На правах рукописи

Ковтуненко Павел Викторович

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН).

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук **Чесноков Александр Александрович**.

Официальные оппоненты:

Чугайнова Анна Павловна, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела механики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН),

Яковенко Сергей Николаевич, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук (ИТПМ СО РАН).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”.

Защита состоится 5 сентября 2017 г. в 16:30 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук

Рудой
Евгений Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Раздел гидродинамики, связанный с изучением распространения нелинейных волн в сдвиговых течениях жидкости, является важной и актуальной областью исследований, что обусловлено большим количеством приложений теории длинных волн в метеорологии и геофизике при моделировании крупномасштабных движений в атмосфере, океане и земной коре. С помощью длинноволновых моделей описываются движения жидкости в открытых руслах, гидродинамические эффекты в задачах транспортировки углеводородов, определяются силы воздействия волновых возмущений на плавающие тела в задачах гидроаэроупругости. При этом учитываются эффекты нелинейности и пространственной неоднородности потока. Кроме того длинноволновые возмущения затухают медленнее коротковолновых и потому определяют асимптотику решений при больших временах.

Уравнения теории длинных волн являются интегродифференциальными, что существенно усложняет их анализ и приводит к необходимости применения отличных от классических методов. Разработка новых элементов теории уравнений с операторными коэффициентами является актуальной тематикой, развитие которой необходимо для выяснения корректности постановок начально-краевых задач для интегродифференциальных моделей, построения классов точных решений и конструирования численных алгоритмов.

Цели и задачи исследования

Цель работы заключается в развитии новых элементов теории гиперболических систем уравнений с операторными коэффициентами и в построении многослойных моделей мелкой воды с массообменом на границе слоев. При этом можно выделить следующие задачи:

- исследование характеристических свойств интегродифференциальных моделей пространственно-неоднородных движений идеальной жидкости и пленочных течений, построение классов точных решений, анализ распространения слабых и сильных разрывов, вывод критериев устойчивости;

- построение систем осредненных дифференциальных уравнений и численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений;

- оценки эффективности “многослойных” аппроксимирующих моделей и анализ влияния параметров течения на его развитие;

- исследование развития слоя смешения, образующегося на границе раздела двух потоков жидкости с различными вязкостями и скоростями при их совместном движении в ячейке Хеле–Шоу;

- построение одномерной математической модели для оценки границ двумерной области формирования крупных вихревых структур.

Научная новизна

Построены и физически интерпретированы новые классы точных решений нелинейной интегродифференциальной системы уравнений, описывающей горизонтально-сдвиговые движения идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале переменного сечения в приближении теории мелкой воды. Изучаемая модель предложена в 2009 году, ее аналитическое исследование преимущественно основывается на методах, разработанных чл.-корр. РАН В.М. Тешуковым. Сформулированы критерии устойчивости течений, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта. Выведены осредненные дифференциальные уравнения движения, позволяющие численно моделировать распространение непрерывных и разрывных возмущений в сдвиговом течении.

Методы теоретического исследования уравнений с операторными коэффициентами применены к моделям движения тонких слоев вязкой жидкости (пленочные течения). Изучены решения со слабым разрывом нелинейных уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости на наклонной плоскости. Показано, что слабые разрывы находятся на характеристических поверхностях, что существует возможность неограниченного роста амплитуды разрыва и нелинейного опрокидывания волн. Предложена консервативная формулировка модели в виде законов сохранения и выполнено численное моделирование пленочных течений с использованием уравнений многослойной аппроксимации. Сравнение результатов вычислений с бездисперсионным аналогом уравнений Шкадова показало, что уравнения многослойной аппроксимации позволяют получать более точные значения параметров течения в области за сильным разрывом. В частности, это связано с нарушением условия параболичности профиля скорости в процессе эволюции течения. Рассматриваемая модель обобщена на класс течений со стратификацией по вязкости.

Еще одно направление исследований связано с моделированием движения тонких слоев жидкости между параллельными стенками (течения Хеле–Шоу). Основное внимание уделяется изучению сдвиговой неустойчивости, возникающей на границе раздела слоев, движущихся с различными скоростями и имеющих различные вязкости. На основе развитого В.Ю. Ляпидевским подхода выведена одномерная трехслойная система уравнений с массообменом, описывающая формирование и развитие слоя смешения. Установлено, что предложенная модель корректно описывает границы области формирования крупных вихревых структур, что позволяет без затратных двумерных нестационарных расчетов определить границы области смешения.

