(G_{[0,T]}\big),\ k=0,1,\ldots,l,$ $k_1=0,1,\ldots,l_1,\ k_2=0,1,\ldots,l_2\Big\}$.

Приведённые результаты опубликованы в [1]. Для исследованной задачи (12)–(15) построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, и приведено решение, соответствующее этим данным.

Доказана непрерывная зависимость решения задачи (12)–(15) от входных данных.

Теорема 2.2 ([1]). *Пусть выполняются условия* (16)–(19). *Тогда решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *задачи* (12)–(15) *непрерывно зависит от входных данных, и в* $G_{[0,T]}$ *выполняется оценка*

$$||u^1-u^2||_1+||\lambda^1-\lambda^2||_2\le C\cdot\Big(||u_0^1-u_0^2||_3+||f^1-f^2||_4+||\psi^1-\psi^2||_5+||\varphi^1-\varphi^2||_6\Big).$$

Здесь

$$||u||_1=\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u(\xi,x,z)\right|,\ ||\lambda||_2=\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\lambda(\xi,x,z)\right|,$$

$$||u_0||_3=\sum_{k_1,k_2=0}^{6}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,\ ||f||_4=\sum_{k_1,k_2=0}^{6}\sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}f(\xi,x,z)\right|,$$

$$||\psi||_5 = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial z^j}\psi(\xi,z)\right|, \ ||\varphi||_6 = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j}\varphi(\xi,x)\right|,$$

функции u^1, $u^2 \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$ и λ^1, $\lambda^2 \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$ удовлетворяют соотношению (19); а функции u_0^1, $u_0^2 \in C^{6,6}_{x,z}(\mathbb{R}^2)$, f^1, $f^2 \in C^{0,6,6}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, ψ^1, $\psi^2 \in C^{1,6}_{t,z}([0,T]\times\mathbb{R})$, φ^1, $\varphi^2 \in C^{1,6}_{t,x}([0,T]\times\mathbb{R})$ удовлетворяют соотношению (18).

Исследовано поведение при $t\to+\infty$ решения задачи Коши для уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + a(t)u + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z), \ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \tag{20}$$

с начальным условием (13) и неизвестным коэффициентом $\lambda(t,x,z)$, представимом в виде суммы (14). Считаем, что $a(t)$ — вещественная, конечнозначная функция, заданная в $[0,T]$. Заданы условия переопределения (15). Выполнены условия (16) – (18) на входные данные.

Задача (20), (13)–(15) является частным случаем рассмотренной ранее задачи (1)–(5) (при $n=2$, $b_1(t)=b_2(t)=c_1(t)=c_2(t)=1$, $c(t)=a(t)$) и поэтому, в силу теоремы 2.1 её решение существует, единственно в классе

$$Z(T) = \left\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z) \;\middle|\; u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big), \lambda(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)\right\}$$

и удовлетворяет соотношению (19).

Введены обозначения

$$B = \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{\theta\in[0;+\infty)} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Phi_1(\theta,x,z)\right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{\theta\in[0;+\infty)} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Phi_2(\theta,x,z)\right|,$$

$$\Phi_1(t,x,z) = -\frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)}, \ \Phi_2(t,x,z) = -\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)},$$

$$p(t,x,z) = \frac{\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)-\psi_z(t,z)-a(t)\psi(t,z)}{f(t,\beta,z)} + \frac{\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)-\varphi_x(t,x)}{f(t,x,\alpha)} -$$
$$-\frac{a(t)\varphi(t,x)}{f(t,x,\alpha)} - \frac{\psi_t(t,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)-\varphi_x(t,\beta)-\psi_z(t,\alpha)-a(t)\psi(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3 ([13], [14]). *Пусть в $G_{[0,+\infty)}$ выполняются условия (16)–(18) и следующие соотношения:*

$$a(t)\le -A<0, \ A+B<1, \tag{21}$$

$$\int_0^{+\infty} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big(\big(1+|f(\theta,x,z)|\big)\cdot|p(\theta,x,z)|\Big)\,d\theta \le C.$$

