

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева  
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Фурцев Алексей Игоревич

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ  
ПЛАСТИН И ТОНКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ С  
ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

Специальность 01.01.02 «Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф. А.М. Хлуднев

Новосибирск — 2020

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Контакт пластины и тонкого упругого препятствия с учетом сцепления</b> . . . . .	13
1.1 Постановки задачи равновесия . . . . .	14
1.2 Предельные переходы по параметру сцепления . . . . .	23
1.3 Оптимальное управление параметром сцепления . . . . .	32
<b>Глава 2. Контакт тонкого препятствия и пластины Тимошенко</b> . . . . .	34
2.1 Задача равновесия . . . . .	35
2.2 Предельные переходы по параметру сдвиговой жесткости . .	44
2.3 Оптимальное управление параметром сдвиговой жесткости .	52
<b>Глава 3. Контакт тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение</b> . . . . .	55
3.1 Постановка задачи . . . . .	56
3.2 Предельный переход по параметру жесткости включения . .	62
3.3 Формулировка предельной задачи . . . . .	66
<b>Глава 4. Контакт пластины и тонкого препятствия, частично скрепленных друг с другом</b> . . . . .	72
4.1 Постановка задачи равновесия . . . . .	72
4.2 Зависимость решения от параметра возмущения . . . . .	78
4.3 Производная функционала энергии . . . . .	87
<b>Заключение</b> . . . . .	91
<b>Список литературы</b> . . . . .	93

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Хорошо известно, что твердые тела, имеющие форму пластин, являются важными элементами многих современных конструкций и механизмов. Пластины широко используются в качестве перекрытий, покрытий и частей сооружений различного назначения, применяются в жилищном и промышленном строительстве в виде плит и панелей в составе пластинчатых систем. Состоящие из пластин механизмы имеют большое значение в авиационной и ракетно-космической отраслях, судо- и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении.

Конструкции и механизмы, элементами которых являются пластины, как правило кроме них содержат другие элементы. Часто эти элементы, взаимодействуя с пластинами, выполняют роль препятствий: при деформировании пластины могут соприкасаться с препятствиями, что значительно влияет на картину деформирования. Большой интерес представляет исследование случаев, когда препятствия являются тонкими и контакт с ними может происходить не во всей плоскости пластины, а лишь вдоль заданной линии (в качестве примеров подобной ситуации можно привести контакт пластин с кромками других пластин и плит, контакт пластин и балок и т.д.).

Для наиболее точного описания контакта пластин и тонких препятствий целесообразно применять математические модели. При этом моделирование контактных явлений неразрывно связано с исследованием соответствующих краевых задач, позволяющих учесть многие важные эффекты с помощью задания специальных краевых условий, например, односторонних ограничений, к числу которых относятся условия непроникания вида неравенств на неизвестные функции перемещений, не допускающие нежелательный эффект взаимного проникновения тел при контакте и тем самым делающие модель более правдоподобной. Таким образом, задачи о контакте пластин и тонких препятствий, формулируемые в виде краевых задач с односторонними ограничениями, представляют интерес с точки зре-

ния различных приложений и их всестороннее математическое исследование очень актуально.

**Степень разработанности темы исследования.** Начиная с основополагающих работ Генриха Герца 1880-х годов задачи о контакте упругих тел являются одними из наиболее актуальных и востребованных задач механики деформируемых тел и конструкций. Особое место в механике контактных взаимодействий принадлежит контактными задачам с односторонними ограничениями. Односторонними ограничениями называются механические условия, которые в каждой точке возможного контакта предполагают альтернативу: либо после деформирования может происходить соприкосновение тел, либо соприкосновения нет. Более того, множество точек соприкосновения не является известным заранее, и поэтому односторонние ограничения задаются на множестве, где соприкосновение тел лишь предполагается (множестве возможного контакта). К числу ограничений, задаваемых на множестве возможного контакта, относятся условия непроникания, призванные не допустить взаимное проникновение тел и имеющие вид неравенств.

Поскольку условия непроникания имеют вид неравенств, то контактные задачи с такими односторонними ограничениями являются нелинейными в целом. При этом заранее не известно, в каких точках реализуется строгое неравенство, а в каких равенство, поэтому искомые решения должны удовлетворять качественно различным краевым условиям в заранее неизвестных подмножествах области определения. Перечисленные обстоятельства порождают трудности при исследовании контактных задач с односторонними ограничениями, что обуславливает активный интерес к ним со стороны математического сообщества в последние десятилетия и в настоящее время.

В историческом плане исследование задач с односторонними ограничениями в значительной степени мотивировано знаменитой задачей А. Сильборни об упругом теле, лежащем на неподвижном основании. Это основание можно интерпретировать как препятствие, контактирующее с телом на части края, причем зона контакта не является известной заранее. Чтобы предотвратить взаимное проникновение между телом и основани-

ем, А. Синьорини предложил использовать ограничения в виде неравенств, накладываемые на той части границы тела, где предполагается контакт. Вопрос о корректности подобной постановки задачи впервые был изучен в фундаментальной работе [1], ставшей пионерской для зарождающейся теории вариационных неравенств [2]. В настоящее время теория вариационных неравенств разработана достаточно хорошо: её основы заложены в работах [3–10], где доказаны теоремы существования для широкого класса вариационных неравенств в абстрактной постановке. Многочисленные приложения теории вариационных неравенств к задачам механики и физики доступны в монографиях [11–16]. Численные решения вариационных неравенств содержатся в монографиях [17–21]. Обзор современного состояния связанных с задачей Синьорини вопросов и различных её обобщений можно найти в статье [22].

Стоит отметить, что с точки зрения геометрической постановки контактная задача, сформулированная Синьорини, является простейшей из возможных: в ней условия взаимодействия с препятствием задаются на границе области, в которой ищется решение. Более сложным классом контактных задач являются задачи о внутренних препятствиях, в которых контактные условия на решения задаются на многообразиях коразмерности один, лежащих внутри области определения.

Начало математического исследования задач о тонких внутренних препятствиях с односторонними ограничениями положено в работах [7, 23]. В указанных работах задача о тонком препятствии исследовалась в следующей формулировке: найти функцию  $u = u(x)$ , определенную в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , которая доставляет минимум функционалу энергии

$$D(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

среди всех вещественнозначных функций  $v = v(x)$ , обращающихся в нуль на  $\partial\Omega$  и удовлетворяющих неравенству  $v \geq \varphi$ , где  $\varphi$  – заданная непрерывная функция, на лежащем внутри  $\Omega$  отрезке прямой линии  $S$ . В [7, 23] основное внимание было уделено анализу вопросов регулярности: определению дополнительной гладкости решения  $u$  приведенной задачи, а также топо-

логической структуры так называемого коинцидентного множества – множества точек из  $S$ , в которых для решения  $u$  реализуется равенство  $u = \varphi$ . С использованием комплексного анализа было установлено, что решение приведенной выше задачи является непрерывным, а коинцидентное множество при некоторых специальных требованиях на данные задачи представляет собой объединение конечного числа попарно непересекающихся сегментов. В дальнейшем в работах [24, 25] было доказано, что локально имеют место непрерывность тангенциальных и односторонняя непрерывность нормальных производных решения и были получены оценки на модули непрерывности. В работах [26, 27] при подходящих предположениях о гладкости функции  $\varphi$  была установлена  $C^{1,\alpha}$ -гладкость решения вблизи препятствия с некоторым показателем  $0 < \alpha \leq 1/2$  и продемонстрировано, что гладкость решения имеет порог: решение не может быть более гладким, чем принадлежать классу  $C^{1,1/2}$ , даже при бесконечно гладких данных задачи. В работе [28] схожие результаты были найдены с помощью других методов (в дополнение к этому в [29] получены любопытные результаты о гладкости свободной границы в многомерном случае). Обзор этих и других результатов о дополнительной регулярности в задачах о препятствиях с уравнением Лапласа можно найти в главе 9 монографии [30].

Позднее вопросы о регулярности также исследовались для задач о тонких препятствиях с более сложными дифференциальными уравнениями. Отметим работы [31, 32], в которых была доказана дополнительная гладкость решений для задач с полигармоническими уравнениями и получены некоторые результаты о топологической структуре коинцидентного множества для бигармонического случая. Следует также отметить работы [33–37], в которых рассматривались задачи о тонких препятствиях для линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В перечисленных выше работах неоднократно отмечалось, что в задачах о тонких препятствиях при наличии односторонних ограничений решения обладают порогом гладкости: с увеличением гладкости данных гладкость решений не может превысить определенного значения. В большинстве случаев наличие определенного порога гладкости демонстрируется контрпримерами, но доказать, что решение действительно обладает дополнительной

гладкостью вплоть до обозначенного порога, на сегодняшний день удалось лишь для небольшого числа задач, в которых дифференциальные уравнения сравнительно просты, а препятствия описываются известными функциями.

Присущее контактными задачам с односторонними ограничениями отсутствие гладкости решений естественным образом побуждает при исследовании переходить к слабым постановкам. В каждом конкретном случае вид слабой постановки во многом зависит от вида ограничений и типа уравнений рассматриваемой задачи. В случае, когда исследуются задачи равновесия контактирующих тел, в качестве слабых формулировок удобно рассматривать вариационные постановки, например, задачи минимизации функционалов энергии и эквивалентные им вариационные неравенства.

Применение вариационного подхода, то есть подхода, который базируется на вариационных постановках, позволяет с единых позиций рассматривать многие контактные задачи. В последние десятилетия была разработана и успешно применена концепция, следуя которой контактная задача с односторонними ограничениями первым делом формулируется в виде задачи минимизации подходящего функционала энергии, далее с помощью средств выпуклого анализа доказывается разрешимость задачи минимизации, а дальнейшее исследование опирается на эквивалентную формулировку в виде вариационного неравенства и отталкивается от качественных свойств вариационного решения. Указанная концепция была применена при изучении задач об одностороннем контакте упругих тел различной размерности: задач о контакте пластин и балок [38–41], задач о контакте расположенных под углом друг к другу пластин [42, 43], контактных задач при наличии жестких включений [43–45].

Еще одним важным классом контактных задач с односторонними ограничениями, которые заслуживают упоминания в рамках данного обзора, являются задачи теории трещин с возможным контактом берегов. По своим математическим свойствам указанные задачи во многом схожи с задачами о тонких внутренних препятствиях с односторонними ограничениями: и те и другие допускают формулировку в виде краевых задач в областях с разрезами, на которых задаются нелинейные краевые усло-

вия. Исследование задач теории трещин с односторонними ограничениями проводилось многими отечественными и зарубежными авторами (см., например, [46–55] и ссылки оттуда). Тем не менее, несмотря на сходство задач теории трещин и задач о тонких внутренних препятствиях, имеются значительные различия: характер краевых условий и дифференциальных уравнений в указанных классах задач отличается.

Наконец, в рамках обзора стоит отметить одну важную особенность контактных задач. Часто при моделировании структур тел, состоящих из различных контактирующих частей, для описания этих частей используются различные дифференциальные уравнения. Это приводит к необходимости выбирать подходящие краевые условия на границе, разделяющей тела, и таким образом речь идет о проблеме сопряжения. Задачи о сопряжении изучались в работах [56–59] для сочленений упругих тел разного рода, в работах [60–67] для различных интерфейсов между упругими телами, в работах [68–70] для тонких упругих включений, расположенных внутри тел. Во всех перечисленных работах рассматривались задачи, вид краевых условий (условий сопряжения) в которых изначально неочевиден и его требуется выяснить в процессе рассмотрения. Этим свойством также обладают краевые задачи, которые исследуются в данной диссертационной работе: в них пластины и препятствия описываются в рамках различных моделей различными дифференциальными уравнениями, поэтому при формулировке задач необходимо иметь дело с проблемой сопряжения.

**Целью** диссертационной работы являются строгое математическое обоснование и анализ задач о контакте упругих пластин и тонких препятствий с односторонними ограничениями, в частности:

1. Анализ взаимосвязи краевых задач о равновесии контактирующих пластин и тонких препятствий и соответствующих вариационных постановок, а также описание характера контактных краевых условий для вариационных решений.
2. Доказательство теорем о существовании вариационных решений задач равновесия.
3. Изучение зависимости решений от входящих механических и геометрических параметров, исследование предельных переходов по



указанным параметрам, в том числе рассмотрение сингулярных случаев при стремлении параметров к бесконечности. Исследование задач, соответствующих различным предельным случаям.

4. Анализ асимптотических свойств решений и дифференцируемости функционала энергии при гладких возмущениях областей, задающих рост зоны одностороннего контакта.
5. Исследование задач оптимального управления, в которых в качестве управлений выступают параметры задач о равновесии контактирующих пластин и тонких препятствий.

**Методология и методы исследования.** В работе применяются теоретические методы исследования: методы и результаты уравнений математической физики, функционального анализа, выпуклого анализа, анализа чувствительности формы, вариационного исчисления и оптимального управления.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Исследован новый класс задач об одностороннем контакте пластин и тонких препятствий. В указанных задачах пластины моделируются в рамках различных механических теорий: как классической теории Кирхгофа – Лява, так и теории Тимошенко, а препятствия описываются в рамках теории балок Бернулли – Эйлера. На множестве возможного контакта, имеющем коразмерность один внутри области отыскания решения, задаются разнообразные краевые условия взаимодействия пластины и балки: контакта с учетом сил сцепления, идеального контакта без сил сцепления, контакта при наличии в пластине тонкого включения, контакта при частичной склейке пластины и балки. При этом во всех случаях множество точек контакта неизвестно заранее, а к числу контактных условий относятся нелинейные условия непроникания.
2. Рассмотрены постановки задач равновесия контактирующих пластин и балок в виде краевых задач и исследована их взаимосвязь с вариационными постановками: задачами минимизации соответствующих функционалов энергии и вариационными неравенствами. Доказаны теоремы о существовании вариационных решений.

3. Изучены предельные переходы в вариационных постановках задач равновесия по различным параметрам, характеризующим как механическое поведение контактирующих тел, так и геометрию задач. Доказана сходимости вариационных решений и найдены вариационные формулировки предельных задач в случае стремления параметров к различным значениям, в том числе, в случае стремления к бесконечности. Установлено, что получаемые в результате предельных переходов к бесконечности задачи существенно отличаются от исходных, для них найдены соответствующие краевые задачи и проведен их анализ.
4. Рассмотрены задачи оптимального управления, в которых требуется минимизировать функционалы качества, зависящие от параметров задач равновесия контактирующих пластин и балок. Указанные функционалы имеют вид нормы разности между вариационными решениями задач равновесия и заданными функциями, а параметры могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Установлена корректность подобных постановок задач оптимального управления и доказаны теоремы существования для них.
5. Исследована чувствительность к возмущениям областей для задачи о равновесии взаимодействующих пластины и балки, в которой на одной части множества взаимодействия заданы условия склейки, а на оставшейся части – условия одностороннего контакта. Данные возмущения имеют вид гладких координатных преобразований, при которых увеличивается длина зоны одностороннего контакта. Исследовано асимптотическое поведение вариационных решений по параметру, характеризующему приращению указанной длины. Доказано существование производной функционала энергии по длине, найдена явная формула для производной.

**Научная новизна.** В рамках диссертационного исследования рассмотрен ряд новых задач о контакте пластин и тонких препятствий, постановки которых оригинальны и которые ранее в научной практике не рассматривались. Все выносимые на защиту результаты являются новы-

ми и получены автором самостоятельно. Их достоверность гарантируется строгостью математических доказательств.

**Научная и практическая значимость.** Диссертационное исследование имеет теоретический характер. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших теоретических и практических исследований задач о контакте пластин и тонких препятствий и связанных с ними задач оптимального управления, а также могут быть использованы при численном анализе указанных задач.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. 55-я международная научная студенческая конференция, г. Новосибирск, 17-20 апреля 2017 г.
2. Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», г. Томск, 25-28 апреля 2017 г.
3. VII Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2017», г. Томск, 27-29 ноября 2017 г.
4. Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», г. Новосибирск, 10-13 октября 2018 г.
5. V Всероссийская конференция с международным участием «Полярная механика», г. Новосибирск, 9-11 октября 2018 г.
6. Международная школа-конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева, г. Новосибирск, 10-16 декабря 2018 г.
7. XIII Всероссийская конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии», посвященная 150-летию со дня рождения академика С.А. Чаплыгина, г. Новосибирск-Шерегеш, 15-22 марта 2019 г.
8. Всероссийская конференция с международным участием и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», г. Новосибирск, 13-17 мая 2019 г.

9. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова «Математика в приложениях», г. Новосибирск, 4-10 августа 2019 г.
10. VI международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды», г. Дилижан, Армения, 1-6 октября 2019 г.
11. Russia-Japan Workshop «Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications», Novosibirsk, November 11-13, 2019.
12. XIV Всероссийская конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии», г. Новосибирск-Шерегеш, 28 февраля – 6 марта 2020 г.
13. X Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 7-11 сентября 2020 г.

Также результаты работы были представлены на научных семинарах:

1. «Краевые задачи в областях с негладкими границами», рук. д.ф.-м.н. А.М. Хлуднев.
2. «Математические модели механики сплошных сред», рук. чл.-корр. РАН проф. П.И. Плотников и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтов.
3. «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики», рук. д.ф.-м.н. А.М. Блохин.

**Публикации.** Результаты по теме диссертации опубликованы в виде четырех статей [40, 41, 45, 71] в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, который содержит ссылки на 90 наименований. Полный объём диссертационной работы составляет 101 страницу с 4 рисунками.

## Глава 1. Контакт пластины и тонкого упругого препятствия с учетом сцепления

В первой главе исследуются задачи, описывающие изгиб пластины и тонкого препятствия, которые могут контактировать друг с другом вдоль линии. Изгиб пластины моделируется в рамках теории пластин Кирхгофа–Лява, а изгиб балки – в рамках теории балок Бернулли–Эйлера. Считается, что взаимное проникновение пластины и балки при контакте невозможно, в связи с чем на множестве возможного контакта пластины и балки задается условие непроникания. Кроме того, учитывается сцепление тел, а величина сил сцепления характеризуется неотрицательным числовым параметром (параметром сцепления).

Параграф 1.1 настоящей главы посвящен различным постановкам контактной задачи и анализу её разрешимости. Далее в параграфе 1.2 изучаются предельные переходы по параметру сцепления. Исследуются различные предельные режимы: как случай, когда параметр сцепления стремится к конечным значениям, так и случай, когда указанный параметр стремится к бесконечности. Последний случай интересен тем, что получаемая в результате предельного перехода к бесконечности задача описывает взаимодействие пластины и балки, которые, в отличие от исходной задачи, скреплены между собой, а их перемещения равны вдоль линии. В следующем параграфе 1.3 изучается задача оптимального управления, в которой параметр сцепления играет роль управляющего параметра. Эта задача состоит в том, что на множестве допустимых управлений (содержащем как конечные значения, так и бесконечность) требуется минимизировать функционал качества, характеризующий отклонение перемещений пластины и балки от заранее заданных функций. Доказывается, что задача оптимального управления имеет решение. Изложение главы 1 и всех её параграфов основано на материалах статьи [41].

## 1.1 Постановки задачи равновесия

В данном параграфе обсуждаются различные постановки задачи о равновесии пластины и препятствия, контактирующих друг с другом с учетом сцепления. В начале приводятся некоторые предварительные сведения и обозначения. Далее задача равновесия формулируется в виде краевой задачи, а после этого – в вариационном виде, а именно, в виде эквивалентных друг другу задачи минимизации функционала энергии и вариационного неравенства. Доказывается теорема о существовании вариационного решения. В конце параграфа доказывается, что вариационные формулировки являются слабыми по отношению к краевой задаче.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^{2,1}$ , лежащая в  $x_1x_2$ -координатной плоскости. Пусть  $S \subset \Omega$  – участок  $x$ -координатной прямой, не содержащий конечных точек. Будем считать, что множество  $S$  располагается строго внутри области  $\Omega$  (см. Рис. 1.1, а)), при этом так, что  $S$  может быть продолжено внутрь  $\Omega$  до замкнутой кривой  $\Sigma$  класса  $C^{2,1}$  без самопересечений (см. Рис. 1.1, б)). При этом  $\Omega$  разбивается на две подобласти  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  с границами  $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cup \Sigma$  и  $\partial\Omega_- = \Sigma$ . Область с разрезом  $\Omega \setminus \bar{S}$  обозначим через  $\Omega_S$ .

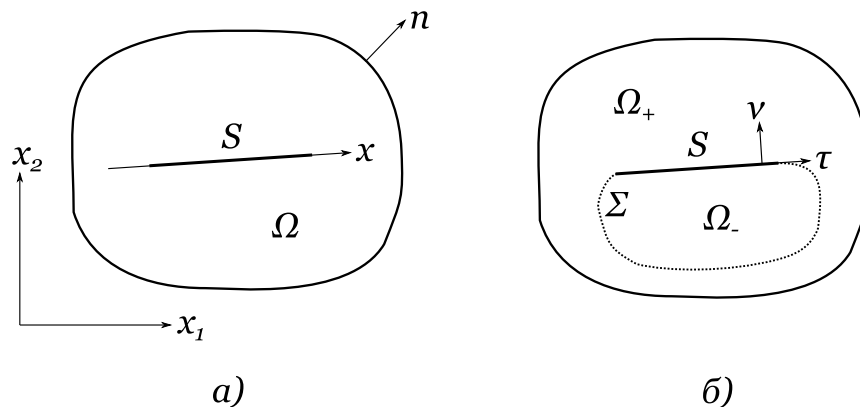


Рисунок 1.1 — а) расположение области  $\Omega$  и множества  $S$ , б) продолжение множества  $S$  до замкнутой кривой  $\Sigma$

Область  $\Omega$  отвечает пластине, а множество  $S$  – тонкому препятствию. В данной главе считается, что перемещения точек пластины и препятствия

моделируются в соответствии с теорией изгиба пластин Кирхгофа – Лява и теорией изгиба балок Бернулли – Эйлера. Соответственно на  $\Omega$  и на  $S$  определяются функции  $v = v(x_1, x_2)$  и  $w = w(x)$ , описывающие прогибы пластины и препятствия (условимся и будем считать всюду в работе, что функция  $w$  и другие определяемые только на  $S$  функции являются функциями одной переменной).

