Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Сибирский федеральный университет"

На правах рукописи

Федорова Наталья Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант
доктор физико–математических наук,
профессор Ю.В. Немировский

Красноярск — 2017

Содержание

Введение

В широком смысле композиционный материал (далее – КМ) – это любой материал с гетерогенной структурой, т.е. со структурой, состоящей минимум из двух фаз. В литературе однозначного и общепринятого определения нет. Наиболее полным считается определение, согласно которому к композитам относятся материалы, обладающие рядом признаков: 1) состав, форма и распределение компонентов материала заданы заранее; 2) материал не встречается в природе, а создан человеком; 3) материал состоит из двух или более компонентов, различающихся по химическому составу и разделенных выраженной границей; 4) свойства материала определяются каждым из его компонентов, которые в связи с этим должны присутствовать в достаточно больших количествах (больше некоторого критического содержания); 5) материал обладает такими свойствами, которых не имеют его компоненты, взятые в отдельности; 6) материал неоднороден в микромасштабе и однороден в макромасштабе.

В настоящее время разработано несколько подходов к классификации КМ, один них [37] основан на свойствах матрицы (связующее) и армирующих элементов (арматура). Общее название КМ, как правило, происходит от материала матрицы. КМ с металлической матрицей называют металлическими композиционными материалами (МКМ), с полимерной матрицей – полимерными композиционными материалами (ПКМ). Название полимерных КМ обычно состоит из двух частей. В первой части называется материал волокна, во второй – приводится слово пластик, или волокнит. Например, ПКМ, армированные стекловолокном, называются стеклопластиками. Если при изготовлении ПКМ использовали металлические волокна, КМ называют металлопластиком. Для характеристики МКМ чаще используют двойное обозначение: в начале пишут материал матрицы, затем – материал волокна. Например, обозначение медь-вольфрам соответствует КМ, в котором матрицей является медь, а волокнами – вольфрам.

В современной аэрокосмической промышленности [8, 17] неуклонно возрастают объемы использования КМ.

Рис. 1

На рис. 1 представлена относительная доля КМ в массе таких конструкций, как космические аппараты, стратегические ракеты с твердотопливными двигателями (РДТТ), крупногабаритные твердотопливные ракетные двигатели, стратегические ракеты с жидкостными двигателями (ЖРД), боевые самолеты и вертолеты, транспортные и пассажирские самолеты. Как видим на рис. 1, доля КМ от массы ракетных двигателей составляет до 90%.

Одним из направлений создания КМ являются волокнистые композиты [41]. В волокнистых композитах высокопрочные волокна воспринимают основные напряжения, возникающие в КМ при действии внешних нагрузок, и обеспечивают жесткость и прочность КМ в направлении ориентации волокон. Податливая матрица, заполняющая межволокнистое пространство, обеспечивает совместную работу отдельных волокон за счет собственной жесткости и взаимодействия, существующего на границе раздела матрица – волокно. Следовательно, механические свойства композита определяются тремя основными параметрами: высокой прочностью армирующих волокон, жесткостью матрицы и прочностью связи на границе матрица – волокно. Соотношения этих параметров характеризуют весь комплекс механических свойств материала и механизм его разрушения. Работоспособность композита обеспечивается как правильным выбором исходных компонентов, так и рациональной технологией производства, обеспечивающей прочную связь между компонентами при условии сохранения первоначальных свойств.

Армирующие волокна, применяемые в КМ, должны удовлетворять набору требований: по прочности, жесткости, плотности, стабильности свойств в определенном температурном интервале. При создании волокнистых композитов применяются высокопрочные стеклянные, углеродные, борные и органические волокна, металлические проволоки, а также волокна и нитевидные кристаллы ряда карбидов, оксидов, нитридов и других соединений. Армирующие компоненты в композитах применяются в виде моноволокон, нитей, проволок, жгутов, сеток, тканей, лент, холстов. Важным требованием является совместимость волокон с материалом матрицы, т.е. возможность достижения прочной связи волокно – матрица при условиях, обеспечивающих сохранение исходных значений механических свойств материала.

В композитах важным элементом является матрица, которая обеспечивает монолитность композита, фиксирует форму изделия и взаимное расположение армирующих волокон, распределяет действующие напряжения по объему материала. Материал матрицы определяет метод изготовления изделий из композитов, возможность выполнения конструкций заданных габаритов и формы, параметры технологических процессов.

Свойства композитов зависят не только от свойств волокон и матрицы, но и от способов армирования (конструктивный признак классификации композитов) [41]:

1) хаотически армированные: содержат армирующие элементы в виде

дисперсных включений, дискретных или непрерывных волокон;
2) упорядоченно-армированные: подразделяются на однонаправленные, двухосно-армированные и трехосно-армированные.

Волокнистое армирование позволяет использовать новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках одного и того же технологического процесса. В результате получается материал с новыми свойствами. Изучить и предсказать эти свойства можно с помощью математического моделирования на основе структурного подхода. Существенный прогресс в проектировании конструкций может быть получен при использовании армированных пластиков, металлов и керамик. На основе композита создается материал с заранее заданными свойствами за счет подбора матриц и траекторий армирования. Следует заметить, что волокна должны удовлетворять комплексу эксплуатационных и технологических требований. Это прочность, жесткость, термодинамическая совместимость в процессе эксплуатации. В рамках единого технологического процесса могут создаваться полиармированные композиты с одновременным внедрением в матрицу волокон разной природы и с разными траекториями. С помощью моделирования композитов может быть решена еще одна проблема промышленной эксплуатации конструкций — проблема снижения материалоемкости конструкций. Во всех развитых странах в последние годы активно проводятся исследования по оптимальному и рациональному проектированию конструкций. Следует отметить монографии по механике композитов – это, например, перевод книги Р. Кристенсена [44], книга Б.Е. Победри [94] и два издания монографии В.В. Васильева и Морозова [148], опубликованных в Великобритании.

В нашей стране основополагающий вклад в развитие механики композитов внесли Ю.Н. Работнов и его ученики (Аннин Б. Д., Немировский Ю.В и др.) в середине прошлого века [99]. Работая в СО РАН (г. Новосибирск), они развили различные направления исследования по композиционным материалам и элементам конструкций. На основе метода гомогенизации, активно развивавшегося в восьмидесятых годах прошлого века, академик Аннин Б. Д. и его ученики [5, 4, 140, 139] построили усредненные модели неоднородных тонкостенных конструкций исходя из трехмерных уравнений теории упругости. Выполнены исследования асимптотических свойств классических моделей, установлен ряд неклассических моделей [38] при наложении специальных условий.

Современные волокнистые композиты являются неоднородными анизотропными материалами. Упругость и не упругость волокнистых композитов определяются типом арматуры (стекло-, боро-, угле- и органоволокна) и матриц (полимерных, углеродных, металлических, керамических), степенью их взаимодействия в композите, а также углом нагружения относительно направлений армирования. Композиты обладают двумя уровнями неоднородности - микро неоднородностью (монослой, составленный из волокон и связующего) и макро неоднородностью (слоистая структура, составленная из монослоев, с произвольной укладкой по толщине пакета). Отсюда два направления в механике композитов: микро- и макромеханика. Сочетанию микро и макро структур композита в задаче оптимизации посвящена недавняя работа коллектива зарубежных авторов в журнале "Materials & Design" [149]. Для зарубежной литературы характерно наличие большого количества работ по КМ, описывающих гиперупругость при условии конечных деформаций, например [137, 138]. Этот подход следует из классических работ Ривлина Р. С. и Адкинса Дж. Е. [145, 136]. Структурно-неоднородная среда по своему физико-механическому поведению значительно богаче однородного материала. Разнообразие возможных ситуаций в процессе деформирования и разрушения композитов делает изучение этих материалов привлекательным для специалистов из разных областей механики твердого тела. Например, в волокнистых композитах на уровне армирующих элементов всегда имеются микродефекты — трещины, обусловленные не только несовершенством технологии, но и отступлением от идеализированной модели материала. Центральным моментом в механике волокнистых композитов, является существенный учет структуры материала на уровне армирующих элементов — обстоятельство, не характерное для классической механики твердого тела. На уровне армирующих элементов создаются механические свойства материала; управляя укладкой волокон, можно в определенных пределах управлять полями сопротивления материала, ”подстраивая” их под действующие усилия. Более того, на этом пути открываются возможности разработки принципов оптимального проектирования самого материала.

В нашей стране Ю.В. Немировскому и его ученикам С.К. Голушко, А.П. Янковскому, И.П. Вахмянину, С. Б. Бушманову [27, 89, 23, 19] и другим ученым удалось добиться серьезных результатов благодаря развиваемому новому подходу в построении структурной механики произвольных типов слоисто-волокнистых конструкций. Развиваемый подход позволяет получать единый математический аппарат анализа поведения конструкций для широкого спектра структур армирования, разрабатывать на его основе удобные единообразные схемы и программы численных расчетов, позволяет с их помощью вырабатывать рекомендации по созданию и совершенствованию технологий разных типов конструкций с непрерывными криволинейными структурами армирования.

Ключевым моментом при разработке теории расчета композитных конструкций является установление физических закономерностей деформирования многофазных материалов. Традиционно такие закономерности разрабатываются феноменологическим путем, опираясь на методы осреднения, статистической обработки результатов испытания простейших образцов с привлечением математических методов интервального анализа и теории нечетких множеств. Такие подходы требуют выполнения больших согласованных программ испытаний и их математической обработки. Полученные зависимости могут быть полезными при последующем анализе композитных структур с непрерывными или кусочно-непрерывными (игольчатыми) прямолинейными волокнами. Подобный подход позволяет затем рассчитывать свойства материалов и формулирующиеся технологические, силовые и температурные поля напряжений и деформаций сколь угодно далекие от реальных полей, формирующихся в изделиях с непрерывными криволинейными структурами. Следует иметь в виду, что матрицы композиционных материалов весьма чувствительны к изменениям внешних факторов (силовым, температурным, климатическим). Это требует выполнения дополнительных экспериментальных, аналитических и численных программ исследований на основе феноменологических подходов по сути бесполезных для конструкций с непрерывными криволинейными структурами армирования. Учитывая, что технологии создания конструкций с непрерывными криволинейными структурами могут быть легко автоматизированы, а в эксплуатации такие конструкции будут обладать намного лучшими по несущей способности, жесткости и надежности качествами, следует уделять особое внимание развитию направления исследования таких конструкций. За рубежом такие исследования только начинают развиваться [149].

Развиваемый подход позволяет получать единый математический аппарат анализа поведения конструкций для широкого спектра структур армирования, разрабатывать на его основе удобные единообразные схемы и программы численных расчетов и с их помощью вырабатывать рекомендации по созданию и совершенствованию технологий разнообразных типов конструкций с непрерывными криволинейными структурами армирования. Тем самым переводить результаты математического моделирования в русло реальных практических производств.

Следует выделить важное направление производства волокнистых композитов посредством намотки волокон (намоточные композиты). Полученная композитная конструкция состоит только из волокон, матрица отсутствует [36]. Дальнейшее развитие этот подход, судя по открытым публикациям, получил в крупных научно-исследовательских центрах, например, Аэрокосмический Институт (США). В России этим направлением занимаются, например, в МГТУ им. Н. Э. Баумана, где созданы технологии намотки ракет и средств поражения [40]; в Российском государственном технологическом университете им. К.Э. Циолковского (МАТИ) [148] и других научных центрах.

Диссертация посвящена построению в рамках плоской неоднородной анизотропной теории упругости теоретических моделей армирования вдоль непрерывных криволинейных траекторий. Коэффициенты, входящие в разрешающие уравнения, зависят от функций углов армирования и могут быть как заданными функциями координат (прямая задача), так и неизвестными функциями (обратная задача). В работах С. А. Амбарцумяна [1, 2] коэффициенты упругости (или жесткости) являются заданными функциями координат, для них выполнены некоторые аппроксимирующие зависимости.

Важное направление по применению структурного подхода к прикладным задачам архитектуры и строительства сформулировано в работе Ю.В. Немировского, В.Д. Кургузова [60], где на частных примерах деформирования сплошной квадратной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки показано существенное влияние структуры криволинейного непрерывного армирования на перемещения и предельную нагрузку.

В монографии Ю.В. Немировского и С.К. Голушко [27], дальнейших работах С.К. Голушко и его учеников [26], реализован ряд структурных моделей для решения прямых и обратных задач рационального проектирования слоисто-волокнистых крупногабаритных тел, имеющих форму пластин и оболочек, на основе различных уточненных теорий.

Для безопасной работы конструкций с концентраторами напряжений, в окрестности которых возникают большие градиенты полей напряжений, их армируют высокопрочными волокнами с целью восприятия волокнами этих градиентов. Но волокна могут и не выполнить эту роль, тогда нагрузка будет влиять на связующее. До последнего времени армирование плоских конструкций осуществлялось прямолинейными волокнами. Однако такая структура армирования может быть эффективной лишь в частных случаях нагружения, при которых внутренние силовые потоки преимущественно направлены вдоль траекторий армирования. Реальные конструктивные элементы работают в более сложных условиях нагружения. Для таких конструкций нужно вводить специальные структуры армирования, которые в определенной мере были бы согласованы с характером полей градиентов напряжений. Необходимо проводить поиск структур армирования, которые снижают нагрузки, действующие на конструкцию. Одним из подходов к решению таких задач является армирование по криволинейным траекториям, соответствующим ортогональным системам координат. На основе структурной модели [142] в работах [19, 60, 82, 89] рассмотрены сложные структуры армирования по криволинейным траекториям.

В диссертации осуществлены следующие подходы к моделированию волокнистого композита.

В главе 1 сформулирована в криволинейной ортогональной системе координат плоская задача армированных сред. Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования получены разрешающие уравнения для линейной анизотропной неоднородной задачи упругости, включая уравнение совместности деформаций, в случаях биполярной, эллиптической, параболической, гиперболической, кардиоидальной систем координат. Переход от декартовых координат к криволинейной ортогональной системе координат осуществляется с помощью аналитических функций комплексного переменного. Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям. Детерминатным методом исследован тип полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора деформаций. Установлено, что система имеет эллиптический тип для армирования вдоль двух семейств траекторий, являющихся координатными линиями ортогональной системы координат. Поставлена краевая задача в деформациях в криволинейной системе координат.

В главе 2 построены разрешающие системы уравнений плоской задачи для одного семейства равнонапряженных и нерастяжимых, прямолинейных и криволинейных волокон в прямоугольной декартовой системе координат.

Установлено, что они составного типа для семейства нерастяжимых волокон. Введение условия равнонапряженности семейства волокон приводит к вырождению типа системы. Получены численно-аналитические решения частных задач. Для иллюстрации расчетов выбран металлокомпозит (алюминиевая пластинка армируется стальными волокнами).

В главе 3 проанализированы свойства общей системы разрешающих уравнений плоской задачи упругости в декартовой системе координат для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных траекторий. Получены некоторые частные аналитические решения (армирование по семействам эллипсов и гипербол в декартовой системе). Исследованы краевые задачи для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами и получены зависимости решений от выбора интенсивностей армирования, формы контура, внешней нагрузки, условий равнонапряженности. Получены аналитические решения для интенсивностей армирования вдоль траекторий, изогональных к выбранным семействам кривых. Установлено, что введение изогонального армирования с параметром k (k – тангенс угла, под которым изогональная траектория пересекает кривую данного семейства) порождает разные типы разрешающей системы дифференциальных уравнений (гиперболический, эллиптический, смешанный тип). Следовательно приводит к различным постановкам краевых задач. Изогональное армирование позволяет существенно расширить многообразие структур армирования, что дает возможность управлять напряженно-деформированным состоянием конструкции.

В главе 4 в рамках плоской задачи на основе структурной модели в декартовой системе координат построены разрешающие системы уравнений для возможных комбинаций армирования тремя нерастяжимыми и равнонапряженными семействами волокон. С помощью алгоритма построения инвариантных решений уравнений в частных производных найдены некоторые точные решения этой модели. На основе полученных решений найдено уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости семейств волокон.

Рассмотрена комбинация семейств волокон, когда два семейства армирующих волокон задаются известными функциями декартовых координат, а третье семейство расположено в направлении угла армирования, представляющем собой неизвестную функцию.

В главе 5 поставлена плоская задача армированных сред в полярной системе координат. Найдены разнообразные структуры армирования по изогональным траекториям. Рассмотрено армирование вдоль траекторий, изогональных радиальным направлениям. Решена обратная задача для армированной кольцевой пластины.

В главе 6 на основе структурной модели в рамках линейной неоднородной осесимметричной задачи упругости получена разрешающая система уравнений, описывающая поведение армированной кольцевой пластины. Система обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована относительно радиального и окружного перемещений в полярной системе координат. Армирование выполняется вдоль спиралевидных траекторий в рамках рационального проектирования задачи об армированной среде. В качестве критерия рациональности введено условие постоянства сечений волокон. Интенсивность армирования определяется посредством интегрирования уравнения постоянства сечений волокон вдоль выбранной конкретной траектории. Рассмотрено армирование двумя семействами волокон: траектории армирования – семейства алгебраических спиралей и комбинации спиралей с семейством прямых, известных в технике как "спицы велоколеса". Многообразие траекторий армирование расширяется путем построения криволинейных траекторий, изогональных к рассматриваемым семействам кривых. Система и граничные условия представляют собой двухточечную краевую задачу неканонического вида для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты системы содержат полный набор структурных характеристик: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования. Построен эффективный численный метод посредством приведения системы к канонической форме и реализации адаптивной схемы ортогональной прогонки. Постановка исходной задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает разнообразные механические формулировки задачи.

В главе 7 на основе методики армирования по криволинейным траекториям в рамках осесимметрической постановки решена задача о нахождении предельных деформаций вращающихся дисков газовых и гидротурбин. Рассмотрено растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы в полярной системе координат. Толщина диска предполагается малой по сравнению с наружным радиусом диска. На диск действуют центробежные силы от вращения, они направлены радиально и равномерно распределены в окружном направлении. Диск неравномерно нагрет по радиусу. Температура постоянна по толщине.

Для построения замкнутой системы разрешающих уравнений задача формулируется относительно радиальных и окружных перемещений. В результате получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенная относительно производных от перемещений, моделирующая растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы. В рамках численного эксперимента исследованы предельные скорости вращения дисков газовых турбин на примере титанового диска массой 9,8 кг, ограниченного контурами с радиусами $r_1 = 0,05$ м., $r_2 = 0,1$ м. с защитными керамическими покрытиями толщиной $0,03$ мм. Рассмотрены три типа структур армирования двумя семействами керамических волокон. Первая структура — траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей; вторая структура — семейство спиралей Архимеда и "спицы велоколеса", третья структура — семейство логарифмических спиралей и "спицы велоколеса". Показано, что может быть достигнуто существенное увеличение предельной скорости вращения армированного диска газовой турбины за счет выбора структуры армирования двумя семействами криволинейных волокон.

Построена модель для расчета армированного диска гидротурбины. Приведены примеры армирования по спиралевидным траекториям. В рассмотренных примерах материалом связующего является сталь, армирование проводится двумя семействами волокон, изготовленных из бериллия. Установлено существенное влияние структур армирования и геометрических параметров армирования на предельные скорости вращения диска.

Полученное в диссертации многообразие структур армирования по криволинейным траекториям позволяет создавать КМ с заранее заданными свойствами. С технологической точки зрения предложенный подход при создании плоских конструкций из армированных волокнистых материалов не представляет затруднений. Кроме того, он экономически малозатратен. Такие технологии уже существуют. Но необходимо провести процедуру предварительного математического моделирования с целью предвидения новых свойств материала, что и предлагается в настоящей работе.

Решение задачи об армированной плоской среде служит основой для решения задач по расчету слоисто-волокнистых тонкостенных конструкций с применением различных гипотез [1, 3, 16, 28]. С дальнейшей сборкой пакета по уточненным теориям, в том числе и нелинейным, рассмотренным автором диссертации в совместных работах [146, 147]. Полученные результаты планируется использовать при решении задач управления тепловыми и термонапряженными полями в композитных конструкциях.

Цель диссертационной работы.

Диссертация посвящена разработке нового научно-методологического подхода в создании плоских конструкций путем армирования семействами непрерывных криволинейных волокон.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

- Предложены новые постановки задачи об армировании одним семейством волокон при различных механических условиях равнодеформированности или нерастяжимости семейства волокон. Разработан численно-аналитический метод решения краевой задачи
- Впервые получена разрешающая система для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных

к ним траекторий. Получены некоторые частные аналитические решения. Исследованы краевые задачи для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами и получены зависимости решений от выбора интенсивностей армирования, формы контура, внешней нагрузки, условий равнонапряженности.

- Построены разрешающие системы уравнений для возможных комбинаций армирования тремя нерастяжимыми и равнонапряженными семействами волокон. С помощью алгоритма построения инвариантных решений уравнений в частных производных найдены некоторые точные решения этой модели. На основе полученных решений найдено уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости волокон.
- Исследованы поля интенсивностей армирования в полярной системе координат, получены новые аналитические решения в условиях постоянства сечений волокон
- Впервые разработана методика армирования плоской конструкции вдоль непрерывных спиралевидных траекторий в осесимметрической постановке задачи
- Получены численные решения задач для армированных вращающихся дисков газовых и гидротурбин. Показано существенное влияние геометрии и структуры армирования на скорость вращения диска.

Практическая значимость.

Результаты работы могут служить методической основой при расчетах и проектировании слоисто-волокнистых тонкостенных конструкций.

Исследования поддерживались грантами РФФИ: проект № 10-01-90402-Укр_а "Рациональное и оптимальное проектирование конструкций при интенсивных термосиловых воздействиях" и проект № 14-01-90400 Укр_а "Исследование проблем управления тепловыми и термонапряженными полями в композитных конструкциях". Автор диссертации принимала участие в проекте АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект "РНП-23" (2010 г.).

Результаты исследований нашли применение в учебном процессе Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета в курсах "Механика сплошных сред", "Аналитическая механика", "Численные методы", при руководстве диссертациями магистров.

Методы исследования.

- Модель линейной неоднородной анизотропной теории упругости
- Структурная модель композита
- Методы подобия для решения дифференциальных уравнений в частных производных
- Компьютерная алгебра, символьные вычисления
- Теория обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных
- Элементы теории функций комплексного переменного
- Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений
- Дифференциальная геометрия
- Теоретическая гидромеханика

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и методов их решения, предельным переходом от модели армированной среды к известным моделям однородной линейной теории упругости, сравнением для частных случаев аналитических решений, сравнением с численными экспериментами известных специалистов.

Положения, выносимые на защиту. Автор защищает:

- Математическую модель армирования плоских конструкций вдоль непрерывных криволинейных траекторий.

- Новые математические постановки задач об армировании одним, двумя и тремя семействами непрерывных криволинейных волокон при различных механических условиях равнодеформированности или нерастяжимости семейств волокон.
- Разрешающую систему для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных к ним траекторий. Постановку и решение краевых задач для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами.
- Методику армирования плоских конструкции вдоль непрерывных спиралевидных траекторий в осесимметрической постановке задачи.
- Математическую модель армированных вращающихся дисков газовых и гидротурбин.

  Разрешающую систему для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных к ним траекторий.

Апробация работы. По теме диссертации опубликовано 47 печатных работы, из них 14 статей в изданиях из списка ВАК [64, 117, 68, 72, 73, 79, 122, 124, 130, 131, 112, 115, 81, 24], монография "Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов" [69], 22 статьи в трудах конференций и публикации в российских и зарубежных изданиях.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и совещаниях:

— KORUS – 2002. Proceeding of the 6th International Symposium on Science and Technology (Novosibirsk, 2002)

— KORUS – 2005. Proceeding of the 9th International Symposium on Science and Technology (Novosibirsk, 2005)

— III Международной научно- технической конференции "Современные проблемы машиностроения" (Томск, 2006)

— Международной научной конференции ”Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий – 2008” (Красноярск, 2008)

— XXI, XXII, XXIII, XXIII, XXIV Всероссийских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Кемерово, 2009, Барнаул, 2011, 2013, Омск, 2015)

— III Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 80-летию НГАСУ (СИБСТРИН) (Новосибирск, 2010)

— Международной конференции ”Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике” (Новосибирск, 2010)

— Всероссийской научной конференции, посвященной 50 - летию полета Ю.А. Гагарина и 90 - летию со дня рождения основателя и первого директора НИИ ПММ ТГУ А. Д. Колмакова (Томск, 2011)

— II, III, IV,V Всероссийских конференциях ”Безопасность и живучесть технических систем” (Красноярск, 2007, 2009, 2012, 2015)

— 8 Всероссийской конференции ”Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики” (Томск, 2013)

— Решетневских чтениях: XIV, XV, XVI, XVII Международных конференциях памяти М.Ф.Решетнева (Красноярск, 2010, 2011, 2012, 2013, 2015)

— XVIII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева, (Красноярск, 2014)

— Международной конференции ”Математические и информационные технологии в нефтегазовом комплексе”, посвященной дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева и приуроченной к 20-летию сотрудничества ОАО "Сургутнефтегаз"и компании SAP (Сургут, 2014, 2016)

— Третьей и четвертой международных конференций ”Математическая физика и ее приложения” (Самара, 2012, 2014)

— IX Международной конференции "Математические проблемы механики неоднородных структур" (Львов, 2014)
— Десятой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2016)

Личный вклад автора. Работы [117, 115, 122, 124, 130, 131] выполнены без соавторов. В работах [112, 64, 68, 72, 73, 79, 81, 24] автору принадлежат теоретические построения, аналитические выкладки и численные расчеты. Обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с соавторами.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному консультанту профессору, д.ф.-м.н. Ю.В. Немировскому.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы, включающего 151 наименование. Общий объем диссертации составляет 238 страниц, включая 135 рисунков и 10 таблиц.

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и дана общая характеристика работы. Приведена аннотация работы по разделам.

Первая глава посвящена формулировке плоской задаче армированных сред в криволинейной ортогональной системе координат. Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования получены разрешающие уравнения для линейной анизотропной неоднородной задачи упругости, включая уравнение совместности деформаций, в случаях биполярной, эллиптической, параболической, гиперболической, кардиоидальной систем координат. Переход от декартовых координат к криволинейной ортогональной системе координат осуществляется с помощью аналитических функций комплексного переменного. Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям. Детерминатным методом исследован тип полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора деформаций. Установлено, что система имеет эллиптический тип для армированания вдоль двух семейств траекторий, являющихся координатными линиями ортогональной системы координат. Поставлена краевая задача в деформациях в криволинейной системе координат. Получено численное решение задачи об эксцентрическом кольце, армированном вдоль траекторий биполярной системы координат. Показана возможность увеличения за счет армирования по криволинейным траекториям предельных нагрузок на конструкцию в разы по сравнению с однородной конструкцией.

Во второй главе получены разрешающие системы уравнений плоской задачи для одного семейства равнонапряженных и нерастяжимых, прямолинейных и криволинейных волокон в прямоугольной декартовой системе координат. Установлено, что они составного типа для семейства нерастяжимых волокон. Введение условия равнонапряженности семейства волокон приводит к вырождению типа системы. Получены численно-аналитические решения частных задач.

В третьей главе проанализированы свойства общей системы разрешающих уравнений плоской задачи упругости в декартовой системе координат для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных траекторий. Получены некоторые частные аналитические решения (армирование по семействам эллипсов и гипербол в декартовой системе). Исследованы краевые задачи для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами и получены зависимости решений от выбора интенсивностей армирования, формы контура, внешней нагрузки, условий равнонапряженности. Получены аналитические решения для интенсивностей армирования вдоль траекторий, изогональных к выбранным семействам кривых. Установлено, что введение изогонального армирования с параметром k (k – тангенс угла, под которым изогональная траектория пересекает кривую данного семейства) порождает разные типы разрешающей системы дифференциальных уравнений (гиперболический, эллиптический, смешанный тип).

В **четвертой главе** в рамках плоской задачи на основе структурной модели в декартовой системе координат построены разрешающие системы уравнений для возможных комбинаций армирования тремя нерастяжимыми и равнонапряженными семействами волокон. С помощью алгоритма построения инвариантных решений уравнений в частных производных найдены некоторые точные решения этой модели. На основе полученных решений установлено уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости семейств волокон.

Пятая глава посвящена постановке плоской задачи армированных сред в полярной системе координат. Найдены разнообразные структуры армирования по изогональным траекториям. Рассмотрено армирование вдоль траекторий, изогональных радиальным направлениям. Решена обратная задача для армированной кольцевой пластины.

В шестой главе на основе структурной модели в рамках линейной неоднородной осесимметричной задачи упругости получена разрешающая система уравнений, описывающая поведение армированной кольцевой пластины. Система обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована относительно радиального и окружного перемещений в полярной системе координат. Армирование выполняется вдоль спиралевидных траекторий в рамках рационального проектирования задачи об армированной среде. В качестве критерия рациональности введено условие постоянства сечений волокон. Интенсивность армирования определяется посредством интегрирования уравнения постоянства сечений волокон вдоль выбранной конкретной траектории. Построены аналитические решения для интенсивностей армирования вдоль траекторий алгебраических спиралей. Система и граничные условия представляют собой двухточечную краевую задачу неканонического вида для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен эффективный численный метод посредством приведения системы к канонической форме и реализации адаптивной схемы ортогональной прогонки.

В седьмой главе разработана методика расчета армированных вращающихся дисков газовых и гидротурбин. Показано существенное влияние различных видов структур армирования и геометрических параметров армирования на предельные скорости вращения диска

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Приводится **список литературы**.

Глава 1

Армирование по ортогональным траекториям

1.1 Задача теории упругости в криволинейных координатах

Система основных уравнений линейной теории упругости формулируется в трехмерном пространстве уравнением [30]

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\sigma^{ij})}{\partial x^j} + \Gamma^i_{j\alpha}\sigma^{j\alpha} + f^i = 0, \tag{1.1}$$

где x^j– криволинейные координаты, $g = |g_{ij}|$– определитель из компонент метрического тензора, σ^{ij}– контравариантные компоненты тензора напряжений, f_i– контравариантные компоненты вектора массовых сил, $\Gamma^i_{j\alpha}$– символы Кристоффеля второго рода. Все индексы пробегают значения от 1 до 3.

В рамках плоской деформации эта система формулируется двумя уравнениями [21, 52]

$$\begin{gathered}\frac{\partial(H_2\sigma_{11})}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_1\sigma_{12})}{\partial\eta} + \frac{\partial H_1}{\partial\eta}\sigma_{12} - \frac{\partial H_2}{\partial\xi}\sigma_{22} + H_1H_2\Phi_1 = 0, \\ \frac{\partial(H_2\sigma_{12})}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_1\sigma_{22})}{\partial\eta} + \frac{\partial H_2}{\partial\xi}\sigma_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial\eta}\sigma_{22} + H_1H_2\Phi_2 = 0.\end{gathered} \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.2) $\sigma_{ij}(\xi,\eta)$– компоненты тензора напряжений $i, j = 1, 2$, Φ_1, Φ_2 – контравариантные компоненты вектора массовой силы,

$$H_1 = H_1(\xi,\eta), H_2 = H_2(\xi,\eta)-$$

коэффициенты Ламе, представляющие собой в общей ортогональной системе координат заданные функции координат ξ, η. Система записана относительно физических компонент тензоров напряжений. Связь между физическими $a_{(s)(r)}$ и ковариантными a_{sr} компонентами задается известными соотношениями тензорного анализа [93] и в частности имеет вид

$$a_{(s)(r)} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} a_{sr}$$

или через параметры Ламе:

$$a_{(s)(r)} = \frac{1}{H_1 H_2} a_{sr},$$

где g_{ii}– метрический тензор. Вычислим ковариантные компоненты метрического тензора [21, 52]:

$$g_{ii} = \frac{\partial x_k}{\partial x^i} \frac{\partial x_k}{\partial x^i}, \ k = 1, 2; \ i = 1, 2,$$

где в рассматриваемом случае $x_1 = x, x_2 = y; \ x^1 = \xi, x^2 = \eta$:

$$g_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \tag{1.3}$$

$$g_{22} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \tag{1.4}$$

Связь между физическими компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(\xi, \eta)$ и физическими компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\xi, \eta)$ формулируется на основе структурной модели армированного материала [142] в условиях термоупругого анизотропного деформирования и в криволинейных ортогональных координатах представляется зависимостями

$$\sigma_{ij} = \Omega \sigma_{ij}^c + \sum_{m=1}^{2} \sigma_m \omega_m l_{mi} l_{mj}, \ \Omega = 1 - (\omega_1(\xi, \eta) + \omega_2(\xi, \eta)), \tag{1.5}$$

$$l_{m1} = \cos(\varphi_m), \ \ l_{m2} = \sin(\varphi_m), \ m = 1, 2.$$

В (1.5) напряжения в связующем находятся по формулам [39]

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj} - \alpha_c (1 + \nu) T),$$

$$\sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij}, \ \ (j = 3 - i, \ i = 1, 2). \tag{1.6}$$

Здесь $\sigma_m(\xi,\eta)-$ напряжения в $m-$ом семействе волокон, $\omega_m(\xi,\eta),\varphi_m(\xi,\eta)-$ интенсивность и угол армирования волокнами m-го семейства, $T-$ температура, E,ν,α_c – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для констант:

$$m_1=\frac{1}{1-\nu^2}, m_2=\frac{1}{1+\nu}, m_3=Em_1, m_4=Em_2, L^T=\alpha_c(1+\nu)T. \qquad (1.7)$$

Соотношения (1.5) – это определение силы, действующей на слой композитов как суммы сил, создаваемых связующим материалом и суммы сил, создаваемых армирующими слоями.

Введем предположение о постоянстве площади сечения армирующих волокон и их неразрывности внутри некоторой области S. Тогда параметры армирования ω_m и φ_m не могут быть независимыми [19]. Чтобы установить связь между ними, вводятся векторные поля $\overline{\omega}_m$ с компонентами

$$\omega_{m1}=\omega_m\cos\varphi_m,$$

$$\omega_{m2}=\omega_m\sin\varphi_m.$$

Обозначим $S-$ произвольную односвязную область с гладкой границей L, а $\bar{n}$ – вектор внешней нормали к L. Тогда абсолютная величина скалярного произведения $\overline{\omega}_m\bar{n}$ имеет смысл суммарной площади поперечных сечений волокон m-го семейства, проходящих через единицу длины дуги контура L, причем $\overline{\omega}_m\bar{n}$ отрицательно, если волокна входят в область S, и положительно, если волокна выходят из области S. Из условия постоянства площади поперечного сечения и неразрывности волокон следует, что суммарная площадь поперечных сечений волокон, входящих в S, равна суммарной площади поперечных сечений волокон, выходящих из S, т.е.

$$\int_L\overline{\omega}_m\bar{n}dl=\int\int_S div\overline{\omega}_m ds=0. \qquad (1.8)$$

В (1.8) при переходе от интегрирования по контуру L к интегрированию по области S использована формула Стокса [42]. Ввиду произвольности области S из (1.8) следует

$$div\overline{\omega}_m=0. \qquad (1.9)$$

В произвольной криволинейной ортогональной системе координат (ξ, η) условие постоянства сечений волокон (1.9) m-го семейства в развернутой форме имеют следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_m \cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_m \sin\varphi_m) = 0. \tag{1.10}$$

Если углы армирования совпадают с направлениями координатных линий, то их значения $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ и уравнения (1.10) можно проинтегрировать:

$$H_2(\xi,\eta)\omega_1(\xi,\eta) = H_2(\xi^0,\eta)\omega_1^0(\eta),\ H_1(\xi,\eta)\omega_2(\xi,\eta) = H_1(\xi,\eta^0)\omega_2^0(\xi), \tag{1.11}$$
$$\omega_1(\xi,\eta) = \frac{H_2(\xi^0,\eta)\omega_1^0(\eta)}{H_2(\xi,\eta)},\ \omega_2(\xi,\eta) = \frac{H_1(\xi,\eta^0)\omega_2^0(\xi)}{H_1(\xi,\eta)},$$

где $\omega_1^0(\eta), \omega_2^0(\xi)$ – известные функции, заданные на линиях $\xi = \xi^0 = Const, \eta = \eta^0 = Const$. Общие ограничения для интенсивностей армирования задаются в виде $0 < \omega_m < \ 0,7$. Интенсивность прослоек связующего изменяется в интервале $0 < \Omega < \ 1$.

Выпишем соотношения Коши для физических компонент тензора деформаций:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \eta}u_2,\ \ \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \xi}u_1, \tag{1.12}$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{u_2}{H_2}) + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{u_1}{H_1}),$$

где u_i – компоненты вектора смещений. Граничные условия к исходной системе присоединим после выбора конкретной системы координат.

Получим уравнение совместности деформаций в различных криволинейных ортогональных системах координат. После выполнения ковариантного дифференцирования уравнение совместности Сен-Венана принимает вид [30]

$$\partial_{jl}\varepsilon_{ik} + \partial_{ik}\varepsilon_{jl} - \partial_{jk}\varepsilon_{il} - \partial_{il}\varepsilon_{jk} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{jl} - \Gamma^\alpha_{il}\Gamma^\beta_{jk}) + \tag{1.13}$$
$$+2\Gamma^\alpha_{jl}\varepsilon_{ik\alpha} + 2\Gamma^\alpha_{ik}\varepsilon_{jl\alpha} - 2\Gamma^\alpha_{jk}\varepsilon_{il\alpha} - 2\Gamma^\alpha_{il}\varepsilon_{jm\alpha} = 0.$$

В формулах (1.13) дифференцирование производится по криволинейным координатам и использованы обозначения

$$\varepsilon_{ik\alpha} = (1/2)(\partial_k\varepsilon_{i\alpha} + \partial_i\varepsilon_{k\alpha} - \partial_\alpha\varepsilon_{ik}).$$

В случае рассматриваемой плоской задачи $i = k = 1, j = l = 2$ и для любой криволинейной системы координат (ξ, η) уравнение совместности деформаций запишем в виде

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{22} - \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^\beta_{12}) + \\ +2\Gamma^\alpha_{22}\varepsilon_{11\alpha} + 2\Gamma^\alpha_{11}\varepsilon_{22\alpha} - 4\Gamma^\alpha_{12}\varepsilon_{12\alpha} = 0. \tag{1.14}$$

Выполним в (1.14) суммирование по немым индексам α, β:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta} - 2\varepsilon_{11}(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}) + \\ +2\Gamma^1_{22}\varepsilon_{111} + 2\Gamma^1_{11}\varepsilon_{221} - 4\Gamma^1_{12}\varepsilon_{121} - 2\varepsilon_{12}(\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}) - \\ -2\varepsilon_{21}(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}) + 2\Gamma^2_{22}\varepsilon_{112} + 2\Gamma^2_{11}\varepsilon_{222} - 4\Gamma^2_{12}\varepsilon_{122} - \\ -2\varepsilon_{22}(\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}) = 0. \tag{1.15}$$

В соотношениях (1.15) используем обозначения

$$\varepsilon_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}, \varepsilon_{221} = \frac{1}{2}(2\frac{\partial\varepsilon_{21}}{\partial\eta} - \frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}), \varepsilon_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}, \varepsilon_{122} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi},$$
$$\varepsilon_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}, \varepsilon_{112} = \frac{1}{2}(2\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} - \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}).$$

Выразим символы Кристоффеля второго рода в ортогональных координатах через коэффициенты Ламе, которые, в свою очередь, определяются после задания конформного отображения, переводящего декартову сетку координат в сетку криволинейных координат.

Соотношения для символов Кристоффеля в плоском случае имеют следующий вид [21]

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\xi},\ \Gamma^2_{11} = -\frac{H_1}{H_2^2}\frac{\partial H_1}{\partial\eta},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{H_2}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}, \\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\eta},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\eta},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}. \tag{1.16}$$

В формулы (1.15) входят ковариантные компоненты тензора деформаций, они связаны с физическими компонентами зависимостями

$$\varepsilon_{11} = H_1H_1\varepsilon_{(1)(1)},\ \varepsilon_{22} = H_2H_2\varepsilon_{(2)(2)},\ \varepsilon_{12} = H_1H_2\varepsilon_{(1)(2)}.$$

Подставим эти зависимости в (1.15), вычислим производные первого и второго порядка, сгруппируем коэффициенты при производных относительно физических компонент по криволинейным координатам и коэффициенты при самих физических компонентах тензора деформаций. Относительно физических компонент тензора деформаций получим следующее уравнение совместности:

$$
\begin{gathered}
C_1\frac{\partial^2\varepsilon_{(2)(2)}}{\partial\xi^2}+C_2\frac{\partial^2\varepsilon_{(1)(1)}}{\partial\eta^2}+C_3\frac{\partial^2\varepsilon_{(1)(2)}}{\partial\xi\partial\eta}+C_4\frac{\partial\varepsilon_{(1)(1)}}{\partial\xi}+C_5\frac{\partial\varepsilon_{(1)(1)}}{\partial\eta}+\\
+C_6\frac{\partial\varepsilon_{(2)(2)}}{\partial\xi}+C_7\frac{\partial\varepsilon_{(2)(2)}}{\partial\eta}+C_8\frac{\partial\varepsilon_{(1)(2)}}{\partial\xi}+C_9\frac{\partial\varepsilon_{(1)(2)}}{\partial\eta}+\\
+C_{10}\varepsilon_{(1)(1)}+C_{11}\varepsilon_{(2)(2)}+C_{12}\varepsilon_{(1)(2)}=0.
\end{gathered}\tag{1.17}
$$

Коэффициенты C_s $(s=\overline{1,12})$ в уравнении (1.17) выражаются зависимостями

$$
\begin{gathered}
C_1=H_1^2,\ C_2=H_2^2,\ C_3=-2H_1H_2, C_4=-H_2\frac{\partial H_2}{\partial\xi},\\
C_5=H_1^2(-\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\eta}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}+\frac{4}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\eta}),\\
C_6=H_2^2(-\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\xi}+\frac{4}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}),\ C_7=-H_1\frac{\partial H_1}{\partial\eta},\\
C_8=2H_1H_2(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}-\frac{1}{H_1H_2}(H_1\frac{\partial H_2}{\partial\eta}+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\eta})),\\
C_9=2H_1H_2(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\xi}-\frac{1}{H_1H_2}(H_1\frac{\partial H_2}{\partial\xi}+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\xi})),\\
C_{10}=2(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\xi}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}+H_1\frac{\partial^2H_1}{\partial\eta^2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}\frac{\partial H_1}{\partial\xi}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}\frac{\partial H_1}{\partial\eta}),\\
C_{11}=2(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\eta}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}+H_2\frac{\partial^2H_2}{\partial\xi^2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\eta}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\xi}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}),\\
C_{12}=2(-\frac{\partial H_1}{\partial\xi}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}+\frac{\partial H_1}{\partial\eta}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}-H_2\frac{\partial^2H_1}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial H_1}{\partial\xi}\frac{\partial H_2}{\partial\eta}-\frac{\partial H_1}{\partial\eta}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}-\\
-H_1\frac{\partial^2H_2}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial H_2}{\partial\eta}(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\xi}+\frac{\partial H_1}{\partial\xi})+\frac{\partial H_1}{\partial\xi}(\frac{\partial H_2}{\partial\eta}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\eta})).
\end{gathered}\tag{1.18}
$$

Для проверки результата выбирается полярная система координат. Пусть ξ – полярный радиус, η – полярный угол, значения параметров Ламе $H_1=1,\ H_2=\xi$. После вычисления коэффициентов C_s $(s=\overline{1,12})$ подстановка в (1.17) дает известное в литературе уравнение совместности деформаций в полярной системе координат:

$$
\frac{\partial^2\varepsilon_{\eta\eta}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2\varepsilon_{\xi\xi}}{\partial\eta^2}-\frac{2}{\xi}\frac{\partial^2\varepsilon_{\xi\eta}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{\xi}(2\frac{\partial\varepsilon_{\eta\eta}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{\xi\xi}}{\partial\xi}-\frac{2}{\xi}\frac{\partial\varepsilon_{\xi\eta}}{\partial\eta})=0.
$$

На основе полученных уравнений (1.2), (1.5), (1.6), (1.10), (1.17) строится система разрешающих уравнений относительно компонент тензора деформаций. В классической плоской задаче теории упругости [108] решение строится через функцию напряжений, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка. При этом вводятся ограничения на объемные силы – это либо сила тяжести, либо объемные силы, обладающие потенциалом. Преимущества постановки задачи в деформациях состоят в том, что объемные силы могут быть произвольными, а уравнение совместности более низкого порядка (второй вместо четвертого). Это существенно в дальнейшем при построении численного алгоритма для аппроксимации дифференциального оператора при построении разностной схемы. Более низкий порядок дифференциального оператора дает возможность построить надежный численный алгоритм при наличии градиентов решений (отверстия в пластине). Поэтому выбрана постановка задачи в деформациях. В дальнейшем при присоединении граничных условий (как статических, так и кинематических) будет показана возможность сведения условий на границе к формулировкам в деформациях. Зададимся некоторыми криволинейными ортогональными системами координат и сформулируем в них полученное выше уравнение (1.17). Далее в работе все преобразования выполняются для физических компонент тензоров напряжений и деформаций с использованием их стандартных обозначений $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$.

1.2 Биполярная система координат

Пусть (x, y) – декартовы координаты. Будем рассматривать биполярные координаты (ξ, η), образующие взаимно ортогональную сетку кривых $\xi = Const,\ \eta = Const$. Прямоугольные координаты x и y выражаются через биполярные координаты ξ и η с помощью конформного отображения [47]:

$$x + iy = a\,\mathrm{th}\,\frac{\xi + i\eta}{2}.$$

Разделяя действительную и мнимую части, имеем

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\eta},\ y = \frac{a\sin\eta}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\eta}. \tag{1.19}$$

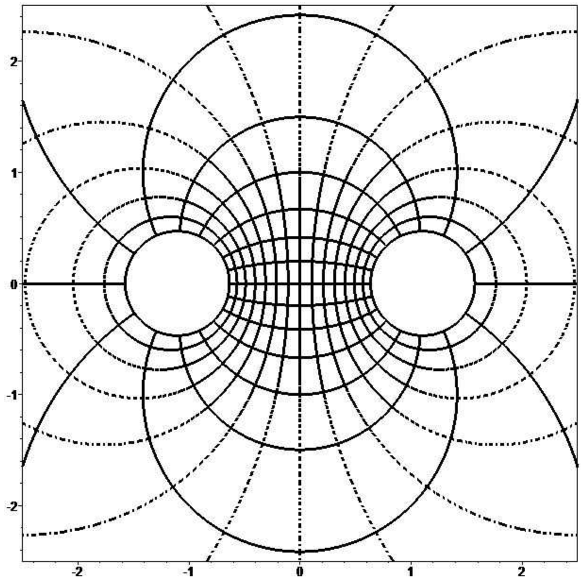


Рис. 1.1

Параметр $a = Const$ задает координаты точек $x = \pm a$, которые называются полюсами. Координатные линии $\xi = \xi_0 = Const$ представляют собой эксцентрические окружности с центрами на оси OX:

$$(x - a\,\mathrm{cth}\,\xi_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(\mathrm{sh}\,\xi_0)^2}. \tag{1.20}$$

Координатные линии $\eta = \eta_0 = Const$ – дуги окружностей с центрами на оси OY и проходящие через две точки $x = \pm a$, (полюсы):

$$(x)^2 + (y + a\,\mathrm{ctg}\,\eta_0)^2 = \frac{a^2}{(\sin\eta_0)^2}. \tag{1.21}$$

Рассматриваемая структура армирования изображена на рис. 1.1. Вычислим углы армирования φ_1, φ_2 в биполярной системе координат. Для этого продифференцируем (1.20) по x:

$$2(x - a\,\mathrm{cth}\,\xi_0) + 2yy'_x = 0.$$

Отсюда получим

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = y'_x = -\frac{(x - a\,\mathrm{cth}\,\xi_0)}{y},$$

после замены по формулам (1.19)

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = -\frac{\mathrm{sh}\,\xi - \mathrm{cth}\,\xi_0(\mathrm{ch}\,\xi + \cos\eta)}{\sin\eta}.$$

Дифференцирование (1.21) по x, дает

$$x + (y + a\operatorname{ctg}\eta_0)y'_x = 0.$$

С учетом (1.19) значение тангенса угла армирования вторым семейством волокон

$$y'_x = -\frac{x}{y + a\operatorname{ctg}\eta_0} = -\frac{a\operatorname{sh}\xi}{a\sin\eta + a\operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)} = \operatorname{tg}\varphi_2.$$

В уравнения структурной модели (1.5) входят значения квадратов синусов и косинусов углов армирования φ_1, φ_2 и их произведений, выразим их через полученные тангенсы:

$$\cos^2\varphi_1 = \frac{\sin^2\eta}{\sin^2\eta + (\operatorname{sh}\xi - \operatorname{cth}\xi_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2},$$
$$\sin^2\varphi_1 = \frac{(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{cth}\xi_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2}{\sin^2\eta + (\operatorname{sh}\xi - \operatorname{cth}\xi_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2},$$
$$\sin^2\varphi_2 = \frac{\operatorname{sh}^2\xi}{\operatorname{sh}^2\xi + (\sin\eta + \operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2},$$
$$\cos^2\varphi_2 = \frac{(\sin\eta + \operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2}{\operatorname{sh}^2\xi + (\sin\eta + \operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2},$$

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \pm\frac{\sin\eta(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{cth}\xi_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))}{\sin^2\eta + (\operatorname{sh}\xi - \operatorname{cth}\xi_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2},$$
$$\sin\varphi_2\cos\varphi_2 = \pm\frac{\operatorname{sh}\xi(\sin\eta + \operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))}{\operatorname{sh}^2\xi + (\sin\eta + \operatorname{ctg}\eta_0(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta))^2}.$$

Выбор знака в формулах для произведений синусов и косинусов осуществляется в зависимости от положения фиксированной точки (ξ, η) на координатной плоскости XOY.

Вычислим компоненты метрического тензора:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)^2}.$$

Коэффициенты Ламе $H_1 = \sqrt{g_{11}}$, $H_2 = \sqrt{g_{22}}$, в данной системе координат имеют значения

$$H_1 = H_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi + \cos\eta}.$$

Символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}, \Gamma^i_{ij} = -\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}.$$

Причем

$$g_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x^j},\ m = 1,2;\ i,j = 1,2.$$

Окончательно в биполярной системе координат ξ, η символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = -\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\eta},$$
$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\eta}.$$

Подстановка коэффициентов Ламе, соответствующих биполярной системе координат, в (1.17) и дальнейшие преобразования приводят к следующему виду уравнения совместности относительно физических компонент тензора деформаций:

$$(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2} + (\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2} - 2(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta} +$$
$$+\operatorname{sh}\xi(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + \sin\eta(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} -$$
$$-\operatorname{sh}\xi(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} - \sin\eta(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} -$$
$$-2\sin\eta(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + 2\operatorname{sh}\xi(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} +$$
$$+2(1 + \operatorname{ch}\xi\cos\eta)\varepsilon_{11} + 2(1 + \operatorname{ch}\xi\cos\eta)\varepsilon_{22} + 4\operatorname{sh}\xi\sin\eta\varepsilon_{12} = 0.$$

1.3 Эллиптическая система координат

Зависимость между декартовыми координатами x, y и эллиптическими координатами ξ, η устанавливается с помощью конформного отображения [47]

$$x + iy = a\operatorname{ch}(\xi + i\eta),$$

отсюда

$$x = a\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\ y = a\operatorname{sh}\xi\sin\eta. \tag{1.22}$$

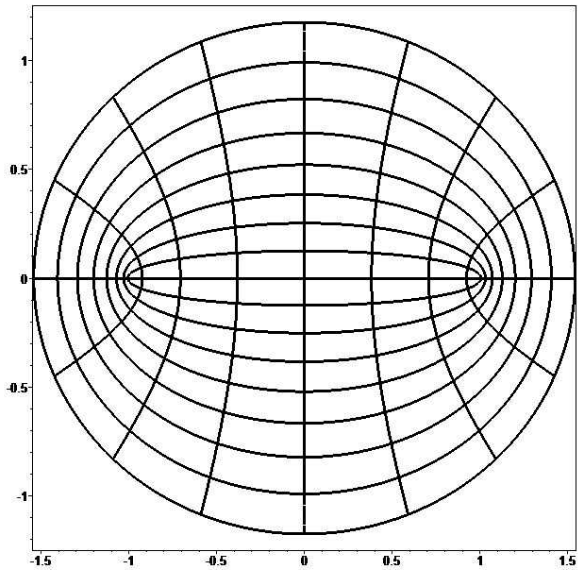


Рис. 1.2

Координатными линиями (рис. 1.2) являются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = 1.$$

Компоненты метрического тензора

$$g_{11} = g_{22} = a^2(\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta) = a^2(\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta).$$

Коэффициенты Ламе в эллиптической системе координат равны

$$H_1 = H_2 = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}.$$

Подстановка коэффициентов Ламе, соответствующих эллиптической системе координат, в коэффициенты C_s уравнения (1.17) и дальнейшие преобразования приводят к следующему виду уравнения совместности относительно физических компонент тензора деформаций:

$$(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2}+(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2}- \tag{1.23}$$
$$-2(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\eta(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)}{ch^2\xi-\cos^2\eta}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}+$$
$$+(-\frac{3\sin 2\eta}{2(ch^2\xi-\cos^2\eta)}+2\frac{\sin 2\eta}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta})(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\xi\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\sin 2\eta\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}-\sin 2\eta\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}-$$
$$-\operatorname{sh}2\xi\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-2\frac{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\eta}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})+2\frac{\sin 2\eta\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}\varepsilon_{12}=0.$$

Определим углы армирования семействами волокон, направленными по рассматриваемым траекториям, как углы между касательной к кривой $\xi=Const$ либо $\eta=Const$ и осью абцисс. Тангенсы углов находим на основе соотношений (1.22) по формулам

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}},\ \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\frac{\partial y}{\partial\eta}}{\frac{\partial x}{\partial\eta}}. \tag{1.24}$$

В результате имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{cth}\xi\operatorname{tg}\eta,\ \operatorname{tg}\varphi_2=-\operatorname{th}\xi\operatorname{ctg}\eta. \tag{1.25}$$

Как отмечалось выше, в уравнениях (1.5) используются квадраты синусов и косинусов углов армирования, приведем их значения для рассматриваемого случая:

$$\sin^2\varphi_1=\frac{\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta}{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta},\ \cos^2\varphi_1=\frac{\cos^2\eta\operatorname{sh}^2\xi}{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta},$$
$$\sin^2\varphi_2=\frac{\cos^2\eta\operatorname{sh}^2\xi}{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta},\ \cos^2\varphi_2=\frac{\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta}{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta}.$$

В работах [60, 59] выполнены вычислительные эксперименты по армированию плоских конструкций на основе МКЭ (метода конечных элементов), проведен поиск структур армирования, которые снижают нагрузки, действующие на конструкцию. В качестве критерия разрушения связующего принималось условие прочности Баландина [7] с различными пределами прочности при растяжении σ_c^+ и при сжатии σ_c^-, которое в случае плоского напряженного состояния можно записать в виде

$$(\sigma_{11}^c)^2 + (\sigma_{22}^c)^2 - \sigma_{11}^c\sigma_{22}^c + 3(\sigma_c^- - \sigma_c^+)(\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c) < \sigma_c^-\sigma_c^+.$$

Условие прочности волокон m-го семейства $m = 1, 2$ задавалось в виде $|\sigma_m^\alpha| \leq \sigma_m^\pm$, где σ_m^α и $\sigma_m^\pm$ – напряжения в арматуре и пределы текучести (прочности) волокон m-го семейства соответственно. Под критической понимаем нагрузку, при которой происходит нарушение хотя бы одного условия прочности: в волокнах или в связующем.

Назовем армирование по траекториям эллиптической системы координат в соответствии с рис. 1.2 первым типом с фокусами на оси OX, армирование после поворота на прямой угол – вторым типом с фокусами на оси OY.

Расчеты проводились для квадратной плиты со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга связующего $E = 0,38 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, коэффициент Пуассона связующего $\nu = 0,2$, $\sigma_c^+ = 25\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\sigma_c^- = 280\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, модули Юнга волокон $E_2 = E_2 = 2,15 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = 5000\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$. Интенсивность (плотность волокон) изменялась в пределах от $0,05$ до $0,2$, нагрузка равномерная. Результаты расчетов приведены в таблице. 1.1.