Тогда для решения задачи (20), (13)–(15) в $G_{[0,+\infty)}$ справедливо неравенство

$$|u(t,x,z)|+|\lambda(t,x,z)|\le C.$$

Теорема 2.4 ([13], [14]). *Пусть в* $G_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (16)–(18), (21) *и оценки*

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} f(t,x,z) \right| \le \frac{M_1}{1+t^r},\ M_1>0,\ r>1;$$

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} p(t,x,z) \right| \le \frac{M_2}{1+t^s},\ M_2>0,\ s>1.$$

Тогда решение задачи (20), (13)–(15) *в* $G_{[0,+\infty)}$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u(t,x,z) \right| + \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \big|\lambda(t,x,z)\big| \right) = 0.$$

Случай 2. В полосе $G_{[0,T]}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \tag{22}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{23}$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z). \tag{24}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x),\ u(t,\beta,z) = \psi(t,z),\ \alpha,\beta = const, \tag{25}$$

выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x),\ u_0(\beta,z) = \psi(0,z),\ \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \tag{26}$$

и следующие условия:

$$\big|\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big| \ge \delta_0 > 0,\ \forall\, t\in[0,T],\ \delta_0 = const, \tag{27}$$

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \ge \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \ge \delta_2 > 0,\ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ \delta_1,\delta_2 = const. \tag{28}$$

Относительно входных данных предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в (29), и удовлетворяют ему при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$.

$$\left| \frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \varphi(t,x) \right| + \left| \frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \psi(t,z) \right| + \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right| + \\ + \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} f(t,x,z) \right| \le C,\ l_1,l_2 = 0,1, k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6. \tag{29}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.5 ([2], [24]). *Пусть выполнены условия* (26) – (29) *на входные данные. Тогда существует константа t_*, $0 < t_* \le T$, зависящая от постоянных δ_0, δ_1, δ_2, C из* (27) – (29), *такая, что в классе*

$$Z(t_*) = \Big\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \ \Big| \ u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big) \Big\}$$

решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)$ обратной задачи (22)–(25) *существует и удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right| \le C, \ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}.$$

Здесь и далее $C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right) = \Big\{ u(t,x,z) \ \Big| \ \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}, \dfrac{\partial^{k_1+k_2}u}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} \in C\left(G_{[0,t_*]}\right),\ k = 0,1,\ldots,l,$ $k_1 = 0,1,\ldots,l_1,\ k_2 = 0,1,\ldots,l_2 \Big\}$.

Для задачи (22)–(25) построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 2.5, приведено решение, соответствующее этим данным.

Третья глава посвящена исследованию задачи идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении. Неизвестный коэффициент имеет вид суммы или произведения двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной из пространственных переменных.

Случай 1. В полосе $G_{[0,T]}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = L\left(u(t,x,z)\right) + u^p\cdot\lambda(t,x,z) + f(t,x,z),\ (t,x,z) \in G_{(0,T]}, \tag{30}$$

$$L\left(u(t,x,z)\right) = \alpha_1(t)\cdot u_{xx}(t,x,z) + \alpha_2(t)\cdot u_{zz}(t,x,z) + \\ + \beta_1(t)\cdot u_x(t,x,z) + \beta_2(t)\cdot u_z(t,x,z), \tag{31}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2. \tag{32}$$

Здесь $p \ge 1$ — целая постоянная. Коэффициенты $\alpha_k(t) \ge \alpha_0 > 0$, $\beta_k(t)$, $k = 1,2$, — вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$ функции.