Рассмотрим следующую краевую задачу, которая описывает равновесие пластины и тонкого препятствия, контактирующих друг с другом с учетом эффектов взаимного непроникания и сцепления. Требуется найти функции  $v = v(x_1, x_2)$  и  $w = w(x)$  такие, что

$$\operatorname{div} \operatorname{div} m(v) = f \quad \text{в } \Omega_S, \quad (1.1)$$

$$[m_\nu(v)] = 0, \quad [t_\nu(v)] + (bw_{,xx})_{,xx} = g \quad \text{на } S, \quad (1.2)$$

$$([t_\nu(v)] + \beta(v - w))(v - w) = 0 \quad \text{на } S, \quad (1.3)$$

$$[t_\nu(v)] + \beta(v - w) \geq 0, \quad v - w \geq 0 \quad \text{на } S, \quad (1.4)$$

$$[v] = 0, \quad [v_{,\nu}] = 0 \quad \text{на } S, \quad (1.5)$$

$$w = 0, \quad w_{,x} = 0 \quad \text{на } \partial S, \quad (1.6)$$

$$v = 0, \quad v_{,n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} m(v) &= B\nabla^2 v, \quad m_{ij}(v) = b_{ijkl}v_{,kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, \\ m_\nu(v) &= m(v)\nu \cdot \nu, \quad t_\nu(v) = (\operatorname{div} m(v)) \cdot \nu + \frac{\partial}{\partial \tau}(m(v)\nu \cdot \tau). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Индексами после запятой здесь и всюду далее в диссертационной работе обозначаются производные функций:

$$w_{,x} = \frac{dw}{dx}, \quad v_{,\nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad v_{,n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad v_{,j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}; \quad j = 1, 2.$$

Скобки  $[\cdot]$  обозначают скачок функции, в частности:  $[v] = v^+ - v^-$ , где  $v^+$  и  $v^-$  – это следы функции  $v$  на  $\Sigma$ , взятые со стороны подобластей  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ , на которые  $\Omega$  разбивается кривой  $\Sigma$ . Через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  обозначен единичный

вектор нормали к  $\Sigma$ , внешней по отношению к подобласти  $\Omega_-$ , в то время как  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$  – это касательный вектор, а  $n = (n_1, n_2)$  – это единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Функции  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(S)$  считаются заданными и описывают внешние силы, действующие на пластину и препятствие; тензор  $m(v) = \{m_{ij}(v)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , описывает возникающие в пластине при изгибе моменты. Соотношения (1.8) определяют граничные значения изгибающего момента и перерезывающей силы. Тензор модулей изгибной жесткости пластины  $B = \{b_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , считается известным и обладает свойствами симметричности и положительной определенности

$$\begin{aligned} b_{ijkl} &= b_{jikl} = b_{klij}, & b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} &\geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \\ c_0 &= \text{const} > 0, & b_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega); \quad i, j, k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Фигурирующая во втором уравнении (1.2) функция  $b$ , описывающая жесткость балки-препятствия, также является известной и удовлетворяет свойству положительности:  $b \in L^\infty(S)$ ,  $b \geq c_1 = \text{const} > 0$  на  $S$ . Число  $\beta \in [0, \infty)$  в условиях (1.3), (1.4) считается заданным, его механический смысл будет продемонстрирован ниже.

Отметим, что каждое из соотношений (1.1)–(1.7) имеет ясный механический смысл. Так, соотношение (1.1) является уравнением равновесия пластины, изгиб которой описывается в рамках теории пластин Кирхгофа – Лява. Соотношения (1.2) описывают скачки изгибающего момента  $m_\nu$  и перерезывающей силы  $t_\nu$  пластины на множестве возможного контакта с тонким препятствием. Второе соотношение (1.2) также служит уравнением равновесия балки-препятствия с учетом воздействия на неё пластины. Второе условие (1.4) обеспечивает взаимное непроникание пластины и препятствия. Согласно соотношениям (1.3) и (1.4) на множестве возможного контакта имеет место альтернатива: либо контакт пластины и препятствия происходит (тогда  $v = w$ ), либо нет (тогда  $v > w$ ). Следует особо отметить, что точки множества  $S$ , в которых происходит контакт, и те точки, в которых контакт отсутствует, при постановке задачи не известны и могут быть определены только после её решения. Тем не менее из (1.3) известно, что если в некоторой точке контакт отсутствует, то в такой точке реали-



зуются равенства  $[t_\nu(v)] = -\beta(v - w)$  и  $(bw_{,xx})_{,xx} = g + \beta(v - w)$ . Это говорит о том, что в точках отсутствия контакта пластина и препятствие притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной разности прогибов, и с коэффициентом пропорциональности, равным  $\beta$  (отметим, что подобную силу притяжения между телами иногда интерпретируют наличием между ними интерфейса, действующего подобно системе распределенных возвращающих пружин, см. [60, 72–74]). Описанный механизм взаимодействия пластины и балки означает, что на множестве возможного контакта учитывается сцепление между телами, зависящее от коэффициента  $\beta$ , поэтому будем называть указанный коэффициент параметром сцепления. Согласно оставшимся соотношениям (1.5)–(1.7) считается, что в пластине отсутствуют трещины и изломы, а также что внешний край пластины и концы балки-препятствия жестко закреплены.

Подчеркнем, что задача (1.1)–(1.7) обладает рядом особенностей. Во-первых, эта задача ставится в негладкой области с разрезом. Во-вторых, из-за наличия в задаче нелинейных краевых условий она является нелинейной в целом. Наконец, следует отметить, что в этой задаче множество точек, в которых реализуется контакт, не является известным заранее, поэтому задачу можно отнести к классу проблем с неизвестной границей.

Помимо краевой задачи (1.1)–(1.7) исследуемая задача равновесия допускает вариационную постановку. С целью сформулировать задачу в вариационном виде введем в рассмотрение пространства Соболева

$$\begin{aligned} H_0^2(\Omega) &= \{v \in H^2(\Omega) : v = 0, v_{,n} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \\ H_0^2(S) &= \{w \in H^2(S) : w = 0, w_{,x} = 0 \text{ на } \partial S\} \end{aligned}$$

и определим на  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S)$  функционал энергии

$$\mathcal{E}(v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_S b(w_{,xx})^2 - \int_S g w + \frac{\beta}{2} \int_S (v - w)^2.$$

Введем множество допустимых перемещений

$$\mathcal{K} = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S) : v - w \geq 0 \text{ на } S\}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$(v, w) \in \mathcal{K} : \quad \mathcal{E}(v, w) = \min_{(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}} \mathcal{E}(\bar{v}, \bar{w}). \quad (1.9)$$

Также рассмотрим вариационное неравенство

$$\begin{aligned} (v, w) \in \mathcal{K} : \quad & \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2(\bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \\ & \int_S bw_{,xx}(\bar{w} - w)_{,xx} - \int_S g(\bar{w} - w) + \\ & \beta \int_S (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_S (v - w)(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

которое, как легко доказать, опираясь на дифференцируемость по Гато и выпуклость функционала  $\mathcal{E}$ , а также выпуклость множества  $\mathcal{K}$ , является эквивалентным задаче минимизации (1.9).

Одним из преимуществ использования приведенных вариационных постановок является то, что они позволяют доказать однозначную разрешимость задачи равновесия. А именно, докажем следующую теорему о существовании и единственности вариационного решения.

**Теорема 1.1.** *Задача минимизации (1.9) имеет единственное решение.*

*Доказательство.* Сначала докажем, что решение задачи минимизации (1.9) существует. Опираясь на неравенство Пуанкаре – Фридрихса, несложно получить

$$\int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v + \int_S b(w_{,xx})^2 \geq c_2 (\|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(S)}^2), \quad c_2 = const > 0.$$

Пользуясь данным неравенством и неравенством Коши – Буняковского, для функционала энергии получаем оценку

$$\mathcal{E}(v, w) \geq c_2 \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - c_3 \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + c_2 \|w\|_{H_0^2(S)}^2 - c_3 \|w\|_{H_0^2(S)}, \quad c_3 = const \geq 0.$$

Отсюда имеем:

$$\mathcal{E}(v, w) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \infty,$$

то есть функционал энергии  $\mathcal{E}$  коэрцитивен. С другой стороны, функционал энергии  $\mathcal{E}$  слабо полунепрерывен снизу, а множество допустимых перемещений  $\mathcal{K}$  выпукло и замкнуто и, следовательно, слабо замкнуто. Отсюда следует, что функционал  $\mathcal{E}$  имеет на множестве  $\mathcal{K}$  минимум, то есть решение задачи минимизации (1.9) существует.

Заметим, наконец, что функционал энергии  $\mathcal{E}$  является строго выпуклым. Следовательно, он может иметь не более одного минимума, а значит решение задачи минимизации (1.9) единственно. Теорема 1.1 доказана.  $\square$

Подчеркнем, что поскольку задача минимизации (1.9) и вариационное неравенство (1.10) эквивалентны, то доказанная теорема также гарантирует однозначную разрешимость вариационного неравенства.

Ниже мы докажем, что вариационное решение, существование которого установлено теоремой 1.1, является слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.7), и тем самым задача минимизации (1.9) и вариационное неравенство (1.10) являются слабыми постановками по отношению к краевой задаче. В то же время, вариационное решение не обладает достаточной гладкостью, чтобы определить значения изгибающего момента и перерезывающей силы по формулам (1.8), поэтому смысл указанных величин требует предварительного пояснения. С этой целью введем в рассмотрение пространства  $H^{1/2}(S)$  и  $H^{3/2}(S)$  (с определением указанных пространств можно ознакомиться, например, в книгах [75, 76]) с нормами

$$\|v\|_{H^{1/2}(S)}^2 = \|v\|_{L^2(S)}^2 + \int_S \int_S \frac{|v(s) - v(t)|^2}{|s - t|^2} ds dt,$$

$$\|v\|_{H^{3/2}(S)}^2 = \|v\|_{H^1(S)}^2 + \int_S \int_S \frac{|\nabla v(s) - \nabla v(t)|^2}{|s - t|^2} ds dt,$$

и обозначим через  $H^{-1/2}(S)$ ,  $H^{-3/2}(S)$  сопряженные к  $H^{1/2}(S)$ ,  $H^{3/2}(S)$  пространства. Если решение достаточно регулярное, а именно, если функ-

ция  $v$  принадлежит пространству

$$V(\Omega_S) = \{v : m(v) \in L^2(\Omega_S), \operatorname{div} \operatorname{div} m(v) \in L^2(\Omega_S)\},$$

то можно определить следы  $m_\nu^\pm(v) \in H^{-1/2}(\Sigma)$ ,  $t_\nu^\pm(v) \in H^{-3/2}(\Sigma)$  такие, что справедливы следующие формулы (см. [77] стр. 105):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\pm} m(v) : \nabla^2 \hat{v} &= \int_{\Omega_\pm} \hat{v} \operatorname{div} \operatorname{div} m(v) \\ \mp \langle m_\nu^\pm(v), \hat{v}, \nu \rangle_{1/2, \Sigma} \pm \langle t_\nu^\pm(v), \hat{v} \rangle_{3/2, \Sigma} &\quad \forall \hat{v} \in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь и далее скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Sigma}$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3/2, \Sigma}$  обозначают двойственность между пространствами  $H^{1/2}(\Sigma)$ ,  $H^{3/2}(\Sigma)$  и сопряженными к ним. В случае гладкой функции  $v$  для следов  $m_\nu^\pm(v)$ ,  $t_\nu^\pm(v)$  справедливы формулы (1.8), поэтому для простоты изложения мы не стали менять обозначения. Сложив формулы (1.11), имеем следующую формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} m(v) : \nabla^2 \hat{v} &= \int_{\Omega_S} \hat{v} \operatorname{div} \operatorname{div} m(v) \\ - \langle [m_\nu(v)], \hat{v}, \nu \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t_\nu(v)], \hat{v} \rangle_{3/2, \Sigma} &\quad \forall \hat{v} \in H_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $[m_\nu(v)]$  и  $[t_\nu(v)]$ , вообще говоря, являются элементами пространств  $H^{-1/2}(\Sigma)$  и  $H^{-3/2}(\Sigma)$ .

Следующей теоремой решается вопрос связи между вариационным неравенством (1.10) и краевой задачей (1.1)–(1.7).

**Теорема 1.2.** *Вариационное неравенство (1.10) и краевая задача (1.1)–(1.7) эквивалентны при условии достаточной гладкости решений, а именно: если гладкие функции  $v, w$  удовлетворяют краевой задаче (1.1)–(1.7), то пара  $(v, w)$  является решением вариационного неравенства (1.10); в свою очередь, если решение  $(v, w) \in \mathcal{K}$  вариационного неравенства (1.10) дополнительно удовлетворяет требованию  $v \in V(\Omega_S)$ , то для него выполняются все соотношения (1.1)–(1.7).*

*Доказательство.* 1. Пусть для гладких функций  $v$  и  $w$  верны соотношения (1.1)–(1.7). Заметим сразу, что благодаря второму соотношению (1.4) и соотношениям (1.5)–(1.7) пара  $(v, w)$  принадлежит множеству  $\mathcal{K}$ . Далее, выберем элемент  $(\bar{v}, \bar{w})$  из  $\mathcal{K}$  произвольно и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} L_{v,w} = & \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2(\bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_S bw_{,xx}(\bar{w} - w)_{,xx} \\ & - \int_S g(\bar{w} - w) + \beta \int_S (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_S (v - w)(\bar{w} - w), \end{aligned}$$

представляющее собой левую часть вариационного неравенства (1.10). Докажем неотрицательность этого выражения. Интегрирование по частям в первом и третьем слагаемых с учетом (1.1) влечет

$$\begin{aligned} L_{v,w} = & - \int_S [m_\nu(v)](\bar{v} - v)_{,\nu} + \int_S [t_\nu(v)](\bar{v} - v) + \int_S ((bw_{,xx})_{,xx} - g)(\bar{w} - w) \\ & + \beta \int_S (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_S (v - w)(\bar{w} - w). \end{aligned}$$

Воспользовавшись условиями (1.2) и перегруппировав слагаемые, отсюда получаем

$$L_{v,w} = \int_S ([t_\nu(v)] + \beta(v - w))(\bar{v} - \bar{w}) - \int_S ([t_\nu(v)] + \beta(v - w))(v - w).$$

Опираясь на (1.3), находим

$$L_{v,w} = \int_S ([t_\nu(v)] + \beta(v - w))(\bar{v} - \bar{w}).$$

Учитывая первое соотношение (1.4) и условие  $\bar{v} - \bar{w} \geq 0$  на  $S$ , получаем, что  $L_{v,w} \geq 0$  при любых  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}$ , а значит вариационное неравенство (1.10) действительно справедливо.

2. Теперь, напротив, пусть для элемента  $(v, w)$  выполняется вариационное неравенство (1.10) и, в дополнение к сказанному, пусть  $v \in V(\Omega_S)$ .

Выберем в (1.10) тестовые элементы вида  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\varphi, 0)$ , где функция  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_S)$  произвольна. Имеем

$$\int_{\Omega_S} m(v) : \nabla^2 \varphi = \int_{\Omega_S} f \varphi,$$

что означает справедливость дифференциального уравнения (1.1) в смысле распределений.

Применим к вариационному неравенству (1.10) формулу Грина (1.12) и формулу интегрирования по частям для одномерного интеграла. Тогда с учетом доказанного уравнения (1.1) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & -\langle [m_\nu(v)], (\bar{v} - v)_{,\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t_\nu(v)], \bar{v} - v \rangle_{3/2, \Sigma} \\ & + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, \bar{w} - w \rangle_{2, S} + \beta \langle v - w, \bar{v} - v \rangle_{3/2, S} \\ & - \beta \langle v - w, \bar{w} - w \rangle_{3/2, S} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

в котором через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2, S}$  обозначена двойственность между пространством  $H_0^2(S)$  и сопряженным к нему пространством  $H^{-2}(S)$ .

Выберем элемент  $(\phi, \psi) \in \mathcal{K}$  так, что  $\phi = \psi$  на  $S$ . Подставляя в (1.13) тестовые элементы вида  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\phi, \psi)$ , получаем тождества

$$\langle [m_\nu(v)], \phi_{,\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [t_\nu(v)], \phi \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, \psi \rangle_{2, S} = 0, \quad (1.14)$$

в силу произвольности функций  $\phi$  и  $\psi$  означающие справедливость соотношений (1.2).

Далее, выберем функцию  $\xi \in H_0^2(\Omega)$  так, что  $\xi \geq 0$  на  $S$ . Возьмем в (1.13) элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) + (\xi, 0)$  в качестве тестового элемента. Принимая во внимание первое тождество (1.14), находим неравенство

$$\langle [t_\nu(v)], \xi \rangle_{3/2, \Sigma} + \beta \langle v - w, \xi \rangle_{3/2, S} \geq 0, \quad (1.15)$$

означающее, что выполняется первое соотношение (1.4).

Наконец, поочередно выберем в (1.13) элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$  и  $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v, w)$ , получим

$$\langle [t_\nu(v)], v \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, w \rangle_{2, S} + \beta \langle v - w, v - w \rangle_{3/2, S} = 0, \quad (1.16)$$

то есть с учетом второго тождества (1.14) верно соотношение (1.3).

Остаются последнее условие из (1.4) и условия (1.5)–(1.7). Но эти условия не нуждаются в доказательстве, поскольку они справедливы благодаря принадлежности  $(v, w) \in \mathcal{K}$ .

Итак, доказано, что для достаточно регулярного решения вариационного неравенства (1.10) справедливы все соотношения (1.1)–(1.7). При этом уточнено, что соотношения (1.2), (1.3) и первое соотношение (1.4) выполняются в смысле (1.14), (1.16) и (1.15) соответственно. В качестве замечания добавим, что первые члены в (1.14)–(1.16) не зависят от продолжения  $\Sigma$  в том смысле, что это продолжение может быть выбрано произвольно (важно только, чтобы оно удовлетворяло оговоренным в начале параграфа требованиям). Теорема 1.2 доказана.  $\square$

## 1.2 Предельные переходы по параметру сцепления

Как видно из задачи равновесия (1.1)–(1.7), сформулированной в предыдущем параграфе, её решение зависит от параметра сцепления  $0 \leq \beta < \infty$ . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем использовать обозначения  $v^\beta$  и  $w^\beta$ . Тогда при каждом фиксированном  $\beta$  краевая задача принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{div} m(v^\beta) &= f \quad \text{в } \Omega_S, \\ [m_\nu(v^\beta)] &= 0, \quad [t_\nu(v^\beta)] + (bw_{,xx}^\beta)_{,xx} = g \quad \text{на } S, \\ ([t_\nu(v^\beta)] + \beta(v^\beta - w^\beta))(v^\beta - w^\beta) &= 0 \quad \text{на } S, \\ [t_\nu(v^\beta)] + \beta(v^\beta - w^\beta) &\geq 0, \quad v^\beta - w^\beta \geq 0 \quad \text{на } S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[v^\beta] &= 0, \quad [v^\beta_{,\nu}] = 0 \quad \text{на } S, \\
w^\beta &= 0, \quad w^\beta_{,x} = 0 \quad \text{на } \partial S, \\
v^\beta &= 0, \quad v^\beta_{,n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Напомним, что параметр  $\beta$  характеризуют сцепление между пластиной и балкой-препятствием: чем он больше, тем сильнее силы притяжения между ними. Когда параметр сцепления  $\beta$  фиксирован, по теореме 1.1 задача равновесия имеет единственное решение, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned}
(v^\beta, w^\beta) \in \mathcal{K} : \quad & \int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2(\bar{v} - v^\beta) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\beta) \\
& + \int_S b w^\beta_{,xx} (\bar{w} - w^\beta)_{,xx} - \int_S g(\bar{w} - w^\beta) \\
& + \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)(\bar{v} - v^\beta) - \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)(\bar{w} - w^\beta) \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Когда параметр  $\beta$  пробегает значения из интервала  $[0, \infty)$ , вариационные решения образуют семейство. Цель данного параграфа – доказать сходимость данного семейства при стремлении параметра сцепления к различным значениям, осуществить предельные переходы в вариационном неравенстве (1.17) и выяснить природу получаемых в результате этих предельных переходов задач.

Возможны две различные ситуации, которые далее будут изучены по отдельности: параметр  $\beta$  стремится к заданному неотрицательному числу и параметр  $\beta$  стремится к бесконечности.

### **Параметр сцепления стремится к неотрицательному числу**

Докажем, что при стремлении параметра сцепления  $\beta$  к заданному неотрицательному числу имеет место непрерывная зависимость решений. Точнее говоря, справедлива следующая теорема.



**Теорема 1.3.** *Если параметр сцепления  $\beta$  стремится к заданному числу  $\beta_0 \in [0, \infty)$ , то для соответствующего семейства решений вариационного неравенства (1.17) выполняется сходимость*

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S), \quad (1.18)$$

где  $(v, w)$  – это решение вариационного неравенства (1.17), в котором  $\beta$  равно  $\beta_0$ .

*Доказательство.* Сначала докажем, что сходимость вида (1.18) выполняется в слабом смысле. Выбрав поочередно в (1.17) тестовые элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$  и  $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v^\beta, w^\beta)$ , находим тождество

$$\int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w^\beta, w^\beta) + \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_S g w^\beta.$$

Применяя к левой части равенства неравенство Пуанкаре – Фридрихса и пользуясь неотрицательностью третьего слагаемого, а затем применяя к правой части неравенство Коши – Буняковского, получаем оценки

$$\|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \leq c_4, \quad \|w^\beta\|_{H_0^2(S)} \leq c_4, \quad c_4 = \text{const} \geq 0.$$

Опираясь на полученные оценки, извлечем из семейства решений  $(v^\beta, w^\beta)$  такое подсемейство (с целью упростить обозначение сохраним его прежним), что

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v, w) \text{ слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S), \quad (1.19)$$

где  $(v, w)$  – элемент из  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S)$ .

Теперь на основании полученной сходимости (1.19) осуществим предельный переход в вариационном неравенстве (1.17). Очевидным следствием сходимости (1.19) и слабой замкнутости множества  $\mathcal{K}$  является то, что элемент  $(v, w)$  принадлежит этому множеству. В то же время согласно

(1.17) для фиксированного элемента  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 \bar{v} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\beta) + \int_S b w_{,xx}^\beta \bar{w}_{,xx} - \int_S g(\bar{w} - w^\beta) \\ & + \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)(\bar{v} - \bar{w}) \geq \int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 + \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)^2. \end{aligned}$$

Перейдя в левой части неравенства к пределу, а в правой части – к нижнему пределу, получаем следующее:

$$\begin{aligned} (v, w) \in \mathcal{K} : & \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2(\bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\ & + \int_S b w_{,xx}(\bar{w} - w)_{,xx} - \int_S g(\bar{w} - w) \\ & + \beta_0 \int_S (v - w)(\bar{v} - v) - \beta_0 \int_S (v - w)(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Несложно видеть, что в результате предельного перехода получено вариационное неравенство вида (1.17), в котором параметр  $\beta$  равен  $\beta_0$ .

Остается доказать, что сходимость вида (1.18) выполняется в сильном смысле. Заметим, что на основании (1.17), (1.19) и (1.20) выполняется

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_S g w^\beta - \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)^2 \\ & \rightarrow \int_{\Omega} f v + \int_S g w - \beta_0 \int_S (v - w)^2 = \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v + \int_S b(w_{,xx})^2. \end{aligned}$$

Отсюда благодаря неравенству Пуанкаре – Фридрихса следует, что

$$\|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{H_0^2(\Omega)}, \quad \|w^\beta\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \|w\|_{H_0^2(S)}.$$

Указанная сходимость норм вместе с (1.19) влечет сильную сходимость (1.18), и тем самым доказательство теоремы 1.3 завершено.  $\square$

### Параметр сцепления стремится к бесконечности

Теперь изучим предельный переход  $\beta \rightarrow \infty$  в вариационном неравенстве (1.17). Отметим, что исходное вариационное неравенство определено лишь при конечных значениях  $\beta$ , поэтому изначально вид предельной задачи неочевиден. Тем не менее, ниже удастся осуществить предельный переход в (1.17) и доказать, что предельную задачу можно сформулировать в виде следующего вариационного уравнения

$$(v, w) \in \mathcal{H} : \quad \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 \bar{v} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_S b w_{,xx} \bar{w}_{,xx} - \int_S g \bar{w} = 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{H}, \quad (1.21)$$

где

$$\mathcal{H} = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S) : v = w \text{ на } S\}.$$

**Замечание.** Вариационное уравнение (1.21) эквивалентно задаче минимизации

$$(v, w) \in \mathcal{H} : \quad \mathcal{E}_{\infty}(v, w) = \min_{(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{H}} \mathcal{E}_{\infty}(\bar{v}, \bar{w})$$

с функционалом энергии

$$\mathcal{E}_{\infty}(v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_S b (w_{,xx})^2 - \int_S g w.$$

Исходя из этого, существование и единственность решения задачи (1.21) можно доказать по аналогии с теоремой 1.1 предыдущего параграфа независимо от рассуждений, которые будут проведены в теореме ниже.