Таблица 1.1

Интенсивность армирования	Предельная нагрузка ($\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$), арматура тип 1	Предельная нагрузка ($\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$), арматура тип 2
0,2	6200	7400
0,15	6850	7800
0,10	7350	7900
0,05	7600	7900

Как видим, изменение структуры армирования существенно влияет на предельную нагрузку, а именно эллиптическая арматура с фокусами на оси OY лучше сопротивляется рассмотренному в работе [59] нагружению.

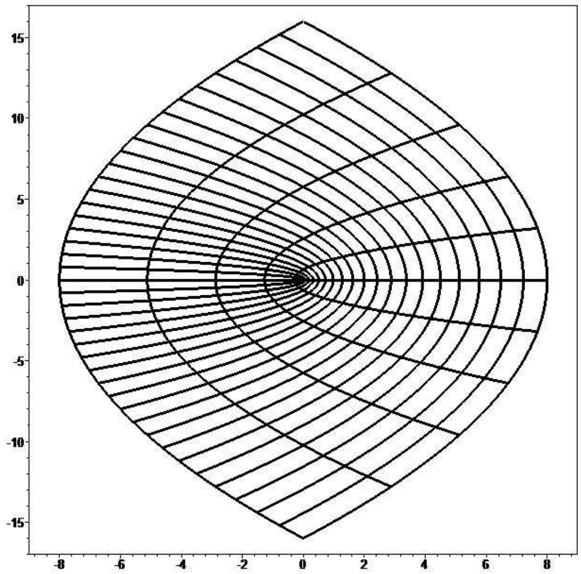


Рис. 1.3

1.4 Параболическая система координат

Софокусные $\xi-$параболы и $\eta-$параболы получим конформным отображением [47]

$$\xi + i\eta = \sqrt{2(x+iy)},$$

параболы образуют взаимно ортогональную сетку кривых $\xi = Const$, $\eta = Const$. Разделяя действительную и мнимую часть, найдем формулы, связывающие декартовы и параболические координаты:

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2},\ y = \xi\eta. \tag{1.26}$$

Рассматриваемая структура армирования изображена на рис. 1.3. На рис. 1.4 структура приведена в увеличенном масштабе в окрестности центра параболической системы координат. Компоненты метрического тензора вычислим по формулам (1.3), получим

$$g_{11} = g_{22} = \xi^2 + \eta^2.$$

В параболической системе координат коэффициенты Ламе равны

$$H_1 = H_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

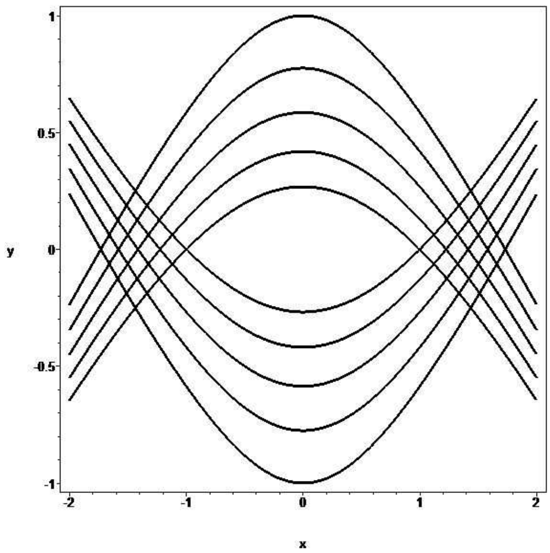


Рис. 1.4

Уравнение совместности деформаций (1.17) в случае параболической системы координат после вычисления коэффициентов примет вид

$$(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2}+(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2}-2(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta}- \tag{1.27}$$

$$-\xi\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}+\xi\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}-$$

$$-2\eta\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}-2\xi\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}+\frac{2(\xi^2-\eta^2)}{\xi^2+\eta^2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})+\frac{8\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}\varepsilon_{12}=0.$$

Тангенсы углов армирования находим на основе соотношений (1.26) по формулам (1.24). В результате имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\eta}{\xi},\ \operatorname{tg}\varphi_2=-\frac{\xi}{\eta}. \tag{1.28}$$

Выпишем значения квадратов синусов и косинусов углов армирования для рассматриваемого случая параболической структуры

$$\sin^2\varphi_1=\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2},\ \cos^2\varphi_1=\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2},$$

$$\sin^2\varphi_2=\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2},\ \cos^2\varphi_2=\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}.$$

1.5 Гиперболическая система координат

Рассмотрим конформное отображение [47]

$$\xi + i\eta = \frac{(x+iy)^2}{2}.$$

В криволинейной системе координат это сетка равносторонних гипербол.

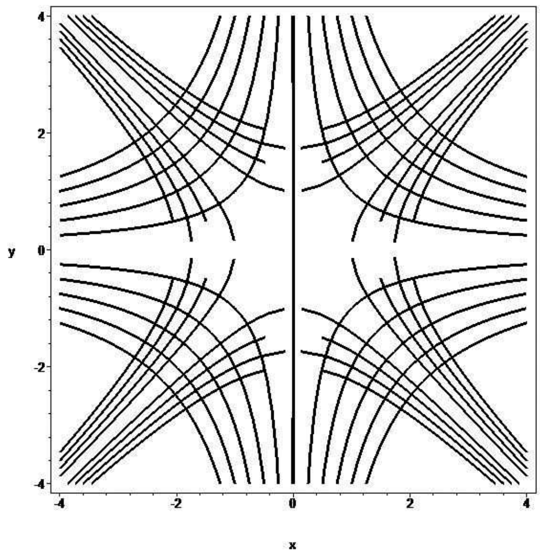


Рис. 1.5

Рассматриваемая структура армирования изображена на рис. 1.5. При разделении действительной и мнимой частей используем следующую формулу:

$$\sqrt{\xi + i\eta} = \pm(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}} + i(sgn\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}),$$

получим соотношения между декартовыми и гиперболическими координатами

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi},\ y = \pm(sgn\eta)\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}. \qquad (1.29)$$

После чего находим компоненты метрического тензора и коэффициенты Ламе

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

$$H_1 = H_2 = \frac{\sqrt{2}}{2(\xi^2+\eta^2)^{1/4}}.$$

Уравнение (1.17) в гиперболической системе координат после вычисления коэффициентов получим в виде

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\xi}{2(\xi^2+\eta^2)}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}- \tag{1.30}$$

$$-\frac{\eta}{2(\xi^2+\eta^2)}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}-\frac{\xi}{2(\xi^2+\eta^2)}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}+\frac{\eta}{2(\xi^2+\eta^2)}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})-\frac{4\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}\varepsilon_{12}=0.$$

Тангенсы углов армирования находим на основе соотношений (1.29) по формулам (1.24). В результате имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}},\ \operatorname{tg}\varphi_2=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}}{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}. \tag{1.31}$$

Квадраты синусов и косинусов углов армирования для рассматриваемого случая гиперболической структуры вычисляем по формулам:

$$\sin^2\varphi_1=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\ \cos^2\varphi_1=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

$$\sin^2\varphi_2=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\ \cos^2\varphi_2=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

1.6 Кардиоидальная система координат

Рассмотрим отображение [47]

$$x+iy=\frac{1}{(\xi+i\eta)^2}.$$

При этом отображении декартова сетка плоскости (x,y) переходит в сетку кардиоид плоскости (ξ,η), разделяя действительные и мнимые части, получим:

$$x=\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2},\ y=-\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}. \tag{1.32}$$

Рассматриваемая структура армирования изображена на рис. 1.6.

Тангенсы углов армирования φ_1,φ_2 находим на основе соотношений (1.32) по формулам (1.24). В результате имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{-\eta(-3\xi^2+\eta^2)}{\xi(-\xi^2+3\eta^2)},\ \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\xi(-\xi^2+3\eta^2)}{\eta(-3\xi^2+\eta^2)}. \tag{1.33}$$

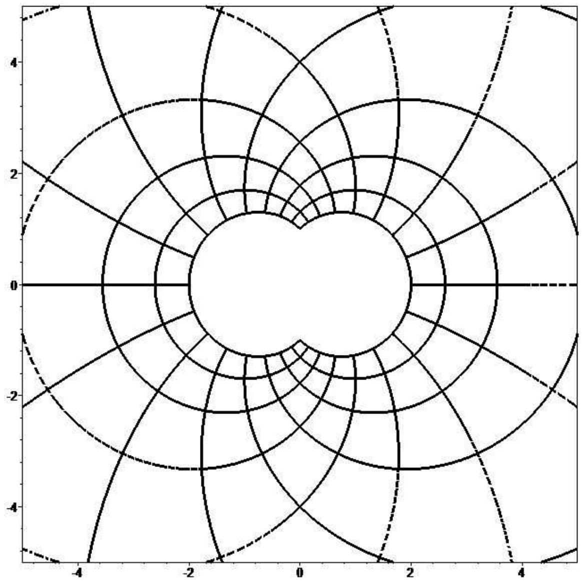


Рис. 1.6

В уравнениях (1.5) используются синусы и косинусы углов армирования, выпишем их значения для рассматриваемого случая кардиоидальной структуры

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{\eta^2(-3\xi^2+\eta^2)^2}{(\xi^2+\eta^2)^3},\ \cos^2\varphi_1 = \frac{\xi^2(-\xi^2+3\eta^2)^2}{(\xi^2+\eta^2)^3},$$
$$\sin^2\varphi_2 = \frac{\xi^2(-\xi^2+3\eta^2)^2}{(\xi^2+\eta^2)^3},\ \cos^2\varphi_2 = \frac{\eta^2(-3\xi^2+\eta^2)^2}{(\xi^2+\eta^2)^3}.$$

Используя формулы перехода (1.32), находим компоненты метрического тензора и коэффициенты Ламе

$$H_1 = H_2 = 2(\xi^2+\eta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Уравнение совместности деформаций (1.17) относительно физических компонент тензора деформаций в кардиоидальной системе координат после подстановки коэффициентов Ламе получим в виде

$$\begin{gathered}
(\xi^2+\eta^2)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2} + (\xi^2+\eta^2)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2} - 2(\xi^2+\eta^2)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta} + \\
+3\xi(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} - 3\eta(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} - 3\xi(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + \\
+3\eta(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + 6\eta(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + \qquad (1.34) \\
+6\xi(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} - 6(\xi^2-\eta^2)\varepsilon_{11} + 6(\xi^2-\eta^2)\varepsilon_{22} - 24\xi\eta\varepsilon_{12} = 0.
\end{gathered}$$

Описанный в пунктах 1.2 - 1.6 подход построения криволинейных ортогональных траекторий позволяет провести некоторые аналогии с механической континуальной моделью сети из нитей, которая в свою очередь близка к геометрическому образу сети в математике. Во многих случаях эти объекты отождествляются; в дифференциальной геометрии разработан аналитический тензорный аппарат для понятия сети как отображения направленного множества в топологическое пространство [135]. В общем случае сеть на поверхности определяется заданием двух полей независимых векторов, расположенных в касательной плоскости. Введенные выше криволинейные ортогональные траектории на плоскости аналогичны по форме понятию изотермических сетей [46]. Изотермические сети получаются путем конформных отображений декартовой сети x, y с помощью аналитических функций. На основе континуальной модели сетей [46] можно вычислять усилия в нитях. В настоящей работе поля напряжений и деформаций плоской неоднородной задачи упругости рассчитываются на основе структурной модели композита, учитывающей как семейства армирующих волокон (аналогия нитей), так и связующее (наполнитель).

1.7 Разрешающая система дифференциальных уравнений

Для формулировки разрешающей системы плоской задачи в деформациях в криволинейной системе координат выражения для напряжений из (1.5), (1.6) подставим в уравнения равновесия (1.2). Выполним подстановку (1.5) в уравнения равновесия. Она дает соотношения

$$\begin{gathered}\frac{\partial(H_2\Omega\sigma_{11}^c)}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_2(\sigma_1\omega_1cos^2\varphi_1+\sigma_2\omega_2cos^2\varphi_2))}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_2\Omega\sigma_{12}^c)}{\partial\eta}+\\ +\frac{1}{2}(\frac{\partial(H_1(\sigma_1\omega_1\sin 2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin 2\varphi_2))}{\partial\eta})+\\ +\frac{\partial H_1}{\partial\eta}(\sigma_{12}^c+\frac{1}{2}(\sigma_1\omega_1\sin 2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin 2\varphi_2))- \qquad (1.35)\end{gathered}$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial \xi}(\Omega\sigma^c_{22}+\sigma_1\omega_1\sin^2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin^2\varphi_2)+H_1H_2\Phi_1=0,$$

$$\frac{\partial(H_2\Omega\sigma^c_{12})}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial(H_2(\sigma_1\omega_1\sin2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin2\varphi_2))}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_1\Omega\sigma^c_{22})}{\partial\eta}+$$
$$+\frac{\partial(H_1(\sigma_1\omega_1\sin^2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin^2\varphi_2))}{\partial\eta}+$$
$$+\frac{\partial H_2}{\partial\xi}(\sigma^c_{12}+\frac{1}{2}(\sigma_1\omega_1\sin2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin2\varphi_2))-$$
$$-\frac{\partial H_1}{\partial\eta}(\Omega\sigma^c_{22}+\sigma_1\omega_1\sin^2\varphi_1+\sigma_2\omega_2\sin^2\varphi_2)+H_1H_2\Phi_2=0.$$

Выполним дифференцирование в (1.35). Заметим, что при дифференцировании выражений

$$\frac{\partial(\sigma_1(H_2\omega_1\cos^2\varphi_1))}{\partial\xi}=H_2\omega_1\cos^2\varphi_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}+\sigma_1\frac{\partial(H_2\omega_1\cos^2\varphi_1)}{\partial\xi},$$
$$\frac{\partial(\sigma_2(H_2\omega_2\cos^2\varphi_))}{\partial\xi}=H_2\omega_2\cos^2\varphi_2\frac{\partial\sigma_2}{\partial\xi}+\sigma_2\frac{\partial(H_2\omega_2\cos^2\varphi_2)}{\partial\xi},$$
$$\frac{\partial(\sigma_1(H_1\omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1))}{\partial\xi}=\frac{1}{2}(H_1\omega_1\sin2\varphi_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta}+\sigma_1\frac{\partial(H_1\omega_1\sin2\varphi_1)}{\partial\eta})$$

и аналогичных им вторые слагаемые при дифференцировании дают суммы вида

$$\frac{\partial((H_2\omega_1\cos\varphi_1)\cos\varphi_1)}{\partial\xi}=\frac{\partial(H_2\omega_1\cos\varphi_1)\cos\varphi_1}{\partial\xi}\cos\varphi_1-\frac{1}{2}H_2\omega_1\sin2\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi},$$
$$\frac{\partial((H_2\omega_2\cos\varphi_2)\cos\varphi_2)}{\partial\xi}=\frac{\partial(H_2\omega_2\cos\varphi_2)\cos\varphi_1}{\partial\xi}\cos\varphi_2-\frac{1}{2}H_2\omega_2\sin2\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial((H_1\omega_1\sin\varphi_1)\cos\varphi_1)}{\partial\eta}=\frac{\partial(H_1\omega_1\sin\varphi_1)\cos\varphi_1}{\partial\eta}\cos\varphi_1-H_2\omega_1\sin^2\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial((H_1\omega_2\sin\varphi_2)\cos\varphi_2)}{\partial\eta}=\frac{\partial(H_1\omega_2\sin\varphi_2)\cos\varphi_2}{\partial\eta}\cos\varphi_2-H_2\omega_2\sin^2\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}.$$

После группировки двух соответствующих слагаемых получим выражения, которые в силу условия постоянства сечений волокон (1.12) равны нулю. В формулы (1.5) входят напряжения в волокне σ_m, они вычисляются по закону Дюамеля-Неймана $\sigma_m=E_m\varepsilon_m-E_m\varepsilon^T_m$, где E_m – модуль Юнга материала m-го семейства волокон.

Деформации в $m-$ом семействе волокон находим по структурной модели, описанной в работе [142]:

$$\varepsilon_{11}l_{m1}^2 + \varepsilon_{22}l_{m2}^2 + 2\varepsilon_{12}l_{m1}l_{m2} = \varepsilon_m^0. \tag{1.36}$$

В (1.36) использованы обозначения: $\varepsilon_m^T = \alpha_m^a T$, $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m + \varepsilon_m^T$, $l_{m1} = \cos(\varphi_m)$, $l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, T – температура, α_m^a – коэффициенты линейного расширения материала m-го семейства волокон ($m = 1, 2$). При формулировке (1.36) согласно [142] использован закон термоупругого деформирования и принцип совместного деформирования матрицы и семейств волокон (нет проскальзывания и отрыва). Окончательно, после замены всех напряжений через компоненты деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$, получим следующий вид уравнений равновесия в деформациях:

$$\begin{gathered}
a_{11}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + a_{12}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} + a_{13}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + a_{14}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + a_{15}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + \\
+a_{16}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} + F_1(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1H_2\Phi_1 = 0, \\
a_{21}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + a_{22}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} + a_{23}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + a_{24}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + a_{25}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + \\
+a_{26}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} + F_2(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1H_2\Phi_2 = 0.
\end{gathered} \tag{1.37}$$

Коэффициенты $a_{sr}(s = 1, 2; r = \overline{1, 6})$ в (1.37) выражаются зависимостями:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= H_2(\Omega m_3 + E_1\omega_1\cos^4\varphi_1 + E_2\omega_2\cos^4\varphi_2), \\
a_{12} &= H_1(E_1\omega_1\sin\varphi_1\cos^3\varphi_1 + E_2\omega_2\cos^3\varphi_2\sin\varphi_2), \\
a_{13} &= H_2(\Omega\nu m_3 + E_1\omega_1\cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_1 + E_2\omega_2\cos^2\varphi_2\sin^2\varphi_2), \\
a_{14} &= H_1(E_1\omega_1\sin^3\varphi_1\cos\varphi_1 + E_2\omega_2\sin^3\varphi_2\cos\varphi_2), \\
a_{15} &= 2H_2(E_1\omega_1\cos^3\varphi_1\sin\varphi_1 + E_2\omega_2\cos^3\varphi_2\sin\varphi_2), \\
a_{16} &= 2H_1(E_1\omega_1\cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_1 + E_2\omega_2\cos^2\varphi_2\sin^2\varphi_2 + \Omega m_4/2),
\end{aligned}$$

$$a_{21} = H_2(E_1\omega_1 \sin\varphi_1 \cos^3\varphi_1 + E_2\omega_2 \sin\varphi_2 \cos^3\varphi_2),$$
$$a_{22} = H_1(\nu m_3\Omega + E_1\omega_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^2\varphi_2 \cos^2\varphi_2),$$
$$a_{23} = H_2(E_1\omega_1 \cos\varphi_1 \sin^3\varphi_1 + E_2\omega_2 \cos\varphi_2 \sin^3\varphi_2),$$
$$a_{24} = H_1(\Omega m_3 + E_1\omega_1 \sin^4\varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^4\varphi_2),$$
$$a_{25} = 2H_2(\Omega m_4/2 + E_1\omega_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi_1 + E_2\omega_2 \cos^2\varphi_2 \sin^2\varphi_2),$$
$$a_{26} = 2H_1(E_1\omega_1 \sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^3\varphi_2 \cos\varphi_2).$$

Полученная совокупность трех уравнений (1.17), (1.37) и представляет собой полную разрешающую систему уравнений относительно трех компонент тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$.

1.8 Тип разрешающей системы плоской задачи в деформациях

Определим тип разрешающей системы плоской задачи в деформациях в криволинейной системе координат. Система (1.17), (1.37) представляет собой совокупность трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных, и имеет следующую особенность: дифференциальные уравнения, входящие в систему, имеют разный порядок: первое уравнение (1.17) содержит вторые производные от неизвестных функций, два вторых уравнения – первые производные.

Отметим, что для систем дифференциальных уравнений в частных производных основной задачей является нахождение решений, подчиненных тем или иным дополнительным условиям (задание неизвестных функций и их производных на границе области, где идет поиск решения). В общем случае эти дополнительные условия называют краевыми условиями. В тех случаях, когда они означают задание неизвестных функций и их производных при фиксированном значении одной из независимых переменных, они называются начальными условиями.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных доказано существование и единственность задачи Коши для системы типа Коши –

Ковалевской [14, 96] при условии аналитичности ее правой части и заданных функций начальной задачи.

Полученная разрешающая система (1.17), (1.37) не является системой типа Коши – Ковалевской. Чтобы поставить краевую задачу (подчинить неизвестные функции и их производные дополнительным условиям на границе), необходимо исследовать ее тип с помощью характеристических форм [12].

В монографии [96] рассмотрены задачи Коши для систем уравнений в частных производных разного порядка, указана процедура приведения таких систем к системам уравнений первого порядка, записанных в нормальном виде, путем введения новых неизвестных функций. Для анализа типа нормальной системы строится характеристический определитель. Но для полученной выше системы он тождественно равен нулю. Докажем этот факт.

Запишем систему (1.17), (1.37) как нормальную систему относительно переменной ξ :

$$\begin{gathered}
C_1\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2}=-C_2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2}-C_3\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta}-C_4\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}-C_5\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}-\\
-C_6\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}-C_7\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}-C_8\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}-C_9\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-C_{10}\varepsilon_{11}-C_{11}\varepsilon_{22}-C_{12}\varepsilon_{12}=0.\\
a_{11}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}=-a_{12}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}-a_{13}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}-a_{14}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}-a_{15}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}-\\
-a_{16}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-F_1(H_1,H_2,\omega_1,\omega_2,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{1,\xi},\varphi_{1,\eta},\varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta})-H_1H_2\Phi_1=0,\\
a_{25}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}=-a_{21}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}-a_{22}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta}-a_{23}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}-a_{24}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta}-\\
-a_{26}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-F_2(H_1,H_2,\omega_1,\omega_2,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{1,\xi},\varphi_{1,\eta},\varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta})-H_1H_2\Phi_2=0.
\end{gathered}\tag{1.38}$$

Введем вектор $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})$. Предположим, что $\overline{\varepsilon}$ – решение задачи Коши для системы уравнений (1.38). Тогда, вводя новые неизвестные функции $\varepsilon_{ij}^{p,q}$ при помощи равенств

$$\frac{\partial^{p+q}\varepsilon_{ij}}{\partial\xi^p\partial\eta^q}=\varepsilon_{ij}^{p,q},\ p+q\le 1,\ i,j=1,2,$$

замечаем, что эти функции будут решением задачи Коши для нормальной системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p,q}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p+1,q-1}}{\partial \eta},\ p+q=1,\ p\neq 1$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p,q}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p+1,q}}{\partial \eta},\ p+q=0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{r_i-1,0}}{\partial \xi} = F_i^*(\xi,\eta,\ldots,\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta}),\ i=1,2,\ldots,p, \tag{1.39}$$

при начальных условиях

$$\varepsilon_{ij}^{p,q}|_{\xi=\xi^0} = \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \partial \eta^q}\varepsilon_{ij}|_{\xi=\xi^0} = \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \partial \eta^q}\varphi_{ij},$$

где φ_{ij} – заданная функция при $\xi=\xi^0$. Система уравнений не выше первого порядка (1.39) будет включать как дифференциальные, так и алгебраические уравнения, поскольку $r_i=\{2,1,1\},\ r_i-1=\{1,0,0\}$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varepsilon_{11}^{0,1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_{11}^{1,0}}{\partial \eta},\quad \frac{\partial \varepsilon_{12}^{0,1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_{12}^{1,0}}{\partial \eta},\\
\frac{\partial \varepsilon_{22}^{0,1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_{22}^{1,0}}{\partial \eta},\quad \frac{\partial \varepsilon_{11}^{0,0}}{\partial \xi} = \varepsilon_{11}^{1,0},\\
\frac{\partial \varepsilon_{12}^{0,0}}{\partial \xi} = \varepsilon_{12}^{1,0},\quad \frac{\partial \varepsilon_{22}^{0,0}}{\partial \xi} = \varepsilon_{22}^{1,0},\\
C_1\frac{\partial \varepsilon_{22}^{1,0}}{\partial \xi} = -C_2\frac{\partial \varepsilon_{11}^{0,1}}{\partial \eta} - C_3\frac{\partial \varepsilon_{12}^{0,1}}{\partial \xi} - C_4\varepsilon_{11}^{1,0} - C_5\varepsilon_{11}^{0,1} -\\
-C_6\varepsilon_{22}^{1,0} - C_7\varepsilon_{22}^{0,1} - C_8\varepsilon_{12}^{1,0} - C_9\varepsilon_{12}^{1,0} - C_{10}\varepsilon_{11}^{0,0} - C_{12}\varepsilon_{12}^{0,0},\\
a_{11}\varepsilon_{11}^{1,0} + a_{12}\varepsilon_{11}^{0,1} + a_{13}\varepsilon_{22}^{1,0} + a_{14}\varepsilon_{22}^{0,1} + a_{15}\varepsilon_{12}^{1,0} + a_{16}\varepsilon_{12}^{0,1} + F_1 + \Phi_1 = 0,\\
a_{25}\varepsilon_{12}^{1,0} + a_{21}\varepsilon_{11}^{1,0} + a_{22}\varepsilon_{11}^{0,1} + a_{23}\varepsilon_{22}^{1,0} + a_{24}\varepsilon_{22}^{0,1} + a_{26}\varepsilon_{12}^{0,1} + F_2 + \Phi_2 = 0.
\end{gathered} \tag{1.40}$$

Характеристический определитель системы (1.40), выписанный для неизвестных

$$\varepsilon_{11}^{0,1}, \varepsilon_{12}^{0,1}, \varepsilon_{22}^{0,1}, \varepsilon_{11}^{1,0}, \varepsilon_{12}^{1,0}, \varepsilon_{22}^{1,0}, \varepsilon_{11}^{0,0}, \varepsilon_{12}^{0,0}, \varepsilon_{22}^{0,0},$$

будет состоять из девяти строк, две из которых включают только нули, т.е. он равен нулю тождественно. Утверждение доказано.

Поэтому для установления типа системы и дальнейшей постановки краевой задачи применим детерминантный метод [12, 92], предварительно продифференцировав уравнения (1.37) по любой из независимых переменных. После дифференцирования порядок системы не меняется (максимальный порядок производной, входящей в систему, второй), но система становится системой типа Коши – Ковалевской и возможно построение характеристического определителя. Запишем полученную систему в виде

$$A^{11}(\frac{\partial^2\overline{\varepsilon}}{\partial\xi^2}) + 2A^{12}(\frac{\partial^2\overline{\varepsilon}}{\partial\xi\partial\eta}) + A^{22}(\frac{\partial^2\overline{\varepsilon}}{\partial\eta^2}) + \overline{F} = 0, \tag{1.41}$$

где, как уже указывалось, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$. Вектор $\overline{F}$ содержит первые производные искомых неизвестных и правые части уравнений (1.17), (1.37). Коэффициентами системы (1.41) являются квадратные матрицы третьего порядка A^{11}, A^{22}, A^{12}, они имеют вид

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 \\ a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \end{pmatrix}, 2A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3 \\ a_{12} & a_{14} & a_{16} \\ a_{22} & a_{24} & a_{26} \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для анализа типа систем согласно [12] построим характеристическое уравнение вида

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) = 0.$$

После подстановки матриц A^{11}, A^{12}, A^{22} найдем корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_1\lambda^2 & C_3\lambda \\ (a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda) & (a_{13}\lambda^2 + a_{14}\lambda) & (a_{15}\lambda^2 + a_{16}\lambda) \\ (a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda) & (a_{23}\lambda^2 + a_{24}\lambda) & (a_{25}\lambda^2 + a_{26}\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

При анализе характеристического уравнения ограничимся случаем, когда углы армирования совпадают с направлениями координатных линий, т.е. углы $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Заметим, что в каждой точке ξ, η коэффициенты Ламе равны между собой $H_1 = H_2$, поскольку ортогональные системы координат вводятся аналитическими функциями комплексного переменного, следовательно выполняются условия Коши-Римана [47]. Исходный характеристический определитель упрощаем к виду и приравниваем к нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ \lambda(\Omega m_3 + E_1\omega_1) & \lambda\Omega m_3 & \Omega m_4 \\ \Omega\nu m_3 & \Omega m_3 + E_2\omega_2 & \Omega m_4\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получим неполное алгебраическое уравнение четвертого порядка (биквадратное уравнение относительно λ):

$$\begin{gathered}(-E_1\omega_1 m_4 - m_4 m_3 + 2m_4 m_3\omega_2 - 2m_4\omega_1 m_3\omega_2 + 2m_4 m_3\omega_1 + E_1\omega_1^2 m_4 + \\ +E_1\omega_1 m_4\omega_2 - m_4 m_3(\omega_1^2 + \omega_2^2))\lambda^4 + (4m_3^2(\omega_1 + \omega_2) + \\ +2m_3\omega_2^2 E_2 - 2E_1\omega_1 m_3 + 2E_1\omega_1^2 m_3 - 2m_3 E_2\omega_2 - 4m_3^2\nu^2(\omega_1 + \omega_2) + \\ +2m_3^2\nu^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\nu m_3 m_4 - 2m_3^2 + 2\nu m_3 m_4(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \\ -4\nu m_3 m_4(\omega_1 + \omega_2) + 2m_3\omega_1 E_2\omega_2 + 2E_1\omega_1 m_3\omega_2 - \\ -2E_1\omega_1 E_2\omega_2 + 2m_3^2\nu^2 - 2m_3^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4m_3^2\nu^2\omega_1\omega_2 - \\ -4m_3^2\omega_1\omega_2 + 4\nu m_3 m_4\omega_1\omega_2)\lambda^2 - 2m_4\omega_1 m_3\omega_2 + m_4\omega_1 E_2\omega_2 - m_4 E_2\omega_2 - \\ -m_4 m_3 + 2m_4 m_3\omega_1 + 2m_4 m_3\omega_2 - m_4 m_3\omega_1^2 - m_4 m_3\omega_2^2 + m_4 E_2\omega_2^2 = 0.\end{gathered} \tag{1.42}$$

Таблица 1.2

Материал	Модуль Юнга E, ГПА	Предел прочности(текучести) $\sigma_0, (\sigma_b)$ МПА	Коэффициент температурного расширения $\alpha \times 10^6 K^{-1}$	Коэффициент Пуассона ν (безразмерн.)
Алюминий	71	140	24,5	0,31-0,33
Сталь (малоуглеродная)	200	350-700	10,5	0,3
Сталь (высокопрочная)	220	700-1970	10,5	0,3
Борные волокна	385-448	2500-3800(3150)	2,4	-
Твердая медь	130		17,0	0,36
Вольфрамовая проволока	380		4,76	0,34
Керамические волокна	350	(2000)	2,28	-
Графит марки B-1 (T=293 K)	5,9		3,0	0,3
Титан	94	420(630)	8,4	0,3
Бериллиевая проволока 127 мкм	310	1336 (1055)	12	-

Коэффициенты этого уравнения зависят от технических характеристик материалов связующего и арматуры, интенсивностей армирования $\omega_1(\xi, \eta)$, $\omega_2(\xi, \eta)$, для которых справедливо физическое ограничение

$$0 < \omega_1(\xi, \eta), \omega_2(\xi, \eta) < 0,7.$$

Для широкого класса известных однородных материалов (табл. 1.2), задавшись значениями коэффициентов Пуассона ν, модулями Юнга связующего и волокон E, E_1, E_2 и учитывая ограничения для интенсивностей $\omega_1(\xi, \eta), \omega_2(\xi, \eta)$, решаем биквадратное уравнение путем замены и сведения к квадратному. При этом устанавливаем, что дискриминант квадратного уравнения строго больше нуля, а корни квадратного уравнения отрицательны. Следовательно, биквадратное уравнение (1.42) имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня. Согласно [12], если характеристический детерминант не имеет действительных корней в некоторой точке ξ, η, кроме нулевых, тогда система уравнений в этой точке является эллиптической. Это свойство наблюдается в данном случае. Поэтому исходная система дифференциальных уравнений в частных производных (1.17), (1.37) является системой эллиптического типа [12].

Рассмотрим предельный случай. Пусть $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, нет армирующих семейств волокон. Тогда характеристический определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ \lambda\dfrac{E}{1-\nu^2} & \lambda\dfrac{E\nu}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1+\nu} \\ \dfrac{E\nu}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1-\nu^2} & \lambda\dfrac{E}{1+\nu} \end{vmatrix} = 0$$

или после преобразований уравнение принимает вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

и имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня ($\lambda = \pm i$), что подтверждает известный в литературе факт об эллиптичности классической задачи теории упругости изотропного тела.

1.9 Граничные условия на криволинейном контуре

Сформулируем граничные условия на криволинейном контуре в криволинейной системе координат. Полное напряжение на наклонной площадке с ортом $\overline{\nu}$ представляется в виде векторной суммы

$$\overline{P_\nu} = \overline{\sigma_\nu} + \overline{\tau_\nu},$$

где $\overline{\sigma_\nu} = \sigma_\nu \overline{\nu}$ – нормальное напряжение, $\overline{\tau_\nu}$ – полное касательное напряжение. Разложение $\overline{P_\nu}$ в плоской декартовой системе координат с ортами $\overline{i}, \overline{j}$ имеет вид

$$\overline{P_\nu} = X_\nu \overline{i} + Y_\nu \overline{j}.$$

Если орт нормали $\overline{\nu}$ к контуру определен как вектор $\overline{\nu} = l\overline{i} + n\overline{j}$, то орт касательной $\overline{s}$ на этой площадке равен $\overline{s} = n\overline{i} - l\overline{j}$. В скалярной форме напряжения на площадке с ортом $\overline{\nu}$ равны

$$\sigma_\nu = (\overline{P_\nu}, \overline{\nu}) = X_\nu l + Y_\nu n, \;\; \tau_\nu = (\overline{P_\nu}, \overline{s}) = X_\nu m - Y_\nu l. \tag{1.43}$$

Величины l, n – направляющие косинусы углов, которые образует $\overline{\nu}$ с ортами осей координат. Значения X_ν, Y_ν выражаем через компоненты напряжений

$$X_\nu = \sigma_{11} l + \sigma_{12} n, \; Y_\nu = \sigma_{12} l + \sigma_{22} n. \tag{1.44}$$

Подставим (1.44) в (1.43), получим значение нормального и касательного напряжений на граничном контуре

$$\sigma_\nu = \sigma_{11} l^2 + \sigma_{22} n^2 + 2\sigma_{12} ln, \tau_\nu = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) ln + \sigma_{12}(n^2 - l^2). \tag{1.45}$$

Если векторная функция описывается в криволинейных координатах ξ, η, то применяют локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям либо перпендикулярных к ним. Функции

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

являются направляющими косинусами орта m-й координатной линии по отношению к осям OX, OY. Поэтому статические граничные условия (1.45) на контуре Γ_s при заданных p_n, p_τ относительно физических компонент тензора напряжений σ_{ij} преобразуем к виду

$$\sigma_{11}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\sigma_{22}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+2\sigma_{12}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}=p_n, \qquad (1.46)$$

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\sigma_{12}\left(\frac{1}{g_{11}}(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2-\frac{1}{g_{22}}(\frac{\partial y}{\partial \eta})^2\right)=p_\tau.$$

В (1.46) g_{ii} – компоненты метрического тензора. Для формулировки граничных условий в деформациях в (1.46) подставим выражения для напряжений через деформации по формулам (1.5).

Пусть на граничном контуре Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2:

$$u_1|_{\Gamma_u}=u_1^0(s), \quad u_2|_{\Gamma_u}=u_2^0(s). \qquad (1.47)$$

В соотношениях (1.47) $u_1^0(s)$, $u_2^0(s)-$ известные функции. Уравнение контура Γ_u задано в параметрическом виде: $\xi=\chi_1(s)$, $\eta=\chi_2(s)$, $s-$ параметр. Предполагаем, что функции $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ обратимы и их обратные функции дифференцируемы на граничном контуре. Обозначим $\psi_1=\chi_1^{-1}(\xi)$, $\psi_2=\chi_2^{-1}(\eta)$. Вычислим на Γ_u производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi}|_{\Gamma_u}=\frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi},\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta}|_{\Gamma_u}=\frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi}|_{\Gamma_u}=\frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi},\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta}|_{\Gamma_u}=\frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}.$$

Подставим результат в соотношения Коши (1.12). Тогда компоненты тензора деформаций на граничном контуре Γ_u удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_{11}|_{\Gamma_u}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \eta}u_2^0,\ \varepsilon_{22}|_{\Gamma_u}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \xi}u_1^0, \qquad (1.48)$$

$$\varepsilon_{12}|_{\Gamma_u}=\frac{1}{H_1H_2}(H_1\frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}+H_2\frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}-\frac{\partial H_1}{\partial \eta}u_1^0-\frac{\partial H_2}{\partial \xi}u_2^0).$$

В соотношения (1.48) входят значения параметров Ламе, вычисленные на граничном контуре Γ_u.

Когда на части контура заданы статические граничные условия, а на части – кинематические, комбинируем описанные выше случаи и получим формулировку граничных условий в деформациях.

1.10 Пример численного решения задачи об армированном эксцентрическом кольце в биполярной системе координат

Влияние сложного нагружения на распределение силовых линий полей напряжений иллюстрирует следующий пример задачи об эксцентрическом кольце. Выбрав неравномерную нагрузку на граничном контуре вида $Const + \cos\alpha^{*}\eta$, ($\alpha^{*}$ – заданная амплитуда), получаем решения в напряжениях в виде разложений в тригонометрические ряды по криволинейным координатам биполярной системы (ξ, η) [122]. Такой подход осуществлен в классической работе [110] для однородного эксцентрического кольца в биполярной системе в случае равномерно распределенной нагрузки.

Вид полей напряжений при заданном сложном нагружении приведены в виде контурных графиков для компонент напряжений $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \sigma_{\xi\eta}$ в биполярной системе на рис. 1.7 – 1.9. Они наглядно иллюстрируют, что распределение полей напряжений происходит вдоль некоторых кривых.

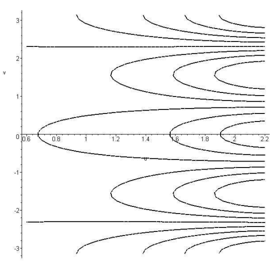


Рис. 1.7

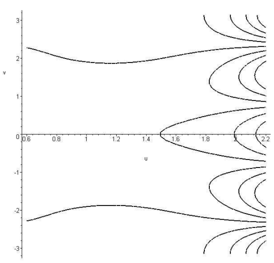


Рис. 1.8

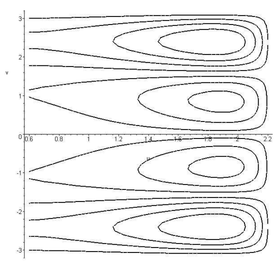


Рис. 1.9

Рассмотрим численный эксперимент моделирования армированного кольца, задача решается в деформациях на основе установленной разрешающей системы (1.17), (1.37) и граничных условий (1.48). Выполним армирование эксцентрического кольца двумя семействами волокон, являющимися семействами траекторий биполярной системы (1.20),(1.21). Иллюстрация примера такого кольца приведена на рис. 1.10. Для решения задачи применен конечно-элементный анализ (1.17), (1.37), (1.48). Теоретическая возможность применения МКЭ (метода конечных элементов) для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа установлена в [107], [101]. Разрешающая система дифференциальных уравнений, как показано в п. 1.8 настоящей главы, имеет эллиптический тип и, следовательно, согласно результатам работы [48], применение МКЭ к рассматриваемой системе корректно. При реализации МКЭ для решения этой системы выбран четырехугольный конечный элемент, он является прямоугольником в биполярной системе координат.

При указанном способе армирования вдоль координатных линий биполярной системы углы армирования принимают значения $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Пусть начальные интенсивности армирования первого и второго семейств волокон на внутреннем контуре пластины равны соответственно $\omega_1^0 = 0,3,\ \omega_2^0 = 0,3$. Пусть материал связующего – титан, волокна изготовлены из бериллия. Механические характеристики материалов приведены в таблице 1.2.

На внутреннем контуре эксцентрического кольца ставятся условия жесткой заделки, на внешнем контуре приложены заданные усилия. Задача решается в обезразмеренных переменных, силовые характеристики относятся в данном примере к пределу прочности материала волокна.

Полученные решения показывают существенное увеличение прочностных свойств армированной конструкции по сравнению с однородным кольцом. На рис. 1.11 в плоском сечении, соответствующем максимальным значениям, приведен график интенсивности напряжений Мизеса S для однородной пластины, на рис. 1.12 – для армированного кольца. Прямая линия на рисунках показывает величину относительного предела прочности связующего материала. Наблюдаем существенное повышение прочностных свойств в результате армирования двумя семействами волокон вдоль координатных линий биполярной системы координат.

В настоящей главе сформулирована в криволинейной ортогональной системе координат плоская задача армированных сред. Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями

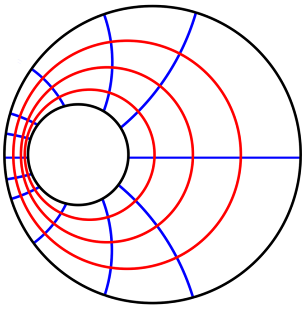


Рис. 1.10

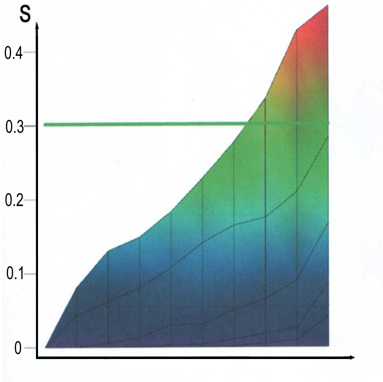


Рис. 1.11

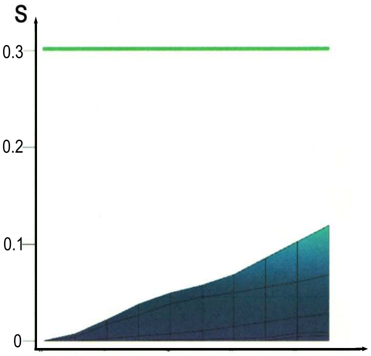


Рис. 1.12

армирования получены разрешающие уравнения для линейной анизотропной неоднородной задачи упругости, включая уравнение совместности деформаций, в случаях биполярной, эллиптической, параболической, гиперболической, кардиоидальной систем координат. Переход от декартовых координат к криволинейной ортогональной системе координат осуществляется с помощью аналитических функций комплексного переменного. Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям. Детерминатным методом исследован тип полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора деформаций. Установлено, что система имеет эллиптический тип для армированания вдоль двух семейств траекторий, являющихся координатными линиями ортогональной системы координат. Поставлена краевая задача в деформациях в криволинейной системе координат. Получено численное решение задачи об эксцентрическом кольце, армированном вдоль траекторий биполярной системы координат. Показана возможность увеличения за счет армирования по криволинейным траекториям предельных нагрузок на конструкцию в разы по сравнению с однородной конструкцией.

Основные результаты главы 1 опубликованы в работах [67, 66, 69, 77, 128, 128, 120, 132].

Глава 2

Одно семейство волокон

2.1 Постановка задачи армирования одним семейством волокон

В рамках общей формулировки плоской задачи упругости для армированной среды, рассмотренной в главе 1, в настоящей главе ставится задача упругости для среды, армированной одним семейством волокон. Переход к декартовой системе координат осуществляется при значениях параметров Ламе $H_1 = H_2 = 1$. Чтобы учесть все особенности задачи, сформулируем ее более подробно. Пусть армирование выполнено волокнами постоянного поперечного сечения. Для описания композита используется структурная модель [142]. Вводятся обозначения интенсивности армирования семейства волокон как функции $\omega_1(x, y)$, компонент тензора деформаций — $\varepsilon_{ij}(x, y)$, деформацию в волокнах семейства армирующих волокон — $\varepsilon_1(x, y)$, напряжение в волокнах семейства – $\sigma_1(x, y)$, осредненные напряжения обозначаются через $\sigma_{ij}(x, y)$, где x, y — декартовы координаты, $\varphi(x, y)$ – угол армирования, индексы $i, j = 1, 2$. В дальнейшем при обращении к перечисленным функциям для краткости аргументы опускаются. Тогда структурная модель [142] запишется в виде:

$$(\omega_1 l_{11})_{,1} + (\omega_1 l_{12})_{,2} = 0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{11} l_{11}^2 + \varepsilon_{22} l_{12}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{11} l_{12} = \varepsilon_1^0, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{2.3}$$

В (2.1) – (2.3) использованы обозначения: $\varepsilon_1^T = \alpha_1^a T$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, $l_{11} = \cos\varphi_1$, $l_{12} = \sin\varphi_1$, α_1^a- коэффициент линейного расширения материала семейства волокон, $T = const$ ($T-$ температура, заданная в единицах СИ). Символы $_{,1,,2}$ означают частное дифференцирование по координатам x, y соответственно. Правая часть в (2.2) учитывает как случай равнодеформированного волокна ($\varepsilon_1 = const$, $\varepsilon_1^0 = const + \varepsilon_1^T$), так и случай нерастяжимого ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$) . Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x, y)$ запишем в виде

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega_1)\sigma_{ij}^c + \sigma_1\omega_1 l_{1i} l_{1j}. \tag{2.4}$$

В (2.4) напряжения в связующем определяются по формулам [39]

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T), \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij}, \tag{2.5}$$
$$(j = 3 - i,\ i = 1, 2).$$

Здесь E, ν, α_c – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала. Напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1, 2). \tag{2.6}$$

Правые части в (2.6)

$$b_i = -((1 - \omega_1)\rho_c + \omega_1\rho_1)F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; ρ_c, ρ_1 – массовые плотности материалов связующего и волокон; F_i – компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (2.1) – (2.6) присоединяются граничные условия на контуре. Уравнение контура Γ задано в параметрическом виде: $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, s – некоторый параметр. Пусть на контуре Γ_p заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s), (\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \tag{2.7}$$

На другой части контура Γ_u заданы кинематические условия для перемещений

u_1, u_2:

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \tag{2.8}$$

В (2.7) $p_n(s)$, $p_\tau(s)$ – известные функции, $n_1 = \cos\beta$, $n_2 = \sin\beta$, β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ_p. С учетом (2.4) граничные условия (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi-\beta) + (1-\omega_1)[m_3(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T)\cos^2\beta + \\
&+m_3(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T)\sin^2\beta + m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta] = p_n(s), \\
&\omega_1\sigma_1\sin 2(\varphi-\beta) + (1-\omega_1)m_3(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}+\nu(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}))\sin 2\beta + \\
&+2(1-\omega_1)m_4\varepsilon_{12}\cos 2\beta = 2p_\tau(s).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

В (2.9) использованы обозначения для констант (1.7). Интенсивность ω_1 задается на той части Γ_ω контура, где волокно входит в конструкцию

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s). \tag{2.10}$$

Ограничение для интенсивности армирования имеет вид

$$0 < \omega_1 \le 0,7. \tag{2.11}$$

Уравнения модели (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) запишем в виде общей разрешающей системы относительно неизвестных ε_{11}, ε_{22}, σ_1, ω_1, φ. Входит или нет σ_1 в список неизвестных, зависит от механического содержания задачи: если волокно нерастяжимо, то σ_1 – искомая функция. В случае равнонапряженного волокна $\sigma_1 = Const$. Предварительно введем вспомогательную переменную $z = \operatorname{tg}\varphi$, выразим из (2.2) одну из компонент деформаций, например ε_{12}, через остальные компоненты, а именно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$. Обозначив $r_1 = -\dfrac{1}{2z}$, $r_2 = -\dfrac{z}{2}$, $r_3 = \dfrac{\varepsilon_1^0(1+z^2)}{2z}$, получим

$$\varepsilon_{12} = r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3. \tag{2.12}$$

После сделанных замечаний перейдем к формулировке системы

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1(-z\frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2}) = 0, \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} - 2r_{3,12} = 0, \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu\varepsilon_{22,1}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,2} + (r_2\varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + \\ +\sigma_{1,1}\frac{\omega_1}{1+z^2} + \sigma_{1,2}\frac{\omega_1 z}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ +m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) - \\ -\sigma_1\omega_1(\frac{zz_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2 z_{,2}}{(1+z^2)^2}) = b_1, \\ \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,1} + (r_2\varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + \\ +\sigma_{1,1}\frac{\omega_1 z}{1+z^2} + \sigma_{1,2}\frac{\omega_1 z^2}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ +m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) + \\ +\sigma_1\omega_1(\frac{z_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{zz_{,2}}{(1+z^2)^2}) = b_2.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\omega = 1-\omega_1$. Первое уравнение системы – следствие условия постоянства сечений волокон, второе – уравнение совместности деформаций, два последних – уравнения равновесия.

Во всех случаях в дальнейшем при расчетах для удобства работы в системе производится ее обезразмеривание: декартовы координаты x, y относятся к некоторому характерному линейному размеру, напряжения относятся к характерному модулю Юнга используемых материалов.

2.2 Условие прочности армированного материала

Под разрушением армированного материала или конструкции из него будем понимать переход в пластическое состояние либо хрупкое разрушение хотя бы одного из элементов композиции [55, 61].

Структурная модель армированного материала основана на следующих предположениях:

1. Армированный слой состоит из изотропного материала с внедренным в него армирующим слоем. Армирующий слой – это совокупность тонких одномерных волокон, расположенных в направлениях, составляющих углы φ_m

с направлением оси OX. В диссертации исследуется армированный материал с одним (глава 2), двумя (глава 3) и тремя (глава 4) семействами волокон $m = 1, 2, 3$. Случай семейств волокон $m > 3$ обычно не рассматривается, связующее и армирующие волокна образуют однородный материал.

2. Число армирующих элементов достаточно велико, армированный слой можно считать квазиоднородным.

3. Элементы композиции соединены идеально: отсутствует проскальзывание между армирующими элементами и связующим.

4. Каждое волокно, внедренное в материал связующего, выдерживает как растягивающую, так и сжимающую нагрузку.

5. Локальные эффекты вблизи волокон пренебрегаются.

Пусть материал изотропного связующего имеет различные пределы прочности при растяжении σ_c^+ и сжатии σ_c^-. Тогда в случае плоского напряженного состояния условие прочности Мизеса-Баландина для неоднородного материала через напряжения σ_{ij}^c $(i, j = 1, 2)$ в связующем имеют вид [7, 61]:

$$\begin{gathered}(\sigma_{11}^c)^2 + (\sigma_{22}^c)^2 - \sigma_{11}^c\sigma_{22}^c + 3(\sigma_{12}^c)^2 + \\ +(\sigma_c^- - \sigma_c^+)(\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c) < \sigma_c^+\sigma_c^-.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Для волокон предполагаем, что пределы прочности (текучести) m-го семейства волокон $(m = 1, 2, 3)$ при растяжении σ_m^+ и сжатии σ_m^- различны. Армирующие семейства волокон остаются упругими, если выполняются неравенства [55]

$$-\sigma_m^- < E_m(\varepsilon_{11}(l_{1m})^2 + 2\varepsilon_{12}l_{1m}l_{2m} + \varepsilon_{22}(l_{2m})^2) - \alpha_m^a E_m T < \sigma_m^+ \tag{2.17}$$

В (2.17) использованы уже введенные ранее в (1.5),(1.6) обозначения. В данной главе рассматривается одно семейство волокон, $m = 1$. Таким образом, для проверки прочности армированного материала необходимо анализировать два условия: условие на прочность материала связующего (2.16) и условие на прочность армирующих волокон (2.17).

2.3 Конфигурации армирования одним семейством волокон

Рассматриваются следующие варианты армирования одним семейством волокон: семейство прямых, семейства парабол, эллипсов, гипербол, семейства кривых специального вида. Угол армирования определяется как угол между касательной к кривой семейства и положительным направлением оси OX. Значение тангенса угла армирования φ находится из уравнения $z = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx}$. Задавшись уравнением семейства кривых, для каждого из перечисленных семейств выписывается дифференциальное уравнение (2.1), связывающее угол армирования и интенсивность армирования. Из этого уравнения получим аналитическое решение для интенсивности армирования. Для всех случаев уравнение (2.1) удобно записать в виде

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1\left(-z\frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2}\right) = 0. \tag{2.18}$$

Результаты представим в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1. Решения для интенсивностей армирования

Уравнения семейств	$z = \operatorname{tg}\varphi$	Уравнение для ω_1	Точное решение ω_1
Семейство прямых $y = kx$	$z = k$	$\omega_{1,1} + k\omega_{1,2} = 0.$	$\omega_1 = F(y - kx)$
Семейство парабол $y = ax^2$	$z = 2\dfrac{y}{x}$	$\omega_{1,1} + 2\dfrac{y}{x}\omega_{1,2} + \dfrac{2}{x}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = \dfrac{F(\frac{y}{x^2})}{x^2}$
Семейство парабол $y = x^2/2 + C$	$z = x$	$\omega_{1,1} + x\omega_{1,2} + \dfrac{-x}{1+x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(y - x^2/2)\sqrt{1+x^2}$

Таблица 2.1. Продолжение

Семейство окружностей $y^2+x^2=C$	$z=\dfrac{-x}{y}$	$\omega_{1,1}-\dfrac{x}{y}\omega_{1,2}=0.$	$\omega_1=F(y^2+x^2)$
Семейство кривых $y=Ce^x$	$z=y$	$\omega_{1,1}+y\omega_{1,2}+\dfrac{1}{1+y^2}\omega_1=0.$	$\omega_1=F(ye^{-x})e^{-x}\sqrt{1+y^2}$
Семейство эллипсов $y^2/2+x^2=C$	$z=\dfrac{-2x}{y}$	$\omega_{1,1}-\dfrac{2x}{y}\omega_{1,2}+\dfrac{2x}{y^2+4x^2}\omega_1=0.$	$\omega_1=\dfrac{F(y^2+2x^2)}{\sqrt{4x^2+y^2}}$
Семейство гипербол $y^2-x^2=C$	$z=\dfrac{x}{y}$	$\omega_{1,1}+\dfrac{x}{y}\omega_{1,2}-\dfrac{2x}{y^2+x^2}\omega_1=0.$	$\omega_1=F(y^2-x^2)\sqrt{x^2+y^2}$

В решениях, представленных в табл. 2.1, F – произвольная функция, определяемая из граничных условий (2.10).

2.4 Семейство нерастяжимых волокон

Пусть семейство волокон нерастяжимо. Тогда в (2.2) правая часть имеет вид $\varepsilon_1^0=\varepsilon_1^T$. В силу идеализации модели волокон (абсолютно твердое тело) σ_1 – неизвестная функция координат x,y. Пусть задан угол армирования как известная функция $\varphi(x,y)$. Тогда интенсивность армирования определим из уравнения (2.1).

Получим разрешающую систему уравнений. Для этого в уравнения равновесия (2.6) подставим выражения для осредненных напряжений (2.4). Из уравнения (2.2) компоненту деформаций ε_{12} выражаем через ε_{11}, ε_{22}, получим

$$\varepsilon_{12}=r_1\varepsilon_{11}+r_2\varepsilon_{22}+r_3, \tag{2.19}$$

где коэффициенты r_1, r_2, r_3 в случае заданного угла армирования φ, вычисляем по формулам:

$$r_1 = -0,5ctg\varphi,\ r_2 = -0,5tg\varphi,\ r_3 = \frac{\alpha^a T}{\sin 2\varphi}.$$

Уравнение совместности деформаций (2.3) после исключения ε_{12} примет вид:

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} + r_{3,12} = 0. \tag{2.20}$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu\varepsilon_{22,1}) + \sigma_{1,1}(\omega_1\cos^2\varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1\cos\varphi\sin\varphi) + \\
&+\omega_1 m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,2} + (r_2\varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\
&+m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) + \\
&+\sigma_1(\omega_{1,2}\sin\varphi\cos\varphi + \omega_{1,1}\cos^2\varphi) = b_1, \qquad (2.21)\\
&\omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + \sigma_{1,1}(\omega_1\cos\varphi\sin\varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1\sin^2\varphi) + \\
&+\omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,1} + (r_2\varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) + \\
&+m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) + \sigma_1(\omega_{1,1}\sin\varphi\cos\varphi + \omega_{1,2}\sin^2\varphi) = b_2.
\end{aligned}$$

В результате сформулирована замкнутая система уравнений (2.20), (2.21) относительно σ_1, ε_{11}, ε_{22}. Поскольку уравнение (2.20) второго порядка, а остальные уравнения первого порядка, для определения типа системы дифференциальных уравнений продифференцируем уравнения (2.21) по одной из переменной. Построим характеристический полином $P(\lambda)$ системы (2.20), (2.21) и найдем его корни [12]:

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) = 0.$$

Матрицы A^{11}, A^{12}, A^{22} в нашем случае имеют вид

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega m_3 & \omega m_3\nu & \omega_1\cos^2\varphi \\ r_1\omega m_4 & r_2\omega m_4 & \omega_1\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} -2r_1 & -2r_2 & 0 \\ r_1\omega m_4 & r_2\omega m_4\nu & \omega_1\cos\varphi\sin\varphi \\ \nu\omega m_3 & r_2\omega m_3 & \omega_1\sin^2\varphi \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В металлокомпозите в качестве связующего выбираем алюминий. Пусть армирование выполнено стальными волокнами. Введем механические характеристики названных материалов связующего и арматуры по табл. 1.2, построенной на основе [41].