Теоретическая и практическая значимость

Развиты новые элементы теории гиперболических систем уравнений с операторными коэффициентами. Эти подходы использованы для теоретического анализа пространственно-неоднородных течений идеальной жидкости и пленочных течений. Исследованы классы точных решений, характеристические свойства, слабые и сильные разрывы, сформулированы критерии устойчивости течений для ряда интегродифференциальных моделей теории длинных волн. Построены системы осредненных дифференциальных уравнений, аппроксимирующие исходные интегродифференциальные модели, на основе которых выполнено численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений в сдвиговых течениях жидкости. Показана эффективность "многослойной" аппроксимации и центральных схем для построения численных решений уравнений теории длинных волн. Теория многослойной мелкой воды с массообменном применена для описания слоев смешения в течениях Хеле–Шоу, представляющих практический интерес в связи с задачами интенсификации добычи углеводородов. Сравнение с результатами прямого численного моделирования показало эффективность предложенных моделей для описания границ области формирования крупных вихревых структур.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач в работе использовались:

- методы механики сплошных сред, теория вихревой мелкой воды;

- теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, методы решения сингулярных интегральных уравнений, теория обобщенных функций, методы осреднения;

- методы численного решения гиперболических уравнений, реализованные в среде MatLab, символьные вычисления, реализованные в Mathematica.

Положения, выносимые на защиту

В главе 1 для интегродифференциальной модели, описывающей пространственно-неоднородное течение идеальной жидкости в открытом канале:

- построен класс решений, который характеризуется линейной зависимостью между интегральными инвариантами Римана и представим аналитически в классе простых волн;

- построено решение с критическим слоем в классе бегущих волн, непрерывно примыкающих к заданному сдвиговому потоку, найдены решения с функциональным произволом;

- сформулированы критерии устойчивости течений;

- сформулированы осредненные модели движения в рамках газодинамической аналогии и “многослойной” аппроксимации, проведены расчеты.

В главе 2 для уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости в поле силы тяжести:

- показана возможность построения решений со слабыми разрывами, сосредоточенными на обобщенных характеристиках;

- получено уравнение для амплитуды слабого разрыва и установлена возможность нелинейного опрокидывания волн;

- предложена неоднородная гиперболическая система дифференциальных уравнений, являющаяся “многослойной” аппроксимацией исходной модели, численно показано значительное различие результатов расчета в сравнении с аналогом модели Шкадова при формировании сильного разрыва;

- проведено обобщение на течения со стратификацией по вязкости.

В главе 3 для модели течения вязкой жидкости в ячейке Хеле–Шоу:

- исследовано развитие слоя смешения, образующегося на границе раздела двух потоков жидкости с различными вязкостями и скоростями;

- выведена одномерная осредненная модель течения, проведены численные расчеты, показывающие, что предложенная модель позволяет достаточно точно определить область формирования крупных вихревых структур;

- показано замедление развития слоя смешения с ростом вязкости.

Степень достоверности и апробация результатов

Аналитические результаты диссертации в значительной мере опираются на предложенное В.М. Тешуковым обобщение теории характеристик и понятия гиперболичности на класс систем с операторными коэффициентами. Метод активно используется для теоретического анализа волновых интегродифференциальных моделей. В работе использовались апробированные конечно-разностные схемы для проведения численных экспериментов. Корректность результатов численного моделирования подтверждается сравнением с аналитическими решениями и верификацией алгоритмов на тестовых задачах. Основные результаты диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах [1–5], были представлены на внутренних конкурсах и научных конференциях:

- International Conference on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI 2010), Сан Андрес, Колумбия, 28.11–3.12.2010;

- Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения", посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, Новосибирск, 2–4.03.2011;

- Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, Новосибирск, 7–11.09.2015;

- XVI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (YM 2015), Красноярск, 28–30.10.2015;

- Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения", посвященная 70–летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, Новосибирск, 29.02–2.03.2016;

- Russian–French workshop "Mathematical Hydrodynamics", Новосибирск, 22.08–27.08.2016;

- VIII Всероссийская конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова, и Школа–конференция молодых исследователей, пос. Абрау, 5.09–10.09.2016;

- 7-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сплошных средах", г. Москва, 30.11–02.12.2016.

