

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М.А.
ЛАВРЕНТЬЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Ковтуненко Павел Викторович

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ В
ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ
ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ**

Специальность 01.02.05 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук
Чесноков Александр Александрович

Новосибирск — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Классы точных решений уравнений	
горизонтально-сдвигового движения жидкости	21
1.1 Математическая модель	22
1.2 Класс решений с линейно зависимыми инвариантами Римана	24
1.3 Решение в классе простых волн	27
1.4 Бегущие волны на горизонтально-сдвиговом потоке	29
1.5 Решение, выражающееся в элементарных функциях	33
1.6 Устойчивость горизонтально-сдвиговых течений жидкости	35
1.7 Газодинамическая аналогия и многослойная аппроксимация	40
1.8 Численные результаты	44
1.9 Основные результаты главы 1	47
Глава 2. Пленочные течения	49
2.1 Уравнения движения	50
2.2 Характеристики интегродифференциальной модели	53
2.3 Уравнение для амплитуды слабого разрыва	57
2.4 Приближенная дифференциальная модель	61
2.5 Численные результаты	64
2.6 Течение со стратификацией по вязкости	70
2.7 Условия гиперболичности	73
2.8 Законы сохранения	76
2.9 Результаты численного моделирования	78
2.10 Основные результаты главы 2	82
Глава 3. Модель течения вязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу	84
3.1 Математическая формулировка задачи	85
3.2 Трехслойная схема течения	87
3.3 Стационарные решения	91
3.4 Численные результаты	93

3.5 Основные результаты главы 3	97
Заключение	99
Список литературы	102

Введение

В диссертационной работе выполнено построение и теоретический анализ математических моделей распространения нелинейных волновых возмущений в сдвиговых течениях тонкого слоя жидкости. Характеристические свойства интегродифференциальных уравнений теории длинных волн исследованы на основе предложенного В.М. Тешуковым обобщения понятия гиперболичности для систем уравнений с операторными коэффициентами. Построены новые классы решений моделей пространственно-неоднородного течения жидкости, рассмотрены решения со слабыми разрывами, сформулированы критерии устойчивости течений. Предложены консервативные формулировки интегродифференциальных уравнений и аппроксимирующие их дифференциальные системы законов сохранения, с использованием которых выполнено численное моделирование распространения волн в сдвиговых потоках жидкости. В рамках трехслойной схемы течения с массообменом между слоями выведена модель эволюции слоя смешения в течениях Хеле–Шоу и проведено моделирование развития крупных вихревых структур.

Диссертация выполнена в 2013 – 2017 гг. в аспирантуре федерального государственного бюджетного учреждения науки “Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук”.

Актуальность темы исследования

Раздел гидродинамики, связанный с изучением распространения нелинейных волн в сдвиговых течениях жидкости, является важной и актуальной областью исследований, что обусловлено большим количеством приложений теории длинных волн в метеорологии и геофизике при моделировании крупномасштабных движений в атмосфере, океане и земной коре. С помощью длинноволновых моделей описываются движения жидкости в открытых руслах, гидродинамические эффекты в задачах транспортировки углеводородов, определяются силы воздействия волновых возмущений на плавающие тела в задачах гидроаэроупругости. При этом учитываются эффекты нелинейности и пространственной неоднородности потока. Кроме того, длинноволновые возмущения затухают медленнее коротковолновых и потому определяют асимптотику решений при больших временах.

Уравнения теории длинных волн являются интегродифференциальными, что существенно усложняет их анализ и приводит к необходимости применения отличных от классических методов. Разработка новых элементов теории уравнений с операторными коэффициентами является актуальной тематикой, развитие которой необходимо для выяснения корректности постановок начально-краевых задач для интегродифференциальных моделей, построения классов точных решений и конструирования численных алгоритмов.

Степень разработанности темы исследования

Нелинейные уравнения пространственного движения жидкости, полученные из интегральных законов сохранения, сложны для теоретического анализа и обоснования корректности начально-краевых задач. По этой причине активно развиваются и широко применяются различные приближенные гидродинамические модели. Одним из наиболее важных и востребованных для практики приближений является теория мелкой воды для потенциальных течений жидкости [1]. Эволюция течения в классической теории мелкой воды описывается в рамках осредненных по глубине параметров потока. Для более точного моделирования необходимо учитывать сдвиговый (вихревой) характер течения. Расширение теории мелкой воды на сдвиговые течения впервые было предложено в работе [2], где исследовано распространение малых возмущений в вихревом плоскопараллельном движении идеальной жидкости. Позже в работе Д. Бенни [3] были получены нелинейные уравнения вихревой мелкой воды и найдена бесконечная серия законов сохранения.

Уравнения мелкой воды для сдвиговых течений (иногда называемые уравнениями Бенни) имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + gh_x &= 0, & u_x + v_y &= 0, \\ h_t + u(t, x, h)h_x &= v(t, x, h), & v(t, x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

где t — время, (x, y) — декартовы координаты, (u, v) — компоненты вектора скорости, g — ускорение свободного падения. Ровное дно и свободная поверхность потока задаются уравнениями $y = 0$ и $y = h(t, x)$. Следует отметить, что модель в безвихревом случае ($u_y = 0$) преобразуется в классические уравнения мелкой воды.

Исследованию и применению теории длинных волн посвящено большое количество работ зарубежных и отечественных авторов. Теоретическое обоснование уравнений мелкой воды дается в работе [4]. Обзор различных длинноволновых моделей приведен в [5]. Математическая теория гидродинамических цепочек Бенни развита в работах J. Gibbons и S.P. Tsarev [6;7], М.В. Павлова [8]. Классы точных решения модели построены в работах зарубежных авторов, таких как N.C. Freeman [9], P.L. Sachdev [10;11], E. Varley [12] и российских — В.М. Тешуков [13], А.А. Чесноков [14]. Отметим, что наличие завихренности потока позволяет моделировать течение жидкости с зонами противотока [12; 15]. Бесконечные серии законов сохранения получены в работах D. Benney [3], R.M. Miura [16], В.Е. Захарова [17], Б.А. Купершмидта и Ю.И. Манина [18]. В работе [17] предложен переход к полулагранжевым координатам, широко используемый в монографии В.Ю. Ляпидевского и В.М. Тешукова [19], а также ряде других работ [20–23]. В рамках этого подхода при помощи нелокальной замены переменных $y = \Phi(t, x, \lambda)$ модель вихревой мелкой воды можно привести к квазилинейной интегродифференциальной системе уравнений:

$$u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x d\lambda = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0,$$

где новая искомая функция $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda$. Данная система переписывается в операторном виде

$$\mathbf{U}_t + A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{U}(t, x, \lambda)$ — вектор искомых величин, $A\langle \mathbf{U}_x \rangle$ — результат действия матричного оператора A на вектор функцию \mathbf{U}_x , а \mathbf{f} — заданная правая часть. Такой переход позволяет применить обобщение теории гиперболичности, предложенное В.М. Тешуковым [24] для уравнений с операторными коэффициентами. Данный подход позволяет проводить исследование математических свойств исходных интегродифференциальных уравнений движения вихревой мелкой воды по аналогии с гиперболическими квазилинейными системами дифференциальных уравнений.

Понятие характеристик и гиперболичности обобщается на указанный класс уравнений. При этом возникает необходимость решения спектральной задачи, состоящей в нахождении собственных значений оператора и соответ-

ствующих им функционалов (вместо собственных векторов в случае систем дифференциальных уравнений). Специфика данной задачи в том, что характеристический спектр оператора может быть как дискретным, так и непрерывным. Действие собственных функционалов на систему уравнений позволяет получить соотношения на характеристиках и определить условие обобщенной гиперболичности, которое формулируется следующим образом: *система уравнений с операторными коэффициентами является обобщенно-гиперболической, если все собственные значения спектральной задачи вещественные и система собственных функционалов полна.*

Известно, что для квазилинейных систем гиперболических уравнений в процессе эволюции решения может возникнуть градиентная катастрофа, что приводит к необходимости рассматривать разрывные решения. Аналогичная ситуация имеет место и для интегродифференциальных моделей. Описание разрывных решений проводится на основе консервативной формулировки уравнений движения в виде законов сохранения. Численная реализация построения решений интегродифференциальных уравнений основана на многослойной аппроксимации и получении системы дифференциальных законов сохранения, к которым применяются стандартные численные схемы. Поскольку данные системы включают большое число уравнений, то представляется оправданным использование схем сквозного счета, не требующих точного или приближенного решения задачи Римана. В работе применяется центральная схема Насяху–Тэдмора второго порядка аппроксимации [25–27], являющаяся модификацией известной схемы Лакса–Фридрихса. Большой обзорный материал по этой тематике представлен в монографии [28].

Гиперболичность интегродифференциальных уравнений вихревой мелкой воды была установлена в [24], однако применение подхода не ограничено только этой моделью. С тех пор теория гиперболических уравнений с операторными коэффициентами получила дальнейшее развитие и применена к широкому классу моделей, описывающих распространение длинноволновых возмущений в течениях жидкости, газа и в пузырьковых средах. В частности, в работах [29–31] с помощью данной теории были описаны простые волны и гидравлические прыжки в баротропном плоско-параллельном потоке, выполнен анализ сдвигового движения газа в канале переменного сечения [32], изучены сдвиговые течения под крышкой в однородной и двухслойной жидкости [33; 34]. Обширный материал по

применению метода обобщенных характеристик содержится в монографии [19] и в более поздних работах [22; 23; 35]. Также отметим, что условия обобщенной гиперболичности соответствуют критериям устойчивости стационарных сдвиговых потоков, полученных в рамках линейной теории [36; 37]. Кроме того, аналогия между уравнениями сдвигового течения жидкости и кинетическим уравнением Власова [38] позволяет применять метод для изучения характеристических свойств кинетических моделей пузырьковой жидкости [39; 40] и квазинейтральной плазмы [41]. Математические свойства интегродифференциальных уравнений пространственного сдвигового движения рассмотрены в серии работ [42–46].

В последнее время существенное внимание уделяется построению и анализу моделей слоистого течения с массообменом, учитывающих сдвиговой эффект с помощью среднеквадратичного отклонения профиля скорости от осредненного значения [47]. Гидростатические модели двух- и трехслойного течения предложены в [48]. В этой же работе выполнено численное моделирование гидравлических прыжков и проведено сравнение с экспериментами, подтвердившее правильность выбранного подхода. Также отметим работы [49; 50], где получены и верифицированы осредненные модели слабосдвигового течения. В недавней работе [51] выведена более общая модель двухслойного течения, учитывающая вихревые и дисперсионные эффекты. Предложенные уравнения позволили описать переход от волнового бора к монотонному (волны Фавра) в рамках единой модели, а также описать эволюцию и обрушение уединенной волны при выходе на пологий берег.

Метод обобщенных характеристик применим и к течениям тонкого слоя вязкой жидкости (пленок). Изучение закономерностей волнового движения тонкого слоя вязкой жидкости, начатое П. Л. Капицей [52], привлекло внимание многих исследователей, в результате чего была развита современная теория пленочных течений [53; 54], а созданные математические методы и подходы широко применяются для моделирования распространения длинноволновых возмущений в жидкостях. Для описания пленочного течения часто используются осредненные по глубине модели, в частности, нелинейные уравнения В. Я. Шкадова [55] и их модификации [56; 57]. В случае достаточно толстых пленок вязкой жидкости, профиль скорости по глубине может существенно отличаться от параболического закона, что приводит к необходимости применения более точной

длинноволновой модели [58; 59]. При этом профиль скорости вырабатывается в процессе эволюции течения. Распределенное по гидростатическому закону давление не задано заранее, а определяется в процессе решения задачи вместе с полем скоростей и глубиной жидкости (аналог самоиндуцированного давления в задачах вязко-невязкого взаимодействия теории пограничного слоя [60; 61]). Этот подход уже применялся для исследования волновых процессов в пограничных слоях при вязко-невязком взаимодействии [20], [62]. Данный результат можно обобщить на широко распространенные в природных и технических системах течения жидкости со стратификацией по вязкости [63]. Применимость используемых подходов иллюстрируется на примере предложенной и изученной в [64] интегродифференциальной модели движения неоднородной среды с непостоянными вязкостью и плотностью, используемой для описания движения гранулированных сред [65–67].

Еще одной широкой областью применения моделей движения тонкого слоя вязкой жидкости являются задачи, связанные с описанием течений Хеле–Шоу, имеющих важное значение для моделирования транспорта жидкости в трещинах гидроразрыва пласта. Известно, что при совместном движении двух вязких жидкости в ячейке Хеле–Шоу возникает неустойчивость Саффмана–Тейлора (*viscous fingering*), если вязкость вытесняющей жидкости меньше вязкости вытесняемой [68; 69]. Классические модели неустойчивости границы раздела вязких жидкостей [70; 71] не учитывают влияние сил инерции и применимы лишь при малых скоростях потока. Более сложные нелинейные модели, учитывающие инерционные члены, рассмотрены в [72–76]. Течения с развитыми вязкими пальцами соответствуют слоистым потокам, на границах которых возможно возникновение скоростной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Одной из рассмотренных в диссертации задач является моделирование слоя смешения в ячейке Хеле–Шоу, развивающегося на границе слоев, движущихся с разными скоростями [77; 78]. При этом существенно используются предложенная в [48; 76] трехслойная схема течения с массообменом. С помощью данного подхода удастся оценить область перемешивания, не выходя за рамки одномерной модели, что значительно упрощает изначальную двумерную постановку, а также имеет большой потенциал с точки зрения оптимизации вычислительных ресурсов.

Цели и задачи исследования

Цель работы заключается в развитии новых элементов теории гиперболических систем уравнений с операторными коэффициентами и в построении многослойных моделей мелкой воды с массообменом на границе слоев. Можно выделить следующие задачи:

- исследование характеристических свойств интегродифференциальных моделей пространственно-неоднородных движений идеальной жидкости и пленочных течений, построение классов точных решений, анализ распространения слабых и сильных разрывов, вывод критериев устойчивости течений;
- построение систем осредненных дифференциальных уравнений и численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений;
- оценки эффективности “многослойных” аппроксимирующих моделей и анализ влияния параметров течения на его развитие.
- исследование развития слоя смешения, образующегося на границе раздела двух потоков жидкости с различными вязкостями и скоростями при их совместном движении в ячейке Хеле–Шоу;
- построение одномерной математической модели для оценки границ двумерной области формирования крупных вихревых структур.

Научная новизна

Построены и физически интерпретированы новые классы точных решений интегродифференциальной системы уравнений, описывающей горизонтально-сдвиговые движения идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале переменного сечения в приближении теории мелкой воды. В частности, получены решения с линейно зависимыми интегральными инвариантами Римана, обобщающих известный метод построения решений в классе простых волн. Найдены решения, описывающие развитие сдвиговой неустойчивости в бегущей волне, примыкающей к заданному стационарному потоку. Следует отметить, что рассматриваемая модель сравнительно новая (предложена в 2009 году), а ее аналитическое исследование преимущественно основывается на методах, разработанных чл.-корр. РАН В.М. Тешуковым. Сформулированы критерии устойчивости течений, аналогичные критериям Релэ и Фьортофта. Выведены осредненные уравнения движения (газодинамическая аналогия, многослойная аппроксимация), приближенно описывающие сдвиговые течения. Выполнены сравнительные численные эксперименты по моделированию распространения

непрерывных и разрывных возмущений в рамках указанных приближений. Показана применимость моделей для описания течений с сильными разрывами малой и умеренной амплитуды.

В диссертационной работе методы теоретического исследования уравнений с операторными коэффициентами применены к моделям движения тонких слоев вязкой жидкости (пленочные течения). Изучены решения со слабым разрывом нелинейных уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости на наклонной плоскости. Показано, что слабые разрывы находятся на характеристических поверхностях, и выведено дифференциальное уравнение типа Риккати, описывающее амплитуду слабого разрыва. Существование градиентной катастрофы данного уравнения обосновывает возможность нелинейного опрокидывания волн для указанного класса течений. Предложена консервативная формулировка модели в виде законов сохранения для корректного моделирования течений с сильными разрывами. Выполнено численное моделирование пленочных течений с использованием уравнений многослойной аппроксимации и аналогом уравнений Шкадова, полученных осреднением в предположении параболичности профиля скорости по глубине. Показано, что уравнения многослойной аппроксимации позволяют получать более точные значения параметров течения в области за сильным разрывом по сравнению с бездисперсионным аналогом модели Шкадова. В частности, это связано с нарушением условия параболичности профиля скорости в процессе эволюции течения. Рассматриваемая модель обобщена на класс течений со стратификацией по вязкости. Для усложненной модели исследованы характеристические свойства и выполнено численное моделирование распространения волн, возникающих в результате эволюции начального возмущения.

Еще одно направление исследований связано с моделированием движения тонких слоев жидкости между параллельными стенками (течения Хеле–Шоу). Основное внимание уделяется изучению сдвиговой неустойчивости, возникающей на границе раздела слоев, движущихся с различными скоростями и имеющих различные вязкости. На основе развитого В.Ю. Ляпидевским подхода выведена одномерная трехслойная система уравнений с массообменом между слоями, описывающая формирование и развитие слоя смешения. Установлено, что предложенная модель корректно описывает границы области формирования крупных вихревых структур, что позволяет без затратных по времени дву-

мерных нестационарных расчетов определить границы области смешения жидкостей.

Теоретическая и практическая значимость

Развиты новые элементы теории гиперболических систем уравнений с операторными коэффициентами. Эти подходы использованы для теоретического анализа пространственно-неоднородных течений идеальной жидкости и пленочных течений. Исследованы классы точных решений, характеристические свойства, слабые и сильные разрывы, сформулированы критерии устойчивости ряда интегродифференциальных моделей теории длинных волн. Построены системы осредненных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходные интегродифференциальные модели, на основе которых выполнено численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений в сдвиговых течениях жидкости. Показана эффективность “многослойной” аппроксимации и центральных схем для построения численных решений уравнений теории длинных волн. Теория многослойной мелкой воды с массообменном применена для описания слоев смешения в течениях Хеле–Шоу, представляющих практический интерес в связи с задачами интенсификации добычи углеводородов. Сравнение с результатами прямого численного моделирования показало эффективность предложенных моделей для описания границ области формирования крупных вихревых структур.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач в диссертационной работе использовались:

- методы механики сплошных сред, теория вихревой мелкой воды;
- теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, методы решения сингулярных интегральных уравнений, теория обобщенных функций, методы осреднения;
- методы численного решения гиперболических уравнений, реализованные в среде MatLab, и методы символьного вычисления, реализованные в пакете Mathematica.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы.

В главе 1 для интегродифференциальной модели, описывающей пространственно-неоднородное движение идеальной жидкости в открытом канале:

- построен класс решений, который характеризуется линейной зависимостью между интегральными инвариантами Римана и представим аналитически в классе простых волн;

- построено решение с критическим слоем в классе бегущих волн, непрерывно примыкающих к заданному сдвиговому потоку, найдены решения с функциональным произволом;

- сформулированы критерии устойчивости течений, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта;

- сформулированы осредненные модели движения в рамках газодинамической аналогии и “многослойной аппроксимации”, проведены сравнительные расчеты.

В главе 2 для уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости на наклонной плоскости:

- показана возможность построения решений со слабыми разрывами, сосредоточенными на обобщенных характеристиках;

- получено уравнение для амплитуды слабого разрыва и установлена возможность нелинейного опрокидывания волн;

- предложена неоднородная гиперболическая система дифференциальных уравнений, являющаяся “многослойной” аппроксимацией исходной модели, численно показано значительное различие результатов расчета в сравнении с аналогом модели Шкадова при формировании сильного разрыва;

- полученные результаты обобщены на класс течений со стратификацией по вязкости.

В главе 3 для модели течения вязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу:

- исследовано развитие слоя смешения, образующегося на границе раздела двух потоков жидкости с различными вязкостями и скоростями при их совместном движении;

- выведена одномерная осредненная модель слоя смешения, проведены численные эксперименты, показывающие, что предложенная модель позволяет достаточно точно определить область формирования крупных вихревых структур;

- показано, что увеличение вязкости жидкости препятствует развитию слоя смешения.

Степень достоверности и апробация результатов

Аналитические результаты диссертации в значительной мере опираются на предложенное В.М. Тешуковым обобщение теории характеристик и понятия гиперболичности на класс систем с операторными коэффициентами. Метод активно используется для теоретического анализа волновых интегродифференциальных моделей. В работе использовались апробированные конечно-разностные схемы для проведения численных экспериментов. Корректность результатов численного моделирования подтверждается сравнением с аналитическими решениями и верификацией алгоритмов на элементарных тестовых задачах. Основные результаты диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах [35; 79–81], а также были представлены на следующих научных конференциях:

- International Conference on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI 2010), Сан Андрес, Колумбия, 28.11–3.12.2010;
- Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, Новосибирск, Россия, 2–4.03.2011;
- 49-я международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс”, Новосибирск, Россия, 16–20.04.2011;
- Конкурс молодых исследователей института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия, 23.11.2010;
- 50-я международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс”, Новосибирск, Россия, 13–19.04.2012;
- Конкурс молодых исследователей института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия, 21.11.2014;
- Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, Новосибирск, Россия, 7–11.09.2015;
- XVI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (УМ 2015), Красноярск, Россия, 28–30.10.2015;

- Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, Новосибирск, Россия, 29.02–2.03.2016;

- Russian–French workshop “Mathematical Hydrodynamics”, Новосибирск, Россия, 22.08–27.08.2016;

- VIII Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова, и Школа–конференция молодых исследователей, пос. Абрау, Россия, 5.09–10.09.2016;

- 7-ая международная научная школа молодых ученых “Волны и вихри в сплошных средах”, г. Москва, Россия, 30.11–02.12.2016.

Диссертационная работа прошла апробацию на совместном семинаре ЛДУ ИГиЛ СО РАН и лаб. НПГС НГУ 21.02.2017, на научном семинаре “Математическое моделирование в механике” ИВМ СО РАН 3.03.2017, на научном семинаре лаб. аэрофизических исследований дозвуковых течений ИТПМ СО РАН 6.03.2017, на научном семинаре лаб. дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа ИМ СО РАН 9.03.2017, на научном семинаре лаб. вычислительных проблем задач математической физики ИМ СО РАН 10.03.2017 и на семинаре отдела механики МИАН под руководством академиков А.Г. Куликовского и Д.В. Трещева 3.04.2017.

Личный вклад

Автор диссертационной работы применил методы исследования нелинейных волновых процессов, разработанные в ИГиЛ СО РАН, к моделям пространственно-неоднородного течения жидкости в длинноволновом приближении. Занимался непосредственными математическими расчетами, в частности, построением и интерпретацией точных решений, анализом математических свойств уравнений, выводом аппроксимирующих моделей, проведением численных экспериментов и модификацией программного кода. Автор производил оформление результатов в виде публикаций и научных докладов, принимал участие в организации конференций и других научно-организационных мероприятий.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из 110 страниц, в которые входят введение, три главы, заключение и список литературы. В работе 30 рисунков, а список литературы содержит 92 наименования.

Краткое содержание работы

В первой главе диссертационной работы проводится исследование интегро-дифференциальной модели, описывающей пространственно-неоднородное движение идеальной жидкости в открытом канале. Для этого используется кинетическая формулировка уравнений движения, в которой за независимые переменные берется тройка (t, x, u) , а искомыми функциями являются потенциальная завихренность $W(t, x, u) = h(t, x)/u_y(t, x, y)$ и компоненты горизонтальной скорости на стенках канала $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$. Используя аналогию с уравнениями Бенни, для этой системы определены интегральные инварианты Римана. Для линейно зависящих инвариантов Римана построен специальный класс точных решений, описываемый системой двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами. Получено решение в виде простой волны.

Построено решение в классе бегущих волн, непрерывно примыкающее к заданному сдвиговому потоку. Решение строится методом характеристик, однако имеется область, в которую не приходят характеристики, выходящие с линии, соответствующей заданному состоянию. В этой области для построения решения используется интегральное уравнение, связывающее функции h и W , которое преобразовывается к интегральному уравнению Абеля. В рамках данного класса решений, обладающего функциональным произволом, приведен пример решения, выражающегося в элементарных функциях.

Получен результат об устойчивости течений, сформулированный в терминах гиперболичности систем уравнений с операторными коэффициентами [19; 24; 29]. Анализ устойчивости сводится к проверке условия

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm \neq 0,$$

где $\chi^+(u)$ и $\chi^-(u)$ предельные значения характеристической функции $\chi(u)$ из верхней χ^+ и нижней χ^- комплексной полуплоскости на заданном отрезке. По аналогии с работами [36; 37] сформулированы и обоснованы критерии устойчивости, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта. В частности показано, что любое течение с монотонным профилем скорости устойчиво, а при наличии точки перегиба устойчивость течения зависит от знака выражения $U''(U - U_c)$, где $U = u(y)$ — профиль скорости, $U_c = U(y_c)$, а y_c — точка перегиба. Построены иллюстративные примеры устойчивых и неустойчивых течений.

Выведена приближенная гидродинамическая модель, соответствующая многослойной аппроксимации в предположении о близости профиля скорости к линейному в каждом слое. В простейшем случае однослойной аппроксимации эта модель принимает вид системы газодинамического типа, состоящей из трех уравнений. Проведены численные эксперименты по решению задачи о распаде произвольного разрыва в сдвиговом потоке, и выяснено влияние числа слоев на распространения возмущений.

Исследуемая во второй главе модель возникает в результате перехода к длинноволновому приближению в уравнениях движения слоя однородной вязкой жидкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести:

$$u_t + uu_x + vv_y + gh_x = a + \nu u_{yy}, \quad v = - \int_0^y u_x dy,$$

$$h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=h} = 0,$$

где (x, y) — декартовы координаты, t — время, $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ — компоненты вектора скорости. Жидкость течет над ровным дном $y = 0$, наклоненным под малым углом θ по отношению к горизонту; уравнением $y = h(t, x)$ задается свободная граница. Давление в слое жидкости восстанавливается по формуле $p = p_0 + g(h - y)$, где p_0 — атмосферное давление. Постоянные a , g и ν зависят от угла наклона дна и характерных масштабов течения. Свойства системы исследуются в полулагранжевых координатах, в которых система переписывается в виде системы уравнений для определения функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda$:

$$u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x d\lambda = a + \frac{\nu}{H} \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda, \quad H_t + (uH)_x = 0.$$

Для теоретического анализа полученной модели подходит математический аппарат теории гиперболических уравнений с операторными коэффициентами. Проверка условия гиперболичности этой модели сводится к анализу комплексной характеристической функции и вычислению приращения ее аргумента на вещественном отрезке. Установлено, что модель допускает решения со слабыми разрывами, сосредоточенными на характеристических поверхностях. Получено

уравнение Риккати для амплитуды слабого разрыва, показывающее что при некотором наборе параметров потока возможна градиентная катастрофа и образование сильного разрыва.

Существование разрывных решений приводит к необходимости консервативной формулировки уравнений движения. В виду нетривиального профиля скорости для более точного описания течения используется “многослойная” аппроксимация. По полулагранжевой переменной $\lambda \in [0,1]$ проводится разбиение на M отрезков (слоев) и выполняется осреднение в предположении, что профиль скорости в каждом слое близок к линейному. Получившаяся консервативная система законов сохранения попадает в класс задач, для которых можно провести численное моделирование с использованием стандартных схем. Сравнение результатов расчета с бездисперсионным аналогом уравнений Шкадова [55], предполагающих параболический профиль скорости, показывает заметные отличия в случае формирования сильного разрыва.

Этот подход можно применить к более сложной модели [64], описывающей движения гранулированных сред с переменной вязкостью. В результате применения аналогичного моделирования и перехода к полулагранжевым переменным получаются уравнения движения стратифицированной по вязкости жидкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести:

$$u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x d\lambda = a + K \left(\frac{1}{H} \left(\frac{\eta u_\lambda}{H} \right)_\lambda \right),$$

$$H_t + (uH)_x = 0, \quad \eta_t + u\eta_x = 0,$$

где присутствует дополнительное уравнение для вязкости жидкости $\eta(t,x,\lambda)$, сохраняющейся вдоль траекторий. Сформулированы условия обобщенной гиперболичности модели, необходимые для корректной постановки задачи Коши. Выведена “многослойная” аппроксимация модели и проведена серия численных экспериментов.

В третьей главе рассматривается система уравнений, описывающая сдвиговые течения слабо-сжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу, осредненные по

ширине ячейки [76; 82]:

$$\begin{aligned}\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, \\ (\rho u)_t + (\beta\rho u^2 + p)_x + (\beta\rho uv)_y &= -\mu u, \\ (\rho v)_t + (\beta\rho uv)_x + (\beta\rho v^2 + p)_y &= -\mu v, \\ (c\rho)_t + (uc\rho)_x + (vc\rho)_y &= 0,\end{aligned}$$

где $\rho(t, x, y)$ – плотность, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ – компоненты вектора скорости, $p(t, x, y)$ – давление, $c = c(t, x, y)$ – концентрация, $\mu = \mu(c)$ – вязкость жидкости, зависящая от концентрации, β – константа, равная $6/5$. Система возникает в результате осреднения по толщине ячейки в предположении параболичности профиля скорости.

Задача заключается в построении одномерной модели, с помощью которой можно оценить ширину слоя смешения, возникающего на границе раздела двух потоков жидкости с разной вязкостью, движущихся с разными скоростями. Проводится длинноволновое моделирование, масштаб движения в ячейке по оси Oy предполагается малым (жидкость течет преимущественно вдоль оси Ox), в результате чего уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + vu_y + a\rho_x &= -\mu u/\rho, \quad \rho_y = 0, \\ c_t + uc_x + vc_y &= 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0.\end{aligned}$$

Здесь, следуя [72; 83], полагается $\beta = 1$, что не влияет на качественный характер результатов.