**Теорема 1.4.** Если параметр сцепления  $\beta$  стремится к бесконечности, то для соответствующего семейства решений вариационного неравен-

ства (1.17) выполняется сходимость

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S), \quad (1.22)$$

где  $(v, w)$  – решение вариационного уравнения (1.21).

*Доказательство.* Первым делом докажем, что сходимость вида (1.22) выполняется в слабом смысле. Из (1.17) получаем тождество

$$\int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 + \beta \int_S (v^\beta - w^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_S g w^\beta.$$

Так как по предположению теоремы  $\beta \rightarrow \infty$ , то можно без ограничения общности полагать, что  $\beta \neq 0$ . Тогда из полученного тождества приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} &\leq c_5, & \|w^\beta\|_{H_0^2(S)} &\leq c_5, \\ \int_S (v^\beta - w^\beta)^2 &\leq \frac{c_5}{\beta}; & c_5 = \text{const} &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

На основании первых двух оценок находим, при необходимости выбирая из семейства  $(v^\beta, w^\beta)$  подсемейство, что

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v, w) \text{ слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S), \quad (1.24)$$

где элемент  $(v, w)$  принадлежит по меньшей мере пространству  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S)$ .

Из последней оценки (1.23) несложно получить, что выполняется соотношение  $v = w$  на  $S$ , следовательно предельный в (1.24) элемент  $(v, w)$  принадлежит пространству  $\mathcal{H}$ .

Установим теперь, что элемент  $(v, w)$  является решением вариационного уравнения (1.21). Из вариационного неравенства (1.17) вытекает, что

для фиксированного  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{H}$  верно тождество

$$\int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 \bar{v} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_S b w_{,xx}^\beta \bar{w}_{,xx} - \int_S g \bar{w} = 0.$$

Перейдя здесь к пределу на основании сходимости (1.24), получаем в точности вариационное уравнение (1.21).

Докажем, наконец, сильную сходимость (1.22). Из вариационного неравенства (1.17) имеем оценку

$$\int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 \leq \int_{\Omega} f v^\beta + \int_S g w^\beta. \quad (1.25)$$

Перейдя здесь к верхнему пределу на основании (1.24), с учетом (1.21) находим

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 \right\} \leq \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v + \int_S b(w_{,xx})^2.$$

Одновременно с этим левая часть оценки (1.25) слабо полунепрерывна снизу, поэтому получаем следующее:

$$\int_{\Omega} m(v^\beta) : \nabla^2 v^\beta + \int_S b(w_{,xx}^\beta)^2 \rightarrow \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 v + \int_S b(w_{,xx})^2.$$

Отсюда благодаря неравенству Пуанкаре – Фридрихса следует

$$\|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{H_0^2(\Omega)}, \quad \|w^\beta\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \|w\|_{H_0^2(S)},$$

а значит сходимость вида (1.25) действительно выполняется в сильном смысле. Теорема 1.4 доказана.  $\square$

Теперь приведем краевую задачу, по отношению к которой решение вариационного уравнения (1.21) является слабым: найти функции  $v = v(x_1, x_2)$  и  $w = w(x)$  такие, что

$$\operatorname{div} \operatorname{div} m(v) = f \quad \text{в } \Omega_S, \quad (1.26)$$

$$[m_\nu(v)] = 0, \quad [t_\nu(v)] + (bw_{,xx})_{,xx} = g \quad \text{на } S, \quad (1.27)$$

$$v = w, \quad [v] = 0, \quad [v_{,\nu}] = 0 \quad \text{на } S, \quad (1.28)$$

$$w = 0, \quad w_{,x} = 0 \quad \text{на } \partial S, \quad (1.29)$$

$$v = 0, \quad v_{,n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.30)$$

В отличие от исходной задачи вида (1.1)–(1.7), отвечающей конечным значениям параметра сцепления, в которой условия контакта содержат ограничения в виде неравенств на искомые перемещения, в приведенной задаче считается, что перемещения пластины и балки-препятствия равны на  $S$ . Таким образом, предельная задача описывает равновесие пластины и балки, которые скреплены друг с другом.

Докажем, что именно краевая задача (1.26)–(1.30) соответствует полученному в результате предельного перехода вариационному уравнению (1.21).

**Теорема 1.5.** *Если гладкие функции  $v, w$  удовлетворяют соотношениям (1.26)–(1.30), то пара  $(v, w)$  является решением вариационного уравнения (1.21). С другой стороны, если решение  $(v, w) \in \mathcal{H}$  вариационного уравнения (1.21) дополнительно удовлетворяет требованию  $v \in V(\Omega_S)$ , то для него верны соотношения (1.26)–(1.30).*

*Доказательство.* 1. Пусть  $v$  и  $w$  – гладкие функции, для которых справедливы соотношения (1.26)–(1.30). Непосредственно из соотношений (1.28)–(1.30) вытекает принадлежность элемента  $(v, w)$  пространству  $\mathcal{H}$ . Далее, выберем элемент  $(\bar{v}, \bar{w})$  из  $\mathcal{H}$  произвольно и рассмотрим выражение

$$L_{v,w} = \int_{\Omega} m(v) : \nabla^2 \bar{v} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_S bw_{,xx} \bar{w}_{,xx} - \int_S g \bar{w},$$

являющееся левой частью вариационного уравнения (1.21). Докажем, что это выражение равно нулю. Интегрирование по частям в первом и третьем

слагаемых с учетом уравнения (1.26) дает

$$L_{v,w} = - \int_S [m_\nu(v)] \bar{v}_{,\nu} + \int_S [t_\nu(v)] \bar{v} + \int_S ((bw_{,xx})_{,xx} - g) \bar{w}.$$

Воспользовавшись здесь соотношениями (1.27) и условием  $\bar{v} = \bar{w}$  на  $S$ , получаем, что левая часть уравнения (1.21) равна нулю. Таким образом, вариационное уравнение (1.21) доказано.

2. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть  $(v,w) \in \mathcal{H}$  является решением вариационного уравнения (1.21) и удовлетворяет требованию  $v \in V(\Omega_S)$ . Поскольку в этом случае справедливость условий (1.28)–(1.30) очевидна, то докажем лишь соотношения (1.26) и (1.27).

Подставим в (1.21) в качестве пробных функций элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\varphi, 0)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_S)$ . Находим

$$\int_{\Omega_S} m(v) : \nabla^2 \varphi = \int_{\Omega_S} f \varphi,$$

а значит дифференциальное уравнение (1.26) выполняется в смысле распределений.

Далее, выберем элемент  $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}$  произвольно, и подставим в (1.21) тестовые элементы вида  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\phi, \psi)$ . С помощью формулы Грина (1.12), приведенной в предыдущем параграфе, приходим к тождествам

$$\langle [m_\nu(v)], \phi, \nu \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [t_\nu(v)], \phi \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, \psi \rangle_{2, S} = 0,$$

означающим, что выполняются соотношения (1.27). Таким образом, мы доказали справедливость всех соотношений (1.26)–(1.30) для достаточно регулярного решения вариационного уравнения (1.21). Теорема 1.5 доказана.  $\square$

### 1.3 Оптимальное управление параметром сцепления

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления. Указанная задача состоит в том, чтобы минимизировать функционал, характеризующий отклонение решения изученной выше задачи равновесия от заданных функций, когда параметр сцепления пробегает всевозможные значения, включая бесконечность. Будет показано, что подобная постановка задачи оптимального управления корректна, а также доказано, что она имеет по меньшей мере одно решение.

Пусть  $(v_*, w_*)$  – заданный элемент пространства  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S)$ . Рассмотрим функционал

$$G(\beta) = \|v^\beta - v_*\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w^\beta - w_*\|_{H_0^2(S)},$$

где  $(v^\beta, w^\beta)$  – это решение вариационного неравенства (1.17), если  $\beta$  конечно, либо решение вариационного уравнения (1.21), если  $\beta$  равно бесконечности. Введенный таким образом функционал  $G$  определен корректно и однозначно всюду на промежутке  $[0, \infty]$  расширенной числовой прямой, поскольку для соответствующих задач (1.17) и (1.21) справедливы теоремы о существовании и единственности решений как при конечных  $\beta$ , так и при равном бесконечности (см. теорему 1.1 и замечание перед теоремой 1.4).

Задача оптимального управления имеет следующий вид:

$$\beta \in [0, \infty] : G(\beta) = \min_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}) \quad (1.31)$$

и, таким образом, задача состоит в отыскании значения  $\beta$ , при котором отклонение решения задачи равновесия  $(v^\beta, w^\beta)$  от заданных функций  $(v_*, w_*)$  минимально.

**Замечание.** Интерес к исследованию задачи (1.31) вызван обратной задачей, в которой наряду с неизвестными перемещениями  $v^\beta$ ,  $w^\beta$  пластины и балки также неизвестен и подлежит отысканию параметр сцепления



$\beta \in [0, \infty]$ , а функции  $v_*$ ,  $w_*$  соответствуют известным из наблюдения перемещениям и используются в качестве дополнительной информации.

Ответ на вопрос о существовании решения поставленной задачи оптимального управления дает следующая теорема.

**Теорема 1.6.** *Задача минимизации (1.31) имеет решение.*

*Доказательство.* Пусть  $\beta_n$  – минимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность, что

$$\beta_n \in [0, \infty], \quad G(\beta_n) \rightarrow \inf_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}).$$

Без ограничения общности можно полагать, что последовательность  $\beta_n$  является сходящейся. Возможны два случая:

1. Начиная с некоторого номера  $\beta_n \in [0, \infty)$  и при этом  $\beta_n \rightarrow \beta_*$ , где  $\beta_* \in [0, \infty]$ .
2. Начиная с некоторого номера  $\beta_n = \infty$ .

В случае 2 существование решения задачи (1.31) очевидно. В свою очередь в случае 1 по доказанным выше теоремам 1.3 и 1.4 имеет место сходимость

$$(v^{\beta_n}, w^{\beta_n}) \rightarrow (v^{\beta_*}, w^{\beta_*}) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S).$$

Используя эту сходимость, получаем, что

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|v^{\beta_n} - v_*\|_{H_0^2(\Omega)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \|w^{\beta_n} - w_*\|_{H_0^2(S)} \\ &= \|v^{\beta_*} - v_*\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w^{\beta_*} - w_*\|_{H_0^2(S)} = G(\beta_*), \end{aligned}$$

то есть в случае а) решением задачи (1.31) является  $\beta_*$ . Таким образом, решение задачи (1.31) существует и в случае 1, и в случае 2. Теорема 1.6 доказана.  $\square$

## Глава 2. Контакт тонкого препятствия и пластины Тимошенко

В предыдущей главе была рассмотрена контактная задача, в которой пластина моделировалась в рамках классической теории Кирхгофа–Лява. В данной главе рассматривается новая задача, в которой пластина при контакте с препятствием описывается в соответствии с теорией изгиба пластин Тимошенко (сравнительный анализ двух упомянутых моделей пластин читатель может найти в работах [78–81] и ссылках оттуда). Поведение препятствия по-прежнему моделируется теорией балок Бернулли–Эйлера, а на множестве возможного контакта задается условие непроникания вида неравенства. Целями главы являются доказательство разрешимости задачи равновесия, исследование предельных переходов по одному из параметров задачи равновесия – параметру сдвиговой жесткости, а также анализ связанной с задачей равновесия задачи оптимального управления.

Порядок рассуждений такой же, как и в предыдущей главе. В параграфе 2.1 мы первым делом формулируем задачу равновесия в виде краевой, а далее изучаем вариационные постановки указанной задачи и доказываем для них теорему существования. В следующем параграфе 2.2 исследуем предельные переходы по параметру, характеризующему сдвиговую жесткость пластины Тимошенко. Интерес к исследованию предельных переходов по параметру сдвиговой жесткости вызван, в частности, тем, что предельный переход при стремлении указанного параметра к бесконечности приводит к задаче, которая существенно отличается от исходной. Оказывается, что предельная задача описывает контакт тонкого препятствия с пластиной Кирхгофа–Лява, и таким образом предельный переход к бесконечности устанавливает качественную связь между двумя задачами о тонких препятствиях, в которых пластины описываются в рамках разных механических теорий. Наконец, в параграфе 2.3 изучается задача оптимального управления, в которой искомой величиной служит параметр сдвиговой жесткости. Задача оптимального управления формулируется в виде задачи минимизации заданного функционала качества, при этом при отыскании минимума к сравнению допускаются как конечные значения па-

раметра сдвиговой жесткости, так и бесконечность. Материалом для всех параграфов настоящей главы послужила статья [71].

## 2.1 Задача равновесия

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^{1,1}$ , лежащая в  $x_1x_2$ -координатной плоскости и содержащая интервал  $S$  координатной прямой  $x$ . Также считаем, что существует продолжение  $\Sigma$  множества  $S$ , представляющее собой замкнутую кривую класса  $C^{1,1}$ , делящую область  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  с границами  $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cup \Sigma$  и  $\partial\Omega_- = \Sigma$  (см. Рис. 1.1 предыдущей главы).

Мы полагаем, что область  $\Omega$  соответствует точкам пластины Тимошенко, а множество  $S$  – точкам тонкого упругого препятствия. Перемещения точек пластины при изгибе описываются определяемыми в  $\Omega$  вектор-функцией  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2$ , а также функцией  $v = v(x_1, x_2)$  (эти функции в рамках теории Тимошенко характеризуют углы поворота поперечных сечений и прогибы пластины). Перемещения точек препятствия описываются определяемой на  $S$  функцией  $w = w(x)$ .

Для описания напряженного состояния пластины Тимошенко определим тензор изгибающих моментов и в дополнение к этому введем вектор перерезывающих сил. Будем считать, что компоненты тензора моментов  $m = \{m_{ij}(\varphi)\}$  выражаются через перемещения следующим образом:

$$m(\varphi) = B\varepsilon(\varphi), \quad m_{ij}(\varphi) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\varphi),$$

где

$$\varepsilon(\varphi) = \{\varepsilon_{ij}(\varphi)\}, \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) = 1/2(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}); \quad i, j = 1, 2,$$

а тензор  $B = \{b_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , считается известным и характеризует изгибную жесткость пластины. Вектор перерезывающих сил  $q =$

$(q_1(\varphi, v), q_2(\varphi, v))$  определим по формуле

$$q_i(\varphi, v) = \Lambda_{ij}(\varphi_j - v_{,j}), \quad i = 1, 2,$$

в которой тензор  $\Lambda = \{\Lambda_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , считается известным и характеризует сдвиговую жесткость пластины. Далее всюду в данной главе будет полагаться, что выполняются принадлежности

$$b_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad \Lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad b \in L^\infty(S), \quad g \in L^2(S).$$

Для тензоров  $B$  и  $\Lambda$  предполагаются выполненными обычные свойства симметричности и положительной определенности

$$\begin{aligned} b_{ijkl} &= b_{jikl} = b_{klij}, \quad b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \\ \Lambda_{ij}\eta_j\eta_i &\geq c_1\eta_i\eta_i \quad \forall \eta_j, \quad c_0, c_1 = \text{const} > 0; \quad i, j, k, l = 1, 2, \end{aligned}$$

и функция  $b$ , которая описывает изгибную жесткость препятствия, удовлетворяет условию положительности  $b \geq c_2$  на  $S$ , где  $c_2 = \text{const} > 0$ .

Задачу равновесия можно сформулировать в виде краевой задачи следующим образом: найти функции  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $v$ , заданные в  $\Omega$ , и функцию  $w$ , заданную на  $S$ , такие, что

$$-\operatorname{div} m(\varphi) + q(\varphi, v) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} q(\varphi, v) = f \quad \text{в } \Omega_S, \quad (2.2)$$

$$[q_\nu(\varphi, v)] + (bw_{,xx})_{,xx} = g \quad \text{на } S, \quad (2.3)$$

$$[q_\nu(\varphi, v)](v - w) = 0 \quad \text{на } S, \quad (2.4)$$

$$[q_\nu(\varphi, v)] \geq 0, \quad v - w \geq 0 \quad \text{на } S, \quad (2.5)$$

$$[v] = 0, \quad [\varphi] = 0 \quad \text{на } S, \quad (2.6)$$

$$w = 0, \quad w_{,x} = 0 \quad \text{на } \partial S, \quad (2.7)$$

$$v = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.8)$$

где граничные значения перерезывающей силы пластины определяются по формуле

$$q_\nu(\varphi, v) = q(\varphi, v) \cdot \nu.$$

Соотношения (2.1), (2.2) представляют собой уравнения равновесия пластины Тимошенко. Соотношение (2.3) играет двойную роль: с одной стороны служит уравнением равновесия балки-препятствия, а с другой стороны, благодаря наличию в левой части уравнения скачка величины  $q_\nu$  учитывается воздействие препятствия на пластину. Отметим, что если в некоторой точке контакт отсутствует, то из (2.4) следует, что скачок  $[q_\nu(\varphi, v)]$  равен нулю в указанной точке. С другой стороны, те точки, в которых  $[q_\nu(\varphi, v)] > 0$ , согласно (2.4) обязаны быть точками контакта. Множество точек контакта не является известным заранее и может быть найдено только после решения задачи. Второе условие (2.5) обеспечивает взаимное непроникание пластины и препятствия. Оставшиеся соотношения (2.6)–(2.8) означают отсутствие в пластине трещин и изломов, а также закрепление внешнего края пластины и концов препятствия.

Приведем также вариационные формулировки задачи равновесия. С этой целью введем пространства Соболева  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_0^2(S)$  и определим на  $H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S)$  функционал энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) \\ & - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_S b(w,_{xx})^2 - \int_S g w. \end{aligned}$$

Введем выпуклое и замкнутое множество допустимых перемещений

$$\mathcal{L} = \{(\varphi, v, w) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : v - w \geq 0 \text{ на } S\},$$

образованное функциями, которые удовлетворяют условию непроникания на множестве возможного контакта пластины и препятствия. Теперь мы в состоянии сформулировать задачу равновесия в виде задачи минимизации

энергии: найти  $(\varphi, v, w) \in \mathcal{L}$  такой, что

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) = \min_{(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L}} \mathcal{E}(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}). \quad (2.9)$$

В свою очередь, благодаря дифференцируемости по Гато и выпуклости функционала энергии задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (\varphi, v, w) \in \mathcal{L}, \quad \forall (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L} : \\ \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\bar{\varphi} - \varphi) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\bar{\varphi} - \nabla \bar{v}) - \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) \\ - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_S b w_{,xx} (\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Анализ приведенных вариационных задач начнем с доказательства теоремы существования. Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 2.1.** *Существует постоянная  $c > 0$  такая, что*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) \geq c \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 + c \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \\ \int_S b(w_{,xx})^2 \geq c \|w\|_{H_0^1(S)}^2 \end{aligned}$$

для всех  $\varphi \in H_0^1(\Omega)^2$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)^2$ ,  $w \in H_0^1(S)$ .

*Доказательство.* Чтобы доказать первую оценку, достаточно заметить, что из условий положительной определенности тензоров  $B$  и  $\Lambda$  и неравенства Коши с «эпсилон» следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) \\ \geq c_3 \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(\varphi)|^2 + \int_{\Omega} \varphi^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right), \quad c_3 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенств Корна и Пуанкаре – Фридрихса следует первая оценка из утверждения леммы. С другой стороны, с использованием положительности функции  $b$  из неравенства Пуанкаре – Фридрихса также следует, что константу  $c$  можно подобрать так, чтобы выполнялась вторая оценка.  $\square$

Перейдем к доказательству теоремы существования.

**Теорема 2.1.** *Задача минимизации (2.9) имеет единственное решение.*

*Доказательство.* Чтобы доказать существование решения, проверим коэрцитивность функционала энергии. Благодаря оценкам из леммы 2.1 и неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi, v, w) \geq \frac{c}{2} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 + \frac{c}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + \frac{c}{2} \|w\|_{H_0^2(S)}^2 - \|g\|_{L^2(S)} \|w\|_{H_0^2(S)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \infty,$$

то есть функционал энергии  $\mathcal{E}$  коэрцитивен. В дополнение к этому, функционал энергии слабо полунепрерывен снизу, а множество  $\mathcal{L}$ , на котором он минимизируется, слабо замкнуто. Отсюда заключаем, что решение задачи минимизации (2.9) существует.

Заметим наконец, что функционал энергии  $\mathcal{E}$  строго выпуклый, а значит, он не может иметь более одного минимума. Следовательно, решение задачи (2.9) является единственным, как и утверждается в формулировке теоремы.  $\square$

Докажем теорему, дающую связь между краевой задачей (2.1)–(2.8) и вариационными постановками. При этом нам понадобится пространство

$$V(\Omega_S) = \{(\varphi, v) : q(\varphi, v) \in L^2(\Omega_S), \quad \operatorname{div} q(\varphi, v) \in L^2(\Omega_S)\},$$

а также формулы Грина вида

$$\int_{\Omega_{\pm}} q(\varphi, v) \cdot \nabla \hat{v} = - \int_{\Omega_{\pm}} \operatorname{div} q(\varphi, v) \hat{v} \mp \langle q_{\nu}^{\pm}(\varphi, v), \hat{v} \rangle_{1/2, \Sigma},$$

справедливые при  $(\varphi, v) \in V(\Omega_S)$  и  $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ . В этих формулах  $q_{\nu}^{\pm}(\varphi, v)$  являются элементами пространства  $H^{-1/2}(\Sigma)$ , сопряженного к  $H^{1/2}(\Sigma)$ , а скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Sigma}$  обозначают двойственность между  $H^{-1/2}(\Sigma)$  и  $H^{1/2}(\Sigma)$ . Складывая вместе приведенные формулы Грина, получаем формулу

$$\int_{\Omega_S} q(\varphi, v) \cdot \nabla \hat{v} = - \int_{\Omega_S} \operatorname{div} q(\varphi, v) \hat{v} - \langle [q_{\nu}(\varphi, v)], \hat{v} \rangle_{1/2, \Sigma}, \quad \hat{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (2.11)$$

которой будем пользоваться при доказательстве теоремы.

**Теорема 2.2.** *Вариационное неравенство (2.10) и краевая задача (2.1)–(2.8) эквивалентны при условии достаточной гладкости решений, а именно: если гладкие функции  $\varphi, v, w$  удовлетворяют краевой задаче (2.1)–(2.8), то элемент  $(\varphi, v, w)$  является решением вариационного неравенства (2.10); в свою очередь, если решение  $(\varphi, v, w) \in \mathcal{L}$  вариационного неравенства (2.10) таково, что дополнительно  $(\varphi, v) \in V(\Omega_S)$ , то для этого решения выполняются соотношения (2.1)–(2.8).*

*Доказательство.* При доказательстве теоремы для вариационного неравенства (2.10) удобно использовать следующее эквивалентное представление

$$\begin{aligned} (\varphi, v, w) \in \mathcal{L}, \quad \forall (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L} : \\ \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\bar{\varphi}) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot \bar{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\nabla \bar{v} - \nabla v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\
& \quad + \int_S bw_{,xx}(\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В справедливости данного представления легко убедиться, заметив, что в (2.10) в качестве тестовых можно последовательно выбрать элементы  $(\pm \bar{\varphi}, 0, 0)$  с произвольной функцией  $\bar{\varphi} \in H_0^1(\Omega)^2$  и так получить равенство (2.12), с учетом которого из (2.10) следует (2.13). Итак, нам достаточно установить, во-первых, что гладкие функции  $\varphi, v, w$ , которые удовлетворяют краевой задаче (2.1)–(2.8), также удовлетворяют соотношениям (2.12), (2.13) и, во-вторых, получить из (2.12), (2.13) все дифференциальные уравнения и краевые условия (2.1)–(2.8).