Диссертационная работа прошла апробацию на совместном семинаре ЛДУ ИГиЛ СО РАН и лаб. НПГС НГУ 21.02.2017, на научном семинаре "Математическое моделирование в механике" ИВМ СО РАН 3.03.2017, на научном семинаре лаб. аэрофизических исследований дозвуковых течений ИТПМ СО РАН 6.03.2017, на научном семинаре лаб. дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа ИМ СО РАН 9.03.2017, на научном семинаре лаб. вычислительных проблем задач математической физики ИМ СО РАН

10.03.2017 и на семинаре отдела механики МИАН под руководством академиков А.Г. Куликовского и Д.В. Трещева 3.04.2017.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, проводится анализ степени разработанности данной области науки и обзор научной литературы. Формулируются цели и задачи работы, описывается ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Приводятся методы исследования и основные положения, выносимые на защиту. Обосновывается достоверность результатов и описывается личный вклад автора. В конце кратко излагается содержание диссертационной работы.

В **первой главе** диссертационной работы изучается интегродифференциальная модель, описывающая пространственно-неоднородное движение идеальной жидкости в открытом канале. Строятся специальные классы решений и формулируются условия устойчивости течения. Выводятся осредненные модели и на их основе проводятся численные эксперименты.

В параграфе 1.1 формулируется система уравнений, описывающая в приближении теории длинных волн горизонтально-сдвиговое движение идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале переменного сечения, предложенная В.Ю. Ляпидевским и А.А. Чесноковым в 2009 году:

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad h_y = 0, \\ &h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0, \quad uY_{ix} - v|_{y=Y_i} = 0 \quad (i = 1{,}2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь(x,y,z) — декартовы координаты, t — время, $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ — горизонтальные компоненты вектора скорости, $h(t,x)$ — глубина слоя жидкости, g — ускорение свободного падения, уравнениями $y = Y_1(x)$, $y = Y_2(x)$ и $z = 0$ задаются непроницаемые боковые стенки и дно канала. Следствием (1) является сохранение потенциальной завихренности $\Omega = u_y/h$ вдоль траекторий

$$\Omega_t + u\Omega_x + v\Omega_y = 0.$$

Для построения классов точных решений модели (1) используется кинетическая формулировка уравнений движения, в которой за независимые переменные берётся тройка t, x, u:

$$W_t + uW_x - gh_x W_u = 0, \quad h = \frac{1}{Y}\int\limits_{u_1}^{u_2} W\,du, \tag{2}$$

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + gh_x = 0, \quad u_{2t} + u_2 u_{2x} + gh_x = 0. \tag{3}$$

Здесь $W = \Omega^{-1}$ — искомая функция переменных t, x и u; $Y = \mathrm{const}$ — заданная постоянная ширина канала; $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — скорости жидкости вдоль оси Ox на боковых стенках канала $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$ соответственно.

Используя аналогию с уравнениями Бенни, в параграфе 1.2 для системы (2), (3) определяются интегральные инварианты Римана W, R, r_i, где

$$R = u - \frac{g}{Y}\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{W(t,x,u')\,du'}{u' - u}, \quad r_i = c_i - \frac{g}{Y}\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{W\,du}{u - c_i} \quad (i = 1,2),$$

здесь $c = c_i(t,x)$ корень характеристического уравнения

$$\chi(c) = 1 - \frac{g}{Y}\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{W\,du}{(u-c)^2} = 0.$$

В предположении о линейной зависимости инвариантов $R = aW + b$, выписывается сингулярное интегральное уравнение для нахождения искомой функции $W(t,x,u)$. Разрешив это уравнение, можно выразить глубину слоя жидкости $h(t,x)$ через функции u_1 и u_2. Таким образом, исходная система (2), (3) сводится к системе из двух дифференциальных уравнений на $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ с двумя параметрами. В полученном специальном классе точных решений с линейно зависимыми инвариантами Римана в параграфе 1.3 построено решение в виде простой волны, выражающееся в элементарных функциях.

В параграфе 1.4 строится решение в классе бегущих волн $W = W(\zeta,u)$, $u_i = u_i(\zeta)$, $\zeta = x - Dt$, непрерывно примыкающее к заданному сдвиговому потоку. В этом случае построение сводится к интегрированию уравнений

$$\begin{aligned} &(u - D)W_\zeta - gh_\zeta W_u = 0, \quad h = \frac{1}{Y}\int\limits_{u_1}^{u_2} W\,du \\ &(u_i - D)u_i'(\zeta) + gh'(\zeta) = 0 \qquad (i = 1,2) \end{aligned} \tag{4}$$

Решение (4) строится методом характеристик. Однако существует область, в которую не приходит ни одна из характеристик, выходящих с линии, соответствующей заданному состоянию. В этой области для построения решения используется второе уравнение (4), связывающее h и W, что приводит к интегральному уравнению Абеля для $W(h,u)$. В рамках данного класса решений, обладающего функциональным произволом, в параграфе 1.5 построен пример решения, выражающегося в элементарных функциях (Рисунок 1 и 2).