В рамках трехслойной схемы течения (два потенциальных слоя и между ними вихревой слой смешения) выведена осредненная одномерная модель с массообменом между слоями. В процессе эволюции течения потенциальные слои могут вырождаться, что приводит к двухслойному или однослойному течению. Установлено, что полученная система имеет не менее трех вещественных характеристик (контактная и две звуковые). Это позволяет применить стандартные численные методы решения гиперболических уравнений. Система стационарных уравнений приведена к нормальной форме, и определены понятия сверхкритического и докритического течения. Результаты численного эксперимента показывают существенное влияние вязкости на эволюцию слоя смешения.

Сравнение результатов расчета по двумерным нестационарным уравнениям и построенной одномерной модели показывает возможность определить границы области крупных вихревых структур на основе упрощенной одномерной модели.

Благодарности

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю Чеснокову Александру Александровичу за руководство при проведении исследований, помощь в научной и организационной работе.

Глава 1. Классы точных решений уравнений горизонтально-сдвигового движения жидкости

В данной главе исследуется предложенная в [22] система уравнений горизонтально-сдвигового движения идеальной жидкости в открытом канале в приближении теории длинных волн. Основное внимание уделяется построению и физической интерпретации классов решений данной нелинейной интегродифференциальной модели.

С использованием кинетической формулировки исходных уравнений движения, строится специальный класс решений, который характеризуется линейной связью между интегральными инвариантами Римана и задается гиперболической системой двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами. В рамках специального класса решений получено аналитическое представление решения в виде простой волны.

Другой класс решений уравнений движения строится в виде бегущей волны, непрерывно примыкающей к заданному сдвиговому потоку. Это решение обладает функциональным произволом. Приведен пример периодического решения, выражающегося в элементарных функциях.

Еще один подход к изучению уравнений движения заключается в переходе к полулагранжевым переменным и консервативной формулировке модели с дальнейшим применением “многослойной” аппроксимации. Проведя осреднение основных параметров течения в каждом слое, в предположении о том, что профиль скорости близок к линейному, можно выписать систему дифференциальных законов сохранения. В простейшем случае однослойной аппроксимации возникает система газодинамического типа. Выполняются тестовые расчеты распространения непрерывных и разрывных возмущений в жидкости с использованием TVD-схемы сквозного счета. Дается соответствующая газодинамическая интерпретация, а также проводится анализ влияния количества слоев на распространения возмущений.

1.1 Математическая модель

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + gh_x &= 0, & h_y &= 0, \\ h_t + (uh)_x + (vh)_y &= 0, & uY_{ix} - v|_{y=Y_i} &= 0 \quad (i = 1,2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

описывающая в приближении теории мелкой воды горизонтально-сдвиговое движение идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале переменного сечения [22; 23]. Здесь (x, y, z) — декартовы координаты, t — время, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ — горизонтальные компоненты вектора скорости, $h(t, x)$ — глубина слоя жидкости, g — ускорение свободного падения, уравнениями $y = Y_1(x)$, $y = Y_2(x)$ и $z = 0$ задаются непроницаемые боковые стенки и дно канала (Рисунок 1.1). Следствием уравнений (1.1) является сохранение потенциальной завихренности $\Omega = u_y/h$ вдоль траекторий

$$\Omega_t + u\Omega_x + v\Omega_y = 0.$$

В работе [22] приведен вывод длинноволновой модели (1.1) и сформулированы условия обобщенной гиперболичности уравнений движения на основе предложенного в [24] теоретического подхода. В [23] дано описание стационарных горизонтально-сдвиговых движений жидкости в окрестности локального сужения или расширения канала. В данной главе сосредоточимся на построении и физической интерпретации точных решений уравнений (1.1).

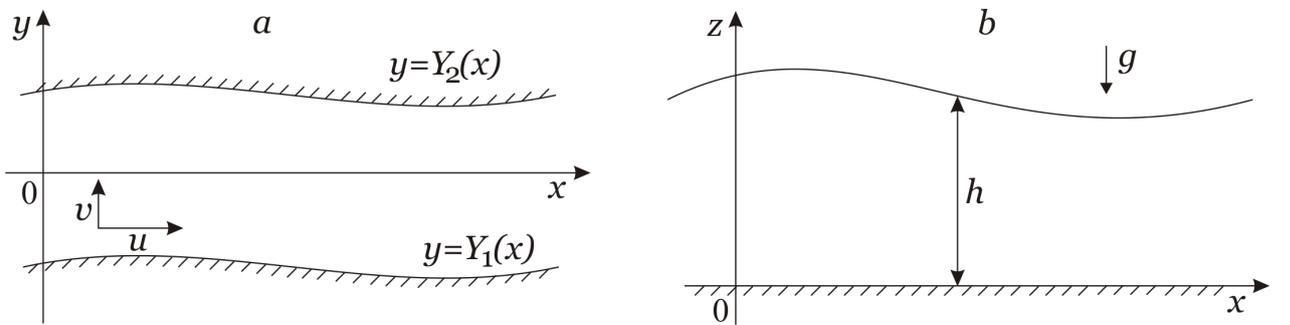


Рисунок 1.1 — Течение жидкости в открытом канале: a — сечение канала плоскостью $z = \text{const}$; b — сечение канала плоскостью $y = \text{const}$.

Для построения классов точных решений модели (1.1) с ненулевой потенциальной завихренностью удобно воспользоваться кинетической формулировкой уравнений движения. Считая независимыми переменными t , x , u и используя формулы

$$\begin{aligned} y_t(t,x,u) + y_u(t,x,u)u_t(t,x,y) &= 0, \\ y_x(t,x,u) + y_u(t,x,u)u_x(t,x,y) &= 0, \quad y_u(t,x,u)u_y(t,x,y) = 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

преобразуем уравнения движения (1.1) к следующему виду:

$$W_t + uW_x - gh_xW_u = 0, \quad h = \frac{1}{Y} \int_{u_1}^{u_2} W du, \quad (1.3)$$

$$u_{1t} + u_1u_{1x} + gh_x = 0, \quad u_{2t} + u_2u_{2x} + gh_x = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $W = \Omega^{-1}$ (аналог функции распределения) является искомой функцией переменных t , x и u ; функция $Y(x) = Y_2(x) - Y_1(x)$ — заданная ширина канала; $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — скорость жидкости в направлении оси Ox на боковых стенках канала $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$ соответственно. Далее полагаем, что $Y(x) = \text{const}$, а также $u_2(t,x) > u_1(t,x)$ и $W(t,x,u) > 0$ для $u \in (u_1, u_2)$.

Уравнения (1.3), (1.4) формируют замкнутую систему интегродифференциальных уравнений для определения искомых функций $W(t,x,u)$, $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$. Если эти величины известны, то с использованием второго уравнения (1.3) можно определить глубину слоя жидкости $h(t,x)$ и следующую зависимость (см. последнее уравнение (1.2) и определение функции W)

$$y(t,x,u) = \frac{1}{h(t,x)} \int_{u_1(t,x)}^u W(t,x,u') du' + Y_1(x) \quad (1.5)$$

Функция $u(t,x,y)$ находится обращением соотношения $y = y(t,x,u)$. Вторая компонента вектора скорости вычисляется по формуле

$$v(t,x,y) = -\frac{1}{h(t,x)} \int_{Y_1(x)}^y \left(h_t(t,x) + (u(t,x,y')h(t,x))_x \right) dy' + u_1(t,x)Y_{1x}(x)$$

По своей структуре уравнения (1.3), (1.4) близки к кинетическому уравнению Власова, хорошо известному в физике плазмы [38]. Аналогичная формулировка уравнений теории длинных волн использовалась в [21] для моделирования плоскопараллельных вертикально-сдвиговых движений жидкости [3].

1.2 Класс решений с линейно зависимыми инвариантами Римана

В случае канала постоянного поперечного сечения ($Y(x) = \text{const}$), рассматриваемая модель движения жидкости сводится к известным уравнениям вихревой мелкой воды и, соответственно, приводится к интегральным инвариантам Римана [19; 22]. Будем использовать этот факт по аналогии с работой [21], для построения класса частных решений интегродифференциальной модели (1.3), (1.4), описываемого системой двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами.

Величина $W(t, x, u)$ сохраняется вдоль траекторий, определяемых уравнениями $\dot{x} = u$, $\dot{u} = -gh_x$. В случае $Y(x) = \text{const}$ на решениях уравнений (1.3), (1.4) функция

$$R(t, x, u) = u - \frac{g}{Y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{W(t, x, u') du'}{u' - u}$$

также сохраняется вдоль траекторий

$$R_t + uR_x - gh_x R_u = 0$$

(проверяется непосредственными вычислениями). Кроме того, на решениях рассматриваемой модели функции

$$r_i = c_i - \frac{g}{Y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{W du}{u - c_i} \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad (1.7)$$

если $c = c_i(t, x)$ корень характеристического уравнения

$$\chi(c) = 1 - \frac{g}{Y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{W du}{(u - c)^2} = 0 \quad (1.8)$$

Анализ уравнения (1.8) показывает, что оно имеет два вещественных корня $c_1 \in (-\infty, u_1)$ и $c_2 \in (u_2, \infty)$, так как $\chi(c) \rightarrow 1$ при $|c| \rightarrow \infty$, $\chi(c) \rightarrow -\infty$ при $c \rightarrow u_1$ или $c \rightarrow u_2$; $\chi'(c) < 0$ для $c < u_1$, $\chi'(c) > 0$ для $c > u_2$. Далее интегральные инварианты Римана $W(t, x, u)$, $R(t, x, u)$ и $r_i(t, x)$ будут использованы для интегрирования уравнений движения и изучения свойств решений.

Построим класс решений, в котором инварианты Римана R и W связаны линейной зависимостью: $R = aW + b$ (a, b — постоянные). При этом для определения функции $W = W(t, x, u)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$u - \frac{g}{Y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{W' du'}{u' - u} = \frac{g\pi}{Y} \operatorname{ctg}(\mu\pi)W + b, \quad (1.9)$$

где $W' = W(t, x, u')$, $a = Y^{-1}g\pi \operatorname{ctg}(\mu\pi)$, ($0 < \mu < 1$, $\mu \neq 1/2$). Из общей теории интегральных уравнений [84] следует, что (1.9) имеет единственное решение в классе гельдеровых на интервале (u_1, u_2) функций, ограниченных в одной из крайних точек и неограниченных в другой. Используя развитый в [84] метод, находим в явном виде решение уравнения (1.9) (рассматриваем решение, ограниченное при $u = u_1$ и неограниченное при $u = u_2$):

$$W = \bar{W}(u, u_1, u_2) = \frac{Y \sin(\mu\pi)}{g\pi} (u - b - \mu(u_2 - u_1)) \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u} \right)^\mu \quad (1.10)$$

Проверить, что найденная функция $W = \bar{W}(u, u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнению (1.9), можно непосредственными вычислениями с использованием табличных интегралов [85]. Выполнение условия $W > 0$ для $u \in (u_1, u_2)$ гарантируется неравенствами

$$u_2 > u_1, \quad (1 + \mu)u_1 - \mu u_2 - b > 0. \quad (1.11)$$

Подстановка (1.10) во второе уравнение (1.3) позволяет выразить глубину слоя жидкости $h(t,x)$ через функции u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned} h = \bar{h}(u_1, u_2) &= \frac{1}{Y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{Y \sin(\mu\pi)}{g\pi} (u - b - \mu(u_2 - u_1)) \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u} \right)^\mu du = \\ &= \mu g^{-1} (u_2 - u_1) \left(2^{-1}(1 - \mu)(u_2 - u_1) + u_1 - b \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

С учетом (1.12), уравнения (1.4) сводятся к замкнутой системе дифференциальных уравнений для определения искомых скоростей на боковых границах канала

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mu \left(b + \mu(u_2 - u_1) + (\mu^{-1} - 1)u_1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} - \\ - \mu \left(b + \mu(u_2 - u_1) - u_2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mu \left(b + \mu(u_2 - u_1) - u_1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} - \\ - \mu \left(b + \mu(u_2 - u_1) - (\mu^{-1} + 1)u_2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Решения системы уравнений (1.13) обладают следующим свойством: если неравенства (1.11) выполнены при $t = 0$, то они выполнены при всех $t > 0$.

Несложно показать, что дифференциальные уравнения (1.13) при заданной формулой (1.10) функции $W(t,x,u)$ определяют класс решений исходной кинетической модели (1.3), (1.4). Для этого подействуем дифференциальным оператором $D = \partial_t + u\partial_x - gh_x\partial_u$ на функцию $W = \bar{W}(u, u_1, u_2)$, заданную формулой (1.10). Принимая во внимание, что функции $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ удовлетворяют системе уравнений (1.13), а функция $h = \bar{h}(u_1, u_2)$ определена формулой (1.12), получаем тождество $D\bar{W} \equiv 0$.

Для нахождения функции $y(t,x,u)$, задающей профиль горизонтальной скорости по ширине канала, подставим (1.10) в формулу (1.5). В результате получим выражение

$$\begin{aligned} y = \frac{(u_2 - u_1)Y}{2^{-1}(1 - \mu)(u_2 - u_1) + u_1 - b} \left(\left(\frac{u_1 - b}{u_2 - u_1} - \mu \right) I_s(1 + \mu, 1 - \mu) + \right. \\ \left. + \frac{1 + \mu}{2} I_s(2 + \mu, 1 - \mu) \right) + Y_1(x), \quad s = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь $I_s(p,q) = B_s(p,q)/B(p,q)$; $B(p,q)$ — β -функция Эйлера, $B_s(p,q)$ — неполная β -функция [85]. Зависимость (1.14) можно обратить (т. к. $y_u \neq 0$) и определить функцию $u(t,x,y)$.

Дифференциальные уравнения (1.13) приводятся к инвариантам Римана. Формулы (1.6), (1.10) позволяют выразить инварианты в явном виде

$$r_i = b - (c_i - b - \mu(u_2 - u_1)) \left(\frac{u_1 - c_i}{u_2 - c_i} \right)^\mu \quad (i = 1,2) \quad (1.15)$$

Здесь c_i — корни характеристического уравнения (1.8), которое с учетом (1.10) принимает вид

$$c^2 - (u_2 + u_1 + \mu(u_2 - u_1))c + u_1u_2 + \mu(u_2 - u_1)(b + \mu(u_2 - u_1)) = 0 \quad (1.16)$$

Решая квадратное уравнение (1.16), находим скорости характеристик c_1 и c_2 :

$$c_{1,2} = \frac{g\bar{h}(u_1, u_2)}{\mu(u_2 - u_1)} + \mu(u_2 - u_1) + b \mp \sqrt{g\bar{h}(u_1, u_2) + \frac{1 - \mu^2}{4}(u_2 - u_1)^2} \quad (1.17)$$

Здесь функция $\bar{h}(u_1, u_2)$ задана формулой (1.12). При выполнении условий (1.11) характеристические корни вещественные. Таким образом, система уравнений (1.13) в инвариантах Римана (1.15) принимает вид (1.7).

1.3 Решение в классе простых волн

Следуя [21], решение системы уравнений (1.3), (1.4) вида

$$W(t,x,u) = \hat{W}(c(t,x), u), \quad u_1 = u_1(c(t,x)), \quad u_2 = u_2(c(t,x))$$

с произвольной гладкой функцией $c(t,x)$ будем называть простой волной. Построим простую волну в рамках специального класса решений с функцией $W(t,x,u)$, заданной формулой (1.10). Эта задача сводится к отысканию решения системы (1.13) в виде $u_1 = u_1(c(t,x))$, $u_2 = u_2(c(t,x))$. Из свойств простой волны следует, что один из инвариантов Римана (1.15) в области простой волны сохраняет постоянное значение. Пусть волна распространяется с характери-

ческой скоростью c_1 ($c_1 < c_2$) и, соответственно, инвариант r_2 постоянен. Тогда построение решения сводится к определению функций $u_1(c)$ и $u_2(c)$ из конечных соотношений

$$r_2(u_1, u_2) = r_{20} = \text{const}, \quad c_1(u_1, u_2) = c \quad (1.18)$$

($r_2(u_1, u_2)$, $c_1(u_1, u_2)$ заданы формулами (1.15), (1.17)) и нахождению функции $c(t, x)$ из уравнения $c_t + cc_x = 0$. Далее покажем, что данная модель допускает решения в виде автомодельной простой волны ($c(t, x) = x/t$), для чего проведем непосредственное построение решения.

Введем обозначения

$$l = u_2 - u_1, \quad \alpha = \sqrt{g\bar{h}(u_1, u_2) + (1 - \mu^2)l^2/4}, \quad \xi = x/t,$$

с использованием которых уравнения простой волны (1.18) записываются в виде

$$b - \left(\frac{\alpha^2 - (1 - \mu^2)l^2/4}{\mu l} + \alpha \right) \left(\frac{\alpha + (1 + \mu)l/2}{\alpha - (1 - \mu)l/2} \right)^\mu = r_{20}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\alpha^2 - (1 - \mu^2)l^2/4}{\mu l} + \mu l + b - \alpha = \xi$$

Выразив из второго уравнения (1.19) функцию

$$\alpha(l, \xi) = \mu l/2 + \sqrt{(1/4 - \mu^2)l^2 + (\xi - b)\mu l}$$

и подставив в первое, получим уравнение для определения функции $l(\xi)$:

$$\Psi(l, \xi) = \left(\frac{\alpha^2(l, \xi)}{\mu l} + \alpha^2(l, \xi) - \frac{1 - \mu^2}{4\mu} l \right) \left(\frac{\alpha(l, \xi) + (1 + \mu)l/2}{\alpha(l, \xi) - (1 - \mu)l/2} \right)^\mu - b + r_{20} = 0.$$

Решение этого уравнения находится численно с использованием итерационного метода Ньютона: $l_{i+1} = l_i - \Psi(l_i, \xi)/\Psi_l(l_i, \xi)$. Если функция $l(\xi)$ известна, то по формулам

$$u_1 = \xi + \alpha - (1 + \mu)l/2, \quad u_2 = \xi + \alpha + (1 - \mu)l/2 \quad (1.20)$$

определим скорость жидкости на боковых границах канала. Формулы (1.20), (1.10) и (1.12) дают решение исходной интегродифференциальной модели сдвигового движения жидкости в канале (1.3), (1.4).

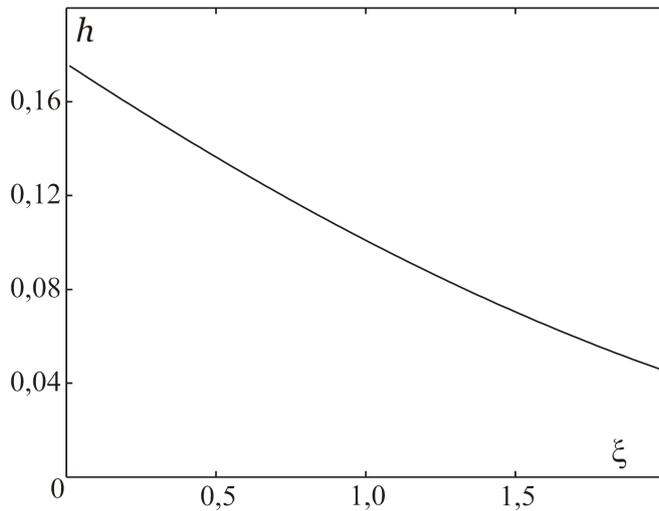


Рисунок 1.2 — Свободная граница $z = h(\xi)$ в области простой волны.

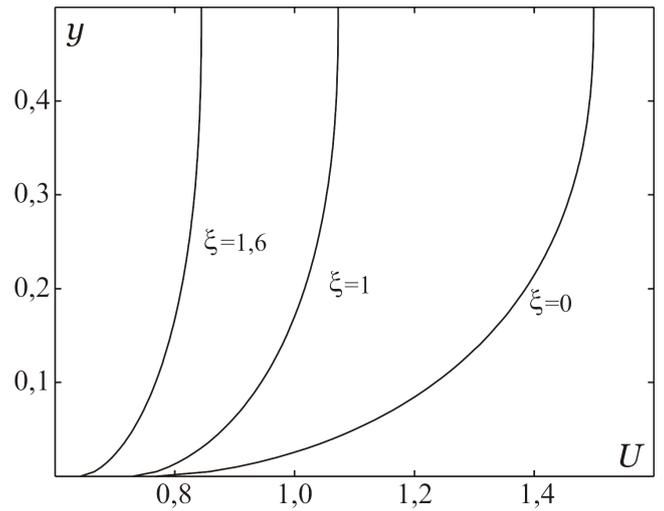


Рисунок 1.3 — Профиль относительной скорости $U = u - \xi$ по ширине канала.

На Рисунке 1.2 показана свободная граница $z = h(\xi)$ в области автомодельной простой волны. Распределение относительной скорости $U = u(\xi, y) - \xi$ по ширине канала при фиксированных значениях ξ показано на Рисунке 1.3. Графики получены при следующих значениях параметров: $Y = 0,5$; $\mu = 0,6$; $b = -3$; $r_{20} = -10$ и $g = 9,81$. Как видно из Рисунка 1.2 и 1.3, в области простой волны с ростом автомодельной переменной ξ происходит понижение уровня жидкости в канале и ускорение потока. Отметим, что в случае канала с прямолинейными стенками полученное решение можно трактовать как симметричное относительно линии $y = Y$ горизонтально-сдвиговое движение тонкого слоя идеальной жидкости в открытом канале ширины $2Y$.

1.4 Бегущие волны на горизонтально-сдвиговом потоке

Построение решений уравнений (1.3), (1.4) в случае $Y = \text{const}$ в классе бегущих волн $W = W(\zeta, u)$, $u_i = u_i(\zeta)$, $\zeta = x - Dt$, распространяющихся с

постоянной скоростью D , сводится к интегрированию уравнений

$$\begin{aligned} (u - D)W_\zeta - gh_\zeta W_u &= 0, & h &= \frac{1}{Y} \int_{u_1}^{u_2} W du \\ (u_i - D)u'_i(\zeta) + gh'(\zeta) &= 0 & (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Пусть $h'(\zeta) \neq 0$, тогда глубину слоя жидкости h можно принять за независимую переменную и, решив характеристическое уравнение для первого уравнения (1.21)

$$\frac{d\zeta}{u - D} = \frac{du}{-gh_\zeta} = \frac{dW}{0},$$

представить решение (1.21) в виде

$$W = \Phi(\eta), \quad \eta = u^2 - 2Du + 2gh, \quad u_i^2 - 2Du_i + 2gh = \eta_{i0} = \text{const} \quad (1.22)$$

Уравнения движения тонкого слоя жидкости (1.1) в открытом канале с прямолинейными боковыми границами имеют решение

$$u = u(y), \quad v = 0, \quad h = h_0 = \text{const},$$

которое представляет собой стационарный горизонтально-сдвиговой поток. В кинетической формулировке (1.3), (1.4) это соответствует тому, что задана функция $W = W_0(u)$, а также известны значения скоростей $u_1 = u_{10}$ и $u_2 = u_{20}$ на боковых границах канала. Построим бегущую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью D и непрерывно примыкающую к заданному сдвиговому потоку по линии $\zeta = \zeta_0$ так, что

$$W(\zeta_0, u) = W_0(u), \quad h_0 = h(\zeta_0) = \frac{1}{Y} \int_{u_{10}}^{u_{20}} W_0(u) du \quad (1.23)$$

Построение решения основано на предложенном в [39] подходе, позволяющем свести интегрирование кинетической модели в классе бегущих волн к решению интегрального уравнения Абеля.

Характеристические кривые (линии $\eta = \text{const}$) в плоскости переменных (u, h) показаны на Рисунке 1.4. Рассмотрим случай $u_{10} < D < u_{20}$, соответству-

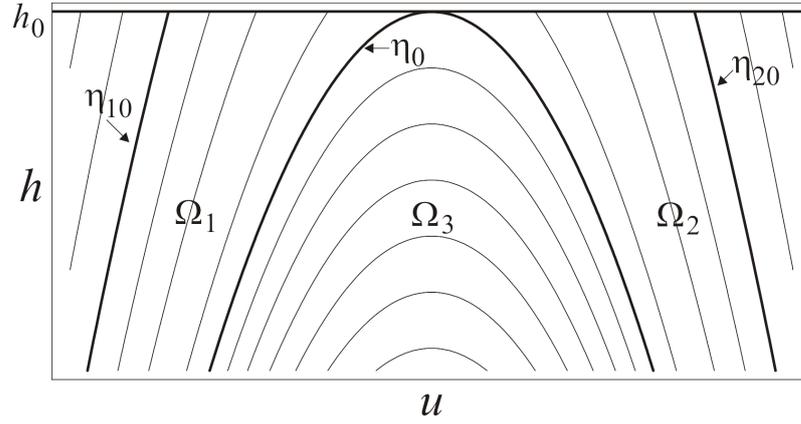


Рисунок 1.4 — Характеристические кривые $\eta = \text{const}$ в плоскости (u, h) .

ющий течению с критическим слоем (на некоторой линии в области движения жидкости скорость волны совпадает со скоростью частиц). Отметим, что задача Коши (1.23) некорректна для $h > h_0$, так как функция $W_0(u)$ не может быть задана произвольно (характеристики пересекают линию, на которой заданы условия Коши в двух точках). Построим решение задачи (1.21), (1.23) в некотором интервале $h_1 \leq h \leq h_0$.

Принимая во внимание, что $\eta_{i0} = (u_{i0} - D)^2 + 2gh_0 - D^2$ в силу (1.22), получаем выражения для скоростей u_1 и u_2 в области бегущей волны

$$\begin{aligned} u_1(h) &= D - \sqrt{2g(h_0 - h) + (u_{10} - D)^2}, \\ u_2(h) &= D + \sqrt{2g(h_0 - h) + (u_{20} - D)^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Соотношениями $u_*(h) = D - \sqrt{2g(h_0 - h)}$ и $u^*(h) = D + \sqrt{2g(h_0 - h)}$ представим линию $\eta = \eta_0 = 2gh_0 - D^2$ при $u < D$ и $u > D$ соответственно.

В областях

$$\Omega_1 = \{(u, h) \mid 0 < h < h_0, u_1(h) < u < u_*(h)\},$$

$$\Omega_2 = \{(u, h) \mid 0 < h < h_0, u^*(h) < u < u_2(h)\}$$

решение строится методом характеристик. Определим функции

$$\Phi_1(\eta) = W_0(D - \sqrt{\eta - 2gh_0 + D^2}), \quad \Phi_2(\eta) = W_0(D + \sqrt{\eta - 2gh_0 + D^2})$$

Тогда решение в областях Ω_1 и Ω_2 дается формулами

$$W(h,u) = \Phi_1(u^2 - 2Du + 2gh), \quad W(h,u) = \Phi_2(u^2 - 2Du + 2gh) \quad (1.25)$$

В область $\Omega_3 = \{(u,h) \mid 0 < h < h_0, u_*(h) < u < u^*(h)\}$ не приходит ни одна характеристика, выходящая с линии $h = h_0$ (см. Рисунок 1.4). Для определения функции $W(h,u) = \Phi_3(\eta)$ в этой области воспользуемся вторым уравнением в системе (1.21), которое можно преобразовать к интегральному уравнению Абеля. Действительно, перейдем к переменной интегрирования η и введем обозначения $s = 2gh - D^2$, $\eta_0 = 2gh_0 - D^2$. Тогда для нахождения функции $\Phi_3(\eta)$ получаем уравнение

$$\int_s^{\eta_0} \frac{\Phi_3(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - s}} = F(s) \quad (1.26)$$

с известной правой частью

$$F(s) = \frac{(s + D^2)Y}{2g} - \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta_{10}} \frac{\Phi_1(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - s}} - \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta_{20}} \frac{\Phi_2(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - s}}$$

В результате обращения уравнения (1.26), получаем решение в области Ω_3

$$W(h,u) = \Phi_3(\eta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{F(\eta_0)}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} - \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s - \eta}} \right) \quad (1.27)$$

В данном случае $F(\eta_0) = 0$, так как выполнено условие непрерывного примыкания простой волны к заданному сдвиговому потоку. Формулы (1.24), (1.25) и (1.27) дают решение уравнений (1.3), (1.4) в классе бегущих волн. Заметим, что зависимость $h = h(\zeta)$ остается произвольной и, соответственно, построенное решение имеет функциональный произвол.

Траектории движения частиц в системе координат, движущейся вместе с волной, определяются уравнениями

$$\frac{d\zeta}{dt} = u - D, \quad \frac{du}{dt} = -gh'(\zeta). \quad (1.28)$$

Линии $\eta = \text{const}$ являются интегральными кривыми этой системы, поэтому Рисунок 1.4 пригоден для анализа движения жидкости в области бегущей волны. В областях Ω_1 и Ω_2 величина $u - D$ не меняет знак, вследствие чего частицы жидкости со скоростями $u < u_*$ и $u > u^*$ пересекают область бегущей волны в противоположных направлениях. В области Ω_3 , содержащей критический слой $u = D$, частицы жидкости совершают поворотное движение.

1.5 Решение, выражающееся в элементарных функциях

По предложенному выше алгоритму построим решение в виде бегущей волны

$$W = W(\zeta, u), \quad u_1 = u_1(\zeta), \quad u_2 = u_2(\zeta), \quad \zeta = x - Dt,$$

примыкающей к заданному сдвиговому потоку

$$u = \Omega h_0 y + u_{10}, \quad v = 0, \quad h = h_0 = \frac{u_{20} - u_{10}}{\Omega Y} \quad (1.29)$$

по характеристике $\zeta = \zeta_0 = \text{const}$, так что

$$W(\zeta_0, u) = \Omega^{-1}, \quad u_1(\zeta_0) = u_{10}, \quad u_2(\zeta_0) = u_{20}$$

Здесь Y , Ω , D , u_{10} и u_{20} — постоянные, причем $u_{10} < D < u_{20}$. Предполагается, что стенки канала прямолинейны ($Y_1 = 0$, $Y_2 = Y$).