Наряду с функцией $u(t,x,z)$ необходимо определить также функцию вида

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \tag{33}$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x),\ u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \tag{34}$$

и выполнены условия согласования

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x),\ u_0(\beta,z) = \psi(0,z),\ \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha). \tag{35}$$

Относительно функций $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$, определённых в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они и их производные непрерывны и удовлетворяют следующему соотношению:

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right|+\left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right|+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|+$$
$$+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right|\le C,\ \ l_1,l_2=0,1,k_1,k_2=0,1,\dots,6,(t,x,z)\in G_{[0,T]}. \quad (36)$$

Полагаем также, что имеют место ограничения

$$\bigl|\varphi(t,x)\bigr|\ge\delta_1>0,\ \ \bigl|\psi(t,z)\bigr|\ge\delta_2>0,\ \ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ \ \delta_1,\delta_2=const. \quad (37)$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1 ([4], [26]). *Пусть выполняются условия* (35)–(37) *на входные данные. Тогда существует константа t_*, $0<t_*\le T$, зависящая от степени p и постоянных, ограничивающих входные данные, такая, что в классе*

$$Z(t_*)=\Bigl\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \Bigm|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\bigl(G_{[0,t_*]}\bigr),\lambda(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\bigl(G_{[0,t_*]}\bigr)\Bigr\}$$

существует единственное решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ обратной задачи (30)–(34)*, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C,(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \quad (38)$$

Для задачи (30)–(34) построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1, и приведено соответствующее этим данным решение.

Случай 2. В полосе $G_{[0,T]}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t=L\left(u(t,x,z)\right)+u^p\cdot\lambda(t,x,z)+f(t,x,z),\ \ (t,x,z)\in G_{(0,T]}, \quad (39)$$

с начальным условием

$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\ \ (x,z)\in\mathbb{R}^2. \quad (40)$$

Здесь $L\left(u(t,x,z)\right)$ имеет вид (31), $p\ge1$ — целая постоянная, функции $\alpha_k(t)\ge\alpha_0>0$, $\beta_k(t)$, $k=1,2$, являются вещественнозначными, непрерывными и ограниченными на $[0,T]$.

Наряду с $u(t,x,z)$ следует определить также функцию

$$\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z). \quad (41)$$

Заданы условия переопределения

$$u\bigl(t,x,a(t)\bigr)=\varphi(t,x),\ \ u\bigl(t,b(t),z\bigr)=\psi(t,z),\ \ a(t),b(t)\in C^1([0,T]), \quad (42)$$

и выполняются условия согласования

$$u_0\bigl(x,a(0)\bigr)=\varphi(0,x),\ \ u_0\bigl(b(0),z\bigr)=\psi(0,z),\ \ \varphi\bigl(t,b(t)\bigr)=\psi\bigl(t,a(t)\bigr). \quad (43)$$

Относительно функций $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$, определённых в $G_{[0,T]}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,T]\times\mathbb{R}$, $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно, предположим, что они имеют все непрерывные производные, входящие в (44), и удовлетворяют ему при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le \widetilde{C},\ l_1,l_2=0,1,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \quad (44)$$

Имеют место следующие ограничения на входные данные:

$$\big|\varphi(t,x)\big| \ge \delta_1 > 0,\ \big|\psi(t,z)\big| \ge \delta_2 > 0,\ \forall\,(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ \delta_1,\delta_2 = const, \quad (45)$$

$$\Big|\varphi_t\big(t,b(t)\big) - \alpha_1(t)\cdot\varphi_{xx}\big(t,b(t)\big) - \alpha_2(t)\cdot\psi_{zz}\big(t,a(t)\big) - \beta_1(t)\cdot\varphi_x\big(t,b(t)\big) - \\ - \beta_2(t)\cdot\psi_z\big(t,a(t)\big)\cdot\big(1+a'(t)\big) - f\big(t,b(t),a(t)\big)\Big| \ge \delta_3,\ \forall t\in[0,T],\ \delta_3 = const. \quad (46)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 ([5]). *Пусть выполняются условия* (43)–(46). *Тогда существует константа t_*, $0 < t_* \le T$, зависящая от степени p и постоянных, ограничивающих входные данные, такая, что в классе*

$$Z(t_*) = \Big\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \Big|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big),\lambda(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big)\Big\}$$