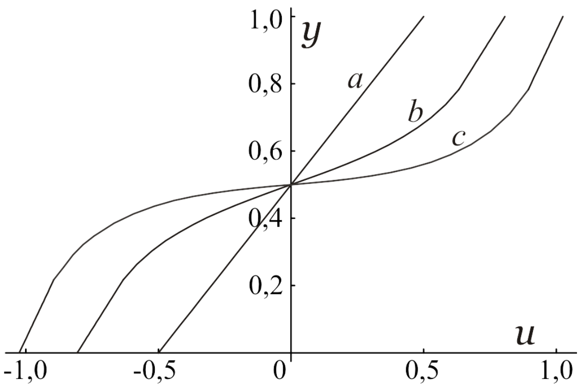

Рис. 1 — Профиль скорости $u(x,y)$ при фиксированных x

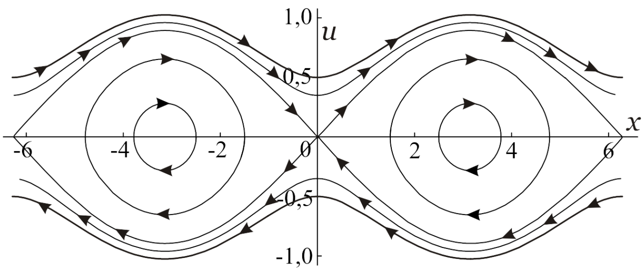

Рис. 2 — Траектории движения частиц $\dot{x} = u, \dot{u} = -gh_x$ в фазовой плоскости (x,u)

В параграфе 1.6 в терминах гиперболичности систем уравнений с операторными коэффициентами формулируются критерии устойчивости течений, аналогичные критериям Релэя и Фьортофта. В частности показано, что любое течение с монотонным выпуклым профилем скорости устойчиво, а при наличии точки перегиба устойчивость течения зависит от знака выражения $(U - U_c)U''$, где $U = u(y)$ — профиль скорости, $U_c = U(y_c)$, а y_c – точка перегиба. Если $(U - U_c)U'' \geq 0$, то течение устойчиво, а если $(U - U_c)U'' \leq 0$, то течение может быть неустойчивым. Для каждого критерия строятся иллюстративные примеры.

В параграфе 1.7 изучаются осредненные модели. В результате интегрирования исходной модели (1) и её следствия по ширине канала с использованием средней по сечению скорости $u_c = \frac{1}{Y}\int\limits_{Y_1}^{Y_2} u\,dy$ выводится гиперболическая система одномерных дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующая исходную модель. Показывается, что полученные законы сохранения формируют систему газодинамического типа. Далее выводится приближенная гидродинамическая модель, соответствующая многослойной аппроксимации исходной системы. Для этого производится переход к полулагранжевым переменным (t,x,λ) и проводится разбиение канала на M слоев по λ $(0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_M = 1)$. Осреднение проводится интегрированием по λ от λ_{i-1} до λ_i в предположение о близости профиля скорости к линейному в каждом слое. В случае однослойной аппроксимации эта модель переходит в полученную ранее систему газодинамического типа.

В параграфе 1.8 описывается используемая в работе численная схема (Насьяху–Тэдмора) и проводится численный эксперимент, показывающий влияние числа слоев на распространение возмущений.

В конце главы сформулированы основные результаты.

Во **второй главе** исследуется модель течения тонкого слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости. Изучаются математические свойства системы, поведение слабых разрывов. Выводятся осредненные аппроксимирующие модели и проводится численное моделирование. Полученные результаты обобщаются на течение жидкости со стратификацией по вязкости.