1. Пусть гладкие функции  $\varphi, v, w$  удовлетворяют (2.1)–(2.8). Очевидно, что из последнего условия (2.5) и краевых условий (2.6)–(2.8) следует принадлежность элемента  $(\varphi, v, w)$  множеству  $\mathcal{L}$ . Далее, фиксируем произвольный элемент  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L}$  и рассмотрим величины

$$\begin{aligned}
L_{\varphi} &= \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\bar{\varphi}) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot \bar{\varphi}, \\
L_{v,w} &= - \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\nabla \bar{v} - \nabla v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\
& \quad + \int_S bw_{,xx}(\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w).
\end{aligned}$$

Интегрирование по частям первого слагаемого  $L_{\varphi}$  с учетом уравнения (2.1) немедленно влечет  $L_{\varphi} = 0$ . Теперь проинтегрируем по частям первое и третье слагаемые выражения  $L_{v,w}$ . С учетом (2.2) и (2.3) будем иметь

$$L_{v,w} = \int_S [q_{\nu}(\varphi, v)](\bar{v} - v) - \int_S [q_{\nu}(\varphi, v)](\bar{w} - w).$$

Отсюда, используя (2.4), находим

$$L_{v,w} = \int_S [q_\nu(\varphi, v)] (\bar{v} - \bar{w}).$$

Принимая во внимание первое условие из (2.5) и неравенство  $\bar{v} - \bar{w} \geq 0$  на  $S$ , получаем  $L_{v,w} \geq 0$ . Таким образом, доказано, что для элемента  $(\varphi, v, w)$  одновременно выполняются  $L_\varphi = 0$  и  $L_{v,w} \geq 0$ , то есть справедливы равенство (2.12) и неравенство (2.13). Первый этап доказательства теоремы завершен.

2. Пусть, наоборот, решение  $(\varphi, v, w)$  задачи (2.12), (2.13) является достаточно гладким, а именно, дополнительно удовлетворяет требованию  $(\varphi, v) \in V(\Omega_S)$ . Докажем, что для такого решения выполняются соотношения (2.1)–(2.8).

Для начала заметим, что последнее условие из (2.5) и краевые условия (2.6)–(2.8) справедливы благодаря принадлежности  $(\varphi, v, w) \in \mathcal{L}$  и не нуждаются в доказательстве.

Докажем уравнения (2.1) и (2.2). Последовательно подставим в (2.12), (2.13) тестовые элементы  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = \pm(\eta, 0, 0)$  и  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = (\varphi, v, w) \pm (0, \chi, 0)$ , где функции  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)^2$  и  $\chi \in C_0^\infty(\Omega_S)$  выбраны произвольно. В результате такой подстановки получаем равенства

$$\int_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\eta) + \int_\Omega q(\varphi, v) \cdot \eta = 0, \quad - \int_{\Omega_S} q(\varphi, v) \cdot \nabla \chi = \int_{\Omega_S} f \chi,$$

означающие, что уравнения (2.1) и (2.2) выполняются в смысле распределений.

Остается доказать соотношения (2.3), (2.4) и первое соотношение (2.5). С этой целью применим к первому слагаемому неравенства (2.13) формулу Грина (2.11). Принимая во внимание уравнение равновесия (2.2), находим

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \bar{v} - v \rangle_{1/2, \Sigma} + \int_S b w_{,xx} (\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0.$$

Пусть скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,S}$  обозначают двойственность между пространством  $H_0^2(S)$  и сопряженным к нему  $H^{-2}(S)$ . Тогда найденное неравенство означает, что

$$\begin{aligned} \langle [q_\nu(\varphi, v)], \bar{v} - v \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, \bar{w} - w \rangle_{2,S} \geq 0, \\ \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \quad \bar{v} - \bar{w} \geq 0 \text{ на } S. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Докажем справедливость оставшихся соотношений (2.3)–(2.5), поочередно выбирая в неравенстве (2.14) тестовые функции специального вида. Сначала подставим в (2.14) тестовый элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) + (\xi, 0)$ , где  $\xi \in H_0^1(\Omega)$  и  $\xi \geq 0$  на  $S$ . Такая подстановка влечет

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \xi \rangle_{1/2, \Sigma} \geq 0,$$

то есть, благодаря неотрицательности и произвольности  $\xi$ , выполняется первое условие (2.5). Следующим шагом выберем в (2.14) тестовые элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\psi, \rho)$ , где  $(\psi, \rho) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S)$ :  $\psi = \rho$  на  $S$ . Получаем выражение

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \psi \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, \rho \rangle_{2,S} = 0,$$

из которого следует уравнение (2.3). Наконец, последовательно подставим в (2.14) тестовые элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$  и  $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v, w)$ . Тогда находим

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], v \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle (bw_{,xx})_{,xx} - g, w \rangle_{2,S} = 0,$$

что означает справедливость соотношения (2.4). Таким образом, доказано, что достаточно гладкое решение вариационной задачи (2.12), (2.13) удовлетворяет всем соотношениям (2.1)–(2.8). Теорема полностью доказана.  $\square$

## 2.2 Предельные переходы по параметру сдвиговой жесткости

Рассмотрим задачу равновесия вида (2.1)–(2.8) с уравнением состояния специального вида

$$q^\lambda(\varphi, v) = \lambda \Lambda(\varphi - \nabla v); \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Напомним, что в рамках теории Тимошенко разность  $\varphi - \nabla v$  выражает деформации сдвига, а тензор  $\Lambda$  характеризует свойства материала, из которого изготовлена пластина: заданные компоненты указанного тензора зависят от модулей сдвига (см. [80–82]). Таким образом, входящий в приведенное уравнение состояния параметр  $\lambda$  характеризует сдвиговую жесткость пластины: чем он больше, тем более жесткой является пластина при деформациях сдвига. В связи с этим будем называть величину  $\lambda$  параметром сдвиговой жесткости.

При каждом фиксированном  $0 < \lambda < \infty$  формулировка задачи равновесия состоит в следующем. Найти функции  $\varphi^\lambda = (\varphi_1^\lambda, \varphi_2^\lambda)$ ,  $v^\lambda$ , заданные в  $\Omega$ , и функцию  $w^\lambda$ , заданную на  $S$ , такие, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} m(\varphi^\lambda) + q^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} q^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda) &= f \quad \text{в } \Omega_S, \\ [q_\nu^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda)] + (bw^\lambda_{,xx})_{,xx} &= g \quad \text{на } S, \\ [q_\nu^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda)](v^\lambda - w^\lambda) &= 0 \quad \text{на } S, \\ [q_\nu^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda)] \geq 0, \quad v^\lambda - w^\lambda \geq 0 &\quad \text{на } S, \\ [v^\lambda] = 0, \quad [\varphi^\lambda] = 0 &\quad \text{на } S, \\ w^\lambda = 0, \quad w^\lambda_{,x} = 0 &\quad \text{на } \partial S, \\ v^\lambda = 0, \quad \varphi^\lambda = 0 &\quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $q_\nu^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda) = q^\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot \nu$ . По теореме 2.1 предыдущего параграфа каждому  $\lambda \in (0, \infty)$  соответствует единственное вариационное решение за-

дачи равновесия. При всех допустимых значениях  $\lambda$  соответствующие вариационные решения образуют семейство, каждый элемент которого удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned}
& (\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in \mathcal{L}, \quad \forall (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L} : \\
& \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\bar{\varphi} - \varphi^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\bar{\varphi} - \nabla \bar{v}) \\
& \quad - \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\lambda) \\
& \quad + \int_S b w_{,xx}^\lambda (\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}^\lambda) - \int_S g(\bar{w} - w^\lambda) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Наша ближайшая цель – исследовать сходимость семейства решений  $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ , когда параметр  $\lambda$  стремится к различным значениям.

### Параметр сдвиговой жесткости стремится к заданному положительному числу

Докажем теорему, демонстрирующую, что при стремлении параметра сдвиговой жесткости к конечному положительному числу для вариационного неравенства имеет место непрерывная зависимость решений.

**Теорема 2.3.** *Пусть параметр сдвиговой жесткости  $\lambda$  стремится к заданному числу  $\lambda_0 \in (0, \infty)$ . Тогда для соответствующего семейства решений вариационного неравенства (2.15) выполняется сходимость*

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \rightarrow (\varphi, v, w) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S), \tag{2.16}$$

где  $(\varphi, v, w)$  – это решение вариационного неравенства (2.15), в котором  $\lambda$  равно  $\lambda_0$ .

*Доказательство.* Установим сначала, что сходимость вида (2.16) выполняется в слабом смысле. Семейство решений  $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$  является ограниченным равномерно по параметру  $\lambda$ . Действительно, подставляя в (2.15)

тестовые элементы  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$  и  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) \\ + \int_S b(w^\lambda,_{xx})^2 = \int_{\Omega} f v^\lambda + \int_S g w^\lambda. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Применяя к левой части равенства лемму 2.1, а к правой неравенство Коши – Буняковского, легко находим оценки

$$\begin{aligned} \|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq c_4, \quad \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_4, \\ \|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \leq c_4; \quad c_4 = \text{const} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

которые справедливы равномерно по  $\lambda \geq \text{const} > 0$ . Оценки (2.18) позволяют выбрать подпоследовательность (сохраним для неё прежнее обозначение) такую, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \rightarrow (\varphi, v, w) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) \quad (2.19)$$

при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Выясним природу предельного в (2.19) элемента. Заметим, что из слабой замкнутости множества  $\mathcal{L}$  следует принадлежность предельного элемента этому множеству. В то же время, опираясь на сходимость (2.19), возможно перейти к верхнему пределу при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  в левой части вариационного неравенства (2.15). В результате указанного предельного перехода получаем

$$\begin{aligned} (\varphi, v, w) \in \mathcal{L}, \quad \forall (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{L} : \\ \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\bar{\varphi} - \varphi) + \lambda_0 \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\bar{\varphi} - \nabla \bar{v}) \\ - \lambda_0 \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\ + \int_S b w_{,xx}(\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, нами получена вариационная задача, решением которой является предельный в (2.19) элемент. Отметим, что полученная предельная задача представляет не что иное, как вариационное неравенство вида (2.15), в котором параметр жесткости  $\lambda$  принимает значение  $\lambda_0$ .

Остается доказать, что из сходимости (2.19) следует сильная сходимость (2.16). Действительно, с учетом (2.19) из (2.17), (2.20) несложно получить сходимость

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int_S b(w_{,xx}^\lambda)^2 &= \int_{\Omega} f v^\lambda + \int_S g w^\lambda \\ \rightarrow \int_{\Omega} f v + \int_S g w &= \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \lambda_0 \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) + \int_S b(w_{,xx})^2 \end{aligned}$$

при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Благодаря лемме 2.1 полученная сходимость влечет сходимость норм

$$\|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \rightarrow \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}, \quad \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \|w\|_{H_0^2(S)}$$

при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , которая вместе с (2.19) дает требуемую сходимость (2.16).  $\square$

### Параметр сдвиговой жесткости стремится к бесконечности

Теперь перейдем к анализу предельного перехода  $\lambda \rightarrow \infty$  в вариационном неравенстве (2.15). Для начала, выбирая в (2.15) тестовые элементы  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$  и  $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ , для всех фиксированных значений параметра  $\lambda$  получаем тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) \\ + \int_S b(w_{,xx}^\lambda)^2 = \int_{\Omega} f v^\lambda + \int_S g w^\lambda, \end{aligned} \quad (2.21)$$

из которого следуют оценки

$$\|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq c_5, \quad \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_5, \quad (2.22)$$

$$\|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \leq c_5; \quad c_5 = \text{const} \geq 0. \quad (2.23)$$

Более того, тождество (2.21) также влечет неравенство

$$\int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) \leq \frac{c_6}{\lambda}, \quad c_6 = \text{const} \geq 0, \quad (2.24)$$

и, следовательно, дает дополнительную оценку

$$\|\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{c_7}{\sqrt{\lambda}}, \quad c_7 = \text{const} \geq 0. \quad (2.25)$$

Оценки (2.22) позволяют считать, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \rightarrow (\varphi, v, w) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S), \quad (2.26)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ , а дополнительная оценка (2.25) влечет равенство

$$\varphi = \nabla v \text{ в } \Omega. \quad (2.27)$$

Так как при фиксированном  $\lambda$  элемент  $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$  принадлежит слабо замкнутому множеству  $\mathcal{L}$ , из сходимости (2.26) следует, что выполняется принадлежность  $(\varphi, v, w) \in \mathcal{L}$ . Вместе с тем равенство (2.27) обеспечивает дополнительную гладкость функции  $v$ . Из сказанного вытекает, что элемент  $(v, w)$  принадлежит множеству допустимых перемещений

$$\mathcal{K} = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S) : v - w \geq 0 \text{ на } S\}.$$

Примечательно, что данное множество использовалось при постановке задач из параграфа 1.1 предыдущей главы.

Теперь мы в состоянии, используя (2.26) и (2.27), осуществить предельный переход при  $\lambda \rightarrow \infty$  в вариационном неравенстве (2.15). Для этого выберем произвольно  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}$  и подставим в (2.15) пробный элемент



$(\nabla\bar{v}, \bar{v}, \bar{w})$ . В результате такой подстановки будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\nabla\bar{v}) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\lambda) + \int_S bw_{,xx}^\lambda \bar{w}_{,xx} - \int_S g(\bar{w} - w^\lambda) \\ \geq \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int_S b(w_{,xx}^\lambda)^2. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в левой части указанного неравенства и к нижнему пределу в правой части, с учетом (2.27) получаем

$$\begin{aligned} (v, w) \in \mathcal{K}, \quad \forall(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K} : \\ \int_{\Omega} m(\nabla v) : \varepsilon(\nabla\bar{v} - \nabla v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\ + \int_S bw_{,xx}(\bar{w}_{,xx} - w_{,xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Полученное вариационное неравенство представляет задачу, решением которой является предельный в (2.26) элемент. Смысл задачи равновесия, соответствующей полученному вариационному неравенству, будет объяснен позже. А сейчас усилим полученный результат о сходимости, доказав, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \rightarrow (\nabla v, v, w) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) \quad (2.29)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . С этой целью заметим, что в дополнение к (2.26) и (2.27) выполняется сходимость норм

$$\begin{aligned} \|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \rightarrow \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}, \quad \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \\ \|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \|w\|_{H_0^2(S)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Действительно, из (2.21) несложно получить соотношение

$$\int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int_S b(w_{,xx}^\lambda)^2 \leq \int_{\Omega} f v^\lambda + \int_S g w^\lambda, \quad (2.31)$$

а из (2.28) несложно прийти к выражению

$$\int_{\Omega} f v + \int_S g w = \int_{\Omega} m(\nabla v) : \varepsilon(\nabla v) + \int_S b(w,_{xx})^2. \quad (2.32)$$

Переходя к верхнему пределу в соотношении (2.31) с учетом сходимости (2.26) и выражения (2.32), находим

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int_S b(w,_{xx}^\lambda)^2 \right) \leq \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_S b(w,_{xx})^2.$$

В дополнение к найденной аналогичная оценка с обратным знаком справедлива для нижнего предела, следовательно

$$\int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int_S b(w,_{xx}^\lambda)^2 \rightarrow \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_S b(w,_{xx})^2$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Отсюда, принимая во внимание (2.24) и (2.27), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int_S b(w,_{xx}^\lambda)^2 \\ \rightarrow \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) + \int_S b(w,_{xx})^2 \end{aligned}$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Полученная сходимость в силу леммы 2.1 влечет сходимость норм (2.30), которая вместе с (2.26), (2.27) дает сильную сходимость (2.29).

Найденное в результате предельного перехода вариационное неравенство (2.28) можно переформулировать, используя обозначение  $\nabla^2 v$  для матрицы Гессе функции  $v$ :

$$(v, w) \in \mathcal{K}, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K} :$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B \nabla^2 v : (\nabla^2 \bar{v} - \nabla^2 v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) \\ + \int_S b w,_{xx} (\bar{w},_{xx} - w,_{xx}) - \int_S g(\bar{w} - w) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.4.** *Пусть параметр сдвиговой жесткости  $\lambda$  стремится к бесконечности. Тогда соответствующее семейство решений вариационного неравенства (2.15) сходится к решению вариационного неравенства (2.33) в смысле сходимости (2.29).*

Теперь дадим поясняющие комментарии к полученной в результате предельного перехода задаче. Эта задача описывает равновесие пластины Кирхгофа – Лява, контактирующей с балкой Бернулли – Эйлера. Задача равновесия в похожей постановке изучалась в предыдущей главе данной диссертации. В сущности, вариационное неравенство (2.33) есть частный случай неравенства (1.9) из параграфа 1.1 предыдущей главы, в котором параметр  $\beta$  равен нулю, поэтому для (2.33) также справедливы результаты параграфа 1.1. В частности, теорема 1.1 дает однозначную разрешимость для (2.33) независимо от теоремы 2.4, а из теоремы 1.2 следует, что (2.33) является слабой постановкой следующей краевой задачи: найти функцию  $v = v(x_1, x_2)$ , заданную в  $\Omega$ , и функцию  $w = w(x)$ , заданную на  $S$ , такие, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{div} (B \nabla^2 v) &= f \quad \text{в } \Omega_S, \\ [m_\nu(v)] &= 0 \quad \text{на } S, \\ [t_\nu(v)] + (bw_{,xx})_{,xx} &= g \quad \text{на } S, \\ [t_\nu(v)](v - w) &= 0 \quad \text{на } S, \\ [t_\nu(v)] \geq 0, \quad v - w \geq 0 &\quad \text{на } S, \\ [v] = 0, \quad [v, \nu] = 0 &\quad \text{на } S, \\ w = 0, \quad w_{,x} = 0 &\quad \text{на } \partial S, \\ v = 0, \quad v_{,n} = 0 &\quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Как показывает вид дифференциальных уравнений и краевых условий, приведенная задача описывает односторонний контакт пластины Кирхгофа – Лява и тонкого упругого препятствия без сцепления (идеальный односторонний контакт).

### 2.3 Оптимальное управление параметром сдвиговой жесткости

Теперь приступим к изучению задачи оптимального управления, в которой искомой величиной служит параметр сдвиговой жесткости пластины Тимошенко, контактирующей с балкой-препятствием. В этой задаче требуется отыскать значение параметра, доставляющее минимум определенному функционалу качества, причем считается, что среди возможных значений искомого параметра содержится бесконечность. Функционал качества при этом характеризует отклонение точек пластины и препятствия от заданных функций. Нашей целью является продемонстрировать, что подобная постановка задачи оптимального управления корректна и доказать для неё теорему о существовании решения.

Пусть функции  $\varphi_* \in H_0^1(\Omega)^2$ ,  $v_* \in H_0^1(\Omega)$ ,  $w_* \in H_0^2(S)$  известны. Определим на промежутке  $[\lambda_0, \infty]$ , где  $\lambda_0 = \text{const} > 0$ , следующий функционал

$$G(\lambda) = \|\varphi^\lambda - \varphi_*\|_{H_0^1(\Omega)^2} + \|v^\lambda - v_*\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w^\lambda - w_*\|_{H_0^2(S)}. \quad (2.34)$$

Здесь и далее будем считать, что при  $\lambda < \infty$  функции  $\varphi^\lambda$ ,  $v^\lambda$ ,  $w^\lambda$  задаются непосредственно решением вариационного неравенства (2.15) из параграфа 2.1, функции  $v^\infty$ ,  $w^\infty$  задаются решением вариационного неравенства (2.33) предыдущего параграфа, а функция  $\varphi^\infty$  определяется равенством  $\varphi^\infty = \nabla v^\infty$  в  $\Omega$ .

Отметим, что при определении функционала (2.34) конечным значениям параметра  $\lambda$  и значению бесконечность соответствуют решения различных задач равновесия. Более того, при  $\lambda < \infty$  и  $\lambda = \infty$  поведение контактирующих с препятствиями пластин моделируется в рамках различных теорий: Тимошенко и Кирхгофа – Лява соответственно. В то же время, функционал (2.34) определен корректно и однозначно, поскольку для вариационных задач (2.15) и (2.33) выше доказаны теоремы о существовании и единственности решений (теорема 2.1 предыдущего параграфа и теорема 1.1 первой главы).

**Замечание.** Интерес к исследованию задач оптимального управления с функционалом вида (2.34) вызван обратной задачей идентификации параметра сдвиговой жесткости  $\lambda$ , в которой конкретная модель контактирующей с препятствием пластины не является известной заранее, но предполагается, что это либо пластина Кирхгофа–Лява, либо пластина Тимошенко. Функции  $\varphi_*$ ,  $v_*$ ,  $w_*$  соответствуют полученным в результате наблюдения перемещениям пластины и препятствия и используются в качестве дополнительной информации.

Задача оптимального управления состоит в следующем: найти такое  $\lambda \in [\lambda_0, \infty]$ , что

$$G(\lambda) = \min_{\bar{\lambda} \in [\lambda_0, \infty]} G(\bar{\lambda}). \quad (2.35)$$

Сформулируем и докажем для этой задачи теорему существования.

**Теорема 2.5.** *Задача оптимального управления (2.35) имеет решение.*

*Доказательство.* Рассмотрим минимизирующую последовательность  $\lambda_n$  такую, что

$$\lambda_n \in [\lambda_0, \infty], \quad G(\lambda_n) \rightarrow \min_{\bar{\lambda} \in [\lambda_0, \infty]} G(\bar{\lambda}). \quad (2.36)$$

Без ограничения общности можно полагать, что последовательность  $\lambda_n$  является сходящейся. Возможны только три случая:

1.  $\lambda_n < \infty$  для  $n \geq n_0$  и  $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ , где  $\lambda_* < \infty$ ;
2.  $\lambda_n < \infty$  для  $n \geq n_0$  и  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ;
3.  $\lambda_n = \infty$  для  $n \geq n_0$ .

Существование решения задачи (2.35) в последнем случае очевидно, рассмотрим первый и второй случаи. Опираясь на результаты предыдущего параграфа, по теоремам 2.3 и 2.4 находим, что выполняется либо сходимость

$$(\varphi^{\lambda_n}, v^{\lambda_n}, w^{\lambda_n}) \rightarrow (\varphi^{\lambda_*}, v^{\lambda_*}, w^{\lambda_*}) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S),$$

либо сходимость

$$(\varphi^{\lambda_n}, v^{\lambda_n}, w^{\lambda_n}) \rightarrow (\varphi^\infty, v^\infty, w^\infty) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S),$$

в зависимости от того, какой именно из первых двух случаев реализуется. Из указанных сходимостей следует либо сходимость  $G(\lambda_n) \rightarrow G(\lambda_*)$ , либо сходимость  $G(\lambda_n) \rightarrow G(\infty)$ . Отсюда в силу определения (2.36) минимизирующей последовательности вытекает, что  $\lambda_*$  и  $\infty$  являются точками минимума функционала  $G$  в первом и во втором случае соответственно. Таким образом, доказано, что для всех возможных случаев сходимости минимизирующей последовательности решение задачи оптимального управления (2.35) существует.  $\square$

### Глава 3. Контакт тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение

В данной главе приведены результаты исследования задач, описывающих контакт тонких препятствий с пластинами, содержащими тонкие включения. Включения при этом могут иметь различную природу: быть как деформируемыми (упругие балки), так и жесткими (термин «тонкое жесткое включение» означает, что след перемещений на заданной линии имеет предписанную структуру, при которой изгибные деформации равны нулю). Проводится исследование предельного перехода по параметру жесткости упругого включения и анализ предельной задачи при стремлении указанного параметра к бесконечности. Устанавливается, что хотя до предельного перехода включение является упругим, но получаемая в предельном случае задача описывает контакт препятствия и пластины, содержащей тонкое жесткое включение. Для предельного случая анализируется краевая задача, в частности, условия сопряжения тонкого препятствия и включения в точке их контакта. Материалом для написания главы послужила работа [45].