В областях Ω_1 и Ω_2 (см. Рисунок 1.4) функция W сохраняет постоянное значение

$$W = \Phi_1(\eta) = \Phi_2(\eta) = \Omega^{-1}, \quad (1.30)$$

скорости u_1 и u_2 определяются формулами (1.24) с произвольной функцией $h = h(\zeta)$ такой, что $h(\zeta_0) = h_0$. Для построения решения в области Ω_3 имеем уравнение Абеля (1.26) с функцией F следующего вида

$$F(s) = \frac{(s + D^2)Y}{2g} - \frac{1}{\Omega} \left(\sqrt{\eta_{10} - s} + \sqrt{\eta_{20} - s} - 2\sqrt{\eta_0 - s} \right)$$

В данном случае решение в области Ω_3 выражается в элементарных функциях и имеет вид

$$W = \Phi_3(\eta) = \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\pi\Omega} \left(\arcsin \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta_{10} - \eta}} + \arcsin \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta_{20} - \eta}} \right) - \frac{Y}{\pi g} \sqrt{\eta_0 - \eta}, \quad (1.31)$$

где

$$\eta_0 - \eta = 2g(h_0 - h) - (u - D)^2, \quad \eta_{i0} - \eta = \eta_0 - \eta + (u_{i0} - D)^2, \quad (i = 1, 2)$$

При этом функция $h = h(\zeta)$ может быть задана произвольно, что позволяет получать обширные классы решений, в том числе периодические решения.

Пусть к заданному сдвиговому потоку (1.29) с параметрами $u_{10} = -1/2$, $u_{20} = 1/2$, $h_0 = 1$, $\Omega = 1$, $Y = 1$ по линии $x = -2\pi$ примыкает стационарное (скорость распространения волны $D = 0$) решение (1.30), (1.31) с периодической функцией $h(x) = 5^{-1}(4 + \cos x)$. Профиль горизонтальной скорости $u(x, y)$ по ширине канала для $x = -2\pi$; $-3\pi/2$ и $-\pi$ показан на Рисунке 1.5 (линии a , b и c соответственно). Заметим, что верхняя и нижняя часть кривых b , c на Рисунке 1.5 — прямые линии, так как по построению решения (см. формулу (1.30)) в областях Ω_1 и Ω_2 величина $W = \text{const}$. Нетривиальное распределение скорости наблюдается в области Ω_3 , где функция W задается формулой (1.31). Траектории движения жидких частиц в фазовой плоскости переменных (x, u) , показанные на Рисунке 1.6, имеют характерную для течений с критическим слоем форму “кошачий глаз” [86]. Стрелками указано направление движения жидких частиц. Верхняя и нижняя линии на Рисунке 1.6 соответствуют значению скорости u

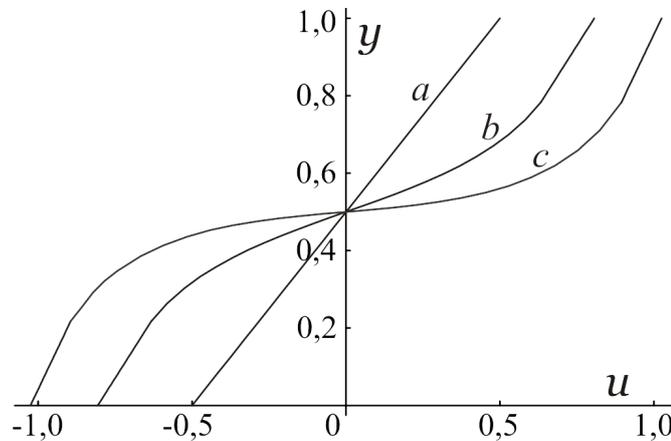


Рисунок 1.5 — Профиль скорости $u(x, y)$ при фиксированных значениях x .

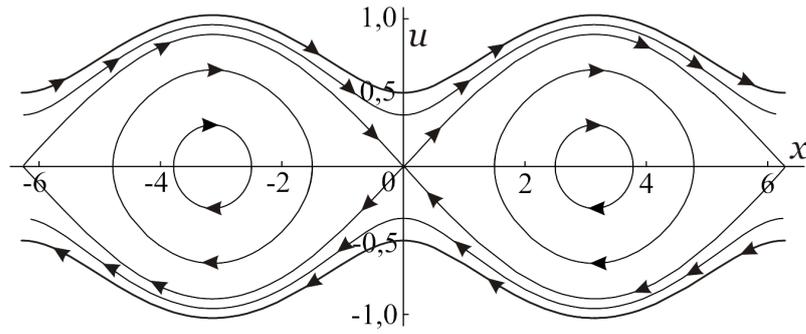


Рисунок 1.6 — Траектории движения частиц в фазовой плоскости (x, u) .

на боковых границах канала. Замкнутые траектории в плоскости (x, u) имеют частицы, находящиеся в области Ω_3 , содержащей критический слой $u = 0$. Следует отметить, что при таком выборе произвольной функции $h(x)$ можно провести аналогию с математическим маятником. Действительно, в этом случае система (1.28), определяющая траектории движения частиц, сводится (при $D = 0$) к уравнению колебания математического маятника $\ddot{x} - 5^{-1}g \sin x = 0$.

1.6 Устойчивость горизонтально-сдвиговых течений жидкости

Результаты об устойчивости течений, описывающихся уравнениями (1.1), сформулированы в [22] в терминах гиперболичности систем с операторными коэффициентами [19; 24; 29]. Поэтому ниже приводятся характеристическая функция и условия обобщенной гиперболичности без пояснений. Более подробно аналогичная задача рассматривается в Главе 2.

Утверждение о гиперболичности уравнений (1.1) формулируется в терминах характеристической функции χ :

$$\chi(k) = 1 - \frac{gh}{Y} \int_0^Y \frac{dy}{(u - k)^2}. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.1) гиперболические на гладком решении в смысле [24], если

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm \neq 0, \quad (1.33)$$

здесь $\chi^+(u)$ и $\chi^-(u)$ предельные значения функции $\chi(u)$ из верхней χ^+ и нижней χ^- комплексной полуплоскости на отрезке $[u_0, u_1]$, полученные интегрированием (1.32) по частям и применением формул Сохоцкого–Племеля [84]:

$$\chi^\pm(u) = 1 + \frac{g}{Y} \left[\frac{1}{\Omega_1(u_1 - u)} - \frac{1}{\Omega_0(u_0 - u)} - \int_0^Y \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{\Omega(y')} \right) \frac{dy'}{u(y') - u} \mp \frac{\pi i}{u_y} \left(\frac{1}{\Omega} \right)_y \right].$$

Напомним, что $\Omega = u_y/h$, а величины с индексами “0” и “1” соответствует значениям величин на стенках канала $y = 0$ и $y = Y$ соответственно. При этом, если выполнены условия (1.33), то характеристическое уравнение $\chi(k) = 0$ имеет только вещественные корни [22; 29].

Условия гиперболичности для течения с монотонным профилем скорости $u = U(y)$, $U'(y) > 0$ удобно проверять с помощью функций:

$$\Psi^\pm(U) = m(U)\chi^\pm(U), \quad m(U) = (U_1 - U)(U - U_0) > 0.$$

Функции

$$\Psi^\pm(U) = m(U) + \frac{gh}{Y} \left(\frac{U - U_0}{U'_1} + \frac{U_1 - U}{U'_0} + m(U) \int_0^Y \frac{U(\nu)'' d\nu}{(U'(\nu))^2 (U(\nu) - U(y))} \pm \pi i m(U) \frac{U''}{(U')^3} \right)$$

не имеют полюсов при $U = U_0, U = U_1$ за счет выбора функции $m(U)$, которая, очевидно, не влияет на выполнение условий (1.33). В комплексной плоскости (z_1, z_2) строится замкнутый контур C , состоящий из контуров C^+ и C^- , которые задаются параметрически:

$$C^+ : \quad z_1 = \operatorname{Re}[\Psi^+(U)], \quad z_2 = \operatorname{Im}[\Psi^+(U)];$$

$$C^- : \quad z_1 = \operatorname{Re}[\Psi^-(U)], \quad z_2 = \operatorname{Im}[\Psi^-(U)];$$

Заметим, что контуры C^+ и C^- симметричны относительно оси z_1 . Если точка комплексной плоскости $(0,0)$ лежит внутри контура C , то аргумент Ψ^\pm получит приращение, что соответствует наличию комплексных характеристик. В работе [37] сформулированы условия устойчивости для течений, описывающих-

ся уравнениями Бенни. Для модели (1.1) можно сформулировать аналогичные критерии устойчивости. Так как системы математически эквивалентны, даются только краткие доказательства.

Утверждение 1 Любое течение с монотонным выпуклым профилем скорости устойчиво (аналог критерия Релея).

Действительно, пусть $U' > 0$, $U'' \neq 0$, тогда $\Psi^\pm(U_0) > 0$, $\Psi^\pm(U_1) > 0$, $\text{Im}\Psi^\pm$ не меняет знак на интервале, и в силу неравенства $\Psi^\pm(U_c) > 0$, где U_c - любая точка из $[U_0, U_1]$, аргумент не прирастает.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим течение с монотонным выпуклым профилем скорости, заданным уравнением:

$$U(y) = \frac{3y}{2y + 1}, \quad y \in [0, 1]. \quad (1.34)$$

Тогда при $h = g = Y = 1$ профиль скорости показан на Рисунке 1.7, а соответствующий ему контур C^- построен на Рисунке 1.8.

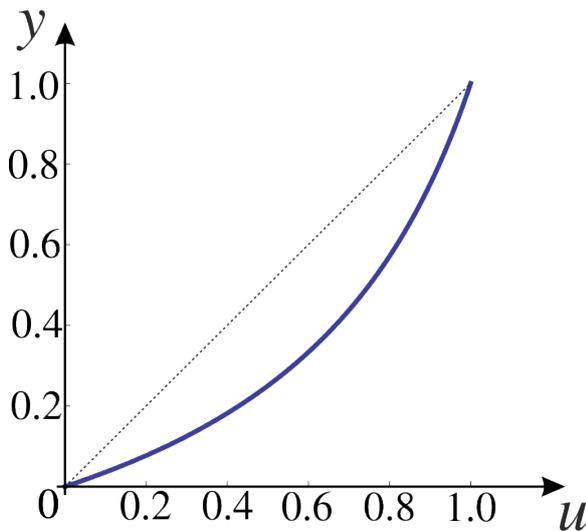


Рисунок 1.7 — Профиль скорости, заданный (1.34)

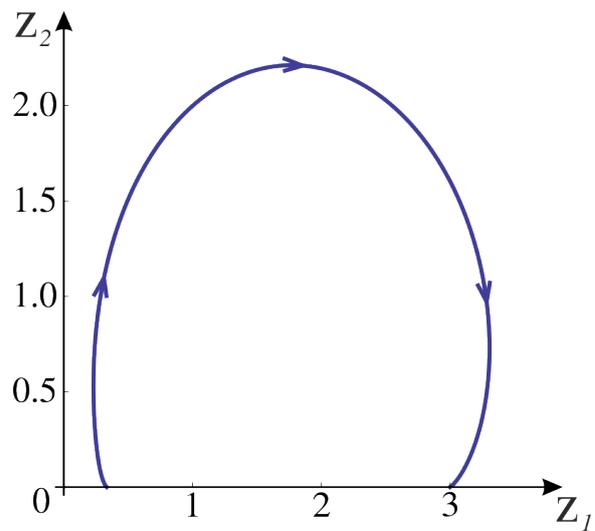


Рисунок 1.8 — Контур C^- , соответствующий профилю (1.34)

Утверждение 2 Если $U''(U - U_c) \geq 0$, где $U_c = U(y_c)$, а y_c - точка перегиба $U''(y_c) = 0$, то течение устойчиво (аналог критерия Фьортфта).

Аналогично, как и в предыдущем утверждении, $\Psi^\pm(U_0) > 0$, $\Psi^\pm(U_1) > 0$, а знак $\text{Im}\Psi^\pm$ совпадает со знаком U'' . Значит, проверка устойчивости сводится

к определению знака $\Psi^\pm(U_c)$.

$$\Psi^\pm(U_c) = m(U_c) + \frac{gh}{Y} \left(\frac{U_c - U_0}{U'_1} + \frac{U_1 - U_c}{U'_0} + m(U_c) \int_0^Y \frac{U(\nu)''(U(\nu) - U_c)d\nu}{(U'(\nu))^2(U(\nu) - U(y))^2} \right),$$

с учетом того, что $m(U_c) \geq 0$ и $U''(U - U_c) \geq 0$, верно неравенство $\Psi^\pm(U_c) > 0$, а значит, течение устойчиво.

В качестве иллюстративного примера к утверждению 2, рассмотрим течение с профилем скорости, заданным уравнением:

$$U(y) = y^3 - y^2 + y, \quad y \in [0,1]. \quad (1.35)$$

Тогда при $h = g = Y = 1$ профиль скорости показан на Рисунке 1.9, а соответствующий ему контур C^- построен на Рисунке 1.10.

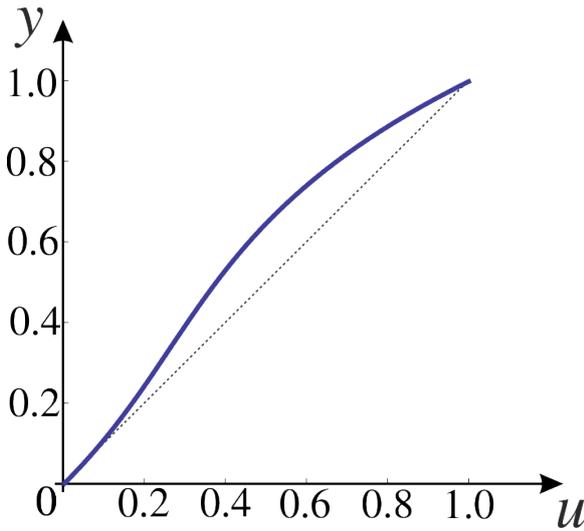


Рисунок 1.9 — Профиль скорости, заданный (1.35)

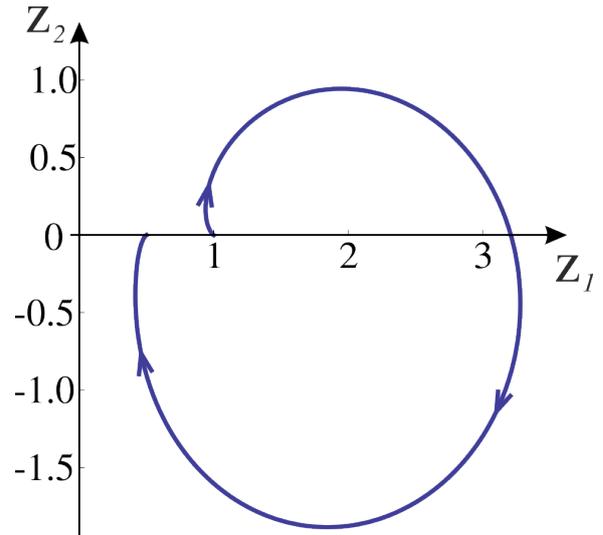


Рисунок 1.10 — Контур C^- , соответствующий профилю (1.35)

Утверждение 3 Если $U''(U - U_c) \leq 0$, где $U_c = U(y_c)$, а y_c — точка перегиба $U''(y_c) = 0$, то течение может быть неустойчиво.

Хотя в этом случае выполняются все те же условия, что и в утверждении 2, мы не можем гарантировать выполнение неравенства $\Psi^\pm(U_c) > 0$. Построим пример, в рамках которого возможно ненулевое приращение аргумента, а значит, течение может быть неустойчиво, что покажет справедливость утвер-

ждения 3. Рассмотрим течение с профилем скорости, заданным уравнением:

$$U(y) = \frac{\tanh((y - y_c)a) + \tanh(ay_c)}{\tanh((1 - y_c)a) + \tanh(ay_c)}, \quad y \in [0,1]. \quad (1.36)$$

При $h = g = Y = 1$ вторая производная будет обращаться в ноль в точке перегиба $y_c = 0.53$. На Рисунке 1.11 приведен профиль скорости, а на Рисунке 1.12 контур C^- для значений параметра $a = 2.4$ и $a = 3.6$. Пунктирные линии

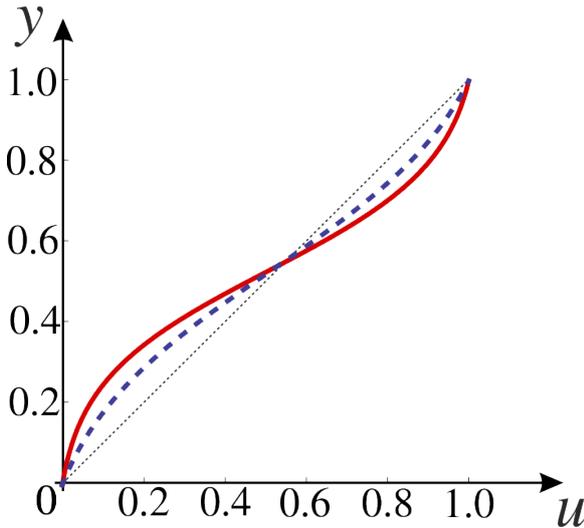


Рисунок 1.11 — Профиль скорости, заданный (1.36) для $a = 2.4$ (пунктир) и $a = 3.6$ (сплошная)

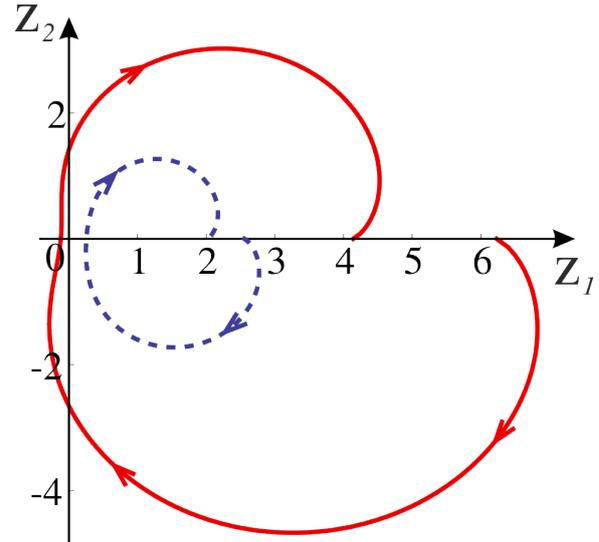


Рисунок 1.12 — Контур C^- , соответствующий профилю (1.36) для $a = 2.4$ (пунктир) и $a = 3.6$ (сплошная)

соответствуют $a = 2.4$, при этом точка $(0,0)$ не лежит внутри контура C^- , а значит, приращение аргумента функции χ равно нулю и течение устойчиво. Сплошные линии соответствуют профилю скорости и контуру C^- при значении параметра $a = 3.6$, при этом точка $(0,0)$ попадает внутрь контура C^- , а значит, течение неустойчиво.

Таким образом, для модели (1.1) можно сформулировать критерии устойчивости, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта [86; 87]. Применим данные критерии к построенному ранее решению в классе бегущих волн. По Рисунку 1.5 очевидно, что в процессе эволюции течения профиль скорости соответствует описанному в Утверждении 3 и такое течение может быть неустойчивым.

1.7 Газодинамическая аналогия и многослойная аппроксимация

Для численного моделирования распространения длинноволновых возмущений на горизонтально-сдвиговом потоке тонкого слоя жидкости получим гиперболическую систему одномерных дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующих исходную модель (1.1). Очевидными следствиями уравнений (1.1) являются законы сохранения импульса

$$(uh)_t + (u^2h + gh^2/2)_x + (uvh)_y = 0 \quad (1.37)$$

и энергии слоя жидкости

$$(u^2h + gh^2)_t + (u^3h + 2guh^2)_x + (u^2vh + 2gvh^2)_y = 0. \quad (1.38)$$

Определим среднюю по сечению канала скорость потока

$$u_c = \frac{1}{Y} \int_{Y_1}^{Y_2} u dy$$

и проинтегрируем по y от Y_1 до Y_2 третье уравнение системы (1.1), а также уравнения (1.37) и (1.38) с учетом граничных условий на стенках каналах. При этом возникает следующая система уравнений

$$\begin{aligned} (hY)_t + (u_chY)_x &= 0, \\ (u_chY)_t + \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^2 dy + \frac{gh^2Y}{2} \right)_x &= \frac{gh^2Y'}{2}, \\ \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^2 dy + gh^2Y \right)_t + \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^3 dy + 2gYh^2u_c \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Полагая, что профиль скорости близок к линейному

$$u(t,x,y) \approx (y - Y_1(x))h(t,x)\Omega(t,x) + u_c(t,x) - h(t,x)\Omega(t,x)Y(x)/2,$$

вычислим интегралы в (1.39). В итоге получим систему газодинамического типа

$$\begin{aligned} (hY)_t + (u_c hY)_x &= 0, \\ (u_c hY)_t + \left(u_c^2 hY + \frac{\Omega^2 h^3 Y^3}{12} + \frac{gh^2 Y}{2} \right)_x &= \frac{gh^2 Y'}{2}, \\ \left(u_c^2 hY + \frac{\Omega^2 h^3 Y^3}{12} + gh^2 Y \right)_t + \left(u_c^3 hY + \frac{u_c \Omega^2 h^3 Y^3}{4} + 2u_c gh^2 Y \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Уравнения (1.40) при $Y = \text{const}$ совпадают с полученной В. М. Тешуковым приближенной газодинамической моделью для плоскопараллельных сдвиговых течений со свободной границей [47].

В данном случае роль плотности и энтропии “газа” играют величины $\rho = hY$ и $s = \ln(\Omega^2)$, а уравнения состояния “газа” для давления и внутренней энергии имеют вид

$$p(\rho, s) = \frac{g\rho^2}{2Y} + \frac{\rho^3 \exp(s)}{12}, \quad e(\rho, s) = \frac{g\rho}{2Y} + \frac{\rho^2 \exp(s)}{24}. \quad (1.41)$$

Система уравнений (1.40) имеет звуковые и контактную характеристики

$$\frac{dx}{dt} = u_c \pm c, \quad \frac{dx}{dt} = u_c$$

где c — скорость звука в “газе”, определяемая по формуле

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = gh + \frac{\Omega^2 h^2 Y^2}{4}.$$

Нетрудно видеть, что при таком выборе термодинамических параметров “газа” справедливо основное термодинамическое тождество $Tds = de + pd(1/\rho)$, где $T = e_s$ — температура “газа”. Течения жидкости с постоянной средней потенциальной завихренностью $\Omega = \text{const}$ соответствуют изэнтропическим движениям газа. В случае $\Omega \rightarrow 0$ (или $s \rightarrow -\infty$) система (1.40) сводится к классическим уравнениям теории мелкой воды.

Для дальнейших вычислений перейдем к консервативным переменным

$$H = hY, \quad Q = u_c hY, \quad M = u_c^2 hY + \frac{\Omega^2 h^3 Y^3}{12} + gh^2 Y.$$

Принимая, что здесь и далее ширина канала постоянна $Y = \text{const}$, стенки канала заданы уравнениями $y = 0$ и $y = Y$, перепишем систему (1.40) в следующем виде

$$\begin{aligned} H_t + Q_x = 0, \quad Q_t + \left(M - \frac{gH^2}{2Y} \right)_x &= 0, \\ M_t + \left(\frac{3MQ}{H} - \frac{2Q^3}{H^2} - \frac{gQH}{Y} \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Осредненную модель (1.40) также можно получить как тривиальное следствие “многослойной” аппроксимации исходных уравнений движения (1.1). Для вывода уравнений “многослойного” приближения перейдем к полулагранжевым координатам с помощью замены переменной $y = \Phi(t, x, \lambda)$, где Φ — решение задачи Коши [17]:

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda Y \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют стенкам канала $y = 0$ и $y = Y$ соответственно.

В новых переменных система для определения функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = h\Phi_\lambda$ имеет интегродифференциальную систему уравнений:

$$u_t + uu_x + gh_x = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad h = \frac{1}{Y} \int_0^1 H d\lambda. \quad (1.43)$$

Для описания разрывных решений будем использовать следующую систему законов сохранения [21; 88], которая является очевидным следствием системы (1.43):

$$\begin{aligned} H_t + (uH)_x = 0, \quad (u - u_0)_t + (u^2/2 - u_0^2/2)_x &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 uH d\lambda \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda + \frac{g}{2Y} \left(\int_0^1 H d\lambda \right)^2 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где $u_0(t, x) = u(t, x, 0)$ — компонента скорости на стенке канала $y = 0$. Здесь первое уравнение соответствует закону сохранения массы, второе — закону сохранения относительного локального импульса, а последнее уравнение является балансовым соотношением для полного импульса слоя. Для того чтобы показать,

что система (1.43) есть следствие системы (1.44), необходимо скомбинировать первые два уравнения (1.44):

$$(uH)_t + (u^2H)_x - H(u_{0t} + u_0u_{0x}) = 0,$$

проинтегрировать полученное уравнение по λ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 uH d\lambda \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^1 u^2H d\lambda \right) - (u_{0t} + u_0u_{0x}) \left(\int_0^1 H d\lambda \right) = 0,$$

а затем вычесть полученное из последнего уравнение системы (1.44):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0^2}{2} + \frac{g}{Y} \int_0^1 H d\lambda \right) = 0.$$

Если теперь скомбинировать полученное уравнение со вторым уравнением (1.44), то получим в точности первое уравнение (1.43). Таким образом мы показали, что на гладких решениях системы (1.43) и (1.44) эквивалентны.

Для вывода “многослойной” системы дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующей модель (1.44), выполним разбиение на M слоев по переменной λ ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$) и введем переменные:

$$\begin{aligned} y_i &= \Phi(t, x, \lambda_i), & u_i &= u(t, x, \lambda_i), & \eta_i &= y_i - y_{i-1} \\ \Omega_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{\eta_i}, & u_{ci} &= \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, & q &= \sum_{i=1}^M u_{ci} h_i. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Следуя [21], проведем осреднение уравнений движения интегрированием по λ от λ_{i-1} до λ_i . При вычислении интегралов будем предполагать, что профиль скорости в каждом слое $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ (или $y \in [y_{i-1}, y_i]$) близок к линейному, т. е.

$$u(t, x, y) \approx (y - y_{i-1})\Omega_i h + u_{i-1}, \quad y \in [y_{i-1}, y_i] \quad (1.46)$$

В силу выбранной аппроксимации профиля скорости в слоях и с учетом того, что $H d\lambda = h dy$, имеют место равенства

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u H d\lambda = u_{ci} h \eta_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda = u_{ci}^2 h \eta_i + \frac{\Omega_i^2 h^3 \eta_i^3}{12},$$

с помощью которых в результате интегрирования уравнений (1.44) по λ от λ_{i-1} до λ_i можно вывести “многослойную” систему, состоящую из $2M + 1$ уравнений, которая аппроксимирует исходную систему законов сохранения:

$$\begin{aligned} (h\eta_i)_t + (u_{ci} h \eta_i)_x &= 0, \quad (\Omega_i h \eta_i)_t + (u_{ci} \Omega_i h \eta_i)_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^M (u_{ci} h \eta_i) \right) + & \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^M \left(u_{ci}^2 h \eta_i + \frac{\Omega_i^2 h^3 \eta_i^3}{12} \right) + \frac{g}{2Y} \left(\sum_{i=1}^M h \eta_i \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Заметим, что если рассмотреть простейший случай однослойной аппроксимации ($M = 1$), то $\eta_1 = Y$, $u_{c1} = u_c$. Если положить $\Omega_1 = \Omega$, то из системы (1.47) напрямую следуют первые два уравнения системы (1.40). При этом третье уравнение (1.40) также можно вывести как следствие системы (1.47) при $Y = \text{const}$.

1.8 Численные результаты

В рамках полученной многослойной аппроксимации законов сохранения интересным представляется сравнительный расчет по уравнениям газодинамической аналогии (1.42) и модели (1.47).

Вычисления проводятся с использованием центральной схемы второго порядка аппроксимации Насьяху–Тэдмора [25] типа предиктор–корректор с пара-

метром Куранта–Фридрихса–Леви 0,475:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1/2} &= u_j^n - \Lambda f'_j/2, \quad (\Lambda = \Delta t/\Delta x) \\ u_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) + \frac{1}{8}(u'_j - u'_{j+1}) - \Lambda(f(u_{j+1}^{n+1/2}) - f(u_j^{n+1/2})). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Схема (1.48) аппроксимирует систему балансовых соотношений вида

$$u_t + (f(u))_x = 0,$$

к которому относятся модели (1.42) и (1.47). Здесь Δx — шаг разбиения по пространственной переменной x ; Δt — шаг по времени, выбираемый из условия Куранта; u_j^n — значение функций в узле $x = x_j$ при $t = t^n$; величины $u'_j/\Delta x$ и $f'_j/\Delta x$ — аппроксимация производных первого порядка по x . Для вычисления производных использована процедура “UNO limiter” [89]:

$$\begin{aligned} u'_j &= \text{MM}(d_{j-1/2} + \frac{1}{2}\text{MM}(D_{j-1}, D_j), d_{j+1/2} - \frac{1}{2}\text{MM}(D_j, D_{j+1})), \\ d_{j+1/2} &= u_{j+1} - u_j, \quad D_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}, \\ \text{MM}(a, b) &= \begin{cases} \text{sign}(a) \min(|a|, |b|) & \text{if } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Выбор схемы обусловлен тем, что она позволяет не искать точное или приближенное решение задачи Римана, что представляется проблематичным, учитывая большое количество уравнений системы (1.47). Хотя для решения данной задачи можно использовать и ряд других TVD-схем [90].