В параграфе 2.1 длинноволновое приближение применяется к уравнениям движения слоя однородной вязкой жидкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести. Рассматривается движение тонкого слоя, глубина которого много меньше горизонтального масштаба течения:

$$\begin{gathered}
u_t + uu_x + vu_y + gh_x = a + \nu u_{yy}, \quad v = -\int\limits_0^y u_x\,dy, \\
h_t + \Big(\int\limits_0^h u\,dy\Big)_x = 0, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=h} = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

где (x,y) — декартовы координаты, t — время, $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — компоненты вектора скорости. Жидкость течет над ровным дном $y = 0$, наклоненным под малым углом θ по отношению к горизонту; уравнением $y = h(t,x)$ задается свободная граница. Давление в слое жидкости восстанавливается по формуле $p = p_0 + g(h - y)$, где p_0 – атмосферное давление. Постоянные a, g и ν зависят от угла наклона дна и характерных масштабов течения. Для дальнейшего исследования система переписывается в полулагранжевых координатах (t,x,λ). В новых переменных для определения функций $u(t,x,\lambda)$ и

$H(t,x,\lambda) = \Phi_\lambda$ возникает интегродифференциальная система уравнений

$$u_t + uu_x + g\int\limits_0^1 H_x\,d\lambda = a + \frac{\nu}{H}\left(\frac{u_\lambda}{H}\right)_\lambda, \quad H_t + (uH)_x = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u\big|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=1} = 0. \tag{7}$$

В параграфе также приведен вывод бездисперсионного аналога уравнений Шкадова в предположении о параболическом по глубине профиле скорости:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6}{5}\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = ah - 3\nu\frac{q}{h^2}. \tag{8}$$

Здесь $h(t,x)$ $q(t,x)$ глубина и расход жидкости. Модель (8) в дальнейшем используется при проведении численных расчетов.

Для теоретического анализа исследуемой модели в параграфе 2.2 к ней применяется математический аппарат теории гиперболических уравнений с операторными коэффициентами, описанный в работах В.М. Тешукова. Определяются характеристики системы (6), собственные значения и функционалы (аналог собственных векторов). Формулируются условия обобщенной гиперболичности: система уравнений с операторными коэффициентами является обобщенно гиперболической, если все собственные значения k^α вещественные, а соответствующая им совокупность собственных функционалов $\{\mathbf{F}^\alpha\}$ обладает свойством *полноты*. Для определения скорости распространения возмущений k выписывается характеристическое уравнение:

$$\chi(k) = 0, \quad \chi(k) \equiv 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u-k)^2},$$

проводится анализ возможных корней характеристического уравнения. Для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия:

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm(u) \neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для обобщенной гиперболичности исследуемой системы на гладких по полулагранжевой переменной λ решениях. Здесь $\chi^{\pm}$ — предельные значения комплексной функции $\chi(z)$ на отрезке $[u_0,u_1]$, $u_0 = u|_{\lambda=0}$, $u_1 = u|_{\lambda=1}$.

В параграфе 2.3 устанавливается, что модель допускает решения со слабыми разрывами, сосредоточенными на характеристических поверхностях. Выводится транспортное уравнение амплитуды слабого разрыва ξ:

$$\partial_t\xi + k\partial_x\xi + C_1\xi^2 = C_2\xi,$$

которое можно проинтегрировать вдоль характеристики и получить:

$$\xi = \xi_0 \exp\Big(\int\limits_0^t C_2\,d\tau\Big)\Big(1 + \xi_0\int\limits_0^t C_1 \exp\Big(\int\limits_0^\tau C_2\,d\tau'\Big)\,d\tau\Big)^{-1}.$$

Здесь ξ_0 амплитуда слабого разрыва при $t = 0$; а C_1 и C_0 — коэффициенты, при этом $C_1 < 0$. Обращение ξ в бесконечность при $\xi_0 > 0$ соответствует нелинейному опрокидыванию волны и образованию сильного разрыва.

В параграфе 2.4 выводится “многослойная” аппроксимация модели системой законов сохранения. Для этого уравнения (6), (7) переписываются в консервативной формулировке и выполняется разбиение по полулагранжевой переменной λ $(0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_M = 1)$ на M слоев. Вводятся переменные:

$$u_i = u(t,x,\lambda_i), \quad h_i = y_i - y_{i-1}, \quad \omega_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \quad q = \sum_{i=1}^{M}\frac{u_i + u_{i-1}}{2}h_i,$$

и проводится осреднение интегрированием по λ от λ_{i-1} до λ_i в предположение о близости профиля скорости к линейному в каждом слое:

$$u(t,x,y) \approx \omega_i(t,x)(y - y_{i-1}) + u_{i-1}, \quad y \in [y_{i-1},y_i].$$

Получается система балансовых соотношений из $2M - 1$ уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{ci}h_i\Big) = 0, \quad (i = 1,\ldots,M)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\Big(\omega_i h_i\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{ci}\omega_i h_i\Big) = \nu\Big(\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}}\Big), \; (i = 2,\ldots,M-1)\\
&\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=1}^{M}\Big(u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12}\Big) + \frac{g}{2}\Big(\sum_{i=1}^{M} h_i\Big)^2\Big) = -\nu\omega_1 + a\sum_{i=1}^{M} h_i.
\end{aligned} \tag{9}$$