Случай 1. Пусть армирование выполнено семейством прямолинейных волокон. Угол армирования при этом постоянный, что дает некоторые упрощения в системе, и пусть он равен $\dfrac{\pi}{4}$.

Интенсивность $\omega_1(x, y)$ определим из уравнения (2.1) и граничных условий (2.10). Общее решение для данного случая соответствует первой строке табл. 2.1. После некоторых преобразований получим следующее выражение для характеристического полинома относительно λ:

$$P(\lambda) = 52,82\omega_1\omega\lambda^4 + 108,39\omega_1\omega\lambda^3 + \\ +88,17\omega_1\omega\lambda^2 + 270,99\omega_1\omega\lambda + 211,29\omega_1\omega = 0. \tag{2.22}$$

Независимо от вида функции ω_1 корни λ будут действительными и комплексно сопряженными $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -0,875$, $\lambda_3 = 0,416 - 1,454I$, $\lambda_4 = 0,416 + 1,454I$, где $I-$ здесь и далее – мнимая единица. Это означает, что система имеет действительные и комплексные характеристики и является системой составного типа [33]. Анализ систем составного типа рассмотрен в работах [34, 33]. Построение численного решения для таких систем вызывает определенные трудности. Поэтому выберем подход построения численно-аналитического решения.

Заметим, что уравнение (2.20) для рассматриваемого случая прямолинейного армирования распадается на два независимых друг от друга уравнения относительно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$

$$\varepsilon_{11,22} - 2r_1\varepsilon_{11,12} = 0, \tag{2.23}$$

$$\varepsilon_{22,11} - 2r_2\varepsilon_{22,12} = 0. \tag{2.24}$$

Найдем аналитические решения (2.23), (2.24), которые являются частными решениями уравнения (2.20). Они имеют вид

$$\varepsilon_{11} = F_1(y) + F_2(-y - 2r_1x), \quad \varepsilon_{22} = F_3(y) + F_4(y + 2r_1x) \tag{2.25}$$

и содержат произвольные функции F_1, F_2, F_3, F_4.

Уравнения (2.21) представим в виде, разрешенном относительно частных производных от σ_1:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{1,1}(\omega_1\cos^2\varphi)+\sigma_{1,2}(\omega_1\cos\varphi\sin\varphi)=b_1-(\sigma_1(\omega_{1,2}\sin\varphi\cos\varphi+\\
&+\omega_{1,1}\cos^2\varphi)+\omega m_4(r_1\varepsilon_{11,2}+r_2\varepsilon_{22,2})+\\
&+\omega m_3(\varepsilon_{11,1}+\varepsilon_{22,1})+m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T)+\\
&+m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11}+r_2\varepsilon_{22}+r_3)),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{1,1}(\omega_1\cos\varphi\sin\varphi)+\sigma_{1,2}(\omega_1\sin^2\varphi)=b_2-(\sigma_1(\omega_{1,1}\sin\varphi\cos\varphi+\\
&+\omega_{1,2}\sin^2\varphi)+\omega m_4(r_1\varepsilon_{11,1}+r_2\varepsilon_{22,1})+\\
&+\omega m_3(\varepsilon_{22,2}+\nu\varepsilon_{11,2})+m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T)+\\
&+m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11}+r_2\varepsilon_{22}+r_3)).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Напряжение в волокне σ_1 должно удовлетворять полученным выше уравнениям (2.26), (2.27). Чтобы определить частное решение задачи, сложим эти уравнения, подставим найденные аналитические решения для ω_1, ε_{11}, ε_{22}. Получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, выпишем формулу его аналитического решения. Произвольные функции полученных решений определим с помощью граничных условий (2.9), точно или приближенно решая алгебраические уравнения, связывающие значения решений на граничном контуре. Чтобы определить значение σ_1 на граничном контуре, подставим найденные точные решения в граничные условия (2.7). Пусть на граничном контуре (прямоугольная пластинка размером $[1,2]\times[3,4]$) заданы нормальное и касательное напряжение (2.9). Распределенные массовые нагрузки не учитываются $b_1 = b_2 = 0$. На границе пластины, где волокна входят в конструкцию, $x = 1$ значение интенсивности зададим равным $0,2\cos y$, воспользуемся полученным решением, результат показан на рис. 2.1.

Найденная интенсивность армирования удовлетворяет сформулированным выше ограничениям (2.11).

Пусть $p_n = 0,2$, $p_\tau = -0,02$, тогда графики решений для σ_{11}, σ_{22}, σ_1 изображены на рис. 2.2; рис. 2.3; рис. 2.4.

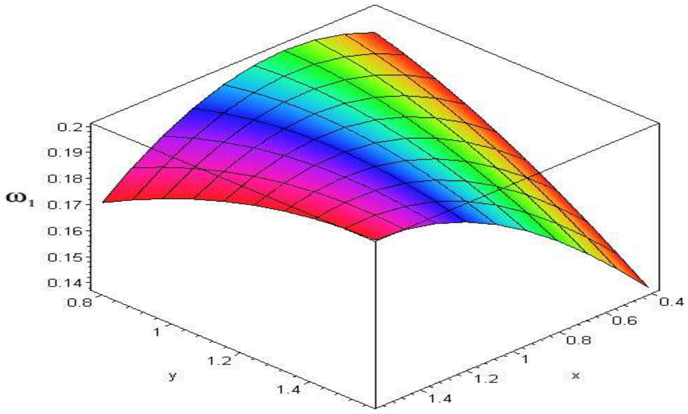


Рис. 2.1. Интенсивность армирования ω_1

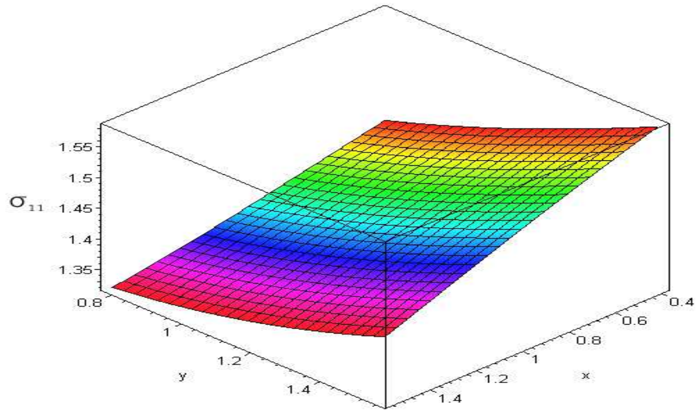


Рис. 2.2. Напряжение σ_{11}

Случай 2. Предложенный выше способ решения задачи позволяет обобщить ее на случай криволинейной укладки волокон. Пусть в металлокомпозите укладка волокон произведена по параболам. Тогда угол армирования φ зависит от координат и задается в виде $\varphi = \operatorname{arctg} x$ либо $\varphi = \operatorname{arctg} y$. Выпишем точное решение (2.1) для интенсивности, когда $\varphi = \operatorname{arctg} x$:

$$\omega_1(x, y) = \frac{F_2(y + \ln(cos(x))}{\cos(x)},$$

где F_2 – функция граничных условий. Задавшись конкретной функцией гра-

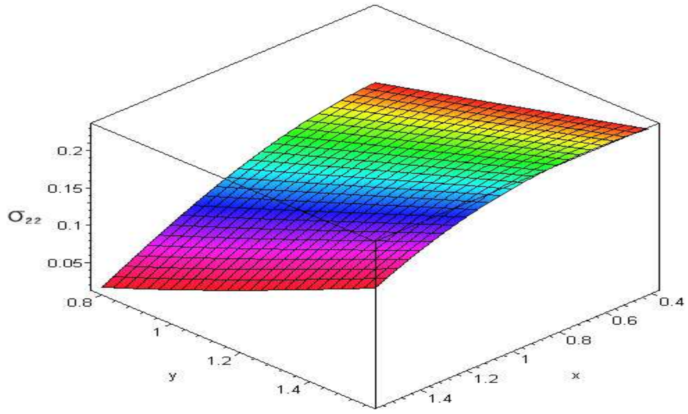


Рис. 2.3. Напряжение σ_{22}

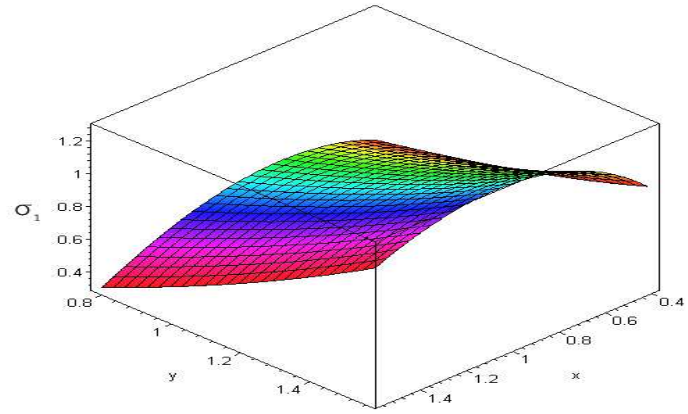


Рис. 2.4. Напряжение в волокне σ_1

ничных условий на отрезке $x \in [1,2]$ (где волокна входят в конструкцию), находим решение для ω_1 и в символьной форме вычисляем ее производные. Это позволяет выписать переменные коэффициенты в (2.21). Коэффициенты в (2.20) r_1, r_2, r_3 при укладке по параболам также будут зависеть от координат, их вычисляем по формулам

$$r_1 = -0,5/x, r_2 = -0,5x, r_3 = \alpha_1^a T \frac{(1+x^2)}{2x}. \tag{2.28}$$

Интенсивность армирования в этом случае представлена на рис. 2.5.

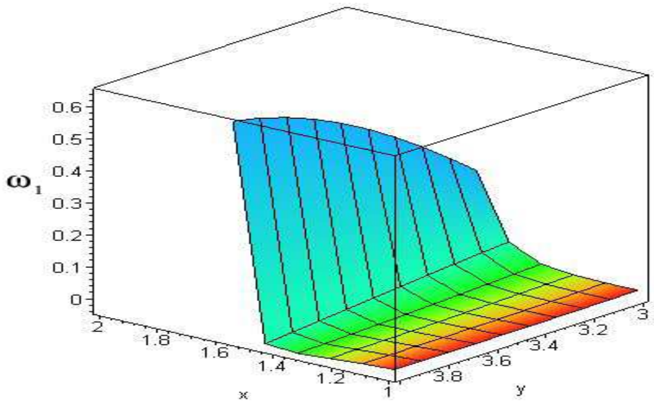


Рис. 2.5. Интенсивность армирования при укладке семейств армирующих волокон по параболам

Для всех найденных решений (рис. 2.2 – 2.4) проверяем выполнение условий Мизеса – Баландина (2.16), (2.17) отдельно для напряжений в связующем и волокне, тестируем полученные частные решения. Они удовлетворяют исходной системе и краевой задаче.

2.5 Семейство равнонапряженных волокон

2.5.1 Постановка задачи для семейства равнонапряженных волокон

Для равнонапряженного семейства волокон правая часть в (2.2) примет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, напряжение в волокне $\sigma_1 = Const$. Соотношения (2.1),(2.2),(2.3), (2.4),(2.6) – образуют замкнутую систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных

$$\omega_1, \varphi, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}.$$

Переформулируем названную систему в перемещениях, выразив напряжения через деформации, а деформации через перемещения, используя соотношения Коши. К системе присоединим граничные условия на контуре Γ_u : $u(\Gamma_u) = u(s)$, либо граничные условия (2.9), где деформации выражены через перемещения.

При подстановке напряжений через перемещения в уравнения равновесия нужно вычислить следующие выражения

$$(\sigma_1\omega_1\cos^2\varphi)_{,1} + (\sigma_1\omega_1\cos\varphi\sin\varphi)_{,2}, (\sigma_1\omega_1\cos\varphi\sin\varphi)_{,1} + (\sigma_1\omega_1\sin^2\varphi)_{,2}. \quad (2.29)$$

При их вычислении выделяем слагаемые вида

$$(\omega_1\cos\varphi)_{,1} + (\omega_1\sin\varphi)_{,2},$$

которые в силу условия постоянства сечений волокон (2.1) равны нулю, что упрощает выражения (2.29) и они становятся соответственно равными:

$$\sigma_1\omega_1(\cos\varphi(\cos\varphi)_{,1} + \sin\varphi(\cos\varphi)_{,2})$$

$$\sigma_1\omega_1(\cos\varphi(\sin\varphi)_{,1} + \sin\varphi(\sin\varphi)_{,2}).$$

Для формулировки системы удобно ввести $z = \operatorname{tg}\varphi(x,y)$. Тогда производные от функции, задающей угол армирования, вычисляем по формулам

$$\varphi_{,1} = \frac{z_{,1}}{1+z^2};\ \varphi_{,2} = \frac{z_{,2}}{1+z^2}.$$

В итоге система для равнонапряженного семейства волокон относительно искомых переменных $\omega_1, \varphi, u_1, u_2$ записывается в виде :

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1(-z\tfrac{z_{,1}}{1+z^2} + \tfrac{z_{,2}}{1+z^2}) = 0, \quad (2.30)$$

$$u_{1,2} + \tfrac{1}{z}u_{1,1} + u_{2,1} + u_{2,2} - \varepsilon_1^0(\tfrac{1}{z} + z) = 0, \quad (2.31)$$

$$\omega m_3(u_{1,11} + \nu u_{2,21}) + \tfrac{1}{2}\omega m_4(u_{1,22} + u_{2,12}) + m_3(-\omega_{1,1})(u_{1,1} + \nu u_{2,2} - L^T) +$$
$$+\tfrac{1}{2}m_4(-\omega_{1,2})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1\omega_1(-\tfrac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) - \tfrac{z^2}{(1+z^2)^2}(z_{,2})) = b_1, \quad (2.32)$$

$$\omega m_3(u_{2,22} + \nu u_{1,12}) + \tfrac{1}{2}\omega m_4(u_{1,21} + u_{2,11}) + m_3(-\omega_{1,2})(u_{2,2} + \nu u_{1,1} - L^T) +$$
$$+\tfrac{1}{2}m_4(-\omega_{1,1})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1\omega_1(\tfrac{1}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) + \tfrac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,2})) = b_2. \quad (2.33)$$

В системе использованы обозначения $\omega = 1 - \omega_1$.

Первые два уравнения системы содержат производные только первого порядка, поэтому чтобы исследовать тип системы, продифференцируем эти уравнения по одной из координат. Затем построим характеристический многочлен [14] для полученной системы (2.30) – (2.33)

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{z\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 & \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\omega m_4}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} z & \dfrac{\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \dfrac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \dfrac{m_4}{2}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega m_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

При исследовании типа системы установили, что характеристический многочлен (полином) тождественно равен нулю, что означает вырождение типа системы. Ее решение представляет определенные трудности и требует специального подхода. В данной работе предлагается следующий способ решения: находим частные решения после введения угла армирования как заданной функции координат. Это позволяет определить интенсивность армирования из уравнения (2.30). Уравнение (2.31) рассматриваем после вычисления u_1, u_2 как ограничение на условие равнонапряженности. Решаем (2.32),(2.33) совместно как систему относительно $u_1,\ u_2$. Ее характеристический полином имеет вид

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0,5\omega m_4 \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) \\ \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) & 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0,5\omega m_4 & 0 \\ 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Соотношение $P(\lambda) = 0$ после подстановки m_3, m_4 через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν запишется после некоторых упрощений как биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + \frac{3\nu^2 - 1 + 10\nu}{2(\nu - 1)}\lambda^2 + 1 = 0.$$

Находим четыре корня биквадратного уравнения:

$$\lambda_k = \pm\frac{\sqrt{-(\nu-1)(3\nu^2 - 1 + 10\nu) \pm \sqrt{9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu)}}}{2(\nu - 1)}, \ (k = \overline{1,4}).$$

Исследование выражения под радикалом $(9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu)$ как функции от ν показало, что оно имеет отрицательный знак на интервале $[0; 0,38]$. Это означает, что корни λ_k комплексно сопряженные на этом интервале. Рассматриваемая система (2.32), (2.33) имеет эллиптический тип. Заметим, что для многих материалов коэффициент Пуассона принимает значения от $0,25$ до $0,3$ [108],[41]. Следовательно, возможные значения коэффициентов Пуассона попадают в указанный интервал, где корни λ_k- комплексно сопряженные.

Для построения численной схемы запишем оба уравнения в дивергентном виде. Предварительно введем следующие обозначения:

$$y_1 = \omega_1(x, y),\ y_2 = z(x, y),\ z_1 = (1 - y_1)m_3,\ z_2 = (1 - y_1)m_4/2. \qquad (2.34)$$

Здесь y_1, y_2-известные функции координат, u_1, u_2-неизвестные функции. Заметим выполнение следующих соотношений для слагаемых, входящих в первое уравнение

$$(1 - y_1)m_3 u_{1,11} + m_3(-y_{1,1})u_{1,1} = (z_1 u_{1,1})_{,1},$$

$$(1 - y_1)m_3 \nu u_{2,11} + m_3(-y_{1,1})\nu u_{2,1} = (\nu z_1 u_{2,2})_{,1},$$

$$\frac{(1 - y_1)}{2} m_4 u_{1,22} + \frac{1}{2} m_4(-y_{1,2})u_{1,2} = (z_2 u_{1,2})_{,2},$$

$$\frac{(1 - y_1)}{2} m_4 u_{2,12} + \frac{1}{2} m_4(-y_{1,2})u_{2,1} = (z_2 u_{2,1})_{,2}.$$

В итоге оно запишется

$$(z_1u_{1,1})_{,1} + (\nu z_1u_{2,2})_{,1} + (z_2u_{1,2})_{,2} + (z_2u_{2,1})_{,2} + F_1 = 0, \tag{2.35}$$

$$F_1 = -b_1 + m_3y_{1,1}L^T + \sigma_1y_1(-\frac{y_2}{(1+y_2^2)^2}y_{2,1} - \frac{{y_2}^2}{(1+y_2^2)^2}y_{2,2}).$$

Используем соотношения для второго уравнения

$$(1-y_1)m_3u_{2,22} + m_3(-y_{1,1})u_{2,2} = (z_1u_{2,2})_{,2},$$

$$(1-y_1)m_3\nu u_{1,12} + m_3(-y_{1,2})\nu u_{1,1} = (\nu z_1u_{1,1})_{,2},$$

$$\frac{(1-y_1)}{2}m_4u_{1,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} = (z_2u_{1,2})_{,1},$$

$$\frac{(1-y_1)}{2}m_4u_{2,11} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} = (z_2u_{2,1})_{,1}.$$

В итоге второе уравнение запишется

$$(z_1u_{2,2})_{,2} + (\nu z_1u_{1,1})_{,2} + (z_2u_{1,2})_{,1} + (z_2u_{2,1})_{,1} + F_2 = 0, \tag{2.36}$$

$$F_2 = -b_2 + m_3y_{1,2}L^T + \sigma_1y_1\Big(\frac{1}{(1+y_2^2)^2}y_{2,1} + \frac{y_2}{(1+y_2^2)^2}y_{2,2}\Big).$$

Таким образом получили дивергентную форму записи (2.32),(2.33), рассматриваемых как система относительно u_1, u_2.

2.5.2 Краевая задача для прямоугольной пластинки

Пусть граничный контур $\Gamma-$ граница G, где $G-$ прямоугольная пластинка со сторонами, параллельными координатным осям $G = \{(x_1, x_2)|, 0 \leq x_i \leq d_i,\ i = 1, 2\}$. В этом случае определенный выше угол $\beta = \pi/2$. Кинематические условия (2.8) не меняются. Статические условия (2.9) после замены компонент деформации на перемещения по формулам Коши примут вид

$$u_{2,2} + \nu u_{1,1} = \frac{p_n(s) - \dfrac{\sigma_1\omega_1z^2}{1+z^2}}{\omega_1m_3} + L^T, \tag{2.37}$$

$$u_{1,2} + \nu u_{2,1} = \frac{2p_\tau(s) + \dfrac{\sigma_1\omega_1z}{2(1+z^2)}}{-\omega_1}.$$

При построении разностной схемы для системы (2.35),(2.36) поставим задачу отыскания вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ с граничными условиями на контуре в общем виде

$$
\begin{aligned}
z_1 u_{1,1} + z_1 \nu u_{2,2} &= -f_1(x_1, 0), \\
z_2 u_{1,2} + z_2 u_{2,1} &= -f_1(0, x_2), \\
z_2 u_{1,1} + z_1 \nu u_{2,2} &= -f_2(x_1, d_1), \\
z_2 u_{1,2} + z_2 u_{2,1} &= -f_2(d_2, x_2),
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

2.5.3 Свойства дифференциального оператора задачи

Покажем, что оператор является симметричным и положительно определенным. В качестве области определения оператора L вводится линеал функций, являющихся непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области G, и удовлетворяющих граничным условиям (2.38).

Выпишем функционал $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v})$

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\int_G \Big[&\frac{\partial}{\partial x_1}(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) v_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(z_1 \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) v_1 + \\
+ &\frac{\partial}{\partial x_2}(z_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(z_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) v_1 + F_1 v_1 \Big] dx_1 dx_2 + \\
+ \int\int_G \Big[&\frac{\partial}{\partial x_2}(z_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) v_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}(z_1 \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) v_2 + \\
+ &\frac{\partial}{\partial x_1}(z_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) v_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}(z_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) v_2 + F_2 v_2 \Big] dx_1 dx_2 +
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$.

Используя тождества, возникающие при нахождении интеграла по частям, например,

$$
\frac{\partial}{\partial x_1}(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) v_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(z_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) + z_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1},
$$

запишем функционал в виде

$$I(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int\int_G \Big[z_1 \tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + z_1\nu \tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\tfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + z_2 \tfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\tfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + z_2 \tfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\tfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + z_1 \tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\tfrac{\partial v_2}{\partial x_2} +$$
$$+ z_1\nu \tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + z_2 \tfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\tfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + z_2 \tfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\tfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + F_1 v_1 + F_2 v_2 \Big] dx_1 dx_2 + \tag{2.39}$$
$$+ \int_0^{d_1} \Big[f_1(x_1,0)v_1 + f_1(x_1,d_2)v_1 + f_2(x_1,0)v_2 + f_2(x_1,d_2)v_2 \Big] dx_1 +$$
$$+ \int_0^{d_2} \Big[f_1(0,x_2)u_1 + f_1(d_1,x_2)u_1 + f_2(0,x_2)u_2 + f_2(d_1,x_2)u_2 \Big] dx_2$$

Из формул (2.39) легко видеть, что при замене $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ $I(\mathbf{u},\mathbf{v}) = I(\mathbf{v},\mathbf{u})$, т.е. функционал симметричен.

Исследуем свойство положительной определенности оператора L, выпишем $(L\mathbf{u},\mathbf{u})$:

$$L(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \int\int_G \Big[z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 + z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_2})^2 + z_2(\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2 + z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} +$$
$$+ z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + z_1\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big] dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\int_G \Big[z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 + 2z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 \Big] dx_1 dx_2.$$

Покажем, что $(L\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$ для любого $\mathbf{u}$, принадлежащему заданному линеалу функций. Действительно,

$$z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 \geq 0,$$

поскольку $z_2 > 0$, что следует из соотношений (2.34) и ограничений на значения интенсивностей армирования, аналогично $z_1 > 0$. Выражение

$$z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 + 2z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \geq 0,$$

если $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} > 0$. В противном случае, если $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} < 0$, тогда

$$z_1\Big((\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 - 2\nu|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}| \Big) \geq z_1\Big((\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 - 2\Big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big| \Big) =$$
$$= z_1\Big(\Big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big| - \Big|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big| \Big)^2 \geq 0.$$

Оценка следует из того, что коэффициент Пуассона $0 < \nu < 1$.

Установили, что дифференциальный оператор поставленной плоской задачи упругости для среды, армированной одним семейством волокон, является симметричным и положительно определенным. Следовательно применим метод Ритца.

2.5.4 Построение разностной схемы

Решение задачи (2.35),(2.36) с граничными условиями (2.38) в силу дивергентной формы записи системы ($L\mathbf{u}+\mathbf{F}=0$, где $L-$ дифференциальный оператор системы, $\mathbf{F}-$ правая часть) должно доставлять минимум следующему функционалу

$$I(\mathbf{u},\mathbf{u})=(L\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{F},\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\mathbf{F}=(F_1,F_2)$. Выпишем этот функционал. Согласно методу Ритца [103] аппроксимируем пространство $\mathbf{W}_2^1(G)$, в котором ищутся решения, конечномерным подпространством $\mathbf{V}$ и назовем приближенным решением задачи вектор $\overline{\mathbf{u}}=(v_1,v_2),\ \ v_i\in\mathbf{V}$, который минимизирует функционал $I(\mathbf{u},\mathbf{u})$ на пространстве $\mathbf{V}$. Этот функционал можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u},\mathbf{u})=W(\mathbf{u})+\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}(F_1u_1+F_2u_1)dx_1dx_2+\\ +\int_0^{d_1}[f_1(x_1,0)u_1+f_1(x_1,d_2)u_1+f_2(x_1,0)u_2+f_2(x_1,d_2)u_2]dx_1+\\ +\int_0^{d_2}[f_1(0,x_2)u_1+f_1(d_1,x_2)u_1+f_2(0,x_2)u_2+f_2(d_1,x_2)u_2]dx_2, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где $W(\mathbf{u})-$ энергия упругой деформации преобразуется к виду

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\int\int_G[z_1((u_{1,1})^2+(u_{2,2})^2)+z_2((u_{1,2})^2+(u_{2,1})^2)+\\ +2z_1\nu u_{1,1}u_{2,2}+2z_2u_{2,1}u_{1,2}]dx_1dx_2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Введем в области G прямоугольную равномерную сетку. Разобьем область на прямоугольные ячейки со сторонами h_1,h_2 и вершинами в узлах сетки. Каждую ячейку в свою очередь разобьем прямой, проходящей через ее противоположные вершины на два треугольника. Обозначим левые верхние треугольники через $\Delta^+[i]$, а правые нижние – через $\Delta^-[i]$. В качестве подпространства $\mathbf{V}$ пространства $\mathbf{W}_2^1(G)$ возьмем пространство непрерывных в области и линейных над каждым треугольником $\Delta^\pm[i]$ функций.

Приближенное решение задачи (2.35),(2.36) будем искать в виде $\overline{\mathbf{u}} = (v_1, v_2)$

$$v_i = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} y_{ij_1j_2} \eta_{j_1j_2}, \tag{2.42}$$

где $\eta_{j_1j_2}$– базис пространства $\mathbf{V}$. В качестве базиса в $\mathbf{V}$ можно взять совокупность непрерывных в G, линейных над каждым треугольником $\Delta^{\pm}[i]$ функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одном узле сетки. При выбранном базисе коэффициенты $y_{ij_1j_2}$ в (2.42) имеют значение приближенного решения в узлах сетки.

Дифференцируя $I(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u}})$ по переменным $y_{ij_1j_2}$ и приравнивая первые производные нулю, получим следующую систему алгебраических уравнений для определения значений решения в узлах сетки $y_{ij_1j_2}$

$$\begin{gathered}
(z_1 v_{1x_1})_{\overline{x_1}} + \frac{1}{2}((z_1 \nu v_{2\overline{x_2}})_{\overline{x_1}} + (z_1 \nu v_{2x_2})_{x_1}) + \\
+(z_2 v_{1x_2})_{\overline{x_2}} + \frac{1}{2}((z_2 v_{2\overline{x_1}})_{\overline{x_2}} + (z_2 v_{2x_1})_{x_2}) = \frac{-1}{h_1 h_2} \Phi_1(x_1, x_2), \\
(z_1 v_{2x_2})_{\overline{x_2}} + \frac{1}{2}((z_1 \nu v_{1\overline{x_1}})_{x_2} + (z_1 \nu v_{1x_1})_{\overline{x_2}}) + \\
+\frac{1}{2}((z_2 v_{1\overline{x_2}})_{x_1} + (z_2 v_{1x_2})_{\overline{x_1}}) + (z_2 v_{2x_1})_{\overline{x_1}} = \frac{-1}{h_1 h_2} \Phi_2(x_1, x_2).
\end{gathered} \tag{2.43}$$

В (2.43) $\Phi_1(x_1, x_2), \Phi_2(x_1, x_2)$– сеточные выражения, содержащие значения правых частей, в уравнениях введены сеточные операторы дифференцирования по следующему правилу:

$$\begin{gathered}
u_{\overline{x_1}} = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_1},\ u_{x_1} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_1}, \\
u_{\overline{x_2}} = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_2},\ u_{x_2} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_2}.
\end{gathered} \tag{2.44}$$

Заметим, что для достаточно гладких правых частей погрешности аппроксимаций имеют вид $\psi_i = o(h_1^2 + h_2^2)$ [103],[104].

Построена численная схема решения плоской задачи в перемещениях для композита, армированного одним семейством равнонапряженных волокон, когда угол армирования введен как заданная функция координат. Схема учитывает все особенности этой задачи.

В главе 2 получены разрешающие системы уравнений плоской задачи для одного семейства равнонапряженных и нерастяжимых, прямолинейных и криволинейных волокон в прямоугольной декартовой системе координат. Установлено, что они составного типа для семейства нерастяжимых волокон. Введение условия равнонапряженности семейства волокон приводит к вырождению типа системы. Получены численно-аналитические решения частных задач. Для иллюстрации расчетов выбран металлокомпозит (алюминиевая пластинка армируется стальными волокнами). Материалы настоящей главы опубликованы в работах [143, 68, 116, 114, 117, 63, 69, 81].

Глава 3

Два семейства волокон

3.1 Постановка задачи в декартовой системе координат

Рассматривается плоская задача упругости для среды, армированной двумя семействами волокон в декартовой системе координат. Модель описывается совокупностью алгебраических и дифференциальных уравнений относительно интенсивностей армирования $\omega_i(x, y)$, компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x, y)$, деформаций в волокнах первого и второго семейства $\varepsilon_i(x, y)$, напряжений в волокнах первого и второго семейства $\sigma_i(x, y)$, осредненных напряжений $\sigma_{ij}(x, y)$, где x, y – декартовы координаты, $\varphi_i(x, y)$ – углы армирования $(i, j = 1, 2)$. В рамках принятых в предыдущих главах обозначений и предположений (о постоянстве поля температур и поперечных сечений волокон) исходная система имеет вид

$$(\omega_m l_{m1})_{,1} + (\omega_m l_{m2})_{,2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{11} l_{m1}^2 + \varepsilon_{22} l_{m2}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{m1} l_{m2} = \varepsilon_m^0, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{3.3}$$

Использованы обозначения: $\varepsilon_m^T = \alpha_m^a T$, $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m + \varepsilon_m^T$, $l_{m1} = \cos(\varphi_m)$, $l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, α_m^a– коэффициенты линейного расширения материала m-го семейства волокон $(m = 1, 2)$. Правая часть в (3.2) учитывает как случай равнодеформированных ($\varepsilon_m = const$, $\varepsilon_m^0 = const + \varepsilon_m^T$), так и случай нерастяжимых ($\varepsilon_m = 0$, $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$) семейств волокон и их возможные комбинации (одно семейство волокон равнодеформируемо, другое – нерастяжимо).

К задаче (3.1) – (3.3) присоединяются уравнения для осредненных напряжений $\sigma_{ij}(x,y)$. В случае армирования двумя семействами волокон они имеют вид

$$\sigma_{ij} = \Omega\sigma_{ij}^c + \sum_{m=1}^{2}\sigma_m\omega_m l_{mi} l_{mj},\ \Omega = 1 - (\omega_1(x,y) + \omega_2(x,y)). \tag{3.4}$$

В (3.4) напряжения в связующем определяются в соответствии с соотношениями обобщенной плоской задачи термоупругости [39]

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T),$$
$$\sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij},\ \ (j = 3-i,\ i = 1,2).$$

Уравнение (3.4) – это определение силы, действующей на слой композитов как суммы сил, создаваемых связующим материалом, и сил, создаваемых армирующими слоями. Осредненные напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1,2). \tag{3.5}$$

Правые части в (3.5)

$$b_i = -(\Omega\rho_c + \sum_{m=1}^{2}\omega_m\rho_m)F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; $\rho_c,\ \rho_m$– массовые плотности материалов связующего и волокон m-го семейства; F_i – компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

Сформулируем разрешающие системы для названных четырех случаев армирования — комбинаций нерастяжимых и равнодеформируемых семейств волокон. Для всех случаев характерно, что система распадается: выделяются дифференциальные уравнения (3.1) для определения интенсивностей $\omega_1,\ \omega_2$; компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{22}$ удовлетворяют системе двух линейных уравнений (3.2), что позволяет исключить две компоненты $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22}$ и выразить их через третью ε_{12} :

$$\varepsilon_{11}\cos^2(\varphi_1) + \varepsilon_{22}\sin^2(\varphi_1) + 2\varepsilon_{12}\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_1) = \varepsilon_1^0, \tag{3.6}$$
$$\varepsilon_{11}\cos^2(\varphi_2) + \varepsilon_{22}\sin^2(\varphi_2) + 2\varepsilon_{12}\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2) = \varepsilon_2^0.$$

Введем промежуточные обозначения

$$EP1 = \varepsilon_1^0 \cos^2(\varphi_2) - \varepsilon_2^0 \cos^2(\varphi_1),$$
$$EP2 = \varepsilon_1^0 \sin^2(\varphi_2) - \varepsilon_2^0 \sin^2(\varphi_1),$$
$$a_{11} = \sin^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \sin^2(\varphi_2)\cos^2(\varphi_1),$$
$$a_{21} = \sin(2\varphi_1)\sin^2(\varphi_2) - \sin(2\varphi_2)\sin^2(\varphi_1),$$
$$a_{12} = \sin(2\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \sin(2\varphi_2)\cos^2(\varphi_1),$$
$$b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, b_3 = \frac{EP1}{a_{11}}, b_4 = \frac{EP2}{a_{11}}.$$

Тогда получим

$$\varepsilon_{11} = b_{21}\varepsilon_{12} - b_4,\ \varepsilon_{22} = -b_{12}\varepsilon_{12} + b_3. \tag{3.7}$$

Подстановка (3.7) в уравнение совместности деформаций (3.3) дает уравнение для ε_{12}

$$A\varepsilon_{12,11} + B\varepsilon_{12,22} - 2\varepsilon_{12,12} + C\varepsilon_{12,2} + D\varepsilon_{12,1} + E\varepsilon_{12} + F = 0, \tag{3.8}$$

где

$$A = -b_{12}, B = b_{21}, C = 2b_{21,2}, D = -2b_{12,1}$$
$$E = -b_{12,11} + b_{21,22}, F = -b_{4,22} + b_{3,11}.$$

Построенные уравнения позволяют выписать решения для $\omega_m,\ \varepsilon_{ij}$ во всех четырех случаях укладки арматуры – равнодеформированные семейства волокон, нерастяжимые семейства, их комбинации (одно семейство волокон равнодеформируемо, другое нерастяжимо).

Предположим, что армирование выполняется по изогональным, в частности, ортогональным траекториям [106]. Это означает, что два семейства армирующих волокон задаются зависимостями, связывающими углы армирования как функции координат x, y, вида

$$\varphi_1(x,y) = \alpha(x,y) + \alpha^0, \varphi_2(x,y) = \alpha(x,y), \tag{3.9}$$

где $\alpha^0 = const \neq 0$. В дальнейшем для простоты записи $\alpha(x,y)$ обозначается как α. Коэффициенты при старших производных в (3.8) при принятых обозначениях запишем в виде

$$A = -\frac{\sin 2(\alpha + \alpha^0) - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha^0}{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \alpha^0)},$$
$$B = \frac{\sin 2(\alpha + \alpha^0) - \sin 2\alpha^0 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \alpha^0)}.$$

Вычисление дискриминанта $\delta = AB - 1$ квадратичной формы [12], соответствующей уравнению (3.8), дает следующий результат:

$$\delta = -\frac{2(1 - \cos 2\alpha^0)^2}{(\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \alpha^0))^2}.$$

Поскольку $\delta < 0$, уравнение (3.8) имеет гиперболический тип в случае укладки двух семейств волокон по изогональным траекториям. Для дифференциального уравнения второго порядка (3.8) находим два действительных характеристических направления, определяемых вектором (dx, dy), удовлетворяющим условию

$$A(dx)^2 + 2dxdy + B(dy)^2 = 0.$$

Относительно параметра $t = \dfrac{dx}{dy}$ данное условие приводит к квадратному уравнению

$$At^2 + 2t + B = 0.$$

С учетом приведенных соотношений для A, B квадратное уравнение запишем в виде

$$(-\sin 2(\alpha + \alpha^0)\cos^2\alpha - \sin 2\alpha \cos^2(\alpha + \alpha^0))t^2 +$$
$$+2(\cos^2\alpha - \cos^2(\alpha + \alpha^0))t + \sin 2(\alpha + \alpha^0) + \sin 2(\alpha + \alpha^0) -$$
$$- \sin 2(\alpha + \alpha^0)\cos^2\alpha - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos^2(\alpha + \alpha^0) = 0.$$

Его решение дает действительные характеристические направления

$$t_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha^0),\ t_2 = \operatorname{tg}\alpha.$$

К системе (3.1) – (3.5) присоединим следующие граничные условия на контуре. Пусть s – параметр, определяющий контур Γ, причем $\Gamma = \Gamma_p \bigcup \Gamma_u$, $u_1^0(s)$, $u_2^0(s)$, $p_n(s)$, $p_\tau(s)$– известные функции, $n_1 = \cos\beta$, $n_2 = \sin\beta$, β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ. На контуре Γ_p задаем статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s),$$
$$(\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \tag{3.10}$$

На другой части контура Γ_u задаем кинематические условия для перемещений u_1, u_2:

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \tag{3.11}$$

Поскольку σ_{ij} находим по формулам (3.4), граничные условия (3.10) принимают следующий вид:

$$\omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi_1 - \beta) + \omega_2\sigma_2\cos^2(\varphi_2 - \beta) + \Omega[m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T)\cos^2\beta +$$
$$+m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T)\sin^2\beta + m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta] = p_n(s), \tag{3.12}$$
$$\omega_1\sigma_1\sin 2(\varphi_1 - \beta) + \omega_2\sigma_2\sin 2(\varphi_2 - \beta) + \Omega m_2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} +$$
$$+\nu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}))\sin\beta + 2\Omega m_3\varepsilon_{12}\cos 2\beta = 2p_\tau(s).$$

В (3.12) использованы обозначения для констант, введенные ранее по формулам (1.7). Интенсивности $\omega_1,\ \omega_2$ задаются только на той части Γ_ω контура, где волокна входят в конструкцию [82]

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s), \ \ \omega_2(\Gamma_\omega) = \omega_2^*(s). \tag{3.13}$$

Общие ограничения для интенсивностей армирования задаем в виде

$$0 < \omega_m \le 0,7, \ \ \Omega = 1 - \omega_1 - \omega_2, \ 0 < \Omega < 1.$$

Уравнение (3.8) выделяется из системы и может быть решено независимо. Для решения уравнения (3.8) – гиперболического уравнения второго порядка относительно компоненты тензора деформаций ε_{12} – необходимо ставить смешанную краевую задачу в замкнутом прямоугольнике. В теории дифференциальных уравнений в последние годы появились результаты, касающиеся классической разрешимости одномерных и многомерных гиперболических уравнений второго порядка в пространстве W_2^1. Например, это работы [141, 49, 98].

3.2 Два семейства нерастяжимых волокон

Пусть армирующие волокна нерастяжимы. Тогда в (3.2) правая часть имеет вид $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$ и σ_1, σ_2 становятся неизвестными функциями. Соотношения для осредненных напряжений

$$\sigma_{11} = \Omega m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \sigma_1\omega_1\cos^2(\varphi_1) + \sigma_2\omega_2\cos^2(\varphi_2),$$
$$\sigma_{22} = \Omega m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) + \sigma_1\omega_1\sin^2(\varphi_1) + \sigma_2\omega_2\sin^2(\varphi_2),$$
$$\sigma_{12} = \Omega m_4\varepsilon_{12} + \sigma_1\omega_1\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1) + \sigma_2\omega_2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)$$

подставим в уравнения равновесия (3.5). Получим квазилинейную систему двух уравнений в частных производных относительно σ_1, σ_2- напряжений в волокнах первого и второго семейства. Систему представим в удобном для анализа виде

$$A_{11}\sigma_{1,1} + A_{12}\sigma_{2,1} + B_{11}\sigma_{1,2} + B_{12}\sigma_{2,2} = f_1(x, y, \sigma_1, \sigma_2), \tag{3.14}$$
$$A_{21}\sigma_{1,1} + A_{22}\sigma_{2,1} + B_{21}\sigma_{1,2} + B_{22}\sigma_{2,2} = f_2(x, y, \sigma_1, \sigma_2).$$

Здесь

$$A_{11} = \omega_1\cos^2(\varphi_1), \quad A_{12} = \omega_2\cos^2(\varphi_2),$$
$$B_{11} = \omega_1\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1), \quad B_{12} = \omega_2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2),$$
$$A_{21} = \omega_1\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1), \quad A_{22} = \omega_2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2),$$
$$B_{21} = \omega_1\sin^2(\varphi_1), \quad B_{22} = \omega_2\sin^2(\varphi_2).$$

$$f_1 = -\sigma_1(A_{11,1} + B_{11,2}) - \sigma_2(A_{12,1} + B_{12,2}) + b_1 -$$
$$-m_3(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T))_{,1} - m_4(\Omega\varepsilon_{12})_{,2},$$
$$f_2 = -\sigma_1(A_{21,1} + B_{21,2}) - \sigma_2(A_{22,1} + B_{22,2}) + b_2 -$$
$$-m_3(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T))_{,2} - m_4(\Omega\varepsilon_{12})_{,1}.$$

Систему (3.14) запишем в матричном виде

$$A^*\mathbf{u}_{,1} + B^*\mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f}. \tag{3.15}$$

В (3.15) использованы матрицы

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Для исследования типа системы (3.15) строим определитель вида

$$\det \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ dxI^* & dyI^* \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix},$$

где I^* – единичная матрица второго порядка. Уравнение для характеристик системы (3.15) получим из условия равенства определителя нулю. Если семейства двух армирующих волокон представляют собой изогональные траектории (3.9), то непосредственное вычисление $\det A^*$ устанавливает, что $\det A^* \neq 0$

$$(\det A^* = \omega_1\omega_2 \cos\alpha \cos(\alpha + \alpha^0)(-\sin\alpha^0))$$

и система (3.15) может быть переписана в виде

$$\mathbf{u}_{,1} + (A^*)^{-1} B^* \mathbf{u}_{,2} = (A^*)^{-1}\mathbf{f}.$$

Ее тип определяют корни λ_i $(i = 1, 2)$ уравнения

$$\det((A^*)^{-1} B^* - \lambda I^*) = 0.$$

Для рассматриваемого случая (3.9) вычисляем матрицу $(A^*)^{-1} B^*$, после преобразований с использованием формул тригонометрии она равна

$$A^{*-1} B^* = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(\alpha + \alpha^0) & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix}.$$

Находим характеристические корни для вычисленной матрицы:

$$\lambda_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha^0), \quad \lambda_2 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Они задают наклоны для характеристик, уравнение для характеристик имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_i(x, y).$$

Корни λ_1, λ_2 вещественны, следовательно, система (3.15) в случае армирования по изогональным траекториям имеет гиперболический тип. Совокупность уравнений (3.15), (3.8), (3.1) – искомая разрешающая система относительно пяти неизвестных $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2, \varepsilon_{12}$. Она распадается на уравнения относительно интенсивностей ω_1, ω_2, уравнение относительно ε_{12} и систему относительно σ_1, σ_2.

Пример. Рассмотрим прямоугольную пластину, армированную двумя семействами прямолинейных нерастяжимых волокон. Пусть материал связующего пластины выполнен из алюминиевого сплава, армирование произведено семействами стальных волокон с постоянным углами армирования $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Металлическая проволока является одним из наиболее экономичных типов упрочняющих элементов в композиционных материалах. Производство металлической проволоки представляет собой хорошо отлаженный технологический процесс. Получают ее методом волочения. Свойства металлической проволоки разных сортов позволяют эффективно использовать ее при производстве композитов. Механические свойства некоторых типов металлических волокон приведены в таблице 3.1 [41, 37].

Таблица 3.1

Материал	Плотность $\rho \times 10^3 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$	Диаметр мкм	Средняя прочность σ^+, ГПА	Модуль упругости Е, ГПА
Алюминий	2,7	-	0,29	70
Бериллий	1,85	130	1,1	310
Титан	4,5	-	0,55	120
Кремний	2,5	-	1,0	72
Сталь ВНС-9	7,8	100-300	3,5-3,8	200

Таблица 3.1. Продолжение

Молибден и ванадий	-	250	1,8-2,0	334
Вольфрам	19,3	50	3,3	410

Как видим из таблиццы 3.1, стальные волокна обладают высоким уровнем механических свойств. Наиболее экономичны волокна, изготовленные из углеродистых сталей. При температуре эксплуатации композитов в диапазоне $77 \ldots 623$ К эффективно применение высокопрочных волокон из нержавеющих сталей. Благодаря относительно высокой теплостойкости и наличию пассивной поверхности волокна из нержавеющих сталей слабо взаимодействуют с матричным материалом.

В расчетах используем разрешающую систему (3.15), (3.8), (3.1) для нахождения $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_{12}, \omega_1, \omega_2$ после ее обезразмеривания. Найдем общие решения для интенсивностей

$$\omega_1(x, y) = F_1(y - x), \omega_2(x, y) = F_2(y + (1 - \sqrt{2})x), \tag{3.16}$$

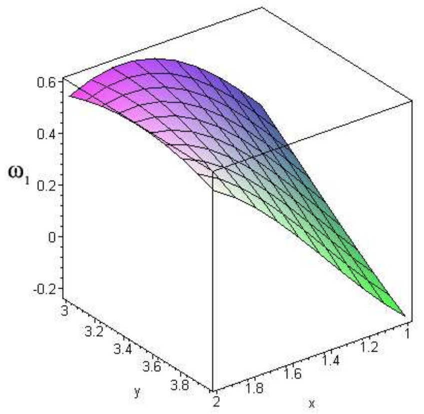
где F_1, F_2 – произвольные функции граничных условий. На краю пластины, где волокна входят в конструкцию, зададим граничные условия вида (3.13). Графики искомых решений для интенсивностей изображены на рис. 3.1, 3.2.

В рассматриваемом примере уравнение для ε_{12} представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами, его общее решение

$$\varepsilon_{12} = F_3(-y + 1,632x) + F_4(y - 0,367x), \tag{3.17}$$

произвольные F_3, F_4 из условий: в примере на части граничного контура пластина жестко закреплена $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$.

После нахождения аналитических решений (3.16), (3.17) с учетом граничных условий вычислим матрицы коэффициентов разрешающей системы (3.15). Затем определим исходные напряжения в волокнах как решения (3.15) с этими коэффициентами. Пусть $p_n = 0,008$, $p_\tau = 0$. Решаем систему (3.15), в



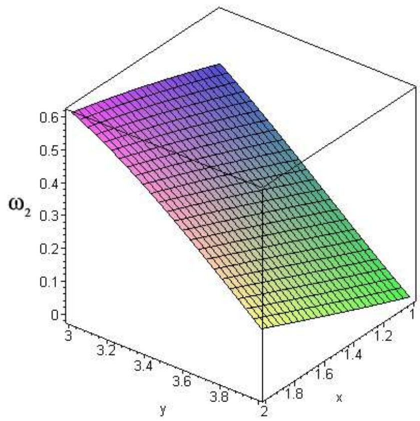


Рис. 3.1 Интенсивность армирования ω_1 Рис. 3.2 Интенсивность армирования ω_2

результате имеем

$$\sigma_1(x,y) = 2,46F_2(y-1,41x) + 0,27\cos(y-2,1) - 0,23\sin(y-2,58) -$$
$$-0,01\cos(y+0,37) + 0,003\sin(y-1,367) +$$
$$0,004\cos(2y-1,73) - 0,003\sin(2y-2,218) - 0,399x + F_3(y-x),$$

$$\sigma_2(x,y) = 0,005\cos(2y-1,73) - 0,004\sin(2y-2,22) +$$
$$+0,38\cos(y-2,1) - 0,02\cos(y+0,37) + 0,001x + F_2(y-1,41x).$$

Неизвестные функции F_2, F_3 находим после вычисления значений напряжений в волокнах на границе пластины из (3.12). Строим искомые решения с помощью процедуры, составленной в интегрированной системе символьной (аналитической) математики Maple [35]. Полученное решение для напряжений в волокнах σ_1, σ_2 представлено на рис. 3.3; 3.4.

Обезразмеренные напряжения в волокнах σ_1, σ_2 удовлетворяют условию прочности $|\sigma_m| < \sigma_m^{\pm}$ в соответствии с табл. 3.1. Следует подчеркнуть, что систему для определения напряжений в волокнах σ_1, σ_2 получили после вычисления ε_{12}, ω_1, ω_2 в аналитическом виде. Построение аналитических решений для распадающихся систем позволяет поэтапно использовать их в дальнейших вычислениях в качестве известных коэффициентов разрешающих систем.

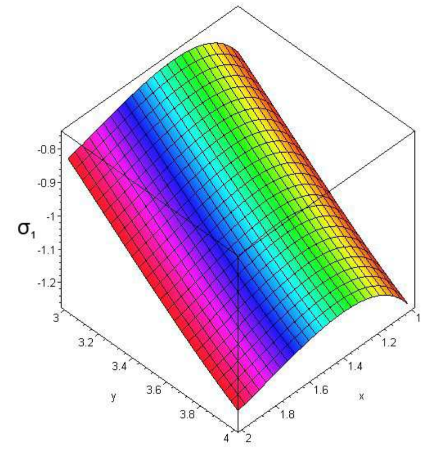


Рис. 3.3 Напряжение в волокне σ_1 для двух семейств нерастяжимых волокон

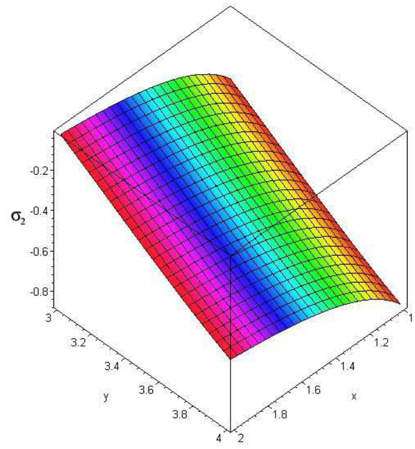


Рис. 3.4 Напряжение в волокне σ_2 для двух семейств нерастяжимых волокон

3.3 Первое семейство равнодеформируемо, второе – нерастяжимо

Пусть первое семейство волокон равнодеформируемо ($\varepsilon_1 = const$, $\sigma_1 = E_1\varepsilon_1$), второе семейство нерастяжимо ($\varepsilon_2 = 0$). Напряжение σ_2 во втором волокне – неизвестная функция. Построим разрешающую систему. Продифференцируем соотношения для осредненных напряжений (3.4) и подставим в уравнения равновесия (3.5):

$$\sigma_{12,1} = \tfrac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + \sigma_1(\omega_1 l_{11} l_{12})_{,1} + (\sigma_2\omega_2 l_{21} l_{22})_{,1},$$
$$\sigma_{12,2} = \tfrac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} + \sigma_1(\omega_1 l_{11} l_{12})_{,2} + (\sigma_2\omega_2 l_{21} l_{22})_{,2},$$
$$\sigma_{11,1} = \tfrac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T))_{,1} + \sigma_1(\omega_1 l_{11} l_{11}))_{,1} + (\sigma_2\omega_1 l_{21} l_{21})_{,1},$$
$$\sigma_{22,2} = \tfrac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T))_{,2} + \sigma_1(\omega_1 l_{12} l_{12})_{,2} + (\sigma_2\omega_2 l_{22} l_{22})_{,2}.$$

При вычислениях производных в комбинациях слагаемых встречаются выражения вида $(\omega_m l_{m1})_{,1} + (\omega_m l_{m2})_{,2}$, которые в силу (3.1) равны нулю. Поэтому после ввода обозначений

$$\partial_{sm}\varphi_m = \cos\varphi_m\varphi_{m,1} + \sin\varphi_m\varphi_{m,2},$$

уравнения равновесия (3.5) запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\sigma_{2,1}(\omega_2 \cos^2\varphi_2) + \sigma_{2,2}(\omega_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2) + \\
+\sigma_1\omega_1(-\sin\varphi_1)\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2(-\sin\varphi_2)\partial_{s2}\varphi_2 + \\
+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T))_{,1} + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} = -b_1, \\
\sigma_{2,1}(\omega_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2) + \sigma_{2,2}(\omega_2 \sin\varphi_2) + \\
\sigma_2\omega_2 \cos\varphi_2 \partial_{s2}\varphi_2 + \sigma_1\omega_1 \cos\varphi_1 \partial_{s1}\varphi_1 + \\
+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T))_{,2} + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} = -b_2.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Систему (3.18) запишем в матричном виде

$$
A^*\mathbf{u}_{,1} + B^*\mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f}. \tag{3.19}
$$

В (3.19) использованы матрицы

$$
A^* = \begin{pmatrix} \omega_2 \cos^2\varphi_2 & -\sigma_1\omega_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - \sigma_2\omega_2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \\ \omega_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & \sigma_2\omega_2 \cos^2\varphi_2 + \sigma_1\omega_1 \cos^2\varphi_1 \end{pmatrix},
$$

$$
B^* = \begin{pmatrix} \omega_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & -\sigma_1\omega_1 \sin^2\varphi_1 - \sigma_2\omega_2 \sin^2\varphi_2 \\ \omega_2 \sin^2\varphi_2 & \sigma_2\omega_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 + \sigma_1\omega_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{u}^T = (\sigma_2, \alpha).
$$

Далее находим собственные числа матрицы $(A^*)^{-1}B^*$. Решение характеристического уравнения $det((A^*)^{-1}B^* - \lambda I^*) = 0$ приводит к результату

$$
\lambda_1 = \operatorname{tg}\alpha.
$$

Обозначив

$$
\begin{gathered}
\Delta = \sigma_2\omega_2(\cos^2\alpha \cos(\alpha+\alpha^0) + \sin\alpha \sin(\alpha+\alpha^0)\cos\alpha) + \\
+\sigma_1\omega_1(\cos^3(\alpha+\alpha^0) + \cos(\alpha+\alpha^0)\sin^2(\alpha+\alpha^0)),
\end{gathered}
$$

найдем второе собственное число

$$
\lambda_2 = \frac{\sigma_1\omega_1(\sin\alpha \sin^2(\alpha+\alpha^0) + \cos\alpha \sin(\alpha+\alpha^0)\cos(\alpha+\alpha^0))}{\Delta} + \\
+\frac{\sigma_2\omega_2(\sin^3\alpha + \cos\alpha \sin^2\alpha)}{\Delta}.
$$

Соотношения для λ_1, λ_2 показывают, что одна из характеристик совпадает с направлением армирования волокнами, а другая отклоняется от этого направления. Вторая характеристика определяется не только углом армирования, как первая, но и интенсивностями ω_1, ω_2 и значениями напряжений σ_1, σ_2 в волокнах.

Совокупность уравнений (3.1), (3.8), (3.18) является разрешающей системой относительно неизвестных функций ε_{12}, ω_1, ω_2, φ_1, φ_2, σ_2. Когда углы армирования удовлетворяют условию (3.9), тогда названная система будет замкнутой системой пяти уравнений относительно пяти неизвестных ε_{12}, ω_1, ω_2, α, σ_2. Полученная квазилинейная система уже не будет распадающейся, все уравнения связаны между собой.