Рассмотрим пример. Пусть ускорение свободного падения g считается равным 1; границы расчетного интервала $x_b = -x_a = -2$; сечение канала $Y = 1$; число узловых точек $N = 400$. Решение задачи Коши для уравнений (1.42) с разрывными начальными данными

$$(u, p, \rho)|_{t=0} = \begin{cases} (0; 1,6; 1,4), & x < 0 \\ (0; 0,2; 0,5), & x > 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

представлено на Рисунке 1.13 в момент времени $t = 1$. Здесь $u = u_c$, $\rho = h$, $p = gh^2/(2Y) + h^3\Omega^2/12$. В соответствии с методом (u, p) -диаграмм [91] из этих начальных данных должна образоваться конфигурация, состоящая из простой

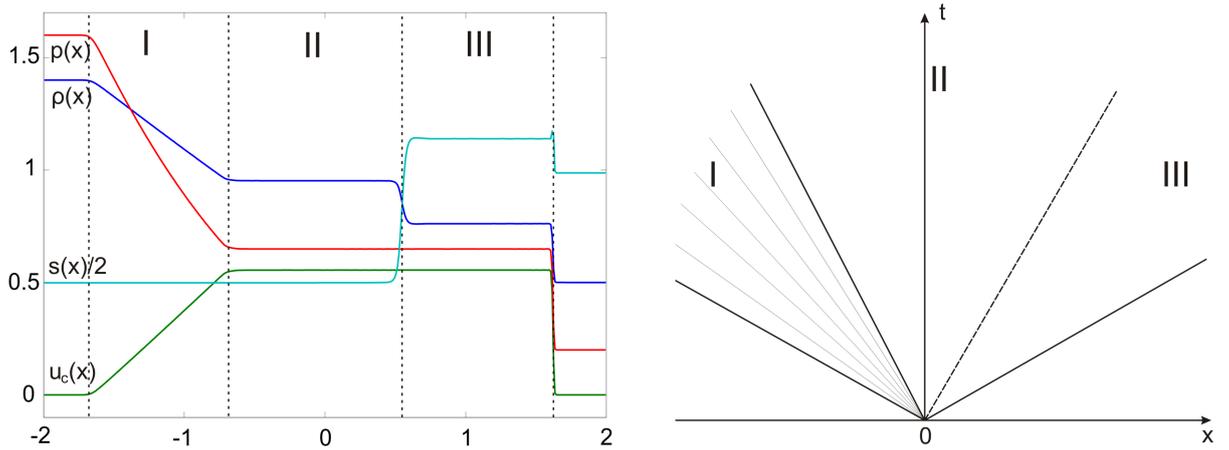


Рисунок 1.13 — Решение задачи о распаде произвольного разрыва.

волны, направленной влево, и ударной волны, направленной вправо, а также контактного разрыва. На Рисунке 1.13 область I соответствует простой r -волне, направленной влево, в которой сохраняется энтропия. Области постоянного решения II и III разделяет контактный разрыв, на котором имеют разрыв плотность и энтропия (скорость и давление непрерывны). Правая граница области III — ударная волна, направленная вправо, на которой наблюдается резкое изменение всех основных величин.

Проведем расчет аналогичной задачи о распаде разрыва по модели (1.47). Для этого используем такую же сетку по переменной x и возьмем $M = 50$ слоев. В начальный момент времени все слои выбираются одинаковыми $\eta_i = Y/M$. Начальный профиль скорости линейный, поэтому $\Omega_i = \Omega$ (значение Ω определяется начальными данными (1.49)). Значения скоростей u_i находятся по формуле (1.46). Таким образом, начальные данные соответствуют (1.49). На Рисунке 1.14 приведено сравнение формы свободной поверхности, рассчитанной по модели (1.42) (пунктирная линия) и по модели (1.47) (сплошная линия). Видно, что в области простой волны формы поверхностей совпадают; скорости распространения сильного разрыва (ударной волны) немного различны. Основное отличие заключается в “размазывании” контактного разрыва (имеющегося у газодинамической модели) в рамках уравнений многослойной аппроксимации.

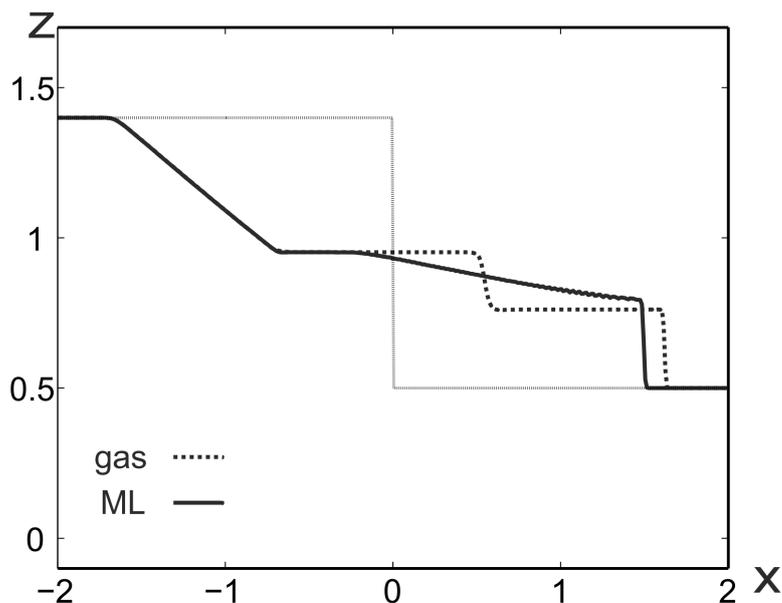


Рисунок 1.14 — Сравнение формы свободной поверхности при расчете по модели (1.42) (пунктирная линия) и по модели (1.47) (сплошная линия).

1.9 Основные результаты главы 1

В главе построены и исследованы классы решений новой интегродифференциальной модели теории длинных волн, описывающей пространственно-неоднородное движение идеальной жидкости в открытом канале. По аналогии с работой [21] использованы интегральные инварианты Римана, на основе линейной зависимости между которыми получен класс решений исходной модели задаваемый системой двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами. Построение простых волн редуцированной системы сводится к нахождению искомым функций из конечных алгебраических соотношений. В классе бегущих волн, непрерывно примыкающих к заданному сдвиговому потоку, найдены решения с функциональным произволом. Получение этих решений связано с обращением сингулярного интегрального уравнения Абеля. Показано, что данные решения описывают течения с критическим слоем и траектории движения частиц имеют характерную форму типа “кошачий глаз”, которые в случае выбора произвольной функции в специальном виде совпадают с траекториями, описываемыми уравнением колебания математического маятника. Сформулированы критерии устойчивости горизонтально-сдвигового течения жидкости

в узком открытом канале в зависимости от формы профиля скорости, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта. Для каждого критерия построены иллюстративные примеры.

Для численного моделирования распространения длинноволновых возмущений на горизонтально-сдвиговом потоке тонкого слоя жидкости рассматриваются осредненные по ширине канала уравнения движения. Осреднение уравнений движения по ширине канала в случае, когда профиль скорости потока близок к линейному, приводит к гиперболической системе дифференциальных уравнений, для которой указана газодинамическая аналогия. Данная система также может быть получена в виде следствия из уравнений “многослойной” аппроксимации системы интегродифференциальных законов сохранения. Проводятся тестовые сравнительные расчеты по осредненной модели, соответствующей газодинамической аналогии и полной “многослойной” модели движения.

Глава 2. Пленочные течения

В данной главе рассматривается модель течения тонкого слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости. Так же как в первой главе, система уравнений движения переписывается в полулагранжевых переменных, что позволяет применить метод исследования систем с операторными коэффициентами. Устанавливается, что слабые разрывы решений сосредоточены на обобщенных характеристиках интегродифференциальной системы уравнений, описывающих движение жидкости. Также выводится транспортное уравнение для амплитуды слабых разрывов и устанавливается возможность ее неограниченного роста, что соответствует нелинейному опрокидыванию волн. Так как показана возможность формирования разрывных решений, то для их описания необходимо использовать системы законов сохранения. Для численного моделирования распространения длинноволновых возмущений в вязкой жидкости предлагается неоднородная система дифференциальных уравнений, являющаяся “многослойной” аппроксимацией интегродифференциальных законов сохранения. Выполняются тестовые численные расчеты, показывающие возможность образования сильных разрывов. При этом в процессе эволюции течения может вырабатываться профиль скорости, отличный от параболического закона. Проводится сравнение расчетов с использованием “многослойной” аппроксимации и бездисперсионного аналога уравнений Шкадова [55].

Полученные результаты обобщаются на течение жидкости со стратификацией по вязкости. На основе обобщения теории характеристик для интегродифференциальных уравнений формулируются условия гиперболичности модели, необходимые для корректности постановки задачи Коши. Аналогично случаю с постоянной вязкостью, для численного моделирования течения тонкого слоя жидкости с переменной вязкостью предлагается аппроксимирующая система дифференциальных законов сохранения, к которым применимы стандартные методы расчета. Показывается, что умеренная стратификация по вязкости незначительно влияет на другие параметры течения, в том числе на форму свободной поверхности. Описывается эволюция заданной области с более вязкой жидкостью в менее вязкой при прохождении различных волновых возмущений.

2.1 Уравнения движения

Движение слоя однородной вязкой жидкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести описывается системой уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + p_x &= \frac{\varepsilon}{\text{Re}} u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} u_{yy} + \frac{\sin \theta}{\varepsilon \text{Fr}}, \\ \varepsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) + p_y &= \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} v_{xx} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} v_{yy} - \frac{\cos \theta}{\text{Fr}}, \\ u_x + v_y &= 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

с граничными условиями на дне $y = 0$ и свободной поверхности $y = h(t, x)$:

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad h_t + uh_x - v|_{y=h} = 0, \\ (p - p_0)h_x - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} u_x h_x + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} u_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} v_x|_{y=h} &= 0, \\ p - p_0 - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} v_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} (u_y + \varepsilon^2 v_x) h_x|_{y=h} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $u = U^{-1}u'$, $v = (UH_0)^{-1}L_0v'$, $p = (\rho U^2)^{-1}p'$, $x = L_0^{-1}x'$, $y = H_0^{-1}y'$, $t = UL_0^{-1}t'$ — безразмерные компоненты вектора скорости, давление, декартовы координаты и время; u' , v' , p' , x' , y' , t' — соответствующие размерные величины; p_0 — безразмерное атмосферное давление. Жидкость течет над ровным дном $y = 0$, наклоненным под малым углом θ по отношению к горизонту; уравнением $y = h(t, x)$ задается свободная граница (Рисунок 2.1). Величины L_0 и H_0

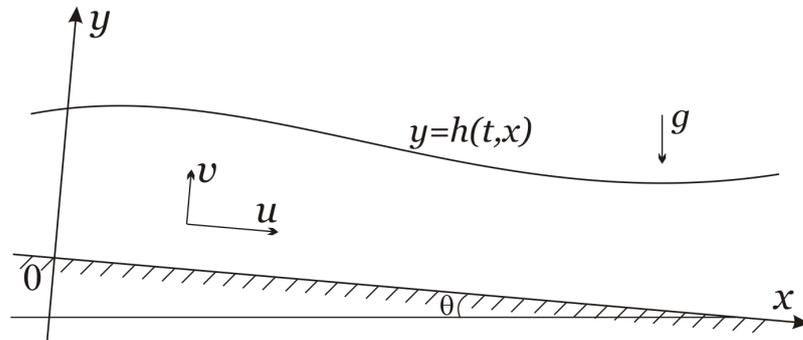


Рисунок 2.1 — Схема течения.

— характерные масштабы течения в направлении Ox и Oy , U — характерная скорость потока, g_0 — ускорение свободного падения, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости. Входящие в уравнения (2.1) безразмерные параметры ε , Re и Fr определяются следующим образом

$$\varepsilon = \frac{H_0}{L_0}, \quad \text{Re} = \frac{UH_0}{\nu_0}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{g_0 H_0}.$$

В дальнейшем будем рассматривать течение тонкого слоя жидкости ($\varepsilon \ll 1$), в котором числа Рейнольдса и Фруда удовлетворяют соотношениям $\varepsilon^2 < \text{Re}^{-1} < \varepsilon$, $\text{Fr} \simeq 1$. В уравнениях движения (2.1) выполним моделирование, состоящее в отбрасывании членов порядка ε^2 и выше. Выразив вертикальную скорость v и давление, получим уравнения, описывающие нестационарное течение жидкости со свободной границей в приближении пограничного слоя [53]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + gh_x &= a + \nu u_{yy}, & v &= - \int_0^y u_x dy, \\ h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x &= 0, & u|_{y=0} &= 0, & u_y|_{y=h} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $a = \varepsilon^{-1} \text{Fr}^{-1} \sin \theta$, $g = \text{Fr}^{-1} \cos \theta$, $\nu = \varepsilon^{-1} \text{Re}^{-1}$. Безразмерное давление в слое жидкости восстанавливается по формуле $p = p_0 + g(h - y)$.

В случае идеальной жидкости аналогичное моделирование приводит к уравнениям теории длинных волн [3; 19]. При этом в системе (2.3) следует положить $\nu = 0$ и исключить из рассмотрения два последних уравнения, соответствующих граничным условиям для вязкой жидкости.

Свойства системы уравнений (2.3) удобно исследовать в полулагранжевых координатах (x, λ) , переход к которым осуществляется заменой переменной $y = \Phi(t, x, \lambda)$, где функция Φ — решение задачи Коши [17]:

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi) \Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda h_0(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют дну $y = 0$ (наклонной плоскости) и свободной границе жидкости $y = h(t, x)$.

В новых переменных для определения функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda$ возникает интегродифференциальная система уравнений

$$u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x d\lambda = a + \frac{\nu}{H} \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda, \quad H_t + (uH)_x = 0 \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$u|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0. \quad (2.5)$$

Вывод интегродифференциальных уравнений движения (2.4) аналогичен приведенному в [21] для невязких течений тонкого слоя жидкости и в первой главе для уравнений движения идеальной жидкости в узком открытом канале. При этом в правой части появляются ненулевые члены, отвечающие за вязкие эффекты, кроме того необходимо дополнительно учитывать граничные условия. Отметим, что переход к полулагранжевым координатам является обратной заменой переменных, если $H = \Phi_\lambda \neq 0$ (далее полагаем, что $H > 0$). Действительно, пусть функции $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda)$ найдены. Тогда по формулам

$$y = \Phi(t, x, \lambda) = \int_0^\lambda H d\lambda, \quad h = \Phi(t, x, 1), \quad v = \Phi_t + u\Phi_x$$

определяются эйлерова координата y , глубина слоя жидкости h и компонента вектора скорости v .

Если предположить, что скорость распределена по параболическому закону, что соответствует стационарному решению задачи (2.3)

$$u = \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \frac{3qu}{h^2}, \quad (2.6)$$

то используя данное представление, можно проинтегрировать первое уравнения системы (2.3) по переменной y и перейти к новым неизвестным функциям: $h(t, x)$ и $q(t, x)$. Это преобразование, с учетом остальных уравнений системы (2.3), приводит к бездисперсионному аналогу уравнений Шкадова [55]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6q^2}{5h} + \frac{gh^2}{2} \right) = ah - 3\nu \frac{q}{h^2}. \quad (2.7)$$

Здесь $h(t,x)$ $q(t,x)$ глубина и расход жидкости. Безразмерные параметры a , g и ν определены выше. Уравнения (2.7) являются гиперболической системой дифференциальных уравнений, характеристики которой распространяются со скоростями

$$k_i = \frac{6q}{5h} \mp \sqrt{gh + \frac{6q^2}{25h^2}} \quad (i = 1,2).$$

Далее покажем, что более общая интегродифференциальная модель (2.4) также является гиперболической по пространственной переменной x в смысле [24;29]. Приведенный ниже теоретический подход к исследованию системы (2.4) был применен в ряде работ, в том числе в работе [62] для исследования похожей задачи.

2.2 Характеристики интегродифференциальной модели

Систему уравнений (2.4) представим в виде

$$\mathbf{U}_t + A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \mathbf{f}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{U} = (u, H)^T$ — вектор искомых величин, $A\langle \mathbf{U}_x \rangle$ — результат действия оператора A на вектор-функцию \mathbf{U}_x по переменной λ :

$$A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \left(uu_x + g \int_0^1 H_x d\lambda, Hu_x + uH_x \right)^T,$$

\mathbf{f} — правая часть уравнения (2.4), включающая старшие производные по λ :

$$\mathbf{f} = \left(a + \frac{\nu}{H} \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda, 0 \right)^T \equiv (f, 0)^T$$

(верхний индекс T означает транспонирование). Для исследования свойств квазилинейной системы уравнений с операторными коэффициентами (2.8) применяется развитое в [24; 29] обобщение теории характеристик.

Согласно [24] характеристика системы (2.8) определяется уравнением $x'(t) = k^\alpha(t, x)$, где k^α — собственное значение задачи

$$(\mathbf{F}^\alpha, (A - k^\alpha I)\langle \varphi \rangle) = 0 \quad (2.9)$$

($\varphi(\lambda) = (\varphi_1, \varphi_2)^\top$ — гладкая пробная вектор-функция). Решение уравнения (2.9) относительно функционала \mathbf{F}^α , действующего по переменной λ при фиксированных значениях t и x , ищется в классе локально интегрируемых, либо обобщенных функций. Действие собственного функционала \mathbf{F}^α на систему (2.8), с учетом того, что k_α является собственным значением, дает соотношение на характеристике

$$(\mathbf{F}^\alpha, \mathbf{U}_t + k^\alpha \mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}^\alpha, \mathbf{f}) \quad (2.10)$$

В [24] для подобных систем с операторными коэффициентами было сформулировано определение *обобщенной гиперболичности*. Система уравнений с операторными коэффициентами (2.8) является обобщенно гиперболической, если все собственные значения k^α вещественные, а соответствующая им совокупность собственных функционалов $\{\mathbf{F}^\alpha\}$ обладает свойством *полноты* (если для всех α выполнено условие $(\mathbf{F}^\alpha, \varphi) = 0$, то $\varphi = 0$).

В работах [19; 29] уже были изучены характеристические свойства интегродифференциальных уравнений (2.4) с нулевой правой частью и сформулированы условия их обобщенной гиперболичности. Поэтому ниже приводятся характеристическое уравнение, система собственных функционалов и условия обобщенной гиперболичности, сопровождающиеся лишь краткими пояснениями.

Уравнение (2.9) с учетом независимости компонент φ_1 и φ_2 пробной функции, переписывается в виде системы:

$$\begin{aligned} (F_1, (u - k)\varphi_1) + (F_2, H\varphi_1) &= 0, \\ g \int_0^1 \varphi_2 d\lambda (F_1, 1) + (F_2, (u - k)\varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу первого уравнения (2.11), можно определить действие функционала F_2 на произвольную гладкую функцию ψ через F_1 :

$$(F_2, \psi) = -(F_1, (u - k)H^{-1}\psi).$$

Используя это выражение, из второго уравнения (2.11) получаем:

$$(F_1, (u - k)^2 H^{-1} \varphi_2) - g \int_0^1 \varphi_2 d\lambda (F_1, 1) = 0.$$

Рассматриваются собственные числа k , принадлежащие комплексной плоскости, за исключением отрезка $[u_0, u_1]$, где u_0 и u_1 — минимальное и максимальное значения $u(t, x, \lambda)$. Это позволяет переписать последнее уравнение в эквивалентном виде:

$$(F_1, \psi) = \left(g \int_0^1 \frac{\psi H}{(u - k)^2} d\lambda \right) (F_1, 1), \quad (2.12)$$

Из (2.12) при $\psi = 1$ следует условие существования нетривиальных решений задачи (2.11) — характеристическое уравнение для определения скорости распространения возмущений k :

$$\chi(k) = 0, \quad \chi(k) \equiv 1 - g \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - k)^2}. \quad (2.13)$$

Задача (2.11) имеет нетривиальное решение $\mathbf{F}^i = (F_1^i, F_2^i)$ в том случае, если $k = k^i$ — корень уравнения (2.13). Дискретные скорости распространения характеристик $k = k^i(t, x)$ определяются из уравнения (2.13), а соответствующие собственные функционалы имеют вид

$$(\mathbf{F}^i, \varphi) = g \int_0^1 \frac{H \varphi_1 d\lambda}{(u - k^i)^2} - g \int_0^1 \frac{\varphi_2 d\lambda}{u - k^i}. \quad (2.14)$$

Интегродифференциальные системы уравнений, в отличие от обычных гиперболических уравнений, имеют помимо дискретного, еще и непрерывный

спектр характеристических скоростей. Характеристики непрерывного спектра исследуются аналогично дискретным. В этом случае все точки отрезка вещественной оси $[u_0, u_1]$, где $u_0 = \min_{\lambda} u(t, x, \lambda)$, $u_1 = \max_{\lambda} u(t, x, \lambda)$, принадлежат спектру характеристических скоростей задачи (2.9). Каждому $k^\mu = u(t, x, \mu)$, $\mu \in [0, 1]$ соответствуют собственные функционалы, действующие на пробную функцию по правилу:

$$(\mathbf{F}^{1\lambda}, \varphi(\lambda)) = -\varphi'_1(\mu) + \frac{u_\mu}{H} \varphi_2(\mu),$$

$$(\mathbf{F}^{2\lambda}, \varphi(\lambda)) = \varphi_1(\mu) + g \int_0^1 \frac{H(\lambda)(\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(\mu)) d\lambda}{(u(\lambda) - u(\mu))^2} - g \int_0^1 \frac{\varphi_2(\lambda) d\lambda}{u(\lambda) - u(\mu)}.$$

(зависимость функций от переменных t и x опущена для краткости).

Заметим, что вне интервала $[u_0, u_1]$ уравнение (2.13) может иметь только два вещественных корня $k^1 < u_0$ и $k^2 > u_1$. Действительно, функция $\chi(k) \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$; $\chi(k) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow u_0$ и $k \rightarrow u_1$; $\chi'(k) < 0$ при $k < u_0$ и $\chi'(k) > 0$ при $k > u_1$. В случаях, когда решение имеет особенности, интеграл в формуле (2.13) может стать сходящимся при $k = u_0$ (либо $k = u_1$). Это может привести к исчезновению характеристического корня k^1 (или k^2). Исчезновение корня означает, что в одном из направлений волновые возмущения движутся вместе с потоком, не обгоняя его. Заметим, что в частном случае, когда $u_\lambda = H_\lambda \equiv 0$, уравнение (2.13) совпадает с характеристическим уравнением для классической теории мелкой воды

$$(u - k)^2 = gh.$$

Согласно [24; 29] для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm(u) \neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для обобщенной гиперболичности системы уравнений (2.8) на гладких по переменной λ решениях. Здесь $\chi^\pm(u)$ — предельные значения комплексной функции $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскостей на отрезке (u_0, u_1) ; приращение аргумента функций $\chi^\pm(u)$ вычисляется

при изменении λ от 0 до 1 при фиксированных значениях t и x по формуле:

$$\chi^\pm(u) = 1 + g \left(\frac{W_1}{u_1 - u} - \frac{W_0}{u_0 - u} - \int_0^1 \frac{W_\mu d\mu}{u(\mu) - u(\lambda)} \mp \pi i \frac{W_\lambda}{u_\lambda} \right),$$

где $W = H/u_\lambda$; а индексы “0” и “1” соответствуют значениям функций при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

2.3 Уравнение для амплитуды слабого разрыва

Поверхностью слабого разрыва решения уравнений (2.4) будем называть поверхность, на которой функция \mathbf{U} и ее касательные производные непрерывны, а некоторые производные по нормали имеют разрыв первого рода. Следуя [20], покажем, что слабый разрыв решения уравнений (2.4) возможен только на обобщенной характеристике. Пусть Γ — поверхность слабого разрыва, заданная уравнением $x'(t) = k(t, x)$. Вычислим разность предельных значений величин, входящих в уравнения (2.8) на поверхности Γ . Учитывая непрерывность самих функций на поверхности слабого разрыва, соотношение на разрыве можно рассматривать независимо от нелинейного оператора A , в который не входят производные искомым функций. В результате получим соотношение

$$[\mathbf{U}_t] + A\langle[\mathbf{U}_x]\rangle = 0,$$

где $[f] = f_2 - f_1$ — скачок функции f на поверхности Γ . Индекс “1” относится к той стороне поверхности Γ , с которой жидкость натекает на нее, индекс “2” — к противоположной. В силу непрерывности производных по касательному к Γ направлению выполняется равенство $[\mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x] = 0$. Из двух последних формул следует, что вектор скачка производных $[\mathbf{U}_x]$ является собственной функцией оператора A :

$$(A - kI)[\mathbf{U}_x] = 0. \quad (2.15)$$

Действуя на уравнение (2.15) собственными функционалами \mathbf{F}^α , получим соотношения

$$(\mathbf{F}^\alpha, (A - kI)[\mathbf{U}_x]) = (k^\alpha - k)(\mathbf{F}^\alpha, [\mathbf{U}_x]) = 0.$$

В силу полноты системы собственных функционалов $\{\mathbf{F}^\alpha\}$ решение со слабым разрывом $[\mathbf{U}_x] \neq 0$ возможно лишь в том случае, когда $k = k^\alpha$, то есть поверхность разрыва Γ совпадает с одной из характеристик системы (2.8). Далее будем полагать, что $k = k^2$, и получим уравнение для амплитуды слабого разрыва вдоль характеристики $x'(t) = k^2(t, x)$.

Собственная функция $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)^T$ оператора A , отвечающая корню $k = k^2$ характеристического уравнения (2.13), находится из соотношения $(A - kI)\boldsymbol{\psi} = 0$:

$$(u - k)\psi_1 + g \int_0^1 \psi_2 d\lambda = 0, \quad H\psi_1 + (u - k)\psi_2 = 0$$

и имеет вид

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)^T = \left(\frac{1}{u - k}, -\frac{H}{(u - k)^2} \right)^T. \quad (2.16)$$

Согласно уравнению (2.15), скачок производных пропорционален собственной функции оператора A (2.16):

$$[\mathbf{U}_x] = ([u_x], [H_x])^T = \xi \boldsymbol{\psi} = \xi(t, x) \left(\frac{1}{u - k}, -\frac{H}{(u - k)^2} \right)^T \Big|_{\Gamma}, \quad (2.17)$$

где коэффициент $\xi(t, x)$ определяет амплитуду слабого разрыва.

Продифференцируем по переменной x соотношение на характеристике (2.10):

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_{tx} + k\mathbf{U}_{xx}) + k_x(\mathbf{F}, \mathbf{U}_x) + (\mathbf{F}_x, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}_x, \mathbf{f}) + (\mathbf{F}, \mathbf{f}_x)$$

(здесь и далее верхний индекс “2” в обозначениях \mathbf{F} и k опускаем; действие функционала \mathbf{F} определено формулой (2.14)). Вычисляя разность предельных значений этого выражения на Γ , приходим к соотношению

$$(\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x]_t + k[\mathbf{U}_x]_x) + [k_x(\mathbf{F}, \mathbf{U}_x)] + ([\mathbf{F}_x], \mathbf{U}_{1t} + k\mathbf{U}_{1x}) = ([\mathbf{F}_x], \mathbf{f}_1) + (\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]),$$

которое с учетом тождества

$$[k_x(\mathbf{F}, \mathbf{U}_x)] = [k_x](\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x]) + [k_x](\mathbf{F}, \mathbf{U}_{1x}) + k_{1x}(\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x])$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, D[\mathbf{U}_x]) + [k_x](\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x]) &= \\ &= ([\mathbf{F}_x], \mathbf{f}_1 - D\mathbf{U}_1) + (\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]) - k_{1x}(\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x]) - [k_x](\mathbf{F}, \mathbf{U}_{1x}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь $D = \partial_t + k\partial_x$ — оператор дифференцирования вдоль характеристики. Нижний индекс “1” обозначает предельные значения функций с одной из сторон поверхности слабого разрыва.