существует решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)$ обратной задачи (39)–(42), *удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right| \le C, (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}.$$

Для задачи (39)–(42) построен пример входных данных, удовлетворяющих условиям теоремы 3.2, приведено соответствующее этим данным решение.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. Я. Белову и кандидату физ.-мат. наук, доценту И. В. Фроленкову за руководство и неоценимую помощь в работе над диссертацией, а также всем участникам семинара «Обратные задачи» Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета и, особенно Г. В. Романенко, за полезные советы по диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказана однозначная глобальная разрешимость задачи идентификации функции источника в многомерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы n функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной.

2. Для задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении с данными Коши, когда неизвестный коэффициент имеет вид суммы двух функций, доказана непрерывная зависимость решения от входных данных и исследовано поведение решения при стремлении временной переменной к бесконечности.

3. Доказана локальная разрешимость задачи Коши для двумерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при функции источника, который имеет вид произведения двух функций.

4. Для задачи определения коэффициента при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы функций, доказана теорема существования и единственности решения «в малом».

5. Доказана локальная разрешимость задачи идентификации коэффициента, представимого в виде произведения двух функций, при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении с данными Коши.

6. Построены примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем существования и единственности, приведены решения, соответствующие этим данным.

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, имеют теоретическую значимость и могут быть использованы для построения общей теории обратных задач, а также при исследовании нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах из Перечня ВАК

[1] *Кригер, Е. Н.* О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Журнал СФУ. Серия матем. и физ. – 2010. – Т. 3. – № 4. – С. 556 – 564.

[2] *Кригер, Е. Н.* О существовании решения задачи идентификации коэффициента специального вида при функции источника / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Вестник НГУ. Серия: матем., мех., информ. – 2013. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 120 – 134.

[3] *Kriger, E. N.* An Identification Problem of Coefficient in the Special Form at Source Function for Multi-Dimensional Parabolic Equation with Cauchy Data / I. V. Frolenkov, E. N. Kriger // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – V. 6.– № 2. – P. 186 – 199.

[4] *Кригер, Е. Н.* Об одной задаче идентификации коэффициента в двумерном полулинейном параболическом уравнении с данными Коши / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 22 – 37.

[5] *Kriger, E. N.* An Identification Problem of Nonlinear Lowest Term Coefficient in the Special Form for Two-Dimensional Semilinear Parabolic Equation / E. N. Kriger, I. V. Frolenkov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – V. 9. – № 2. – P. 180 – 191.

Прочие публикации

[6] *Кригер, Е. Н.* Об идентификации функции источника параболического уравнения в двумерном случае / Е. Н. Кригер // Труды XLII краевой науч. студ. конф. по матем. и комп. наукам. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – С. 30 – 31.

[7] *Кригер, Е. Н.* Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // Труды XLIII краевой науч. студ. конф. по матем. и комп. наукам. – Красноярск: ИПК СФУ, 2010. – С. 61 – 66.

[8] *Кригер, Е. Н.* Задача идентификации функции источника в параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения С. В. Ковалевской): Материалы Всерос. конф., 15 – 17 янв. 2010 г. – Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 238 – 240.

[9] *Кригер, Е. Н.* Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XLVIII Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – С. 45.

[10] *Кригер, Е. Н.* О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // М 57 Молодёжь и наука: в 3 т.: материалы конф. Т.1 / отв. за выпуск О.А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – С. 79 – 84.

[11] *Кригер, Е. Н.* Задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XLIX Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. – С. 50.

[12] *Кригер, Е. Н.* Некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер, Г. В. Романенко // Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Яненко: тез. докладов. – Новосибирск, 2011. – С. 127 – 128.