3.4 Второе семейство равнодеформируемо, первое – нерастяжимо

Пусть теперь второе семейство волокон равнодеформируемо ($\sigma_2 = E_2\varepsilon_2 = const$), а первое нерастяжимо ($\varepsilon_1 = 0$). Напряжение σ_1 в первом волокне – неизвестная функция. Вычисление интенсивностей и деформаций выполняется аналогично способу, описанному выше. Выражения производных для осредненных напряжений

$$\sigma_{12,1} = \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + (\sigma_1\omega_1 l_{11} l_{12})_{,1} + \sigma_2(\omega_2 l_{21} l_{22})_{,1},$$

$$\sigma_{12,2} = \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} + (\sigma_1\omega_1 l_{11} l_{12})_{,2} + \sigma_2(\omega_2 l_{21} l_{22})_{,2},$$

$$\sigma_{11,1} = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T))_{,1} + (\sigma_1\omega_1 l_{11} l_{11})_{,1} + \sigma_2(\omega_1 l_{21} l_{21})_{,1},$$

$$\sigma_{22,2} = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T))_{,2} + (\sigma_1\omega_1 l_{12} l_{12})_{,2} + \sigma_2(\omega_2 l_{22} l_{22})_{,2}.$$

подставляются в уравнения равновесия (3.5). Полученная система, с учетом соотношений (3.1), примет вид

$$
\begin{gathered}
\sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2\varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1) + \\
+\sigma_2\omega_2(-\sin\varphi_2)\partial_{s2}\varphi_2 + \sigma_1\omega_1(-\sin\varphi_1)\partial_{s1}\varphi_1 + \\
+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1} + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} = -b_1, \\
\sigma_{1,1}(\omega_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2\varphi_1) + \\
+\sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2 + \\
+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2} + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} = -b_2.
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

Совокупность уравнений (3.1), (3.8), (3.20) является разрешающей системой относительно неизвестных функций ε_{12}, ω_1, ω_2, φ_1, φ_2, σ_2. Когда углы армирования удовлетворяют условию (3.9), тогда названная система будет замкнутой системой пяти уравнений относительно пяти неизвестных ε_{12}, ω_1, ω_2, α, σ_1. Уравнения (3.20) записываются в матричном виде

$$A^*\mathbf{u}_{,1} + B^*\mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f}. \tag{3.21}$$

В (3.21) использованы матрицы

$$
A^* = \begin{pmatrix} \omega_1\cos^2\varphi_1 & -\sigma_2\omega_2\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \sigma_1\omega_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \\ \omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 & \sigma_1\omega_1\cos^2\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos^2\varphi_2 \end{pmatrix},
$$

$$
B^* = \begin{pmatrix} \omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 & -\sigma_2\omega_2\sin^2\varphi_2 - \sigma_1\omega_1\sin^2\varphi_1 \\ \omega_1\sin^2\varphi_1 & \sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2 \end{pmatrix},
$$

$$\mathbf{u}^T = (\sigma_1, \alpha).$$

Найдем собственные числа λ матрицы $(A^*)^{-1}B^*$. Решение характеристического уравнения $det((A^*)^{-1}B^* - \lambda I^*) = 0$ приводит к результату

$$\lambda_1 = \mathrm{tg}(\alpha + \alpha^0),$$

$$\Delta = \sigma_2\omega_2(\cos^2\alpha\cos(\alpha+\alpha^0) + \sin\alpha\sin(\alpha+\alpha^0)\cos\alpha) +$$
$$+\sigma_1\omega_1(\cos^3(\alpha+\alpha^0) + \cos(\alpha+\alpha^0)\sin^2(\alpha+\alpha^0)),$$
$$\lambda_2 = \frac{\sigma_1\omega_1(\sin^3(\alpha+\alpha^0) + \sin(\alpha+\alpha^0)\cos^2(\alpha+\alpha^0))}{\Delta} +$$
$$+\frac{\sigma_2\omega_2(\sin^2\alpha\sin(\alpha+\alpha^0) + \sin\alpha\cos\alpha\cos(\alpha+\alpha^0))}{\Delta}.$$

Из соотношений для $\lambda_1,\ \lambda_2$ следует, что одна из характеристик совпадает с направлением армирования второго волокна, а другая отклоняется от этого направления. Величина этого отклонения зависит от интенсивностей армирования и напряжений в волокнах. Совокупность уравнений (3.1), (3.8), (3.20) будет разрешающей системой относительно неизвестных функций $\varepsilon_{12},\ \omega_1,\ \omega_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \sigma_1$. Когда углы армирования удовлетворяют условию (3.9), тогда названная система является замкнутой системой пяти уравнений относительно пяти неизвестных $\varepsilon_{12},\ \omega_1,\ \omega_2,\ \alpha,\ \sigma_1$. При сравнении полученных разрешающих систем в разделах 3.3 и 3.4 видим, что они являются системами гиперболического типа. Для этих систем поставлены задачи с разными характеристиками, и, следовательно, они имеют разные решения.

3.5 Введение условий равнонапряженности

Для случая армирования двумя семействами нерастяжимых волокон рассмотрим две задачи, в которых вводятся дополнительные условия равнонапряженности.

Задача 1. Пусть равнонапряженно первое из рассматриваемых семейств волокон: $\sigma_1 = const,\ \varepsilon_m = 0,\ \varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$. Разрешающая система формулируется относительно неизвестных функций σ_2, ω_1, ω_2, ε_{12}, а пятой неизвестной вводится угол армирования α. Формулировка разрешающей системы аналогична (3.1), (3.8), (3.18) относительно названных неизвестных функций с той разницей, что в правой части (3.2) $\varepsilon_m = 0$ из-за условия нерастяжимости волокон.

Задача 2. Пусть равнонапряженно второе волокно $\sigma_2 = const$, $\varepsilon_m = 0$, $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$. Разрешающая система в данном случае формулируется относительно неизвестных функций $\sigma_2, \omega_1, \omega_2, \varepsilon_{12}, \alpha$. Ее формулировка совпадает с системой (3.1,(3.8),(3.20), которая была получена при условии, что правая часть в (3.2) вычисляется при условии нерастяжимости волокон $\varepsilon_m = 0$. С точки зрения математической постановки задача 1 и 2 о равнонапряженности нерастяжимых волокон совпадают соответственно с задачами, рассмотренными в разделах 3.3 и 3.4 настоящей главы.

3.6 Два равнодеформируемых семейства волокон

Пусть армирование выполнено двумя равнодеформируемыми семействами волокон, т.е. $\varepsilon_1 = C_1$ и $\varepsilon_2 = C_2$, C_1, C_2- константы. Чтобы получить разрешающую систему уравнений аналогично предыдущим пунктам, компоненты деформаций ε_{11}, ε_{22} выражаем через ε_{12} и уравнение совместности деформаций приводим к виду (3.8). Интенсивности ω_1, ω_2 удовлетворяют уравнениям (3.2). Если углы армирования φ_1, φ_2 – неизвестные функции, то уравнения равновесия (3.5) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\sigma_1\omega_1(-\sin\varphi_1)\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2(-\sin\varphi_2)\partial_{s2}\varphi_2 + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} + \\ +\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1} = b_1, \\ \sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2 + \tfrac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + \\ +\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2} = b_2.\end{gathered} \tag{3.22}$$

В силу однозначной связи между напряжениями и деформациями в (3.22) выполнено условие равнонапряженности $\sigma_1 = C_1$, $\sigma_2 = C_2$. Система дифференциальных уравнений (3.1), (3.8), (3.22) содержит пять уравнений относительно пяти неизвестных функций ε_{12}, ω_1, ω_2, φ_1, φ_2. Если оба или один из углов армирования φ_1, φ_2 заданы как известные функции, то сформулированная система будет переопределенной и необходимо накладывать ограничения, например, на функции граничных условий, входящих в решение задачи, чтобы выполнялись уравнения равновесия. Заметим, что подробный анализ свойств решений в случае двух равнодеформируемых семейств волокон для постоянных углов армирования рассмотрен в [83, 84, 85, 86, 87, 88, 89].

3.7 Пример построения аналитического решения

В разделе 3.1 настоящей главы при решении плоской задачи для двух семейств армирующих волокон установлена разрешающая система уравнений. Уравнение (3.8) относительно компоненты тензора деформаций ε_{12} выделяется из системы и может быть решено независимо. Оно представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$A\varepsilon_{12,11} + B\varepsilon_{12,22} - 2\varepsilon_{12,12} + C\varepsilon_{12,2} + D\varepsilon_{12,1} + E\varepsilon_{12} + F = 0. \tag{3.23}$$

Коэффициенты (3.23) выразим через тангенсы углов армирования $\varphi_1,\ \varphi_2$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
A = \frac{-2}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}, B = \frac{-2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}, \\
C = 2B_{,2}, D = 2A_{,1}, E = A_{,11} + B_{,22}, F = -b_{4,22} + b_{3,11}, \\
b_3 = \frac{\varepsilon_1^0(1 + \operatorname{tg}\varphi_1{}^2) - \varepsilon_2^0(1 + \operatorname{tg}\varphi_2{}^2)}{\operatorname{tg}\varphi_1{}^2 - \operatorname{tg}\varphi_2{}^2}, \\
b_4 = \frac{\varepsilon_1^0 \operatorname{tg}\varphi_2{}^2(1 + \operatorname{tg}\varphi_1{}^2) - \varepsilon_2^0 \operatorname{tg}\varphi_1{}^2(1 + \operatorname{tg}\varphi_2{}^2)}{\operatorname{tg}\varphi_1{}^2 - \operatorname{tg}\varphi_2{}^2},
\end{gathered} \tag{3.24}$$

если $\varepsilon^* = \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0$, то $b_3 = \varepsilon^*,\ \ b_4 = -\varepsilon^*$. Коэффициент F уравнения (3.23) зависит от углов армирования и условий равнонапряженности $\varepsilon_1^0 = C_1, \varepsilon_2^0 = C_2$, но если волокна выполнены из одинаковых материалов, то $F = 0$. В общем случае (если условие равнонапряженности $\varepsilon^* = \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0$ не есть постоянная величина), то $F = 0$, если выполняется условие $\varepsilon^*{}_{,11} + \varepsilon^*{}_{,22} = 0$, т.е. функция ε^* должна быть гармонической.

Решение линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (3.23) представляет собой достаточно трудоемкую задачу в силу полного набора коэффициентов этого уравнения, зависящих от условий равнодеформируемости и механических характеристик материалов. Поэтому предварительно осуществляется его приведение к каноническому виду по классической схеме.

Выполним приведение уравнения (3.23) к каноническому виду [109]. Записав главные члены уравнения в стандартных обозначениях, принятых в литературе,

$$a_{11}\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial y^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x\partial y} \tag{3.25}$$

построим соответствующее характеристическое уравнение

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0. \tag{3.26}$$

Коэффициенты уравнения (3.26) принимают следующие значения $a_{11}=A,\ a_{12}=-1,\ a_{22}=B$. Выпишем уравнения для характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{3.27}$$

После алгебраических преобразований получим характеристики

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi_1,\ \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi_2. \tag{3.28}$$

Найдем общие интегралы $\phi(x,y)=C,\ \psi(x,y)=C$ уравнения (3.26). Затем с помощью преобразования переменных $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, допускающего обратное преобразование, получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Новые переменные ξ,η выбираются так, чтобы в этих переменных уравнение имело наиболее простую форму. Чтобы было возможно введение новых переменных через функции ϕ,ψ, надо убедиться в независимости этих функций. Достаточным условием этого является отличие от нуля функционального определителя, т.е.

$$\begin{vmatrix}\phi_x & \psi_x\\ \phi_y & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

Согласно процедуре построения канонических уравнений [109] выполним пересчет производных по формулам

$$\varepsilon_{12,11}=\varepsilon_{12,\xi\xi}(\xi_{,1})^2+2\varepsilon_{12,\xi\eta}\xi_{,1}\eta_{,1}+\varepsilon_{12,\eta\eta}(\eta_{,1})^2+\varepsilon_{12,\xi}\xi_{,11}+\varepsilon_{12,\eta}\eta_{,11};$$

$$\varepsilon_{12,12}=\varepsilon_{12,\xi\xi}\xi_{,1}\xi_{,2}+\varepsilon_{12,\xi\eta}(\xi_{,1}\eta_{,2}+\xi_{,2}\eta_{,1})+\varepsilon_{12,\eta\eta}\eta_{,1}\eta_{,2}+$$

$$+\varepsilon_{12,\xi}\xi_{,12}+\varepsilon_{12,\eta}\eta_{,12};$$

$$\varepsilon_{12,22}=\varepsilon_{12,\xi\xi}(\xi_{,2})^2+2\varepsilon_{12,\xi\eta}\xi_{,2}\eta_{,2}+\varepsilon_{12,\eta\eta}(\eta_{,2})^2+\varepsilon_{12,\xi}\xi_{,22}+\varepsilon_{12,\eta}\eta_{,22};$$

$$\varepsilon_{12,1}=\varepsilon_{12,\xi}\xi_{,1}+\varepsilon_{12,\eta}\eta_{,1};\varepsilon_{12,2}=\varepsilon_{12,\xi}\xi_{,2}+\varepsilon_{12,\eta}\eta_{,2}.$$

Полагая $\xi=\phi(x,y)$, где $\phi(x,y)=C$ есть общий интеграл уравнения (3.26), обращаем в нуль коэффициент при $\varepsilon_{12,\xi\xi}$. Если $\psi(x,y)=C$ является другим общим интегралом уравнения (3.26), то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, обратим в нуль также и коэффициент при $\varepsilon_{12,\eta\eta}$. В результате получим уравнение вида

$$\varepsilon_{12,\xi\eta} = \Psi(\xi, \eta, \varepsilon_{12,\xi}, \varepsilon_{12,\eta}).$$

Это – каноническая форма уравнений гиперболического типа [109]. Создана программа в среде Maple [35], позволяющая преодолеть технические трудности при нахождении новых переменных. В программе для произвольных фиксированных структур армирования выполняется пересчет производных и вычисляются коэффициенты уравнения (3.23) в новых переменных. Полученные уравнения в каноническом виде для некоторых случаев армирования можно решить аналитически с помощью символьных преобразований, для некоторых – вид уравнения удобен для построения численной схемы.

Рассмотрим два семейства равнодеформируемых волокон, выполненных из одинаковых материалов. Для расчетов используем построенную разрешающую систему (3.1),(3.8),(3.22).

Пример 1. Пусть армирование криволинейными волокнами выполнено по семействам траекторий "эллипсы+гиперболы" (рис. 3.5). Тогда углы армиро-

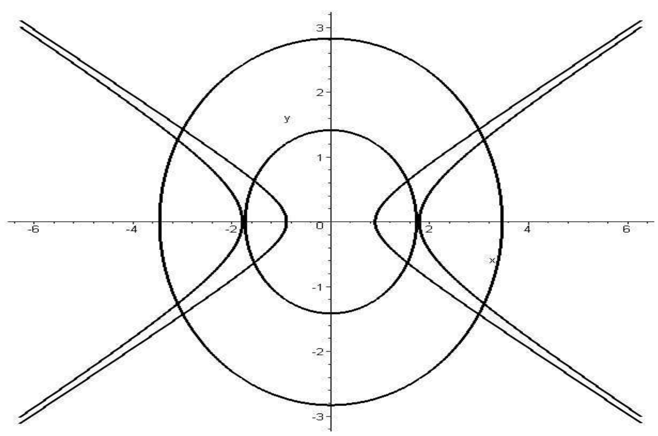


Рис. 3.5

вания, являющиеся функциями декартовых координат, задаются зависимостями $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{-y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{x}{y}$. Общие интегралы (3.26) дают замену переменных $\xi = yx,\ \eta = y^2 - x^2$.

Переменные коэффициенты в уравнении (3.23) относительно компоненты ε_{12} тензора деформаций при заданных выше углах армирования выражаются зависимостями

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2xy}{x^2-y^2},\ B=-A,\ C=2(\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}),\\ D &= -2(\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}),\ E=\frac{24xy}{(x^2-y^2)^2}+\frac{16xy^3}{(x^2-y^2)^3}),\ F=0. \end{aligned}$$

Значение $\delta=-\frac{4x^2y^2}{x^2-y^2)^2}-1<0$ подтверждает, что (3.8) при рассматриваемом способе армирования является уравнением гиперболического типа.

После замены переменных и пересчета производных получим каноническое уравнение относительно $\varepsilon_{12}(\xi,\eta)$ в виде

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{2\xi}{4\xi^2+\eta^2}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta}-\frac{(16\xi^2+3\eta^2)}{4\eta(4\xi^{+}\eta^2)}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}-\frac{2\xi}{\eta(4\xi^2+\eta^2)}\varepsilon_{12}=0. \qquad (3.29)$$

Пример 2. Пусть армирование криволинейными волокнами выполнено по семействам траекторий, которые назовем " прямые + окружности" (рис. 3.6). Углы армирования в этом случае определяются зависимостями $\operatorname{tg}\varphi_1=$

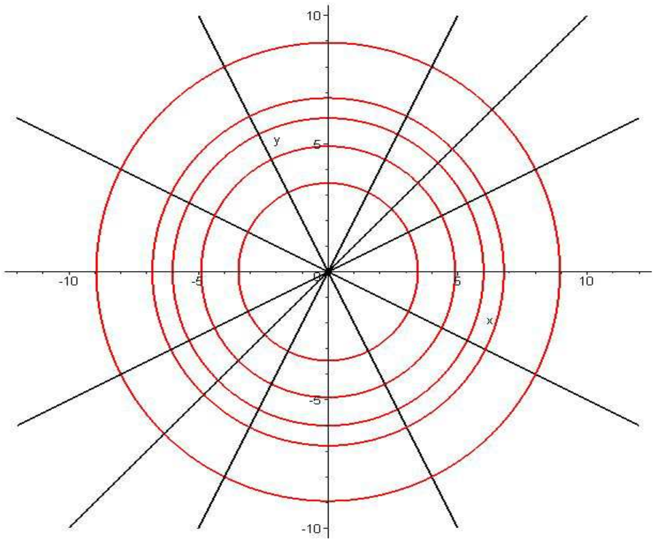


Рис. 3.6

$\frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-x}{y}$. Общие интегралы (3.26) дают замену переменных $\xi_1=\frac{y}{x}$, $\eta_1=y^2+x^2$. Для рассматриваемой структуры армирования уравнение (3.23) в декартовых координатах для компоненты тензора деформаций ε_{12} имеет вид

$$\frac{2xy}{x^2-y^2}\varepsilon_{12,11}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\varepsilon_{12,22}-2\varepsilon_{12,12}+$$
$$+2(\frac{-2x}{x^2-y^2}-\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2})\varepsilon_{12,2}+2(\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{4x^2y}{x^2-y^2})\varepsilon_{12,1}+$$
$$+(\frac{-24xy}{(x^2-y^2)^2}-\frac{16xy^3}{(x^2-y^2)^3}+\frac{16x^3y}{(x^2-y^2)^3)}\varepsilon_{12}=0.$$

После процедуры приведения к каноническому виду получим следующее уравнение в новых координатах ξ_1,η_1

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi_1\partial\eta_1}-\frac{4\xi_1}{(\xi_1^2-1)(\xi_1^2+1)}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta_1}+\frac{\xi_1^2+3}{4\eta_1(1+\xi_1^2)}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_1}-\frac{2\xi_1}{\eta_1(\xi_1^2-1)(\xi_1^2-1)}\varepsilon_{12}=0. \tag{3.30}$$

Далее находим формулы решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.29), (3.30), приведенных к каноническому виду. Средством, позволяющим выполнить поиск точного решения, является группа симметрий, преобразующая решения этого дифференциального уравнения в другие ее решения. Чтобы построить определяющие уравнения относительно изовекторов, используются внешние формы Картана, при этом множество уравнений преобразуется в эквивалентную систему дифференциальных форм [90].

Затем производится вычисление и проверка замыкания данного множества дифференциальных форм и аннулирование его в определенном списке независимых координат. Отмеченные узлы позволяют исключить части дифференциальных форм, принадлежащие идеалу.

При исполнении этого алгоритма определяются внешние производные и смешанные произведения. К сожалению, полная группа симметрий может не помочь в поиске общего решения уравнений в частных производных. Однако можно использовать группы симметрий, чтобы найти частные типы решений, которые сами являются инвариантными относительно некоторой подгруппы полной группы симметрий. Уравнение в частных производных сводится к системе уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial r} &- w_1(r,s) = 0,\\
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial s} &- w_2(r,s) = 0,\\
\frac{\partial w_1(r,s)}{\partial s} + \frac{s w_1(r,s)}{2(r+s^2)} &- \frac{r w_2(r,s)}{r+s^2} - \frac{2r w_2(r,s)}{r+s^2} - \frac{2r}{s(r+s^2)} = 0,\\
\frac{\partial w_1}{\partial s} &+ \frac{\partial w_2}{\partial r} = 0.
\end{aligned}
$$

В результате работы описанного выше алгоритма находим частное решение для (3.29) *примера 1*

$$
\varepsilon_{12}(r,s) = \frac{\sqrt{2}(-(C_1 r^2 + 2C_2)^3)^{\frac{1}{4}} C_2 s}{2(C_1 s^2 - 8C_2)^{1/8}(C_1 r^2 + 2C_2)^{1/4}}, \tag{3.31}
$$

где C_1, C_2 – произвольные константы, определяемые из граничных условий в деформациях (1.48). Переменные r, s связаны с декартовыми координатами x, y формулами $r = yx,\ s = y^2 - x^2$.

Частное решение для (3.30) *примера 2* имеет вид

$$
\varepsilon_{12}(r,s) = \frac{9C_1\sqrt{s}(r^2-1) + 8C_2 r^2 + 24C_2}{4(r^3+3)\sqrt{s}}.
$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные константы, определяемые из граничных условий в деформациях (1.48). Переменные r, s связаны с декартовыми координатами x, y зависимостями $r = \dfrac{y}{x},\ s = y^2 + x^2$.

Через найденное решение $\varepsilon_{12}(r,s)$ вычисляются остальные компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}(r,s)$ $\varepsilon_{22}(r,s)$ в соответствии с алгебраическими соотношениями (3.7). Формулы (3.4) позволяют найти соотношения для осредненных напряжений в новой системе координат (r,s), предварительно выражаются интенсивности и углы армирования через (r,s).

В случае траекторий армирования "эллипсы+гиперболы" уравнения относительно интенсивностей армирования принимают вид

$$
\omega_{1,1} + \frac{x}{y}\omega_{1,2} + \omega_1\left(\frac{-2x}{x^2+y^2}\right) = 0, \omega_{2,1} - \frac{y}{x}\omega_{2,2} + \omega_2\left(\frac{-x^2+y^2}{x(x^2+y^2)}\right) = 0.
$$

Для интенсивностей ω_1, ω_1 находим общие решения

$$
\omega_1 = F_1(-x^2+y^2)\sqrt{y^2+x^2},\ \ \omega_2 = F_2(xy)\sqrt{y^2+x^2},
$$

где F_1, F_2- произвольные функции. Выразим решения для интенсивностей $\omega_1,\ \omega_2$ в новых переменных r, s

$$\omega_1 = F_1(s)\sqrt{s^2+4r^2},\ \ \omega_2 = F_2(r)\sqrt{s^2+4r^2}.$$

Для осредненных напряжений получим соотношения

$$\sigma_{11}(r,s) = \frac{-54.19\sqrt{2}(-(c_1r^2+2c_2)^3)^{\frac{1}{4}}c_1^2r}{(-8c_2+s^2c_1)^{\frac{1}{8}}(c_1r^2+2c_2)} + 205,747 +$$

$$+400F_1(s)\frac{(\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2+4r^2}}{2})}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{400F_2(r)r^2}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}(\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2+4r^2}}{2})},$$

$$\sigma_{12}(r,s) = \frac{27,09\sqrt{2}(-(c_1r^2+2c_2)^3)^{\frac{1}{4}}c_1^2s}{(-8c_2+s^2c_1)^{\frac{1}{8}}(c_1r^2+2c_2)} + \frac{400F_1(s)r}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}} - \frac{400F_2(r)r}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}},$$

$$\sigma_{22}(r,s) = \frac{54.19\sqrt{2}(-(c_1r^2+2c_2)^3)^{\frac{1}{4}}c_1^2r}{(-8c_2+s^2c_1)^{\frac{1}{8}}(c_1r^2+2c_2)} + 205,747 +$$

$$+\frac{400F_1(s)r^2}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}(\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2+4r^2}}{2})} + \frac{400F_2(r)(\dfrac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2+4r^2}}{2})}{(s^2+4r^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Расчеты приведены для случая, когда материалом связующего является алюминий, армирование выполнено из стальных волокон. Использованы данные для механических характеристик материалов, опубликованные в [41].

Осредненные напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия (3.5), в которых предварительно выполняется пересчет частных производных по декартовым координатам x, y от функций $\sigma_{11}(r,s)$, $\sigma_{12}(r,s)$, $\sigma_{22}(r,s)$ через частные производные по r, s. Полученные таким образом два уравнения рассматриваются совместно как система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно неизвестных функций $F_1(s), F_2(r)$. Решение этой системы (аналитическое или численное) приводит к формулировке ограничений для интенсивностей армирования на заданном контуре с целью обеспечения физичности полученных результатов об армировании двумя семействами равнодеформируемых волокон, уложенных в заданных направлениях.

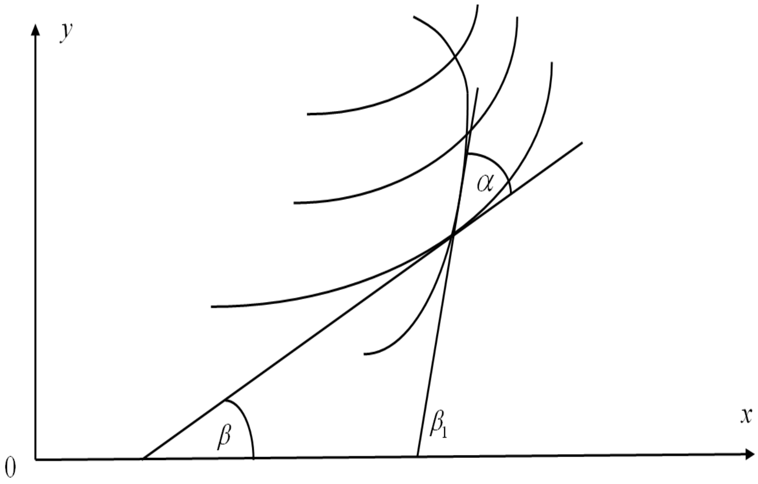


Рис. 3.7

3.8 Построение изогональных траекторий

3.8.1 Определение изогональных траекторий

Изогональная траектория – это плоская линия, пересекающая все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства под одним и тем же углом α. Углы β_1 и β наклона траектории и кривой к оси OX связаны соотношением $\beta_1 = \beta \pm \alpha$. В дальнейшем определяем углы наклона в соответствии с рис. 3.7 из [106]. Кривые исходного семейства могут быть заданы как алгебраическим уравнением, содержащим один параметр, так и с помощью обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Поэтому и изогональные траектории можно построить по-разному, это зависит от способа задания данных семейств кривых. Пусть x, y – координаты точек некоторого семейства. Обозначим текущие координаты траектории через x_1, y_1. Рассмотрим известные в литературе способы построения изогональных траекторий. В [42] указано, что семейство кривых, пересекающих все кривые однопараметрического семейства $F(x, y, a) = 0$ (a – параметр, F – непрерывная функция) под заданным углом α, определяется дифференциальным уравнением

$$(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha)dx + (\frac{\partial F}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha)dy = 0. \qquad (3.32)$$

При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ уравнение определяет ортогональные траектории, т.е. плоские линии, образующие в каждой своей точке прямой угол с проходящей через эту же точку кривой семейства.

Если $F(x,y,y') = 0$ – дифференциальное уравнение заданного семейства кривых, то изогональная траектория, пересекающая кривые этого семейства под углом α, где $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$, удовлетворяет одному из двух уравнений [106]

$$F(x_1, y_1, \frac{y_1' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y_1' \operatorname{tg}\alpha}) = 0, F(x_1, y_1, \frac{y_1' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - y_1' \operatorname{tg}\alpha}) = 0. \tag{3.33}$$

Пусть в уравнении (3.33) $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha \to \infty$. Переходя в (3.33) к пределу в силу непрерывности F, получим уравнение для определения семейства ортогональных траекторий

$$F(x_1, y_1, -\frac{1}{y_1'}) = 0.$$

Если однопараметрическое семейство плоских кривых задано в виде уравнения

$$F(x, y, a) = 0, \tag{3.34}$$

(a – параметр), то изогональные траектории находятся из уравнения

$$\frac{\dfrac{\partial F(x_1,y_1,a)}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx_1} + \dfrac{\partial F(x_1,y_1,a)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F(x_1,y_1,a)}{\partial y_1} - \dfrac{\partial F(x_1,y_1,a)}{\partial x_1}\dfrac{dy_1}{dx_1}} = k, \tag{3.35}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ – известное значение, α– фиксированный угол, под которым изогональная траектория пересекает все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства. Исключая a из двух последних уравнений, получим соотношение, связывающее координаты x_1, y_1 точки траектории и угловой коэффициент касательной k, т.е. дифференциальное уравнение изогональных траекторий семейства (3.34). Общий интеграл полученного уравнения дает семейство от одного параметра изогональных траекторий [106].

3.8.2 Построение изогональных траекторий к данным координатным линиям

1. Рассмотрим **биполярную** систему координат (ξ, η). В биполярной системе координат координатные линии $\xi = \xi_0 = Const$ представляют собой эксцентрические окружности с центрами на оси OX

$$(x - a\,\mathrm{cth}\,\xi_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(\mathrm{sh}\,\xi_0)^2}. \tag{3.36}$$

Координатные линии $\eta = \eta_0 = Const$ – дуги окружностей с центрами на оси OY и проходящие через две точки $x = \pm a$ (полюсы)

$$(x)^2 + (y + a\,\mathrm{ctg}\,\eta_0)^2 = \frac{a^2}{(\sin\eta_0)^2}. \tag{3.37}$$

После введения соответствующей каждому из уравнений (3.36), (3.37) линейной замены координат приведем их к уравнению однопараметрического семейства окружностей вида

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

где b – параметр семейства, переобозначения координат не проводим. Для данного уравнения построим семейство изогональных траекторий, следуя (3.35) [106]. В текущих точках траектории x_1, y_1 дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\dfrac{dy_1}{dx_1} + \dfrac{x_1}{y_1}}{1 - \dfrac{x_1}{y_1}\dfrac{dy_1}{dx_1}} = k. \tag{3.38}$$

После преобразований уравнение запишем как однородное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{k - \dfrac{x_1}{y_1}}{1 + k\frac{x_1}{y_1}},$$

его решение имеет вид

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{k\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_1}{y_1}}, \tag{3.39}$$

где C – произвольная константа. Каждому семейству окружностей (3.36), (3.37) соответствует свое семейство изогональных траекторий в виде семейства спиралей (3.39).

2. Рассмотрим **эллиптическую** систему координат. В ней координатными линиями являются софокусные ξ-эллипсы и η-гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{y^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2\cos^2\eta}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\eta}=1, \tag{3.40}$$

где $2a$ – фокусное расстояние. Связь между декартовыми (x, y) и эллиптическими координатами (ξ, η) представлена формулами

$$x=a\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\ y=a\operatorname{sh}\xi\sin\eta. \tag{3.41}$$

Запишем (3.40) как однопараметрическое семейство кривых и построим, следуя (3.35), соответствующее семейство изогональных траекторий. Введем параметр $b^2=a^2\operatorname{ch}^2\xi$, тогда однопараметрическое семейство запишем в виде

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2}=1. \tag{3.42}$$

Семейство изогональных траекторий проще находить, если известно дифференциальное уравнение исходного однопараметрического семейства кривых. Чтобы получить дифференциальное уравнение заданного семейства плоских кривых, необходимо продифференцировать (3.40), затем из полученного уравнения и уравнения семейства исключить параметр b. В итоге получим дифференциальное уравнение семейства

$$xy(y')^2+y'(x^2-y^2-a^2)-xy=0. \tag{3.43}$$

При рассмотрении семейства гипербол его дифференциальное уравнение совпадает с (3.43), но при этом параметры плоских кривых удовлетворяют условию $b^2-a^2<0$ $b^2=a^2cos^2\eta$ [106]. Для семейств эллипсов и гипербол получим в соответствии с изложенным выше способом дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$\begin{gathered}x_1y_1(y_1'-k)^2+(y_1'-k)(ky_1'+1)(x_1^2-y_1^2-a^2)-\\-x_1y_1(ky_1'+1)^2=0.\end{gathered} \tag{3.44}$$

Разрешая (3.44) относительно y_1', получим два дифференциальных уравнения первого порядка. Представим его форму после ввода промежуточных обозначений. Пусть

$$S1 = -k^2 + x_1^2 - y_1^2 - a^2 + k^2 y_1^2 + a^2 k^2 - 4x_1 y_1,$$

$$S2 = a^4 - 2ax_1^2 + k^4 x_1^4 + 2k^2 x_1^4 - 2ak^4 x_1^2 + 2x_1^2 y_1^2 +$$

$$+2y_1^4 k^2 + k^4 y_1^4 + 2ak^4 y_1^2 + 4k^2 x_1^2 y_1^2 + 2k^4 x_1^2 y_1^2 +$$

$$+x_1^4 + y_1^4 + a^2 k^2 y_1^2 - a^2 k^2 x_1^2 + 2a^2 y_1^2 + 2a^4 k^2 + a^4,$$

тогда искомые уравнения запишем в виде

$$y_1' = \frac{S1 \pm \sqrt{S2}}{2(ky_1^2 + a^2 k + x_1 y_1 k^2 - x_1 y_1 - kx_1^2)},\ S2 \geq 0 \tag{3.45}$$

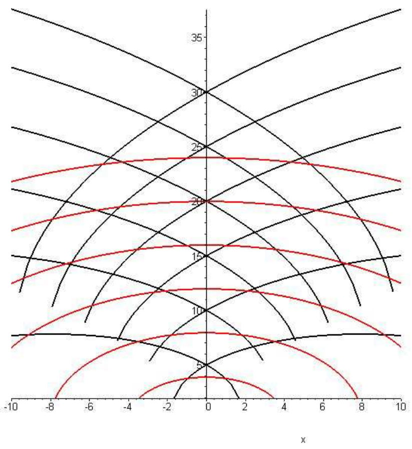


Рис. 3.8. k=1

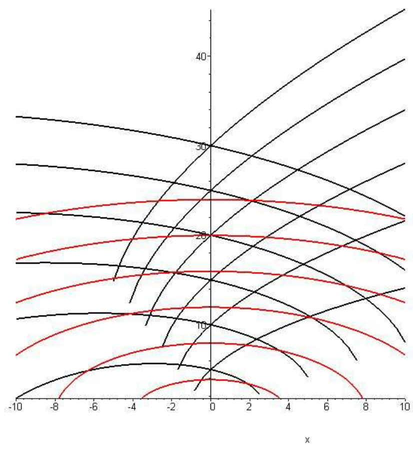


Рис. 3.9. k=2

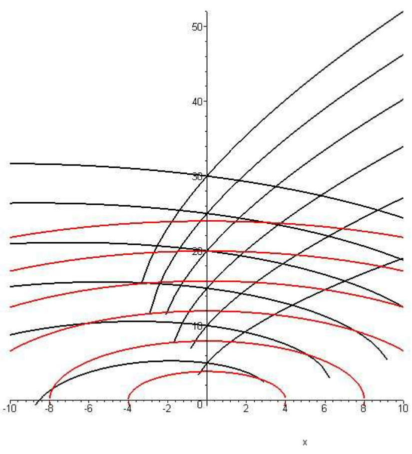


Рис. 3.10. k=3

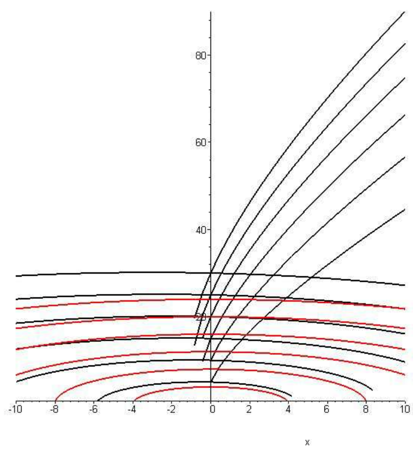


Рис. 3.11. k=10

Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам эллипсов представлены на рис. 3.8 – 3.11 для различных вариантов угла α, $k = \operatorname{tg}\alpha$. Из вида уравнения (3.45) следует, что при построении изогональных траекторий могут возникнуть зоны сингулярности для определенных значений $k = \operatorname{tg}\alpha$ и размеров плоской конструкции. При технологическом конструировании изделий всегда можно выбрать соответствующие размеры вне зоны сингулярности. Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам гипербол представлены на рис. 3.12 – 3.15. Как видим, уравне-

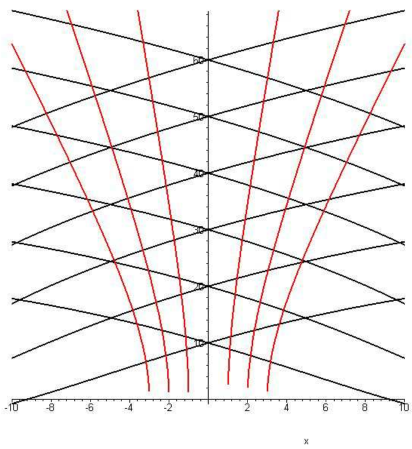


Рис. 3.12. k=1

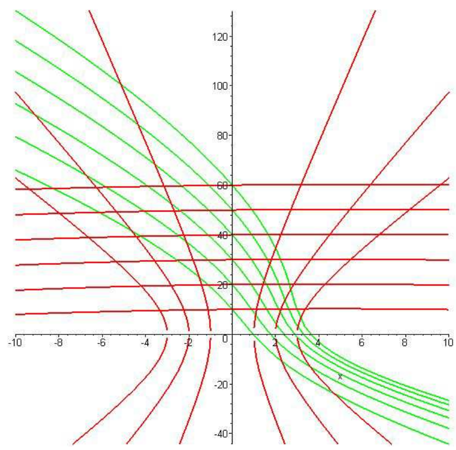


Рис. 3.13. k=0.1

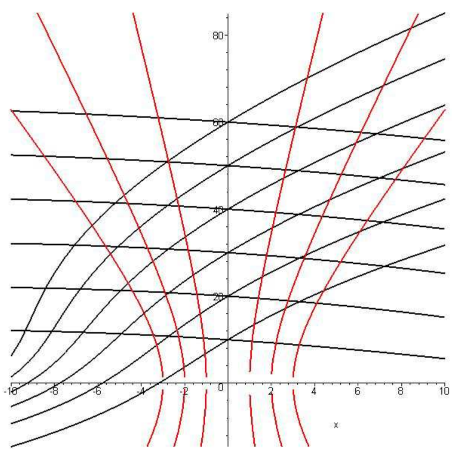


Рис. 3.14. k=3

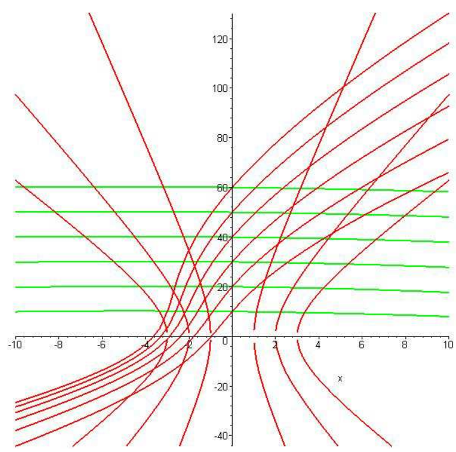


Рис. 3.15. k=10

ния изогональных траекторий содержат параметр k, при изменении значения которого имеем множество разнообразных траекторий. Располагая армирующие семейства волокон вдоль найденных траекторий, получаем разнообразную структуру армирования, при управлении которой можно перераспределять поля напряжений и деформаций внутри пластины.

3. Рассмотрим однопараметрические семейства **парабол** разных типов. Пусть однопараметрическое семейство парабол задано уравнением $x = ay^2$. Дифференциальное уравнение семейства парабол такого типа имеет вид

$$y' - \frac{y}{2x} = 0.$$

С помощью соотношений (3.33) получим уравнение изогональной траектории

$$y_1'(1 - k\frac{y_1}{2x_1}) - (k + \frac{y_1}{2x_1}) = 0. \tag{3.46}$$

Результат построения изогональных траекторий к рассматриваемым семействам парабол для $k = 3$ приведен на рис. 3.16, 3.17.

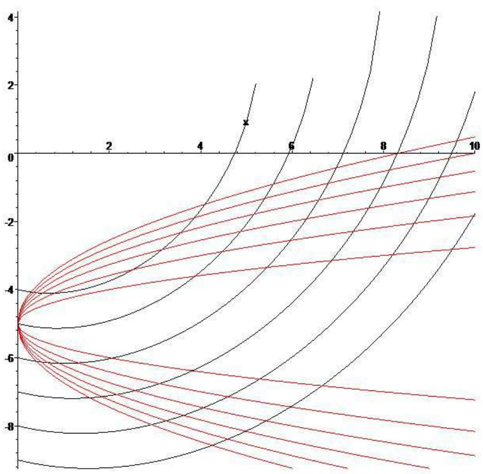


Рис. 3.16. k=3

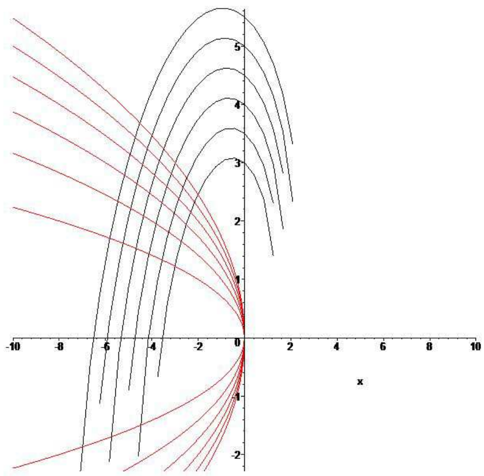


Рис. 3.17. k=3

Рассуждая аналогично, получим уравнение траекторий для однопараметрического семейства парабол вида $y = ax^2$. Дифференциальное уравнение изогональных траекторий имеет вид

$$y_1'(1 + k\frac{x_1}{2y_1}) + (\frac{x_1}{2y_1} - k) = 0. \tag{3.47}$$

Траектории семейств парабол $y = ax^2$ и им изогональные траектории при

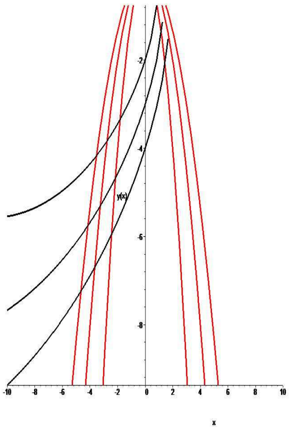


Рис. 3.18

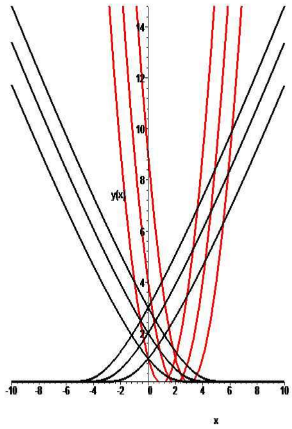


Рис. 3.19

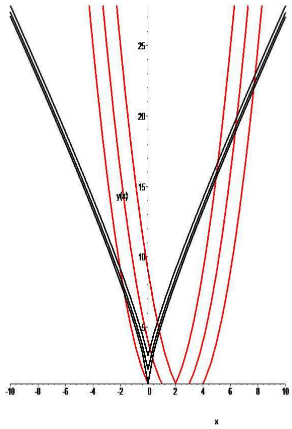


Рис. 3.20

$k = 1$ изображены на рис. 3.18.

Рассмотрим семейство софокусных парабол, уравнение однопараметрического семейства $y = (x - a)^2$, где a – параметр. Построим дифференциальное уравнение этого семейства. Для этого исключим параметр a из двух уравнений

$$y' = 2x - 2a,\ y = x^2 - 2ax + a^2, \tag{3.48}$$

получим для двух значений параметра $a_{1,2} = x \pm \sqrt{y}$ искомые дифференциальные уравнения первого порядка $y' = \mp 2\sqrt{y}$. Дифференциальные уравнения изогональных траекторий, пересекающие линии семейства софокусных парабол под данным углом α, $(k = \operatorname{tg}\alpha)$ имеют вид

$$y_1' = \frac{\mp 2\sqrt{y_1} + k}{1 \pm 2k\sqrt{y_1}}. \tag{3.49}$$

Графики для семейств софокусных парабол и им изогональных траекторий при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ изображены на рис. 3.19, 3.20.

3.9 Армирование по изогональным траекториям

Пусть дана криволинейная ортогональная система координат (ξ, η). Направим траектории армирования следующим образом: одна траектория армирования совпадает с линией криволинейной ортогональной системы координат, другая ей изогональна, т.е. пересекает ее под постоянным углом α, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Тогда один угол армирования, например, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$, второй угол армирования $\varphi_2 = arctgk$. Другой вариант армирования – $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = arctgk$.

Запишем условие постоянства сечений волокон m-го семейства в соответствии с (1.10):

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_m \cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_m \sin\varphi_m) = 0. \tag{3.50}$$

В (3.50) $H_1(\xi,\eta), H_2(\xi,\eta)$– дифференциальные коэффициенты Ламе, $m = 1,2$. Для указанных структур армирования уравнения (3.50) в первом случае при $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_1 \sin\varphi_1) = 0, \frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_2 \cos\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_2 \sin\varphi_2) = 0. \tag{3.51}$$

Дополнительные условия на интенсивности ω_1, ω_2 зададим на том контуре, где волокна входят в конструкцию. Предположим, что $\omega_1^0(\eta)$, $\omega_2^0(\eta)$, $\omega_1^0(\xi)$ – известные функции, заданные на линиях $\xi = \xi^0 = Const$, $\eta = \eta^0 = Const$. Первое уравнение в (3.51) можно проинтегрировать

$$\omega_1(\xi,\eta) = \frac{H_2(\xi,\eta^0)\omega_1^0(\xi)}{H_2(\xi,\eta)}.$$

Поскольку криволинейная ортогональная система координат вводится аналитическими функциями комплексного переменного, то в каждой точке (ξ,η) коэффициенты Ламе равны между собой $H_1(\xi,\eta) = H_2(\xi,\eta)$. При записи второго уравнения в (3.51) воспользуемся заменой $\omega_3 = H_1\omega_2 = H_2\omega_2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\omega_3) + k\frac{\partial}{\partial \eta}(\omega_3) = 0. \tag{3.52}$$

Уравнение (3.52) является однородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка, начальными данными являются условия на интенсивности ω_1, ω_2 на контуре, где волокна входят в конструкцию. Ищем семейство решений, содержащих произвольную функцию, согласно [92], предварительно строим обыкновенное дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\eta}{k}. \tag{3.53}$$

Находим общий интеграл (3.53), он равен $-k\xi + \eta = Const$. Тогда общее решение (3.51) запишем

$$\omega_3 = F_1(-k\xi + \eta),$$

где F_1 – любая непрерывно дифференцируемая функция. Укажем очевидное решение $\omega_3 = Const$. Далее решаем задачу Коши. Пусть

$$\omega_3 = H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(\eta) \text{ при } \xi = \xi^0.$$

Разрешая общий интеграл (3.53) относительно переменной η, записываем искомое решение в виде

$$\omega_2 = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(-k\xi + \eta + k\xi^0)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Во втором случае ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = arctgk$) уравнения (3.50) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2\omega_1 \cos\varphi_1) = 0, \frac{\partial}{\partial \xi}(H_2\omega_2 \cos\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1\omega_2 \sin\varphi_2) = 0. \tag{3.54}$$

Решения находим аналогично (3.51):

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_1^0(\eta)}{H_2(\xi, \eta)}, \omega_2 = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(-k\xi + \eta + k\xi^0)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Рассмотрим случай, когда криволинейные координаты ξ, η являются координатами ρ, θ полярной системы координат. Для полярной системы значения параметров Ламе равны $H_1 = 1, H_2 = \rho$. Уравнения (3.50) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\omega_m \cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\omega_m \sin\varphi_m) = 0. \tag{3.55}$$

Если $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = arctgk$, то первое уравнение интегрируется аналогично изложенному выше, второе уравнение является линейным неоднородным уравнением в частных производных

$$\rho\frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + k\frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \omega_2 = 0. \tag{3.56}$$

Пусть задача Коши ставится в виде

$$\omega_2 = \omega_2^0(\theta) \text{ при } \rho = \rho^0.$$

Для решения (3.56) составим соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме [92]

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{k} = \frac{d\omega_2}{-\omega_2}.$$

Получим ее независимые интегралы $\psi_1 = -k\ln\rho + \theta, \psi_2 = \rho\omega_2$. Общее решение

$$\omega_2 = \frac{F_1(-k\ln\rho + \theta)}{\rho}$$

F_1 – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Подставляем в ψ_1, ψ_2 значение $\rho = \rho^0$, разрешаем относительно ω_2 и θ, результат – в начальное условие с общими интегралами. Имеем искомое решение в виде

$$\omega_2 = \frac{\rho_0}{\rho}\omega_2^0(-k\ln\rho + \theta + k\ln\rho_0).$$

Полученные значения для интенсивностей армирования используются далее в работе для вычисления коэффициентов при построении разрешающей системы уравнений. Различные решения для интенсивностей приводят к различным разрешающим уравнениям поставленной задачи армированной среды.

Ранее в разделе 1.8 главы 1 установлена разрешающая система дифференциальных уравнений (1.17), (1.37) в криволинейных координатах относительно компонент тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$

$$\begin{gathered}
C_1\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^2} + C_2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\eta^2} + C_3\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi\partial\eta} + C_4\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + C_5\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} + \\
+C_6\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + C_7\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + C_8\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + C_9\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} + \\
+C_{10}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{12} = 0, \\
a_{11}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + a_{12}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} + a_{13}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + a_{14}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + a_{15}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + \\
+a_{16}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} + F_1(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1H_2\Phi_1 = 0, \\
a_{21}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi} + a_{22}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\eta} + a_{23}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi} + a_{24}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\eta} + a_{25}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi} + \\
+a_{26}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\eta} + F_2(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1H_2\Phi_2 = 0.
\end{gathered} \tag{3.57}$$

Значения коэффициентов C_s $s = 1, \ldots 12$ через параметры Ламе приведены в (1.18). Для армирования вдоль изогональных траекторий выполняется пересчет коэффициентов a_{ij} и они принимают вид

$$\begin{gathered}
a_{11} = H_2(\Omega m_3 + E_1\omega_1 + E_2\omega_2\frac{1}{(1+k^2)^2}), a_{12} = H_1E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k}{(1+k^2)^2},\\
a_{13} = H_2(\Omega\nu m_3 + E_2\omega_2\frac{k^2}{(1+k^2)^2}), a_{14} = H_1E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k^3}{(1+k^2)^2},\\
a_{15} = 2H_2E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k}{(1+k^2)^2}, a_{16} = 2H_1(E_2\omega_2\frac{k^2}{(1+k^2)^2} + \Omega m_4/2),\\
a_{21} = H_2E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k}{(1+k^2)^2}, a_{22} = H_1(\nu m_3\Omega + E_2\omega_2\frac{k^2}{(1+k^2)^2}),\\
a_{23} = H_2E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k^3}{(1+k^2)^2}, a_{24} = H_1(\Omega m_3 + E_2\omega_2\frac{k^4}{(1+k^2)^2}),\\
a_{25} = 2H_2(\Omega m_4/2 + E_2\omega_2\frac{k^2}{(1+k^2)^2}), a_{26} = 2H_1E_2\omega_2\delta_\alpha\frac{k^3}{(1+k^2)^2}.
\end{gathered} \tag{3.58}$$

Значения символа δ_α, входящего в выражения (3.58), учитывают выбор знака в формулах тригонометрии при переходе от синуса и косинуса угла α к его тангенсу в зависимости от величины угла армирования. Они соответственно равны:

$$\delta_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2},\\ -1, & \text{если } \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\\ 1, & \text{если } \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2},\\ -1, & \text{если } \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Исследуем тип разрешающей системы (3.57) для рассматриваемого случая армирования аналогично подходу, уже выполненному в разделе 1.8 главы 1. Для этого найдем корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_1\lambda^2 & C_3\lambda\\ (a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda) & (a_{13}\lambda^2 + a_{14}\lambda) & (a_{15}\lambda^2 + a_{16}\lambda)\\ (a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda) & (a_{23}\lambda^2 + a_{24}\lambda) & (a_{25}\lambda^2 + a_{26}\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

где коэффициенты $a_{ij}, i = 1,2; j = \overline{1,6}$ из (3.58). Запишем характеристическое уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

где в определитель, дающий уравнение для вычисления корней, введены следующие обозначения:

$$d_{21} = (\frac{E\Omega}{1-\nu^2} + \omega_1 E_1 + \frac{E_2\omega_2}{(1+k^2)^2})\lambda + \frac{E_2\omega_2 k}{(1+k^2)^2},$$
$$d_{22} = (\frac{E\nu\Omega}{1-\nu^2} + \frac{E_2\omega_2 k^2}{(1+k^2)^2})\lambda + \frac{E_2\omega_2 k^3}{(1+k^2)^2},$$
$$d_{23} = \frac{E_2\omega_2 k}{(1+k^2)^2}\lambda + \frac{E_2\omega_2 k^2}{(1+k^2)^2} + \frac{\Omega E}{1+\nu},$$
$$d_{31} = \frac{E_2\omega_2 k}{(1+k^2)^2}\lambda + \frac{E\nu(1-\omega_1^2)}{1-\nu^2} + E_2\omega_2 k^2(1+k^2)^2,$$
$$d_{32} = \frac{E_2\omega_2 k^3}{(1+k^2)^2}\lambda + \frac{E\Omega}{1-\nu^2} + \frac{E_2\omega_2 k^4}{(1+k^2)^2},$$
$$d_{33} = (\frac{2E_2\omega_2 k^2}{(1+k^2)^2} + \frac{\Omega E}{1+\nu})\lambda + \frac{2E_2\omega_2 k^3}{(1+k^2)^2}.$$

Уравнение представляет собой полное алгебраическое уравнение четвертого порядка. Его коэффициенты зависят от технических характеристик материала связующего и арматуры, интенсивностей армирования волокнами первого и второго семейства и параметра k, который задается при построении траекторий, изогональных к данному семейству кривых.

Исследуем корни характеристического уравнения при фиксированном материале, но изменяя интенсивности армирования и параметр k. Рассмотрим следующие варианты комбинации выбора материала для матрицы (связующего) и арматуры (армирующих волокон). В качестве материала связующего выбирается алюминий, армирование проводится стальными волокнами; пусть связующее – медь, армируется волокнами из вольфрама; связующее – графит, армирование выполняется волокнами из стали. Рассматриваются различные варианты значений интенсивности и параметра k. Результаты представлены в виде табл. 3.2.

Таблица 3.2

Материал	Интенсивности	корни при $k=1$	корни при $k=\sqrt(3)$	корни при $k=1/\sqrt{3}$
Алюминий+сталь	$\omega_1=0,2;$ $\omega_2=0,2$	$0,5;1,3;$ $-0,8\pm 0,27I$	$0,05;7,98;$ $-0,36;-4,75$	$0,28\pm 1,02I;$ $-0,29\pm 0,58I$
Алюминий+сталь	$\omega_1=0,3;$ $\omega_2=0,3$	Все действител.	Все действит.	$0,33\pm 0,85I;$ $-0,35\pm 0,48I$
Медь+вольфрам	$\omega_1=0,2;$ $\omega_2=0,2$	$0,48;1,35;$ $-0,8\pm 0,257I$	Все действит.	$0,28\pm I;$ $-0,307\pm 0,58I$
Графит+сталь	$\omega_1=0,2;$ $\omega_2=0,2$	Все действит.	Все действит.	$0,318\pm 0,42I;$ $-0,46\pm 0,344I$

Результаты таблицы показывают, что все четыре корня могут быть действительными, корни могут быть действительными и комплексно сопряженными, так и все корни — комплексно сопряженными. Основное влияние на характер корней оказывает значение параметра k – тангенса угла армирования по изогональной траектории.

Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям, оно зависит от выбора параметра k, значений интенсивностей армирования. Как видим из табл. 3.2, разные значения углов армирования приводят к разным типам систем разрешающих дифференциальных уравнений (гиперболическому, эллиптическому, смешанному типам) [14, 12], а следовательно, и к разным постановкам краевых задач. Им соответствуют существенно разные решения, что позволяет управлять напряженно-деформируемым состоянием конструкции. Таким образом, с изменением структур армирования существенным образом изменяются поля напряжений и деформаций.