Для определения величины $[k_x]$ продифференцируем характеристическое уравнение (2.13):

$$-g \int_0^1 \frac{H_x}{(u-k)^2} d\lambda + 2g \int_0^1 \frac{Hu_x}{(u-k)^3} d\lambda - 2gk_x \int_0^1 \frac{H}{(u-k)^3} d\lambda = 0,$$

затем вычислим предельные значения данного выражения на Γ и выразим скачки $[u_x]$ и $[H_x]$ с использованием (2.17). В результате получим

$$[k_x] = \xi C_1, \quad C_1 = \frac{3}{2} \left(\int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u-k)^4} \right) \left(\int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u-k)^3} \right)^{-1} \Big|_{\Gamma}. \quad (2.19)$$

Принимая во внимание, что $D[\mathbf{U}_x] = \boldsymbol{\psi} D\xi + \xi D\boldsymbol{\psi}$, и используя формулы (2.14), (2.16) и (2.19), представим левую часть уравнения (2.18) в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, D[\mathbf{U}_x]) + [k_x](\mathbf{F}, [\mathbf{U}_x]) &= (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi})(D\xi + C_1\xi^2) + \xi(\mathbf{F}, D\boldsymbol{\psi}) \Big|_{\Gamma} \\ (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi}) &= 2g \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u-k)^3} \Big|_{\Gamma}, \quad (\mathbf{F}, D\boldsymbol{\psi}) = -3g \int_0^1 \frac{HD(u-k) d\lambda}{(u-k)^4} + g \int_0^1 \frac{DH d\lambda}{(u-k)^3} \Big|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуем правую часть (2.18). Используя (2.14), (2.17) определим действие функционала $[\mathbf{F}_x]$:

$$([\mathbf{F}_x], \varphi) = g\xi \left(\int_0^1 \frac{H\varphi_1 d\lambda}{(u-k)^4} + 2C_1 \int_0^1 \frac{H\varphi_1 d\lambda}{(u-k)^3} + \int_0^1 \frac{\varphi_2 d\lambda}{(u-k)^3} - C_1 \int_0^1 \frac{\varphi_2 d\lambda}{(u-k)^2} \right) \Big|_{\Gamma}$$

а также вычислим результат действия функционала \mathbf{F} на скачок функции \mathbf{f}_x :

$$(\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]) = \xi g\nu \int_0^1 \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda \frac{d\lambda}{(u-k)^4} \Big|_{\Gamma}.$$

Используя предыдущие вычисления, сгруппируем слагаемые в (2.18) по степеням функции ξ . В результате получим транспортное уравнение для амплитуды слабого разрыва ξ :

$$D\xi + C_1\xi^2 = C_2\xi, \quad (2.20)$$

где коэффициент C_2 имеет вид

$$\begin{aligned} C_2 &= \left(2 \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u-k)^3} \right)^{-1} \left(C_1 B_1 + B_2 + B_3 \right) \Big|_{\Gamma}, \\ B_1 &= \int_0^1 \frac{DH d\lambda}{(u-k)^2} + 2 \int_0^1 \frac{(f - Du)H d\lambda}{(u-k)^3} + \int_0^1 \frac{H_{1x} d\lambda}{u-k} - \int_0^1 \frac{Hu_{1x} d\lambda}{(u-k)^2}, \\ B_2 &= 3 \int_0^1 \frac{(Du - f)H d\lambda}{(u-k)^4} - \int_0^1 \frac{DH d\lambda}{(u-k)^3} - \int_0^1 D \left(\frac{H}{(u-k)^3} \right) d\lambda, \\ B_3 &= b \int_0^1 \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda \frac{d\lambda}{(u-k)^4} + 2 \int_0^1 \frac{H_{1x} d\lambda}{(u-k)^2} - 2 \int_0^1 \frac{Hu_{1x} d\lambda}{(u-k)^3}. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (2.20) вдоль характеристики дает выражение для амплитуды слабого разрыва

$$\xi = \xi_0 \exp \left(\int_0^t C_2 d\tau \right) \left(1 + \xi_0 \int_0^t C_1 \exp \left(\int_0^\tau C_2 d\tau' \right) d\tau \right)^{-1}.$$

Здесь ξ_0 амплитуда слабого разрыва при $t = 0$. Коэффициент C_1 является отрицательным ($k = k^2 > \max_{\lambda} u$), поэтому неограниченный рост ξ возможен лишь в случае $\xi_0 > 0$. Момент наступления градиентной катастрофы t_* определяется из уравнения

$$1 + \xi_0 \int_0^{t_*} C_1 \exp \left(\int_0^{\tau} C_2 d\tau' \right) d\tau = 0.$$

Обращение ξ в бесконечность соответствует нелинейному опрокидыванию волны и образованию сильного разрыва. Интегрирование (2.15) по переменной λ от 0 до 1 с учетом (2.13) дает $[gh_x] = [p_x] = -\xi/g$. Поэтому нелинейное опрокидывание волн возникает при выполнении неравенства $[h_x] < 0$.

2.4 Приближенная дифференциальная модель

Как показано выше, эволюция гладкого решения системы (2.4) может привести к градиентной катастрофе. Поэтому возникает необходимость в переходе к консервативной формулировке модели, пригодной для описания разрывных решений. Как и в первой главе, воспользуемся модификацией законов сохранения для уравнений движения вихревой мелкой воды в полулагранжевых переменных [21].

Для определения искомых функций

$$H(t, x, \lambda), \quad \omega(t, x, \lambda) = \frac{u_\lambda}{H}, \quad q(t, x) = \int_0^1 uH d\lambda$$

имеем следующую консервативную формулировку уравнений (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} H_t + (uH)_x &= 0, & (\omega H)_t + (u\omega H)_x &= \nu \left(\frac{\omega_\lambda}{H} \right)_\lambda, & \left(u = \int_0^\lambda \omega H d\lambda \right) \\ q_t + \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda + \frac{gh^2}{2} \right)_x &= ah - \nu \omega|_{\lambda=0}, & \omega|_{\lambda=1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Покажем эквивалентность систем уравнений (2.4), (2.5) и (2.21) на гладких решениях. Нетрудно видеть, что уравнения (2.21) получены из (2.4) путем дифференцирования и интегрирования по переменной λ с учетом граничных условий (2.5). В другую сторону, проинтегрируем второе уравнение в системе (2.21) по λ . Это приводит к соотношению

$$u_t + uu_x = \frac{\nu}{H} \left(\frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda + F(t, x). \quad (2.22)$$

Умножение (2.22) на H и интегрирование по λ с использованием первого и последнего уравнений системы (2.21) дает

$$q_t + \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda \right)_x = hF - \nu\omega|_{\lambda=0}$$

Сопоставление этого уравнения с третьим уравнением системы (2.21) позволяет определить функцию $F = a - gh_x$ и установить эквивалентность рассматриваемых систем.

Для вывода дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующих интегродифференциальную модель (2.21), выполним разбиение по переменной λ ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$) и введем переменные:

$$\begin{aligned} y_i &= \Phi(t, x, \lambda_i), & u_i &= u(t, x, \lambda_i), & h_i &= y_i - y_{i-1} \\ \omega_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, & u_{ci} &= \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, & q &= \sum_{i=1}^M u_{ci} h_i. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее, следуя [21], проведем осреднение уравнений движения интегрированием по λ от λ_{i-1} до λ_i . При вычислении интегралов будем предполагать, что профиль скорости в каждом слое $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ (или $y \in [y_{i-1}, y_i]$) близок к линейному, т. е.

$$u(t, x, y) \approx \omega_i(t, x)(y - y_{i-1}) + u_{i-1}, \quad y \in [y_{i-1}, y_i] \quad (2.24)$$

В силу выбранной аппроксимации профиля скорости в слоях и с учетом того, что $H d\lambda = dy$, имеют место равенства

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda = u_{ci}h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda = u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12}. \quad (2.25)$$

Проинтегрируем уравнения (2.21) по лагранжевой переменной λ от λ_{i-1} до λ_i . В отличие от модели течения идеальной жидкости в главе 1, в данной задаче есть дополнительные граничные условия для вязкой жидкости

$$u_0 = 0, \quad \omega_M = 0,$$

с учетом которых и формул (2.25) для определения $2M - 1$ искомым функций

$$h_1(t, x), \dots, h_M(t, x), \quad \omega_2(t, x), \dots, \omega_{M-1}(t, x), \quad q(t, x)$$

получаем систему балансовых соотношений, состоящую из $2M - 1$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} h_i) &= 0, \quad (i = 1, \dots, M) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\omega_i h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} \omega_i h_i) &= \nu \left(\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad (i = 2, \dots, M - 1) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^M \left(u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12} \right) + \frac{g}{2} \left(\sum_{i=1}^M h_i \right)^2 \right) &= -\nu \omega_1 + a \sum_{i=1}^M h_i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Входящие в (2.26) величины $u_{ci}(t, x)$ и $\omega_1(t, x)$ задаются формулами

$$u_{ci} = -\frac{\omega_i h_i}{2} + \sum_{j=1}^i \omega_j h_j, \quad \omega_1 = \frac{1}{h_1} \left(\sum_{i=1}^M h_i - \frac{h_1}{2} \right)^{-1} \left(q + \sum_{i=2}^M h_i \left(\frac{\omega_i h_i}{2} - \sum_{j=2}^i \omega_j h_j \right) \right).$$

Заметим, что в данной многослойной модели за счет необходимости учета граничных условий на два уравнения меньше, чем в (1.47). Для численного решения системы дифференциальных законов сохранения (2.26), в отличие от интегродифференциальных уравнений (2.21), применимы стандартные численные методы. Учитывая большое количество уравнений в системе (2.26), в дан-

ном случае удобно воспользоваться схемами сквозного счета, не требующими точного или приближенного решения задачи Римана.

2.5 Численные результаты

Для проведения расчетов использована модифицированная центральная схема Насьяху–Тэдмора [27] для законов сохранения с ненулевой правой частью типа предиктор–корректор:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1/2} &= u_j^n - \Lambda f'_j/2 + R(u_j^n)\Delta t/2, \quad (\Lambda = \Delta t/\Delta x) \\ u_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) + \frac{1}{8}(u'_j - u'_{j+1}) - \\ &\quad - \Lambda \left(f(u_j^{n+1/2}) - f(u_{j+1}^{n+1/2}) \right) + (R(u_j^n) + R(u_{j+1}^n))\Delta t/2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Схема (2.27) аппроксимирует систему балансовых соотношений вида

$$u_t + (f(u))_x = R(u),$$

к которому относятся рассматриваемые модели (2.7) и (2.26). Аналогично (1.48), здесь Δx — шаг разбиения по пространственной переменной x ; Δt — шаг по времени, выбираемый из условия Куранта; u_j^n — значение функций в узле $x = x_j$ при $t = t^n$; величины $u'_j/\Delta x$ и $f'_j/\Delta x$ — аппроксимация производных первого порядка по x . Для вычисления производных также использована процедура “UNO limiter” [89]. Однако, в отличие от (1.48), в схеме (2.27) присутствуют значения функции правой части $R(u_j^n)$ в узловых точках.

Расчеты проводятся в области $x \in [x_a, x_b]$ до момента времени $t = t_m$, выбранного так, что возмущения не достигают границ расчетной области. В качестве граничных условий задаются начальные значения искомым величин в крайних левом и правом узлах. Расчетная область по x разбивается на N ячеек с узловыми точками x_j в серединах ячеек. Число Куранта CFL выбрано равным 0.475. Для нахождения максимальной характеристической скорости

$k^* = \max\{|k^1|, |k^2|\}$ используется уравнение

$$\chi(k) = 1 - g \sum_{i=1}^M \frac{h_i}{(u_i - k)(u_{i-1} - k)} = 0,$$

полученное подстановкой в (2.13) кусочно-линейной аппроксимации (2.24). Корни этого уравнения $k^1 < \min\{u_i\}$ и $k^2 > \max\{u_i\}$ определяются итерационным методом Ньютона с точностью 10^{-6} ; параметр g считается равным 1. Шаг по времени дается формулой $\Delta t = \text{CFL} \Delta x / k^*$.

Выполняется численное моделирование волнового движения жидкости на основе многослойных уравнений (2.26) и бездисперсионной модели Шкадова (2.7). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ профиль скорости задан уравнением (2.6) с параметрами $a = 0.06$, $\nu = 0.009$. Глубина слоя жидкости h задается кусочно-линейной функцией: постоянные у левого и правого края расчетной области решения соединяются линейной функцией, как показано на Рисунке 2.2, *a* и 2.3, *a* (для первого и второго расчета соответственно). На этих же графиках приведен расход $q = ah^3/(3\nu)$. Для расчета по многослойной модели (2.26) полагаем $h_i = h/M$ ($i = 1, \dots, M$), $\omega_i h_i = u_i - u_{i-1}$ ($i = 2, \dots, M - 1$), где M число слоев и $u_i = u(0, x, ih_i)$ (профиль скорости задан формулой (2.6)). Расчеты проводятся с разрешением $N = 400$, $M = 50$ в области $x \in [-2, 4]$.

В первом расчете (Рисунок 2.2) в начальный момент времени $h = 1$ при $x < -1$ и $h = 0.4$ при $x > 2$. Течение жидкости происходит слева направо ($u \geq 0$), поэтому в данном случае сформируется сильный разрыв (более глубо-

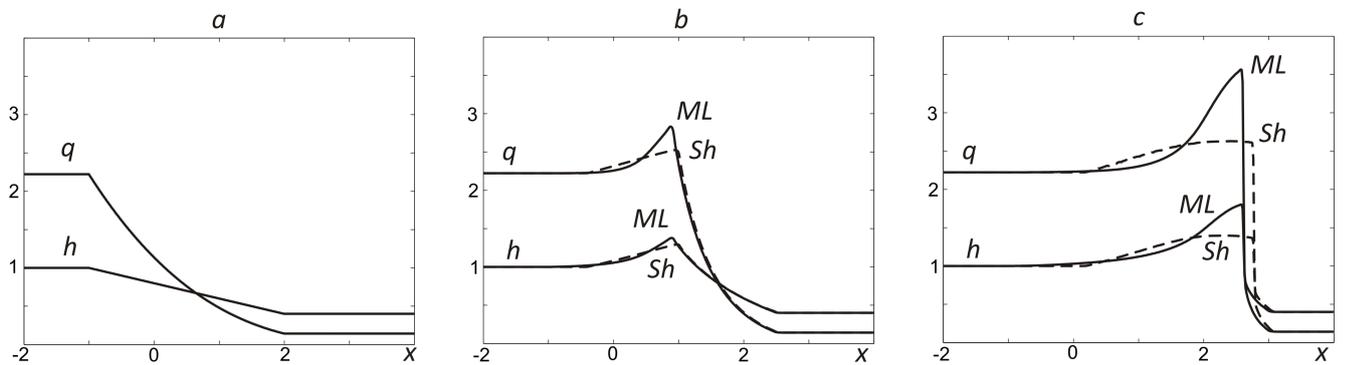


Рисунок 2.2 — Сравнение расчетов по моделям (2.7) и (2.26) (сплошная линия — расчет по уравнениям (2.26), пунктир — по (2.7)): *a* — глубина h и расход q при $t = 0$; *b* — глубина и расход при $t = 0.5$; *c* — глубина и расход при $t = 1$.

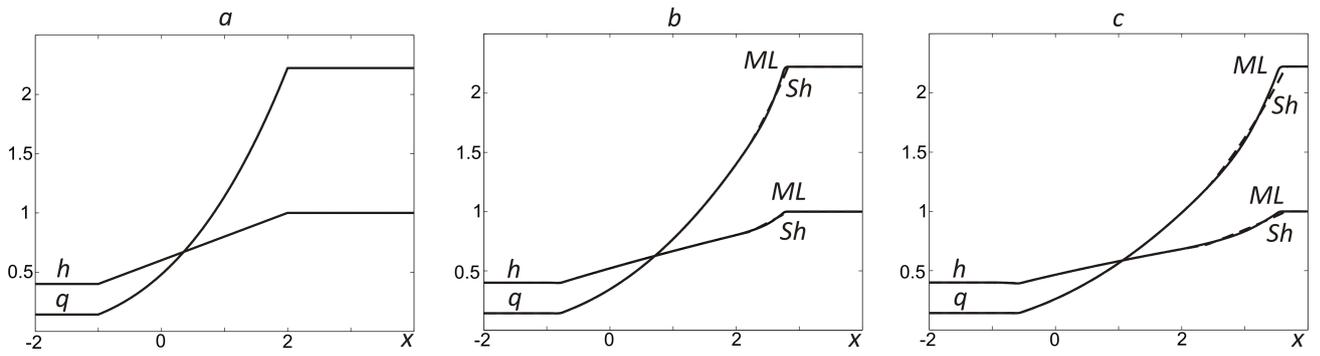


Рисунок 2.3 — Сравнение расчетов по моделям (2.7) и (2.26) (сплошная линия — расчет по уравнениям (2.26), пунктир — по (2.7)): *a* — глубина h и расход q при $t = 0$; *b* — глубина и расход при $t = 0.2$; *c* — глубина и расход при $t = 0.4$.

кий слой жидкости “догонит” более мелкий). Начальные данные и результаты расчета при $t = 0.5$ и $t = 1$ показаны на Рисунке 2.2. Видно, что в области перед разрывом значения глубины и расхода, получаемые по моделям (2.7) и (2.26), заметно отличаются, при этом скорость распространения фронта разрыва по модели (2.7) немного больше (Рисунок 2.2,*b*). В ходе дальнейшей эволюции решения разность этих величин возрастает (Рисунок 2.2,*c*).

Во втором расчете (Рисунок 2.3) в начальный момент времени $h = 0.4$ при $x < -1$ и $h = 1$ при $x > 2$. Течение жидкости происходит слева направо

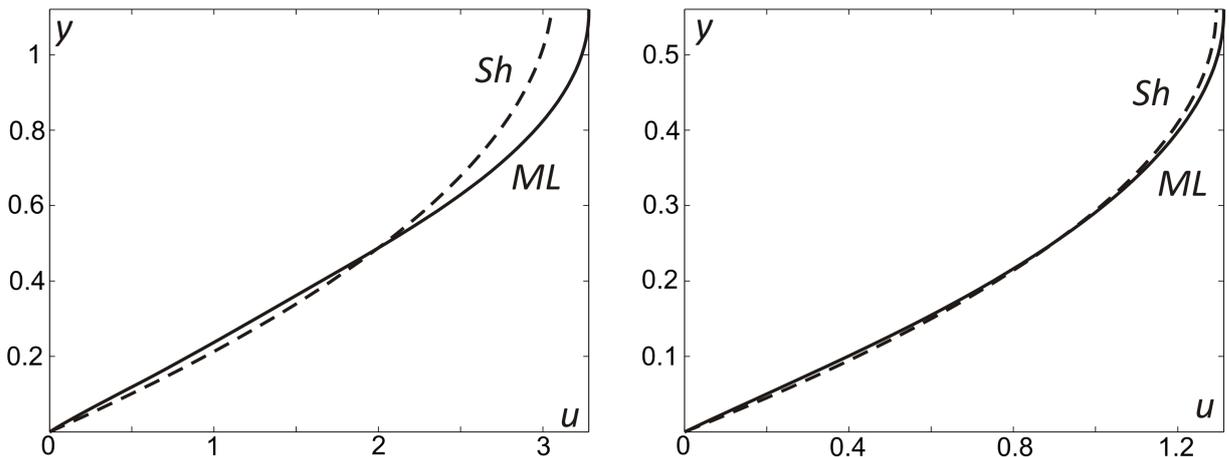


Рисунок 2.4 — Профили скорости по моделям (2.7) и (2.26) (сплошная линия — расчет по уравнениям (2.26), пунктир — по (2.7)): *a* — профиль скорости $y(u)$ при $x = 1$ при $t = 1$ для первого расчета (Рисунок 2.2); *b* — профиль скорости $y(u)$ при $x = 1$ при $t = 0.4$ для второго расчета (Рисунок 2.3).

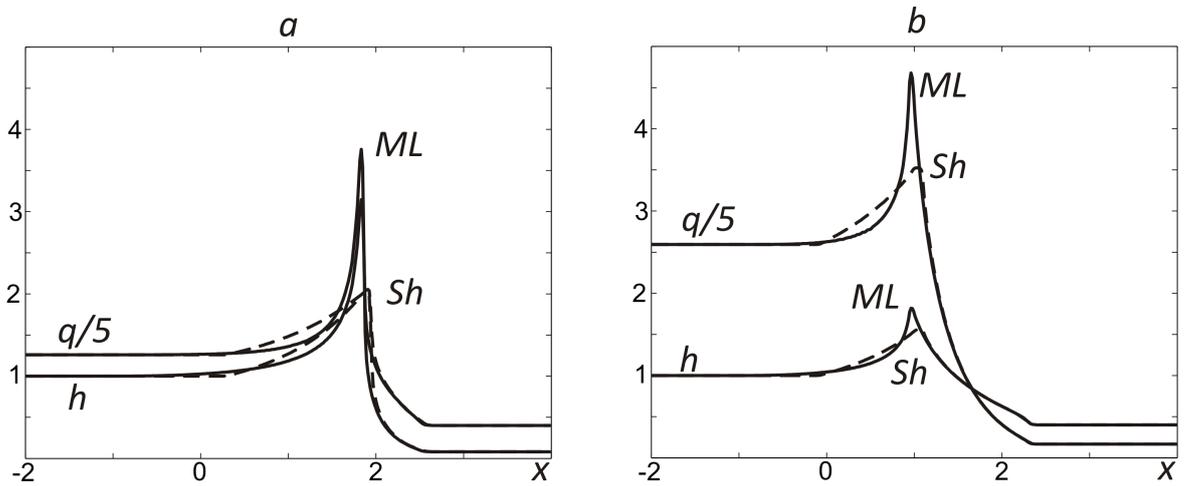


Рисунок 2.5 — Расчет при ненулевом наклоне плоскости по моделям (2.7) и (2.26) (сплошная линия — расчет по уравнениям (2.26), пунктир — по модели (2.7)): *a* — глубина h и расход q при $\theta = 1^\circ$ при $t = 0.3$; *b* — глубина h и расход q при $\theta = 2^\circ$ при $t = 0.1$.

($u \geq 0$). Таким образом, данные подобраны так, что сильный разрыв не возникает. При этом формируется расширяющаяся со временем область, связывающая два стационарных решения с разными глубинами. Для такой конфигурации результаты расчета по моделям (2.7) и (2.26) дают близкие результаты.

Распределение скорости по глубине, получаемое на основе многослойной модели (2.26), в процессе эволюции решения отклоняется от начально заданного закона (2.6). Наибольшее отклонение возникает в окрестности свободной границы (Рисунок 2.4,*a*). Во втором расчете модели (2.7) и (2.26) дают близкие результаты (Рисунок 2.4,*b*).

Расчет в случае наклонного дна для течения с конфигурацией из первого расчета (Рисунок 2.2, *a*) выполняется для плоскости, наклоненной под углом $\theta = 1^\circ$ и $\theta = 2^\circ$ (Рисунок 2.5 *a, b*). Видно, что при одинаковых конфигурациях разрыв в случае большего наклона дна формируется за меньший промежуток времени и имеет большую амплитуду.

Рассматривается случай, когда начальная конфигурация задачи отличается от использованной в первом и втором расчете. Глубина слоя жидкости h задается кусочно-гладкой функцией: одинаковые постоянные у левого и правого края расчетной области решения соединяются синусоидой, формируя началь-

ное возмущение потока. Угол считается близким к нулю, значения остальных параметров сохранено из первого расчета.

В начальный момент времени $t = 0$, вне области возмущения, значение глубины взято $h = 1$ при всех значениях x , начальное возмущение постоянного течения взято в форме $\sin(x)$ и $-\sin(x)$ при $x \in [0, \pi]$ (Рисунок 2.6, *a* и *b*); $\sin(x)$ при $x \in [0, 2\pi]$ (Рисунок 2.6, *c*), рядом приведены результаты расчета по моделям (2.7) и (2.26). Как видно из рисунков, в случае формирования разрыва значения глубины h и расхода q также значительно различаются.

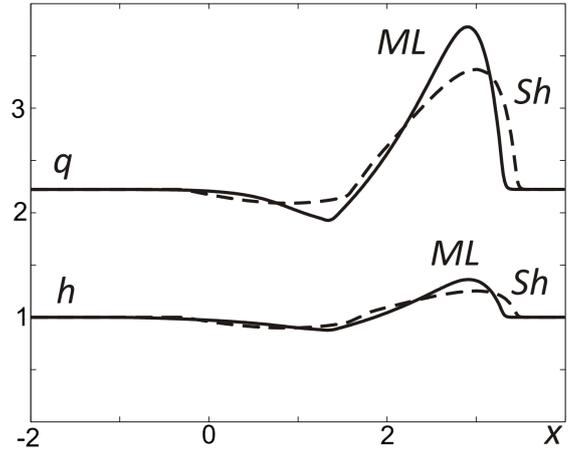
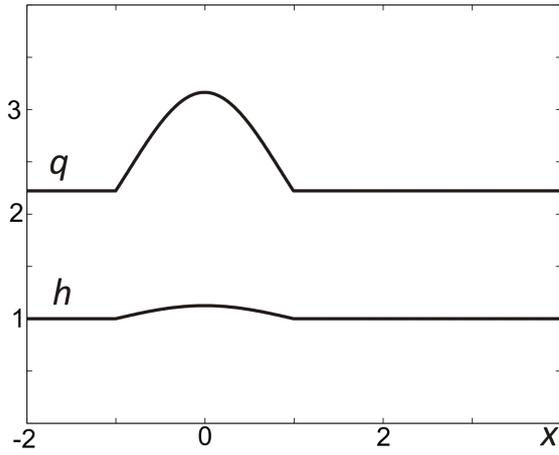
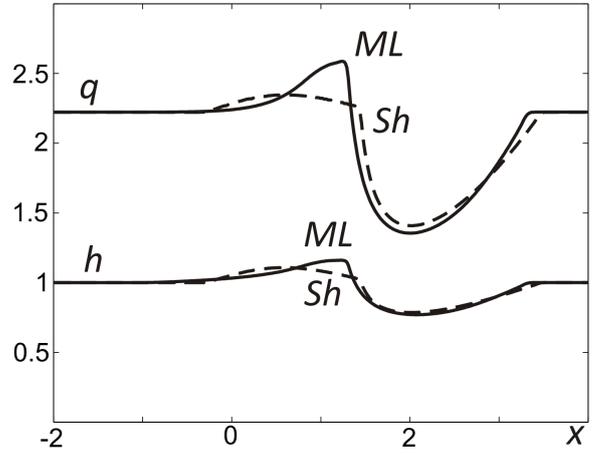
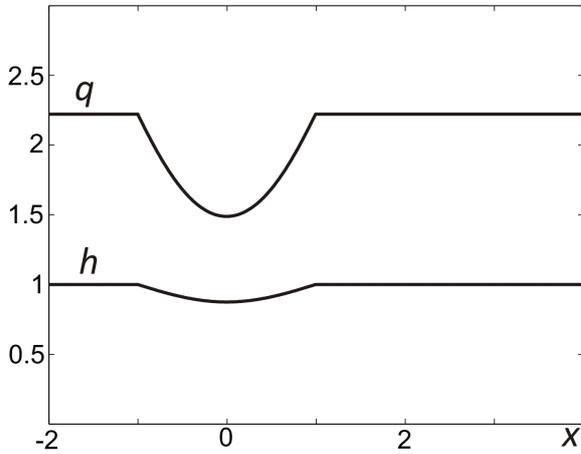
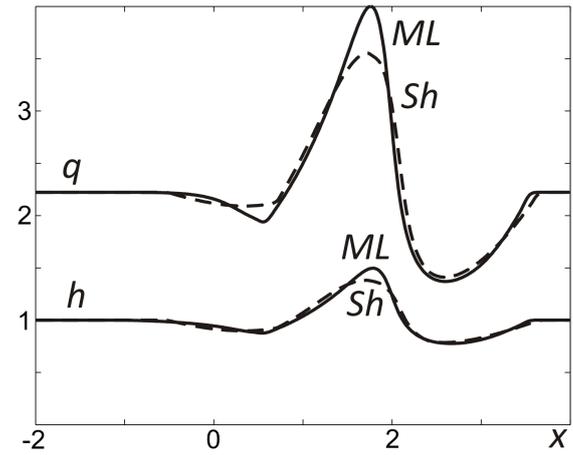
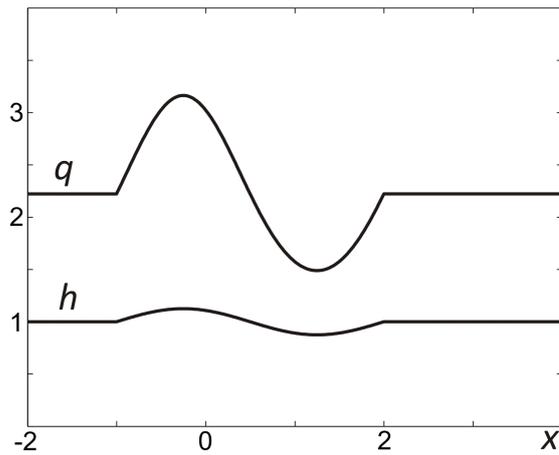
a*b**c*

Рисунок 2.6 — Расчет по моделям (2.7) и (2.26) для разных конфигураций начального возмущения (сплошная линия — расчет по уравнениям (2.26), пунктир — по модели (2.7)): *a* — глубина h и расход q для формы возмущения $\sin(x)$, $x \in [0, \pi]$; *b* — глубина h и расход q для формы возмущения $(-1) \cdot \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$; *c* — глубина h и расход q для формы возмущения $\sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

2.6 Течение со стратификацией по вязкости

Полученные результаты для уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости можно обобщить на более сложный класс течений со стратификацией по вязкости. Способ задания вязкости, которая зависит от концентрации и переносится вдоль траекторий, взят из работы [64], в которой исследуется задача о течении жидкости с гранулированными включениями. Здесь предполагается, что вязкость и плотность зависят от объемной доли твердых включений (гранул) и не являются постоянными величинами. При этом включения не влияют на другие свойства жидкости. Для описания такого движения используется система уравнений (рассматриваются плоскопараллельные течения):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta D) + \mathbf{g}\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = 0, \\ \rho &= c\rho_1 + (1-c)\rho_2, \quad \eta = \left(\frac{c}{\eta^1} + \frac{1-c}{\eta^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y) = (u, v)^T$ — вектор скорости, $p = p(t, x, y)$ — давление, D — тензор скоростей деформации, ρ — плотность, $\eta = \eta(c)$ — вязкость, $c = c(t, x, y)$ — объемная доля включений, определяется как отношение объема жидкости с максимальным количеством включений (индекс “2”) к объему жидкости без включений (индекс “1”) в рассматриваемом объеме жидкости. Пусть $\eta^1, \rho_1, \eta^2, \rho_2$

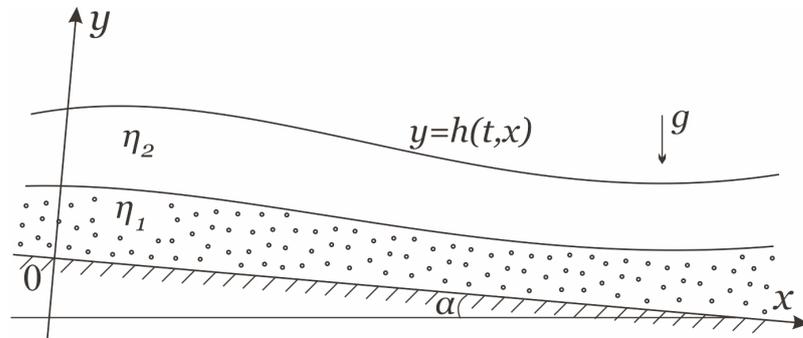


Рисунок 2.7 — Пространственная конфигурация задачи в случае двухкомпонентного течения.