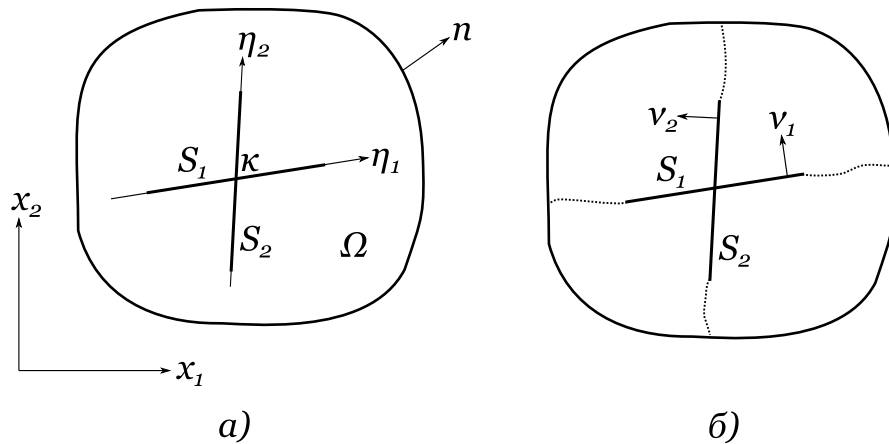


Рисунок 3.1 — Геометрия задач во второй главе

Геометрия задач, исследуемых в данной главе, отличается от геометрии задач, исследуемых до этого момента (см. Рис. 3.1, а)). Теперь будем считать, что внутри ограниченной области  $\Omega$ , отвечающей пластине, содержатся два интервала,  $S_1$  и  $S_2$ , лежащие соответственно на координатных

прямых  $\eta_1$  и  $\eta_2$  и пересекающиеся в единственной точке  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ . В рамках используемой модели множества  $S_1$  и  $S_2$  отвечают точкам препятствия и включения соответственно. Введем ряд обозначений, которые будут использоваться в данной главе:  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $\Omega_S = \Omega \setminus \bar{S}$ ,  $\dot{S}_1 = S_1 \setminus S_2$ ,  $\dot{S}_2 = S_2 \setminus S_1$ ,  $\dot{S} = \dot{S}_1 \cup \dot{S}_2$ . Через  $n$ , как и ранее, обозначаем единичную внешнюю нормаль к  $\partial\Omega$ , а через  $\nu$  и  $\tau$  будем обозначать единичные нормальный и касательный к  $\dot{S}$  векторы (при этом  $\nu$  определяется следующим образом:  $\nu = \nu_1$  на  $\dot{S}_1$  и  $\nu = \nu_2$  на  $\dot{S}_2$ , где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – это единичные векторы, ортогональные к  $S_1$  и  $S_2$  соответственно; а  $\tau$  определяется из условия ортогональности вектору  $\nu$ ). Считаем, что множество  $S$  может быть продолжено до  $\partial\Omega$  так, что область  $\Omega$  разбивается этим продолжением на подобласти с липшицевыми границами (подобно тому, как изображено на Рис. 3.1, б)).

### 3.1 Постановка задачи

Задачу о контакте пластины и тонкого препятствия при наличии тонкого включения можно поставить следующим образом. Найти функции  $v = v(x_1, x_1)$ ,  $w = w(\eta_1)$ ,  $u = u(\eta_2)$ , определенные на множествах  $\Omega$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и характеризующие прогибы пластины, препятствия, включения соответственно, которые удовлетворяют соотношениям

$$(b_{ijkl}v_{,kl})_{,ij} = f \text{ в } \Omega_S, \quad (3.1)$$

$$v - w \geq 0 \text{ на } S_1, \quad v = u \text{ на } S_2, \quad [v] = 0, \quad [v_{,\nu}] = 0 \text{ на } \dot{S}, \quad (3.2)$$

$$[m_\nu(v)] = 0 \text{ на } \dot{S}, \quad \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]v + \int_{S_1} w_{,11}w_{,11} + \int_{S_2} u_{,22}u_{,22} = 0, \quad (3.3)$$

$$\int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]\bar{v} + \int_{S_1} w_{,11}\bar{w}_{,11} + \int_{S_2} u_{,22}\bar{u}_{,22} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K}, \quad (3.4)$$

$$v = 0, \quad v_{,n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad w = 0, \quad w_{,1} = 0 \text{ на } \partial S_1. \quad (3.5)$$



Здесь

$$\begin{aligned} f &\in L^2(\Omega), \quad b_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \\ b_{ijkl} &= b_{jikl} = b_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \\ b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} &\geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \\ w_{,1} &= \frac{dw}{d\eta_1}, \quad u_{,2} = \frac{du}{d\eta_2}, \quad v_{,\nu} = \nabla v \cdot \nu, \quad [v] = v^+|_{\dot{S}} - v^-|_{\dot{S}}. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (3.1) представляет собой уравнение равновесия пластины. На множестве  $S$  задаются условия сопряжения пластины с препятствием и включением. К ним, в частности, относятся условия (3.2), которые обеспечивают непроникание пластины и препятствия, склейку пластины и включения, а также отсутствие трещин и изломов в пластине. Краевые условия (3.3) и (3.4) накладываются на изгибающий момент  $m_\nu$  и перерезывающую силу  $t_\nu$  и выражают принцип виртуальных работ (величины  $m_\nu$  и  $t_\nu$  определяются на множестве  $\dot{S}$  по формулам (1.8)). Множество допустимых перемещений определено следующим образом:

$$\mathcal{K} = \{(v, w, u) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S_1) \times H^2(S_2) : v - w \geq 0 \text{ на } S_1, v = u \text{ на } S_2\}.$$

Уравнения (3.5) описывают закрепление пластины на краю и препятствия на концах. Концы включения считаются свободными.

Задачу о равновесии пластины, контактирующей с тонким упругим препятствием и содержащей тонкое упругое включение, можно также сформулировать в виде вариационной задачи

$$\inf_{(v, w, u) \in \mathcal{K}} \mathcal{E}(v, w, u), \quad (3.6)$$

в которой минимизируется функционал

$$\mathcal{E}(v, w, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_{S_1} (w_{,11})^2 + \frac{1}{2} \int_{S_2} (u_{,22})^2, \quad (3.7)$$

выражающий полную потенциальную энергию. Заметим, что функционал  $\mathcal{E}$  является выпуклым и дифференцируемым по Гато, а также что он ми-

нимизируется на выпуклом множестве. Поэтому задача минимизации (3.6) эквивалентна следующему вариационному неравенству

$$(v, w, u) \in \mathcal{K}, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K} : \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} (\bar{v} - v)_{,ij} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_{S_1} w_{,11} (\bar{w} - w)_{,11} + \int_{S_2} u_{,22} (\bar{u} - u)_{,22} \geq 0.$$

Докажем, что задачи (3.1)–(3.5) и (3.8) эквивалентны на классе достаточно гладких функций. При этом нам понадобится подходящая формула интегрирования по частям. Напомним, что согласно сделанному в начале главы предположению существует продолжение множества  $S$  до  $\partial\Omega$ , разбивающее исходную область на подобласти с липшицевыми границами. Будем считать, что в указанных подобластях выполняются формулы Грина, складывая которые, получаем

$$\int_{\Omega_S} b_{ijkl} v_{,kl} \tilde{v}_{,ij} - \int_{\Omega_S} (b_{ijkl} v_{,kl})_{,ij} \tilde{v} = - \int_{\dot{S}} [m_\nu(v)] \tilde{v}_{,\nu} + \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)] \tilde{v}, \quad \tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega).$$

В таком случае, поскольку пространство  $C_0^\infty(\Omega)$  плотно в  $H_0^2(\Omega)$ , также справедлива формула

$$\int_{\Omega_S} b_{ijkl} v_{,kl} \tilde{v}_{,ij} - \int_{\Omega_S} (b_{ijkl} v_{,kl})_{,ij} \tilde{v} = - \int_{\dot{S}} [m_\nu(v)] \tilde{v}_{,\nu} + \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)] \tilde{v}, \quad (3.9)$$

в которой пробная функция  $\tilde{v}$  принадлежит пространству  $H_0^2(\Omega)$ .

**Теорема 3.1.** *Задача (3.1)–(3.5) и вариационное неравенство (3.8) эквивалентны на классе достаточно гладких функций.*

*Доказательство.* 1. Пусть функции  $v$ ,  $w$ ,  $u$  достаточно гладкие и удовлетворяют условиям (3.1)–(3.5). Докажем, что тройка  $(v, w, u)$  является решением вариационного неравенства (3.8). Сначала заметим, что в силу соотношений (3.2) и (3.5) выполняется условие  $(v, w, u) \in \mathcal{K}$ . Выберем элемент

$(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K}$  произвольным. Умножив обе части уравнения (3.1) на  $\bar{v} - v$  и проинтегрировав в области  $\Omega_S$ , получаем

$$\int_{\Omega_S} (b_{ijkl}v_{,kl})_{,ij}(\bar{v} - v) = \int_{\Omega_S} f(\bar{v} - v).$$

С учетом формулы Грина (3.9) и условий из (3.2), отсюда следует

$$\int_{\Omega} b_{ijkl}v_{,kl}(\bar{v} - v)_{,ij} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) = - \int_{\dot{S}} [m_\nu(v)](\bar{v} - v)_{,\nu} + \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)](\bar{v} - v).$$

Правую часть полученного равенства можно оценить с помощью условий (3.3) и (3.4):

$$- \int_{\dot{S}} [m_\nu(v)](\bar{v} - v)_{,\nu} + \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)](\bar{v} - v) \geq - \int_{S_1} w_{,11}(\bar{w} - w)_{,11} - \int_{S_2} u_{,22}(\bar{u} - u)_{,22},$$

таким образом, справедливость вариационного неравенства (3.8) доказана.

2. Теперь пусть  $(v, w, u)$  – достаточно гладкое решение вариационного неравенства (3.8) такое, что справедлива формула Грина (3.9). Очевидно, что для него выполняются условия (3.2) и (3.5). Докажем уравнение (3.1) и краевые условия (3.3), (3.4). Подставим  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = (v \pm \varphi, w, u)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_S)$  в (3.8) в качестве пробных элементов. Получаем равенство

$$\int_{\Omega_S} b_{ijkl}v_{,kl}\varphi_{,ij} = \int_{\Omega_S} f\varphi,$$

которое означает, что функция  $v$  удовлетворяет уравнению равновесия (3.1) в смысле распределений. С учетом доказанного уравнения применим к (3.8) формулу Грина (3.9). Получаем неравенство

$$\begin{aligned} - \int_{\dot{S}} [m_\nu(v)](\bar{v} - v)_{,\nu} + \int_{\dot{S}} [t_\nu(v)](\bar{v} - v) + \int_{S_1} w_{,11}(\bar{w} - w)_{,11} \\ + \int_{S_2} u_{,22}(\bar{u} - u)_{,22} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Докажем первое условие из (3.3). С этой целью подставим в (3.10) пробные элементы  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = (v \pm \phi, w, u)$ ,  $\phi \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\phi = 0$  на  $\mathring{S}$ . Приходим к соотношению

$$\int_{\mathring{S}} [m_\nu(v)] \phi_{,\nu} = 0,$$

из которого в силу произвольности функции  $\phi$  и её носителя следует требуемое условие из (3.3). Наконец, последовательно выбрав  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = (0, 0, 0)$  и  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = 2(v, w, u)$  в (3.10) в роли пробных элементов, будем иметь

$$-\int_{\mathring{S}} [m_\nu(v)] v_{,\nu} + \int_{\mathring{S}} [t_\nu(v)] v + \int_{S_1} w_{,11} w_{,11} + \int_{S_2} u_{,22} u_{,22} = 0,$$

$$-\int_{\mathring{S}} [m_\nu(v)] \bar{v}_{,\nu} + \int_{\mathring{S}} [t_\nu(v)] \bar{v} + \int_{S_1} w_{,11} \bar{w}_{,11} + \int_{S_2} u_{,22} \bar{u}_{,22} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K}.$$

Учитывая доказанное условие из (3.3), получаем оставшиеся соотношения из (3.3) и (3.4). Таким образом, достаточно гладкое решение вариационного неравенства (3.8) удовлетворяет всем условиям (3.1)–(3.5) исходной краевой задачи. Доказательство эквивалентности формулировок задачи (3.1)–(3.5) и (3.8) на классе достаточно гладких решений завершено.  $\square$

Поскольку вариационное неравенство (3.8) и задача минимизации (3.6) эквивалентны, из доказанного также следует эквивалентность задач (3.1)–(3.5) и (3.6) на классе достаточно гладких решений.

Теперь приступим к анализу разрешимости вариационных задач (3.6) и (3.8). Перед этим докажем вспомогательную лемму.

**Лемма 3.1.** *Существует константа  $c > 0$  такая, что справедлива оценка*

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} + \int_{S_1} (w_{,11})^2 + \int_{S_2} (u_{,22})^2 \geq c \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + c \|w\|_{H_0^2(S_1)}^2 + c \|u\|_{H^2(S_2)}^2$$

для всех  $(v, w, u) \in \mathcal{K}$ .

*Доказательство.* Благодаря условию положительной определенности тензора  $B = \{b_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , и неравенству Пуанкаре – Фридрихса суще-

ствуют такие константы  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$ , что верна оценка

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} + \int_{S_1} (w_{,11})^2 \geq c_1 \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + c_2 \|w\|_{H_0^2(S_1)}^2.$$

Заметим, во-первых, что в силу условия  $v = u$  на  $S_2$  и непрерывности операторов следа и вложения можно подобрать такую константу  $c_3 > 0$ , что выполняется неравенство

$$\frac{c_1}{2} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - c_3 \int_{S_2} u^2 \geq 0.$$

Во-вторых, неравенство Пуанкаре – Фридрихса влечет, что с некоторой константой  $c_4 > 0$  выполняется

$$c_3 \int_{S_2} u^2 + \int_{S_2} (u_{,22})^2 \geq c_4 \|u\|_{H^2(S_2)}^2.$$

Складывая найденные неравенства, получаем

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} + \int_{S_1} (w_{,11})^2 + \int_{S_2} (u_{,22})^2 \geq \frac{c_1}{2} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + c_2 \|w\|_{H_0^2(S_1)}^2 + c_4 \|u\|_{H^2(S_2)}^2.$$

В качестве постоянной  $c > 0$  достаточно взять наименьшую из величин  $c_1/2$ ,  $c_2$  и  $c_4$ .  $\square$

**Теорема 3.2.** *Задача минимизации (3.6) имеет единственное решение.*

*Доказательство.* Функционал энергии  $\mathcal{E}$ , минимизируемый в задаче (3.6), является слабо полунепрерывным снизу. В дополнение к этому множество  $\mathcal{K}$ , на котором он минимизируется, является слабо замкнутым. В этом случае для разрешимости задачи (3.6) достаточно коэрцитивности функционала  $\mathcal{E}$ , которая легко следует из доказанной выше леммы 3.1. В то же время, решение задачи (3.6) единственно в силу сильной выпуклости функционала  $\mathcal{E}$ .  $\square$

### 3.2 Пределный переход по параметру жесткости включения

Теперь рассмотрим задачу равновесия, содержащую положительный параметр  $\alpha$ :

$$(b_{ijkl}v_{,kl}^\alpha)_{,ij} = f \text{ в } \Omega_S, \quad (3.11)$$

$$v^\alpha - w^\alpha \geq 0 \text{ на } S_1, \quad v^\alpha = u^\alpha \text{ на } S_2, \quad [v^\alpha] = 0, \quad [v_{,\nu}^\alpha] = 0 \text{ на } \mathring{S}, \quad (3.12)$$

$$[m_\nu(v^\alpha)] = 0 \text{ на } \mathring{S}, \quad \int_{\mathring{S}} [t_\nu(v^\alpha)]v^\alpha + \int_{S_1} w_{,11}^\alpha w_{,11}^\alpha + \alpha \int_{S_2} u_{,22}^\alpha u_{,22}^\alpha = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_{\mathring{S}} [t_\nu(v^\alpha)]\bar{v} + \int_{S_1} w_{,11}^\alpha \bar{w}_{,11} + \alpha \int_{S_2} u_{,22}^\alpha \bar{u}_{,22} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K}, \quad (3.14)$$

$$v^\alpha = 0, \quad v_{,n}^\alpha = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad w^\alpha = 0, \quad w_{,1}^\alpha = 0 \text{ на } \partial S_1, \quad (3.15)$$

Параметр  $\alpha$  отвечает за изгибную жесткость тонкого включения. Продемонстрируем это. Выберем в условии (3.14) в качестве пробных элементы  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = (\pm\phi, 0, \pm\varphi)$ ,  $\varphi = \phi$  на  $S_2$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus (S_1 \cup \partial S_2))$ . Будем иметь

$$\int_{\mathring{S}_2} [t_\nu(v^\alpha)]\varphi + \alpha \int_{\mathring{S}_2} u_{,22}^\alpha \varphi_{,22} = 0$$

для всех  $\varphi \in C_0^\infty(\mathring{S}_2)$ . Это означает, что для решений задачи (3.11)–(3.15) выполняется уравнение

$$-\alpha u_{,2222}^\alpha = [t_\nu(v^\alpha)] \text{ на } \mathring{S}_2$$

в смысле распределений. Полученное уравнение выражает взаимосвязь прогиба балки и приложенной к ней со стороны пластины нагрузки в рамках теории балок Бернулли – Эйлера. В рамках этой теории  $\alpha$  описывает изгибную жесткость балки: величину, пропорциональную модулю Юнга материала, которая тем больше, чем жестче балка при изгибе (см. [83]).

Каждому фиксированному значению параметра жесткости  $\alpha$  соответствует единственное вариационное решение  $(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha)$  задачи равновесия

(3.11)–(3.15). Действительно, указанную задачу можно сформулировать в виде задачи минимизации

$$\inf_{(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha) \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl}^\alpha v_{,ij}^\alpha - \int_{\Omega} f v^\alpha + \frac{1}{2} \int_{S_1} (w_{,11}^\alpha)^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{S_2} (u_{,22}^\alpha)^2 \right\} \quad (3.16)$$

и в виде вариационного неравенства

$$\begin{aligned} (v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha) \in \mathcal{K}, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) \in \mathcal{K} : \\ \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl}^\alpha (\bar{v} - v^\alpha)_{,ij} - \int_{\Omega} f (\bar{v} - v^\alpha) \\ + \int_{S_1} w_{,11}^\alpha (\bar{w} - w^\alpha)_{,11} + \alpha \int_{S_2} u_{,22}^\alpha (\bar{u} - u^\alpha)_{,22} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Доказательство эквивалентности задачи (3.11)–(3.15) и вариационного неравенства (3.17) на классе достаточно гладких решений повторяет доказательство теоремы 3.1 из параграфа 3.1, поэтому мы его здесь не приводим. Доказательство однозначной разрешимости задачи (3.16) аналогично теореме 3.2 этого же параграфа.

Изучим поведение решений  $(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha)$  задачи (3.17) при стремлении параметра  $\alpha$  к бесконечности.

Докажем, что из семейства  $(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha)$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Подставив в (3.17) пробные функции  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = (0, 0, 0)$  и  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}) = 2(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha)$ , получаем равенство

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl}^\alpha v_{,ij}^\alpha + \int_{S_1} (w_{,11}^\alpha)^2 + \alpha \int_{S_2} (u_{,22}^\alpha)^2 = \int_{\Omega} f v^\alpha. \quad (3.18)$$

Применяя к левой части полученного равенства лемму 3.1 из параграфа 3.1, а к правой части неравенство Коши – Буняковского, приходим к равномерным по  $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$ ,  $\alpha_0 = \text{const} > 0$ , оценкам

$$\begin{aligned} \|v^\alpha\|_{H_0^2(\Omega)} \leq c_7, \quad \|w^\alpha\|_{H_0^2(S_1)} \leq c_7, \\ \|u^\alpha\|_{H^2(S_2)} \leq c_7, \quad c_7 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В свою очередь из равенства (3.18) с учетом приведенных оценок получаем неравенство

$$\int_{S_2} (u_{,22}^\alpha)^2 \leq \frac{c_8}{\alpha}, \quad c_8 = \text{const} > 0. \quad (3.20)$$

Оценки (3.19) и (3.20) влекут существование такой подпоследовательности (как и ранее в подобных случаях, мы сохраняем для подпоследовательности прежнее обозначение), что

$$(v^\alpha, w^\alpha, u^\alpha) \rightarrow (v, w, u) \text{ слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S_1) \times H^2(S_2), \quad (3.21)$$

$$u_{,22} = 0 \text{ на } S_2, \quad (3.22)$$

при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Выясним, каким ограничениям подчиняются предельные функции. Из сходимости (3.21), с учетом слабой замкнутости множества  $\mathcal{K}$ , следуют условия  $v - w \geq 0$  на  $S_1$  и  $v = u$  на  $S_2$ . Соотношение (3.22) означает, что функция  $u = u(\eta_2)$  является аффинной на  $S_2$ . Следовательно, благодаря линейной связи между координатами  $\eta_1$  и  $x_1, x_2$ , сужение  $v|_{S_2}$  принадлежит пространству жестких перемещений

$$L(S_2) = \{l : l(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{ на } S_2, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2\},$$

составленному из всех функций, имеющих на множестве  $S_2$  аффинную структуру. Таким образом, для предельных функций справедливо условие  $(v, w) \in \mathcal{K}_r$ , где

$$\mathcal{K}_r = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S_1) : v - w \geq 0 \text{ на } S_1, \quad v|_{S_2} \in L(S_2)\}.$$

Найдем вариационную задачу, соответствующую предельному случаю. Для этого осуществим предельный переход в неравенстве (3.17). Пусть элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_r$  является произвольным. Тогда выполняется условие  $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{v}|_{S_2}) \in \mathcal{K}$ , поэтому из (3.17) получаем

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl}^\alpha \bar{v}_{,ij} + \int_{S_1} w_{,11}^\alpha \bar{w}_{,11} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\alpha) \geq \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl}^\alpha v_{,ij}^\alpha + \int_{S_1} (w_{,11}^\alpha)^2 + \alpha \int_{S_2} (u_{,22}^\alpha)^2.$$



Перейдем с учетом (3.21) и (3.22) к пределу в левой части полученного неравенства и к нижнему пределу в правой. В результате будем иметь

$$(v, w) \in \mathcal{K}_r, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_r :$$

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} (\bar{v} - v)_{,ij} - \int_{\Omega} f (\bar{v} - v) + \int_{S_1} w_{,11} (\bar{w} - w)_{,11} \geq 0. \quad (3.23)$$

Итак, найдено соответствующее предельному случаю вариационное неравенство. Отметим, что ему эквивалентна задача минимизации

$$\inf_{(v,w) \in \mathcal{K}_r} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_{S_1} (w_{,11})^2 \right\},$$

разрешимость которой можно доказать независимо от вышеизложенных рассуждений, так как минимизируемый функционал является коэрцитивным.