Входящие в (9) величины $u_{ci}(t,x)$ и $\omega_1(t,x)$ задаются формулами

$$u_{ci} = -\frac{\omega_i h_i}{2} + \sum_{j=1}^{i} \omega_j h_j, \quad \omega_1 = \frac{1}{h_1}\Big(\sum_{i=1}^{M} h_i - \frac{h_1}{2}\Big)^{-1}\Big(q + \sum_{i=2}^{M} h_i\Big(\frac{\omega_i h_i}{2} - \sum_{j=2}^{i} \omega_j h_j\Big)\Big).$$

Сравнение результатов расчетов по "многослойной" модели (9) и по аналогу уравнений Шкадова (8), предполагающему параболический профиль скорости, приведено в параграфе 2.5. На Рисунке 3 показаны глубина и расход, полученные в одном из численных экспериментов. Параметры здесь выбраны таким образом, чтобы формировался сильный разрыв. При этом профиль скорости в процессе эволюции течения существенно отклоняется от параболического. Показано, что если сильный разрыв не формируется, то расчеты по обоим моделям дают схожие результаты. Также представлен эксперимент, показывающий влияние угла наклона на развитие течения.

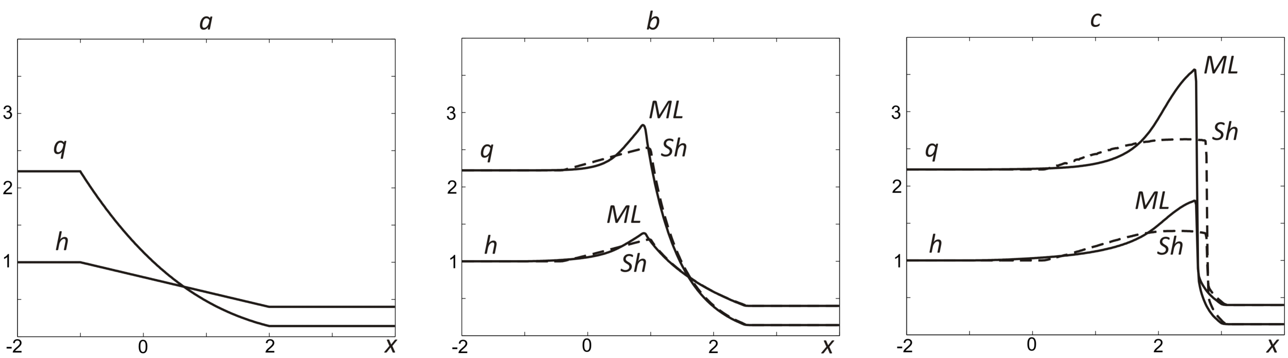

Рис. 3 — глубина h и расход q при: $t = 0$ (a); $t = 0.5$ (b); $t = 1$ (c).

В последующих параграфах 2.6 — 2.9 этот подход аналогичным образом применяется к более сложной модели, описывающей движения гранулированных сред с переменной вязкостью. В параграфе 2.6 формулируется соответствующая математическая модель, аналогичная (5):

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y + bh_x = a + K\Big(\eta u_y\Big)_y, \quad v = -\int_0^y u_x\, dy, \\ \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = 0, \quad h_t + \Big(\int_0^h u\, dy\Big)_x = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=h} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

В отличии от (5), здесь вязкость $\eta = \eta(t,x,y)$ не постоянна, для неё выписано дополнительное уравнение. При этом правая часть уравнения импульса усложняется и в ней появляется постоянный коэффициент K. Далее, по аналогии с предыдущими параграфами, в параграфе 2.7 описывается применение к модели (10) математического аппарата теории гиперболических уравнений с операторными коэффициентами; в параграфе 2.8 выводится “многослойная” модель, аппроксимирующая исходные уравнения движения; в параграфе 2.9 приводятся скорректированная численная схема и результаты численных расчетов с использованием “многослойной” модели, проводится их анализ.

В конце главы сформулированы основные результаты.

В **третьей главе** рассматривается применение длинноволновых моделей к течению вязкой слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле—Шоу. При этом основное внимание уделяется исследованию эволюции слоя смешения, который может формироваться на границе раздела двух жидкостей разной вязкости, движущихся с разными скоростями.