— вязкость и плотность жидкости “1” (при $c = 1$) и жидкости “2” (при $c = 0$) соответственно, \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

Течение жидкости с включениями описывается в рамках единой гидродинамической модели с переменной вязкостью, которая монотонно меняется между двумя крайними значениями. В отличие от [64], в данной работе плотность предполагается постоянной для всего течения ($\rho_1 = \rho_2$). Тогда движение слоя жидкости переменной вязкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести описывается системой уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned}
u_t + uu_x + vu_y + p_x &= \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\eta u_y)_y + \frac{\sin \alpha}{\varepsilon \text{Fr}} + \\
&+ \frac{\varepsilon}{\text{Re}} u_{xx} + \frac{\varepsilon}{\text{Re} \eta} u_x \eta_x + \frac{\varepsilon}{\text{Re} \eta} v_x \eta_y, \\
\varepsilon^2 (v_t + uv_x + vv_y) + p_y &= -\frac{\cos \alpha}{\text{Fr}} + \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} v_{xx} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} v_{yy} \\
&+ \frac{\varepsilon}{\text{Re} \eta} v_y \eta_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re} \eta} v_y \eta_x + \frac{\varepsilon^3}{\text{Re} \eta} v_x \eta_x, \\
u_x + v_y = 0, \quad c_t + uc_x + vc_y = 0, \quad \eta &= \left(\frac{c}{\eta^1} + \frac{1-c}{\eta^2} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

с граничными условиями на дне $y = 0$ и свободной поверхности $y = h(t, x)$:

$$\begin{aligned}
u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad h_t + uh_x - v|_{y=h} &= 0, \\
(p - p_0)h_x - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} u_x h_x + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \eta u_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \eta v_x \Big|_{y=h} &= 0, \\
p - p_0 - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \eta v_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} (u_y + \varepsilon^2 v_x) \eta h_x \Big|_{y=h} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь $u = U^{-1}u'$, $v = (UH_0)^{-1}L_0v'$, $p = (\rho U^2)^{-1}p'$, $\rho = \rho_0\rho'$, $\eta = \eta_0\eta'$, $x = L_0^{-1}x'$, $y = H_0^{-1}y'$, $t = UL_0^{-1}t'$ — безразмерные компоненты вектора скорости, давление, плотность, вязкость, декартовы координаты и время; u' , v' , p' , ρ' , η' , x' , y' , t' — соответствующие размерные величины; p_0 — безразмерное атмосферное давление. Жидкость течет над ровным дном $y = 0$, наклоненным под малым углом α по отношению к горизонту; уравнением $y = h(t, x)$ задается свободная граница (Рисунок 2.7). Величины L_0 и H_0 — характерные масштабы течения в направ-

лении Ox и Oy , U — характерная скорость потока, g — ускорение свободного падения, c — объемная доля твердых включений, η^1, η^2 — коэффициенты динамической вязкости для жидкостей, соответствующим объемным долям $c = 1$ и $c = 0$; ρ — плотность жидкости. Входящие в уравнения (2.28) безразмерные параметры ε , Re и Fr определяются следующим образом

$$\varepsilon = \frac{H_0}{L_0}, \quad \text{Re} = \frac{UH_0\rho_0}{\eta_0}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gH_0}.$$

В дальнейшем, как и ранее в этой главе, будем рассматривать течение тонкого слоя жидкости ($\varepsilon \ll 1$), в котором числа Рейнольдса и Фруда удовлетворяют соотношениям $\varepsilon^2 < \text{Re}^{-1} < \varepsilon$, $\text{Fr} \simeq 1$. В уравнениях движения (2.28) выполняется моделирование, состоящее в отбрасывании членов порядка ε^2 и выше. Выразим вертикальные компоненты скорости v через горизонтальные u из уравнения неразрывности и давление из второго уравнения импульса. В результате получим уравнения, описывающие нестационарное течение тонкого слоя неоднородной по вязкости жидкости со свободной границей:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + bh_x &= a + K \left(\eta u_y \right)_y, \\ \eta_t + u\eta_x + v\eta_y &= 0 \quad v = - \int_0^y u_x dy, \\ h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x &= 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=h} = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Здесь $K = (\varepsilon \text{Re})^{-1}$, $a = \varepsilon^{-1} \text{Fr}^{-1} \sin \theta$, $b = \text{Fr}^{-1} \cos \theta$. Безразмерное давление в слое жидкости восстанавливается по формуле $p = p_0 + b(h - y)$. Второе уравнение системы (2.29) получается из уравнения для $c(t, x, y)$ в системе (2.28) вследствие монотонности функции $F(c)$, выражающей зависимость $\eta = F(c)$.

Заметим, что полученная модель отличается от (2.3) более сложным видом правой части уравнения импульса и дополнительным уравнением на вязкость η . Если вязкость постоянна, дополнительное уравнение вырождается, и модель (2.29) эквивалентна (2.3). В случае идеальной жидкости аналогичное моделирование также приводит к известным уравнениям теории длинных волн [3; 19]. При этом в системе (2.29) следует положить $K = 0$, $\eta(t, x, y) = \text{const}$

и исключить из рассмотрения два последних уравнения, соответствующих граничным условиям для вязкой жидкости.

Свойства системы уравнений (2.29) удобно исследовать в полулагранжевых координатах (x, λ) , переход к которым осуществляется заменой переменной $y = \Phi(t, x, \lambda)$, где функция Φ — решение задачи Коши [17]:

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda h_0(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют дну $y = 0$ (наклонной плоскости) и свободной границе жидкости $y = h(t, x)$.

В новых переменных для определения функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda$ возникает интегродифференциальная система уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + b \int_0^1 H_x d\lambda &= a + K \left(\frac{1}{H} \left(\frac{\eta u_\lambda}{H} \right)_\lambda \right)_\lambda, \\ H_t + (uH)_x &= 0, \quad \eta_t + u\eta_x = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

с граничными условиями

$$u|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0. \quad (2.31)$$

Вывод интегродифференциальных уравнений движения (2.30) аналогичен приведенному в [21] для невязких течений тонкого слоя жидкости и рассмотренному ранее в разделе для течений без стратификации по вязкости.

2.7 Условия гиперболичности

Интегродифференциальная модель (2.30) является гиперболической в смысле [24; 29]. Характеристические свойства математических моделей теории длинных волн, близких по структуре к (2.30), исследованы в [20; 79]. Поэтому приводятся лишь ключевые моменты, необходимые для формулировки условий обобщенной гиперболичности.

Система уравнений (2.30) представляется в виде

$$\mathbf{U}_t + A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \mathbf{f}, \quad (2.32)$$

где $\mathbf{U} = (u, H, \eta)^T$ — вектор искомых величин, $A\langle \mathbf{U}_x \rangle$ — результат действия по переменной λ оператора A на вектор-функцию \mathbf{U}_x :

$$A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \left(uu_x + b \int_0^1 H_x d\lambda, Hu_x + uH_x, u\eta_x \right)^T,$$

\mathbf{f} — правая часть уравнения (2.30), включающая старшие производные по λ :

$$\mathbf{f} = \left(a + \left(\frac{1}{H} \left(\frac{\eta u_\lambda}{H} \right)_\lambda \right)_\lambda, 0, 0 \right)^T \equiv (f, 0, 0)^T$$

(верхний индекс T означает транспонирование). Правая часть \mathbf{f} временно считается известной функцией. Тогда система (2.32) представляет квазилинейную систему уравнений с операторными коэффициентами и попадает в рамки развитого в [24; 29] обобщения теории характеристик.

Анализ задачи на собственные значения (2.9) показывает, что нетривиальные решения существуют в спектрах $k = k^i$ и $k = u$. Скорости характеристик k^i являются корнями уравнения:

$$\chi(k) = 0, \quad \chi(k) \equiv 1 - b \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - k)^2}. \quad (2.33)$$

Для течения с монотонным профилем скорости уравнение (2.33) имеет два вещественных корня $k^1 < u$ и $k^2 > u$. Соответственно, собственные функционалы $\mathbf{F}^i = (F_1^i, F_2^i, F_3^i)$ имеют вид:

$$(F_1^i, \varphi) = b \int_0^1 \frac{H \varphi d\lambda}{(u - k^i)^2}, \quad (F_2^i, \varphi) = -b \int_0^1 \frac{\varphi d\lambda}{u - k^i}, \quad (F_3^i, \varphi) = 0.$$

Кроме того, имеется два собственных функционала $\mathbf{F}^{1\lambda} = (F_1^{1\lambda}, F_2^{1\lambda}, F_3^{1\lambda})$ и $\mathbf{F}^{2\lambda} = (F_1^{2\lambda}, F_2^{2\lambda}, F_3^{2\lambda})$, соответствующих непрерывному спектру оператора A .

Их также можно выписать в явном виде, приняв для краткости $\varphi(\nu) = \varphi(t, x, \nu)$ и $\varphi(\lambda) = \varphi(t, x, \lambda)$:

$$(F_1^{1\lambda}, \varphi(\nu)) = -\varphi'(\lambda), \quad (F_1^{1\lambda}, \varphi(\nu)) = \frac{u_\lambda}{H} \varphi(\lambda), \quad (F_3^{1\lambda}, \varphi(\nu)) = 0,$$

$$(F_1^{2\lambda}, \varphi(\nu)) = \varphi(\lambda) + b \int_0^1 \frac{H(\nu)(\varphi(\nu) - \varphi(\lambda)) d\nu}{(u(\nu) - u(\lambda))^2}, \quad (F_1^{2\lambda}, \varphi(\nu)) = -b \int_0^1 \frac{\varphi(\nu) d\nu}{u(\nu) - u(\lambda)},$$

$$(F_3^{2\lambda}, \varphi(\nu)) = 0, \quad F_1^{3\lambda} = F_2^{3\lambda} = 0, \quad (F_3^{3\lambda}, \varphi(\nu)) = \varphi(\lambda),$$

где действие происходит по переменной ν , а λ — произвольное фиксированное значение в интервале $[0, 1]$. Заметим, что за счет большего количества уравнений движения число функционалов также возросло, по сравнению с рассмотренной ранее задачей.

В результате анализа полноты системы собственных функционалов можно сформулировать утверждение: для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm(u) \neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для обобщенной гиперболичности системы уравнений (2.32) на гладких по переменной λ решениях. Здесь $\chi^\pm(u)$ — предельные значения комплексной функции $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскостей на отрезке (u_0, u_1) ; приращение аргумента функций $\chi^\pm(u)$ вычисляется при изменении λ от 0 до 1 при фиксированных значениях t и x по формуле:

$$\chi^\pm(u) = 1 + b \left(\frac{W_1}{u_1 - u} - \frac{W_0}{u_0 - u} - \int_0^1 \frac{W(\mu) d\mu}{u(\mu) - u(\lambda)} \mp \pi i \frac{W_\lambda}{u_\lambda} \right),$$

где $W = H/u_\lambda$; а индексы “0” и “1” соответствуют значениям функций при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

2.8 Законы сохранения

Для модели (2.30) запись в форме системы законов сохранения, пригодной для описания разрывных решений, производится аналогично предыдущей задаче. Для определения искомых функций

$$H(t, x, \lambda), \quad \omega(t, x, \lambda) = \frac{u_\lambda}{H}, \quad q(t, x) = \int_0^1 uH d\lambda$$

предлагается использовать интегродифференциальную систему законов сохранения, включающую локальные законы сохранения массы и завихренности, а также полный закон сохранения горизонтального импульса слоя жидкости. Уравнения (2.30), (2.31) представимы в виде балансовых соотношений:

$$\begin{aligned} (\omega H)_t + (u\omega H)_x &= K \left(\frac{1}{H} (\omega\eta)_\lambda \right)_\lambda, \quad \left(u = \int_0^\lambda \omega H d\lambda \right) \\ q_t + \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda + \frac{bh^2}{2} \right)_x &= ah - K\omega\eta \Big|_{\lambda=0}, \\ H_t + (uH)_x &= 0, \quad (\eta H)_t + (\eta u H)_x = 0, \quad \omega \Big|_{\lambda=1} = 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Системы уравнений (2.30), (2.31) и (2.34) на гладких решениях эквивалентны. Очевидно, что уравнения (2.34) получены из (2.30) путем дифференцирования и интегрирования по переменной λ с учетом граничных условий (2.31). Для получения уравнений (2.30), (2.31) из системы (2.34), уравнения (2.34) следует проинтегрировать по λ , что приводит к соотношению

$$u_t + uu_x = \frac{K}{H} \left(\frac{u_\lambda \eta}{H} \right)_\lambda + F(t, x). \tag{2.35}$$

Умножение (2.35) на H и интегрирование по λ с использованием третьего и последнего уравнений системы (2.34) дает

$$q_t + \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda \right)_x = hF - K\omega\eta \Big|_{\lambda=0}$$

Сопоставление этого уравнения с третьим уравнением системы (2.34) позволяет определить функцию $F = a - bh_x$ и установить эквивалентность рассматриваемых систем.

Для вывода дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующих интегродифференциальную модель (2.34), область течения разбивается на вертикальные слои по переменной λ ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$) и вводятся переменные:

$$y_i = \Phi(t, x, \lambda_i), \quad u_i = u(t, x, \lambda_i), \quad h_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\omega_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \quad u_{ci} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \quad q = \sum_{i=1}^M u_{ci} h_i.$$

Проинтегрируем уравнения движения по λ от λ_{i-1} до λ_i . При вычислении интегралов предполагается, что профиль скорости в каждом слое $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ (или $y \in [y_{i-1}, y_i]$) близок к линейному, т. е.

$$u(t, x, y) \approx (y - y_{i-1})\omega_i(t, x) + u_{i-1}(t, x), \quad y \in [y_{i-1}, y_i] \quad (2.36)$$

В силу выбранной аппроксимации профиля скорости в слоях и с учетом того, что $H d\lambda = dy$, имеют место равенства

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda = u_{ci}h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda = u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12}. \quad (2.37)$$

Предполагается, что в пределах каждого рассматриваемого слоя $y \in [y_{i-1}, y_i]$ вязкость $\eta = \eta_i(t, x)$.

В результате интегрирования уравнений (2.34) по лагранжевой переменной λ от λ_{i-1} до λ_i , использования формул (2.37) и граничных условий

$$u_0 = 0, \quad \omega_M = 0$$

для определения $3M - 1$ искомых функций

$$h_1(t, x), \dots, h_M(t, x), \quad \eta_1(t, x), \dots, \eta_M(t, x), \quad \omega_2(t, x), \dots, \omega_{M-1}(t, x), \quad q(t, x)$$

получаем замкнутую систему дифференциальных балансовых соотношений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} h_i) &= 0, \quad (i = 1, \dots, M) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\eta_i h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\eta_i u_{ci} h_i) &= 0, \quad (i = 1, \dots, M) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\omega_i h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} \omega_i h_i) &= \\
= K \left(\frac{\omega_{i+1} \eta_{i+1} - \omega_i \eta_i}{h_i} - \frac{\omega_i \eta_i - \omega_{i-1} \eta_{i-1}}{h_{i-1}} \right), & \quad (i = 2, \dots, M-1) \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^M \left(u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12} \right) + \frac{b}{2} \left(\sum_{i=1}^M h_i \right)^2 \right) &= a \sum_{i=1}^M h_i - K \omega_1 \eta_1.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Входящие в (2.38) величины $u_{ci}(t, x)$ и $\omega_1(t, x)$ задаются формулами

$$u_{ci} = -\frac{\omega_i h_i}{2} + \sum_{j=1}^i \omega_j h_j, \quad \omega_1 = \frac{1}{h_1} \left(\sum_{i=1}^M h_i - \frac{h_1}{2} \right)^{-1} \left(q + \sum_{i=2}^M h_i \left(\frac{\omega_i h_i}{2} - \sum_{j=2}^i \omega_j h_j \right) \right).$$

Заметим что здесь на M уравнений больше, чем в модели (2.26). Для численного решения системы (2.38) также применимы стандартные численные методы.

2.9 Результаты численного моделирования

Для проведения расчетов также использована модификация схемы центральных разностей Насьяху–Тэдмора (2.27) типа предиктор–корректор в случае уравнений с правой частью [27] для систем балансовых соотношений вида

$$u_t + (f(u))_x = R(u),$$

к которому относится рассматриваемая модель (2.38).

Расчеты проводятся в области $x \in [x_a, x_b]$ до момента времени $t = t_m$, выбранного так, что возмущения не достигают границ расчетной области. В качестве граничных условий задаются начальные значения искомых величин в крайних левом и правом узлах. Расчетная область по x разбивается на N

ячеек с узловыми точками x_j в серединах ячеек. Число Куранта CFL выбрано равным 0.475. Для нахождения максимальной характеристической скорости $k^* = \max\{|k^1|, |k^2|\}$ по аналогии с предыдущими вычислениями используется уравнение

$$\chi(k) = 1 - b \sum_{i=1}^M \frac{h_i}{(u_i - k)(u_{i-1} - k)} = 0,$$

полученное подстановкой в (2.33) кусочно-линейной аппроксимации (2.36). Корни этого уравнения $k^1 < \min\{u_i\}$ и $k^2 > \max\{u_i\}$ определяются итерационным методом Ньютона с точностью 10^{-6} ; параметр b считается равным 1. Шаг по времени дается формулой $\Delta t = \text{CFL} \Delta x / k^*$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задан параболический профиль скорости. Глубина слоя жидкости h задается кусочно-линейной функцией: постоянные у левого и правого края расчетной области решения соединяются линейной функцией, расход задается формулой $q = ah^3/(3K)$. Для расчета полагается $h_i = h/M$ ($i = 1, \dots, M$), $\omega_i h_i = u_i - u_{i-1}$ ($i = 2, \dots, M - 1$), вязкость i -го слоя η_i задана постоянной величиной для каждого $i = 1, \dots, M$, где M число слоев и $u_i = u(0, x, ih_i)$. Расчеты проводятся с разрешением $N = 400$, $M = 50$ в области $x \in [-2, 4]$ при следующих параметрах $a = 0.05$, $K = 0.01$

Расчет 1.1 Пусть в начальный момент времени $h = 0.9$, вязкость линейно изменяется от $\eta_1 = 0.1$ на поверхности до $\eta_M = 1.5$ на дне при $x < -1$ и $h = 0.5$, $\eta_i = 0.1$ ($i = 1, \dots, M$) при $x > 1$, вязкости в этих областях связаны гладкой функцией. Течение жидкости происходит слева направо ($u \geq 0$), поэтому в данном случае сформируется сильный разрыв (более глубокий слой жидкости “догонит” более мелкий). Результаты расчета при $t = 1.2$ показаны на Рисунке 2.8. Видно, что данное распределение вязкости не влияет на формирование разрыва и лишь слабо влияет на форму свободной поверхности.

Расчет 1.2 В данном расчете рассматривается аналогичная конфигурация с тем отличием, что $h = 0.5$ при $x < -1$ и $h = 0.9$ при $x > 1$. В этом случае разрыв не формируется, и эволюция течения в момент времени $t = 1$ показана на Рисунке 2.9. Как видно из графиков, распределение вязкости также несущественно влияет на форму свободной поверхности и характер течения.

Аналогичные расчеты, проведенные для различных начальных распределений вязкости, показали, что в рамках исследуемой модели распределение

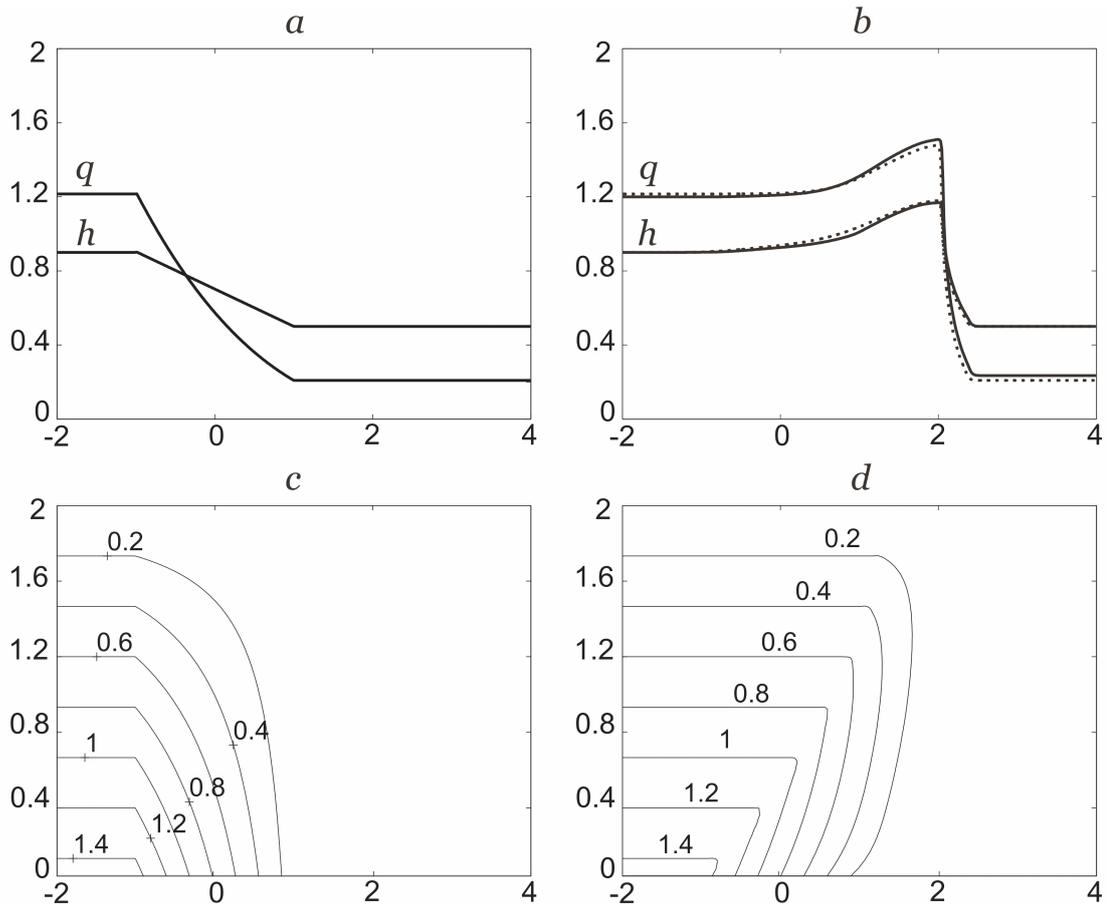


Рисунок 2.8 — Расчет 1.1 *a* — глубина и расход в начальный момент времени, *b* — сравнение расчетов по модели (2.38) с переменной вязкостью (сплошная линия) и с постоянной вязкостью (пунктир); *c* — распределение вязкости в начальный момент времени, *d* — эволюция линий с постоянной вязкостью после прохождения возмущения *b*.

вязкости лишь незначительно влияет на течение и не может препятствовать формированию разрыва.

Расчет 2 По аналогии с задачей о распаде гранулированной колонны, рассмотренной в [64], исследуется эволюция двумерной прямоугольной области, заполненной более вязкой жидкостью. Начальное распределение вязкости представлено на Рисунке 2.10, *a*, в малой прямоугольной области $\eta_M = 1.5$, в остальной области $\eta_1 = 0.5$. Задан параболический профиль скорости, течение происходит слева направо ($u \geq 0$), характер возмущения такой же, как в расчете 1.2. На Рисунке 2.10, *b*, *c* представлены результаты в разные промежутки времени. Видно, что происходит снос частиц вместе с фронтом волны и область изменяет свою ширину, расплываясь вдоль фронта волны.

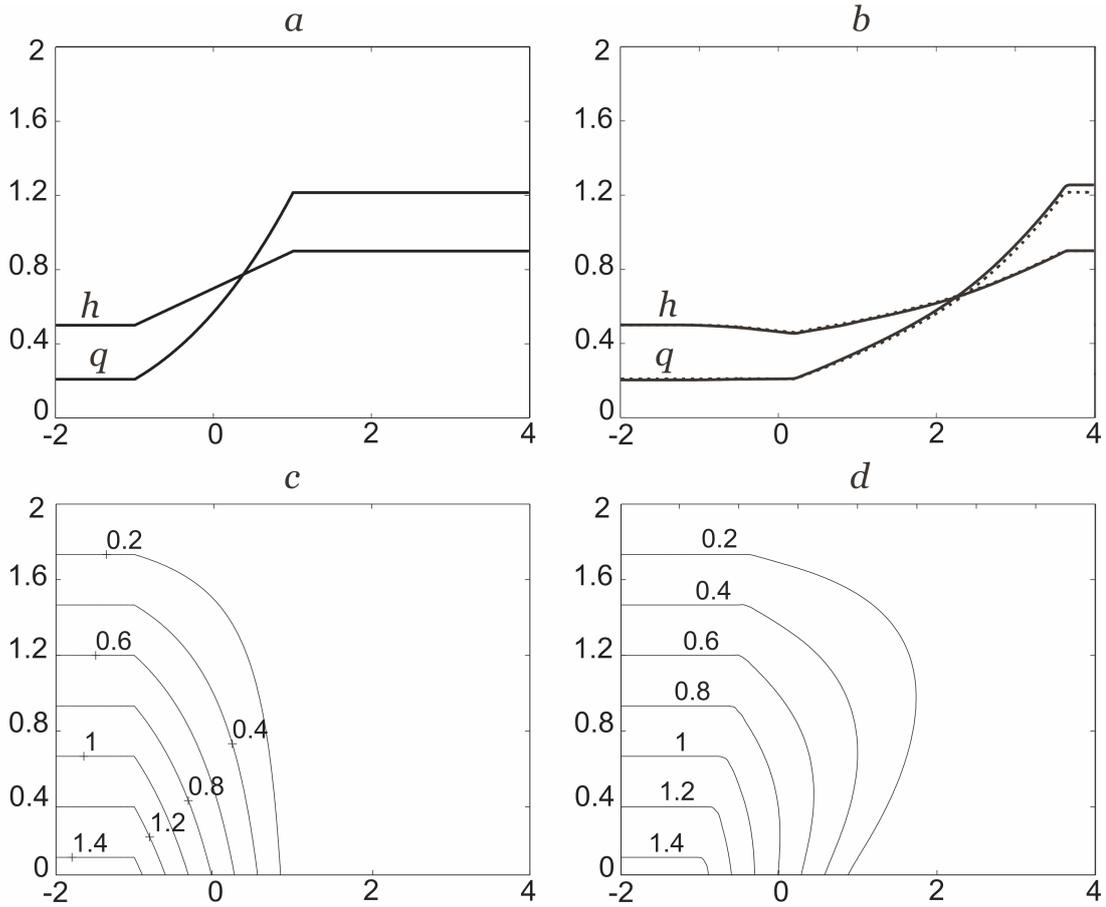


Рисунок 2.9 — Расчет 1.2 *a* — глубина и расход в начальный момент времени, *b* — сравнение расчетов по модели (2.38) с переменной вязкостью (сплошная линия) и с постоянной вязкостью (пунктир); *c* — распределение вязкости в начальный момент времени, *d* — эволюция линий с постоянной вязкостью после прохождения возмущения *b*.

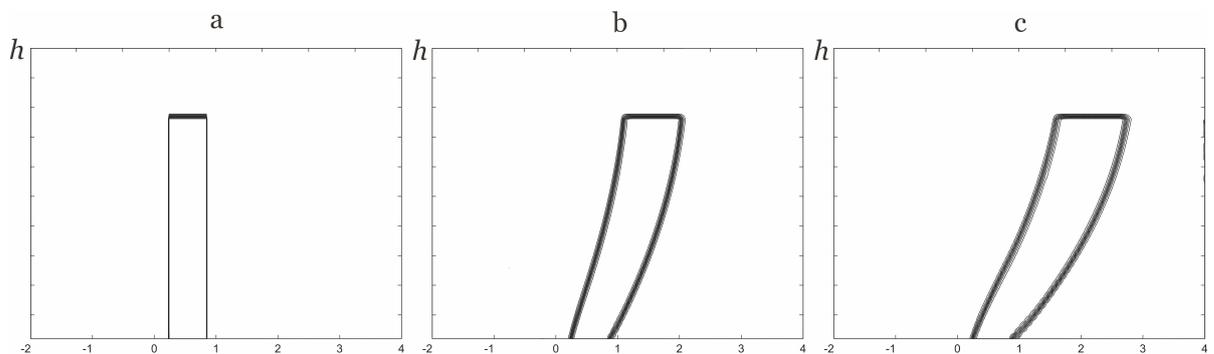


Рисунок 2.10 — Эволюция прямоугольной области с более вязкой жидкостью при прохождении возмущения из расчета 1.2; *a* — область при $t = 0$; *b* — область при $t = 0.7$; *c* — область при $t = 1.14$.

2.10 Основные результаты главы 2

Основным результатом главы является строгое обоснование возможности нелинейного опрокидывания волн в рамках уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости (2.4). На основе предложенного В.М. Тешуковым метода теоретического анализа нелинейных моделей с операторными коэффициентами показано, что слабые разрывы решений уравнений движения сосредоточены на обобщенных характеристиках. Также в рамках данного подхода выведено транспортное уравнение для амплитуды слабого разрыва (2.20) и показана возможность неограниченного роста его решения. Таким образом, наличие в уравнениях движения жидкости членов с производными второго порядка по y (или λ) не улучшает свойств гладкости решения по переменной x по сравнению с гиперболическим случаем.