В главе 3 проанализированы свойства общей системы разрешающих уравнений плоской задачи упругости в декартовой системе координат для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных траекторий. Получены некоторые частные аналитические решения (армирование по семействам эллипсов и гипербол в декартовой системе). Исследованы краевые задачи для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами и получены зависимости решений от выбора интенсивностей армирования, формы контура, внешней нагрузки, условий равнонапряженности. Получены аналитические решения для интенсивностей армирования вдоль траекторий, изогональных к выбранным семействам кривых. Установлено, что введение изогонального армирования с параметром k (k – тангенс угла, под которым изогональная траектория пересекает кривую данного семейства) порождает разные типы разрешающей системы дифференциальных уравнений (гиперболический, эллиптический, смешанный тип). Следовательно, приводит к различным постановкам краевых задач и позволяет получить многообразие структур армирования, что дает возможность управлять напряженно-деформируемым состоянием конструкции.

Основные результаты главы 3 опубликованы в работах [143, 62, 114, 119, 65, 118, 69, 64, 128, 24].

Глава 4

Три семейства волокон

4.1 Постановка задачи в декартовой системе координат

Рассматриваются плоские задачи упругости для сред, армированных тремя семействами волокон. Пусть армирование выполнено волокнами постоянного поперечного сечения. Для описания композита используется структурную модель [142]. Модель содержит алгебраические и дифференциальные уравнения относительно интенсивностей армирования $\omega_m(x,y)$, компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x,y)$, деформаций в волокнах первого, второго и третьего семейств $\varepsilon_m(x,y)$, напряжений в волокнах первого, второго и третьего семейств – $\sigma_m(x,y)$, осредненных напряжений $\sigma_{ij}(x,y)$, где x, y – декартовы координаты, $\varphi_m(x,y)$ – углы армирования, индексы $i,j = 1,2$, $m = 1,2,3$. В рамках принятых обозначений при условии постоянства поля температур T исходная система имеет вид

$$(\omega_m l_{m1})_{,1} + (\omega_m l_{m2})_{,2} = 0, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{11} l_{m1}^2 + \varepsilon_{22} l_{m2}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{m1} l_{m2} = \varepsilon_m^0, \tag{4.2}$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{4.3}$$

Использованы обозначения: $\varepsilon_m^T = \alpha_m^a T,\ \varepsilon_m^0 = \varepsilon_m + \varepsilon_m^T,\ l_{m1} = \cos\varphi_m,\ l_{m2} = \sin\varphi_m$, α_m^a– коэффициенты линейного расширения материала m-го семейства волокон ($m = 1,2,3$). Правая часть в (4.2) учитывает как случай равнодеформированных ($\varepsilon_m = const,\ \ \varepsilon_m^0 = const + \varepsilon_m^T$), так и случай нерастяжимых ($\varepsilon_m = 0,\ \varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$) семейств волокон и их возможные комбинации (некоторые из семейств волокон равнодеформируемы, другие – нерастяжимы).

Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x,y)$ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \Omega\sigma_{ij}^{c} + \sum_{m=1}^{3}\sigma_m\omega_m l_{mi}l_{mj}, \tag{4.4}$$
$$\Omega = 1 - (\omega_1(x,y) + \omega_2(x,y) + \omega_3(x,y)).$$

В (4.4) напряжения в связующем определяются по формулам

$$\sigma_{ii}^{c} = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T),\ \sigma_{ij}^{c} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij},\ \ (j = 3-i,\ i = 1,2).$$

Здесь E, ν, α_c – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала, E_m– модули Юнга материалов m-го семейства волокон. Напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1,2). \tag{4.5}$$

Правые части в (4.5)

$$b_i = -((1-\Omega)\rho_c + \sum_{m=1}^{3}\omega_m\rho_m)F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; $\rho_c,\ \rho_m$ – массовые плотности материалов связующего и волокон m-го семейства; F_i – компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (4.1) – (4.5) присоединяются граничные условия на контуре. Уравнение контура Γ задано в параметрическом виде: $x = \varphi(s),\ y = \psi(s)$, s – некоторый параметр. Причем $\Gamma = \Gamma_p \bigcup \Gamma_u$. На контуре Γ_p заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s), \tag{4.6}$$
$$(\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s).$$

На другой части контура Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2:

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \tag{4.7}$$

В (4.6) – (4.7) $u_1^0(s),\ u_2^0(s),\ p_n(s),\ p_\tau(s)$ – известные функции, $n_1 = \cos\beta,\ n_2 = \sin\beta,\ \beta$ – угол, задающий направление внешней нормали к Γ. С учетом (4.4) граничные условия (4.6) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi_1-\beta)+\omega_2\sigma_2\cos^2(\varphi_2-\beta)+\omega_3\sigma_3\cos^2(\varphi_3-\beta)+\\
&+\Omega[m_3(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T)\cos^2\beta+m_3(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T)\sin^2\beta+\\
&+m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta]=p_n(s),\\
&\omega_1\sigma_1\sin 2(\varphi_1-\beta)+\omega_2\sigma_2\sin 2(\varphi_2-\beta)+\omega_3\sigma_3\sin 2(\varphi_3-\beta)+\\
&+\Omega\ m_3\,(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}+\nu(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}))\sin 2\beta+2\Omega\, m_4\varepsilon_{12}\cos 2\beta=2p_\tau(s).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

В (4.8) использованы обозначения для констант введенные ранее в (1.7). Интенсивности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задаются на той части Γ_ω контура, где волокна входят в конструкцию

$$\omega_1(\Gamma_\omega)=\omega_1^*(s),\ \ \omega_2(\Gamma_\omega)=\omega_2^*(s),\ \omega_3(\Gamma_\omega)=\omega_3^*(s). \tag{4.9}$$

Общие ограничения для интенсивностей армирования имеют вид

$$0<\omega_m\le 0,7,\ \ \Omega=1-\omega_1-\omega_2-\omega_3.$$

В настоящей главе получены разрешающие системы уравнений в декартовой системе координат для армирования композита тремя семействами волокон с различными комбинациями механических свойств.

4.2 Все три семейства волокон равнодеформируемы

Случай, когда три семейства волокон равнодеформируемы, означает выполнение условия $\varepsilon_m = const$ и выполнение закона Гука в волокне $\sigma_m = E_m\varepsilon_m$. Правая часть в (4.2) принимает вид $\varepsilon_m^0 = const + \alpha_m^a T$. Разрешающая система уравнений строится следующим образом. Интенсивности $\omega_1,\ \omega_2, \omega_3$ удовлетворяют уравнениям (4.1). Неизвестные компоненты деформаций входят в алгебраические (4.2) и дифференциальные (4.3) уравнения. Подстановка выражений для осредненных напряжений из (4.4) в уравнения равновесия (4.5) приводит к соотношениям

$$\sigma_2\omega_2(-\sin\varphi_2)\partial_{s2}\varphi_2+\sigma_1\omega_1(-\sin\varphi_1)\partial_{s1}\varphi_1+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2}+$$
$$+\sigma_3\omega_3(-\sin\varphi_3)\partial_{s3}\varphi_3+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1}=b_1, \qquad (4.10)$$
$$\sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1+\sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2+\sigma_3\omega_3(cos\varphi_3)\partial_{s3}\varphi_3+$$
$$+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1}+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2}=b_2.$$

При дифференцировании напряжений используются соотношения (4.1), что позволяет упростить выражения. В уравнениях (4.10) введены обозначения для производных

$$\partial_{sm}\varphi_m=\cos\varphi_m\varphi_{m,1}+\sin\varphi_m\varphi_{m,2}.$$

Здесь углы армирования $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ – неизвестные функции декартовых координат (x,y).

Совокупность уравнений (4.1), (4.2), (4.3), (4.10) образует замкнутую систему девяти уравнений относительно девяти неизвестных: $\varepsilon_{ij},\varphi_m,\omega_m$. Удобно ввести три новых функции:

$$z_m(x,y)=\operatorname{tg}\varphi_m(x,y),\ \varphi_m(x,y)\neq\pi/2.$$

Тогда (4.1) перепишется

$$(\omega_m)_{,1}+z_m(\omega_m)_{,2}+\omega_m(\frac{(z_m)_{,2}}{1+z_m^2}-z_m\frac{(z_m)_{,1}}{1+z_m^2})=0. \qquad (4.11)$$

Алгебраические уравнения (4.2) запишутся в виде

$$\varepsilon_{11}+z_m^2\varepsilon_{22}+2z_m\varepsilon_{12}=\varepsilon_m^0(1+z_m^2). \qquad (4.12)$$

В (4.10) соотношения для производных также преобразуются

$$\sin\varphi_m\partial_{sm}\varphi_m=\operatorname{sgn}z_m\frac{z_m}{1+z_m^2}(\varphi_{m,1}+z_m\varphi_{m,2}),$$
$$\cos\varphi_m\partial_{sm}\varphi_m=\operatorname{sgn}z_m\frac{z_m}{1+z_m^2}((z_m)^{-1}\varphi_{m,1}+\varphi_{m,2}).$$

Функция $\operatorname{sgn}z_m$ принимает значения $+1$ или -1 в зависимости от знака тангенса угла армирования $z_m=\operatorname{tg}\varphi_m$. Значения углов армирования φ_m содержатся в интервале $0 < \varphi_m < \pi$. Производные по координатам x, y вычисляются по формулам

$$(\varphi_m)_{,1} = \frac{(z_m)_{,1}}{1+z_m^2},\ (\varphi_m)_{,2} = \frac{(z_m)_{,2}}{1+z_m^2}.$$

С учетом приведенных формул соотношения (4.10) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&-\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}(z_{2,1}+z_2z_{2,2}) - \sigma_1\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(z_{1,1}+z_1z_{1,2}) + \\
&+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} - \sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}(z_{3,1}+z_3z_{3,2}) + \\
&+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1} = b_1, \qquad (4.13)\\
&\sigma_1\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(\frac{1}{z_1}z_{1,1}+z_1z_{1,2}) + \sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}(\frac{1}{z_2}z_{2,1}+z_2z_{2,2}) + \\
&+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + \sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}(\frac{1}{z_3}z_{3,1}+z_3z_{3,2}) \\
&+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2} = b_2.
\end{aligned}$$

В (4.13) компоненты деформаций находятся из (4.2) через z_m :

$$\begin{aligned}
\Delta &= -z_2z_3^2 - z_1z_2^2 + z_1z_3^2 + z_3z_2^2 - z_3z_1^2 + z_2z_1^2, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{-\varepsilon_2^0z_3z_1^2 + \varepsilon_2^0z_3^2z_2^2z_1 - \varepsilon_1^0z_3^2z_1^2 - \varepsilon_2^0z_3z_1^2z_2^2 + \varepsilon_1^0z_3z_1^2z_2^2 - \varepsilon_3^0z_3^2z_1z_2^2}{\Delta} + \\
&+ \frac{\varepsilon_3^0z_3^2z_2z_1^2 - \varepsilon_1^0z_3^2z_2 + \varepsilon_2^0z_3^2z_1 + \varepsilon_1^0z_3z_2^2 - \varepsilon_3^0z_1z_2^2 + \varepsilon_3^0z_2z_1^2}{\Delta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= -\frac{1}{2}(\frac{\varepsilon_3^0z_1^2 + \varepsilon_3^0z_1^2z_3^2 - \varepsilon_2^0z_1^2 - \varepsilon_2^0z_1^2z_2^2 - \varepsilon_1^0z_1^2z_3^2 + \varepsilon_1^0z_1^2z_2^2}{\Delta} + \\
&+ \frac{\varepsilon_1^0z_2^2 - \varepsilon_3^0z_2^2 + \varepsilon_1^0z_3^2 + \varepsilon_2^0z_3^2z_2^2 + \varepsilon_2^0z_3^2 - \varepsilon_3^0z_3^2z_2^2}{\Delta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_3^0z_1 + \varepsilon_2^0z_3 + \varepsilon_2^0z_3z_2^2 + \varepsilon_1^0z_2 - \varepsilon_2^0z_1z_2^2 + \varepsilon_3^0z_3^2z_1}{\Delta} + \\
&+ \frac{-\varepsilon_1^0z_3 - \varepsilon_2^0z_2z_1 + \varepsilon_1^0z_1^2z_2 - \varepsilon_3^0z_2 - \varepsilon_1^0z_1^2z_3 - \varepsilon_3^0z_2z_3^2}{\Delta}.
\end{aligned}$$

После подстановки $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ в (4.13) и (4.3) получим три уравнения относительно трех неизвестных функций z_1, z_2, z_3, причем из (4.13) – два нелинейных дифференциальных уравнения первого порядка, из (4.3) – нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим частные случаи. Если потребовать равенства деформаций в волокнах $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = \varepsilon^0$ (ε^0– заданная функция), то решение системы (4.2) принимает вид

$$\varepsilon_{12} = 0,\ \varepsilon_{11} = \varepsilon^0,\ \varepsilon_{22} = \varepsilon^0.$$

Уравнение совместности деформаций в этом случае – уравнение Лапласа для задаваемой ε^0

$$\varepsilon^0_{,11} + \varepsilon^0_{,22} = 0.$$

Из уравнений (4.11) и (4.12) определяются ω_1,ω_2,ω_3, z_1, z_2, z_3, что возможно при наложении дополнительных условий на один из углов армирования. Например, φ_1 предполагается заданным, тогда интенсивность армирования вдоль первого семейства волокон определяется из (4.11) при $m = 1$. В частности, при $\varphi_1 = x$ (угол армирования зависит только от x) интенсивность находится по формуле $\omega_1 = \dfrac{F(y + ln(\cos x))}{\cos x}$, при $\varphi_1 = y$ (угол армирования зависит только от y) по формуле $\omega_1 = \dfrac{F_1(\sin y/e^x)}{e^x}$. Значения x и y принадлежат некоторому заданному в соответствии с ограничением $0 < \varphi_m < \pi$ интервалу. Произвольные функции F, F_1 определяются из граничных условий.

Для вычисления $\omega_2, \omega_3, z_2, z_3$ получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\omega_2)_{,1} + z_2(\omega_2)_{,2} + \omega_2(\frac{(z_2)_{,2}}{1+z_2^2} - z_2\frac{(z_2)_{,1}}{1+z_2^2}) = 0,\\
&(\omega_3)_{,1} + z_3(\omega_3)_{,2} + \omega_3(\frac{(z_3)_{,2}}{1+z_3^2} - z_3\frac{(z_3)_{,1}}{1+z_3^2}) = 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
&-\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2})(z_{2,1} + z_2 z_{2,2}) - \sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2})(z_{3,1} + z_3 z_{3,2}) +\\
&\quad + \frac{EK_1}{1-\nu^2}(-\omega_{2,1} - \omega_{3,1}) = \frac{EK_1}{1-\nu^2}\omega_{1,1} + b_1,\\
&\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}(\frac{1}{z_2}z_{2,1} + z_2 z_{2,2}) + \sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}(\frac{1}{z_3}z_{3,1} + z_3 z_{3,2}) +\\
&\quad + \frac{EK_2}{1-\nu^2}(-\omega_{2,2} - \omega_{3,2}) = \frac{EK_2}{1-\nu^2}\omega_{1,2} + b_2,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

где

$$K_1 = \varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T,\ K_2 = \varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T.$$

Правые части в (4.15) – известные функции.

4.3 Некоторые случаи расположения равнодеформируемых волокон

Пусть равнодеформируемые семейства волокон расположены так, что углы армирования, например, φ_1, φ_2 – известные функции, а третий угол армирования φ_3 – произвольная функция координат. Математически задача при такой укладке становится переопределенной и при построении решения необходимо вводить произвол, чтобы выполнить все уравнения модели (4.1), (4.2), (4.3) и уравнения равновесия (4.5). Из (4.12) выразим компоненты деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ через ε_{12} :

$$\varepsilon_{11} = e_{11}\varepsilon_{12} + e_{12},$$

$$\varepsilon_{22} = e_{21}\varepsilon_{12} + e_{22}.$$

В дальнейшем используем обозначения

$$\begin{aligned} &e_{11} = -a_2/a_1 \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - 2\operatorname{tg}\varphi_1,\ e_{12} = \varepsilon_1^0(1+\operatorname{tg}\varphi_1) - a_3/a_1 \operatorname{tg}^2 \varphi_1, \\ &e_{21} = a_2/a_1,\ e_{22} = a_3/a_1, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3 вычисляем через заданные углы армирования и условия равнодеформируемости по формулам

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1/\operatorname{tg}^2 \varphi_2,\ a_2 = 2(\operatorname{tg}\varphi_1/\operatorname{tg}^2\varphi_2 - 1/\operatorname{tg}\varphi_2), \\ &a_3 = (\varepsilon_2^0(1+\operatorname{tg}\varphi_2) - \varepsilon_1^0(1+\operatorname{tg}\varphi_1))/\operatorname{tg}\varphi_2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Из третьего уравнения (4.12) компонента деформации ε_{12} определяем через неизвестную функцию $z_3 = \operatorname{tg}\varphi_3$:

$$\varepsilon_{12} = \frac{b_{12} + b_{22}z_3^2}{e_{11} + e_{21}z_3^2 + 2z_3}, \tag{4.18}$$

где $b_{12} = -e_{12}\varepsilon_3^0$, $b_{22} = \varepsilon_3^0 - e_{22}$. С учетом (4.16) уравнение совместности деформаций примет вид

$$e_{11}\varepsilon_{12,22} + e_{21}\varepsilon_{12,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{4.19}$$

Знак детерминанта $\delta = e_{11}e_{21} - 1$ уравнения (4.19) определяет его тип (гиперболический) при заданных значениях углов армирования

$$\delta = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_1 + z_2)^2}. \tag{4.20}$$

Пусть $\varphi_1 = \operatorname{arctg} x$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y$. Решение уравнения (4.19)

$$\varepsilon_{12} = \frac{x^3}{6} + (1 - \ln y)y + C_1(x + y) + C_2 \tag{4.21}$$

содержит две произвольные константы C_1, C_2. Подстановка найденного решения (4.21) в граничные условия (4.8) позволяет решить две задачи: 1) установить ограничения на нагрузку; 2) для заданной нагрузки найти соответствующее уравнение граничного контура. В дальнейшем в разделе 4.5 решена вторая задача.

4.4 Нерастяжимые семейства волокон

Пусть все армирующие семейства волокон нерастяжимы. Тогда в (4.2) правая часть имеет вид $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m^T$. Однако в силу идеализации модели волокон (абсолютно твердое тело) теперь σ_1, σ_2, σ_3 – неизвестные функции координат x, y. Поэтому в (4.10) в случае нерастяжимых волокон появятся производные от этих функций:

$$\begin{gathered}
\sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2 \varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1) + \sigma_{2,1}(\omega_2 \cos^2 \varphi_2) + \\
+\sigma_{2,2}(\omega_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2) + \sigma_{3,1}(\omega_3 \cos^2 \varphi_3) + \sigma_{3,2}(\omega_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_3) - \\
-\sigma_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \partial_{s1} \varphi_1 - \sigma_2 \omega_2 (\sin \varphi_2) \partial_{s2} \varphi_2 - \sigma_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \partial_{s1} \varphi_3 + \\
+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega \varepsilon_{12})_{,2} + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu_{22} + L^T))_{,1} = b_1, \\
\sigma_{1,1}(\omega_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2 \varphi_1) + \sigma_{2,1}(\omega_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2) + \\
+\sigma_{2,2}(\omega_2 \sin^2 \varphi_2) + +\sigma_{3,1}(\omega_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_3) + \sigma_{3,2}(\omega_3 \sin^2 \varphi_3) + \\
+\sigma_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \partial_{s1} \varphi_1 + \sigma_2 \omega_2 \cos \varphi_2 \partial_{s2} \varphi_2 + \sigma_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \partial_{s3} \varphi_3 + \\
+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega \varepsilon_{12})_{,1} + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11} + L^T))_{,2} = b_2.
\end{gathered} \tag{4.22}$$

Совокупность уравнений (4.1), (4.2), (4.19), (4.22) не является замкнутой разрешающей системой относительно названных переменных $\varepsilon_{ij}, \varphi_m, \omega_m, \sigma_m$ и для решения задачи следует вводить дополнительные предположения, например, о способах укладки семейств армирующих волокон.

4.4.1 Частные решения в случае нерастяжимых семейств волокон

Рассмотрим возможные особые случаи, возникающие при вычислении компонент деформаций через тангенсы углов армирования из системы алгебраических уравнений (4.11) и укажем, какие при этом получаются решения исходной задачи.

А) Правая часть (4.11) $\varepsilon_m^T = \alpha_m^a T$, поэтому при нулевой температуре система становится однородной. Условие ее разрешимости $\triangle = 0$, а именно:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & 2z_1 \\ 1 & z_2^2 & 2z_2 \\ 1 & z_3^2 & 2z_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1 \\ 0 & (z_2^2 - z_1^2) & (z_2 - z_1) \\ 0 & (z_3^2 - z_1^2) & (z_3 - z_1) \end{vmatrix} = 0$$

приводит к требованию, чтобы траектории двух семейств совпадали: $z_1 = z_2$ или $z_1 = z_3$.

В) Пусть $T \neq 0$. Систему (4.11) можно рассматривать как систему трех линейных неоднородных уравнений относительно трех компонент деформаций ε_{ij}. При выборе способа укладки семейств волокон арматуры необходимо рассмотреть возможность $\triangle = 0$ и одновременно $\triangle_m = 0$. Например, для $m = 1$:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^0(1+z_1^2) & z_1^2 & z_1 \\ \varepsilon_2^0(1+z_2^2) & z_2^2 & z_2 \\ \varepsilon_3^0(1+z_3^2) & z_3^2 & z_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} z_3 & z_3^2 & \varepsilon_3^0(1+z_3^2) \\ z_1 & z_1^2 & \varepsilon_1^0(1+z_1^2) \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^0(1+z_2^2) - \varepsilon_1^0(1+z_1^2) \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\triangle = 0, \triangle_m = 0$ при условии, что деформации в первом и втором семействе волокон равны и $z_1 = z_2$, либо при условии, что равны деформации в первом и третьем семействе волокон и $z_3 = z_1$, либо равны деформации в третьем и втором семействе волокон, а $z_3 = z_2$.

Пусть $z_1 = z_2$. Решение системы (4.11) неединственно, выражения для компонент деформаций через неизвестную функцию z_1 запишем в виде

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12} z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2},$$

$$\varepsilon_{11} = k_{11} - z_3^2\varepsilon_{22},\ \varepsilon_{12} = Const.$$

Коэффициент k_{11} вычисляется по формуле

$$k_{11} = \varepsilon_3^0 z_3^2 - 2z_3\varepsilon_{12} + \varepsilon_3^0.$$

Уравнение совместности (4.3) в этом случае примет вид

$$-z_3^2\varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{22,11} = 0. \tag{4.23}$$

После вычисления производных

$$\varepsilon_{22,11} = \frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,1})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2}z_{1,11},$$

$$\varepsilon_{22,22} = \frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,2})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2}z_{1,22}.$$

из (4.23) получим уравнение для неизвестной z_1

$$\begin{gathered}\frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,1})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2}z_{1,11} - \\ -z_3^2(\frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,2})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2}z_{1,22}) = 0.\end{gathered} \tag{4.24}$$

В разрешенном относительно старших производных виде

$$z_{1,11} - z_3^2 z_{1,22} + \frac{A(z_1^3)}{B(z_1^5)}(z_{1,1})^2 + \frac{A(z_1^3)}{B(z_1^5)}(z_{1,2})^2 = 0. \tag{4.25}$$

Знак детерминанта $\delta = -z_3^2 - 1 < 0$ для уравнения (4.25) определяет его гиперболический тип для любого значения заданного угла армирования φ_3. В (4.25) использованы следующие обозначения:

$$A(z_1^3) = d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14},$$

$$B(z_1^5) = c_{11}z_1^5 + c_{12}z_1^4 + c_{13}z_1^3 + c_{14}z_1^2 + c_{15}z_1 + c_{16},$$

$$p_{11} = 2k_{11} - 2\varepsilon_1^0 z_3^2,\ p_{12} = 2\varepsilon_{12}z_3^2,$$

$$d_{11} = -4p_{12},\ d_{12} = -2p_{11}z_3 + 4p_{11}z_3^2,\ d_{13} = 4p_{12}z_3^2,\ d_{14} = p_{11}z_3^2,$$

$$c_{11} = p_{11},\ c_{12} = p_{12},\ c_{13} = -2p_{11}z_3^2,\ c_{14} = -2p_{12}z_3^2,\ c_{15} = p_{11}z_3^4,$$

$$c_{16} = p_{12}z_3^4.$$

При дополнительных условиях равнонапряженности третьего волокна $\sigma_3 = Const$ и задании угла армирования φ_3 получена разрешающая система четырех уравнений относительно четырех неизвестных $z_1, \omega_1, \sigma_1, \sigma_2$. Она состоит из (4.25), (4.11) при $m = 1$ и двух уравнений (4.22), которые при сформулированных условиях упрощаются к виду

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,1})\omega_1 \frac{1}{1+z_1^2} + sgnz_1(\sigma_{1,2} + \sigma_{2,2})\omega_1 \frac{z_1}{1+z_1^2} - \\
&-sgnz_1(\sigma_1 + \sigma_2)\omega_1 \frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(z_{1,1} + z_1 z_{1,2}) = \\
&= b_1 - \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T))_{,1}, \\
&sgnz_1(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,1})\omega_1 \frac{z_1}{1+z_1^2} + (\sigma_{1,2} + \sigma_{2,2})\omega_1 \frac{z_1^2}{1+z_1^2} + \\
&+sgnz_1(\sigma_1 + \sigma_2)\omega_1 \frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(\frac{1}{z_1} z_{1,1} + z_{1,2}) = \\
&= b_2 - \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T))_{,2}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Система распадается, вначале находится z_1 из (4.25), затем с его использованием определяется ω_1 из (4.11) и осуществляется переход к решению (4.26).

При нахождении частных решений нелинейного уравнения (4.25) используется алгоритм построения инвариантных решений уравнений в частных производных на основе групп преобразований, допускаемых данными уравнениями, описанный в [90]. Этот алгоритм строит определяющие уравнения для изовектора с использованием форм Картана. Уравнение в частных производных преобразуется к эквивалентной системе дифференциальных форм, а затем производится обратный переход. В ходе алгоритма вычисляется замыкание множества дифференциальных форм и это множество аннулируется к подсписку независимых координат. Временные списки позволяют исключить те части дифференциальных форм, которые относятся к идеалу.

Например, при $\varphi_3 = \pi/4$ и постоянных значениях ε_m^0 уравнение (4.25) запишем в виде

$$z_{1,11} - z_{1,22} - \frac{4z_1^3 - 2z_1^2 - 4z_1 - 1}{z_1^5 + z_1^4 - 2z_1^3 - 2z_1^2 + z_1 + 1}((z_{1,1})^2 + (z_{1,2})^2) = 0. \tag{4.27}$$

После применения алгоритма получено частное решение:

$$z_1(x,y) = \int_0^x (\sin(2t+y-x) + k_1(t) + k_2(t+y-x))dt + F_1(y-x).$$

Произвольные функции $k_1(x), k_2(x,y), F_1(x,y)$ находим из граничных условий. Граничная задача для z_1 ставится на части контура, где волокна входят в конструкцию. Используем граничные условия (4.8). При принятых в данном пункте предположениях и $\beta = \pi/2$ они запишутся

$$(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)\frac{z_1^2}{1+z_1^2} + (1-\omega_1-\omega_2-\omega_3)m_3(\frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2} +$$
$$+\nu(k_{11} - z_3^2\frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2})) = p_n(s) - \omega_3\sigma_3/2,$$
$$(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)\sin 2\varphi_1 = 2p_\tau(s) + 2(1-\omega_1-\omega_2-\omega_3)m_4 + \sigma_3\omega_3.$$

После нахождения $\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2$ из второго уравнения и подстановки в первое получается кубическое уравнение относительно z_1 на рассматриваемом контуре, оно имеет вид

$$Bz_1(z_1^2 - z_3^2) + \Omega m_3(\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11} + \nu k_{11}(z_1^2 - z_3^2) -$$
$$-z_3^2(\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11})) = (p_n(s) - 0.5)(z_1^2 - z_3^2),$$
$$B = p_\tau + \Omega m_4 \varepsilon_{12}.$$

Выберем материал связующего – алюминий ($E = 71$ ГПА, $\nu = 0,31$), пусть он армирован стальными волокнами ($E_m = 200$ ГПА, $\alpha_m^a = 10,5 \times 10^{-6} K^{-1}$) [41]. Температура $T = 10$, интенсивности на границе принимают значения $\omega_1 = 0,1$; $\omega_2 = 0,1$; $\omega_3 = 0,3$. Если зададим нормальное давление величиной $p_n = 6,203$, уравнение относительно z_1 примет вид

$$0,2694z_1^3 - 2,3034z_1^2 - 0,8114z_1 = 0,$$

его корни $0; 8,8861; -0,3388$. Приведем частное решение удовлетворяющее, например, первому корню ($z_1 = 0$) на границе прямоугольной пластины размера $x \in [\pi/2, \pi]$, $y \in [\pi/2, 3\pi/2]$:

$$z_1(x,y) = \frac{-\cos(x+y)}{2} - \cos x + \sin y + \frac{3\cos(x-y)}{2} + 1 + \sin(x-y).$$

Выполненный анализ показал, что при использовании трех семейств волокон можно построить широкий спектр решений задач об управлении полями деформаций и напряжений в композитных волокнистых пластинах.

4.5 Определение граничного контура

На основании полученных решений построим уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости волокон. Предполагается, что два семейства армирующих волокон задаются известными функциями декартовых координат, а третье семейство расположено в направлении угла армирования, представляющего собой неизвестную функцию.

В пунктах 4.2, 4.3 получены разрешающие уравнения для плоской задачи упругой среды, армированной тремя семействами равнодеформируемых волокон. Уравнения (4.13) содержат как алгебраические, так и дифференциальные уравнения относительно интенсивностей армирования $\omega_m(x,y)$, компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x,y)$, деформаций в волокнах первого, второго и третьего семейств $\varepsilon_m(x,y)$, напряжений в волокнах первого, второго и третьего семейств – $\sigma_m(x,y)$, осредненных напряжений $\sigma_{ij}(x,y)$, где x, y – декартовы координаты, $\varphi_m(x,y)$ – углы армирования, индексы $i,j = 1,2,\ m = 1,2,3$.

Для описания семейств армирующих волокон были введены функции

$$z_m(x,y) = \operatorname{tg}\varphi_m(x,y).$$

Тогда (4.1) принимает вид

$$(\omega_m)_{,1} + z_m(\omega_m)_{,2} + \omega_m\left(\frac{(z_m)_{,2}}{1+z_m^2} - z_m\frac{(z_m)_{,1}}{1+z_m^2}\right) = 0.$$

Алгебраические уравнения (4.2) имеют виде

$$\varepsilon_{11} + z_m^2\varepsilon_{22} + 2z_m\varepsilon_{12} = \varepsilon_m^0(1+z_m^2), \tag{4.28}$$

где $m = 1,2,3$.

Пусть равнодеформируемые семейства волокон расположены так, что углы армирования, например, φ_1, φ_2– известные функции, а третий угол армирования φ_3– произвольная функция координат. Математически задача при такой укладке становится переопределенной и при построении решения необходимо вводить произвол, чтобы выполнить все уравнения модели (4.1), (4.2), (4.3) и уравнения равновесия (4.5).

Решаем задачу 2 (для заданной нагрузки найти соответствующее уравнение граничного контура). Не ограничивая общности, предположим, что $p_\tau = 0$, p_n – заданная функция. Пусть угол β, определяющий контур, неизвестен. После подстановки компонент деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ в (4.8) получим систему двух уравнений относительно неизвестных значений φ_3 на граничном контуре и β. Из первого уравнения (4.8) выразим

$$\begin{aligned}&\cos^2(\varphi_3-\beta) = (p_n(s) - \omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi_1-\beta) + \omega_2\sigma_2\cos^2(\varphi_2-\beta) + \\ &\omega_3\sigma_3\cos^2(\varphi_3-\beta) + \Omega(m_3(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T)\cos^2\beta + m_3(\varepsilon_{22}+ \\ &+\nu\varepsilon_{11}-L^T)\sin^2\beta - m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta))\omega_3\sigma_3. \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Правую часть обозначим C_p, она не зависит от φ_3. Во второе уравнение (4.8) входит выражение $\sin 2(\varphi_3-\beta)$, с учетом (4.29) и известных тригонометрических формул

$$\sin 2(\varphi_3-\beta) = \pm 2C_p\sqrt{\frac{1}{C_p}-1}.$$

Знак выбирается в соответствии с механическим смыслом задачи. После подстановки найденных значений второе уравнение (4.8) сведем к уравнению относительно одной неизвестной β. Для этого выполним следующие вычисления. Введем промежуточные обозначения

$$C_{11} = \cos 2\varphi_1,\ C_{12} = \sin 2\varphi_1,$$

$$C_{21} = \cos 2\varphi_2, C_{22} = \sin 2\varphi_2.$$

$$m_{31} = m_3(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T),$$

$$m_{32} = m_3(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T),$$

$$m_{41} = m_4\varepsilon_{12}.$$

$$C_{p0} = \frac{(2p_n - \omega_1\sigma_1 - \omega_2\sigma_2 - \Omega m_{31} - \Omega m_{32})}{2\omega_3\sigma_3},$$
$$C_{p1} = \frac{(-C_{11}\omega_1\sigma_1 - C_{21}\omega_2\sigma_2 - \Omega m_{31} + \Omega m_{32})}{2\omega_3\sigma_3},$$
$$C_{p2} = \frac{(C_{12}\omega_1\sigma_1 + C_{22}\omega_2\sigma_2 - \Omega m_{31})}{2\omega_3\sigma_3}.$$

С их помощью величину C_p выразим через β

$$C_P = C_{p0} + C_{p1}\cos 2\beta + C_{p2}\sin 2\beta, \tag{4.30}$$

второе уравнение системы (4.8) запишем в виде

$$P_1\cos 2\beta + P_2\sin 2\beta + \omega_3\sigma_3(\pm C_p\sqrt{\frac{1-C_p}{C_p}}) = 0, \tag{4.31}$$

где C_p связано с β соотношением (4.30), коэффициенты P_1, P_2 вычисляем по формулам

$$P_1 = C_{12}\omega_1\sigma_1 + C_{22}\omega_2\sigma_2 + 2\Omega m_4\varepsilon_{12},$$
$$P_2 = C_{11}\omega_1\sigma_1 + C_{21}\omega_2\sigma_2 + \Omega m_3(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})).$$

Уравнение (4.31) возведем в квадрат, получим выражение

$$k_1\cos^2 2\beta + k_2\sin 2\beta\cos 2\beta + k_3\sin^2 2\beta + k_4\cos 2\beta + k_5\sin 2\beta + k_6 = 0, \tag{4.32}$$

где коэффициенты находим по формулам

$$k_1 = P_1^2 + S_\omega C_{p1}^2,\ k_2 = 2P_1P_2 + 2S_\omega C_{p1}C_{p2},$$
$$k_3 = P_2^2 + S_\omega C_{p2}^2,\ k_4 = S_\omega(2C_{p0}C_{p2} - C_{p2}),$$
$$k_5 = S_\omega(2C_{p0}C_{p2} - C_{p2}),\ k_6 = -S_\omega C_{p0}, S_\omega = 4\omega_3^2\sigma_3^2.$$

В уравнении (4.32) заменим $\sin 2\beta, \cos 2\beta$ по известным тригонометрическим формулам на $\operatorname{tg}\beta$. В результате получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $\operatorname{tg}\beta$:

$$p_1\operatorname{tg}^4\beta + p_2\operatorname{tg}^3\beta + p_3\operatorname{tg}^2\beta + p_4\operatorname{tg}\beta + p_5 = 0. \tag{4.33}$$

Коэффициенты в уравнении (4.33) выражаются через вычисленные ранее коэффициенты следующими зависимостями:

$$p_1 = k_1 - k_4 + k_6,\ p_2 = 2(k_5 - k_2), p_3 = -2k_1 + 4k_3 + 2k_6,$$
$$p_4 = 2(k_2 + k_5),\ p_5 = k_1 + k_4 + k_6.$$

Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta$ определяет уравнение контура $y = f(x)$ в декартовой системе координат, отвечающее решению (4.21) при условии равнодеформируемости семейств волокон.

Описанный в главе подход позволяет по заданному полю деформаций построить уравнение контура и установить взаимосвязь между граничным контуром и нагрузками, приложенными к контуру в рассматриваемой конфигурации трех семейств криволинейных волокон.

В главе 4 в рамках плоской задачи на основе структурной модели в декартовой системе координат построены разрешающие системы уравнений для возможных комбинаций армирования тремя нерастяжимыми и равнонапряженными семействами волокон. С помощью алгоритма построения инвариантных решений уравнений в частных производных найдены некоторые точные решения этой модели. На основе полученных решений найдено уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости волокон. Рассмотрена комбинация семейств волокон, когда два семейства армирующих волокон задаются известными функциями декартовых координат, а третье семейство расположено в направлении угла армирования, представляющем собой неизвестную функцию.

Основные результаты настоящей главы опубликованы в работах [144, 113, 115, 69, 74].

Глава 5

Армирование в полярной системе координат

5.1 Постановка задачи в полярной системе координат

При исследовании напряжений в круглых кольцах и дисках, эллиптических плитах используют полярную систему координат. Примеры исследования армированных пластинок в полярной системе приведены в [15, 19, 22, 57].

Осуществим в рамках подхода, сформулированного в главе 1, переход от общей ортогональной криволинейной системы координат к полярной системе. Зависимость между декартовыми координатами (x, y) на плоскости и ортогональными криволинейными координатами (ξ, η) представляется в следующем виде:

$$x + iy = F(\xi + i\eta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta) \tag{5.1}$$

Для полярной системы координат обозначим $\xi = \rho$, $\eta = \theta$. Декартова сетка переходит в полярную с помощью отображения [47]

$$x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{5.2}$$

Координатные линии – семейство окружностей $x^2 + y^2 = \rho^2$ и семейство прямых $y = \ x\operatorname{tg}\theta$. Условия Коши – Римана для (5.1), (5.2) при переходе от декартовых координат (x, y) к полярным ρ, θ приобретают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \tag{5.3}$$

их проверка показывает аналитичность функции (5.2).

Компоненты метрического тензора g_{11}, g_{22} вычисляются по формулам (1.3) и даются зависимостями

$$g_{11} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

$$g_{22} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho^2.$$

Дифференциальные коэффициенты Ламе имеют значения $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, отличные от нуля символы Кристоффеля второго рода соответственно равны $\Gamma^1_{22} = -\rho$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{\rho}$.

Выполним в уравнениях общей криволинейной системы координат, установленных в главе 1, переход к полярной, заменив коэффициенты Ламе вычисленными выше значениями. Предварительно введем обозначения: σ_ρ, σ_θ, $\sigma_{\rho\theta}$ – компоненты тензора напряжений в полярной системе координат, где σ_ρ – нормальное напряжение по направлению радиуса или радиальное напряжение, σ_θ – нормальное напряжение в перпендикулярном направлении или тангенциальное напряжение, $\sigma_{\rho\theta}$ – касательное напряжение. Обозначим ε_ρ, ε_θ, $\varepsilon_{\rho\theta}$ – компоненты тензора деформаций, u_ρ, u_θ – компоненты вектора смещений в полярной системе координат. Обозначения для деформаций в волокне, интенсивностей армирования, используемых упругих постоянных и температуры остаются без изменения. Угол армирования φ_m в полярной системе координат вводится как угол между волокном m-го семейства, определяемого касательной в точке M, и радиальным направлением OM. Геометрически введение угла армирования φ представлено на рис. 5.1, где показано, что α – это угол, составленный касательной к траектории армирования в точке $M(\rho, \theta)$ с положительной полуосью OX. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} : \frac{dx}{d\theta} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta},$$

где $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$. С учетом соотношений $\varphi = \alpha - \theta$ (рис. 5.1) и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}$, подстановка выражения для $\operatorname{tg}\alpha$ дает формулу для вычисления угла армирования φ в полярной системе координат

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho}{\rho'}, \text{ или } \rho' = \rho\operatorname{ctg}\varphi. \tag{5.4}$$

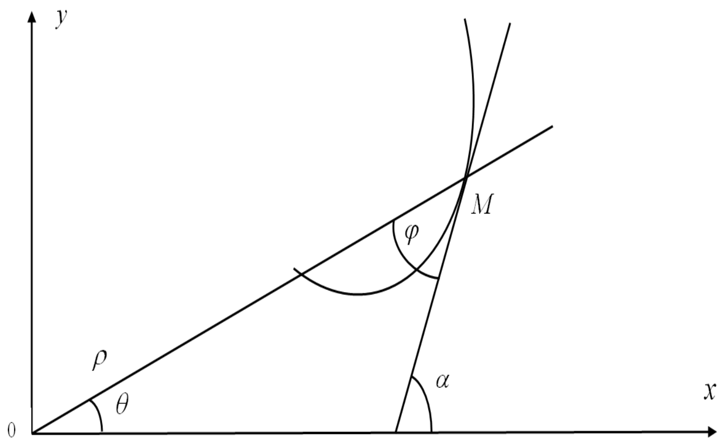


Рис. 5.1

Соотношения, представляющие связь между компонентами тензора напряжений и деформаций для двух семейств армирующих волокон (1.5) в полярной системе имеют следующий вид:

$$\sigma_\rho = \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta - L^T) + \omega_1\sigma_1\cos^2\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\cos^2\varphi_2, \tag{5.5}$$
$$\sigma_\theta = \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho - L^T) + \omega_1\sigma_1\sin^2\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\sin^2\varphi_2,$$
$$\sigma_{\rho\theta} = \Omega\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta} + \omega_1\sigma_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2,$$
$$\Omega = 1 - (\omega_1(\rho,\theta) + \omega_2(\rho,\theta)).$$

Деформации в первом ε_1^0 и втором ε_2^0 семействе волокон в полярной системе находим по формулам (1.36)

$$\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_1 + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_1 + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_1\sin\varphi_1 = \varepsilon_1^0, \tag{5.6}$$
$$\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_2 + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_2 + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_2\sin\varphi_2 = \varepsilon_2^0.$$

Условие постоянства сечений волокон (1.10) в полярной системы координат принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_1\cos\varphi_1) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_1\sin\varphi_1) = 0, \tag{5.7}$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_2\cos\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_2\sin\varphi_2) = 0.$$

Дифференциальные соотношения Коши (1.12) имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho},\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho},$$
$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}).$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \Phi_1(\rho,\theta) = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\theta} + \Phi_2(\rho,\theta) = 0. \quad (5.8)$$

Компоненты вектора массовых сил в радиальном и окружном направлении обозначены как $\Phi_1(\rho,\theta)$ и $\Phi_2(\rho,\theta)$ соответственно.

Уравнение совместности деформаций (1.17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\rho\theta}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho}(2\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial \varepsilon_{\rho\theta}}{\partial \theta}) = 0.$$

5.2 Пример решения задачи для кольцевой пластины

Рассмотрим круглую кольцевую пластинку, армированную двумя семействами равнонапряженных волокон из одинаковых материалов постоянного поперечного сечения, расположенных симметрично относительно радиальных направлений. Пусть пластинка нагружена по внутреннему и внешнему контурам, имеющим радиусы ρ_0 и ρ_1, равномерно распределенными нормальными нагрузками q и p. В силу симметрии задачи и отсутствия касательных нагрузок на контурах выполняются соотношения $\sigma_{\rho\theta} = 0$, $\varepsilon_{\rho\theta} = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega/2$, $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$. $E_1 = E_2$. Здесь φ_m – угол между волокном m-го семейства и радиальным направлением ($m = 1, 2$).

Уравнения (5.6)–(5.8) в сформулированных условиях упростятся:

$$\rho\omega\cos\varphi = \omega_0 = Const,$$
$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0,\ \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho}{\rho} = 0, \quad (5.9)$$
$$\varepsilon_\rho\cos^2\varphi + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi = \varepsilon_1.$$

После перехода к безразмерным переменным $R = \dfrac{\rho}{\rho_0}$, $R_0 = \dfrac{\rho_1}{\rho_0}$, $\sigma_R = \dfrac{\sigma_\rho}{\sigma_1}$, $\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_\theta}{\sigma_1}$, $\varepsilon = 1 - \dfrac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_1}$, $U = \cos^2\varphi$, $E^0 = \dfrac{\Omega E}{(1-\nu)E_1}$ связь между напряжениями и деформациями запишем в виде

$$\sigma_R = E^0 + E^0\varepsilon\frac{(\frac{1}{U} - 1 - \nu)}{(1+\nu)} + \frac{\omega_0\sqrt{U}}{R},$$

$$\sigma_\theta = E^0 + E^0\varepsilon\frac{(\frac{\nu}{U} - 1 - \nu)}{(1+\nu)} + \frac{\omega_0(1-U)}{R\sqrt{U}}, \tag{5.10}$$

уравнение совместности деформаций в введенных обозначениях

$$\frac{d\varepsilon}{dR} + \frac{\varepsilon}{RU} = 0. \tag{5.11}$$

Подставим полученные соотношения в уравнения равновесия (5.9), исключим ε, придем к одному уравнению относительно U. Оно и будет определяющим уравнением для направлений армирования:

$$2R^2U(4U-3)\frac{d^2U}{dR^2} - 3R^3(\frac{dU}{dR})^3 - R^2(6U-1)(\frac{dU}{dR})^2 +$$

$$+2R(10U^2 - 11U + 4)\frac{dU}{dR} - 4(U-1)^2(2U-1) = 0. \tag{5.12}$$

Установим траектории армирования для однородного деформированного состояния $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_1$. Воспользуемся уравнением (5.4), частное решение для $U = \cos^2\alpha$ уравнения (5.12) в этом случае равно $U = 1 - \dfrac{C^2}{R^2}$, где C – произвольная константа. Тогда для угла армирования справедливо соотношение

$$\operatorname{ctg}\varphi = \pm\frac{\sqrt{R^2 - C^2}}{C}. \tag{5.13}$$

С учетом этого соотношения и (5.4) устанавливаем дифференциальное уравнение для траекторий армирования в случае однородного деформированного состояния:

$$\frac{dR}{d\theta} \pm R\frac{\sqrt{R^2 - C^2}}{C} = 0. \tag{5.14}$$

Укажем ограничения для решения: $|R| \geq |C|$. Можно выписать точное решение уравнения как общий интеграл вида

$$\theta \pm \operatorname{arctg}(\frac{C}{\sqrt{R^2 - C^2}}) = C_1^{\pm}, \tag{5.15}$$

где $C_1^{\pm}$— произвольные константы интегрирования. Семейства армирующих волокон укладываются вдоль прямых линий, проходящих на расстоянии C от начала координат. Представим полученное решение в явном виде $R = \pm\sqrt{C + \dfrac{C}{\operatorname{tg}^2(C_1^{\pm} - \theta)}}$.

В полярной системе координат полученные интегральные кривые дают следующую структуру армирования рассматриваемой кольцевой пластинки: для пластин разных размеров ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$) и ($R_1 = 3$, $R_2 = 5$) укладка продемонстрирована соответственно на рис. 5.2, 5.3.

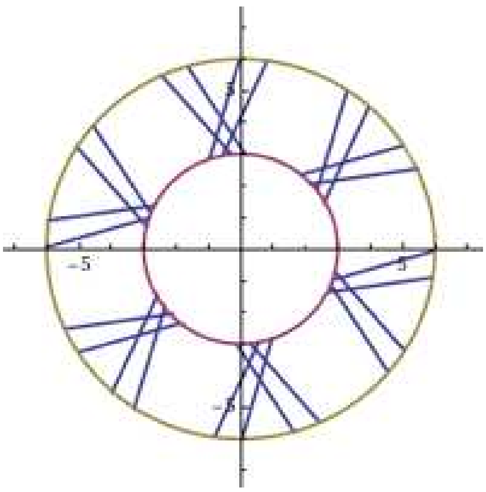


Рис. 5.2 $R_1 = 1$, $R_2 = 2$

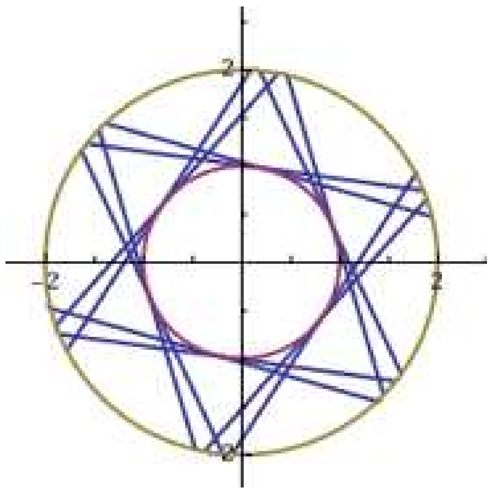


Рис. 5.3 $R_1 = 3$, $R_2 = 5$

В общем случае решение находится численно из уравнения (5.12) методами типа Рунге – Кутты и Адамса [104]. Результат численного решения для определения направления армирования U представлен на рис. 5.4. Нелинейное уравнение после замены расщепляется на систему дифференциальных уравнений первого порядка. Предлагается следующая замена и расщепление уравнения (5.12) соответственно:

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{4} - v \\ \frac{dv}{dR} &= \frac{2v\omega - 1}{2R} \\ \frac{d\omega}{dR} &= \frac{(3v\omega - 2v - 2)(\omega^2 - 4)}{2R(4v - 3)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Проверка эквивалентности нелинейного уравнения (5.12) и системы (5.16) проведена в системе компьютерной алгебры Maple 13 с помощью символьных преобразований. Начальные условия для решения системы двух уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты-Фелберга ставятся из граничных условий задачи (радиальная нагрузка) на внутреннем и внешнем контуре. Создан программный модуль в среде Maple по определению траекторий армирования кольцевой пластины при заданных нагрузках.

Решения уравнения (5.12) не всегда имеют действительные значения. Возможны случаи, когда на некотором интервале для R вида $R_* < R < R_0$ функция $U < 0$, и, следовательно, значения косинуса угла армирования имеет комплексные значения. Решение во всей области не существует. Но его можно создать добавляя другие типы армирования: с одним или тремя семействами армирующих волокон. Для решения рассматриваемой задачи необходимо сочленять на границе области решения двух типов: с одним углом армирования и с двумя углами. При достижении углом армирования значения $\varphi = 0$ при $R = R_* < R_0$ производится склейка области с двумя семействами волокон и области с одним радиальным семейством волокон. Такой пример построен в работе [18]. На рис. 5.5 показаны траектории армирования пластинки при значениях внешних нагрузок $q = 0,35$, $p = 0,13$. Граница областей с одним и двумя семействами волокон выделена на рис. 5.5 штриховой линией. Радиус этой окружности $R_* = 3,35$.

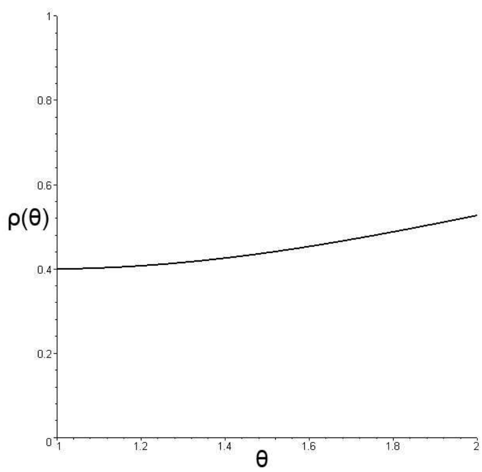


Рис. 5.4

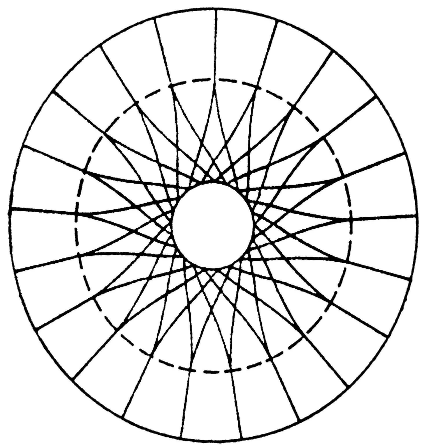


Рис. 5.5

5.3 Изогональные траектории в полярной системе координат

Пусть задана полярная система координат ρ, θ. Запишем соотношение (3.33), отражающее геометрическое определение изогональных траекторий, связывающее направления траекторий и направления семейства, в полярной системе координат. Учтем, что тангенс угла μ между полярным радиусом и касательной в фиксированной точке для любой линии, заданной уравнением $\rho = \rho(\theta)$ в полярных координатах, равен $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{\rho}{\rho'}$. Последняя формула выражает геометрический смысл производной функции $\rho = \rho(\theta)$. Тогда соотношение (3.33) переформулируется для полярной системы следующим образом

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{k\dfrac{\rho_1}{\rho_1'} + 1}{\dfrac{\rho_1}{\rho_1'} - k}. \tag{5.17}$$

В (5.17) величина $k = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ – постоянный угол, под которым данное семейство пересекается семейством изогональных траекторий.

Пусть дано однопараметрического семейство кривых в полярной системе координат $\Phi(\rho, \theta, a) = 0$. Для построения изогональных траекторий необходимо составить дифференциальное уравнение семейства. Затем заменить в нем $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$ на производные по формуле (5.17). В результате получим дифференциальное уравнение для определения изогональной траектории в полярной системе координат.

Когда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то производная ρ' заменяется на $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$ (осуществляется предельный переход в (5.17) при $k \to \infty$).

Пример 1. Рассмотрим пример построения семейства изогональных траекторий к семейству кардиоид. Пусть задано семейство кардиоид в полярной системе координат:

$$\rho = a(1 + cos\theta),$$

где a – параметр. Дифференцируем уравнение семейства по θ, из полученного уравнения и уравнения семейства исключаем параметр a, находим искомое дифференциальное уравнение семейства

$$\rho'(1 + cos\theta) + \rho \sin\theta = 0. \tag{5.18}$$

Заменим в (5.18) производные по формуле (5.17), индексы опускаем, получим уравнение для изогональных траекторий

$$\rho'(1 + \cos\theta - k\sin\theta) + \rho(k + \sin\theta + k\cos\theta) = 0.$$

Интеграл данного уравнения удается найти в аналитическом виде

$$\rho(\theta) = C\frac{1 - k\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2}}, \tag{5.19}$$

где C – произвольная постоянная. После применения тригонометрических формул (5.19) запишем в виде

$$\rho(\theta) = C(k^2\cos\theta - \cos\theta + 2k\sin\theta - k^2 - 1).$$

В случае $k = \mathrm{tg}\, a$ кривые, пересекающие заданное семейство кардиоид под углом a, задаются в виде

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta - 2a)).$$

Иллюстрация приведена на рис. 5.6 для различных значений тангенса угла $k = 1, 2, 3, 4, 6, 8$.

Семейство кардиоид и ему изогональные траектории, пересекающие кривые данного семейства под углом $\alpha = \pi/4$, изображены на рис. 5.8.

Пример 2. Рассмотрим семейство логарифмических спиралей $\rho(\theta) = ae^{\theta}$. Дифференциальное уравнение семейства $\rho' = \rho$. Изогональные траектории найдем, решив уравнение для фиксированных значений k

$$\frac{\rho' + k\rho}{\rho - k\rho'} = 1.$$

Если $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, то решение этого уравнения $\rho = Const$, т.е. заданное семейство спиралей под углом $\dfrac{\pi}{4}$ пересекает семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 5.7).