Приведем краевую задачу, соответствующую найденному вариационному неравенству (3.23): требуется отыскать функции  $v = v(x_1, x_2)$ ,  $w = w(\eta_1)$  и константы  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$(b_{ijkl} v_{,kl})_{,ij} = f \text{ в } \Omega_S, \quad (3.24)$$

$$v - w \geq 0 \text{ на } S_1, \quad [v] = 0, \quad [v_{,\nu}] = 0, \quad [m_{\nu}(v)] = 0 \text{ на } \dot{S}, \quad (3.25)$$

$$v = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{ на } S_2, \quad (3.26)$$

$$\int_{\dot{S}} [t_{\nu}(v)] v + \int_{S_1} w_{,11} w_{,11} = 0, \quad (3.27)$$

$$\int_{\dot{S}} [t_{\nu}(v)] \bar{v} + \int_{S_1} w_{,11} \bar{w}_{,11} \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_r, \quad (3.28)$$

$$v = 0, \quad v_{,n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad w = 0, \quad w_{,1} = 0 \text{ на } \partial S_1. \quad (3.29)$$

Система соотношений (3.24)–(3.29) описывает контакт тонкого упругого препятствия с пластиной, содержащей тонкое жесткое включение. Наличие включения в пластине задается условием (3.26), означающим, что прогибы точек пластины на множестве  $S_2$  имеют определенную структуру. Отме-

тим, что доказательство эквивалентности приведенной задачи (3.24)–(3.29) и вариационного неравенства (3.23) на классе достаточно гладких решений аналогично доказательству теоремы 3.1 из параграфа 3.1, поэтому детали доказательства мы опускаем.

### 3.3 Формулировка предельной задачи

На самом деле предельную задачу, полученную в предыдущем параграфе, можно сформулировать в более информативном виде, если уточнить условия сопряжения препятствия и включения в точке их возможного контакта  $(\kappa_1, \kappa_2)$ . А именно, докажем, что предельная задача (3.24)–(3.29) эквивалентна следующей краевой задаче. Найти функции  $v = v(x_1, x_2)$ ,  $w = w(\eta_1)$  и постоянные  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$(b_{ijkl}v,_{kl})_{,ij} = f \text{ в } \Omega_S, \quad (3.30)$$

$$v - w \geq 0 \text{ на } S_1, \quad [v] = 0, \quad [v, \nu] = 0, \quad [m_\nu(v)] = 0 \text{ на } \mathring{S}, \quad (3.31)$$

$$v = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \text{ на } S_2, \quad (3.32)$$

$$[t_\nu(v)] + w_{,1111} = 0, \quad [t_\nu(v)] \geq 0, \quad [t_\nu(v)](v - w) = 0 \text{ на } \mathring{S}_1, \quad (3.33)$$

$$[w(0)] = 0, \quad [w,_{,1}(0)] = 0, \quad [w,_{,11}(0)] = 0, \quad (3.34)$$

$$\int_{\mathring{S}_2} [t_\nu(v)] + [w,_{,111}(0)] = 0, \quad \int_{\mathring{S}_2} [t_\nu(v)]x_i + [w,_{,111}(0)]\kappa_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.35)$$

$$[w,_{,111}(0)] \leq 0, \quad [w,_{,111}(0)](v(\kappa_1, \kappa_2) - w(0)) = 0, \quad (3.36)$$

$$v = 0, \quad v,_{,n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad w = 0, \quad w,_{,1} = 0 \text{ на } \partial S_1, \quad (3.37)$$

где

$$S_1 \cap S_2 = \{(\kappa_1, \kappa_2)\}, \quad [w(0)] = w|_{\eta_1=0^+} - w|_{\eta_1=0^-}.$$

Здесь на множестве  $S$  задаются условия сопряжения пластины, препятствия и жесткого включения. В частности, первое условие из (3.31) и

соотношения (3.33) представляют собой условия одностороннего контакта между пластиной и препятствием. Наличие в пластине тонкого жесткого включения обуславливает условие (3.32) и нелокальные уравнения равновесия (3.35). Механический смысл нелокальных условий равновесия включения (3.35) состоит в равенстве нулю главного вектора сил и главного момента. При этом воздействие на включение со стороны пластины описывается скачком перерезывающей силы  $[t_\nu(v)]$ . Также учитывается воздействие на включение со стороны препятствия с помощью величины  $[w_{,111}(0)]$  – скачка перерезывающей силы препятствия в точке возможного контакта с включением (отметим, что точки  $\eta_1 = 0$  и  $(\kappa_1, \kappa_2)$  совпадают, см. Рис. 3.1, а)). Условие непроникания (3.31) выполняется, в частности, в точке пересечения препятствия и включения, т.е. выполняется соотношение  $v(\kappa_1, \kappa_2) - w(0) \geq 0$ . Реализуется в указанном соотношении равенство (контакт включения и препятствия) или строгое неравенство (отсутствие контакта) заранее не известно и может быть определено лишь после решения задачи. Таким образом, предполагается альтернатива: если контакт препятствия и включения не происходит, то согласно (3.36) скачок перерезывающей силы препятствия  $[w_{,111}(0)]$  равен нулю и, как следует из (3.35), в таком случае воздействие на включение со стороны препятствия отсутствует; если же имеет место контакт препятствия и включения, то скачок  $[w_{,111}(0)]$ , вообще говоря, не равен нулю, и он относится к числу сил, действующих на жесткое включение.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 3.3.** *Задачи (3.24)–(3.29) и (3.30)–(3.37) эквивалентны при условии достаточной гладкости решений.*

*Доказательство.* Пусть функции  $v$ ,  $w$  задают достаточно гладкое решение задачи (3.24)–(3.29). Докажем, что они удовлетворяют соотношениям (3.30)–(3.37). Заметим, что фактически достаточно получить соотношения (3.33)–(3.36), поскольку остальные содержатся в формулировке задачи (3.24)–(3.29). Для этого поочередно подставим в (3.28) пробные элементы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (\pm\phi, \pm\phi|_{S_1})$ , где  $\phi \in H_0^2(\Omega)$  такова, что  $\phi = 0$  на  $S_2$  и  $\phi|_{\dot{S}_1} \in H_0^2(\dot{S}_1)$ .

Интегрируя по частям результат подстановки, приходим к соотношению

$$\int_{\dot{S}_1} ([t_\nu(v)] + w_{,1111})\phi = 0,$$

в котором значения функции  $\phi$  произвольны на  $\dot{S}_1$ . Из полученного соотношения следует первое условие из (3.33). Чтобы доказать последнее условие из (3.33), предположим, что в некоторой точке  $x_0 \in \dot{S}_1$  выполняется строгое неравенство  $v > w$ . Примем за  $D$  замыкание такой окрестности этой точки, что  $D \cap S_2 = \emptyset$ ; через  $\phi_D$  обозначим функцию  $\phi_D \in H^2(\Omega)$  такую, что  $\text{supp } \phi_D \subset D$ ; выберем малый параметр  $\varepsilon_\phi > 0$  так, чтобы  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v \pm \varepsilon_\phi \phi_D, w) \in \mathcal{K}_r$ . Тогда из (3.28) вытекает неравенство

$$\int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]v \pm \varepsilon_\phi \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\phi_D + \int_{S_1} w_{,11}w_{,11} \geq 0,$$

из которого, с учетом условия (3.27), получаем равенство

$$\int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\phi_D = 0, \quad (3.38)$$

означающее, что  $[t_\nu(v)] = 0$  в окрестности  $D$  точки  $x_0$ . В то же время, если выполняется неравенство  $[t_\nu(v)] > 0$  в  $D$ , то  $v = w$  в  $x_0$ , так как предположив, что  $[t_\nu(v)] > 0$  в  $D$  и  $v > w$  в  $x_0$ , и повторив проделанную процедуру, приходим к равенству (3.38), противоречащему предположению. Таким образом, последнее условие из (3.33) доказано.

Теперь в неравенство (3.28) подставим в качестве тестовых элементов  $(\bar{v}, \bar{w}) = (\pm\phi, \pm\varphi)$ ,  $(\phi, \varphi) \in \mathcal{K}_r$ ,  $\phi = \varphi$  на  $S_1$ ,  $\phi = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_1 + \hat{a}_2x_2$  на  $S_2$ ,  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{R}$ . Получаем равенство

$$\int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]\phi + \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\varphi + \int_{\dot{S}_1} w_{,11}\varphi_{,11} = 0.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям, с учетом первого условия из (3.33), приходим к тождеству

$$\hat{a}_0 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)] + \hat{a}_1 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]x_1 + \hat{a}_2 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]x_2 - [w_{,11}(0)]\varphi_{,1}(0) + [w_{,111}(0)]\varphi(0) = 0.$$

В силу выбора пробных элементов имеем  $\varphi(0) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\kappa_1 + \hat{a}_2\kappa_2$ , поэтому

$$\hat{a}_0 \left( \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)] + [w_{,111}(0)] \right) + \hat{a}_i \left( \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]x_i + [w_{,111}(0)]\kappa_i \right) - [w_{,11}(0)]\varphi_{,1}(0) = 0.$$

Поскольку значения  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \varphi_{,1}(0)$  независимы и произвольны, то справедливы условия (3.35) и (3.34).

Следующий шаг состоит в выборе элементов  $(\bar{v}, \bar{w}) = (\zeta, 0), (\zeta, 0) \in \mathcal{K}_r$ ,  $\zeta \geq 0$  на  $S_1$  в (3.28) в роли пробных. Получаем

$$\int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]\zeta + \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\zeta \geq 0.$$

При этом  $\zeta|_{S_2} \in L(S_2)$ , что с учетом условий (3.35) приводит к неравенству

$$-[w_{,111}(0)]\zeta(\kappa_1, \kappa_2) + \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\zeta \geq 0.$$

Пробные функции можно выбрать так, что  $\zeta(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ , поэтому справедливо второе условие из (3.33). Докажем первое условие из (3.36) рассуждением от противного. Предположим, что  $\zeta(\kappa_1, \kappa_2) > 0$  и  $[w_{,111}(0)] > 0$ . Тогда будем иметь

$$\int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\zeta \geq [w_{,111}(0)]\zeta(\kappa_1, \kappa_2) > 0.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем цепочку неравенств

$$\frac{\|\zeta\|_{L^2(\dot{S}_1)}}{\zeta(\kappa_1, \kappa_2)} \geq \frac{[w_{,111}(0)]}{\|[t_\nu(v)]\|_{L^2(\dot{S}_1)}} > 0.$$

Значения  $\|\zeta\|_{L^2(\dot{S}_1)}$ ,  $\zeta(\kappa_1, \kappa_2)$  не зависят друг от друга и от значений  $[w_{,111}(0)]$ ,  $\|[t_\nu(v)]\|_{L^2(\dot{S}_1)}$ . Поэтому функцию  $\zeta$  можно выбрать так, что полученная цепочка неравенств нарушается. Итак, предположение  $[w_{,111}(0)] > 0$  приводит к противоречию, следовательно, первое условие из (3.36) доказано. Чтобы доказать второе условие из (3.36), проинтегрируем по частям в (3.27). Получаем тождество

$$\int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]v + \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]v + \int_{\dot{S}_1} w_{,111}w - [w_{,11}(0)]w_{,1}(0) + [w_{,111}(0)]w(0) = 0.$$

Применяя доказанные выше условия (3.32)–(3.34), приходим к равенству

$$a_0 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)] + a_1 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]x_1 + a_2 \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]x_2 + [w_{,111}(0)]w(0) = 0.$$

С учетом условий (3.35), отсюда следует соотношение

$$-[w_{,111}(0)](a_0 + a_1\kappa_1 + a_2\kappa_2 - w(0)) = 0.$$

Полученное равенство в силу условия (3.26) означает справедливость второго соотношения из (3.36). Таким образом, доказано, что для достаточно гладкого решения задачи (3.24)–(3.29) справедливы все соотношения (3.30)–(3.37).

Теперь пусть функции  $v$ ,  $w$  являются гладким решением задачи (3.30)–(3.37). Докажем, что они удовлетворяют соотношениям (3.24)–(3.29). Для этого фактически достаточно доказать условия (3.27) и (3.28), поскольку остальные соотношения содержатся в (3.30)–(3.37). Выберем элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_r$  произвольным. Умножим обе части первого соотношения из (3.33) на  $\bar{w}$  и проинтегрируем по  $\dot{S}_1$ . С учетом формулы интегрирования по частям и условия (3.34), получаем равенство

$$\int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)]\bar{w} = - \int_{\dot{S}_1} w_{,11}\bar{w}_{,11} + [w_{,111}(0)]\bar{w}(0),$$

из которого вытекает, что

$$\int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]\bar{v} + \int_{S_1} w_{,11}\bar{w}_{,11} = \int_{\dot{S}_2} [t_\nu(v)]\bar{v} + \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)](\bar{v} - \bar{w}) + [w_{,111}(0)]\bar{w}(0).$$

Поскольку выполняются условие  $\bar{v}|_{S_2} \in L(S_2)$  и уравнения (3.35), то приходим к соотношению

$$\int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]\bar{v} + \int_{S_1} w_{,11}\bar{w}_{,11} = \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)](\bar{v} - \bar{w}) - [w_{,111}(0)](\bar{v}(\kappa_1, \kappa_2) - \bar{w}(0)).$$

С одной стороны, правая часть полученного равенства неотрицательна, так как выполняются второе условие из (3.33), первое условие из (3.36) и неравенства  $\bar{v} - \bar{w} \geq 0$  на  $\dot{S}_1$ ,  $\bar{v}(\kappa_1, \kappa_2) - \bar{w}(0) \geq 0$ . Соотношение (3.28) доказано. С другой стороны, выбрав  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w)$ , будем иметь

$$\int_{\dot{S}} [t_\nu(v)]v + \int_{S_1} w_{,11}w_{,11} = \int_{\dot{S}_1} [t_\nu(v)](v - w) + [w_{,111}(0)](v(\kappa_1, \kappa_2) - w(0)),$$

откуда, с учетом последних условий из (3.33) и (3.36), следует соотношение (3.27). Таким образом, условия (3.27) и (3.28) доказаны, а значит достаточно гладкое решение задачи (3.30)–(3.37) удовлетворяет соотношениям (3.24)–(3.29). Доказательство теоремы завершено.  $\square$

## Глава 4. Контакт пластины и тонкого препятствия, частично скрепленных друг с другом

Одним из интересных вопросов при исследовании задач равновесия твердых тел является зависимость решений от геометрических характеристик. Большой интерес представляет анализ чувствительности решений к возмущениям областей, в которых задачи ставятся. Результаты такого анализа находят широкое применение в теории оптимизации (см. [77, 84–89] и ссылки оттуда).

В данной главе рассматривается задача о равновесии пластины и балки, взаимодействующих вдоль линии. На части линии балка служит препятствием для пластины, а на оставшейся части считается скрепленной с ней, то есть фактически выполняет роль тонкого включения. На части, соответствующей скреплению, задаются условия равенства перемещений, а на части, отвечающей зоне возможного контакта, – односторонние ограничения. Основными целями данной главы являются: исследовать зависимость решений от длины зоны одностороннего контакта при её увеличении, доказать корректность соответствующей производной функционала энергии по длине и отыскать явную формулу для этой производной. Представленная глава написана по материалам статьи [40].

### 4.1 Постановка задачи равновесия

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область, соотнесенная с системой декартовых координат  $x_1x_2$ . Будем считать, что  $\omega = (0,2) \times \{0\}$ ,  $\gamma = (0,1) \times \{0\}$ , причем  $\omega$  лежит строго внутри области. Введенные в рассмотрение геометрические объекты изображены на Рис. 4.1. В дальнейшем будем полагать, что  $\omega$  соответствует множеству, на котором взаимодействуют пластина и балка. В частности,  $\gamma$  отвечает зоне одностороннего контакта, а  $\omega \setminus \bar{\gamma}$  – зоне склейки.



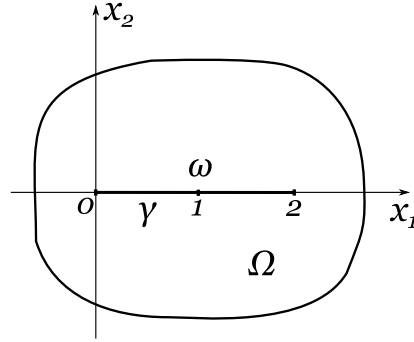


Рисунок 4.1 — Геометрия исходной задачи в четвертой главе

Приведем постановку задачи о равновесии. Требуется отыскать функции  $v = v(x_1, x_2)$  и  $w = w(x_1)$ , определяемые в областях  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, такие что

$$D\Delta^2 v = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (4.1)$$

$$v = 0, \quad v_{,n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (4.2)$$

$$[v] = 0, \quad [v_{,2}] = 0 \quad \text{на } \omega, \quad (4.3)$$

$$[m_\nu(v)] = 0, \quad [t_\nu(v)] + w_{,1111} = g \quad \text{на } \omega, \quad (4.4)$$

$$w = 0, \quad w_{,1} = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (4.5)$$

$$v - w \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad v = w \quad \text{на } \omega \setminus \bar{\gamma}, \quad (4.6)$$

$$[t_\nu(v)] \geq 0, \quad [t_\nu(v)](v - w) = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (4.7)$$

где

$$\Delta^2 v = v_{,1111} + 2v_{,1122} + v_{,2222},$$

$$m_\nu(v) = D(v_{,22} + \varkappa v_{,11}), \quad t_\nu(v) = D(v_{,222} + (2 - \varkappa)v_{,112}).$$

Здесь заданными считаются

$$f \in C^1(\bar{\Omega}), \quad g \in C^1(\bar{\omega}), \quad D > 0, \quad 1/2 > \varkappa > 0.$$

Через  $[\cdot]$  как и ранее обозначается скачок функции.

Уравнение (4.1) представляет собой уравнение равновесия изотропной пластины, к которой приложена распределенная нагрузка  $f$ . Второе

уравнение (4.4) суть уравнение равновесия балки, на которую действует распределенная нагрузка  $g$ . За счет того, что в уравнение (4.4) входит скачок перерезывающей силы пластины  $t_\nu(v)$ , на множестве  $\omega$  учитывается взаимодействие пластины и балки. Условия (4.6), (4.7) уточняют характер этого взаимодействия. В частности, условия (4.6) означают, что на множестве  $\omega \setminus \bar{\gamma}$  прогибы пластины и балки совпадают, а на  $\gamma$  прогибы балки не превосходят прогибов пластины.

Сформулируем задачу равновесия (4.1)–(4.7) в вариационном виде. Для этого определим на пространстве  $H^2(\Omega) \times H^2(\omega)$  функционал энергии

$$\mathcal{E}(v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b(v, v) - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_{\omega} (w_{,11})^2 - \int_{\omega} g w, \quad (4.8)$$

где

$$b(\varphi, \psi) = D(\varphi_{,11}\psi_{,11} + \varphi_{,22}\psi_{,22} + \kappa\varphi_{,22}\psi_{,11} + \kappa\varphi_{,11}\psi_{,22} + 2(1 - \kappa)\varphi_{,12}\psi_{,12}) \quad (4.9)$$

представляет собой билинейную и симметричную форму по аргументам  $\varphi, \psi \in H^2(\Omega)$ . Также введем множество допустимых перемещений

$$\mathcal{K}_0 = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega) : v - w \geq 0 \text{ на } \gamma, v = w \text{ на } \omega \setminus \bar{\gamma}\}. \quad (4.10)$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$(v, w) \in \mathcal{K}_0 : \mathcal{E}(v, w) = \inf_{(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0} \mathcal{E}(\bar{v}, \bar{w}). \quad (4.11)$$

Задача минимизации (4.11) имеет единственное решение. Действительно, благодаря неравенствам Пуанкаре – Фридрихса справедливы оценки

$$\int_{\Omega} b(v, v) \geq c_1 \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2, \quad \int_{\omega} (w_{,11})^2 \geq c_2 \|w\|_{H_0^2(\omega)}^2,$$

$$v \in H_0^2(\Omega), \quad w \in H_0^2(\omega), \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0,$$

поэтому подлежащий минимизации в (4.11) функционал (4.8) является коэрцитивным. Поскольку функционал (4.8) обладает также свойством слабой полунепрерывности снизу, а множество  $\mathcal{K}_0$  выпукло и замкнуто, то задача (4.11) имеет решение. Единственность этого решения следует из строгой выпуклости функционала энергии. Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Задача минимизации (4.11) имеет единственное решение.*

Приведем вариационное неравенство, которое эквивалентно задаче минимизации (4.11). Формулируется оно следующим образом

$$(v, w) \in \mathcal{K}_0, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0 : \\ \int_{\Omega} b(v, \bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_{\omega} w_{,11}(\bar{w} - w)_{,11} - \int_{\omega} g(\bar{w} - w) \geq 0. \quad (4.12)$$

Из теоремы 4.1 также следует, что приведенное вариационное неравенство имеет единственное решение. В то же время, вариационное неравенство можно считать слабой формулировкой краевой задачи (4.1)–(4.7). Действительно, ниже мы докажем эквивалентность указанных задач при условии достаточной гладкости решений, а именно, если решения таковы, что справедливы формулы Грина

$$D \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \hat{v} \Delta^2 v = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} b(v, \hat{v}) + \int_{\omega} [m_{\nu}(v)] \hat{v}_{,2} - \int_{\omega} [t_{\nu}(v)] \hat{v}, \\ \int_{\omega} w_{,1111} \hat{w} = \int_{\omega} w_{,11} \hat{w}_{,11}, \quad \hat{v} \in H_0^2(\Omega), \quad \hat{w} \in H_0^2(\omega). \quad (4.13)$$

**Теорема 4.2.** *Краевая задача (4.1)–(4.7) и вариационное неравенство (4.12) эквивалентны при условии достаточной гладкости решений.*

*Доказательство.* Пусть гладкие функции  $v$  и  $w$  удовлетворяют соотношениям (4.1)–(4.7). Докажем, что для  $(v, w)$  справедливо вариационное неравенство (4.12). Сначала заметим, что в силу условий (4.2), (4.3) и (4.5), (4.6) выполняется принадлежность  $(v, w) \in \mathcal{K}_0$ . Выберем элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0$

произвольным. Из уравнений (4.1) и второго уравнения (4.4) следует тождество

$$\int_{\Omega \setminus \bar{w}} (D\Delta^2 v - f)(\bar{v} - v) + \int_{\omega} ([t_\nu(v)] + w_{,1111} - g)(\bar{w} - w) = 0.$$

Теперь преобразуем это тождество с помощью формул Грина (4.13). Учитывая условия (4.2), (4.3) и первое условие (4.4), будем иметь следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(v, \bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_{\omega} w_{,11}(\bar{w} - w)_{,11} - \int_{\omega} g(\bar{w} - w) \\ = \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{v} - v) - \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{w} - w). \end{aligned}$$

Остается показать, что стоящее справа от знака равенства выражение является неотрицательным. Действительно, из условий (4.7) следует

$$\begin{aligned} \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{v} - v) - \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{w} - w) &= \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{v} - \bar{w}) - \int_{\omega} [t_\nu(v)](v - w) \\ &= \int_{\gamma} [t_\nu(v)](\bar{v} - \bar{w}) - \int_{\gamma} [t_\nu(v)](v - w) = \int_{\gamma} [t_\nu(v)](\bar{v} - \bar{w}) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость вариационного неравенства (4.12) доказана.