Для описания разрывных решений уравнений движения жидкости, которые могут возникать в процессе эволюции течения, предложена неоднородная гиперболическая система дифференциальных уравнений (2.26), являющаяся “многослойной” аппроксимацией исходной модели (2.4), (2.5). При этом не делается каких-либо предположений о распределении скорости по глубине, необходимых для проведения осреднения. Выполнены тестовые численные расчеты на основе уравнений (2.26) и осредненной гиперболической модели (2.7). В случае формирования сильного разрыва результаты расчета по этим моделям могут заметно отличаться (Рисунок 2.2). Если в процессе эволюции течения разрыв не возникает, то результаты расчета по указанным моделям близки (Рисунок 2.3). Показано, что влияние угла наклона ровного дна вносит существенный вклад в эволюцию течения. Результаты подтверждены при расчетах различных начальных конфигураций потока.

Полученные результаты обобщены на уравнения, описывающие более сложное течение жидкости со стратификацией по вязкости. На основе применения теории характеристик для систем уравнений с операторными коэффициентами изучены свойства уравнений движения, сформулированы условия гиперболичности интегродифференциальной системы и показано, что по аналогии с моделью течения жидкости постоянной вязкости в процессе эволюции решения возможно возникновение градиентной катастрофы. Для численного моде-

лирования движения слоистой вязкой жидкости предложена аппроксимация в виде конечномерной системы дифференциальных балансовых соотношений. Проведена адаптация разработанных ранее методов решения. Численное решение “многослойной” системы получено с использованием схемы Насьяху–Тэдмора. Проведены сравнительные расчеты для модели с постоянной и переменной вязкостью, показывающие в рассматриваемом диапазоне параметров несущественное различие результатов. Выполнено моделирование эволюции области более вязкой жидкости в менее вязкой при прохождении различных волновых возмущений.

Глава 3. Модель течения вязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу

В данной главе рассматривается применение длинноволновых моделей к течению вязкой слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу. А именно, рассматривается плоское течение, осредненное по толщине ячейки в предположении о параболическом профиле скорости [76; 82]. При этом основное внимание уделяется исследованию эволюции слоя смешения, который может формироваться на границе раздела двух жидкостей разной вязкости, движущихся с разными скоростями.

Для описания слоя смешения применяется теория многослойной мелкой воды с массообменом, развитая в [19; 48]. В рамках данного подхода предполагается трехслойная структура течения, в которой вихревой слой смешения расположен между двумя потенциальными слоями. Такое предположение позволяет провести еще одно осреднение уравнений движения по ширине ячейки и вывести одномерную замкнутую систему уравнений, связывающую плотность, ширину прослоек, средние скорости слоев и “сдвиговую” скорость в слое смешения. В стационарном случае полученная система редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно привести к нормальной форме.

Проводится численное моделирование слоя смешения по нестационарной одномерной модели с постоянными граничными условиями на входном сечении канала и его сравнение с решением стационарных уравнений. Выполняется расчет по полной двумерной модели и проводится оценочное сравнение ширины слоя смешения с результатами, полученными по одномерным стационарным уравнениям. Также проводится численный эксперимент по исследованию влияния вязкости на эволюцию слоя смешения.

3.1 Математическая формулировка задачи

Движения сжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу описываются системой уравнений Навье–Стокса:

$$(\rho \vec{u})_t + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - P) = 0, \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad \vec{u}|_{z=\pm b} = 0, \quad (3.1)$$

Здесь ρ – плотность, $\vec{u} = (u, v, w)^T$ – вектор скорости, $P = -(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u})I + (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^*)\mu$ – тензор напряжений, в котором p – давление, μ – вязкость. Для того чтобы описывать в рамках одной модели совместное движение двух слоев жидкости с разной вязкостью μ_1 и μ_2 , положим, что вязкость $\mu = \mu(c)$ монотонно зависит от величины c , сохраняющейся вдоль траекторий $c_t + \vec{u} \cdot \nabla c = 0$ и принимающей значения на интервале $[0, 1]$. Величина c задана таким образом, что она равна единице в жидкости с вязкостью μ_2 и нулю в жидкости с вязкостью μ_1 . Стенки ячейки задаются уравнениями $z = \pm b$.

Полагается параболический профиль скорости

$$u = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{2z}{b} \right)^2 \right) u'(t, x, y), \quad v = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{2z}{b} \right)^2 \right) v'(t, x, y), \quad w = 0,$$

а также полагается, что ρ и p не зависят от переменной z . Проведем осреднение уравнений движения (3.1) по толщине ячейки путем интегрирования по переменной z с учетом параболического профиля скорости. При этом положим, что величины $(\mu \vec{u}_x)_x$, $(\mu \vec{u}_x)_y$ и $(\mu \vec{u}_y)_y$ малы по сравнению с производными по переменной z , а значит, ими можно пренебрегать. Тогда сдвиговые течения вязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу описывается системой уравнений [76; 82]:

$$\begin{aligned} \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, \\ (\rho u)_t + (\beta \rho u^2 + p)_x + (\beta \rho uv)_y &= -\mu u, \\ (\rho v)_t + (\beta \rho uv)_x + (\beta \rho v^2 + p)_y &= -\mu v, \\ (c\rho)_t + (uc\rho)_x + (vc\rho)_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

После осреднения уравнений размерность всех гидродинамических величин уменьшилась, и здесь $\rho = \rho(t, x, y)$, $u = u(t, x, y)$ и $v = v(t, x, y)$, $p = p(t, x, y)$,

$c = c(t, x, y)$. Постоянная $\beta = 6/5$ появляется в результате интегрирования по ширине ячейки. Пространственная конфигурация задачи показана на Рисунке 3.1. Толщина ячейки по переменной z предполагается малой по сравнению с горизонтальными размерами ячейки, и движения жидкости по этой оси ограничены твердыми крышками с условиями непротекания.

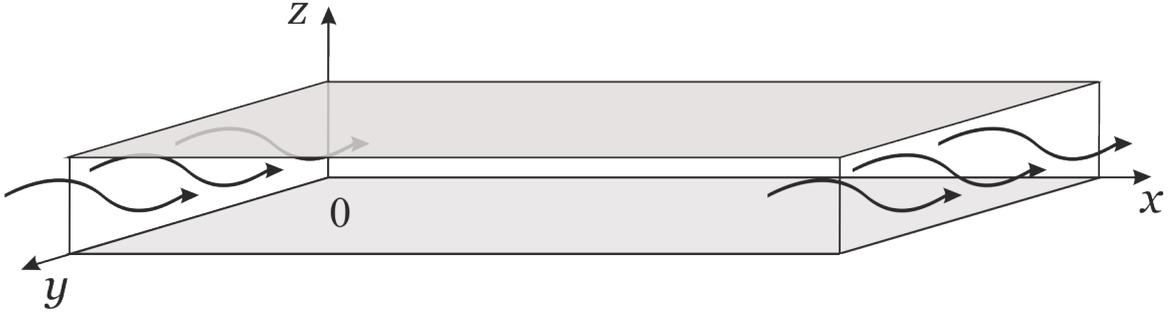


Рисунок 3.1 — Пространственная конфигурация течения в ячейке Хеле-Шоу

Пусть характерный масштаб ячейки L_x по переменной x заметно превышает масштаб L_y по переменной y , так что $\varepsilon = L_y/L_x \ll 1$. В уравнениях (3.2) выполним моделирование

$$t \rightarrow \varepsilon^{-1}t, \quad x \rightarrow \varepsilon^{-1}x, \quad v \rightarrow \varepsilon v, \quad \mu \rightarrow \varepsilon\mu$$

и отбросим слагаемые порядка ε^2 . Следуя [72; 83], будем полагать $\beta = 1$. В результате получим систему уравнений [92]:

$$\begin{aligned} \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, & u_t + uu_x + vv_y + a\rho_x &= -\mu u/\rho, \\ c_t + uc_x + vc_y &= 0, & \rho_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В выводе модели (3.3) используется замыкающее соотношение для давления $p(\rho) = a\rho^2/2$, где $a = c_0^2/\rho_0$, а постоянные c_0 и ρ_0 определяют характерную скорость звука и плотность жидкости.

Будем рассматривать течение между прямыми жесткими стенками, параллельными оси x и проходящими на уровнях $y = 0$ и $y = H$, тогда на стенках выполняются условия непротекания:

$$v|_{y=0} = v|_{y=H} = 0.$$

В случае $\mu = 0$ аналогичное моделирование приводит к классическим уравнениям теории длинных волн для движения идеальной жидкости [3].

Следствием системы (3.3) являются законы сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} (\rho u)_t + (\rho u^2 + a\rho^2/2)_x + (\rho uv)_y &= -\mu u, \\ E_t + ((E + a\rho^2/2)u)_x + ((E + a\rho^2/2)v)_y &= -\mu u^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $E = (u^2 + a\rho)\rho/2$.

3.2 Трехслойная схема течения

Пусть в начальный момент времени ячейка Хеле–Шоу заполнена двухслойной жидкостью с вязкостями μ_1 и μ_3 . Слои движутся с постоянными положительными скоростями u_1 и u_3 . На левой границе ячейки в качестве граничных условий заданы начальные параметры потока. Можно ожидать, что на границе раздела потоков образуются вихревые структуры (слой смешения) ввиду развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Для решения этой задачи сделаем предположение о трехслойной схеме течения. Пусть в некоторой точке (выберем ее в качестве точки отсчета $x = 0$) начнет образовываться слой смешения, как показано на Рисунке 3.2.

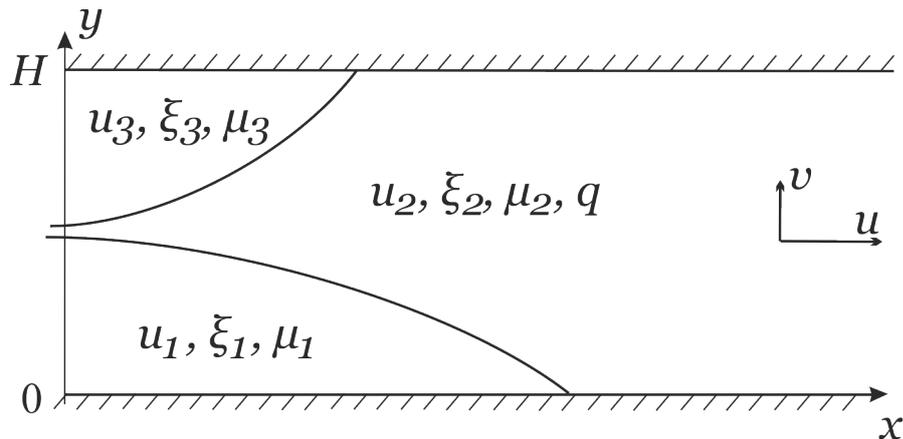


Рисунок 3.2 — Трехслойная модель течения в ячейке.

Здесь и далее индекс “1” соответствует нижнему слою жидкости, индекс “2” соответствует слою смешения, а индекс “3” соответствует верхнему слою, в

соответствии с Рисунком 3.2. Используем следующие обозначения: ξ_i — ширина i -го слоя, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = H$, u_i — скорость течения в i -м слое, μ_i — постоянная в каждом слое вязкость. Движение жидкости в слое смешения характеризуется средней скоростью в слое u_2 и величиной, q описывающей неоднородность течения:

$$u_2 = \frac{1}{\xi_2} \int_{\xi_1}^{H-\xi_3} u \, dy, \quad q^2 = \frac{1}{\xi_2} \int_{\xi_1}^{H-\xi_3} (u - u_2)^2 \, dy.$$

Течение в “1” и “3” слое будет считаться потенциальным ($u_y = 0$), поэтому уравнения импульса в этих слоях имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{1t} + u_1 u_{1x} + a \rho_x &= -\mu_1 u_1 / \rho, \\ u_{3t} + u_3 u_{3x} + a \rho_x &= -\mu_3 u_3 / \rho. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Сделаем предположение о том, что происходит вовлечение жидкости из потенциальных слоев в слой смешения. Согласно [19], массообмен между слоями пропорционален $q\rho$ с некоторой эмпирической константой σ . Проведем осреднение по ширине ячейки от 0 до H закона сохранения массы, которому соответствует первое уравнение (3.3). Тогда закон сохранения массы расщепится на три уравнения с ненулевой правой частью:

$$\begin{aligned} (\xi_1 \rho)_t + (u_1 \xi_1 \rho)_x &= -\sigma q \rho, \\ (\xi_2 \rho)_t + (u_2 \xi_2 \rho)_x &= 2\sigma q \rho, \\ (\xi_3 \rho)_t + (u_3 \xi_3 \rho)_x &= -\sigma q \rho. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отметим, что сумма этих уравнений дает закон сохранения суммарной массы в ячейке $(H\rho)_t + Q_x = 0$, где $Q = \rho(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3)$ — функция общего расхода.

Осреднение уравнений (3.4) по ширине ячейки от 0 до H дает:

$$\begin{aligned}
Q_t + ((u_2^2 + q^2)\xi_2\rho + u_1^2\xi_1\rho + u_3^2\xi_3\rho + aH\rho^2/2)_x = \\
= -\mu_1\xi_1u_1 - \mu_2\xi_2u_2 - \mu_3\xi_3u_3, \\
((u_1^2\xi_1 + (u_2^2 + q^2)\xi_2 + u_3^2\xi_3)\rho + aH\rho^2)_t + \\
+ ((u_1^3\xi_1 + (u_2^2 + 3q^2)u_2\xi_2 + u_3^3\xi_3 + 2aQ)\rho)_x = \\
= -2(\mu_1\xi_1u_1^2 + \mu_2\xi_2(u_2^2 + q^2) + \mu_3\xi_3u_3^2) - \theta\rho q^3.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Отметим, что при выводе уравнений (3.4) корреляция $A_3 = \frac{1}{\xi_2} \int_{\xi_1}^{H-\xi_3} (u - u_2)^3 dy$ считается малой и не учитывается [47]. Следуя [19], в уравнение для энергии добавлено слагаемое $-\theta\rho q^3$, отвечающая за диссипацию (θ — эмпирический параметр). Следствием уравнений (3.7) является система:

$$\begin{aligned}
u_{2t} + u_2u_{2x} + \frac{(q^2\xi_2\rho)_x}{\xi_2\rho} + a\rho_x = -\frac{\mu_2u_2}{\rho} + \frac{\sigma q}{\xi_2} \left(u_1 - 2u_2 + u_3 \right), \\
q_t + (u_2q)_x = -\frac{\mu_2q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2} \left((u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_2)^2 - \left(2 + \frac{\theta}{\sigma}\right)q^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

В результате получим нестационарную одномерную модель течения (3.5), (3.6), (3.8), состоящую из 7 уравнений для 7 неизвестных функций ρ , ξ_1 , ξ_2 , u_1 , u_2 , u_3 , q . Полученная система включает два эмпирических параметра σ и θ . Однако диапазон изменения этих величин известен и составляет $\sigma \in [0.1, 0.4]$, $\sigma/\theta \in [2, 6]$ для идеальной жидкости [19].

В случае, когда при эволюции течения ширина одного из потенциальных слоев (например, “3”) становится равной нулю, то течение вырождается в двух-слойное:

$$\begin{aligned}
(\xi_1\rho)_t + (u_1\xi_1\rho)_x = -\sigma q\rho, \quad (\xi_2\rho)_t + (u_2\xi_2\rho)_x = \sigma q\rho, \\
u_{1t} + u_1u_{1x} + a\rho_x = -\frac{\mu_1u_1}{\rho}, \\
u_{2t} + u_2u_{2x} + \frac{(q^2\xi_2\rho)_x}{\xi_2\rho} + a\rho_x = -\frac{\mu_2u_2}{\rho} + \frac{\sigma q}{\xi_2}(u_1 - u_2), \\
q_t + (u_2q)_x = -\frac{\mu_2q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2} \left((u_1 - u_2)^2 - \left(1 + \frac{\theta}{\sigma}\right)q^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

В случае же вырождения обоих потенциальных слоев, система (3.8) принимает вид, близкий к осредненным уравнениям мелкой воды для плоскопараллельных сдвиговых течений [47]:

$$\begin{aligned} \rho_t + (u_2\rho)_x &= 0, & (u_2\rho)_t + ((u_2^2 + q^2)\rho + a\rho^2/2)_x &= -\mu u_2, \\ ((u_2^2 + q^2)\rho + a\rho^2)_t + ((u_2^2 + 3q^2)u_2\rho + 2au_2\rho^2)_x &= & (3.10) \\ &= -2\mu_2(u_2^2 + q^2) - \theta hq^3. \end{aligned}$$

Система (3.10) обладает свойством гиперболичности; скорости распространения характеристик определяются уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = u_2, \quad \frac{dx}{dt} = u_2 \pm \sqrt{a\rho + 3q^2}.$$

Покажем, что модели двух- и трехслойного течения имеют по крайней мере три вещественных характеристики (одну контактную и две звуковых). Здесь для краткости находятся характеристики двухслойной модели (3.9), для трехслойной анализ проводится аналогично. Модель (3.9) переписывается в матричном виде:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \xi_2, u_1, u_2, q)^T$ – вектор искомых величин,

$$\mathbf{F} = \left(0, \sigma q, -\frac{\mu_1 u_1}{\rho}, -\frac{\mu_2 u_2}{\rho} + \frac{\sigma q}{\xi_2}(u_1 - u_2), -\frac{\mu_2 q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2} \left((u_1 - u_2)^2 - \left(1 + \frac{\theta}{\sigma}\right)q^2 \right) \right)^T$$

— правая часть уравнения, матрица \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2)/H & \rho(u_2 - u_1)/H & \xi_1 \rho/H & \xi_2 \rho/H & 0 \\ \xi_1 \xi_2 (u_2 - u_1)/(H\rho) & (\xi_1 u_2 + \xi_2 u_1)/H & -\xi_1 \xi_2/H & \xi_1 \xi_2/H & 0 \\ a & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ a + q^2/\rho & q^2/\xi_2 & 0 & u_2 & 2q \\ 0 & 0 & 0 & q & u_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A} можно найти из характеристического уравнения:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (u_2 - \lambda)\Phi(\lambda) = 0,$$

$$\Phi(\lambda) = ((u_2 - \lambda)^2 - 3q^2) \left((u_1 - \lambda)^2 - \frac{a\xi_1\rho}{H} \right) - \frac{a\xi_2\rho}{H}(u_1 - \lambda)^2$$

Очевидно, что характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = u_2$, который соответствует контактной характеристике $dx/dt = u_2$. Кроме того, функция Φ имеет еще как минимум два вещественных корня. Это следует из того, что $\Phi \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, при этом $\Phi \leq 0$ при $\lambda \rightarrow u_2 \pm q\sqrt{3}$. Следовательно, существует как минимум 3 вещественных характеристики системы (3.9).

3.3 Стационарные решения

Бегущие волны можно исследовать в системе координат, которая движется со скоростью волны. Поэтому для описания структуры слоя смешения подойдет стационарная формулировка задачи. Тогда система (3.5), (3.6), (3.8) записывается в виде:

$$\begin{aligned} (u_1\xi_1\rho)_x &= -\sigma q\rho, & (u_2\xi_2\rho)_x &= 2\sigma q\rho, & (u_3\xi_3\rho)_x &= -\sigma q\rho, \\ u_1u_{1x} + a\rho_x &= -\frac{\mu_1u_1}{\rho}, & u_3u_{3x} + a\rho_x &= -\frac{\mu_3u_3}{\rho}, \\ u_2u_{2x} + \frac{(q^2\xi_2\rho)_x}{\xi_2\rho} + a\rho_x &= -\frac{\mu_2u_2}{\rho} + \frac{\sigma q}{\xi_2} \left(u_1 - 2u_2 + u_3 \right), \\ (u_2q)_x &= -\frac{\mu_2q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2} \left((u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_2)^2 - \left(2 + \frac{\theta}{\sigma}\right)q^2 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система (3.11) разрешается относительно производных, что позволяет записать эквивалентную ей систему ОДУ:

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{G}{\Delta}, \quad u'_1 = -\frac{\mu_1}{\rho} - \frac{a}{u_1}\rho', \quad u'_3 = -\frac{\mu_3}{\rho} - \frac{a}{u_3}\rho', \\
\xi'_1 &= -\frac{\sigma q}{u_1} - \frac{\xi_1}{u_1}u'_1 - \frac{\xi_1}{\rho}\rho', \quad \xi'_3 = -\frac{\sigma q}{u_3} - \frac{\xi_3}{u_3}u'_3 - \frac{\xi_3}{\rho}\rho', \\
u'_2 &= \frac{2\sigma q}{\xi_2} - \frac{u_2}{\xi_2\rho} \left(\xi_2\rho' - \rho\xi'_1 - \rho\xi'_3 \right), \quad \xi'_2 = \frac{2\sigma q}{u_2} - \frac{\xi_2}{u_2}u'_2 - \frac{\xi_2}{\rho}\rho', \\
q' &= -\frac{\mu_2 q}{\rho u_2} - \frac{q}{u_2}u'_2 + \frac{\sigma}{2\xi_2 u_2} \left((u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_2)^2 - \left(2 + \frac{\theta}{\sigma}\right)q^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\mu_2 \xi_2 (u_2^2 - 2q^2)}{u_2 (u_2^2 - 3q^2)} + \frac{\mu_1 \xi_1}{u_1} + \frac{\mu_3 \xi_3}{u_3} - \frac{\sigma q \rho}{u_1} - \frac{\sigma q \rho}{u_3} + \\
&+ \frac{\sigma q \rho ((u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_2)^2 + u_2 (u_1 - 4u_2 + u_3) - (6 + \frac{\theta}{\sigma})q^2)}{u_2 (u_2^2 - 3q^2)}, \\
\Delta &= H - \frac{a \xi_1 \rho}{u_1^2} - \frac{a \xi_3 \rho}{u_3^2} - \frac{a \xi_2 \rho}{u_2^2 - 3q^2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что здесь возникает параметр Δ , в зависимости от знака которого реализуется докритический при $\Delta < 0$, либо сверхкритический при $\Delta > 0$ режим течения. Аналогичным образом к системам ОДУ приводятся двухслойные и однослойные модели (3.9) и (3.10) в случае стационарного течения.

Для вычисления значений величин u_2 и q в точке $x = 0$ (соответствует зарождению слоя смешения), исследуем асимптотику течения при $\xi_2|_{x=0} \rightarrow 0$. Полагая, что предельные значения величин u_2 и q существуют, из уравнений (3.11), имеем:

$$\begin{aligned}
q_0^2 &= \frac{1}{2}u_{10}u_{20} - u_{20}^2 + \frac{1}{2}u_{20}u_{30} \\
u_{20} &= \frac{(6 + \theta/\sigma)(u_{10} + u_{30})}{4(4 + \theta/\sigma)} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16 \frac{(4 + \theta/\sigma)(u_{10}^2 + u_{30}^2)}{(6 + \theta/\sigma)^2 (u_{10} + u_{30})^2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь нижний индекс “0” соответствует значениям функций в точке $x = 0$. Для скорости u_{20} выбирается такой корень, который удовлетворяет неравенствам $u_{10} \leq u_{20} \leq u_{30}$.

Вычисление начальных значений скорости в точке $x = 0$ для двухслойного течения проводится аналогично. Пусть один из потенциальных слоев вырожден

$\xi_3 = u_3 = 0$, в этом случае для вычисления величин u_{20} и q_0 имеем:

$$q_0^2 = u_{10}u_{20} - u_{20}^2, \quad u_{20} = \frac{u_{10}}{(2 + \theta/\sigma)}.$$

Здесь, в отличие от трехслойного случая, скорость u_{20} определяется однозначно. В дальнейшем эти формулы будут использованы для определения данных на границе $x = 0$.

3.4 Численные результаты

Проведем численный эксперимент по выходу решения уравнений (3.5), (3.6), (3.8) на стационарный режим. Для того чтобы использовать схему Насьяху–Гэдмора (2.27), описанную в предыдущих главах, нестационарную модель (3.5), (3.6), (3.8) необходимо привести к форме системы законов сохранения:

$$\begin{aligned} \rho_t + (Q/H)_x &= 0, \\ (\xi_1\rho)_t + (u_1\xi_1\rho)_x &= -\sigma q\rho, \quad (\xi_3\rho)_t + (u_3\xi_3\rho)_x = -\sigma q\rho, \\ u_{1t} + (u_1^2/2 + a\rho)_x &= -\frac{\mu_1 u_1}{\rho}, \quad u_{3t} + (u_3^2/2 + a\rho)_x = -\frac{\mu_3 u_3}{\rho}, \\ q_t + (qu_2)_x &= -\frac{\mu_2 q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2} \left((u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_2)^2 - (2 + \frac{\theta}{\sigma})q^2 \right), \\ Q_t + ((u_2^2 + q^2)\xi_2\rho + u_1^2\xi_1\rho + u_3^2\xi_3\rho + aH\rho^2/2)_x &= \\ &= -\mu_1 u_1 \xi_1 - \mu_2 u_2 \xi_2 - \mu_3 u_3 \xi_3. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Для проведения расчетов выбирается равномерная сетка с числом узлов $N = 200$. Область вычислений $x \in [0,5]$ выбирается так, чтобы при заданных начально–краевых условиях трехслойное течение не вырождалось в двух- или однослойное. Ширина ячейки по вертикали равна единице, вязкость в слое смешения задается формулой $\mu_2 = \sqrt{\mu_1\mu_3}$, при этом $\mu_1 = 0.8$, а $\mu_3 = 0.3$. Параметр $\theta = 0.6$, а параметр σ варьируется от 0.15 до 0.2, параметр из замыкающего соотношения для давления $a = 200$. При единичной ширине канала потенци-

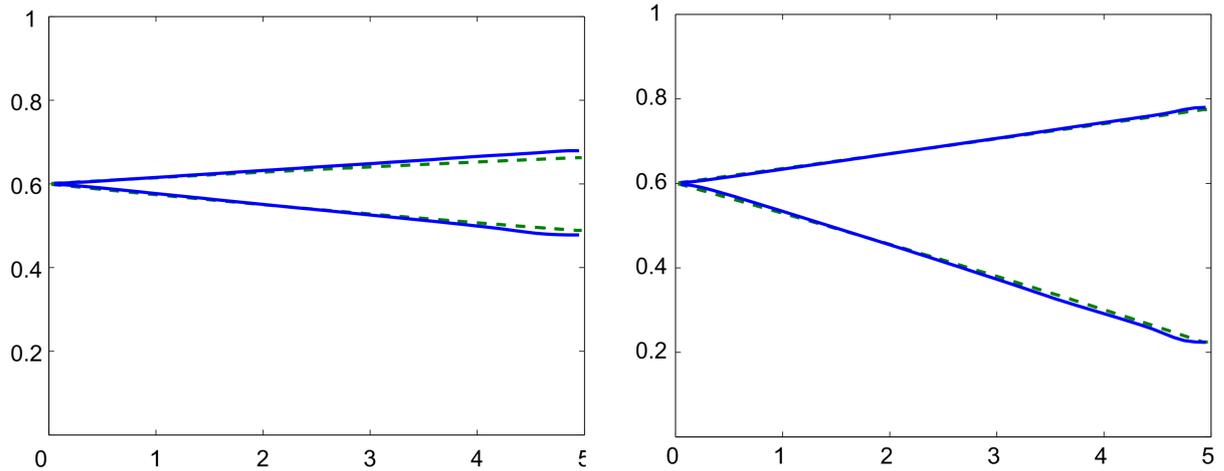


Рисунок 3.3 — Слой смешения, построенный в стационарной постановке (пунктир) и в результате эволюции течения по нестационарной модели (сплошная линия) для сверхкритического потока (слева) и докритического (справа).

альные слои имеют ширину $\xi_1 = 0.599$ и $\xi_3 = 0.399$, что соответствует формированию слоя смешения на уровне $y = 0.6$. Начальные скорости потоков для докритического случая: $u_1 = 1.6$, $u_3 = 3.6$; для сверхкритического $u_1 = 0.3$, $u_3 = 0.75$.

Для построения численного решения системы ОДУ (3.11) используется метод Эйлера. В качестве данных при $x = 0$ используется аналогичный набор параметров, как и при нестационарном расчете. Скорости u_2 и q при $x = 0$ для стационарных уравнений задаются формулой (3.13).

Проведем вычисления с использованием моделей (3.14) и (3.11). Сравнение результатов при $t = 20$ (для нестационарной модели) приведено на Рисунке 3.3. Видно, что с течением времени слой смешения, полученный с использованием модели (3.14), хорошо совпадает с решением стационарных уравнений (3.11). Это верно как в случае докритического, так и в случае сверхкритического потока. При $t > 20$ толщина слоя смешения в нестационарном расчете не изменяется.