В параграфе 3.1 формулируется осредненная по толщине ячейки Хеле–Шоу система уравнений, описывающая течения слабосжимаемой жидкости с параболическим профилем скорости. В предположении о том, что жидкость движется преимущественно в направлении Ox, проводится ещё одно моделирование. В результате получается следующая система для описания сдвиговых течений вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу:

$$\begin{aligned} & u_t + uu_x + vu_y + a\rho_x = -\mu u/\rho, \quad \rho_y = 0, \\ & c_t + uc_x + vc_y = 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

здесь $\rho(t,x,y)$, $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ — плотность и компоненты вектора скорости, $\mu = \mu(c)$ — вязкость, зависящая от функции $c = c(t,x,y)$, такой что $c = 0$ для жидкости с вязкостью μ_1 и $c = 1$ для жидкости с вязкостью μ_2, a — константа.

В параграфе 3.2 завершается вывод одномерной нестационарной модели движения жидкости в ячейке Хеле–Шоу. Для этого делается предположение о трехслойном характере течения (два потенциальных слоя и между ними вихревой слой смешения), а также предполагается возможность массообмена между слоями. Затем проводится осреднение уравнений движения (11) по ширине ячейки. В результате законы сохранения расщепляются по слоям и получается система из семи уравнений, являющаяся трёхслойной одномерной нестационарной моделью движения вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу:

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1\rho)_t + (u_1\xi_1\rho)_x = -\sigma q\rho, \quad (\xi_2\rho)_t + (u_2\xi_2\rho)_x = 2\sigma q\rho,\\
&(\xi_3\rho)_t + (u_3\xi_3\rho)_x = -\sigma q\rho,\\
&u_{1t} + u_1u_{1x} + a\rho_x = -\mu_1u_1/\rho, \quad u_{3t} + u_3u_{3x} + a\rho_x = -\mu_3u_3/\rho,\\
&u_{2t} + u_2u_{2x} + \frac{(q^2\xi_2\rho)_x}{\xi_2\rho} + a\rho_x = -\frac{\mu_2u_2}{\rho} + \frac{\sigma q}{\xi_2}\Big(u_1 - 2u_2 + u_3\Big),\\
&q_t + (u_2q)_x = -\frac{\mu_2q}{\rho} + \frac{\sigma}{2\xi_2}\Big((u_1-u_2)^2 + (u_3-u_2)^2 - (2+\frac{\theta}{\sigma})q^2\Big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Здесь ξ_i — ширина i-го слоя, u_i — скорость течения в i-м слое, μ_i — постоянная в i-м слое вязкость, σ и θ - эмпирические константы, отвечающие за массообмен и диссипацию. Движение жидкости в слое смешения характеризуется средней скоростью u_2 и величиной q, описывающей неоднородность течения:

$$
u_2 = \frac{1}{\xi_2}\int\limits_{\xi_1}^{H-\xi_3} u\,dy, \quad q^2 = \frac{1}{\xi_2}\int\limits_{\xi_1}^{H-\xi_3} (u-u_2)^2\,dy.
$$

В параграфе также анализируются вырожденные случаи, когда ширина одного или обоих потенциальных слоев становится равной нулю. Показывается, что модели двух– и трехслойного течения имеют как минимум три вещественных характеристики (одну контактную и две звуковых).

В параграфе 3.3 исследуются стационарные решения уравнений (12). В этом случае (12) приводится к системе ОДУ, которая записывается в нормальной форме. Определяются понятия сверхкритического и докритического течения. Для последующих вычислений необходимо иметь информацию о параметрах течения в момент зарождения слоя смешения, поэтому исследуется асимптотика, когда ширина слоя смешения стремится к нулю.

Результаты численных экспериментов и используемая в главе численная схема приведены в параграфе 3.4. Показано, что при достаточно больших временах моделирования и стационарных граничных условиях ширина слоя смешения, полученная по нестационарной одномерной модели из параграфа 3.2, совпадает с решением стационарной задачи, полученной в параграфе 3.3. В результате другого численного эксперимента показывается существенное влияние вязкости на эволюцию слоя смешения. Проводится сравнение результатов расчета по исходным двумерным нестационарным уравнениям и построенной в параграфе 3.3 одномерной модели (Рисунок 4). В результате показана возможность определения границы области крупных вихревых структур на основе упрощенной одномерной модели.