Теперь пусть  $(v, w)$  является решением вариационного неравенства (4.12). Докажем, что  $v$  и  $w$  удовлетворяют соотношениям (4.1)–(4.7). Для начала заметим, что соотношения (4.2), (4.3) и (4.5), (4.6) не нуждаются в доказательстве в силу принадлежности  $(v, w) \in \mathcal{K}_0$ . Таким образом, остается доказать соотношения (4.1), (4.4) и (4.7).

Докажем уравнение равновесия (4.1). Для этого выберем в качестве пробных элементов в вариационном неравенстве (4.12) функции  $(v \pm \varphi, w)$ ,

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\omega})$ . Получаем равенство

$$\int_{\Omega} b(v, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi,$$

означающее, что функция  $v$  удовлетворяет уравнению равновесия (4.1) в смысле распределений.

Докажем соотношения (4.4). Применим формулы Грина (4.13) к вариационному неравенству (4.12) с учетом доказанного уравнения равновесия (4.1) и краевых условий (4.2), (4.3), (4.5). Приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega} [m_\nu(v)](\bar{v} - v)_{,2} + \int_{\omega} [t_\nu(v)](\bar{v} - v) \\ & + \int_{\omega} (w_{,1111} - g)(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Выберем здесь в качестве тестовых элементов функции  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v \pm \phi, w \pm \psi)$ , где  $\psi \in H_0^2(\omega)$ ,  $\phi \in H_0^2(\Omega)$  такие, что  $\psi = \phi$  на  $\omega$ . Получаем равенство

$$- \int_{\omega} [m_\nu(v)]\phi_{,2} + \int_{\omega} ([t_\nu(v)] + w_{,1111} - g)\psi = 0.$$

Из полученного равенства, поскольку значения  $\phi_{,2}$  и  $\psi$  на  $\omega$  выбираются независимо и произвольно, немедленно вытекает справедливость условий (4.4).

Докажем соотношения (4.7). Выберем в (4.14) в качестве тестового элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v + \xi, w)$ , где  $\xi \in H_0^2(\Omega \setminus (\omega \setminus \gamma))$  такая, что  $\xi \geq 0$  на  $\gamma$ . Находим неравенство

$$\int_{\gamma} [t_\nu(v)]\xi \geq 0,$$

которое означает справедливость первого условия (4.7). Теперь докажем второе условие (4.7). Предположим, что  $v - w > 0$  в некоторой точке  $a \in \gamma$ . Подставим в (4.14) тестовый элемент  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v \pm \varepsilon_\eta \eta, w)$ , где  $\eta \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\text{supp } \eta \subset \bar{D}_a$ ,  $D_a$  – такая окрестность точки  $a$ , что  $D_a \cap (\omega \setminus \gamma) = \emptyset$ , а

параметр  $\varepsilon_\eta > 0$  мал настолько, что  $(v \pm \varepsilon_\eta \eta, w) \in \mathcal{K}_0$ . Тогда приходим к равенству

$$\int_{\gamma} [t_\nu(v)] \eta = 0.$$

Полученное равенство означает, что если  $v - w > 0$  в точке  $a \in \gamma$ , то  $[t_\nu(v)] = 0$  в  $D_a$ . С другой стороны, полученное равенство также означает, что если  $[t_\nu(v)] > 0$  в  $D_a$ , то  $v - w = 0$  в  $a$ , поскольку, предположив противное, мы приходим к противоречию. Таким образом, второе соотношение (4.7) доказано.  $\square$

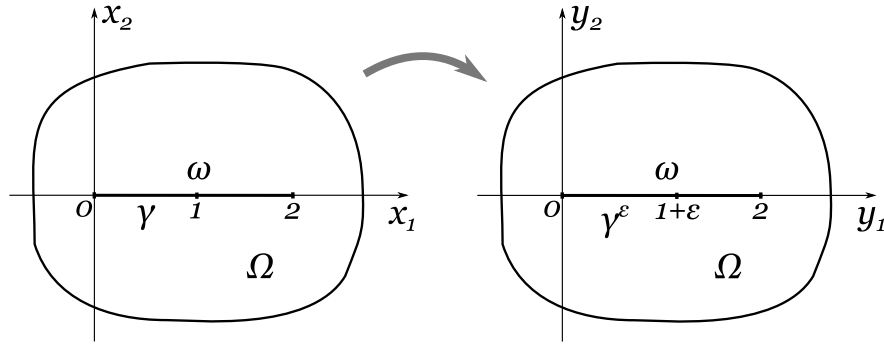


Рисунок 4.2 — Переход к возмущенной геометрии

## 4.2 Зависимость решения от параметра возмущения

Напомним, что рассматриваемая в предыдущем параграфе задача (4.1)–(4.7) ставилась в областях, связанных с системой координат  $x_1 x_2$ , причем одностороннему контакту пластины и балки соответствовало множество  $\gamma = (0, 1) \times \{0\}$ , а склейке – множество  $\omega \setminus \bar{\gamma}$ . Теперь мы рассмотрим аналогичную задачу, но в которой области будут ассоциированы с новой системой координат  $y_1 y_2$  и одностороннему контакту будет отвечать множество  $\gamma^\varepsilon = (0, 1 + \varepsilon) \times \{0\}$  с малым параметром  $\varepsilon \geq 0$  (насколько указанный параметр мал, будет уточнено позже). Параметр  $\varepsilon$  характеризует приращение длины зоны одностороннего контакта, поэтому будем называть его параметром возмущения. В частности, при  $\varepsilon = 0$  имеем  $\gamma^\varepsilon = \gamma$ , то есть

случай  $\varepsilon = 0$  соответствует невозмущенной геометрии. Переход от невозмущенной геометрической конфигурации к возмущенной проиллюстрирован на Рис. 4.2.

Задача равновесия с увеличенной зоной одностороннего контакта состоит в следующем: найти функции  $v^\varepsilon = v^\varepsilon(y_1, y_2)$  и  $w^\varepsilon = w^\varepsilon(y_1)$ , определяемые в областях  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, такие что

$$D\Delta^2 v^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (4.15)$$

$$v^\varepsilon = 0, \quad v^\varepsilon_{,n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (4.16)$$

$$[v^\varepsilon] = 0, \quad [v^\varepsilon_{,2}] = 0 \quad \text{на } \omega, \quad (4.17)$$

$$[m_\nu(v^\varepsilon)] = 0, \quad [t_\nu(v^\varepsilon)] + w^\varepsilon_{,1111} = g \quad \text{на } \omega, \quad (4.18)$$

$$w^\varepsilon = 0, \quad w^\varepsilon_{,1} = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (4.19)$$

$$v^\varepsilon - w^\varepsilon \geq 0 \quad \text{на } \gamma^\varepsilon, \quad v^\varepsilon = w^\varepsilon \quad \text{на } \omega \setminus \bar{\gamma}^\varepsilon, \quad (4.20)$$

$$[t_\nu(v^\varepsilon)] \geq 0, \quad [t_\nu(v^\varepsilon)](v^\varepsilon - w^\varepsilon) = 0 \quad \text{на } \gamma^\varepsilon. \quad (4.21)$$

Задачу равновесия также можно поставить в вариационном виде. С этой целью введем множество допустимых перемещений

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega) : v - w \geq 0 \text{ на } \gamma^\varepsilon, v = w \text{ на } \omega \setminus \bar{\gamma}^\varepsilon\} \quad (4.22)$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathcal{K}^\varepsilon : \quad \mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \inf_{(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}^\varepsilon} \mathcal{E}(\bar{v}, \bar{w}), \quad (4.23)$$

в которой функционал энергии определяется формулой

$$\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b(v^\varepsilon, v^\varepsilon) - \int_{\Omega} f v^\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\omega} (w^\varepsilon_{,11})^2 - \int_{\omega} g w^\varepsilon. \quad (4.24)$$

Также введем эквивалентное ей вариационное неравенство

$$\begin{aligned}
(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathcal{K}^\varepsilon, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}^\varepsilon : \\
\int_{\Omega} b(v^\varepsilon, \bar{v} - v^\varepsilon) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\varepsilon) \\
+ \int_{\omega} w_{,11}^\varepsilon(\bar{w} - w^\varepsilon)_{,11} - \int_{\omega} g(\bar{w} - w^\varepsilon) \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Вариационные задачи (4.23) и (4.25) при фиксированном значении параметра  $\varepsilon$  имеют единственное решение. Более того, по аналогии с теоремой 4.2 можно доказать, что указанное решение, являясь достаточно гладким, удовлетворяет всем соотношениям краевой задачи (4.15)–(4.21).

Ниже нас интересует зависимость вариационного решения от параметра возмущения  $\varepsilon$ , а именно, сходимость семейства решений при стремлении параметра к нулю. Применяемый нами метод основан на гладких координатных преобразованиях, позволяющих установить связь между исходной геометрией и геометрией задачи равновесия, в которой зона одностороннего контакта увеличена.

Введем в рассмотрение координатное преобразование

$$y_1 = x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{4.26}$$

где  $\theta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \partial\omega)$  – заданная функция, равная единице в некоторой окрестности точки  $(1, 0)$ . Будем считать, что параметр  $\varepsilon$  мал настолько, что область  $\Omega$  при преобразовании (4.26) отображается в себя, множество  $\omega$  тоже отображается в себя, и якобиан

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = 1 + \varepsilon\theta_{,1} \tag{4.27}$$

положителен в  $\Omega$ . Тогда введенное преобразование (4.26) является взаимно-однозначным. При этом множество  $\gamma$  взаимно-однозначно отображается на возмущенное множество  $\gamma^\varepsilon$ .

Далее нам понадобится следующая лемма.



**Лемма 4.1.** *Справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} b(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon \int_{\Omega} \theta_{,1} b(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} B(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon \int_{\Omega} B(\theta, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) + \int_{\Omega} R_1(\varepsilon, \theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \eta_{,11} \xi_{,11} &= \int_{\omega} \tilde{\eta}_{,11} \tilde{\xi}_{,11} + \varepsilon \int_{\omega} \theta_{,1} \tilde{\eta}_{,11} \tilde{\xi}_{,11} \\ &+ \varepsilon \int_{\omega} p(\theta, \tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{,11} + \varepsilon \int_{\omega} p(\theta, \tilde{\eta}) \tilde{\xi}_{,11} + \int_{\omega} R_2(\varepsilon, \theta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\int_{\Omega} f \psi = \int_{\Omega} f \tilde{\psi} + \varepsilon \int_{\Omega} (f \theta)_{,1} \tilde{\psi} + \int_{\Omega} R_3(\varepsilon, \theta, f, \tilde{\psi}), \quad (4.30)$$

$$\int_{\omega} g \xi = \int_{\omega} g \tilde{\xi} + \varepsilon \int_{\omega} (g \theta)_{,1} \tilde{\xi} + \int_{\omega} R_4(\varepsilon, \theta, g, \tilde{\xi}). \quad (4.31)$$

Здесь функции

$$\varphi, \psi \in H^2(\Omega), \quad \eta, \xi \in H^2(\omega)$$

произвольны. Для них приняты обозначения

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2) = \psi(x_1 + \varepsilon \theta(x_1, x_2), x_2), \quad \tilde{\xi}(x_1) = \xi(x_1 + \varepsilon \theta(x_1, 0)). \quad (4.32)$$

Главные члены разложений определяются формулами

$$\begin{aligned} B(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) &= D(p_{11}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,11} + p_{22}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,22} \\ &+ \kappa p_{22}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,11} + \kappa p_{11}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,22} + 2(1 - \kappa) p_{12}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,12}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} p_{11}(\theta, \tilde{\varphi}) &= -2\theta_{,1} \tilde{\varphi}_{,11} - \theta_{,11} \tilde{\varphi}_{,1}, \\ p_{22}(\theta, \tilde{\varphi}) &= -2\theta_{,2} \tilde{\varphi}_{,12} - \theta_{,22} \tilde{\varphi}_{,1}, \\ p_{12}(\theta, \tilde{\varphi}) &= p_{21}(\theta, \tilde{\varphi}) = -\theta_{,1} \tilde{\varphi}_{,12} - \theta_{,2} \tilde{\varphi}_{,11} - \theta_{,12} \tilde{\varphi}_{,1}, \\ p(\theta, \tilde{\eta}) &= -2\theta_{,1} \tilde{\eta}_{,11} - \theta_{,11} \tilde{\eta}_{,1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Формы  $R_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ ,  $R_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ ,  $R_3(\varepsilon, f, \cdot)$ ,  $R_4(\varepsilon, \theta, g, \cdot)$ , задающие остаточные члены разложений, таковы, что имеют место равномерные сходи-

мости

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} R_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot) \rightarrow 0, & \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega} R_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot) \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} R_3(\varepsilon, \theta, f, \cdot) \rightarrow 0, & \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega} R_4(\varepsilon, \theta, g, \cdot) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

*Доказательство.* Докажем асимптотическое разложение (4.28). Фиксируем произвольные функции  $\varphi, \psi \in H^2(\Omega)$  и определим для них  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\psi}$  по аналогии с (4.32). Воспользуемся следующими асимптотическими представлениями производных

$$\varphi_{,ij} = \tilde{\varphi}_{,ij} + \varepsilon p_{ij}(\theta, \tilde{\varphi}) + \varepsilon^2 r_{ij}(\theta, \tilde{\varphi}),$$

в которых

$$|r_{ij}(\theta, \tilde{\varphi})| \leq c_3 (|\tilde{\varphi}_{,k}| + |\tilde{\varphi}_{,kl}|), \quad c_3 > 0, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

а функции  $p_{ij}(\theta, \cdot)$  находятся по формулам (4.34). Доказательство справедливости указанных представлений читатель может найти в [90]. Далее, путем несложных арифметических операций приходим к разложениям

$$\varphi_{,ij} \psi_{,kl} = \tilde{\varphi}_{,ij} \tilde{\psi}_{,kl} + \varepsilon p_{ij}(\theta, \tilde{\varphi}) \tilde{\psi}_{,kl} + \varepsilon p_{kl}(\theta, \tilde{\psi}) \tilde{\varphi}_{,ij} + \varepsilon^2 r_{ijkl}(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где функции  $r_{ijkl}(\theta, \cdot, \cdot)$  однозначно задаются функциями  $p_{ij}(\theta, \cdot)$ ,  $r_{ij}(\theta, \cdot)$ , и при этом выполняется неравенство

$$|r_{ijkl}(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})| \leq c_4 (|\tilde{\varphi}_{,m}| + |\tilde{\varphi}_{,mn}|) (|\tilde{\psi}_{,p}| + |\tilde{\psi}_{,pq}|), \quad c_4 > 0, \quad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2.$$

Отсюда, учитывая (4.9), находим разложение

$$b(\varphi, \psi) = b(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon B(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon B(\theta, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) + \varepsilon^2 r_1(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}),$$

где форма  $B(\theta, \cdot, \cdot)$  определяется формулой (4.33), а форма  $r_1(\theta, \cdot, \cdot)$  является линейной комбинацией форм  $r_{ijkl}(\theta, \cdot, \cdot)$ . Домножим найденное разложение на якобиан (4.27) и проинтегрируем по  $\Omega$ . Находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} b(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon \int_{\Omega} \theta_{,1} b(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon \int_{\Omega} B(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \varepsilon \int_{\Omega} B(\theta, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\theta_{,1} B(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \theta_{,1} B(\theta, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) + (1 + \varepsilon \theta_{,1}) r_1(\theta, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})). \end{aligned}$$

В свою очередь это с учетом строения формы  $r_1(\theta, \cdot, \cdot)$  означает, что разложение (4.28) доказано.

Докажем асимптотическое разложение (4.29). Выберем функции  $\eta, \xi \in H^2(\Omega)$  произвольными и определим для них  $\tilde{\eta}$  и  $\tilde{\xi}$  по аналогии с (4.32). Воспользуемся разложением

$$\eta_{,11} = \tilde{\eta}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \tilde{\eta}) + \varepsilon^2 r_2(\theta, \tilde{\eta}),$$

в котором главный член определяется последней формулой из (4.34), а для остаточного члена верна оценка

$$|r_2(\theta, \tilde{\eta})| \leq c_5 (|\tilde{\eta}_{,1}| + |\tilde{\eta}_{,11}|), \quad c_5 > 0.$$

Опираясь на приведенное разложение, несложно получить выражение

$$\eta_{,11} \xi_{,11} = \tilde{\eta}_{,11} \tilde{\xi}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \tilde{\eta}) \tilde{\xi}_{,11} + \varepsilon^2 r_3(\theta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}),$$

в котором форма  $r_3(\theta, \cdot, \cdot)$  однозначно определяется функциями  $p(\theta, \cdot)$  и  $r_2(\theta, \cdot)$ , причем

$$|r_3(\theta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi})| \leq c_6 (|\tilde{\eta}_{,1}| + |\tilde{\eta}_{,11}|) (|\tilde{\xi}_{,1}| + |\tilde{\xi}_{,11}|), \quad c_6 > 0.$$

Отсюда с учетом формулы для якобиана (4.27) следует, что

$$\int_{\omega} \eta_{,11} \xi_{,11} = \int_{\omega} \tilde{\eta}_{,11} \tilde{\xi}_{,11} + \varepsilon \int_{\omega} \theta_{,1} \tilde{\eta}_{,11} \tilde{\xi}_{,11} + \varepsilon \int_{\omega} p(\theta, \tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{,11} + \varepsilon \int_{\omega} p(\theta, \tilde{\eta}) \tilde{\xi}_{,11}$$

$$+\varepsilon^2 \int_{\omega} (\theta_{,1p}(\theta, \tilde{\xi})\tilde{\eta}_{,11} + \theta_{,1p}(\theta, \tilde{\eta})\tilde{\xi}_{,11} + (1 + \varepsilon\theta_{,1})r_3(\theta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi})).$$

Таким образом, асимптотическое разложение (4.29) доказано.

Для справедливости леммы остается доказать асимптотические разложения (4.30) и (4.31). Справедливость этих разложений легко следует из разложений по Тейлору для функций  $f$  и  $g$ , приводить его здесь не будем.  $\square$

Вернемся к вопросу предельного перехода в вариационном неравенстве (4.25). Применим к входящим в (4.25) функциям координатное преобразование (4.26). Заметим, что при преобразовании (4.26) множества  $\mathcal{K}_0$  и  $\mathcal{K}^\varepsilon$  отображаются друг в друга взаимно-однозначно. Поэтому, опираясь на доказанные в лемме 4.1 разложения (4.28)–(4.31), получаем, что

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) \in \mathcal{K}_0, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0 : \\ & \int_{\Omega} b(\tilde{v}^\varepsilon, \bar{v} - \tilde{v}^\varepsilon) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\omega} \tilde{w}^\varepsilon_{,11}(\bar{w} - \tilde{w}^\varepsilon)_{,11} - \int_{\omega} g(\bar{w} - \tilde{w}^\varepsilon) \\ & + \int_{\Omega} G_1(\varepsilon, \theta, \tilde{v}^\varepsilon, \bar{v} - \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\omega} G_2(\varepsilon, \theta, \tilde{w}^\varepsilon, \bar{w} - \tilde{w}^\varepsilon) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь

$$\tilde{v}^\varepsilon(x_1, x_2) = v^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2), x_2), \quad \tilde{w}^\varepsilon(x_1) = w^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, 0)), \quad (4.37)$$

где  $(v^\varepsilon, w^\varepsilon)$  – решение задачи (4.25). Формы  $G_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$  и  $G_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$  однозначно определяются главными и остаточными членами разложений (4.28)–(4.31). При этом, поскольку главные члены являются непрерывными формами, а для остаточных членов выполняется (4.35), то справедливы равномерные сходимости

$$\int_{\Omega} G_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot) \rightarrow 0, \quad \int_{\omega} G_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot) \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Сформулируем и докажем утверждение о сходимости решений задачи (4.36) при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

**Теорема 4.3.** *Для семейства решений  $(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$  задачи (4.36) имеет место сходимость*

$$(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) \rightarrow (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где  $(v, w)$  – решение задачи (4.12).

*Доказательство.* Прежде всего докажем, что из семейства функций  $(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Выберем в вариационном неравенстве (4.36) в качестве пробного элемента  $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$ . Применяя неравенства Пуанкаре – Фридрихса и Коши – Буняковского, приходим к оценкам

$$\|\tilde{v}^\varepsilon\|_{H_0^2(\Omega)} \leq c_7, \quad \|\tilde{w}^\varepsilon\|_{H_0^2(\omega)} \leq c_8, \quad c_7, c_8 = \text{const} > 0,$$

равномерным по малому параметру  $\varepsilon$ . Итак, семейство  $(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$  при малых значениях  $\varepsilon$  является ограниченным, поэтому можно считать, что с точностью до подпоследовательности имеет место сходимость

$$(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) \rightarrow (v, w) \text{ слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , где  $(v, w)$  – некоторый элемент из  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$ .

Докажем, что предельные функции  $(v, w)$  являются решением задачи (4.12). Для этого перейдем к нижнему пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в вариационном неравенстве (4.36). Благодаря ограниченности семейства решений  $(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$ , мы можем воспользоваться сходимостями (4.38) и получить, что

$$\int_{\Omega} G_1(\varepsilon, \theta, \tilde{v}^\varepsilon, \bar{v} - \tilde{v}^\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \int_{\omega} G_2(\varepsilon, \theta, \tilde{w}^\varepsilon, \bar{w} - \tilde{w}^\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0$$

для каждого фиксированного элемента  $(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0$ . Поэтому, перейдя к нижнему пределу в (4.36), будем иметь:

$$(v, w) \in \mathcal{K}_0, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0 : \\ \int_{\Omega} b(v, \bar{v} - v) - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_{\omega} w_{,11}(\bar{w} - w)_{,11} - \int_{\omega} g(\bar{w} - w) \geq 0.$$

Таким образом, находим, что функции  $(v, w)$  действительно являются решением задачи (4.12).

Усилим полученный результат о сходимости. Для этого возьмем в (4.12) в качестве тестовых элементов функции  $(\bar{v}, \bar{w}) = (\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$ , а затем выберем в (4.36) функции  $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w)$ . Суммируя результат подстановки, приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} b(v - \tilde{v}^\varepsilon, v - \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\omega} ((w - \tilde{w}^\varepsilon)_{,11})^2 \leq \int_{\Omega} G_1(\varepsilon, \theta, \tilde{v}^\varepsilon, v - \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\omega} G_2(\varepsilon, \theta, \tilde{w}^\varepsilon, w - \tilde{w}^\varepsilon).$$

Применив неравенство Пуанкаре – Фридрихса, получаем

$$\|v - \tilde{v}^\varepsilon\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w - \tilde{w}^\varepsilon\|_{H_0^2(\omega)}^2 \leq c_9 \left( \int_{\Omega} G_1(\varepsilon, \theta, \tilde{v}^\varepsilon, v - \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\omega} G_2(\varepsilon, \theta, \tilde{w}^\varepsilon, w - \tilde{w}^\varepsilon) \right),$$

где  $c_9 = const > 0$ . Отсюда с учетом ограниченности семейства функций  $(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)$  и сходимостей (4.38) следует, что

$$\|v - \tilde{v}^\varepsilon\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|w - \tilde{w}^\varepsilon\|_{H_0^2(\omega)} \rightarrow 0,$$

то есть

$$(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) \rightarrow (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . □

### 4.3 Производная функционала энергии

В предыдущем параграфе была изучена зависимость вариационного решения задачи равновесия вида (4.15)–(4.21) от параметра возмущения  $\varepsilon$ , характеризующего приращение длины зоны одностороннего контакта. В данном параграфе изучается чувствительность интеграла энергии (4.24) к изменению указанной длины, а именно, ниже доказывается существование производной функционала энергии и проводится её отыскание в виде одностороннего предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \mathcal{E}(v, w)}{\varepsilon}. \quad (4.39)$$

Здесь элемент  $(v^\varepsilon, w^\varepsilon)$  является решением задачи (4.25), отвечающей возмущенной геометрии, а  $(v, w)$  – решение задачи (4.12), соответствующей невозмущенной геометрии (см. Рис. 4.2).