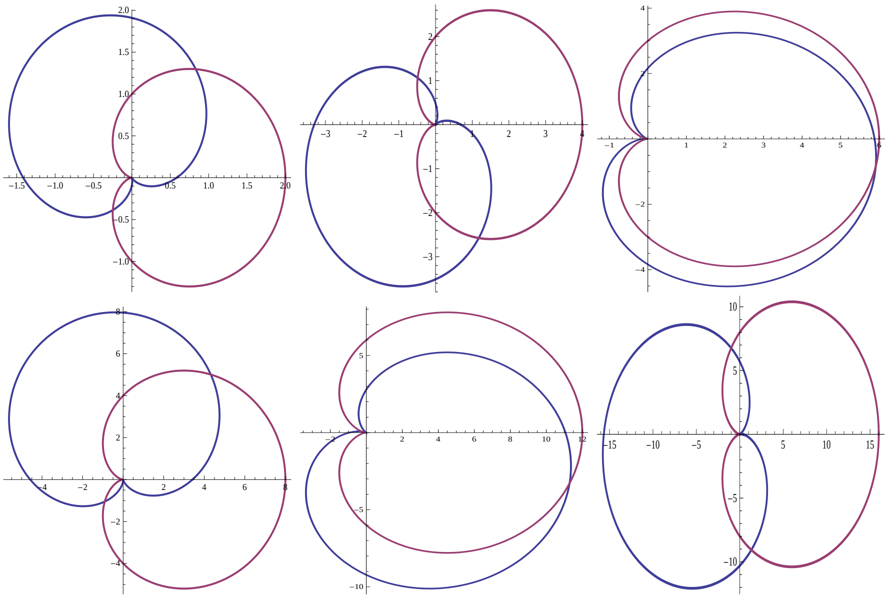


Рис. 5.6

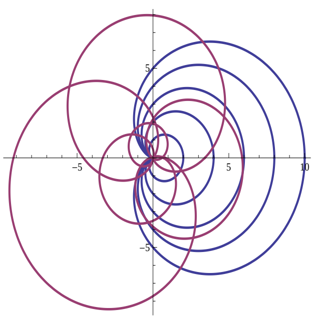


Рис. 5.7

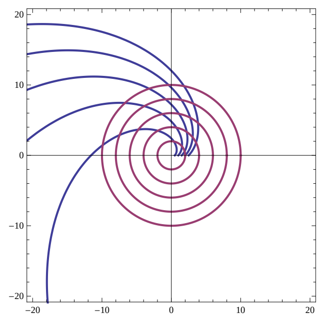


Рис. 5.8

Пример 3. Введем специальную структуру армирования представляющую собой прямолинейные радиальные направления. Это пучок прямых с центром в начале координат. Пусть тангенс угла пересечения семейства прямых изогональными траекториями равен $k = \operatorname{tg}\alpha$, причем $\alpha \neq \pi/2$. Уравнение изогональных траекторий к данному семейству в полярной системе координат дает семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Ce^{\frac{\theta}{k}}$, где C – произвольная константа.

Множество структур армирования на основе выбранного прямолинейного радиального направления представлено на рис. 5.9 – 5.13 для значений $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 10$, $k = 20$ соответственно.

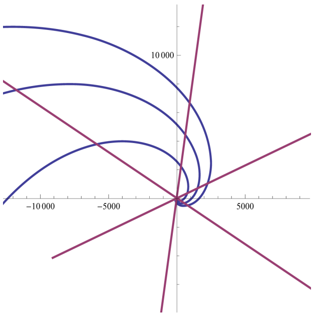


Рис. 5.9

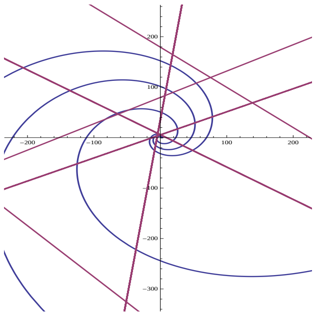


Рис. 5.10

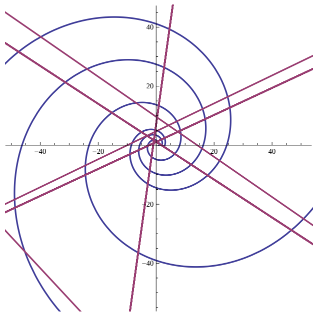


Рис. 5.11

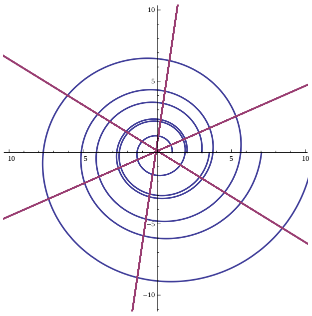


Рис. 5.12. Изогональные траектории к радиальным направлениям при $k = 10$

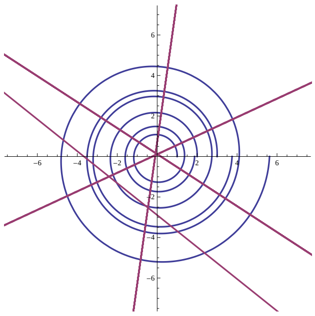


Рис. 5.13. Изогональные траектории к радиальным направлениям при $k = 20$

Заметим, что при технологической реализации процесса изготовления армированной конструкции необходимо произвести вырез в виде некоторой окружности в начале координат, затем волокна располагают вдоль радиальных направлений. В качестве второго семейства армирующих волокон предлагается выбирать построенные изогональные траектории, т.е. найденные разнообразные семейства логарифмических спиралей.

В главе 5 поставлена плоская задача армированных сред в полярной системе координат. Найдены разнообразные структуры армирования по изогональным траекториям. Рассмотрено армирование вдоль траекторий, изогональных радиальным направлениям. Решена обратная задача для армированной кольцевой пластины.

Содержание главы 5 отражено в публикациях [69, 128].

Глава 6

Моделирование криволинейно армированных пластин в осесимметрическом случае в полярной системе координат

6.1 Постановка задачи армированной среды в осесимметрическом случае

Напряженно - деформированное состояние армированной пластины в полярной системе координат (ρ, θ) относительно компонент тензоров деформаций $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\rho\theta}$ и напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ в осесимметрическом случае (искомые функции не зависят от полярного угла θ) описывается приводимыми ниже соотношениями (6.1) – (6.5). Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \qquad (6.1)$$
$$\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\theta} = 0.$$

Пусть армирование выполнено m семействами волокон $(m = 1, 2, 3)$, φ_m – углы армирования, ε_m – деформация в $m-$ семействе волокон, ω_m – интенсивность армирования m-м семейством волокон. Деформации в $m-$ семействе волокон в полярной системе определим по структурной модели [142]

$$\varepsilon_\rho \cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_m \sin\varphi_m = \varepsilon_m. \qquad (6.2)$$

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора смещений u_ρ, u_θ, в условиях осесимметричной деформации имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho},\ \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho},\ \ \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}. \tag{6.3}$$

Пусть m^* – некоторое фиксированное число семейств армирующих волокон. Закон Гука для неоднородного армированного материала с числом семейств армирующих волокон m^* запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m\omega_m\cos^2\varphi_m,\\
\sigma_\theta &= \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m\omega_m\sin^2\varphi_m,\\
\sigma_{\rho\theta} &= \Omega\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta} + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m\omega_m\cos\varphi_m\sin\varphi_m,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

где E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала, $\Omega = 1 - \sum_{m=1}^{m^*}\omega_m$ – удельная интенсивность прослоек связующего между армирующими слоями. В соотношения (6.4) входят напряжения в волокне σ_m , они удовлетворяют закону Гука. Интенсивность армирования ω_m m-м семейством волокон удовлетворяет условиям постоянства сечений волокон в полярной системе координат [19, 69] вида

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_m\cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_m\sin\varphi_m) = 0. \tag{6.5}$$

Интенсивность ω_m определяется из (6.5) после введения углов армирования φ_m при задании уравнений конкретных траекторий армирования $\rho = \rho(\theta)$ и задания начальных условий выхода арматуры.

6.2 Разрешающая система уравнений в перемещениях

Формулируется задача об осесимметричной деформации армированной пластины относительно радиального и окружного перемещений u_ρ, u_θ. Для этого соотношения (6.4) подставим в уравнения равновесия (6.1), предварительно напряжения σ_m в $m-$ом семействе волокон найдем по формулам

$$\sigma_m = E_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_m\sin\varphi_m). \tag{6.6}$$

Введем вспомогательные обозначения $m_1 = \Omega \dfrac{E}{1-\nu^2}$, $m_2 = \Omega \dfrac{E}{1+\nu}$, заметим, что если интенсивности зависят от ρ, то и m_1, m_2 – функции ρ. Напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ с учетом структурных характеристик примут вид

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho = m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho \cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2\varphi_m + \\
+\varepsilon_{\rho\theta} \sin\varphi_m \cos\varphi_m) \cos^2\varphi_m, \\
\sigma_\theta = m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho \cos^2\varphi_m + \\
+\varepsilon_\theta \sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \sin\varphi_m \cos\varphi_m) \sin^2\varphi_m, \\
\sigma_{\rho\theta} = m_2\varepsilon_{\rho\theta} + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho \cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2\varphi_m + \\
+\varepsilon_{\rho\theta} \sin\varphi_m \cos\varphi_m) \sin\varphi_m \cos\varphi_m.
\end{gathered} \tag{6.7}$$

Вводятся коэффициенты a_{ij} $i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{gathered}
a_{11} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^4\varphi_m,\ a_{12} = \nu m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^2\varphi_m \sin^2\varphi_m, \\
a_{13} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^3\varphi_m \sin\varphi_m,\ a_{22} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \sin^4\varphi_m, \\
a_{23} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos\varphi_m \sin^3\varphi_m,\ a_{33} = m_2 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^2\varphi_m \sin^2\varphi_m.
\end{gathered} \tag{6.8}$$

Тогда напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= a_{11}\varepsilon_\rho + a_{12}\varepsilon_\theta + a_{13}\varepsilon_{\rho\theta}, \\
\sigma_\theta &= a_{12}\varepsilon_\rho + a_{22}\varepsilon_\theta + a_{23}\varepsilon_{\rho\theta}, \\
\sigma_{\rho\theta} &= a_{13}\varepsilon_\rho + a_{23}\varepsilon_\theta + a_{33}\varepsilon_{\rho\theta}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

После подстановки (6.9) в уравнения равновесия (6.1) с учетом (6.3) получим относительно компонент перемещений следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
a_{11}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2}+a_{13}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2}+(\frac{da_{11}}{d\rho}+\frac{a_{11}}{\rho})\frac{du_\rho}{d\rho}+(-\frac{a_{23}}{\rho}+\frac{da_{13}}{d\rho})\frac{du_\theta}{d\rho}+\\
+(\frac{1}{\rho}\frac{da_{12}}{d\rho}-\frac{a_{22}}{\rho^2})u_\rho+(-\frac{1}{\rho}\frac{da_{13}}{d\rho}+\frac{a_{23}}{\rho^2})u_\theta=0, \qquad (6.10)\\
a_{13}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2}+a_{33}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2}+(\frac{da_{13}}{d\rho}+\frac{a_{23}}{\rho}+\frac{2a_{13}}{\rho})\frac{du_\rho}{d\rho}+(\frac{da_{33}}{d\rho}+\frac{a_{33}}{\rho})\frac{du_\theta}{d\rho}+\\
+(\frac{1}{\rho}\frac{da_{23}}{d\rho}+\frac{a_{23}}{\rho^2})u_\rho+(-\frac{1}{\rho}\frac{da_{33}}{d\rho}-\frac{a_{33}}{\rho^2})u_\theta=0.
\end{gathered}
$$

Система (6.10) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно компонент перемещений u_ρ, u_θ. К системе (6.10) присоединим четыре граничных условия на внешнем и внутреннем контуре кольцевой пластины. Пусть на внутреннем контуре при $\rho=\rho_1$ заданы перемещения:

а) $u_\rho=C_1^*,\ u_\theta=C_2^*$ (при $C_1^*=0,\ C_2^*=0$ – жестко закрепленный вал, при $C_1^*=0,\ C_2^*\neq 0$ возможно скручивание вала).

б) На внешнем контуре $\rho=\rho_2$ заданы радиальное и касательное усилия $p_n,\ p_\tau$. С учетом соотношений (6.9) и (6.3) условия на внешнем контуре примут вид

$$
\begin{gathered}
a_{11}\frac{du_\rho}{d\rho}+a_{12}\frac{u_\rho}{\rho}+a_{13}(\frac{du_\theta}{d\rho}-\frac{u_\theta}{\rho})\Big|_{\rho=\rho_2}=p_n,\\
a_{13}\frac{du_\rho}{d\rho}+a_{23}\frac{u_\rho}{\rho}+a_{33}(\frac{du_\theta}{d\rho}-\frac{u_\theta}{\rho})\Big|_{\rho=\rho_2}=p_\tau.
\end{gathered}
$$

Возможны следующие комбинации в граничных условиях: на внутреннем контуре задано одно из усилий и одно из перемещений, на внешнем - оставшееся усилие и перемещение. Система (6.10) и граничные условия а), б) представляют собой двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В граничные условия а), б) для общего случая армирования входят как обе неизвестные функции u_ρ, u_θ, так и их производные. Коэффициенты в (6.10) содержат полный набор структурных характеристик материала: число m^* семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность ω_m и тригонометрические функции углов армирования φ_m.

Особенность этой задачи состоит в том, что система является не разрешенной относительно старшей производной. Для ее решения необходимо строить численную схему, учитывающую ее особенности. Что и будет выполнено в следующем пункте настоящей главы.

6.3 Численное решение задачи

В данном параграфе рассматриваются вопросы численного решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, не разрешенных относительно старших производных. Запишем исходную систему уравнений (6.10) в виде

$$B_1(\rho)\frac{d^2}{d\rho^2}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} + B_2(\rho)\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} + B_3(\rho)\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0, \qquad (6.11)$$

где $B_i(\rho) = \begin{pmatrix} b^i_{11}(\rho) & b^i_{12}(\rho) \\ b^i_{21}(\rho) & b^i_{22}(\rho) \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3.$

В последнем выражении $B_i(\rho)$ – матрицы коэффициентов, образованные из коэффициентов a_{ij}, приведенные в (6.8) и учитывающие все структурные характеристики армированного материала. Приведем матрицу B_1 коэффициентов при производных второго порядка

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a_{33}(\rho)}{a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2} & -\dfrac{a_{13}(\rho)}{a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2} \\ -\dfrac{a_{13}(\rho)}{a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2} & \dfrac{a_{11}(\rho)}{a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2} \end{bmatrix}$$

Определитель функциональной матрицы $B_1(\rho)$ равен выражению

$$\frac{1}{a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2},$$

знаменатель которого не равен нулю для коэффициентов $a_{ij}(\rho)$ армированного материала, определяемых по формулам (6.8).

Тогда система уравнений (6.11) примет вид

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} + M_2(\rho)\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} + M_3(\rho)\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0, \qquad (6.12)$$

где M_2 – матрица коэффициентов при производных первого порядка,

$$M_2(\rho) = \left[\begin{array}{cc} m_{11}^2(\rho) & m_{12}^2(\rho) \\ m_{22}^2(\rho) & m_{22}^2(\rho) \end{array} \right],$$

где

$$m_{11}^2 = \frac{a_{33}(\rho)\dfrac{da_{11}(\rho)\rho}{d\rho} + a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) + a_{13}(\rho)a_{23}(\rho) - a_{13}(\rho)\dfrac{da_{13}(\rho)\rho}{d\rho}}{\rho\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{12}^2 = \frac{a_{13}(\rho)\dfrac{da_{11}(\rho)\rho}{d\rho} + a_{13}(\rho)a_{11}(\rho) + a_{11}(\rho)a_{23}(\rho) - a_{11}(\rho)\dfrac{da_{13}(\rho)\rho}{d\rho}}{\rho\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{21}^2 = -\frac{a_{33}(\rho)\rho^2\dfrac{da_{13}(\rho)\rho}{d\rho} - a_{33}(\rho)\rho a_{23}(\rho) + a_{13}(\rho)a_{33}(\rho)\rho + a_{11}(\rho)\dfrac{da_{23}(\rho)\rho}{d\rho}}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{22}^2 = -\frac{a_{33}(\rho)\rho^2\dfrac{da_{13}(\rho)\rho}{d\rho} - a_{33}(\rho)\rho a_{23}(\rho) + a_{13}(\rho)a_{33}(\rho)\rho + a_{11}(\rho)\dfrac{da_{23}(\rho)\rho}{d\rho}}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$M_3(\rho)$– матрица коэффициентов при векторе решений $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix}$,

$$M_3(\rho) = \left[\begin{array}{cc} m_{11}^3(\rho) & m_{12}^3(\rho) \\ m_{22}^3(\rho) & m_{22}^3(\rho) \end{array} \right],$$

$$m_{11}^3 = -\frac{a_{33}(\rho)\rho\dfrac{da_{13}(\rho)}{d\rho} - a_{33}(\rho)\rho a_{23}(\rho) + a_{13}(\rho)\rho a_{23}(\rho) + a_{11}(\rho)\dfrac{da_{23}(\rho)\rho}{d\rho}}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{12}^3 = -\frac{-a_{13}(\rho)\rho a_{22}(\rho) + a_{13}(\rho)\rho\left(\dfrac{da_{12}(\rho)}{d\rho}\right) - a_{11}(\rho)a_{23}(\rho) + a_{11}(\rho)\dfrac{da_{13}(\rho)}{d\rho}\rho}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{21}^3 = \frac{a_{33}(\rho)\left(\dfrac{da_{13}(\rho)}{d\rho}\right) + a_{33}(\rho)\rho a_{23}(\rho) + a_{13}(\rho)\left(\dfrac{da_{33}(\rho)}{d\rho}\right) + a_{13}(\rho)a_{33}(\rho)}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)},$$

$$m_{12}^3 = -\frac{a_{13}(\rho)\left(\dfrac{da_{23}(\rho)}{d\rho}\right) + a_{13}(\rho)a_{23}(\rho) + a_{11}(\rho)\left(\dfrac{da_{33}(\rho)}{d\rho}\right) + a_{11}(\rho)a_{33}(\rho)}{\rho^2\left(a_{11}(\rho)a_{33}(\rho) - a_{13}(\rho)^2\right)}.$$

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (6.12), разрешенная относительно старших производных, в [106] называется канонической системой. Для канонической системы в [106] доказана теорема существования и единственности: если правые части канонической системы являются непрерывными в некоторой области, включающей точку $(\rho_1, u_\theta\ (\rho_1), u_\rho(\rho_1))$ и удовлетворяют в этой области условиям Липшица по $u_\theta(\rho_1)$, $u_\rho(\rho_1)$, то существует одно и только одно решение системы (6.12), определенное в некотором замкнутом интервале $[\rho_1 - \delta, \rho_1 + \delta]$ и удовлетворяющее начальным условиям при $\rho = \rho_1$

$$u_\theta(\rho_1) = u_\theta^0,\ u_\rho(\rho_1) = u_\rho^0.$$

Рассмотрим решение системы (6.12) на интервале $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$. Правая часть этой системы равна нулю, поэтому система однородная. Поставим краевые условия l_i, $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
&l_1(\rho = \rho_1) = u_\rho(\rho_1) = C_1^*,\\
&l_2(\rho = \rho_2) = a_{11}u_\rho(\rho_2) + a_{12}\frac{u'_\rho(\rho_2)}{\rho} + a_{13}\left(\frac{du_\theta(\rho)}{d\rho} - \frac{u_\theta(\rho)}{\rho}\right)\bigg|_{\rho=\rho_2} = p_n,\\
&l_3(\rho = \rho_1) = u_\theta(\rho_1) = C_2^*,\\
&l_4(\rho = \rho_2) = a_{13}u_\rho(\rho_2) + a_{23}\tfrac{u'_\rho(\rho_2)}{\rho} + a_{33}\left(\frac{du_\theta(\rho)}{d\rho} - \frac{u_\theta(\rho)}{\rho}\right)\bigg|_{\rho=\rho_2} = p_\tau.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Запишем краевые условия в виде

$L\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R^*\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r \\ p_\tau \end{pmatrix}$, где размерности матриц L, R^* равны 2×4.

Система дифференциальных выражений

$$L\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} = \frac{d^2}{d\rho^2}\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} + M_2(\rho)\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} + M_3(\rho)\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \\ u'_\rho \\ u'_\theta \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

и граничные условия порождают в $L_2[\rho_1, \rho_2]$ некоторый оператор [6].

Для разрешимости краевой задачи необходимо установить, когда однородная задача

$$L\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0,\ l_k\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_1$, $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_2$, $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_3$, $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_4$ – линейно независимые решения дифференциального уравнения $L\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_1 + \mathrm{d}_2 \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_2 + \mathrm{d}_3 \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_3 + d_4 \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_4 .$$

Для того, чтобы были выполнены граничные условия, необходимо выполнение равенств

$$d_1 l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_1 + d_2 l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_2 + d_3 l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_3 + d_4 l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_4 = 0,$$

где $k = 1, 2, 3, 4.$

Отсюда следует, что ранг матрицы

$$l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$$

должен быть равен четырем.

Используя метод Лагранжа вариации постоянных, можно показать [25, 6], что задача с граничными условиями имеет единственное решение.

Выполним метод редукции к задачам Коши [9, 6]. Полагаем, что для системы (6.14) выполняются все условия, при которых задача Коши с начальным условием $\begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$, имеет единственное решение [45]. А именно, правые части уравнений – непрерывные функции на интервале и удовлетворяют условиям Липшица.

Определим полную систему линейно независимых векторов, удовлетворяющих граничному условию на левом конце интервала $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$. Обозначим эти векторы

$$z_1 = \begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix}_1, \; \mathrm{z}_2 = \begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix}_2.$$

Этих векторов будет два, еще два вектора удовлетворят граничным условиям на правом конце.

Вычислим с помощью численного метода частные решения системы (6.14), удовлетворяющие начальным условиям из выбранного множества линейно независимых векторов

$$z_j^0 = \begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix}_j, j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда многообразие всех решений системы (6.14) $z(x) = \begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix}_j$, удовлетворяющих левому граничному условию задается равенством

$$z(\rho) = \sum_{i=1}^{4} d_i l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_i, r = 1, 2. \tag{6.15}$$

Чтобы найти искомое решение краевой задачи, надо выделить из этого многообразия решение, удовлетворяющее правому граничному условию. Коэффициенты d_i определяются из системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$R^* \left[\sum_{i=1}^{4} d_i l_k \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \\ u'_\rho(\rho) \\ u'_\theta(\rho) \end{pmatrix}_i \right] = \begin{pmatrix} p_n \\ p_\tau \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица R^* задает правое граничное условие.

Полагая, что исходная система из двух уравнений второго порядка (6.11) однозначно разрешима, определитель записанной выше системы будет отличен от нуля, в противном случае, однородная краевая задача с нулевыми граничными условиями имела бы ненулевой решение. Если d_1, d_2, d_3, d_4 – решение системы (6.14), то вектор функция $\sum_{j=1}^{4} d_j z_j(\rho)$ будет решением краевой задачи (6.11), (6.12).

Однако, если собственные значения матрицы коэффициентов сильно различаются, то в процессе интегрирования будет сильно увеличиваться ошибка численного счета и система векторов $\{z_j(\rho)\}$ будет сильно "сплющиваться", что может приводить к потере верных знаков в численном решении [6].

Для предотвращения таких последствий в [6] предлагается проводить пошаговую ортогонализацию определяемых разложений многообразий решений, данный метод называется также ортогональной прогонкой [9].

Пусть весь интервал $[\rho_1, \rho_2]$ разбит на n участков точками $\rho_1 = s_1 < s_2 = s_1 + h_1 < s_3 = s_2 + h_2 < ... < \rho_2 = s_n$.

Выбираем линейно независимые начальные данные $z_j^0 = \begin{pmatrix} u_\rho(\rho_1) \\ u_\theta(\rho_1) \\ u'_\rho(\rho_1) \\ u'_\theta(\rho_1) \end{pmatrix}_j$, проинтегрировав систему (6.12) с этими начальными данными на интервале $[s_1, s_2]$, получим векторы решений z_1, z_2, z_3. Проортогонализируем и пронормируем эти векторы в точке s_2, обозначим их orz_1, orz_2, orz_3. Вектор $orz_1(s_2)$, получим вычитая из вектора $z_1(s_2)$ его проекцию в пространство, натянутое на векторы $z_2(s_2), z_3(s_2)$. Вектор $orz_1(s_2)$ не нормируется.

С помощью численного интегрирования и ортогонализаций строится последовательность систем векторов

$\{z_j(s_2)\} = U^{(1)}\{N_1 z_j(s_1)\}, \{z_j(s_3)\} = U^{(2)}\{N_2 z_j(s_2)\}, ...,$
$\{z_j(s_n)\} = U^{(n-1)}\{N_{n-1} z_j(s_{n-1})\}, j = 1, 2, 3.$

Любое решение системы (6.12), удовлетворяющее граничным условиям на левом конце, принимает на правом значение, представимое в виде

$$z(\rho_2) = \sum_{j=1}^{3} \beta_j^{(n-1)} z_j(s_{n-1}).$$

В промежуточных точках значения решения определяются по рекуррентным формулам, составленным с помощью формулы правой части системы и матрицы ортогонализации [25, 6].

В большинстве работ для того,чтобы найти численные решения системы (6.11), эту систему преобразуют к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка и решают преобразованную систему аналитически или численно [9, 6]. Кроме этого, для решения задачи Коши для системы ОДУ 2-го порядка, не содержащей первой производной от неизвестной функции, часто применяется метод Штермера, являющейся аналогом методов Адамса [45]. Однако в рассматриваемом нами случае в правую часть системы входит производная первого порядка, кроме того сведение к системе уравнений первого порядка невыгодно во многих случаях, так как без него можно получить более экономичные расчетные схемы, характеризующиеся меньшим количеством вычислений правой части. Применим эту экономичную расчетную схему к решению задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11}^2(\rho) & m_{12}^2(\rho) \\ m_{21}^2(\rho) & m_{22}^2(\rho) \end{bmatrix} \frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} m_{11}^3(\rho) & m_{12}^3(\rho) \\ m_{22}^3(\rho) & m_{22}^3(\rho) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\rho(\rho) \\ u_\theta(\rho) \end{pmatrix} = 0.$$

Запишем систему двух дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{d^2}{d\rho^2}u_\rho(\rho) = -m_{11}^2(\rho)\frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho) - m_{12}^2(\rho)\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho) - m_{11}^3(\rho)u_\rho(\rho) - m_{12}^3(\rho)u_\vartheta(\rho),$$
$$\frac{d^2}{d\rho^2}u_\theta(\rho) = -m_{21}^2(\rho)\frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho) - m_{22}^2(\rho)\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho) - m_{21}^3(\rho)u_\rho(\rho) - m_{22}^3(\rho)u_\vartheta(\rho),$$

а затем, вводя дополнительные обозначения, представим систему в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\rho^2}u_\rho(\rho) = f_1\left(\rho, \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho), \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho), u_\rho(\rho), u_\theta(\rho)\right),\\ \frac{d^2}{d\rho^2}u_\theta(\rho) = f_2\left(\rho, \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho), \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho), u_\rho(\rho), u_\theta(\rho)\right).\end{aligned} \tag{6.16}$$

Поставим для уравнений системы (6.16) начальные условия

$$u_\rho(\rho_1) = u_\rho^0,\ u_\theta(\rho_1) = u_\theta^0,$$

$$\frac{du_\rho(\rho_1)}{d\rho} = {u'}_\rho^0,\ \frac{du_\theta(\rho_1)}{d\rho} = {u'}_\theta^0.$$

Для получения расчетной схемы метода Рунге-Кутты проинтегрируем обе части каждого из уравнений (6.16) в пределах от ρ_1 до $\rho_1 + \delta$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+\delta) - \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1) = \\ = \delta\int_0^1 f_1\left(\rho_1 + s\delta, \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta), \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta), u_\rho(\rho_1+s\delta), u_\theta(\rho_1+s\delta)\right)ds.\end{gathered} \tag{6.17}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+\delta) - \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1) = \\ = \delta\int_0^1 f_2\left(\rho_1 + s\delta, \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta), \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta), u_\rho(\rho_1+s\delta), u_\theta(\rho_1+s\delta)\right)ds.\end{gathered}$$

Введем параметр β, по которому можно проинтегрировать (6.17) еще раз. Аналогично предыдущим выкладкам имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+\beta\delta) - \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1) = \\ = \delta\int_0^\beta f_1(\rho_1 + s\delta, \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta), \frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta), u_\rho(\rho_1+s\delta), u_\theta(\rho_1+s\delta))ds,\end{gathered}$$

$$\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+\beta\delta)-\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1)=$$
$$=\delta\int_0^\beta f_2(\rho_1+s\delta,\frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\frac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta),u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta))ds.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\delta d\beta$ и проинтегрируем по β от 0 до 1. Получим

$$u_\rho(\rho_1+\delta)-u_\rho(\rho_1)-hu'_\rho(\rho_1)=$$
$$=\delta^2\int_0^1 d\beta\int_0^\beta f_1(\rho_1+s\delta,u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta))ds,$$

$$u_\theta(\rho_1+\delta)-u_\theta(\rho_1)-hu'_\theta(\rho_1)=$$
$$=\delta^2\int_0^1 d\beta\int_0^\beta f_2(\rho_1+s\delta,u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta))ds.$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования, получаем

$$u_\rho(\rho_1+\delta)-u_\rho(\rho_1)-hu'_\rho(\rho_1)=$$
$$=\delta^2\int_0^1(1-s)f_1(\rho_1+s\delta,u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta))ds,$$

$$u_\theta(\rho_1+\delta)-u_\theta(\rho_1)-hu'_\theta(\rho_1)=$$
$$=\delta^2\int_0^1(1-s)f_2(\rho_1+s\delta,u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta))ds. \tag{6.18}$$

Экономичность расчетной схемы, получаемой без сведения (6.16) к системе 4-х уравнений первого порядка, состоит в том, что при вычислении интеграла в (6.18) за счет множителя δ^2 мы можем применить квадратурную формулу с меньшим числом узлов, чем при вычислении интеграла в (6.17).

Применим к интегралу в (6.17) квадратурную формулу

$$\delta\int_0^\beta f_1(\rho_1+s\delta,\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta),u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta))\approx$$
$$\approx\delta\sum_{i=1}^r p^1_{ri}\int_0^\beta f_1(\rho_1+s_i\delta,\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s_i\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s_i\delta),u_\rho(\rho_1+s_i\delta),u_\theta(\rho_1+s_i\delta)),$$

$$\delta\int_0^\beta f_2(\rho_1+s\delta,\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s\delta),u_\rho(\rho_1+s\delta),u_\theta(\rho_1+s\delta))\approx$$
$$\approx\delta\sum_{i=1}^r p^2_{ri}\int_0^\beta f_2(\rho_1+s_i\delta,\tfrac{d}{d\rho}u_\rho(\rho_1+s_i\delta),\tfrac{d}{d\rho}u_\theta(\rho_1+s_i\delta),u_\rho(\rho_1+s_i\delta),u_\theta(\rho_1+s_i\delta)).$$

Для вычисления $u'_\rho(\rho_1+s_i\delta)$, $u'_\theta(\rho_1+s_i\delta)$ используется представление

$$u'_\rho(\rho_1+s_i\delta)-u'_\rho(\rho_1)=$$
$$=\delta\int_0^{s_i} f_1(\rho_1+s\delta,u_\rho(\rho_1+sh),u_\theta(\rho_1+sh),u'_\rho(\rho_1+sh),u'_\theta(\rho_1+sh))ds\approx$$
$$\approx\delta\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\delta f_1(\rho_1+s_j\delta,u_\rho(\rho_1+s_jh),u_\theta(\rho_1+s_jh),u'_\rho(\rho_1+s_jh),u'_\theta(\rho_1+s_jh)),$$

$u'_\theta(\rho_1 + s_i\delta) - u'_\theta(\rho_1) =$
$= \delta \int_0^{s_i} f_2(\rho_1 + s\delta, u_\rho(\rho_1 + sh), u_\theta(\rho_1 + sh), u'_\rho(\rho_1 + sh), u'_\theta(\rho_1 + sh))ds \approx$
$\approx \delta \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\delta f_2(\rho_1 + s_j\delta, u_\rho(\rho_1 + s_jh), u_\theta(\rho_1 + s_jh), u'_\rho(\rho_1 + sh), u'_\theta(\rho_1 + s_jh)).$

Аналогично

$$\begin{array}{l} u_\rho(\rho_1 + s_i\delta) - u_\rho(\rho_1) = \delta \int_0^{s_i} u'_\rho(\rho_1 + s_i\delta)ds \approx \delta \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} u'_\rho(\rho_1 + s_i\delta), \\ u_\theta(\rho_1 + s_i\delta) - u_\theta(\rho_1) = \delta \int_0^{s_i} u'_\theta(\rho_1 + s_i\delta)ds \approx \delta \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} u'_\theta(\rho_1 + s_i\delta), \end{array} \tag{6.19}$$

где интегралы заменены квадратурными суммами по узлам $s_1, s_2, ..., s_{i-1}$. Вводя обозначения, $u_{\rho j} \approx u_\rho(\rho_1 + s_j\delta),\ u_{\theta j} \approx u_\theta(\rho_1 + s_j\delta)$, получим следующую вычислительную схему

$$\begin{gathered}
u'_\rho(\rho_1 + \delta) = u'_\rho(\rho_1) + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} p_{ri} K_{\rho i}(\delta), \\
u'_\theta(\rho_1 + \delta) = u'_\theta(\rho_1) + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} p_{ri} K_{\theta i}(\delta), \\
u_\rho(\rho_1 + h) - u_\rho(\rho_1) - h u'_\rho(\rho_1) = \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} q_{r-1,i} L_{\rho,i}(\delta), \\
u_\theta(\rho_1 + h) - u_\theta(\rho_1) - h u'_\theta(\rho_1) = \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} q_{r-1,i} L_{\theta,i}(\delta), \\
K_{\rho,i}(\delta) = f_1(\xi_i, \eta_{\rho i}, \eta_{\theta i}, \theta_{\rho i}, \theta_{\theta i}),\ K_{\theta,i}(\delta) = f_2(\xi_i, \eta_{\rho i}, \eta_{\theta i}, \theta_{\rho i}, \theta_{\theta i}), \\
\xi_i = \rho_1 + s_i\delta,\ s_1 = 0, \\
\eta_{\rho,i} = u_{\rho,0} + \delta\gamma_{i,1}\vartheta_{\rho,1} + \delta\gamma_{i,2}\vartheta_{\rho,2} + ... + \delta\gamma_{i,i-1}\vartheta_{\rho,i-1}, \\
\eta_{\theta,i} = u_{\theta,0} + \delta\gamma_{i,1}\vartheta_{\theta,1} + \delta\gamma_{i,2}\vartheta_{\theta,2} + ... + \delta\gamma_{i,i-1}\vartheta_{\theta,i-1}, \\
\vartheta_{\rho,i} = u'_{\rho,0} + \beta_{i,1}K_{\rho,1}(\delta) + \beta_{i,2}K_{\rho,2}(\delta) + ... + \beta_{i,1}K_{\rho,i}(\delta), \\
\vartheta_{\theta,i} = u'_{\theta,0} + \beta_{i,1}K_{\theta,1}(\delta) + \beta_{i,2}K_{\theta,2}(\delta) + ... + \beta_{i,1}K_{\theta,i}(\delta), \\
L_{\rho,i}(\delta) = \delta^2 f_1(\mu_i, \nu_{\rho,i}, \nu_{\theta,i}, d_{\rho,i}, d_{\theta,i}), \\
L_{\theta,i}(\delta) = \delta^2 f_2(\mu_i, \nu_{\rho,i}, \nu_{\theta,i}, d_{\rho,i}, d_{\theta,i}) \\
\mu_i = \rho_1 + \beta_i\delta,\ \beta_1 = 0, \\
\nu_{\rho,i} = u_{\rho,0} + \delta \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\gamma}_{ij} \widetilde{\vartheta}_{\rho,j},
\end{gathered} \tag{6.20}$$

$$\nu_{\theta,i} = u_{\theta,0} + \delta \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\gamma}_{ij} \widetilde{\vartheta}_{\theta,j},$$

$$d_{\rho,i} = u'_{\rho,0} + \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\beta}_{ij} L_{\rho,j}(\delta),$$

$$d_{\theta,i} = u'_{\theta,0} + \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\beta}_{ij} L_{\theta,j}(\delta).$$

Для нахождения параметров запишем величину погрешности и наложим условие, чтобы соотношения

$$\varphi_\rho(\delta) = u'_\rho(\rho_1 + \delta) - u'_\rho(\rho_1) - \sum_{i=1}^{r} p_{r,i} K_{\rho,i}(h),$$

$$\varphi_\theta(\delta) = u'_\theta(\rho_1 + \delta) - u'_\theta(\rho_1) - \sum_{i=1}^{r} p_{r,i} K_{\theta,i}(h),$$

$$\psi_\rho(\delta) = u_\rho(\rho_1 + \delta) - u_\rho(\rho_1) - \delta u'_\rho(\rho_1) - \sum_{i=1}^{r} q_{r-1,i} L_{\rho,i}(h),$$

$$\psi_\theta(\delta) = u_\theta(\rho_1 + \delta) - u_\theta(\rho_1) - \delta u'_\theta(\rho_1) - \sum_{i=1}^{r} q_{r-1,i} L_{\theta,i}(h),$$

имели производные при $\delta = 0$ до как можно более высокого порядка t. Тогда локальная погрешность полученного вычислительного метода равна $O(h^{t+1})$. Условие $\psi'(0) = 0$ всегда выполнено.

Запишем вычислительный метод при $r = 2$

$$u'_\rho(\rho_i + \delta) = u'_\rho(\rho_i) + \delta f_1(\rho_i + \frac{h}{2}, u_{\rho,i} + \frac{h}{2} u'_{\rho,i}, u_{\theta,i} + \frac{h}{2} u'_{\theta,i}, u'_{\rho,i} +$$
$$+ \frac{h}{2} f_1(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i}), u'_{\theta,i} + \frac{h}{2} f_2(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i})),$$

$$u'_\theta(\rho_i + \delta) = u'_\theta(\rho_i) + \delta f_2(\rho_i + \frac{h}{2}, u_{\rho,i} + \frac{h}{2} u'_{\rho,i}, u_{\theta,i} + \frac{h}{2} u'_{\theta,i}, u'_{\rho,i} +$$
$$+ \frac{h}{2} f_1(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i}), u'_{\theta,i} + \frac{h}{2} f_2(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i})),$$

$$u_\rho(\rho_i + h) = u_\rho(\rho_i) + h u'_\rho(\rho_i) + \delta^2 f_1(\rho_i + \frac{h}{2}, u_{\rho,i} + \frac{h}{2} u'_{\rho,i}, u_{\theta,i} + \frac{h}{2} u'_{\theta,i},$$
$$u'_{\rho,i} + \frac{h}{2} f_1(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i}), u'_{\theta,i} + \frac{h}{2} f_2(\rho_i, u_{\rho,i} u_{\theta,i}, u'_{\rho,i}, u'_{\theta,i})),$$

$$u_\theta(\rho_i+h)=u_\theta(\rho_i)+hu'_\theta(\rho_i)+\delta^2 f_2(\rho_i+\frac{h}{2},u_{\rho,i}+\frac{h}{2}u'_{\rho,i},u_{\theta,i}+\frac{h}{2}u'_{\theta,i},$$
$$u'_{\rho,i}+\frac{h}{2}f_1(\rho_i,u_{\rho,i}u_{\theta,i},u'_{\rho,i},u'_{\theta,i}),u'_{\theta,i}+\frac{h}{2}f_2(\rho_i,u_{\rho,i}u_{\theta,i},u'_{\rho,i},u'_{\theta,i})).$$

Локальная погрешность этого метода равна $O(h^3)$. Воспользуемся известными результатами сходимости методов Рунге-Кутты [9, 6]. Если метод (6.20) имеет порядок аппроксимации $l>0$, то он сходится, при этом порядок сходимости не меньше минимума из порядка аппроксимации и порядка модуля непрерывности точного решения. Выделим три главных свойства построенной численной схемы:

— Схема построена для системы ОДУ, не разрешенных относительно старшей производной.

— Схема уменьшает ошибки численного счета в процессе ортогонализации решения.

— Схема учитывает специфику расчета армированного материала, влияние параметров армирования.

Для реализации численной схемы проводится обезразмеривание исходных неизвестных и независимых переменных системы. Деформации (6.3) безразмерны по определению, интенсивности (плотности) армирования ω_m так же обезразмеренные величины. Выполним обезразмеривание системы (6.10). Пусть ρ_1 – внутренний радиус пластины, ρ_2 – ее внешний радиус. Введем безразмерную переменную $R=\dfrac{\rho}{\rho_2}$, тогда линейный размер пластины задается интервалом $[\dfrac{\rho_1}{\rho_2},1]$, заменим в системе первую и вторую производные по ρ на производные по R, сократим на возникающий при этом в системе общий множитель $\dfrac{1}{\rho^2}$. В соотношениях для напряжений (6.4) все величины относим к модулю Юнга волокна E_m, где E_m – максимальный по величине модуль Юнга для рассматриваемых семейств волокон. Обезразмеренные компоненты тензора напряжений $\sigma_R, \sigma_{b\theta}, \sigma_{R\theta}$ определяем из соотношений

$$\sigma_R = \frac{1}{E_m}(\Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*}\sigma_m\omega_m\cos^2\varphi_m),$$
$$\sigma_{b\theta} = \frac{1}{E_m}(\Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho) + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*}\sigma_m\omega_m\sin^2\varphi_m),$$
$$\sigma_{R\theta} = \frac{1}{E_m}(\Omega\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta} + \textstyle\sum_{m=1}^{m^*}\sigma_m\omega_m\cos\varphi_m\sin\varphi_m).$$

Обозначим обезразмеренные перемещения $u_R(R), u_{b\theta}(R)$, они удовлетворяют следующей системе

$$\begin{gathered}
a_{11}\frac{d^2u_R}{dR^2} + a_{13}\frac{d^2u_{b\theta}}{dR^2} + (\frac{da_{11}}{dR} + \frac{a_{11}}{R})\frac{du_R}{dR} + (-\frac{a_{23}}{R} + \frac{da_{13}}{dR})\frac{du_{b\theta}}{dR} + \\
+(\frac{1}{R}\frac{da_{12}}{dR} - \frac{a_{22}}{R^2})u_R + (-\frac{1}{R}\frac{da_{13}}{dR} + \frac{a_{23}}{R^2})u_{b\theta} = 0, \\
a_{13}\frac{d^2u_R}{dR^2} + a_{33}\frac{d^2u_{b\theta}}{dR^2} + (\frac{da_{13}}{dR} + \frac{a_{23}}{R} + \frac{2a_{13}}{R})\frac{du_R}{dR} + (\frac{da_{33}}{dR} + \frac{a_{33}}{R})\frac{du_{b\theta}}{dR} + \\
+(\frac{1}{R}\frac{da_{23}}{dR} + \frac{a_{23}}{R^2})u_R + (-\frac{1}{R}\frac{da_{33}}{dR} - \frac{a_{33}}{R^2})u_{b\theta} = 0.
\end{gathered} \tag{6.21}$$

Коэффициенты a_{ij} соответствуют обезразмеренным напряжениям (6.9). Данные процедуры необходимо выполнить и в краевых условиях (6.13), в результате относительно обезразмеренных величин u_R, $u_{b\theta}$ на внешнем контуре получим соотношения

$$a_{11}\frac{du_R}{dR} + a_{12}\frac{u_R}{R} + \frac{a_{13}}{2}(\frac{du_{b\theta}}{dR} - \frac{u_{b\theta}}{R})\Big|_{R=1} = \frac{p_n\rho_2}{E_m},$$
$$a_{13}\frac{du_R}{dR} + a_{23}\frac{u_R}{R} + \frac{a_{33}}{2}(\frac{du_{b\theta}}{dR} - \frac{u_{b\theta}}{R})\Big|_{R=1} = \frac{p_\tau\rho_2}{E_m}.$$

При проверке условия прочности материала значение табличного предела прочности относим к модулю Юнга E_m.

Постановка задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает ее разнообразные механические формулировки и различные способы армирования.

6.4 Армирование по спиралям

В рамках рассматриваемой задачи об армировании по криволинейным траекториям представляет особый интерес армирование вдоль логарифмических и алгебраических спиралей [29]. Задание уравнений таких кривых и изучение их свойств занимают особое место в истории математики. В настоящем пункте изложен подход к выбору таких кривых в качестве траекторий армирования. Для построения разрешающей системы необходимо определить коэффициенты a_{ij} системы (6.21). Для этого в каждом конкретном случае семейств спиралей найдем интенсивность и углы армирования.

6.4.1 Армирование по семействам логарифмических спиралей

Пусть дано семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Cb^{\theta}$, C – параметр семейства, b – параметр спирали, при $b > 1$ спираль развертывается вокруг полюса против хода часовой стрелки (рис. 6.1), если $b < 1$, то спираль закручивается по часовой стрелке (рис. 6.2). Вычислим угол армирования $tg\varphi = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1}{\ln b}$, то есть для логарифмической спирали угол армирования – некоторая константа. Определим интенсивность армирования $\omega_1(\rho)$ из уравнения (6.5) при заданных углах армирования, в нем производную по θ вычисляем по формуле $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ с учетом уравнения траектории $\rho = Cb^{\theta}$. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_1) + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\omega_1) = 0. \qquad (6.22)$$

В (6.22) частную производную заменяем обычной производной по ρ, т.к. исключили зависимость от окружной координаты. Интегрирование (6.22) с учетом заданной интенсивности армирования ω_0 на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$ дает соотношение

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho}}. \qquad (6.23)$$

6.4.2 Армирование по семействам спиралей Архимеда

Спираль Архимеда задается уравнением $\rho = a\theta$, a – коэффициент пропорциональности [29]. Иллюстрация кривой приведена на рис. 6.3. Угол армирования находим из соотношения $tg\varphi = \theta = \dfrac{\rho}{a}$, вычисляем $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ через $tg\varphi$,

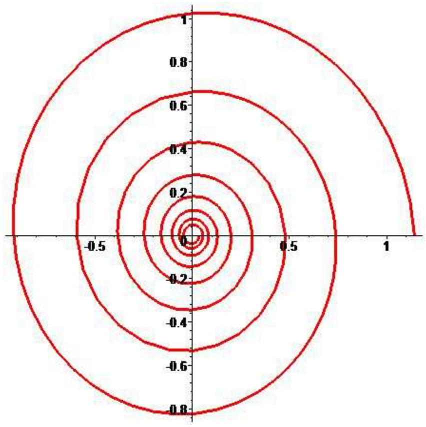


Рис. 6.1

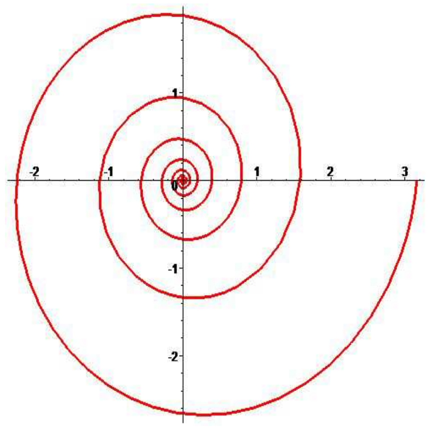


Рис. 6.2

после подстановки в (6.5) получаем следующее уравнение для интенсивности армирования $\omega_1(\rho)$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_1 \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}) = 0, \tag{6.24}$$

т.к. оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = a\dfrac{\partial}{\partial \rho}$. Тогда интенсивность армирования в произвольной точке кольцевой пластины найдем по формуле

$$\omega_1 = \frac{C\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}{\rho}.$$

Пусть на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$ задан угол вхождения арматуры φ_0 и задана интенсивность армирования ω_0, что соответствует условиям технологического процесса. После вычисления константы интегрирования из условий на внутреннем контуре пластины получим

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}{\rho\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_0}}.$$

Для тангенса угла армирования по спирали Архимеда получим выражение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho \operatorname{tg} \varphi_0}{\rho_1}.$$

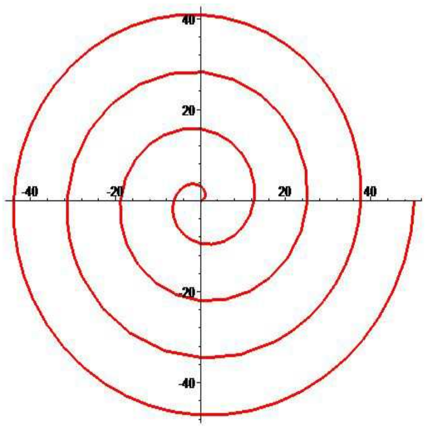


Рис. 6.3

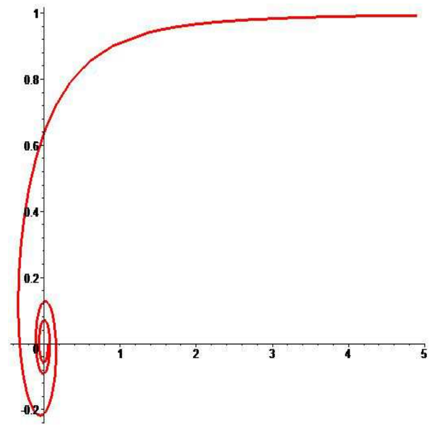


Рис. 6.4

6.4.3 Армирование по семействам гиперболических спиралей

Гиперболическая спираль задается уравнением $\rho = \dfrac{a}{\theta}$, где a – параметр семейства [29]. Оператор частного дифференцирования по θ определим по формуле $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \dfrac{\rho_1 \operatorname{tg} \varphi_0}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho}$, $\rho = \rho_1$ – внутренний контур, $\operatorname{tg} \varphi_0$ – тангенс угла вхождения арматуры на внутреннем контуре. Рассуждая аналогично предыдущим двум пунктам получим соотношение для тангенса угла армирования $\operatorname{tg} \varphi = -\dfrac{-\rho_1 \operatorname{tg} \varphi_0}{\rho}$ и уравнение для интенсивности армирования $\omega_1(\rho)$ по заданной спирали

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho^2 \omega_1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1 \operatorname{tg} \varphi_0}} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\omega_1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1 \operatorname{tg} \varphi_0}} = 0, \tag{6.25}$$

Решение (6.25) имеет вид

$$\omega_1 = C_1 \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}{\rho},$$

где C_1 – произвольная константа интегрирования. С учетом условий на внутреннем контуре получим

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}{\rho},$$

На рис. 6.4 изображена гиперболическая спираль.

6.4.4 Спираль Ферма

Спираль Ферма задается уравнением $\rho^2 = a^2\theta$, a – коэффициент пропорциональности [29]. Для тангенса угла армирования получим выражение $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\rho^2}{a^2}$. С учетом условий на внутреннем контуре определяем параметр a^2: $a^2 = \dfrac{2\rho_1}{\operatorname{tg}\varphi_0}$, очевидное ограничение на условия на внутреннем контуре $\operatorname{tg}\varphi_0 > 0$.

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования определим по формуле $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{a^2}{2\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$. Тогда уравнение для интенсивности армирования $\omega(\rho)$ в произвольной точке кольцевой пластины примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho\omega}{\sqrt{a^4+4\rho^4}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho^2\omega}{\sqrt{a^4+4\rho^4}} = 0. \tag{6.26}$$

Найдем решение уравнения (6.26), оно имеет вид

$$\omega = C_1\frac{\sqrt{a^2+2a\rho+2\rho^2}\sqrt{a^2-2a\rho+2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}}. \tag{6.27}$$

Сформулированные выше условия на внутреннем контуре дают соотношения для определения константы интегрирования и окончательно для интенсивности армирования по спирали Ферма имеем

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1^3}}{\sqrt{a^2+2a\rho_1+2\rho_1^2}\sqrt{a^2-2a\rho_1+2\rho_1^2}}\frac{\sqrt{a^2+2a\rho+2\rho^2}\sqrt{a^2-2a\rho+2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}},$$

где $a^2 = \dfrac{2\rho_1}{\operatorname{tg}\varphi_0}$.

Вид спирали Ферма приведен на рис. 6.5. Близка по конфигурации к рассмотренным и параболическая спираль – линия, которая в полярных координатах определяется уравнением $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$, для $l > 0$ она приведена на рис. 6.6.

6.4.5 Жезл

Жезлом называют спираль, определяемую уравнением $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$ относительно полярных координат ρ, θ. Для тангенса угла армирования получим

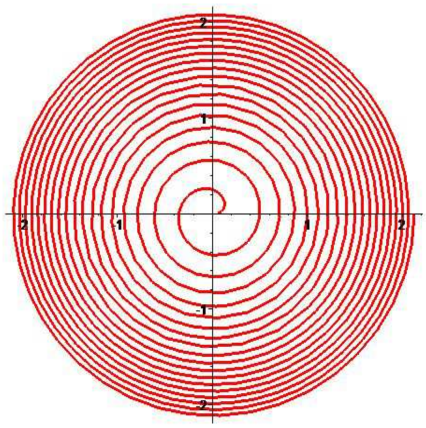


Рис. 6.5

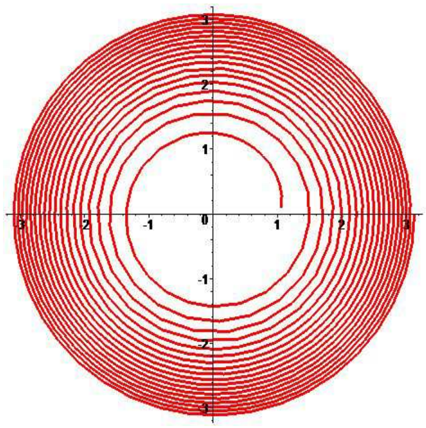


Рис. 6.6

выражение $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\rho}{\rho\prime} = -2\theta = -2\dfrac{a^2}{\rho^2}$. С учетом условий на внутреннем контуре из уравнения траектории определяем параметр a^2: $a^2 = \dfrac{\rho_1^2 \operatorname{tg}\varphi_0}{-2}$, очевидное ограничение на условия на внутреннем контуре $\operatorname{tg}\varphi_0 < 0$.

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{-1}{2}\dfrac{\rho^3}{a^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$. Тогда уравнение для интенсивности армирования $\omega(\rho)$ по траектории рассматриваемой спирали в произвольной точке кольцевой пластины примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho^3\omega}{\sqrt{\rho^4+4a^4}} + \rho^3\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\omega}{\sqrt{\rho^4+4a^4}} = 0. \tag{6.28}$$

Найдем общее решение уравнения (6.28)

$$\omega = C\frac{\sqrt{a^2+2a\rho+2\rho^2}\sqrt{a^2-2a\rho+2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}}, \tag{6.29}$$

$C-$ произвольная константа интегрирования. Сформулированные выше условия на внутреннем контуре дают соотношения для определения константы интегрирования. Окончательно для интенсивности армирования по кривой "жезл"имеем

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1^3}}{\sqrt{a^2+2a\rho_1+2\rho_1^2}\sqrt{a^2-2a\rho_1+2\rho_1^2}}\frac{\sqrt{a^2+2a\rho+2\rho^2}\sqrt{a^2-2a\rho+2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}},$$

где $a^2 = \dfrac{\rho_1^2 \operatorname{tg}\varphi_0}{-2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 < 0$. Изображение кривой приведено на рис. 6.7, 6.8.

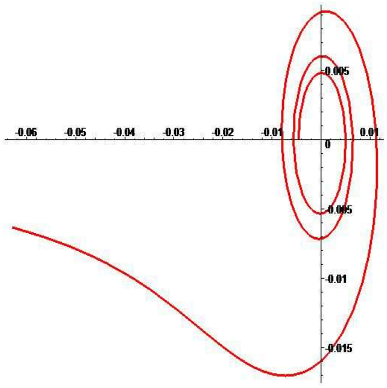


Рис. 6.7

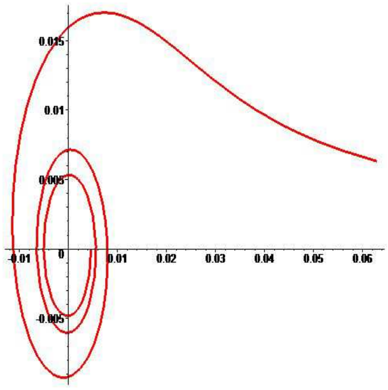


Рис. 6.8

В литературе, например [29, 102], описаны геометрические свойства рассмотренных выше кривых. Так расстояние между витками логарифмической спирали увеличивается с возрастанием полярного угла; у спирали Архимеда оно является постоянным, а у спирали Ферма и параболической спирали расстояние между витками неограниченно убывает. Для гиперболической спирали, заданной уравнением $\rho = a/\theta$, характерно, что она имеет асимптоту, параллельную полярной оси и отстоящую от нее на расстояние, равное a. При неограниченном увеличении полярного угла полярный радиус неограниченно убывает и фиксированная точка гиперболической спирали неограниченно стремится к полюсу, который называют асимптотической точкой.

Перечисленные свойства спиралей учитываются при выборе способа армирования по криволинейным траекториям, позволяющего за счет расположения арматуры добиться такого перераспределения полей напряжений и деформаций, которое давало бы возможность увести места разрушений в безопасные зоны конструкции.