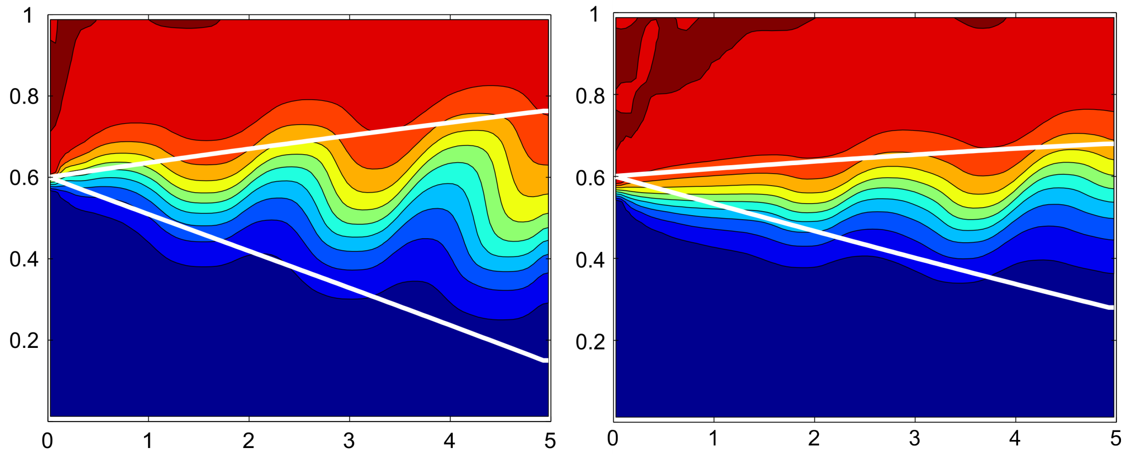

Рис. 4 — Слой смешения, построенный по одномерной стационарной модели (белая линия), наложенный на двумерное моделирование в докритическом (слева) и сверхкритическом (справа) случае.

В конце главы сформулированы основные результаты.

В **заключении** приведены итоги исследования и сформулированы основные результаты в соответствии с главами диссертационной работы.

Заключение

В работе выполнен теоретический анализ ряда длинноволновых гидродинамических моделей, описываемых квазилинейными системами уравнений с операторными коэффициентами. Построены и физически интерпретированы классы точных решений уравнений горизонтально-сдвигового течения жидкости в открытом канале. Изучены слабые разрывы решений интегродифференциальных уравнений пленочного течения и показана возможность нелинейного опрокидывания волн. Рассмотрены сдвиговые движения слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу. С использованием трехслойной схемы течения построена и исследована модель эволюции слоя смешения.

Выполнено численное моделирование распространения нелинейных волновых возмущений в сдвиговых потоках жидкости.

Развитие теории гиперболических систем уравнений с операторными коэффициентами является перспективным направлением исследований, что обусловлено широкой применимостью элементов теории при исследовании математических свойств длинноволновых гидродинамических моделей. Одна из ближайших перспектив — применение теории гиперболических систем с операторными коэффициентами к более сложным математическим моделям. Другое направление развития данного исследования заключается в усовершенствовании одномерных осреднённых моделей для оценки влияния различных физических эффектов на развитие неустойчивостей в течениях.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Ковтуненко, П. В.* Специальные классы решений уравнений горизонтально-сдвигового движения жидкости / П. В. Ковтуненко, А. А. Чесноков // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2011. — Т. 14, № 3. — С. 50–57.

2. *Chesnokov, A. A.* Weak Discontinuities in Solutions of Long-Wave Equations for Viscous Flow / A. A. Chesnokov, P. V. Kovtunenko // *Stud. Appl. Math.* — 2014. — Vol. 132. — P. 50–60.

3. *Ковтуненко, П. В.* Распространение возмущений в тонком слое жидкости, стратифицированной по вязкости / П. В. Ковтуненко // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика.* — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 38–50.

4. *Kovtunenko, P. V.* One-dimensional mixing layer model for a shear Hele-Shaw flow / P. V. Kovtunenko // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2016. — Vol. 722. — 012020.

5. *Ковтуненко, П. В.* Горизонтально-сдвиговые течения жидкости с кусочно-линейным профилем скорости в открытом канале / П. В. Ковтуненко, А. А. Чесноков // Волны и вихри в сложных средах: 7-ая международная научная школа молодых ученых, 30 ноября – 2 декабря, Москва. — М.: ПРИНТ ПРО, 2016. — С. 101–105.

Подписано в печать

Формат бумаги 60 × 84 1/16

Тираж 100 экз.

Заказ №

Объем 1,25 п.л.

Ротапринт Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

630090, Новосибирск, просп. ак. Лаврентьева, 15