[13] *Кригер, Е. Н.* Исследование поведения решения задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении на бесконечности [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М 75 Молодёжь и наука: сборник материалов VIII Всеросс. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых, посвящ. 155-летию со дня рожд. К. Э. Циолковского, № заказа 7880; отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т. – 2012.

[14] *Кригер, Е. Н.* О стабилизации решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. акад. М. М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, Россия, 5 – 12 авг. 2012: тез. докладов. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. – С. 87 – 88.

[15] *Кригер, Е. Н.* О двух обратных задачах идентификации функции источника специального вида в двумерном уравнении теплопроводности / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнёва (7 – 9 нояб. 2012, г. Красноярск): в 2 ч.; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. – Ч. 1. – С. 111 – 112.

[16] *Кригер, Е. Н.* Идентификация функции источника специального вида в многомерном параболическом уравнении [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М 75 Молодежь и наука: сборник материалов IX Всеросс. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых с междунар. участием, посвящ. 385-летию со дня основ. г. Красноярска, № заказа 2394; отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т. – 2013.

[17] *Кригер, Е. Н.* Задача идентификации функции источника специального вида в многомерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер // Материалы 51-й Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. – С. 87.

[18] *Кригер, Е. Н.* Задача идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Междунар. конф., посвящ. 105-летию со дня рожд. С. Л. Соболева (Новосиб., 18–24 авг. 2013 г.): Тез. докладов. – Новосибирск: Ин-т мат-ки СО РАН, 2013. – С. 176.

[19] *Кригер, Е. Н.* О задачах идентификации некоторых коэффициентов специального вида в параболических уравнениях / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Пятая меж-

дунар. молодеж. науч. школа-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Россия, 8 – 13 окт. 2013 г.): тез. докладов. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2013. – С. 55.

[20] *Кригер, Е. Н.* О некоторых задачах идентификации коэффициента специального вида в полулинейном параболическом уравнении / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Т 78 Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы двенадцатой молодеж. науч. школы-конф. «Лобачевские чтения – 2013» (Казань, 24 – 29 окт., 2013 г.). – Казань: Казан. ун-т, 2013. – Т. 47. – С. 89 – 91.

[21] *Кригер, Е. Н.* Об одной задаче идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в полулинейном уравнении теплопроводности / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Материалы XVII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнёва (12 – 14 нояб. 2013 г., Красноярск): в 2 ч.; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2013. – Ч. 2. – С. 106 – 107.

[22] *Кригер, Е. Н.* Об одной задаче Коши для многомерного нагруженного параболического уравнения специального вида [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // М 75 Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всеросс. науч.-техн. конф. студ., аспир. и молодых ученых с междунар. участием, посвящ. 80-летию образования Красноярского края, № заказа 1644; отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т. – 2014.

[23] *Кригер, Е. Н.* Исследование одного многомерного нагруженного уравнения теплопроводности специального вида в неограниченной области / Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков // Молодежь. Техника. Космос: труды VI Общеросс. молодеж. науч.-техн. конф. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2014. – С. 54 – 55.

[24] *Kriger, E. N.* Existence of a Solution of the Problem of Identification of a Coefficient at the Source Function / I. V. Frolenkov, E. N. Kriger // New York: Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 203. – № 4. – P. 464 – 477.

[25] *Кригер, Е. Н.* О единственности двух задач Коши для нагруженного уравнения и системы нагруженных уравнений специального вида [Электронный ресурс] / Е. Н. Кригер // П827 Проспект Свободный-2015: материалы науч. конф., посвящ. 70-летию Великой Победы (15-25 апр. 2015 г.); отв. ред. Е. И. Костоглодова. – Электрон. дан. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. – С. 9 – 12.

[26] *Kriger, E. N.* An Identification Problem of Coefficient for Two-Dimensional Semilinear Parabolic Equation with the Cauchy Data / E. N. Kriger, I. V. Frolenkov // Russian Mathematics. – 2015. – V. 59. – № 5. – P. 17 – 31. – DOI 10.3103/S1066369X15050035.