6.4.6 "Розы" в полярной системе координат

Розами называются линии, заданные полярным уравнением $\rho = a \sin l\theta$ или уравнением $\rho = a \cos l\theta$, где a и l – постоянные положительные числа [29]. Из уравнения следует, что вся линия расположена в круге радиуса a. Вид кривых для $l = 2$, $l = 3$, $l = 4/3$, $l = 5/3$ приведен соответственно на рис.

6.9 – 6.12. В рассматриваемом случае радиус пластины $a = 1$. Роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a. Количество этих лепестков зависит от числа l, оно может быть как целым, так и дробным. Если l – целое число, то роза состоит из l лепестков при нечетном l и из $2l$ лепестков при четном l.

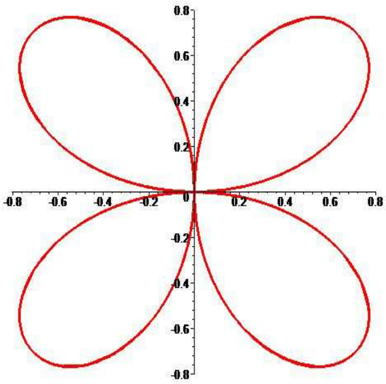


Рис. 6.9

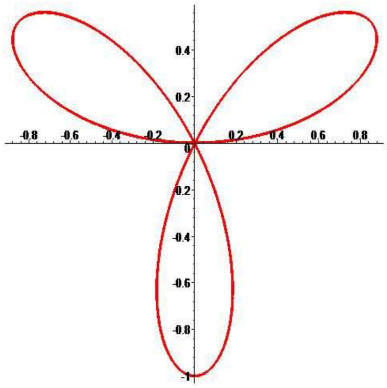


Рис. 6.10

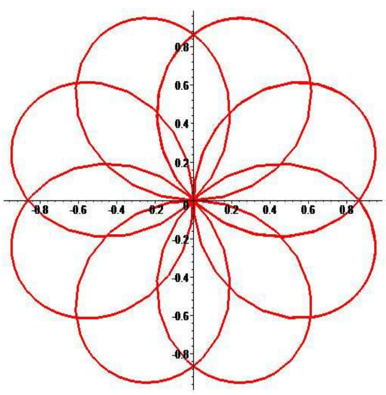


Рис. 6.11

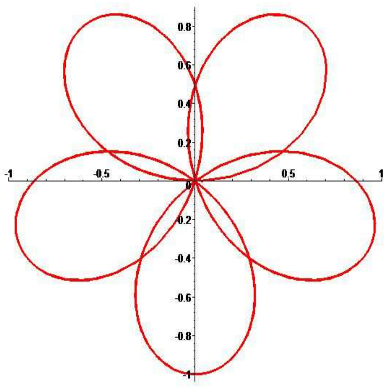


Рис. 6.12

Найдем тангенс угла армирования вдоль данной линии, он равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{l}\operatorname{tg}(\arcsin\frac{\rho}{a}) = \frac{1}{l}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Вычисляем синусы и косинусы углов армирования

$$\sin\varphi = \frac{\rho}{l\sqrt{a^2+(\frac{1}{l^2}-1)\rho^2}},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{a^2+(\frac{1}{l^2}-1)\rho^2}},$$

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = al\cos(\arcsin\dfrac{\rho}{a})\dfrac{\partial}{\partial\rho} = al\sqrt{1-\dfrac{\rho^2}{a^2}}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$, в результате уравнение постоянства сечений волокон примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho\omega_1\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{a^2+(\frac{1}{l^2}-1)\rho^2}} + \sqrt{a^2-\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho\omega_1}{\sqrt{a^2+(\frac{1}{l^2}-1)\rho^2}} = 0.$$

После интегрирования получим

$$\omega_1 = \frac{C_1\sqrt{-\rho^2+\rho^2l^2-l^2a^2}}{(\rho-a)^{1/4})\rho(\rho+a)^{1/4}}, \tag{6.30}$$

решение (6.30) имеет смысл при $\rho > a$, следовательно такая укладка армирующих волокон в рамках поставленной задачи не возможна. Как видим, из различных вариантов криволинейных траекторий для возможного армирования необходимо выбирать линии, для которых существуют решения уравнения постоянства сечений волокон.

6.4.7 Армирование вдоль семейства траекторий "спицы велоколеса"

"Спицы велоколеса" в полярной системе координат представляют семейство прямых, заданных уравнением

$$\rho = \frac{a}{\sin\theta}, \tag{6.31}$$

где a – константа, параметр велоколеса, $-\pi < \theta < 0, \theta \neq \dfrac{\pi}{2}$. Вычислим ρ'_θ, найдем θ через ρ из уравнения траектории:

$$\theta = \arcsin\frac{a}{\rho},$$

получим выражение тангенса угла армирования $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\theta$ через полярный радиус

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}.$$

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

В результате условие постоянства сечений волокон примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\omega_1\sqrt{\rho^2-a^2})+\rho\sqrt{\rho^2-a^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{\omega_1}{\rho})=0. \qquad (6.32)$$

Пусть ρ_1 – внутренний радиус кольцевой пластины, θ_0 – заданный угол выхода, тогда параметр "велоколеса"определяется выражением $a=\rho_1\sin\theta_0$. Общее решение (6.32) запишем

$$\omega_1=\frac{C_1\sqrt{\rho}}{(\rho^2-(\rho_1\sin\theta_0)^2)^{1/4}},$$

с учетом условий на внутреннем контуре $\omega_1\Big|_{\rho=\rho_1}=\omega_0$ получим интенсивность армирования

$$\omega_1=\frac{\omega_0\sqrt{\rho}(\rho_1^2-(\rho_1\sin\theta_0)^2)^{1/4}}{\sqrt{\rho_1}(\rho^2-(\rho_1\sin\theta_0)^2)^{1/4}}. \qquad (6.33)$$

Армирование вдоль "спиц велоколеса" для кольцевой пластины находит применение в современной промышленности. В настоящей работе рассматривается армирование по траекториям, представляющим комбинации "спиц велоколеса" и семейств рассмотренных выше спиралей. Варианты армирования вдоль траекторий "спиц велоколеса" и семейств логарифмической спирали в четырех комбинациях направлений (по часовой стрелке и против часовой стрелки) приведены на рис. 6.13–6.16.

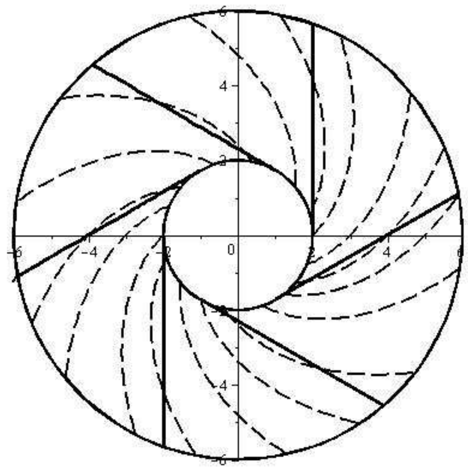


Рис. 6.13

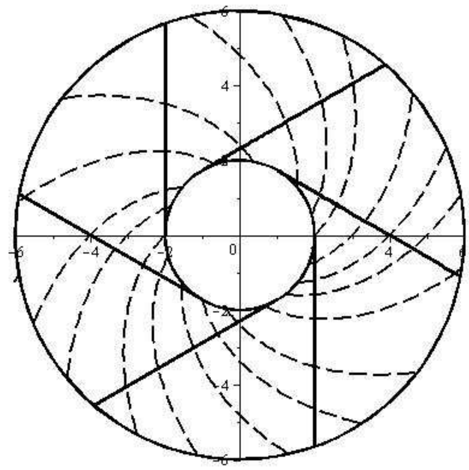


Рис. 6.14

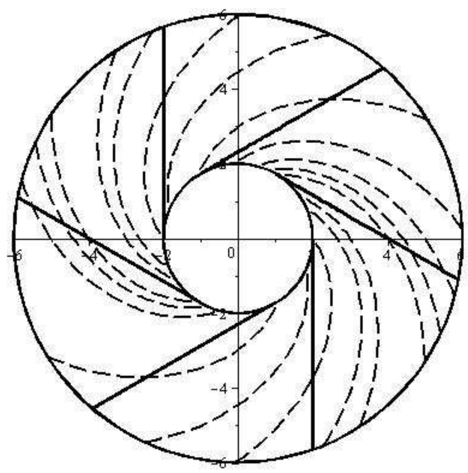


Рис. 6.15

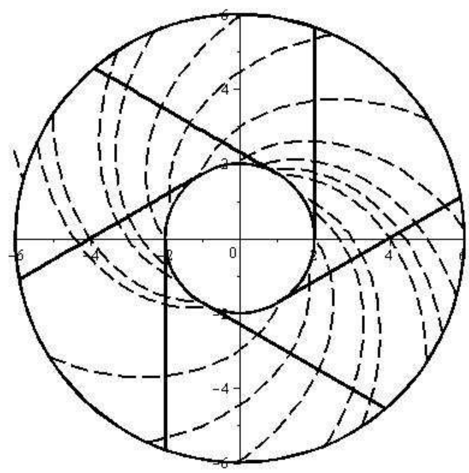


Рис. 6.16

6.5 Изогональное армирование

Наряду с криволинейными структурами армирования по спиралям, рассматриваемыми в кольцевых пластинах [69, 23], строим изогональные траектории армирования (т.е. линии, пересекающие кривые данного однопараметрического семейства под одним и тем же заданным углом $\alpha = arctgk$ [106]). Процедура нахождения изогональных траекторий к данным координатным линиям криволинейной ортогональной системы координат описана в пункте 3.9 главы 3 и опубликована в [69]. Семейство изогональных траекторий к семейству логарифмических спиралей задается уравнением вида $\rho = C_1 e^{-\dfrac{(-1+k)\theta}{(1+k)}}$, где C_1 – произвольная константа, $k = \operatorname{tg}\alpha$ – параметр изогональной траектории. Иллюстрации армирования концентрического кольца по логарифмическим спиралям и изогональным к ним траекториям для значения $k = 3$ приведены на рис. 6.17, изогональные траектории изображены пунктирными линиями. Вариант армирования кольца изогональными траекториями ($\operatorname{tg}\alpha = k$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) к семейству радиальных прямых, задаваемых уравнением $y = ax$, представляющими собой семейство логарифмических спиралей вида $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$, приведен на рис. 6.18.

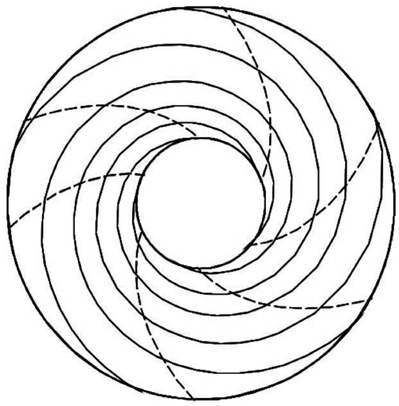


Рис. 6.17

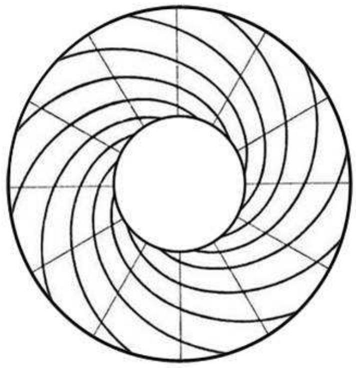


Рис. 6.18

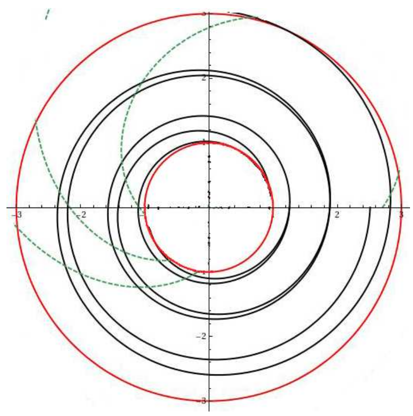


Рис. 6.19

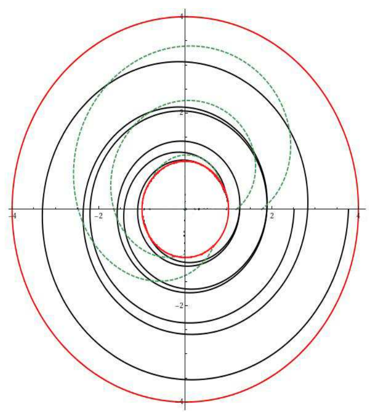


Рис. 6.20

Для семейств спиралей Архимеда уравнение семейств изогональных траекторий имеет вид

$$\rho = C_2 e^{-k\theta}(1+k\theta)^{\frac{2}{k}}, \tag{6.34}$$

где C_2 произвольная константа. Армирование по спиралям Архимеда и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 0,7$, $k = 1,4$ приведены на рис. 6.19, 6.20.

Построим изогональные траектории к семейству прямых, изображенных на рис. 6.13–6.16, называемых "спицами велоколеса". Семейство в полярной системе координат задается уравнением (6.31). Дифференциальное уравнение изогональных траекторий к рассматриваемому семейству имеет вид

$$\rho' = \rho\frac{k+\cos\theta}{k\cos\theta - 1}.$$

Интегрирование дифференциального уравнение дает семейство изогональных траекторий, относящихся к классу трансцендентных кривых [102]. Например, при $k = -1$ получили следующее уравнение семейства $\rho(\theta) = C_1 e^{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\theta}$, где C_1 – произвольная константа.

Коэффициенты системы (6.21) учитывают способы армирования семействами волокон в направлении любых изогональных траекторий, что дает широкое разнообразие структур армирования и позволяет в рамках единой схемы решения (6.10) получать композиционную конструкцию с заранее заданными свойствами.

6.6 Результаты расчетов

Для вывода численных расчетов условия армирования (способ создания композита) представим в виде таблицы. В таблице 6.1 указываем число семейств армирующих волокон m, краевые условия, данные выхода арматуры на внутреннем контуре для интенсивности армирования ω_{m0} и тангенсов углов армирования $\operatorname{tg}\varphi_{m0}$, упругие характеристики материалов связующего и арматуры. Численное решение (6.21) дает значение перемещений, по которым используя соотношения (6.2) – (6.4), находим значения обезразмеренных напряжений в связующем $\sigma_R^c, \sigma_{R\theta}^c, \sigma_\theta^c$ и в волокне σ_1, σ_2.

Таблица 6.1

Тип армирования	Формулировка краевой задачи в обезразмеренных переменных	Выбор материала связующего ν, E и волокон E_1, E_2 ГПА	Выбор относительных размеров кольца $[R_1, 1]$

Два семейства волокон	1)Жесткая заделка $u_R\Big\vert_{R=R_1} = 0$, $u_\theta\Big\vert_{R=R_1} = 0$, $P_n^b\Big\vert_{R=1} = 0,00002$, $P_\tau^b\Big\vert_{R=1} = 0,00002$ 2)Кручение $u_R\Big\vert_{R=R_1} = 0$, $u_\theta\Big\vert_{R=R_1} = 0.001$, $P_n^b\Big\vert_{R=1} = 0,00002$, $P_\tau^b\Big\vert_{R=1} = 0,00002$	1)Алюминий (Al) со стальными волокнами 2)Титан (Ti) с керамическими волокнами	1)$R_1 = 0,25$; 2) $R_1 = 0,1$; 3)$R_1 = 0,5$

Для анализа численных результатов на каждом рисунке выводим четыре типа графиков: 1 – сплошная линия, 2 – линия, состоящая из тире, 3 – линия, состоящая из точек, 4 – линия, состоящая из точек-тире. Каждому типу графиков соответствуют различные значения геометрических параметров семейств армирующих волокон.

Данные для введения механических и геометрических параметров армированной круговой пластины приведем в таблице 6.2, начальные значения углов армирования на входе в конструкции указываем в подписях к рисункам для выбранной структуры армирования.

Таблица 6.2 Механические и геометрические параметры армированной круговой пластины

№	ν	$E, (Ti)$ ГПА	$E, (Al)$ ГПА	$E1 = E2$, ГПА, (керамика)	$E1 = E2$, ГПА, (сталь)	ω_{01}	ω_{02}
1	0.3	94	70	350	200	0,3	0,3
2	0.3	94	70	350	200	0,05	0,376

3	0.3	94	70	350	200	0,1	0,318
4	0.3	94	70	350	200	0,51	0,18

Проверка условий разрушения упругого армированного материала имеет свои особенности [55, 61, 7]. Необходимо проверять условие прочности связующего и условие прочности арматуры (2.16), (2.17). В обозначениях настоящего пункта они имеют вид :

$$(\sigma^c_R)^2 + (\sigma^c_{b\theta})^2 - \sigma^c_R\sigma^c_{b\theta} + 3(\sigma^c_{R\theta})^2 + (\sigma^-_c - \sigma^+_c)(\sigma^c_R + \sigma^c_{b\theta}) < \sigma^+_c\sigma^-_c. \quad (6.35)$$

В соотношении (6.35) обезразмеренные напряжения в связующем σ^c_R, $\sigma^c_{b\theta}$, $\sigma^c_{R\theta}$ через деформации ε_ρ,ε_θ, $\varepsilon_{\rho\theta}$ вычисляем по формулам

$$\sigma^c_R = \frac{1}{E_1}(\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta)), \sigma^c_{b\theta} = \frac{1}{E_1}(\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho)), \sigma^c_{R\theta} = \frac{1}{E_1}\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta}.$$

Для семейств армирующих волокон предполагаем, что пределы прочности (текучести) m-го семейства волокон при растяжении σ^+_m и сжатии σ^-_m различны. Армирующие семейства волокон остаются упругими, если выполняются неравенства [55]

$$-\sigma^-_m < E_m(\varepsilon_\rho l^2_{1m} + \varepsilon_{\rho\theta} l_{1m} l_{2m} + \varepsilon_\theta l^2_{2m}) < \sigma^+_m \quad (6.36)$$

В (6.36) использованы ранее введенные обозначения $l_{m1} = \cos(\varphi_m)$, $l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, где m – число семейств армирующих волокон, E_m – модуль Юнга m-го семейства волокон. Таким образом, для проверки прочности армированного материала необходимо анализировать два условия: условие на прочность материала связующего (6.35) и условие на прочность армирующих волокон (6.36).

На основании выше изложенного следует ввести понятие **предельного упругого состояния** в некоторой точке рассматриваемой конструкции. По достижении которого хотя бы в одной точке либо в связующем, либо в волокне происходит выход за пределы упругости (напряжение превышает предел прочности или текучести). В данной точке может возникнуть микроразрушение. Уравнениями, сформулированными в рамках теории упругости, уже не можем пользоваться [61]. Происходит выход за рамки линейной теории упругости.

Левую часть (6.35) назовем функцией Баландина, обозначим как S, будем определять и визуализировать ее значения для различных типов криволинейных структур армирования.

В приведенных ниже численных расчетах рассмотрены два семейства армирующих волокон из одинакового материала, поэтому при вычислении относительных силовых характеристик выполняем деление на модуль Юнга волокна. При анализе **предельного упругого состояния** используем следующие относительные (после отношения к модулю Юнга волокна) значения пределов прочности и текучести (правая часть соотношений (6.35)):

1) Квадрат относительного предела текучести для связующего алюминий при армировании стальными волокнами, в соответствии с табл.1.2 составляет $0,49 \cdot 10^{-6}$;

2) Квадрат относительного предела текучести для связующего материала титан при армировании керамическими волокнами, в соответствии с табл.1.2, составляет $1,44 \cdot 10^{-6}$;

3) Квадрат относительного предела текучести для связующего материала титан при армировании борными волокнами, в соответствии с табл.1.2, составляет $0,1296 \cdot 10^{-6}$;

4) Квадрат относительного предела прочности для связующего сталь (предел прочности стали от 700 МПА до 1970 МПА) при армировании семействами волокон из бериллия принадлежит интервалу $5,08 \cdot 10^{-6} - 4,03 \cdot 10^{-5}$.

5) Относительный предел прочности для стальных волокон при наименьшем значении предела прочности из данных табл.6.2 составляет $3,5 \cdot 10^{-3}$;

6) Относительный предел прочности для керамических волокон для данных табл. 6.2 составляет $5,7 \cdot 10^{-3}$.

Рассматриваются следующие структуры армирования двумя семействами криволинейных волокон. Пусть траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей, обозначим такую структуру (A+L). Иллюстрация такого способа армирования криволинейными волокнами приведена на рис. 6.21. Для способа армирования семейства-

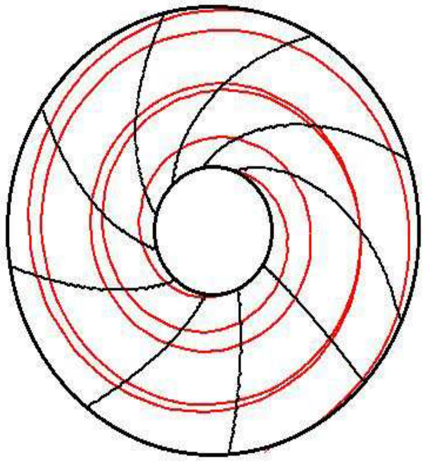


Рис. 6.21. Кольцевая пластина, армированная двумя семействами волокон (логарифмическая спираль и спираль Архимеда)

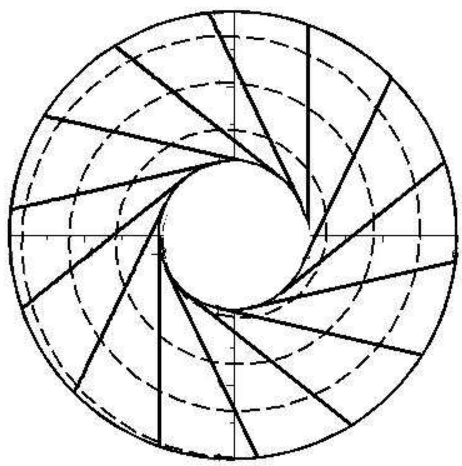


Рис. 6.22. Кольцевая пластина, армированная двумя семействами волокон (спираль Архимеда и "спицы велоколеса")

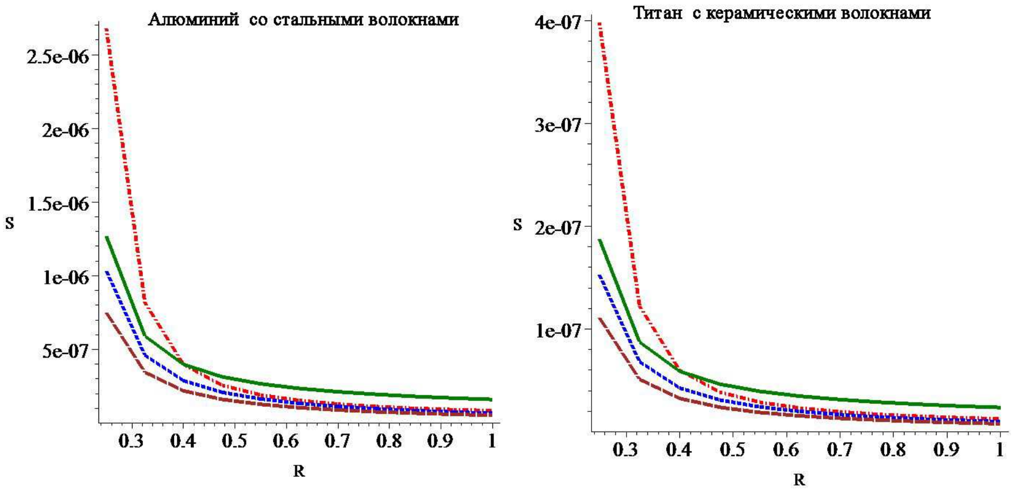


Рис. 6.23. Жесткая заделка. Функция Баландина S, структура армирования (A+L): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0.3$, $T1 = 0,2$

ми логарифмических спиралей и им изогональных траекторий введем обозначение (L+Iz). Армирование кольцевой пластины такой структурой показана на рис. 6.17. Семейство спиралей Архимеда и "спицы велоколеса" обозначим (A+V), иллюстрация кольцевой пластины с такой структурой армирования приведена на рис. 6.22; семейство логарифмических спиралей и "спицы велоколеса" обозначим (L+V). Иллюстрация такого армирования приведена на рис. 6.13 – 6.16.

Фиксируем нагрузку в 2 МПА, на графиках рассматриваем для указанных структур четыре варианта начальной интенсивности выхода арматуры на внутреннем контуре. Поэтому на рисунке выводим четыре типа графиков: **1** – сплошная линией, **2** – линия, состоящая из тире, **3** – линия, состоящая из точек, **4** – линия, состоящая из точек-тире.

На рис. 6.23 – 6.26 показаны значения функции Баландина S для перечисленных наборов параметров связующего и семейств армирующих волокон. Результаты сравниваем по материалам и начальным интенсивностям армирования ω_{01}, ω_{02}, остальные параметры остаются фиксированы.

Как видим из рис. 6.23– 6.26, характер зависимости функции Баландина S от R для двух видов материалов связующего и арматуры аналогичны, но

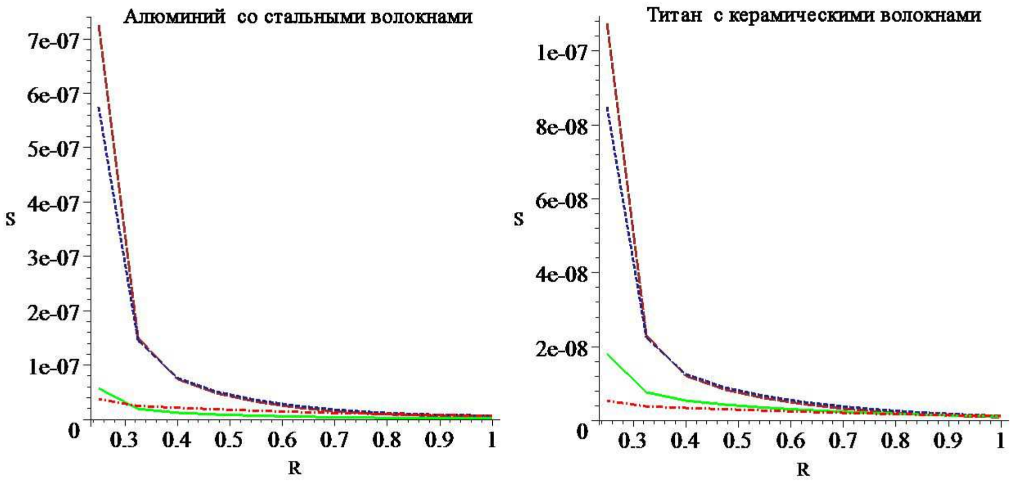


Рис. 6.24. Жесткая заделка. Функция Баландина S, структура армирования (L+Iz): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$

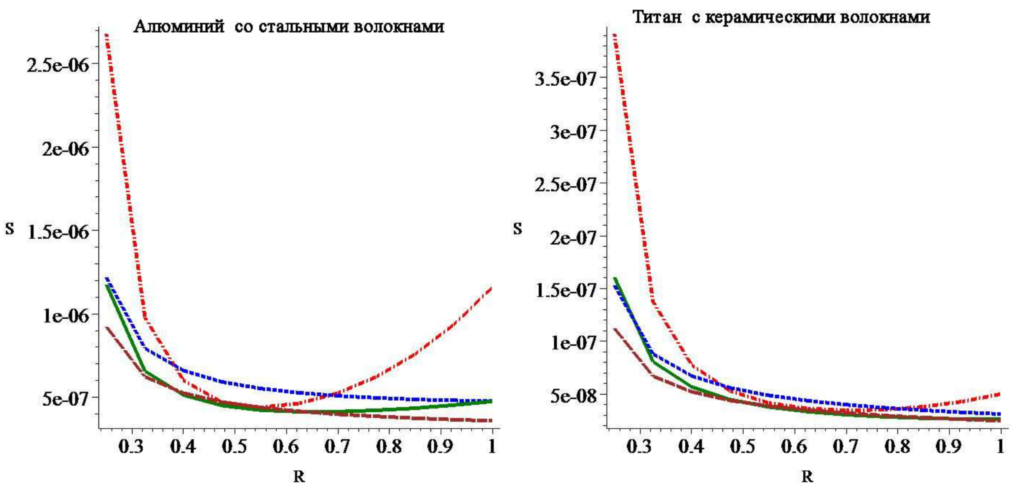


Рис. 6.25. Жесткая заделка. Функция Баландина S, структура армирования (A+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,5$, $\theta_0 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, $\theta_0 = 0,2$

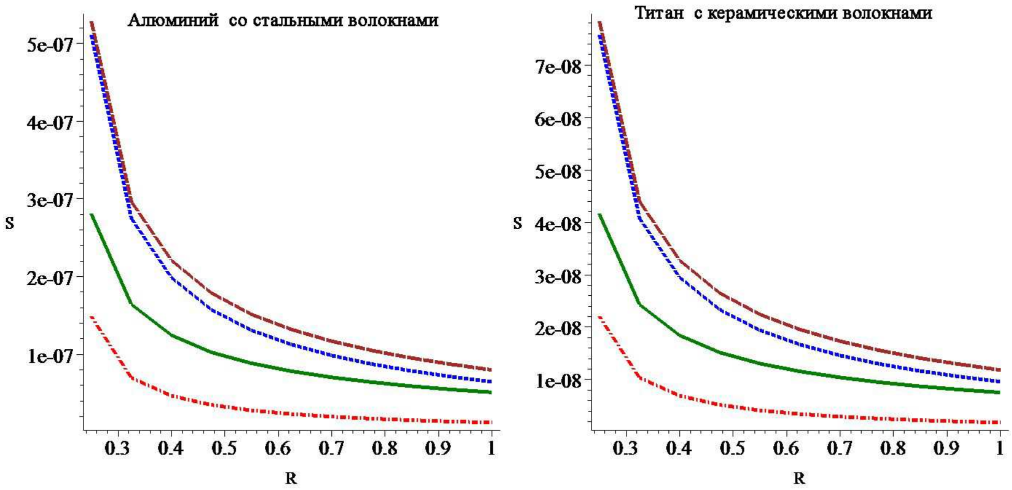


Рис. 6.26. Жесткая заделка. Функция Баландина S, структура армирования (L+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$

числовые значения S для кольцевой пластинки из титана с керамическими волокнами на порядок меньше, чем пластинки из алюминия со стальными волокнами. Если сравнивать между структурами (материал алюминий + сталь), то выбор структур (L+Iz) и (L+V) не приводит к выходу за пределы упругости, в то время как S для (A+L) превышает относительный предел текучести для значений $\omega_{01} = 0,51, \omega_{02} = 0,18$.

На рис. 6.27 – 6.34 исследуется зависимость напряжений в волокне σ_1, σ_2 от относительного радиуса R пластины. Для структуры (A+L) и (A+V) поведение σ_1 характеризуется тем, что максимальное значение достигается в середине пластины. Напряжение σ_1 превышает предел прочности для значений $\omega_{01} = 0,51, \omega_{02} = 0,18$. Для напряжения в волокне σ_2 характерно, что максимальные значения принимаются на внутреннем контуре пластинки для всех рассматриваемых структур.

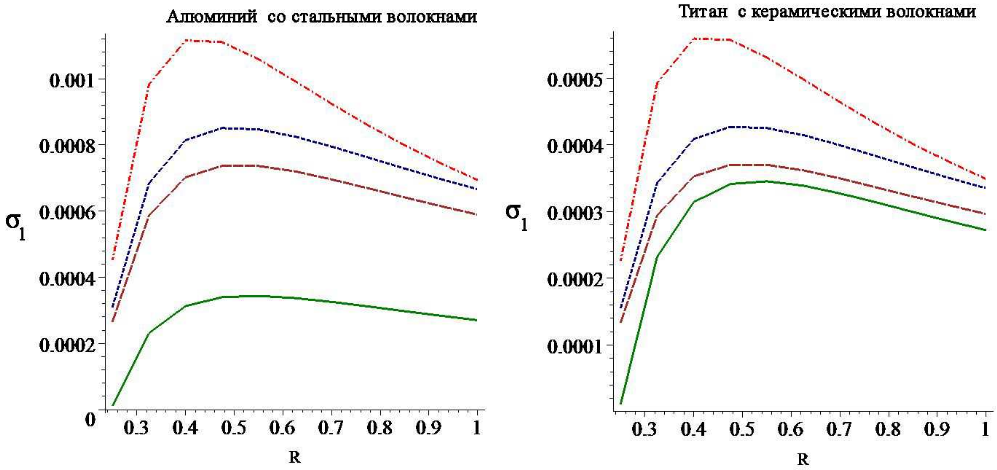


Рис. 6.27. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1. Структура (A+L): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$

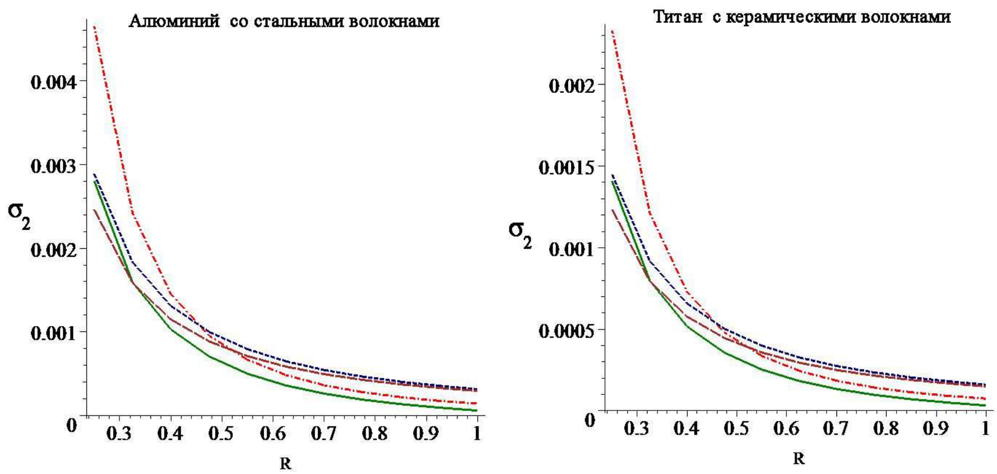


Рис. 6.28. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_2. Структура (A+L): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0.3$, $T1 = 0,2$

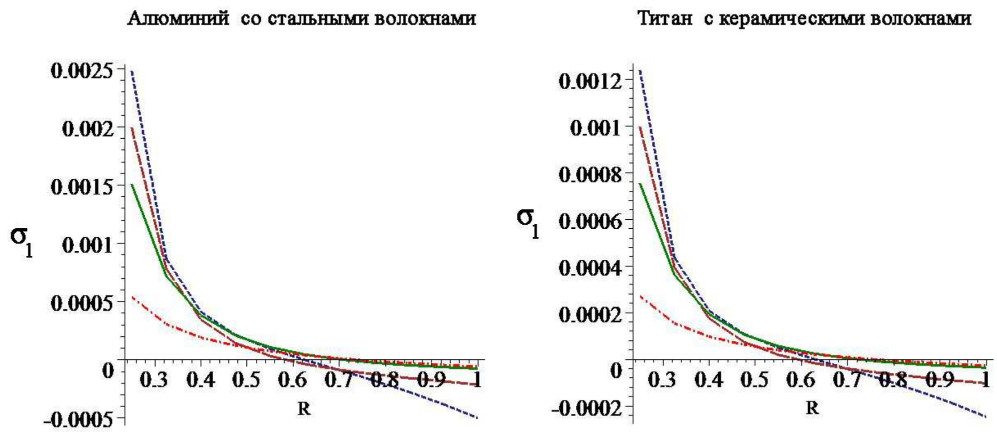


Рис. 6.29. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1 Структура (L+Iz): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$

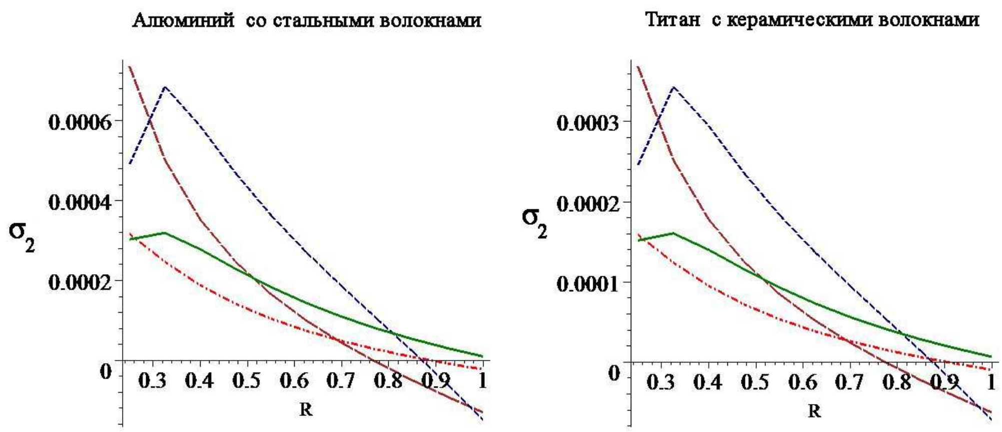


Рис. 6.30. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_2 Структура (L+Iz): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $k = 0,2$

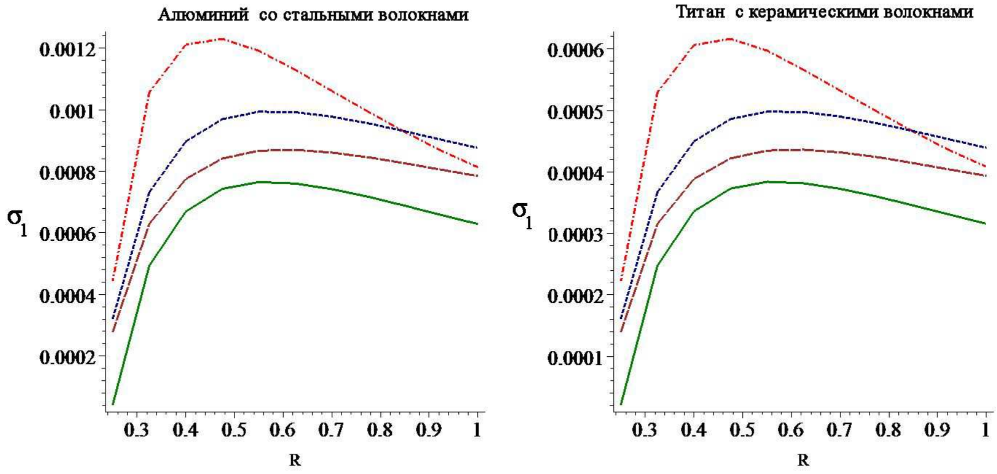


Рис. 6.31. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1. Структура (A+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,5$, $T1 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, $T1 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, $T1 = 0,2$

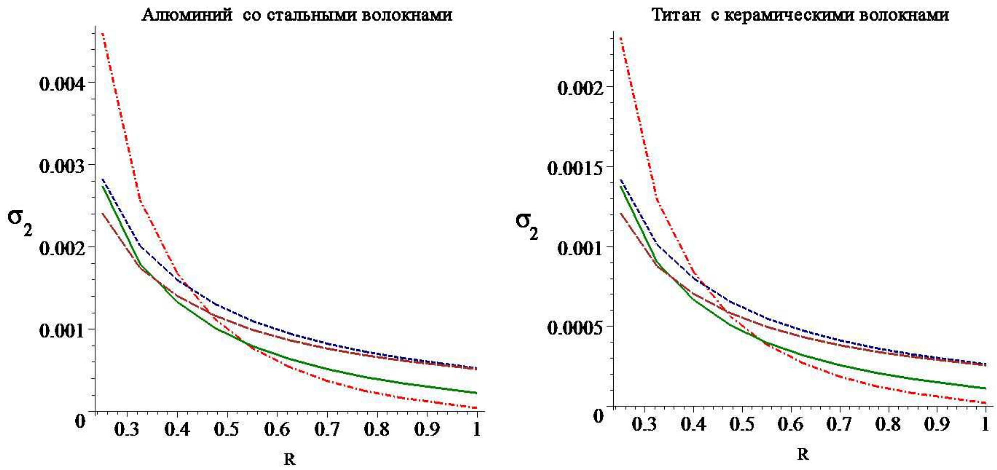


Рис. 6.32. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_2. Структура (A+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,3$, $T1 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0,5$, $T1 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, $T1 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, $T1 = 0,2$

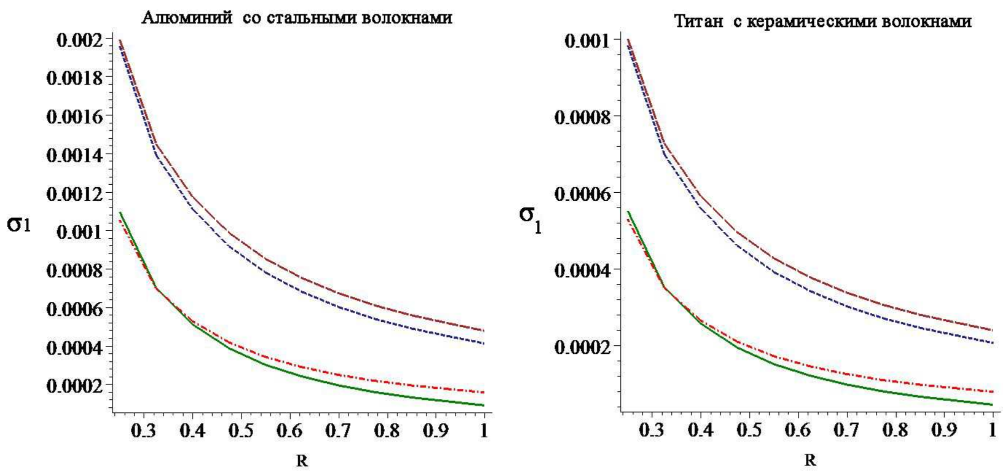


Рис. 6.33. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1. Структура (L+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$

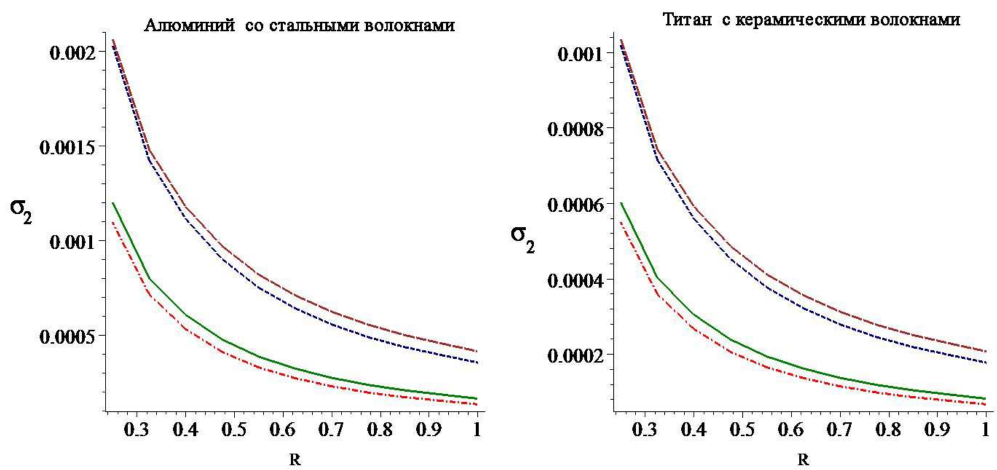


Рис. 6.34. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_2. Структура (L+V): **1** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,3$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **2** – $\omega_{10} = 0,05$, $\omega_{20} = 0,376$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$;**3** – $\omega_{10} = 0,1$, $\omega_{20} = 0,318$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$; **4** – $\omega_{10} = 0,51$, $\omega_{20} = 0,18$, $T1 = 0,3$, $\theta_0 = 0,2$

Серия графиков на рис. 6.35– 6.46 показывает поведение осредненных напряжений в связующем σ_R, σ_θ, $\sigma_{R\theta}$. Материал пластины – алюминий со стальными волокнами. Зависимость напряжений от R различна для разных типов структур. Так, напряжение σ_θ для структуры (L+Iz) принимает наибольшее значение на внутреннем контуре пластины, затем плавно убывает. Но для структур (L+V), (A+L), (A+V) это напряжение достигает наибольшего значения на относительном расстоянии $0,3$ от внутреннего радиуса, затем убывает. Эти явления можно применять при создании волокнистого композита, посредством выбора структуры армирования учитывать специфику эксплуатации конструкции.

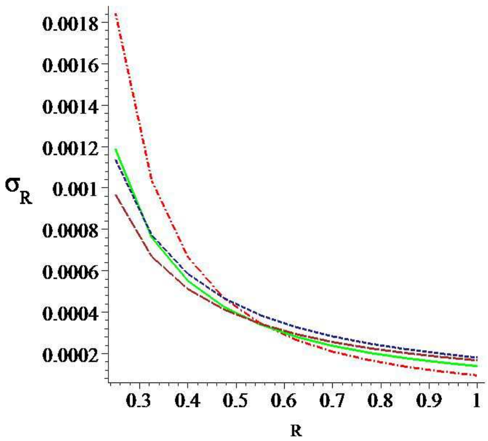


Рис. 6.35 Жесткая заделка. Структура (A+L). Напряжение в связующем σ_R

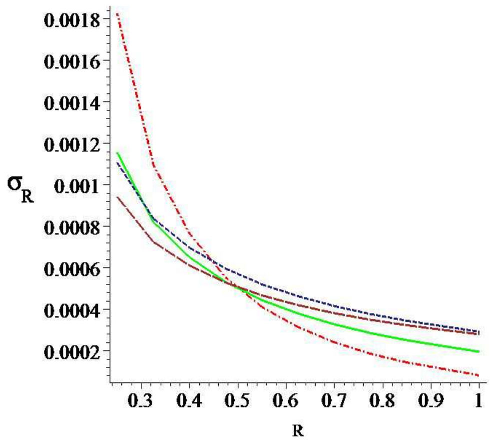


Рис. 6.36 Жесткая заделка. Структура (A+V). Напряжение в связующем σ_R

На рис. 6.47– **??** приведены графики для окружных и радиальных перемещений для армированного кольца (связующее алюминий, стальные волокна). Геометрические и механические условия соответствуют рассмотренным выше.

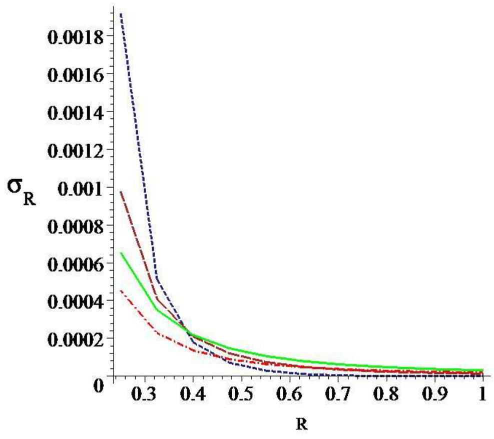


Рис. 6.37 Жесткая заделка. Структура (L+Iz). Напряжение в связующем σ_R

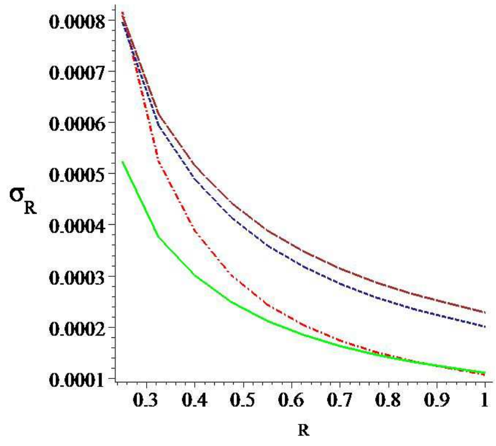


Рис. 6.38 Жесткая заделка. Структура (L+V). Напряжение в связующем σ_R

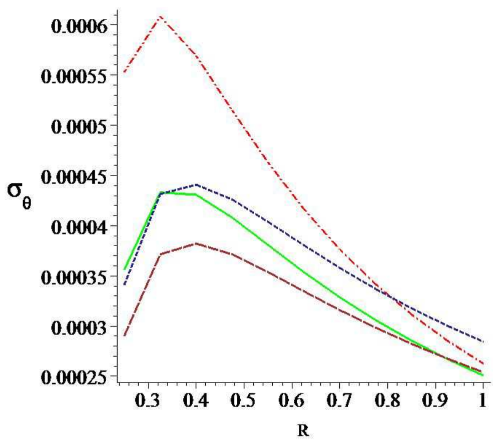


Рис. 6.39 Жесткая заделка. Структура (A+L). Напряжение в связующем σ_θ

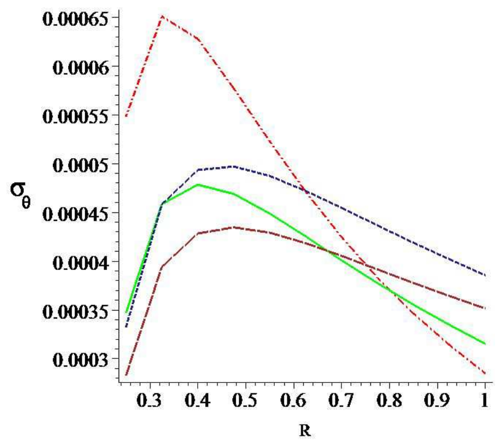


Рис. 6.40 Жесткая заделка. Структура (A+V). Напряжение в связующем σ_θ

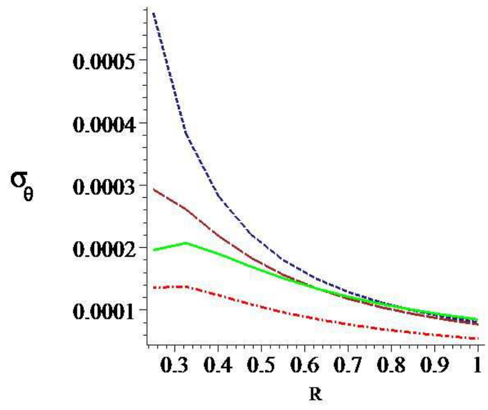


Рис. 6.41 Жесткая заделка. Структура (L+Iz). Напряжение в связующем σ_θ

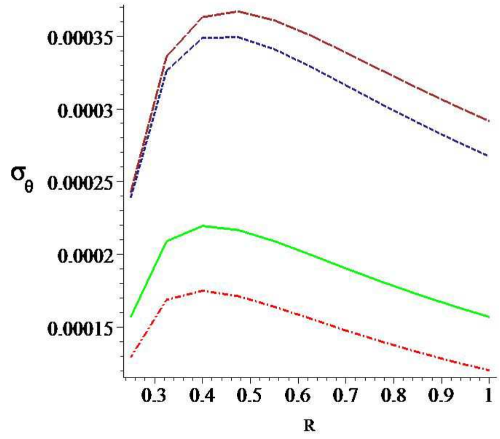


Рис. 6.42 Жесткая заделка. Структура (L+V). Напряжение в связующем σ_θ

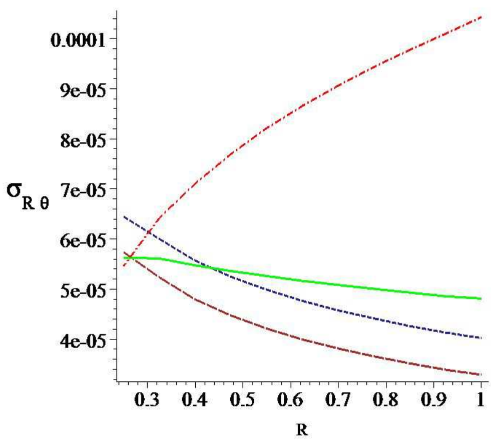


Рис. 6.43 Жесткая заделка. Структура (A+L). Напряжение в связующем $\sigma_{R\theta}$

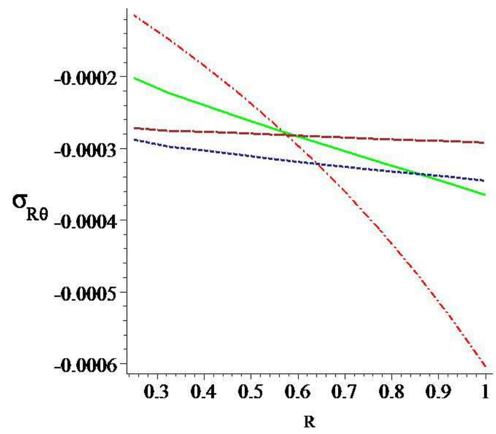


Рис. 6.44 Жесткая заделка. Структура (A+V). Напряжение в связующем $\sigma_{R\theta}$

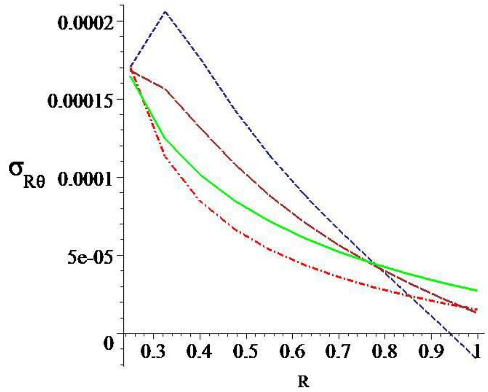


Рис. 6.45 Жесткая заделка. Структура (L+Iz). Напряжение в связующем $\sigma_{R\theta}$

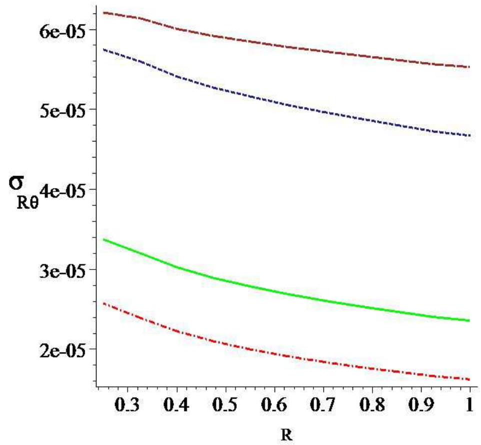


Рис. 6.46 Жесткая заделка. Структура (L+V). Напряжение в связующем $\sigma_{R\theta}$

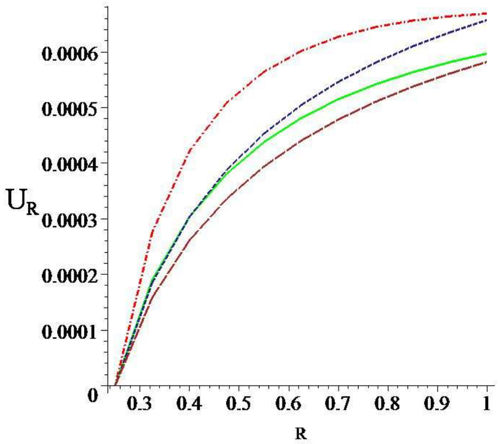


Рис. 6.47 Жесткая заделка. Структура(A+L). Перемещение U_R

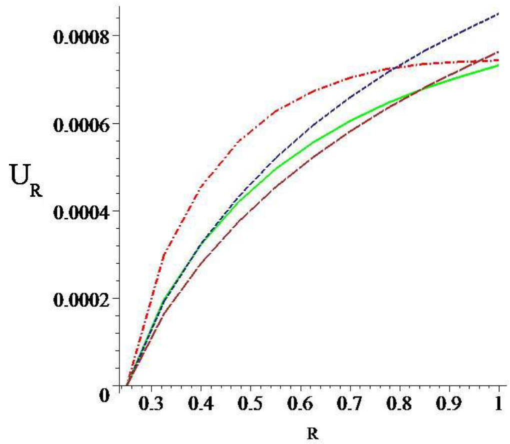
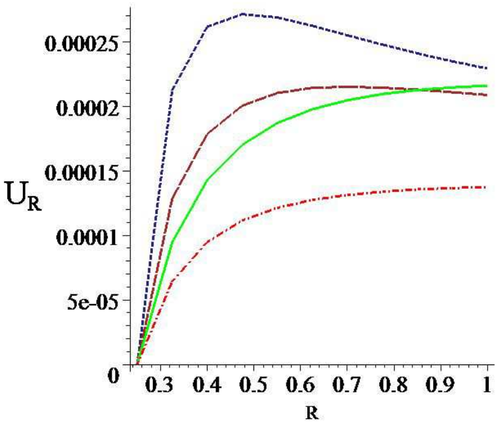


Рис. 6.48 Жесткая заделка. Структура(A+V). Перемещение U_R



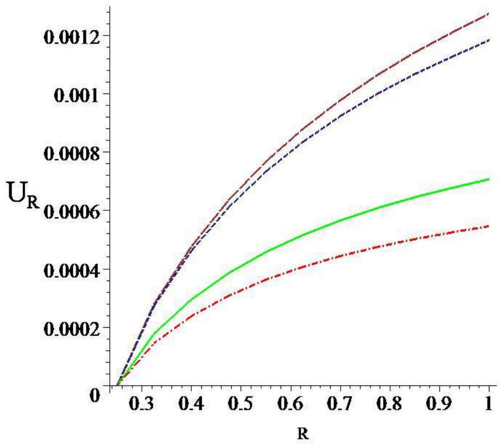
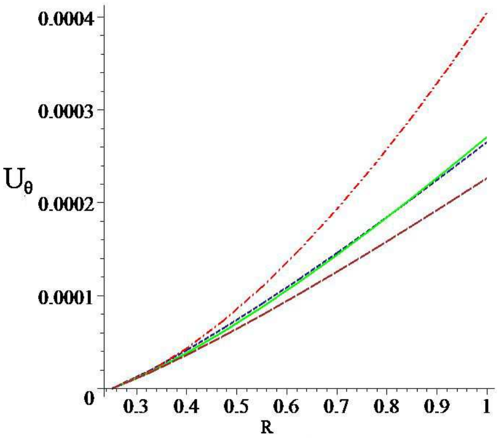


Рис. 6.49 Жесткая заделка. Структура (L+Iz). Перемещение U_R

Рис. 6.50 Жесткая заделка. Структура (L+V). Перемещение U_R



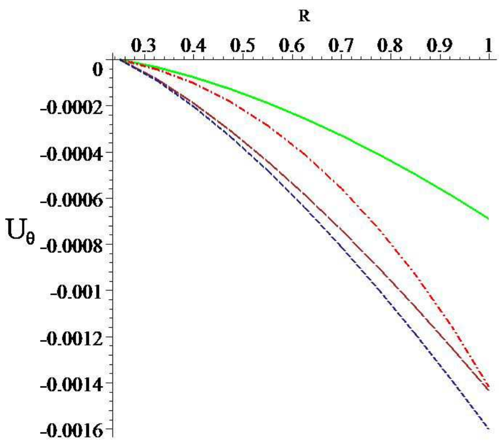


Рис. 6.51 Жесткая заделка. Структура (A+L). Перемещение U_θ

Рис. 6.52 Жесткая заделка. Структура (A+V). Перемещение U_θ

Исследуем влияние **амплитуды внешней нагрузки** на поведение напряжения в волокне σ_1 и интенсивность напряжений S. Введем амплитуду внешней нагрузки по формуле $Amp = \dfrac{p_n}{p_\tau}$, выберем для исследования на графиках следующие значения амплитуды $Amp = -4; -3; 2; 4$. Материал связующего алюминий, волокна стальные, геометрические параметры соответствуют таблице 6.2. На каждом из полученных рисунков исследуемый показатель при значении $Amp = -4$ показан непрерывное кривой, при $Amp = -3$ – линией, состоящей из тире, $Amp = 2$ – линией, состоящей из точек, $Amp = 4$ – линией, состоящей из точек-тире. Значение начальной интенсивности выбирается $\omega_{01} = 0,3, \omega_{02} = 0,3$.