Для анализа влияния вязкости на развитие области смешения рассматривается стационарная задача (3.12), которая в случае вырождения одного или обоих потенциальных слоев сводится к двух- и однослойному аналогу. Данный расчет также проводится с использованием простого метода Эйлера на более

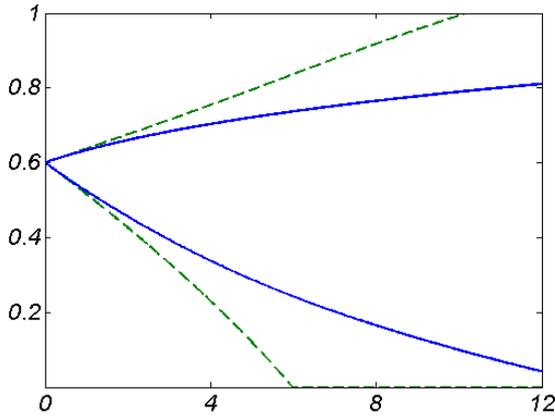


Рисунок 3.4 — Слой смешения для докритического потока с вязкостью (сплошная линия) и без вязкости (пунктир)

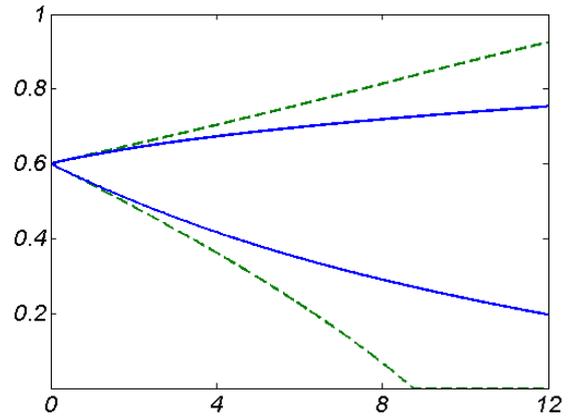


Рисунок 3.5 — Слой смешения для сверхкритического потока с вязкостью (сплошная линия) и без вязкости (пунктир)

мелкой сетке с разрешением $N = 5000$. Основные параметры течения такие же, как и в предыдущем расчете, однако здесь область вычислений $x \in [0, 12]$ выбирается таким образом, чтобы граница слоя смешения достигала стенок ячейки. Это приводит к вырождению потенциальных слоев и необходимости перехода к редуцированным моделям (3.9) и (3.10).

Результаты вычисления для докритического течения показаны на Рисунке 3.4, для сверхкритического — на Рисунке 3.5. Пунктирная линия показывает результат расчета для невязкой жидкости $\mu_1 = \mu_3 = 0$; сплошная линия получена при $\mu_1 = 0.5$ и $\mu_3 = 0.2$. Как в докритическом случае, так и в сверхкритическом случае, графики показывают, что вязкие слагаемые вносят значительный вклад в эволюцию слоя смешения и существенно замедляют этот процесс.

Проведем численный эксперимент, в котором сравним ширину слоя смешения, полученную построением стационарного решения (3.11), с шириной слоя смешения при моделировании с использованием полной системы (3.2). Для численного решения двумерной задачи воспользуемся обобщением схемы Насьяху–Тэдмора на многомерный случай [26]. Представленная в [26] схема пригодна для решения систем двумерных законов сохранения с нулевой правой частью, поэтому необходимо модифицировать схему для того, чтобы с ее помощью можно было проводить вычисления для систем уравнений с правой частью вида

$$u_t + (f(u))_x + (g(u))_y = R(u).$$

Модифицированная многомерная схема Насьяху–Тэдмора, учитывающая ненулевую правую часть $R(u)$, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
u_{j,k}^{n+1/2} &= u_{j,k}^n - \Lambda_1 f'_{j,k}/2 - \Lambda_2 g'_{j,k}/2 + R(u_{j,k}^n)\Delta t/2, \\
(\Lambda_1 &= \Delta t/\Delta x; \quad \Lambda_2 = \Delta t/\Delta y); \\
u_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{4} \left(u_{j,k}^n + u_{j+1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j+1,k+1}^n \right) + \\
&+ \frac{1}{16} \left(u_{j,k}^{\prime x} - u_{j+1,k}^{\prime x} \right) - \frac{\Lambda_1}{2} \left(f(u_{j+1,k}^{n+1/2}) - f(u_{j,k}^{n+1/2}) \right) + \\
&+ \frac{1}{16} \left(u_{j,k+1}^{\prime x} - u_{j+1,k+1}^{\prime x} \right) - \frac{\Lambda_1}{2} \left(f(u_{j+1,k+1}^{n+1/2}) - f(u_{j,k+1}^{n+1/2}) \right) + \\
&+ \frac{1}{16} \left(u_{j,k}^{\prime y} - u_{j,k+1}^{\prime y} \right) - \frac{\Lambda_2}{2} \left(g(u_{j,k}^{n+1/2}) - g(u_{j,k+1}^{n+1/2}) \right) + \\
&+ \frac{1}{16} \left(u_{j+1,k}^{\prime y} - u_{j+1,k+1}^{\prime y} \right) - \frac{\Lambda_2}{2} \left(g(u_{j+1,k}^{n+1/2}) - g(u_{j+1,k+1}^{n+1/2}) \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{4} \left(R(u_{j,k}^n) + R(u_{j+1,k}^n) + R(u_{j,k+1}^n) + R(u_{j+1,k+1}^n) \right),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

здесь Δx и Δy — шаги разбиения по пространственным переменным x и y соответственно; Δt — шаг по времени, выбираемый из условия Куранта; $u_{j,k}^n$ — значение функций в узле $(x,y) = (x_j,y_k)$ при $t = t^n$; величины $u_{j,k}^{\prime x}/\Delta x$ и $f'_{j,k}/\Delta x$ — аппроксимация производных первого порядка по x , а $u_{j,k}^{\prime y}/\Delta y$ и $g'_{j,k}/\Delta y$ — по y . Для вычисления производных по x и y используется более простая процедура “MinMod”. Чтобы началось формирование слоя смешения, на левой границе задается малое синусоидальное возмущение узловой точки раздела потоков с вязкостями μ_1 и μ_3 .

Область вычислений $x \in [0,5]$, ширина ячейки $H = 1$, параметры течения соответствуют двум предыдущим расчетам. В этом случае рассматриваются следующие скорости потока для докритического случая: $u_1 = 1.6$, $u_3 = 3.6$, и для сверхкритического $u_1 = 5.4$, $u_3 = 14.4$. На Рисунке 3.6 показаны результаты вычисления. Приведены линии уровня “концентрации” c (являющейся маркером жидкости с вязкостью μ_1 и μ_3) в области течения, рассчитанном с помощью модели (3.2) при помощи схемы (3.15). Видно, что при взаимодействии двух набегающих слева потоков возникает неустойчивость, которая развивается по мере эволюции течения. Белая линия — стационарное решение, построенное с использованием модели (3.11). Видно, что ширина слоя смешения, получен-

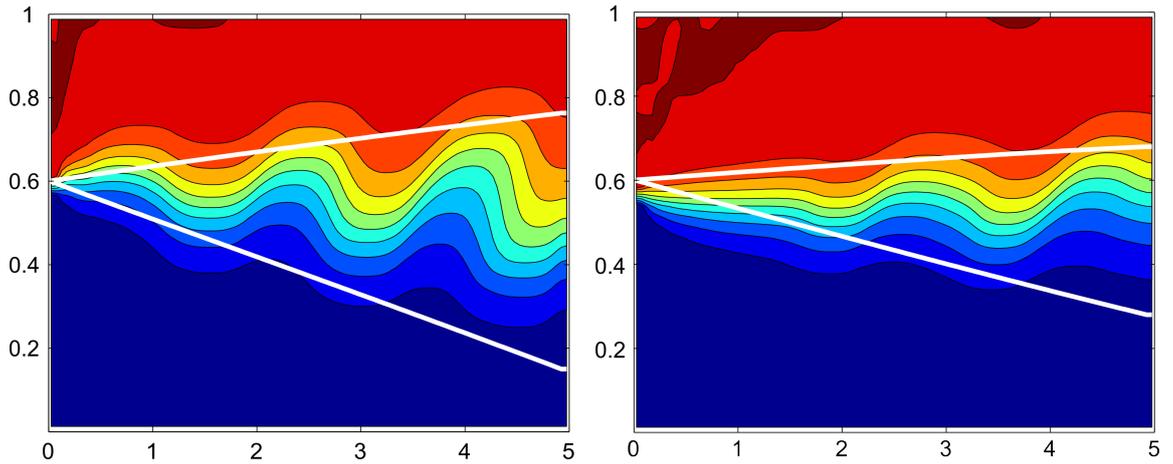


Рисунок 3.6 — Слой смешения, построенный с использованием одномерной стационарной модели (белая линия), наложенный на прямое двумерное моделирование уравнений (3.2) в докритическом (слева) и сверхкритическом (справа) случае.

ная при построении стационарного решения, достаточно хорошо согласовывается с шириной слоя смешения, полученной при двумерном моделировании как в докритическом, так и в сверхкритическом случае. Таким образом, построив стационарное решение одномерной задачи, аппроксимирующей систему (3.2), можно получить достаточно точную оценку ширины слоя смешения, возникающего при эволюции двухслойного течения.

3.5 Основные результаты главы 3

В главе рассмотрено течение вязкой слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу. Проведено исследование развития сдвиговой неустойчивости (слоя смешения) при совместном движении двух потоков с разными скоростями и вязкостями. Для этого рассмотрена специальная конфигурация течения, в рамках которой предполагается трехслойная структура — вихревой слой смешения находится между двумя потенциальными слоями. В предположении о данной структуре течения выведена одномерная модель трехслойного течения жидкости в ячейке Хеле–Шоу. Были исследованы характеристические свойства си-

стемы, выведена стационарная одномерная модель и построено решение стационарной задачи. Рассмотрены редукции модели в случае вырождения слоев и асимптотика решения в окрестности формирования слоя смешения.

С помощью TVD схемы было проведено численное моделирование по нестационарной одномерной модели. Полученный результат (при стационарных граничных условиях на входе в канал) совпадает с построенным стационарным решением. Проведено численное исследование влияния вязкости на эволюцию слоя смешения. Показано, что вязкость существенно замедляет процесс развития слоя смешения. Проведен численный эксперимент по сравнению стационарного решения уравнений одномерной модели с полным двумерным моделированием течения. Установлено, что одномерная модель позволяет с высокой точностью определить границы слоя смешения.

Заключение

В работе выполнен теоретический анализ ряда длинноволновых гидродинамических моделей, описываемых квазилинейными системами уравнений с операторными коэффициентами. Построены и физически интерпретированы классы точных решений уравнений горизонтально-сдвигового течения жидкости в открытом канале. Изучены слабые разрывы решений интегродифференциальных уравнений пленочного течения, и показана возможность нелинейного опрокидывания волн. Рассмотрены сдвиговые движения слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу. С использованием трехслойной схемы течения построена и исследована модель эволюции слоя смешения. Выполнено численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений в сдвиговых потоках жидкости.

1. Для интегродифференциальных уравнений движения, описывающих течение тонкого слоя идеальной жидкости в узком открытом канале, проведено построение и физическая интерпретация классов решения. А именно, построен класс решений, характеризующийся линейной зависимостью между интегральными инвариантами Римана. В этом случае решение определяется системой двух квазилинейных уравнений с двумя параметрами. Получено и физически интерпретировано решение этой системы в виде автомоделльной простой волны. В классе бегущих волн построено решение интегродифференциальной системы уравнений, обладающее функциональным произволом и непрерывно примыкающее к заданному сдвиговому потоку. Полученные решения описывают течения с критическим слоем, в котором скорость жидких частиц в системе координат, движущейся вместе с волной, меняет знак. В терминах гиперболичности уравнений с операторными коэффициентами сформулированы критерии устойчивости течений, аналогичные критериям Релэ и Фьортофта. Приведены иллюстративные примеры устойчивых и неустойчивых течений. Предложена консервативная формулировка интегродифференциальных уравнений движения, и выполнено их осреднение по ширине канала. В результате получена “многослойная” система дифференциальных законов сохранения, аппроксимирую-

- щая исходную модель. В частном случае, соответствующем однослойной аппроксимации, выведена гиперболическая система уравнений газодинамического типа. С использованием TVD схемы Насьяху–Тэдмора повышенного порядка точности выполнено численное моделирование распространения волновых возмущений в сдвиговом потоке.
2. На основе обобщения понятий характеристик и гиперболичности на класс систем с операторными коэффициентами проведен теоретический анализ уравнений, описывающих движение тонкого слоя вязкой жидкости на наклонной плоскости в поле сил тяжести. С помощью данного подхода исследованы слабые разрывы решений и обоснована возможность нелинейного опрокидывания волн. При этом показано, что слабые разрывы решений уравнений движения сосредоточены на обобщенных характеристиках. Показано, что наличие в уравнениях членов с производными второго порядка по поперечной переменной y (или λ) не улучшает свойств гладкости решения по продольной переменной x . Предложена неоднородная система дифференциальных законов сохранения, являющаяся “многослойной” аппроксимацией исходной интегродифференциальной модели. На основе аппроксимирующей системы и бездисперсионного аналога уравнений Шкадова выполнены тестовые численные расчеты, показывающие значительное различие результатов расчета по указанным моделям в случае формирования сильного разрыва. Показано, что влияние угла наклона ровного дна вносит существенный вклад в эволюцию течения. Данные результаты обобщены на более сложный класс течений со стратификацией по вязкости.
 3. Изучено течение вязкой слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу. Проведено исследование слоя смешения, возникающего при совместном движении двух потоков жидкости с разными скоростями и вязкостями ввиду развития сдвиговой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В предположении о трехслойной структуре течения выведена одномерная гидродинамическая модель движения жидкости в ячейке Хеле–Шоу, описываемая замкнутой системой из семи законов сохранения с двумя эмпирическими постоянными. Получено стационарное решение одномерной задачи, и в рамках этого решения проведено численное исследование влияния вязкости на эво-

люцию слоя смешения. Показано, что вязкость существенно замедляет процесс развития слоя смешения. Проведен численный эксперимент по сравнению решения одномерной слоистой модели с моделированием течения на основе двумерных уравнений движения. В результате моделирования показано, что предложенные одномерные уравнения позволяют с высокой точностью определить границы области формирования крупных вихревых структур (слоя смешения). Данный подход позволяет существенно сэкономить вычислительные ресурсы в задачах описания вихревых структур в пространственно-неоднородных потоках жидкости.

Список литературы

1. *Stoker, J. J.* Water Waves: The Mathematical Theory with Applications / J. J. Stoker. — New York: John Wiley & Sons, 1957. — 567 p.
2. *Burns, J. C.* Long waves in running water / J. C. Burns // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1953. — Vol. 49, no. 4. — P. 695–706.
3. *Benney, D. J.* Some properties of long nonlinear waves / D. J. Benney // *Stud. Appl. Math.* — 1973. — Vol. 52. — P. 45–50.
4. *Овсянников, Л. В.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов. — Новосибирск: Наука, 1985. — 318 с.
5. *Зейтунян, Р. Х.* Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны / Р. Х. Зейтунян // *УФН.* — 1995. — Т. 165, № 12. — С. 1403–1456.
6. *Gibbons, J.* Reduction of the Benney equations / J. Gibbons, S. P. Tsarev // *Phys. Lett. A.* — 1996. — Vol. 211. — P. 19–24.
7. *Gibbons, J.* Conformal maps and of the Benney equations / J. Gibbons, S. P. Tsarev // *Phys. Lett. A.* — 1999. — Vol. 258. — P. 263–271.
8. *Павлов, М. В.* Преобразования интегрируемых гидродинамических цепочек и их гидродинамические редукции / М. В. Павлов // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2006. — Т. 12, № 7. — С. 167–175.
9. *Freeman, T. C.* Simple waves on on shear flow: similarity solutions / T. C. Freeman // *J. Fluid Mech.* — 1972. — Vol. 56. — P. 257–263.
10. *Sachdev, P. L.* Exact self-similar time-dependent free surface flow under gravity / P. L. Sachdev // *J. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 96. — P. 797–802.
11. *Sachdev, P. L.* Exact free surface flows for shallow water equations. I. Incompressible case / P. L. Sachdev, B. M. Vaganan // *Stud. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 93. — P. 251–274.

12. *Varley, E.* Long eddies in sheared flows / E. Varley, P. A. Blythe // *Stud. Appl. Math.* — 1983. — Vol. 68. — P. 103–187.
13. *Тешуков, В. М.* Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей / В. М. Тешуков // *ПМТФ.* — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 48–57.
14. *Чесноков, А. А.* Точные решения уравнений вихревой мелкой воды / А. А. Чесноков // *ПМТФ.* — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 44–55.
15. *Тешуков, В. М.* Докритические и сверхкритические сдвиговые течения над неровным дном / В. М. Тешуков, А. Будлал // *ПМТФ.* — 2006. — Т. 47, № 4. — С. 26–38.
16. *Miura, R. M.* Conservation laws for the fully nonlinear long wave equation / R. M. Miura // *Stud. Appl. Math.* — 1974. — Vol. 53. — P. 45–56.
17. *Захаров, В. Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи / В. Е. Захаров // *Функцион. анализ и его прил.* — 1980. — Т. 14, № 2. — С. 15–24.
18. *Купершмит, Б. А.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения / Б. А. Купершмит, Ю. И. Манин // *Функц. анализ и его прил.* — 1977. — Т. 11, № 3. — С. 31–42.
19. *Ляпидевский, В. Ю.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. — Новосибирск: Из-во СО РАН, 2000. — 420 с.
20. *Липатов, И. И.* Нелинейные возмущения и слабые разрывы в сверхзвуковом пограничном слое / И. И. Липатов, В. М. Тешуков // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2004. — № 1. — С. 110–125.
21. *Teshukov, V.* Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2-D rotational flows / V. Teshukov, G. Russo, A. Chesnokov // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2004. — Vol. 14. — P. 1451–1479.
22. *Чесноков, А. А.* Волновые движения идеальной жидкости в узком открытом канале / А. А. Чесноков, В. Ю. Ляпидевский // *ПМТФ.* — 2009. — Т. 50, № 2. — С. 61–71.

23. *Ляпидевский, В. Ю.* Докритические и сверхкритические горизонтально-сдвиговые течения в открытом канале переменного сечения / В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2009. — № 6. — С. 123–138.
24. *Тешуков, В. М.* О гиперболичности уравнений длинных волн / В. М. Тешуков // *Докл. АН СССР.* — 1985. — Т. 284, № 3. — С. 555–559.
25. *Nessyahu, H.* Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws / H. Nessyahu, E. Tadmor // *J. Comp. Phys.* — 1990. — Vol. 87, no. 2. — P. 408–463.
26. *Jiang, G. S.* Nonoscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws / G. S. Jiang, E. Tadmor // *SIAM J. Sci. Comput.* — 1998. — Vol. 19, no. 6. — P. 1892–1917.
27. *Russo, G.* Central schemes for conservation laws with application to shallow water equations / G. Russo // *Trends and applications of mathematics to mechanics: STAMM 2002* / Ed. by S. Rionero, G. Romano. — Italia SRL: Springer-Verlag, 2005. — P. 225–246.
28. *Куликовский, А. Г.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 608 с.
29. *Тешуков, В. М.* Длинные волны в завихренной баротропной жидкости / В. М. Тешуков // *ПМТФ.* — 1994. — Т. 35, № 6. — С. 17–26.
30. *Тешуков, В. М.* Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости / В. М. Тешуков // *ПМТФ.* — 1996. — Т. 37, № 5. — С. 73–81.
31. *Елемесова, Б. Н.* Простые волны в слое баротропной завихренной жидкости / Б. Н. Елемесова // *ПМТФ.* — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 56–64.
32. *Тешуков, В. М.* Нестационарное взаимодействие равномерно завихренных потоков / В. М. Тешуков // *ПМТФ.* — 1998. — Т. 39, № 5. — С. 55–66.
33. *Чесноков, А. А.* Вихревые движения жидкости в узком канале / А. А. Чесноков // *ПМТФ.* — 1998. — Т. 39, № 4. — С. 38–47.

34. *Чесноков, А. А.* Длинные волны в двухслойной вихревой жидкости под крышкой / А. А. Чесноков // *ПМТФ*. — 1999. — Т. 40, № 3. — С. 68–80.
35. *Ковтуненко, П. В.* Специальные классы решений уравнений горизонтально-сдвигового движения жидкости / П. В. Ковтуненко, А. А. Чесноков // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2011. — Т. 14, № 3. — С. 50–57.
36. *Князева, Е. Ю.* Критерии устойчивости сдвигового течения жидкости и гиперболичность уравнений теории длинных волн / Е. Ю. Князева, А. А. Чесноков // *ПМТФ*. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 30–37.
37. *Chesnokov, A. A.* Stability of shear shallow water flows with free surface [Electronic resource] / A. A. Chesnokov, G. A. El, S. L. Gavriluk, M. V. Pavlov. — 2017. — Access mode: <https://arxiv.org/pdf/1610.04331v1.pdf> (Accessed 12.01.2017).
38. *Власов, А. А.* Теория многих частиц / А. А. Власов. — Москва: Техтеоргиз, 1950. — 348 с.
39. *Тешуков, В. М.* Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости / В. М. Тешуков // *ПМТФ*. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 86–100.
40. *Чесноков, А. А.* Характеристические свойства и точные решения кинетического уравнения пузырьковой жидкости / А. А. Чесноков // *ПМТФ*. — 2003. — Т. 44, № 3. — С. 41–50.
41. *Хе, А. К.* Распространение нелинейных возмущений в квазинейтральной бесстолкновительной плазме / А. К. Хе, А. А. Чесноков // *ПМТФ*. — 2011. — Т. 52, № 5. — С. 3–16.
42. *Тешуков, В. М.* Пространственные простые волны на сдвиговом течении / В. М. Тешуков // *ПМТФ*. — 2002. — Т. 43, № 5. — С. 28–40.
43. *Тешуков, В. М.* Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке / В. М. Тешуков // *ПМТФ*. — 2004. — Т. 45, № 2. — С. 28–39.
44. *Тешуков, В. М.* Модель сильного разрыва для уравнений пространственных длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении со свобод-

- ной границей / В. М. Тешуков, А. К. Хе // *ПМТФ*. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 206–213.
45. Хе, А. К. Гиперболичность уравнений стационарных сдвиговых течений газа в тонком слое / А. К. Хе // *ПМТФ*. — 2004. — Т. 45, № 2. — С. 40–46.
46. Хе, А. К. Сильные разрывы в стационарных пространственных длинноволновых течениях идеальной несжимаемой жидкости / А. К. Хе // *ПМТФ*. — 2009. — Т. 50, № 2. — С. 37–45.
47. Тешуков, В. М. Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей / В. М. Тешуков // *ПМТФ*. — 2007. — Т. 48, № 3. — С. 8–15.
48. Ляпидевский, В. Ю. Слой смешения под свободной поверхностью / В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков // *ПМТФ*. — 2014. — Т. 55, № 2. — С. 127–140.
49. Richard, G. L. A new model of roll waves: comparison with Brock's experiments / G. L. Richard, S. L. Gavriluk // *J. Fluid Mech.* — 2012. — Vol. 698. — P. 374–405.
50. Richard, G. L. The classical hydraulic jump in a model of shear shallow water flows / G. L. Richard, S. L. Gavriluk // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 725. — P. 492–521.
51. Gavriluk, S. L. Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves / S. L. Gavriluk, V. Yu. Lipidevskii, A. A. Chesnokov // *J. Fluid Mech.* — 2016. — Vol. 808. — P. 441–468.
52. Капица, П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости / П. Л. Капица // *Ж. эксперим. и теор. физ.* — 1948. — Т. 18. — С. 3–18.
53. Алексеенко, С. В. Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. — Новосибирск: Наука, 1992. — 256 с.
54. Chang, H. C. Complex Wave Dynamics on Thin Films / H. C. Chang, E. A. Demekhin. — Amsterdam: Elsevier, 2002. — 402 p.

55. Шкадов, В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести / В. Я. Шкадов // *Изв. РАН. МЖГ.* — 1967. — № 1. — С. 43–51.
56. Watanabe, S. Integral methods for shallow free-surface flows with separation / S. Watanabe, V. Putkaradze, T. Borh // *J. Fluid Mech.* — 2003. — Vol. 480. — P. 233–265.
57. Samanta, A. A falling film down a slippery inclined plane / A. Samanta, C. Ruyer-Quil, B. Goyeau // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 684. — P. 353–383.
58. Bowles, R. I. The standing hydraulic jump: theory, computations and comparisons with experiments / R. I. Bowles, F. T. Smith // *J. Fluid Mech.* — 1992. — Vol. 242. — P. 145–168.
59. Higuera, F. J. The hydraulic jump in a viscous laminar flow / F. J. Higuera // *J. Fluid Mech.* — 1994. — Vol. 274. — P. 69–92.
60. Stewartson, K. Self-induced separation / K. Stewartson, P. G. Williams // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1969. — Vol. 312, no. 1509. — P. 181–206.
61. Нейланд, В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке / В. Я. Нейланд // *Изв. РАН. МЖГ.* — 1969. — № 4. — С. 53–57.
62. Овсянников, В. В. Слабые разрывы решений уравнений длинных волн / В. В. Овсянников // *Акустика неоднородных сред.* — № 124. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2007. — С. 157–161.
63. Govindarajan, R. Instabilities in viscosity-stratified flow / R. Govindarajan, K. C. Sahu // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2014. — Vol. 46. — P. 331–353.
64. Lagree, P. Y. The granular column collapse as a continuum: validity of a two-dimensional Navier-Stokes model with a $\mu(I)$ -rheology / P. Y. Lagree, L. Staron, S. Popinet // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 686. — P. 378–408.
65. Bagnold, R. G. Experiments of gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear / R. G. Bagnold // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1954. — Vol. 255, no. 1160. — P. 49–63.

66. *Jop, P.* A constitutive law for dense granular flows / P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen // *Nature*. — 2006. — Vol. 441. — P. 727–730.
67. *Pouliquen, O.* A non-local rheology for dense granular flows / O. Pouliquen, Y. Forterre // *Phil. Trans. R. Soc. A*. — 2009. — Vol. 367. — P. 5091–5107.
68. *Saffman, P. G.* The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid / P. G. Saffman, G. Taylor // *Proc. R. Soc. Lond. A*. — 1958. — Vol. 245, no. 1242. — P. 312–329.
69. *Homsy, G. M.* Viscous fingering in porous media / G. M. Homsy // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1987. — no. 19. — P. 271–311.
70. *Tan, C. T.* Stability of miscible displacements in porous media: rectilinear flow / C. T. Tan, G. M. Homsy // *Phys. Fluids*. — 1986. — Vol. 29. — P. 3549–3556.
71. *Azaiez, J.* Stability of miscible displacements of shear thinning fluids in a Hele-Shaw cell / J. Azaiez, B. Singh // *Phys. Fluids*. — 2002. — Vol. 14. — P. 1559–1571.
72. *Gondret, P.* Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell / P. Gondret, M. Rabaud // *Phys. Fluids*. — 1997. — Vol. 9. — P. 3267–3274.
73. *Manickam, O.* Fingering instabilities in a vertical displacement flows in porous media / O. Manickam, G. M. Homsy // *J. Fluid Mech.* — 1991. — no. 288. — P. 75–102.
74. *Smirnov, N. N.* Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media / N. N. Smirnov, V. F. Nikitin A. Maximenko M. Thiercelin J. C. Legros // *Phys. Fluids*. — 2005. — no. 17. — 084102.
75. *Tanveer, S.* Surprises in viscous fingering / S. Tanveer // *J. Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 409. — P. 273–308.
76. *Chesnokov, A.* Viscosity-stratified flow in a Hele-Shaw cell / A. Chesnokov, V. Liapidevskii // *Int. J. Non-Linear Mech.* — 2017. — Vol. 89. — P. 168–176.
77. *Jirka, G. GH.* Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows / G. GH. Jirka // *J. Hydraul. Res.* — 2001. — Vol. 39, no. 3. — P. 567–573.

78. *Rhoads, B. L.* Lateral momentum flux and the spatial evolution of flow within a confluence mixing interface / B. L. Rhoads, A. N. Sukhodolov // *Water Resour. Res.* — 2008. — Vol. 44, no. 8. — W08440.
79. *Chesnokov, A. A.* Weak Discontinuities in Solutions of Long-Wave Equations for Viscous Flow / A. A. Chesnokov, P. V. Kovtunencko // *Stud. Appl. Math.* — 2014. — Vol. 132. — P. 50–60.
80. *Ковтуненко, П. В.* Распространение возмущений в тонком слое жидкости, стратифицированной по вязкости / П. В. Ковтуненко // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика.* — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 38–50.
81. *Kovtunencko, P. V.* One-dimensional mixing layer model for a shear Hele-Shaw flow / P. V. Kovtunencko // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2016. — Vol. 722. — 012020.
82. *Chesnokov, A. A.* Stability analysis of shear flows in a Hele-Shaw cell / A. A. Chesnokov, I. V. Stepanova // *Appl. Math. and Comput.* — 2015. — Vol. 265. — P. 320–328.
83. *Dias, E. O.* Influence of inertia on viscous fingering patterns: rectangular and radial flows / E. O. Dias, J. A. Miranda // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. 83. — 066312.
84. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — Москва: Наука, 1977. — 640 с.
85. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — Москва: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
86. *Дразин, Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. — Москва: Физматлит, 2005. — 288 с.
87. *Дикий, Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы / Л. А. Дикий. — Ленинград: Гидрометеиздат, 1976. — 108 с.
88. *Тешуков, В. М.* Характеристические свойства системы уравнений сдвигового течения с немонотонным профилем скорости / В. М. Тешуков, М. М. Стерхова // *ПМТФ.* — 1995. — Т. 36, № 3. — С. 53–59.

89. *Harten, A.* Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes III / A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy // *J. Comput. Phys.* — 1987. — Vol. 71. — P. 231–303.
90. *Остапенко, В. В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды (курс лекций) / В. В. Остапенко. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2004. — 180 с.
91. *Овсянников, Л. В.* Лекции по основам газовой динамики / Л. В. Овсянников. — Москва-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2003. — 336 с.
92. *Медова, Ю. А.* Сдвиговые течения Хеле–Шоу слабосжимаемой жидкости / Ю. А. Медова, А. А. Чесноков // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2014. — Т. 17, № 4. — С. 67–78.