**Замечание.** *Интерес к обоснованию производной вида (4.39) вызван двумя наводящими соображениями. Первое связано с механической интерпретацией производной функционала энергии как скорости высвобождения энергии при росте дефекта (в данном случае дефектом конструкции можно считать наличие зоны с односторонними ограничениями, если предполагается, что при нормальном состоянии конструкции пластина и балка должны быть скреплены вдоль линии соприкосновения). Второй довод состоит в том, что производная (4.39) может быть полезной при решении задач оптимизации или идентификации, в которых длина зоны с односторонними ограничениями выступает в качестве неизвестного параметра.*

**Теорема 4.4.** *Производная функционала энергии (4.24) в виде предела (4.39) существует и задается формулой*

$$\mathcal{E}'(\theta; v, w) = D \int_{\Omega} (p_{11}(\theta, v)v_{,11} + p_{22}(\theta, v)v_{,22} - p_{22}(\theta, v)v_{,11})$$

$$\begin{aligned}
& + \varkappa p_{11}(\theta, v)v_{,22} + 2(1 - \varkappa)p_{12}(\theta, v)v_{,12}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_{,1} b(v, v) - \int_{\Omega} (f\theta)_{,1} v \\
& + \int_{\omega} p(\theta, w)w_{,11} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \theta_{,1} (w_{,11})^2 - \int_{\omega} (g\theta)_{,1} w.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_{11}(\theta, v) &= -2\theta_{,1}v_{,11} - \theta_{,11}v_{,1}, \\
p_{22}(\theta, v) &= -2\theta_{,2}v_{,12} - \theta_{,22}v_{,1}, \\
p_{12}(\theta, v) &= p_{21}(\theta, v) = -\theta_{,1}v_{,12} - \theta_{,2}v_{,11} - \theta_{,12}v_{,1}, \\
p(\theta, w) &= -2\theta_{,1}w_{,11} - \theta_{,11}w_{,1},
\end{aligned}$$

функции  $(v, w)$  – решение вариационного неравенства (4.12), а функция  $\theta$  такова, что

$$\theta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \partial\omega), \quad \theta = 1 \text{ в окрестности точки } (1, 0). \quad (4.40)$$

*Доказательство.* Найдем асимптотическое разложение для функционала энергии (4.24). Для этого применим к функциям в (4.24) координатное преобразование (4.26) и воспользуемся разложениями (4.28)–(4.31) из леммы 4.1. Находим следующее представление

$$\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \tilde{\mathcal{E}}(\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) = \mathcal{E}(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{E}'(\theta; \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) + R(\varepsilon, \theta; \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon), \quad (4.41)$$

в котором

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^\varepsilon(x_1, x_2) &= v^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2), x_2), \quad \tilde{w}^\varepsilon(x_1) = w^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, 0)), \\
\mathcal{E}'(\theta; \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_{,1} b(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon) + \int_{\Omega} B(\theta, \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon) - \int_{\Omega} (f\theta)_{,1} \tilde{v}^\varepsilon \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\omega} \theta_{,1} (\tilde{w}^\varepsilon_{,11})^2 + \int_{\omega} p(\theta, \tilde{w}^\varepsilon) \tilde{w}^\varepsilon_{,11} - \int_{\omega} (g\theta)_{,1} \tilde{w}^\varepsilon,
\end{aligned} \quad (4.42)$$



$$\begin{aligned}
R(\varepsilon, \theta; \widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} R_1(\varepsilon, \theta, \widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{v}^\varepsilon) - \int_{\Omega} R_3(\varepsilon, \theta, f, \widetilde{v}^\varepsilon) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\omega} R_2(\varepsilon, \theta, \widetilde{w}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon) - \int_{\omega} R_4(\varepsilon, \theta, g, \widetilde{w}^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Напомним, что формы  $B(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ ,  $p(\varepsilon, \theta, \cdot)$ ,  $R_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ ,  $R_3(\varepsilon, \theta, f, \cdot)$ ,  $R_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ ,  $R_4(\varepsilon, \theta, g, \cdot)$  определяются формулами (4.33)–(4.35). Подчеркнем, что по приведенным выше определениям форма  $\mathcal{E}'(\theta; \cdot, \cdot)$  является непрерывной, а для формы  $R(\varepsilon, \theta; \cdot, \cdot)$  в силу (4.35) справедлива равномерная сходимость

$$\frac{R(\varepsilon, \theta; \cdot, \cdot)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad (4.43)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$

Приступим к вычислению предела (4.39). Для этого воспользуемся двумя важными неравенствами

$$\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \leq \widetilde{\mathcal{E}}(\varepsilon, v, w), \quad \mathcal{E}(v, w) \leq \mathcal{E}(\widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon),$$

которые верны благодаря тому, что  $\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \inf_{\mathcal{K}^\varepsilon} \mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}(v, w) = \inf_{\mathcal{K}_0} \mathcal{E}$ , а между множествами  $\mathcal{K}^\varepsilon$  и  $\mathcal{K}_0$  имеет место взаимно-однозначное соответствие. С помощью указанных неравенств получаем оценку

$$\frac{\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \mathcal{E}(\widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \mathcal{E}(v, w)}{\varepsilon} \leq \frac{\widetilde{\mathcal{E}}(\varepsilon, v, w) - \mathcal{E}(v, w)}{\varepsilon}.$$

Отсюда с учетом разложения (4.41) приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'(\theta; \widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon) + \frac{R(\varepsilon, \theta; \widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon)}{\varepsilon} &\leq \\
\frac{\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \mathcal{E}(v, w)}{\varepsilon} &\leq \mathcal{E}'(\theta; v, w) + \frac{R(\varepsilon, \theta; v, w)}{\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (4.44)$$

Проанализируем сходимость фигурирующих в (4.44) миноранты и мажоранты. Напомним, что в силу доказанной теоремы 4.3 имеет место сходимость

$$(\widetilde{v}^\varepsilon, \widetilde{w}^\varepsilon) \rightarrow (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Поэтому, опираясь на непрерывность  $\mathcal{E}'(\theta; \cdot, \cdot)$  и справедливость сходимости (4.43), имеем

$$\mathcal{E}'(\theta; \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon) + \frac{R(\varepsilon, \theta; \tilde{v}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{E}'(\theta; v, w),$$

$$\mathcal{E}'(\theta; v, w) + \frac{R(\varepsilon, \theta; v, w)}{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{E}'(\theta; v, w),$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Отсюда по теореме о пределе промежуточной функции следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\mathcal{E}(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \mathcal{E}(v, w)}{\varepsilon} = \mathcal{E}'(\theta; v, w).$$

Таким образом нами доказано, что предел (4.39), задающий производную функционала энергии, существует и равен  $\mathcal{E}'(\theta; v, w)$ . В то же время, формула для  $\mathcal{E}'(\theta; v, w)$  легко получается из соотношений (4.42) и (4.33), (4.34). Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Для выражения формулы производной функционала энергии используется функция  $\theta$ , но важно отметить, что полученная производная не зависит от конкретного выбора  $\theta$ . Действительно, мы можем выбрать любую функцию  $\theta$ , удовлетворяющую условиям (4.40), построить координатное преобразование вида (4.26), и оно будет определять возмущенную геометрическую конфигурацию. Далее в возмущенной геометрии ставится задача (4.25), решение которой существует, единственно и на самом деле не зависит от функции  $\theta$ , а лишь от параметра  $\varepsilon$  (так как для доказательства существования и единственности решения способ построения возмущенных областей не важен). Тогда, учитывая определение производной (4.39), мы можем повторить рассуждения теоремы 4.4 и в результате при любой допустимой  $\theta$  придем к одной и той же формуле для производной. Таким образом, если  $\theta_1, \theta_2$  – две, вообще говоря, различные функции, удовлетворяющие (4.40), то  $\mathcal{E}'(\theta_1; v, w) = \mathcal{E}'(\theta_2; v, w)$ .

## Заключение

В диссертационном исследовании рассмотрен новый класс задач о равновесии пластин, контактирующих с тонкими препятствиями при краевых условиях одностороннего контакта. В указанных задачах пластины моделируются в рамках различных механических теорий: как классической теории Кирхгофа – Лява, так и теории Тимошенко, а препятствия описываются в рамках теории балок Бернулли – Эйлера. Условия взаимодействия пластин и балок задаются на участках прямых линий, расположенных внутри области отыскания решения. Краевые условия, используемые в каждой из изученных задач, имеют различный характер в зависимости от конкретного вида взаимодействия, а именно: контакта с учетом сил сцепления, идеального контакта без сил сцепления, контакта при наличии в пластине тонкого включения, контакта при частичной склейке пластины и балки. При этом во всех случаях применяются ограничения на перемещения вида неравенств, предотвращающие взаимное проникновение контактирующих тел, а множество точек контакта а priori неизвестно. Формулируемые таким образом задачи являются нелинейными в целом и относятся к классу проблем с неизвестной заранее границей.

Первым делом рассматриваемые задачи поставлены в виде краевых задач. Далее приведены эквивалентные вариационные постановки в виде задач минимизации функционалов энергии и вариационных неравенств, для которых доказаны теоремы существования и исследована взаимосвязь с исходными краевыми задачами. После этого изучены предельные переходы в вариационных постановках по различным параметрам задач равновесия, характеризующим как механическое поведение контактирующих пластин и балок, так и геометрию задач. Доказана сходимости вариационных решений для различных предельных случаев, в том числе, для случаев стремления параметров к бесконечности. Установлено, что получаемые в результате предельных переходов к бесконечности задачи существенно отличаются от исходных, для предельных задач также проведен анализ вариационных постановок и соответствующих им краевых задач.

Анализ предельных переходов в вариационных неравенствах позволил изучить ряд задач оптимального управления, тесно связанных с задачами равновесия. Указанные задачи поставлены в виде задач отыскания параметров, доставляющих минимум функционалам качества вида нормы на бесконечных промежутках. Оригинальность рассмотренных задач оптимального управления состоит в том, что в них при отыскании оптимальных параметров к сравнению допускаются как конечные значения, так и бесконечные, а значит сравниваются решения качественно отличных друг от друга контактных задач. Для задач оптимального управления продемонстрирована корректность постановок и доказаны теоремы существования.

Исследована чувствительность к гладким возмущениям областей в задаче об одностороннем контакте пластины и балки при частичной склейке. Указанные возмущения представляют собой координатные преобразования, при которых увеличивается длина зоны одностороннего контакта. Изучено асимптотическое поведение вариационных решений по параметру, характеризующему величину гладких возмущений и, соответственно, приращение длины зоны одностороннего контакта. Доказано существование производной функционала энергии по длине в виде одностороннего предела, найдена явная формула для производной.

Таким образом, в рамках диссертационного исследования впервые рассмотрен ряд задач о контакте пластин и тонких препятствий с односторонними ограничениями, постановки которых оригинальны и не изучались ранее в научной практике. Для этих задач получены новые результаты о разрешимости и качественных свойствах решений, которые могут служить основой для дальнейших теоретических исследований указанных задач и их численной реализации. Полученные результаты, следовательно, могут быть полезны при моделировании контактных взаимодействий между пластинами и тонкими препятствиями в рамках сложных моделей с неизвестной зоной контакта и не допускающих нежелательное явление взаимного проникновения тел, а значит, более правдоподобных с точки зрения приложений.

## Список литературы

1. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // *Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.* — 1964. — Vol. 7. — P. 91–140.
2. *Antman S.* The influence of elasticity on analysis: Modern developments // *Bulletin of the American Mathematical Society. New Series.* — 1983. — Vol. 9, No. 3. — P. 267–291.
3. *Browder F.E.* Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces // *Bulletin of the American Mathematical Society.* — 1965. — Vol. 71, No. 5. — P. 780–785.
4. *Browder F.E.* On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* — 1966. — Vol. 56, No. 2. — P. 419–425.
5. *Browder F.E.* Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* — 1966. — Vol. 56, No. 4. — P. 1080–1086.
6. *Lions J.L., Stampacchia G.* Variational inequalities // *Communications on pure and applied mathematics.* — 1967. — Vol. 20, No. 3. — P. 493–519.
7. *Lewy H.* On a variational problem with inequalities on the boundary // *Journal of Mathematics and Mechanics.* — 1968. — Vol. 17, No. 9. — P. 861–884.
8. *Brezis H.* Equations et inequations non lineaires dans les espaces vectoriels en dualite // *Annales de l'institut Fourier.* — 1968. — Vol. 18, No. 1. — P. 115–175.

9. *Brezis H., Stampacchia G.* Sur la regularite de la solution d'inequations elliptiques // *Bulletin de la Societe Mathematique de France.* — 1968. — Vol. 96. — P. 153–180.
10. *Lewy H., Stampacchia G.* On the regularity of the solution of a variational inequality // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1969. — Vol. 22, No. 2. — P. 153–188.
11. *Дюво Г., Лионс Ж.Л.* Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980.
12. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства: Приложения к задачам со свободой границей. — Москва: Наука, 1988.
13. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983.
14. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии. — Москва: Мир, 1989.
15. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. — Москва: Наука, 1990.
16. *Kravchuk A.S., Neittaanmaki P.J.* Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. — Springer Science & Business Media, 2007.
17. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. — Москва: Мир, 1979.
18. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — Москва: Мир, 1979.
19. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. — Москва: Мир, 1986.
20. *Glowinski R.* Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1984.

21. *Ito K., Kunisch K.* Lagrange multiplier approach to variational problems and applications. — Philadelphia: SIAM, 2008.
22. *Кравчук А.С.* Вариационный метод в контактных задачах. Состояния проблемы, направления развития // *Прикладная математика и механика*. — 2009. — Т. 7, № 3. — С. 492–502.
23. *Lewy H.* On the coincidence set in variational inequalities // *Journal of Differential Geometry*. — 1971. — Vol. 6. — P. 497–501.
24. *Frehse J.* Two dimensional variational problems with thin obstacles // *Mathematische Zeitschrift*. — 1975. — Vol. 143. — P. 279–288.
25. *Frehse J.* On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*. — 1977. — Vol. 4, No. 2. — P. 343–362.
26. *Richardson D.* Variational problems with thin obstacles. — The University of British Columbia, 1978.
27. *Caffarelli L.A.* Further regularity for the Signorini problem // *Communications in Partial Differential Equations*. — 1979. — Vol. 4, No. 9. — P. 1067–1075.
28. *Athanasopoulos I., Caffarelli L.A.* Optimal regularity of lower-dimensional obstacle problems // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2006. — Vol. 132, No. 3. — P. 274–284.
29. *Athanasopoulos I., Caffarelli L.A., Salsa S.* The structure of the free boundary for lower dimensional obstacle problems // *American Journal of Mathematics*. — 2008. — Vol. 130, No. 2. — P. 485–498.
30. *Petrosyan A., Shahgholian H., Ural'tseva N.N.* Regularity of free boundaries in obstacle-type problems. — Providence: American Mathematical Society, 2012.

31. *Schild B.* A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze.* — 1984. — Vol. 11, No. 1. — P. 87–122.
32. *Schild B.* On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze.* — 1986. — Vol. 13, No. 4. — P. 559–616.
33. *Уральцева Н.Н.* О регулярности решений вариационных неравенств // *Успехи математических наук.* — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 191–219.
34. *Ural'tseva N.N.* An estimate of the derivatives of the solutions of variational inequalities // *Journal of Soviet Mathematics.* — 1989. — Vol. 45, No. 3. — P. 1181–1191.
35. *Guillen N.* Optimal regularity for the Signorini problem // *Calculus of Variations and Partial Differential Equations.* — 2009. — Vol. 36, No. 4. — P. 533–546.
36. *Garofalo N., Garcia M.S.V.* New monotonicity formulas and the optimal regularity in the Signorini problem with variable coefficients // *Advances in Mathematics.* — 2014. — Vol. 262. — P. 682–750.
37. *Koch H., Rüland A., Shi W.* The variable coefficient thin obstacle problem: Carleman inequalities // *Advances in Mathematics.* — 2016. — Vol. 301. — P. 820–866.
38. *Khludnev A.M., Hoffmann K.H., Botkin N.D.* The variational contact problem for elastic objects of different dimensions // *Siberian Mathematical Journal.* — 2006. — Vol. 47, No. 3. — P. 584–593.
39. *Khludnev A., Leugering G.* Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendung.* — 2008. — Vol. 27, No. 2. — P. 157–177.
40. *Фурцев А.И.* Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки // *Сибирские электронные математические известия.* — 2018. — Т. 15. — С. 935–949.



41. *Фурцев А.И.* Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 105–117.
42. *Khudnev A., Tani A.* Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies // *European Journal of Mechanics A/Solids*. — 2008. — Vol. 27. — P. 365–377.
43. *Неустроева Н.В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 92–105.
44. *Ротанова Т.А.* Задача об одностороннем контакте двух пластин, одна из которых содержит жесткое включение // *Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика*. — 2011. — Т. 11, № 1. — С. 87–98.
45. *Фурцев А.И.* О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. — 2017. — Т. 17, № 4. — С. 94–111.
46. *Khudnev A.M., Koutunen V.A.* Analysis of cracks in solids. — Southampton-Boston: WIT Press, 2000.
47. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. — Москва: Физматлит, 2010.
48. *Hintermüller M., Koutunen V.A., Kunisch K.* The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // *IMA Journal of Applied Mathematics*. — 2004. — Vol. 69, No. 1. — P. 1–26.
49. *Koutunen V.A.* Nonconvex problem for crack with nonpenetration // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 2004. — Vol. 85, No. 4. — P. 242–251.
50. *Lazarev N.P., Rudoy E.M.* Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 2014. — Vol. 94, No. 9. — P. 730–739.

51. *Rudoy E.M.* Domain decomposition method for crack problems with non-penetration condition // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. — 2016. — Vol. 50, No. 4. — P. 995–1009.
52. *Khudnev A.M., Shcherbakov V.V.* A note on crack propagation paths inside elastic bodies // *Applied Mathematics Letters*. — 2018. — Vol. 79. — P. 80–84.
53. *Knees D., Mielke A.* Energy release rate for cracks in finite-strain elasticity // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2008. — Vol. 31, No. 5. — P. 501–528.
54. *Knees D., Schröder A.* Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2012. — Vol. 35, No. 15. — P. 1859–1884.
55. *Gussmann P., Mielke A.* Linearized elasticity as Mosco-limit of finite elasticity in the presence of cracks // *Advances in Calculus of Variations*. — 2017. — DOI: 10.1515/acv-2017-0010.
56. *Ciarlet P.G., Le Dret H., Nzenywa R.* Junctions between three-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures // *Journal de mathématiques pures et appliquées*. — 1989. — Vol. 68, No. 3. — P. 261–295.
57. *Aufranc M.* Numerical study of a junction between a three-dimensional elastic structure and a plate // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1989. — Vol. 74, No. 2. — P. 207–222.
58. *Le Dret H.* Modeling of the junction between two rods // *Journal de mathématiques pures et appliquées*. — 1989. — Vol. 68, No. 3. — P. 365–397.
59. *Titeux I., Sanchez-Palencia E.* Junction of thin plates // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. — 2000. — Vol. 19, No. 3. — P. 377–400.
60. *Geymonat G., Krasucki F., Lenci S.* Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 1999. — Vol. 4, No. 2. — P. 201–225.

61. *Benveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // *Mechanics of Materials*. — 2001. — Vol. 33. — P. 309–323.
62. *Serpilli M.* Asymptotic interface models in magneto-electro-thermoelastic composites // *Meccanica*. — 2017. — Vol. 52, No. 6. — P. 1407–1424.
63. *Serpilli M.* Classical and higher order interface conditions in poroelasticity // *Annals of Solid and Structural Mechanics*. — 2019. — DOI:10.1007/s12356-019-00052-5.
64. *Bessoud A.L., Krasucki F., Michaille G.* Multi-materials with strong interface: variational modelings // *Asymptotic Analysis*. — 2009. — Vol. 61, No. 1. — P. 1–19.
65. *Bessoud A.L., Krasucki F., Serpilli M.* Asymptotic analysis of shell-like inclusions with high rigidity // *Journal of Elasticity*. — 2011. — Vol. 103, No. 2. — P. 153–172.
66. *Furtsev A., Itou H., Rudoy E.* Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // *International Journal of Solids and Structures*. — 2020. — Vol. 182-183. — P. 100—111.
67. *Furtsev A., Rudoy E.* Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates // *International Journal of Solids and Structures*. — 2020. — Vol. 202. — P. 562—574.
68. *Khudnev A.M., Faella L., Popova T.S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2017. — Vol. 22, No. 4. — P. 737–750.
69. *Khudnev A.M., Popova T.S.* Junction problem for rigid and semirigid inclusions in elastic bodies // *Archive of Applied Mechanics*. — 2016. — Vol. 86. — P. 1565–1577.

70. *Khudnev A.M., Popova T.S.* On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*. — 2020. — P. e202000063.
71. *Фурцев А.И.* Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // *Сибирские электронные математические известия*. — 2020. — Т. 17. — С. 364–379.
72. *Goland M., Reissner E.* The stresses in cemented lap joints // *Journal of Applied Mechanics*. — 1944. — P. 17–27.
73. *Edlund U., Klarbring A.* Analysis of elastic and elastic-plastic adhesive joints using a mathematical programming approach // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1990. — Vol. 78, No. 1. — P. 19–47.
74. *Klarbring A.* Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method // *International Journal of Engineering Science*. — 1991. — Vol. 29, No. 4. — P. 493–512.
75. *Baiocchi C., Capello A.* Variational and Quasi-Variational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems. — New-York: Wiley, 1984.
76. *Necas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. — Heidelberg-Dordrecht-London-New-York: Springer, 2012.
77. *Khudnev A.M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. — Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 1997.
78. *Товстик П.Е.* Неклассические модели балок, пластин и оболочек // *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика*. — 2008. — Т. 8, № 3. — С. 72–85.
79. *Arnold D.N., Madureira A.L., Zhang S.* On the Range of Applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love Plate Bending Models // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. — 2002. — Vol. 67. — P. 171–185.

80. *Lim G.T., Reddy J.N.* On canonical bending relationships for plates // *International Journal of Solids and Structures*. — 2003. — Vol. 40. — P. 3039–3067.
81. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. — Boca Raton: CRC Press, 2007.
82. *Hwu C.* Anisotropic Elastic Plates. — Springer Science & Business Media, 2010.
83. *Gere J.M., Timoshenko S.P.* Mechanics of Materials. — PWS Publishing Company, 1997.
84. *Haslinger J., Makinen R.A.E.* Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
85. *Bucur D., Buttazzo G.* Variational Methods in Shape Optimization Problems. — Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 2000.
86. *Guillaume P., Masmoudi M.* The Topological Asymptotic for PDE Systems: The Elasticity Case // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 2001. — Vol. 39, No. 6. — P. 1756–1778.
87. *Sokolowski J., Zolesio J.-P.* Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis. — Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1991.
88. *Novotny A., Sokolowski J.* Topological Derivatives in Shape Optimization. — Springer Science & Business Media, 2013.
89. *Delfour M.C., Zolesio J.-P.* Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
90. *Rudoy E.M.* The Griffith formula and Cherepanov–Rice integral for a plate with a rigid inclusion and a crack // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2012. — Vol. 186, No. 3. — P. 511–529.