На рис. 6.53 проводится сравнение функции Баландина S при малых значениях начальной интенсивности армирования $\omega_{01} = 0,01, \omega_{02} = 0,01$. Все структуры с малой плотностью армирования показывают выход из зоны упругости, происходит нарушение условия (6.35), (6.36). Армирование же с плотностью $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,3$ дает возможность повышения амплитуды внешней нагрузки. Такие же результаты показывает анализ напряжения в волокне на рис. 6.61 – 6.68, где приведено напряжение σ_1. Для слабой плотности армирования нарушается критерий (6.36). Все структуры с плотностью армирования 0,3 не достигают предельного состояния для данных материалов и рассмотренных условий нагружения.

На рис. 6.53 – 6.60 показано, что значение амплитуды существенно влияет на поведение напряжений в армированной кольцевой пластине в условиях осесимметричной деформации. Влияние Amp внешней нагрузки на напряжение в волокне σ_1 для всех рассматриваемых структур показано на рис. 6.61–6.68.

Исследуем влияние относительного размера внутреннего радиуса кольца на примере структуры (L+V). На каждом графике для четырех вариантов начальных интенсивностей армирования (таблица 6.2) рассматривается поведение функции Баландина S и напряжения в волокне σ_1 в зависимости от относительного радиуса кольца $R \in [R_1; 1]$. Выводим графики для жесткой

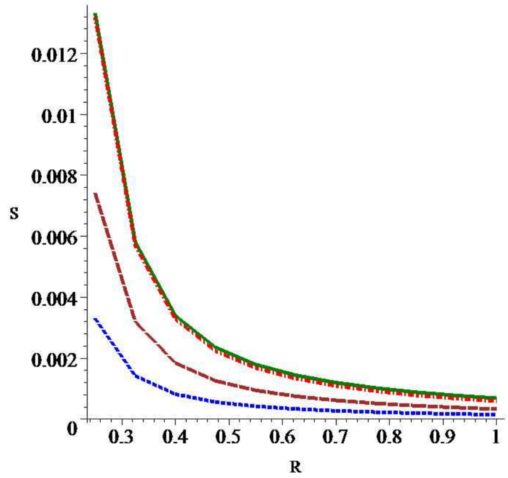


Рис. 6.53 Структура(A+L), $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$ Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S для $Amp = -4,-3,2,4$

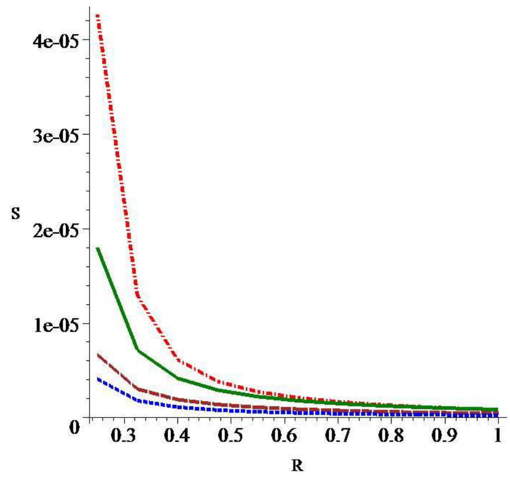


Рис. 6.54 Структура(A+L), $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$ Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S для $Amp = -4,-3,2,4$

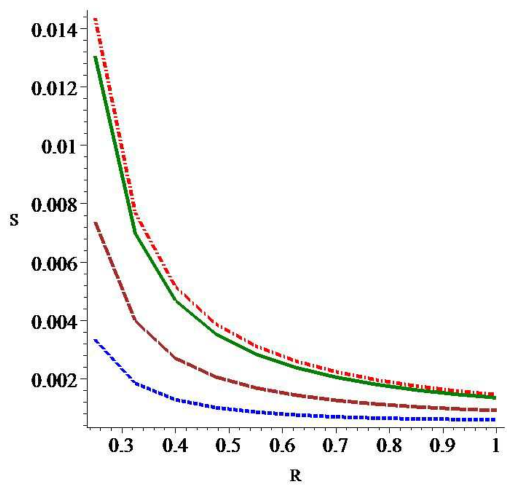


Рис. 6.55 Структура(A+V), $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

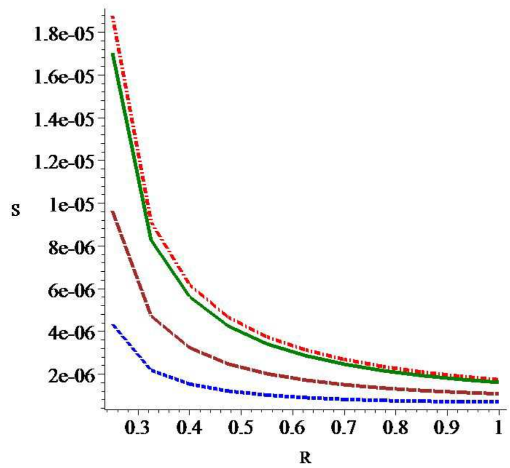


Рис. 6.56 Структура(A+V), $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

заделки и кручения при задании окружного перемещения $U_\theta = 0,001$ на внутреннем контуре кольца. Рассматриваем два варианта относительного радиуса $R_1 = 0,1$ (малое значение внутреннего отверстия) и $R_1 = 0,5$.

Как видим на рис. 6.69 – 6.76, относительный размер кольца, принятый малым $0,1$, приводит к тому, что функция Баландина S и напряжения в во-

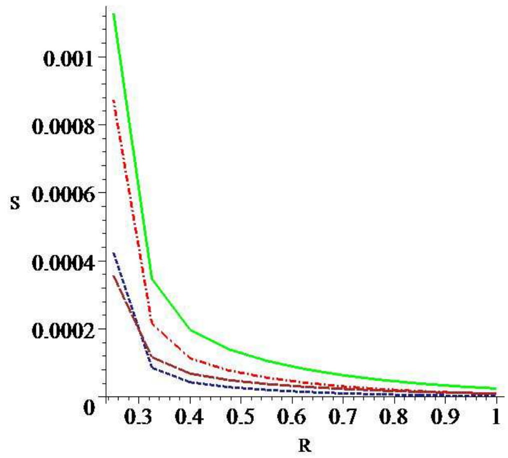


Рис. 6.57 Структура(L+Iz), $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

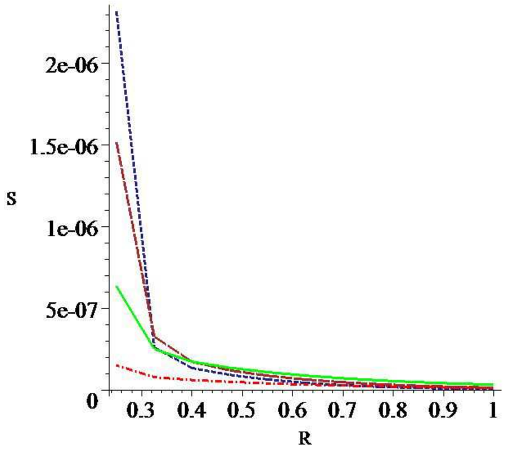


Рис. 6.58 Структура(L+Iz), $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

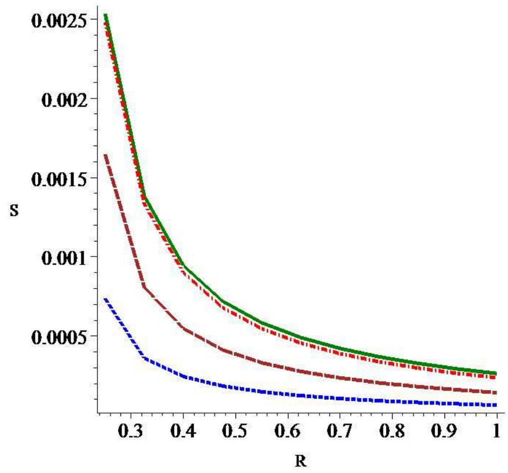


Рис. 6.59 Структура(L+V), $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

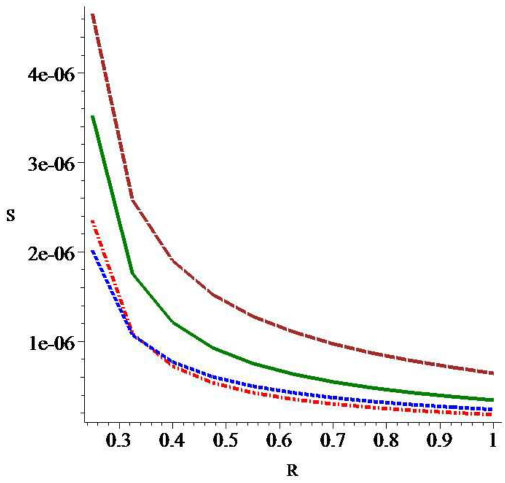


Рис. 6.60 Структура(L+V), $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S, $Amp = -4,-3,2,4$

локне достигают "предельных состояний", нарушаются условия (6.35) и (6.36), происходит выход за пределы упругости, может возникнуть микроразрушение. При проектировании конструкции выбор относительного внутреннего радиуса армированного кольца оказывает большое влияние на прочность конструкции.

Анализ приведенных выше графиков позволяет сделать следующие вы-

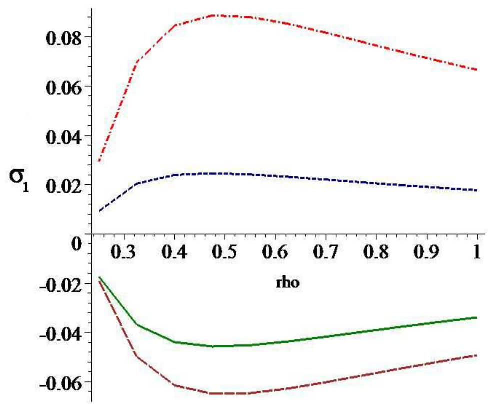


Рис. 6.61 Структура(A+L). $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

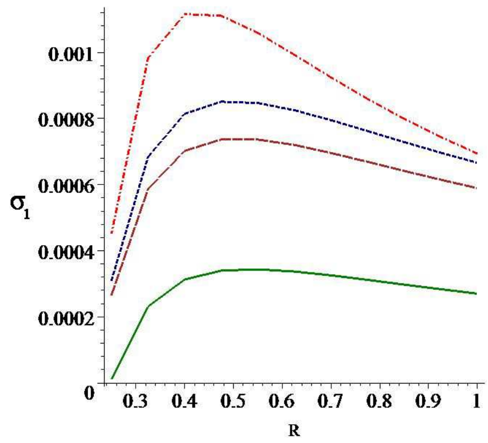


Рис. 6.62 Структура(A+L). $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

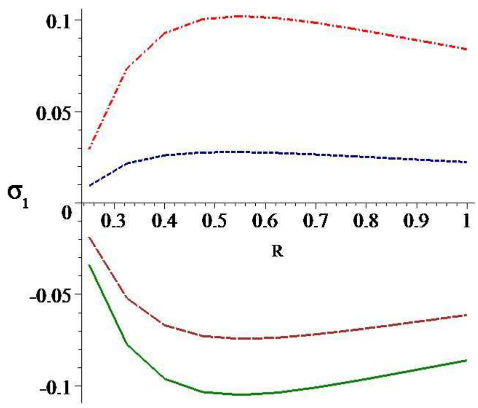


Рис. 6.63 Структура(A+V). $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

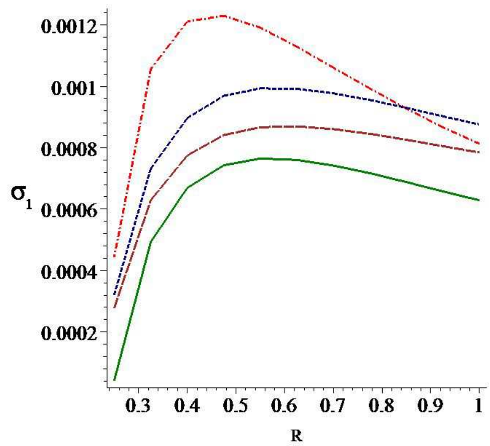


Рис. 6.64 Структура(A+V). $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

воды:

1. На величину напряжений в волокне и связующем влияет выбор материала связующего и армирующих волокон, что показано на графиках рис. 6.23 – 6.34.

2. Введение на внутреннем контуре жесткой заделки приводит к существенному изменению уровня напряжений по сравнению с рассмотренными

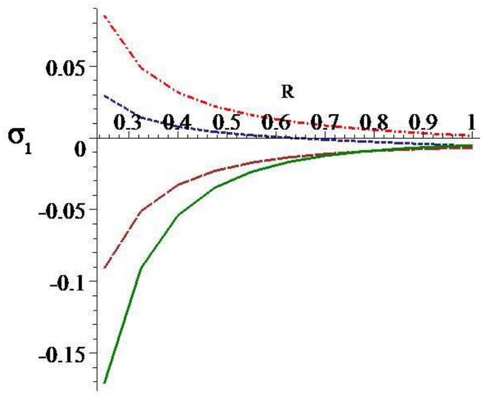


Рис. 6.65 Структура(L+Iz). $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

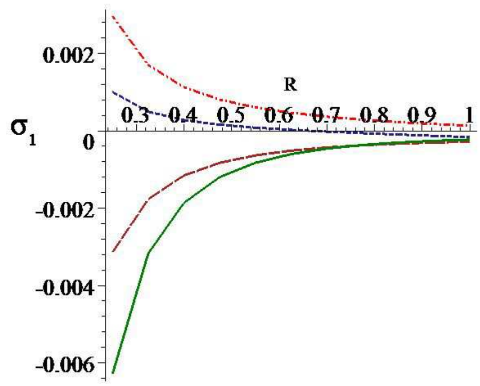


Рис. 6.66 Структура(L+Iz). $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

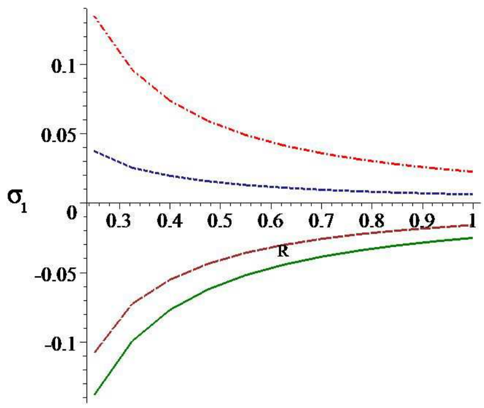


Рис. 6.67 Структура(L+V). $\omega_{01} = 0,01$, $\omega_{02} = 0,01$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

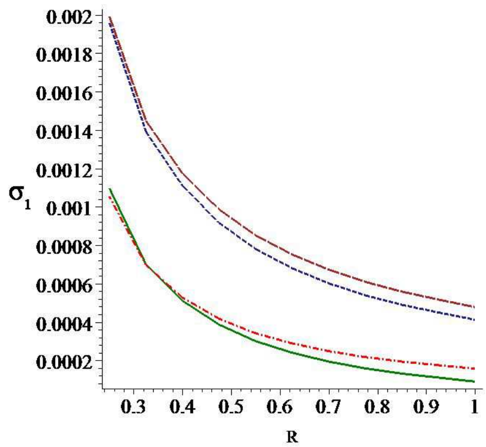


Рис. 6.68 Структура(L+V). $\omega_{01} = 0,3$, $\omega_{02} = 0,3$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

ранее условиями ненулевых перемещений на внутреннем контуре кольцевой пластины .

3. На поведение напряжений в пластинке существенное влияние оказывает амплитуда внешней нагрузки.

4. Выбор величины внутреннего относительного радиуса кольцевой пластины оказывает влияние на уровень перемещений и, как показывают графи-

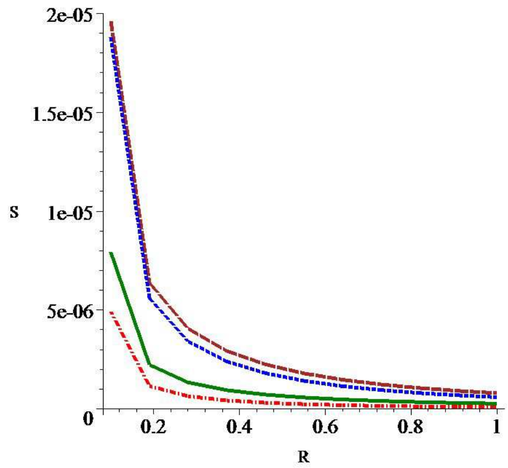


Рис. 6.69 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,1$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S

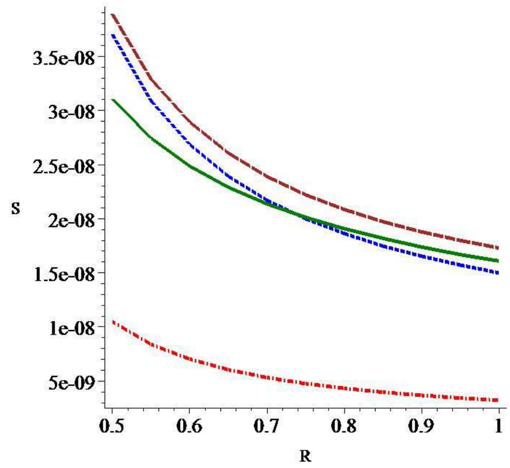


Рис. 6.70 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,5$. Жесткая заделка. Интенсивность напряжений S

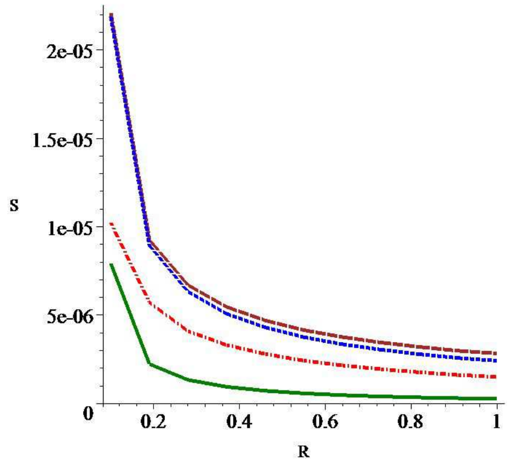


Рис. 6.71 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,1$. Кручение. Интенсивность напряжений S

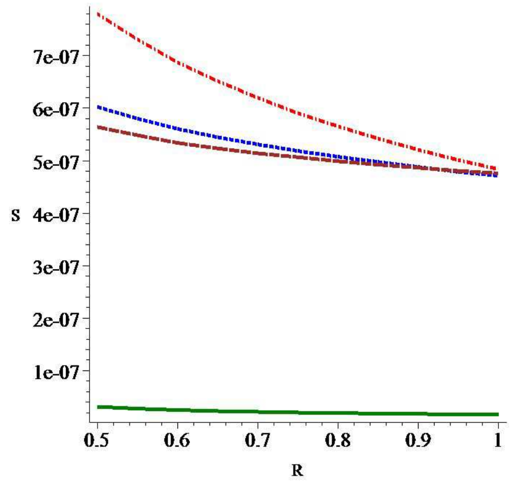


Рис. 6.72 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,5$. Кручение. Интенсивность напряжений S

ки, на порядок отличаются значения функции Баландина для разных значений внутреннего радиуса.

5. Приведенные графики иллюстрирует существенное влияние геометрических параметров пластины (угол выхода арматуры на внутреннем контуре, начальная интенсивность армирования, выбор вида траектории армирования) на поведение напряжений в армированной кольцевой пластине в условиях осе-

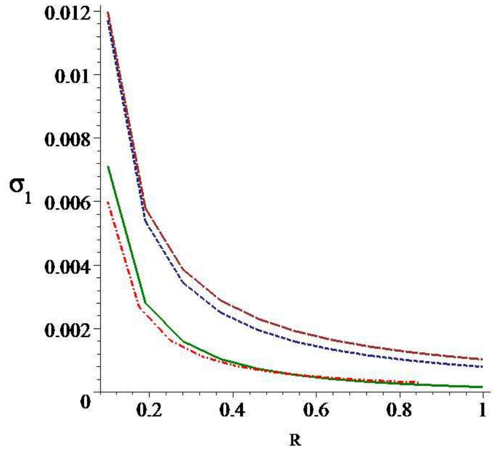


Рис. 6.73 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,1$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

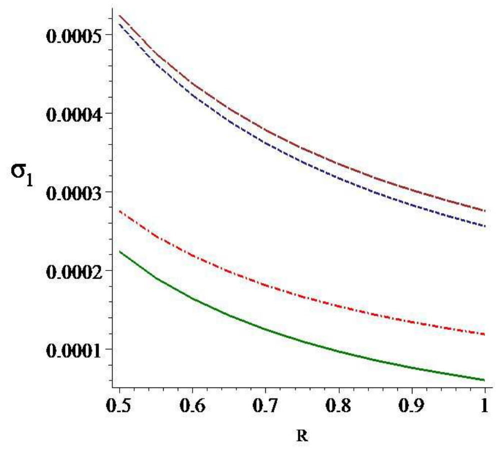


Рис. 6.74 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,5$. Жесткая заделка. Напряжение в волокне σ_1

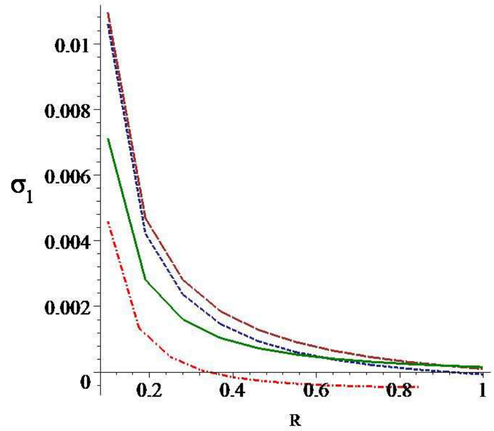


Рис. 6.75 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,1$. Кручение. Напряжение в волокне σ_1

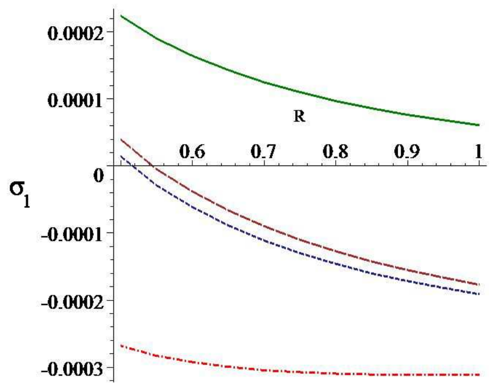


Рис. 6.76 Структура(L+V), внутренний радиус $R_1 = 0,5$. Кручение. Напряжение в волокне σ_1

симметричной деформации.

Расчеты показали, что за счет управления рассмотренными геометрическими параметрами пластины и криволинейной укладкой семейств волокон, без использования часто дорогостоящих армирующих волокон, можно получить армированную конструкцию с заранее заданными свойствами.

В главе 6 на основе структурной модели в рамках линейной неоднородной осесимметричной задачи упругости получена разрешающая система уравнений, описывающая поведение армированной кольцевой пластины. Система обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована относительно радиального и окружного перемещений в полярной системе координат. Армирование выполняется вдоль спиралевидных траекторий в рамках рационального проектирования задачи об армированной среде. В качестве критерия рациональности введено условие постоянства сечений волокон. Интенсивность армирования определяется посредством интегрирования уравнения постоянства сечений волокон вдоль выбранной конкретной траектории. Построены аналитические решения для интенсивностей армирования вдоль траекторий алгебраических спиралей.

Рассмотрено армирование двумя семействами волокон: траектории армирования – семейства алгебраических спиралей и комбинации спиралей с семейством прямых, известных в технике как "спицы велоколеса". Многообразие траекторий армирования расширяется путем построения криволинейных траекторий, изогональных к рассматриваемым семействам кривых.

Система и граничные условия представляют собой двухточечную краевую задачу не канонического вида для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты системы содержат полный набор структурных характеристик: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования. Построен эффективный численный метод посредством приведения системы к канонической форме и реализации адаптивной схемы ортогональной прогонки. Постановка исходной задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает разнообразные механические формулировки задачи.

Основные результаты главы 6 опубликованы в работах [70, 72, 121, 126, 125, 128, 124, 123, 132, 131, 77, 130, 132, 133, 75].

Глава 7

Предельное деформирование дисков газовых и гидротурбин при различных структурах армирования

7.1 Задача об армированном диске

Изложенный в предыдущей главе 6 подход моделирования вдоль криволинейных траекторий на основе структурной модели позволяет получить разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно окружного и радиального перемещений вращающегося диска в полярной системе координат. Пусть диск состоит из защитных изотропных и армированного слоев. Армирование выполняется по криволинейным спиралевидным траекториям и их различным комбинациям. Установлено, что армирование существенно увеличивает предельное количество оборотов диска в минуту по сравнению с однородным диском. Разработанный подход позволяет рассмотреть различные структуры армирования вращающегося диска в рамках единой схемы решения.

Анализу напряженно-деформированного состояния однородных вращающихся дисков посвящено большое количество работ [31, 11]. Армированные равнонапряженные диски, навитые из волокон, впервые рассмотрены в работе [36]. Общий подход построения механики волокнистых композитов представлен в монографии [148].

Рассматривается диск, симметричный относительно своей срединной поверхности. Диск состоит из 3-х слоев: двух защитных, изотропных толщиной $h_1/2$ каждый, жестко соединенных с армированным слоем толщиной h_2. Толщины слоев h_1, h_2 являются функциями радиуса диска r. Толщина диска $h_1 + h_2$ предполагается малой по сравнению с наружным радиусом диска $r = r_1$. На диск действуют центробежные силы от вращения, они направлены радиально и равномерно распределены в окружном направлении. Диск неравномерно нагрет по радиусу. Температура предполагается постоянной по толщине.

Напряженное состояние в диске считаем двумерным осесимметричным (напряжениями в площадках, параллельных срединным поверхностям, пренебрегаем), напряжения равномерно распределены по толщине. Для изотропного вращающегося диска газовой турбины задача полностью решена в работах [31, 11]. В работе [58] в рамках задачи рационального проектирования рассмотрен трехслойный армированный диск с симметричными структурами армирующих волокон.

Рассмотрим растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы в полярной системе координат (r, θ). В диске учитываются усилия $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ как сумма усилий в изотропном слое $N_{r1}, N_{\theta 1}, N_{r\theta 1}$ и армированном слое $N_{r2}, N_{\theta 2}, N_{r\theta 2}$. Проанализируем как радиальные, так и окружные перемещения.

Пусть диск насажен на вал радиуса r_0 внешний контур диска r_1. С диском жестко соединены лопатки, наружный контур лопаток r_2. Диск и лопатки вращаются внутри кожуха турбинного аппарата радиуса $r_3, r_3 > r_2 > r_1 > r_0$ (рис. 7.1). Рассматриваются уравнения равновесия конструкции в усилиях $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$:

$$\begin{gathered}\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = \Phi_1, \\ \frac{dN_{r\theta}}{dr} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = \Phi_2.\end{gathered} \tag{7.1}$$

В соотношении (7.1) усилия записываются как суммы усилий в слоях:

$$N_r = N_{r1} + N_{r2}; N_\theta = N_{\theta 1} + N_{\theta 2}; N_{r\theta} = N_{r\theta 1} + N_{r\theta 1}.$$

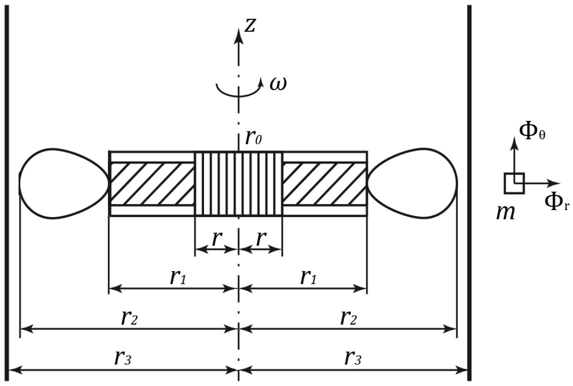


Рис. 7.1

Массовые силы Φ_1, Φ_2 вычисляются по формулам: $\Phi_1 = \Phi_r \omega_c^2 r$, $\Phi_2 = m^v \dfrac{d\omega_c}{dt} r$, где ω_c – угловая скорость вращения диска, $\omega_c = \dfrac{\pi n}{30}$, $n-$ число оборотов в минуту. Считаем, что угловая скорость ω_c не зависит от времени, поэтому $\Phi_2 = 0$ (установившейся режим). Находим $\Phi_r = \Phi_{r1} + \Phi_{r2}$, где $\Phi_{r1} = m_1^v h_1$, $\Phi_{r2} = m_2^v h_2$, $m^v = m_1^v + m_2^v$, здесь m_1^v, m_2^v — удельные массы изотропного и армированного слоев, m_1^v совпадает с плотностью материала изотропного слоя ρ_{01}. Для армированного m семействами волокон слоя имеем в соответствии с работой [58]

$$m_2^v = \rho_{02}(1 - \sum_k \omega_k) + \sum_k \omega_k \rho_k, k = 1, ..., m \tag{7.2}$$

В соотношении (7.2) введены обозначения ρ_{02} – плотность материала связующего армированного слоя, ρ_k – плотность материала k - го семейства армирующих волокон, ω_k – интенсивность армирования k-ым семейством волокон. Исходя из введенных выше предположений, связь между усилиями и напряжениями $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ в рассматриваемых слоях примет вид:

$$N_{r1} = \sigma_{r1} h_1, N_{r2} = \sigma_{r2} h_2, N_{\theta 1} = \sigma_{\theta 1} h_1, \tag{7.3}$$
$$N_{\theta 2} = \sigma_{\theta 2} h_2, N_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 1} h_1, N_{r\theta 2} = \sigma_{r\theta 2} h_2.$$

Таблица 7.1 Плотности материалов

Материал	Титан (Ti)	Сталь	Бериллий	Керамические волокна	Борные волокна
Плотность, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	4430	7800	1848	3950	2250

В соотношениях (7.3) величины $h_1(r), h_2(r)$ – заданные толщины защитного слоя и армированного слоя как функции радиуса. В работах [31, 11] приведены используемые в промышленности профили дисков: конический, гиперболический, экспоненциальный, постоянный.

Ввиду жесткого соединения слоев деформирование в слоях диска происходит совместно, для перемещений справедливы соотношения:

$$U_r = U_{r1} = U_{r2}; U_\theta = U_{\theta 1} = U_{\theta 2}.$$

Соотношения Коши в введенных обозначениях принимают вид

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\theta 2} = \frac{U_r}{r}; \varepsilon_r = \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = \frac{dU_r}{dr}; \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta 1} = \varepsilon_{r\theta 2} = \frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}.$$

Сформулированная задача (7.1) является статически неопределенной, необходимо привлечь связь напряжений с деформациями. Для первого и третьего защитного изотропного слоя закон Гука имеет вид

$$\sigma_{r1} = \frac{E^*}{1-\nu*^2}\left(\frac{dU_r}{dr} + \nu^*\frac{U_r}{r}\right) - \frac{E^*\alpha T(r)}{1-\nu^*},$$
$$\sigma_{\theta 1} = \frac{E^*}{1-\nu*^2}\left(\frac{U_r}{r} + \nu^*\frac{dU_r}{dr}\right) - \frac{E^*\alpha T(r)}{1-\nu^*}, \sigma_{r\theta 1} = \frac{E^*}{1+\nu*}\left(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}\right), \quad (7.4)$$
$$b_{11} = \frac{E^*}{1-\nu*^2}, b_{12} = \frac{\nu E^*}{1-\nu*^2}, b_{33} = \frac{E^*}{1+\nu*},$$

где E^* — модуль Юнга изотропного материала, ν^* – его коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного расширения, $T(r)$ – заданная температура.

Для армированного слоя диска используется связь (6.7) между напряжениями и деформациями с учетом армирования вдоль криволинейных траекторий

$$\sigma_{r2} = a_{11}\varepsilon_r + a_{12}\varepsilon_\theta + a_{13}\varepsilon_{r\theta} + \sigma^T_{r2}, \sigma_{\theta 2} = a_{21}\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_\theta + a_{23}\varepsilon_{r\theta} + \sigma^T_{\theta 2}, \quad (7.5)$$
$$\sigma_{r\theta 2} = a_{31}\varepsilon_r + a_{32}\varepsilon_\theta + a_{33}\varepsilon_{r\theta} + \sigma^T_{r\theta 2}.$$

Входящие в (7.5) коэффициенты $a_{ij}(r) = a_{ji}(r)$, как установлено в (6.8), учитывают все структурные характеристики материалов связующего и армирующих волокон: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокон, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования, входные данные технологического процесса. В формулах (7.5) σ^T_{r2}, $\sigma^T_{\theta 2}$, $\sigma^T_{r\theta 2}$ – термоупругие напряжения.

При моделировании армированного слоя в диске вводим условие постоянства площади поперечных сечений армирующих волокон [19]. Поскольку наиболее распространенные технологии изготовления изделий из армированных композитов используют волокна, имеющие по своей длине постоянную площадь поперечного сечения, поэтому параметры армирования φ_m и ω_m (углы армирования m-ым семейством волокон и интенсивность армирования) связаны определенными для каждого типа структур зависимостями [68, 72].

7.2 Построение разрешающей системы уравнений

Для построения замкнутой системы разрешающих уравнений сформулируем задачу в перемещениях U_r, U_θ. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенную относительно производных от радиального и окружного перемещений, моделирующую растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы. Не ограничивая общности, вывод уравнений проводится без учета поля температур.

Усилия N_r N_θ $N_{r\theta}$ выражаются через радиальное и окружное перемещения согласно формулам (7.3)

$$
\begin{aligned}
N_r &= \left(b_{11}\frac{dU_r}{dr}+b_{12}\frac{U_r}{r}\right)h_1+h_2\left[a_{11}\frac{dU_r}{dr}+a_{12}\frac{U_r}{r}+a_{13}\left(\frac{dU_\theta}{dr}-\frac{U_\theta}{r}\right)\right],\\
N_\theta &= \left(b_{21}\frac{dU_r}{dr}+b_{22}\frac{U_r}{r}\right)h_1+h_2\left[a_{21}\frac{dU_r}{dr}+a_{22}\frac{U_r}{r}+a_{23}\left(\frac{dU_\theta}{dr}-\frac{U_\theta}{r}\right)\right],\\
N_{r\theta} &= b_{33}\left(\frac{dU_\theta}{dr}+b_{12}\frac{U_\theta}{r}\right)h_1+h_2\left[a_{31}\frac{dU_r}{dr}+a_{32}\frac{U_r}{r}+a_{33}\left(\frac{dU_\theta}{dr}-\frac{U_\theta}{r}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

В формулах (7.6) в обозначениях функций $h_1(r), h_2(r)$ (толщин слоев)для упрощения записи опустили символ зависимости от (r), принимая $h_1(r) \equiv h_1$, $h_2(r) \equiv h_2$. Подстановка соотношения (7.6) в систему (7.1), после вычисления производных по r от усилий $N_r\, N_\theta\, N_{r\theta}$, дает следующие выражения для первого уравнения системы (7.1)

$$
\begin{gathered}
\tfrac{dN_r}{dr}=\tfrac{dh_1}{dr}\left(b_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+b_{12}\tfrac{U_r}{r}\right)+h_1\left(r\right)\tfrac{d}{dr}\left[b_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+b_{12}\tfrac{U_r}{r}\right]+\\
+\tfrac{dh_2}{dr}\left[a_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{12}\tfrac{U_r}{r}+a_{13}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r}\right)\right]+\\
+h_2\left(r\right)\tfrac{d}{dr}\left[a_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{12}\tfrac{U_r}{r}+a_{13}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r}\right)\right]=\\
=\tfrac{dh_1}{dr}\left(b_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+b_{12}\tfrac{U_r}{r}\right)+h_1\left[b_{11}\tfrac{d^2U_r}{dr^2}+b_{12}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{dU_r}{dr}-\tfrac{U_r}{r^2}\right)\right]+\\
+\tfrac{dh_2}{dr}\left(a_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{12}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{13}\tfrac{dU_\theta}{dr}-a_{13}\tfrac{U_\theta}{r}\right)+\\
+h_2(\tfrac{da_{11}}{dr}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{11}\tfrac{d^2U_r}{dr^2}+\tfrac{da_{12}}{dr}\tfrac{U_r}{r}+\\
+a_{12}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{dU_r}{dr}-\tfrac{U_r}{r^2}\right)+\tfrac{da_{13}}{dr}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r}\right)+a_{13}\left(\tfrac{d^2U_\theta}{dr^2}\right)-a_{13}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r^2}\right));
\end{gathered}
\tag{7.7}
$$

$$
\begin{gathered}
\tfrac{N_r-N_\theta}{r}=\tfrac{1}{r}[h_1\left(b_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+b_{12}\tfrac{U_r}{r}\right)+h_2\left[a_{11}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{13}\tfrac{U_r}{r}+a_{13}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r}\right)\right]-\\
-h_1\left(b_{21}\tfrac{dU_r}{dr}+b_{22}\tfrac{dU_r}{dr}\right)-h_2\left[a_{21}\tfrac{dU_r}{dr}+a_{22}\tfrac{U_r}{r}+a_{23}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr}-\tfrac{U_\theta}{r}\right)\right]]=\\
=\tfrac{1}{r}[\tfrac{dU_r}{dr}\left(h_1b_{11}+h_2(r)a_{11}-h_1b_{21}-h_2a_{21}\right)+\tfrac{dU_r}{dr}\left(h_2a_{13}-h_2a_{23}\right)+\\
+\tfrac{U_r}{r}\left(h_1b_{12}+h_2a_{13}-h_1b_{22}-h_2a_{22}\right)+\tfrac{U_\theta}{r}(-h_2)b_{13}+h_2a_{23}];
\end{gathered}
$$

Для второго уравнения системы (7.1) выражение усилий через перемещения и производные по r от толщин h_1, h_2 и коэффициентов a_{ij} армированного слоя имеет вид

$$
\begin{gathered}
\tfrac{dN_{r\theta}}{dr} = \tfrac{dh_1}{dr}\left(b_{33}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right)\right) + h_1 b_{33}\tfrac{d}{dr}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right) + \\
+\tfrac{dh_2}{dr}\left(a_{31}\tfrac{dU_r}{dr} + a_{32}\tfrac{U_r}{r} + a_{33}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right)\right) + \\
+h_2\tfrac{d}{dr}\left[a_{31}\tfrac{dU_r}{dr} + a_{32}\tfrac{U_r}{r} + a_{33}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right)\right] = \\
= b_{33}\tfrac{dh_1}{dr}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right) + b_{33}h_1\left[\tfrac{d^2U_\theta}{dr^2} - \tfrac{1}{r}\tfrac{dU_\theta}{dr} + \tfrac{U_\theta}{r^2}\right] + \\
\tfrac{dh_2}{dr}\left(a_{31}\tfrac{dU_r}{dr} + a_{32}\tfrac{U_r}{r} + a_{33}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right)\right) + \\
+h_2(\tfrac{da_{31}}{dr}\tfrac{dU_r}{dr} + a_{31}\tfrac{dU_r}{dr}\tfrac{da_{32}}{dr}\tfrac{dU_r}{dr} + a_{32}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{dU_r}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right) + \\
+\tfrac{da_{33}}{dr}\left(\tfrac{dU_\theta}{dr} - \tfrac{U_\theta}{r}\right) + a_{33}(\tfrac{d^2U_\theta}{dr^2} - \tfrac{1}{r}\tfrac{dU_\theta}{dr} + \tfrac{U_\theta}{r^2}));
\end{gathered}
$$

$$
\frac{N_{r\theta}}{r} = \frac{1}{r}\left[b_{33}h_1(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}) + h_2(a_{31}\frac{dU_r}{dr} + a_{32}\frac{U_r}{r} + a_{33}(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}))\right].
$$

Соберем в полученных уравнениях коэффициенты при $\dfrac{d^2U_r}{dr^2}$, $\dfrac{d^2U_\theta}{dr^2}$, $\dfrac{dU_r}{dr}$, $\dfrac{dU_\theta}{dr}$,U_r,U_r. Для первого уравнения равновесия обозначим коэффициенты при производных и перемещениях соответственно A_1,B_1,C_1,D_1, EE_1,Z_1. Для второго уравнения обозначим A_2,B_2,C_2,D_2, EE_2,Z_2. В результате запишем систему

$$
\begin{aligned}
&A_1\frac{d^2U_r}{dr^2} + B_1\frac{d^2U_\theta}{dr^2} + C_1\frac{dU_r}{dr} + D_1\frac{dU_\theta}{dr} + EE_1U_r + Z_1U_\theta = \Phi_r, \\
&A_2\frac{d^2U_r}{dr^2} + B_2\frac{d^2U_\theta}{dr^2} + C_2\frac{dU_r}{dr} + D_2\frac{dU_\theta}{dr} + EE_2U_r + Z_2U_\theta = \Phi_\theta.
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

Коэффициенты 1-го уравнения системы (7.8) имеют вид

$$
\begin{gathered}
A_1 = h_1b_{11} + h_2a_{11}, B_1 = h_2a_{13}, \\
C_1 = \frac{dh_1}{dr}b_{11} + \frac{h_1b_{12}}{r} + \frac{dh_2}{dr}a_{11} + h_2\frac{da_{11}}{dr} + \frac{h_2a_{12}}{r} + \\
+\frac{1}{r}(h_1b_{11} + h_2a_{11} - h_1b_{12} - h_2a_{12}), \\
D_1 = \frac{dh_2}{dr}a_{13} + h_2\frac{da_{13}}{dr} - \frac{h_2a_{13}}{r} + \frac{h_2(a_{13} - a_{23})}{r}, \\
EE_1 = \frac{b_{12}}{r}\frac{dh_1}{dr} - \frac{h_1b_{12}}{r^2} + \frac{dh_2}{dr}\frac{a_{12}}{r} + \\
+\frac{h_2}{r}\frac{da_{13}}{dr} - \frac{h_2a_{12}}{r^2} + \frac{1}{r^2}(h_1b_{12} + h_2a_{13} - h_1b_{22} - h_2a_{22}), \\
Z_1 = (-\frac{a_{13}}{r})\frac{dh_2}{dr} + (-\frac{1}{r})h_2\frac{da_{13}}{dr} + \frac{h_2}{r^2}a_{23}.
\end{gathered}
$$

Коэффициенты 2-го уравнения системы (7.8) имеют вид

$$A_2 = h_2 a_{13}, B_2 = h_1 b_{33} + h_2 a_{33},$$
$$C_2 = \frac{dh_2}{dr} a_{13} + h_2 \frac{da_{13}}{dr} + \frac{h_2(a_{23} + 2a_{13})}{r},$$
$$D_2 = b_{33}\frac{dh_1}{dr} - \frac{h_1 b_{33}}{r} + h_2 \frac{da_{33}}{dr} - \frac{h_2 a_{33}}{r} + \frac{dh_2}{dr} a_{33} + \frac{2h_1}{r} b_{33} + \frac{h_2}{r} a_{33},$$
$$EE_2 = \frac{a_{23}}{r}\frac{dh_2}{dr} + \frac{h_2}{r}\frac{da_{23}}{dr} - \frac{h_2 a_{23}}{r^2} + \frac{2}{r^2} h_2 a_{33},$$
$$Z_2 = (-\frac{b_{33}}{r})\frac{dh_1}{dr} + \frac{h_1 b_{33}}{r^2} - \frac{dh_2}{dr}\frac{a_{33}}{r} - \frac{h_2}{r}\frac{da_{33}}{dr} + \frac{h_2 a_{33}}{r^2} - \frac{2h_1}{r^2} b_{33} - \frac{2h_2}{r^2} a_{33}.$$

К системе (7.8) присоединяются краевые условия: а) на внутреннем контуре $r = r_0$ предполагается, что диск жестко закреплен, смещения отсутствуют $U_r(r_0) = U_\theta(r_0) = 0$; б) на внешнем контуре заданы усилия $N_r(r_1) = K_1\omega_c^2, N_{r\theta}(r_1) = K_1\omega_c^2$, где K_1, K_2 – экспериментально определяемые значения.

При проектировании диска необходимо установить предельную угловую скорость вращения ω_c. Ранее, в главе 2 посредством соотношений (2.16),(2.17) было введено понятие предельного упругого состояния в некоторой точке армированной конструкции. По достижении которого хотя бы в одной точке либо в связующем, либо в волокне происходит выход за пределы упругости (напряжение превышает предел прочности или текучести).

Изучим напряженно-деформированное состояние вращающихся дисков, армированных волокнами вдоль непрерывных траекторий (структур армирования). Рассматриваются спиралевидные траектории, радиально-окружные, ”спицы велоколеса” и их комбинации.

Выполним обезразмеривание системы (7.8) и краевых условий: линейный размер отнесем к величине внутреннего радиуса r_0, $R = \dfrac{r}{r_0}$, в работе в численных экспериментах R принадлежит интервалу $R \in [1, 2]$. Компоненты напряжений отнесем к модулю Юнга материала одного из семейств волокон E_m. Анализируем значение функции Баландина S(R) для различных вариантов структур армирования. Для численного решения обезразмеренная система сводится к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка, затем строится разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений и краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей решается методом ортогональной прогонки. В настоящей главе численные результаты получены для дисков постоянной толщины. Наиболее важной рабочей характеристикой турбинного диска, определяющей его несущую способность, является максимальная допустимая угловая скорость вращения. Исследуем влияние структуры армирования на данный параметр.

7.3 Моделирование армированного диска газовой турбины

Для диска газовой турбины касательные усилия в осесимметрической постановке не существенны, поэтому принимается $N_{r\theta} = 0$ [31]. Предельные скорости вращения дисков газовых турбин рассматриваются на примере титанового диска массой 9,8 кг, ограниченного контурами с радиусами $r_0 = 0,05$ м., $r_1 = 0,1$ м. с защитными керамическими покрытиями толщиной $0,03$ мм.

Результаты численного эксперимента показаны в таблице (7.2), где приводятся предельные скорости вращения диска для трех типов структур армирования двумя семействами керамических волокон. Для первой структуры траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и семейства логарифмических спиралей, обозначенные (A+L), для второй структуры – это семейство спиралей Архимеда и семейство "спицы велоколеса", обозначенные (A+V), третья структура представляет собой семейства логарифмических спиралей и семейство "спицы велоколеса" и имеет обозначение (L+V).

Таблица 7.2 Предельные скорости вращения дисков газовой турбины $\omega_c = \dfrac{\pi n}{30}$

Структура армирования	Предельное значение n числа оборотов в минуту
Однородный титановый диск	10000
Армированный титановый диск, структура (A+L)	18500
Армированный титановый диск, структура (A+V)	19000
Армированный титановый диск, структура (L+V)	18500

Результаты таблицы 7.2 показывают, что может быть достигнуто существенное увеличение предельной скорости вращения армированного диска газовой турбины за счет выбора структуры армирования.

7.4 Моделирование армированного диска гидротурбины

Рассмотрим армированный диск, являющийся элементом гидротурбины. Вращение гидротурбины обеспечивается потоком жидкости через водоводы, поступающим на лопатки турбины [91]. Необходимо учитывать влияние касательного усилия $N_{r\theta}$. Для определения создаваемого потоком жидкости давления рассматриваем поток как плоское течение вязкой несжимаемой жидкости. Определим движение жидкости, считая его стационарным, а внешние силы отсутствующими.

Введем в полярной системе координат (r, θ) компоненты скорости v_r, v_θ, при принятых условиях выполняется $v_r = 0, v_\theta = v(r)$, давление жидкости есть функция радиуса $P = P(r)$. Общая система дифференциальных уравнений, описывающая такое движение жидкости, сформулирована в [43]. В рамках принятых условий стационарности и несжимаемости жидкости система упрощается и имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{v^2}{r}, \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0, \tag{7.9}$$

где ρ – плотность жидкости.

Вода с начальным давлением P^0 поступает между цилиндрами радиусами r_2 и r_3, r_2 – радиус наружного контура лопатки, r_3 – радиус водовода рис. 7.1. Граничные условия для второго уравнения системы (7.8) ставятся из условия прилипания жидкости к стенкам водовода и вращающегося диска и аналогично работе [43] запишутся:

$$v = \omega_c r|_{r=r_2}, v = 0|_{r=r_3}, \tag{7.10}$$

где ω – угловая скорость вращения диска. Для первого уравнения системы (7.9) ставится одно граничное условие в виде $P(r)|_{r=r_3} = P^0$. Величину давления P^0 находится из соотношений, следующих из теоремы Торричелли и формулы Бернулли [50]: скорость жидкости q при свободном падении с поверхности уровня H равна $q^2 = 2gH$, где g – ускорение свободного падения. Давление определяется по формуле [50] $P = \frac{1}{2}pq^2$, тогда

$$P^0 = \rho g H. \tag{7.11}$$

Начальное давление P^0 зависит от типа гидротурбины, H – высота плотины. Система (7.9) – распадающаяся система дифференциальных уравнений. Решим второе уравнение (7.9) с граничными условиями (7.10), затем с полученным частным решением для v проинтегрируем первое уравнение (7.9) с граничным условием (7.11). Уравнение для v представляет собой уравнение типа Эйлера. Общее решение для v с произвольными постоянными C_1, C_2 имеет вид $v = C_1 r + \frac{C_2}{r}$. Найдем C_1, C_2 из граничных условий (7.10), получим $C_1 = \frac{\omega r_2^2}{r_2^2 - r_3^2}, C_1 = -r_3^2 \frac{\omega r_2^2}{r_2^2 - r_3^2}$. После интегрирования первого уравнения (7.9) с граничным условием (7.11) найдем давление $P(r)$ в виде

$$P(r) = P^0 + \omega^2 \rho \left[\frac{\tilde{C}_1^2}{2}(r^2 - r_3^2) - \frac{\tilde{C}_2^2}{2}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2}) + 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2 \ln\frac{r}{r_3} \right],$$

где коэффициенты $\tilde{C}_1 = \dfrac{r_2^2}{r_2^2 - r_3^2}, \tilde{C}_2 = -r_3^2 \dfrac{r_2^2}{r_2^2 - r_3^2}.$

Найденное решение для давления $P(r)$ справедливо для ламинарного течения жидкости, пока угловая скорость вращения диска ω_c не переходит некоторых критических значений, после чего наступает турбулентный режим и следует искать другие решения. Что выходит за рамки поставленной задачи.

Давление жидкости в кольцевом зазоре воздействует на лопатку, она поворачивает диск. Пусть на диск насажено n_l лопаток, площадь каждой лопатки S_l, тогда касательное усилие $N_{r\theta}$ на внешнем контуре диска найдем по формуле $N_{r\theta}|_{r=r_1} = \dfrac{n_l P(r_1) S_l}{2\pi r_1}$. Нормальное усилие N_r на внешнем контуре задается как радиальное растягивающее усилие от лопаток и замковых частей диска, и аналогично подходу работы [89], определяется по формуле $N_r|_{r=r_1} = f_n \omega_c^2$, где коэффициент f_n считается первоначально заданным. Его величина зависит от формы, размеров и структуры лопаток [97]. Обычно лопатку схематически представляют в форме прямолинейного бруса постоянной толщины.

7.4.1 Влияние структуры армирования на скорость вращения диска гидротурбины

Практически важной задачей является исследование влияния армирования на предельную скорость вращения диска гидротурбины. В численных экспериментах уровень нагрузки задавался в соответствии с таблицей 6.1.

В данном пункте рассмотрены три типа криволинейного армирования семейства логарифмических спиралей и спиралей Архимеда (A+L), семейства спиралей Архимеда и "спиц велоколеса" (A+V), "спиц велоколеса" и семейства логарифмических спиралей (L+V). Для всех структур армирования краевые условия одинаковы, материал связующего – сталь, армирование проводится двумя семействами волокон, изготовленных из бериллия. Пусть n — число оборотов в минуту принимает следующие значения: I) n=3000 (на графиках этот случай изображается в виде сплошной линии), II) n=3500 (изображается с помощью тире), III) n=4000 (изображается с помощью точек), IV) n=5000 (изображение в виде точек-тире).

Таблица 7.3 Данные об уровнях нагрузок в турбинных водоводах

ГЭС	Диаметр водовода	Напор	Растягивающее напряжение
Красноярская ГЭС	7 м.	130,5м.	80-100 МПА
Усть- Илимская ГЭС	7,8 м.	93 м.	80-140 МПА
Бурейская ГЭС	6 м.	90 м.	60- 183 МПА

После реализации численной схемы анализируем относительные значения функции Баландина $S(R)$, введенной ранее в (6.35), для установления предельного состояния конструкции при росте числа оборотов в минуту n. На рис. 7.2 показаны изменения $S(R)$ от относительного радиуса при росте числа оборотов в минуту n для двух видов структур армирования — (A+L) и (A+V). Начальные интенсивности армирования одинаковы для двух семейств волокон и равны 0,3. В соответствии с таблицей 1.2 главы 1 для достижения предельного состояния функции Баландина (для связующего, выполненного из стали, армирующие волокна из бериллия) в зависимости от марки стали принимает значения в интервале от $5,29 \cdot 10^{-6}$ до $4,225 \cdot 10^{-5}$ (высокопрочная сталь). Сравнение графиков на рис. 7.2 демонстрируют существенные отличия $S(R)$ для разных структур и то, что величина числа оборотов в минуту $n = 4000$ является предельной для определенных марок стали.

Изменим параметры армирования ω_{01}, ω_{02}, но фиксируем скорость вращения диска, соответствующей числу оборотов в минуту $n = 4000$. На рис. 7.3

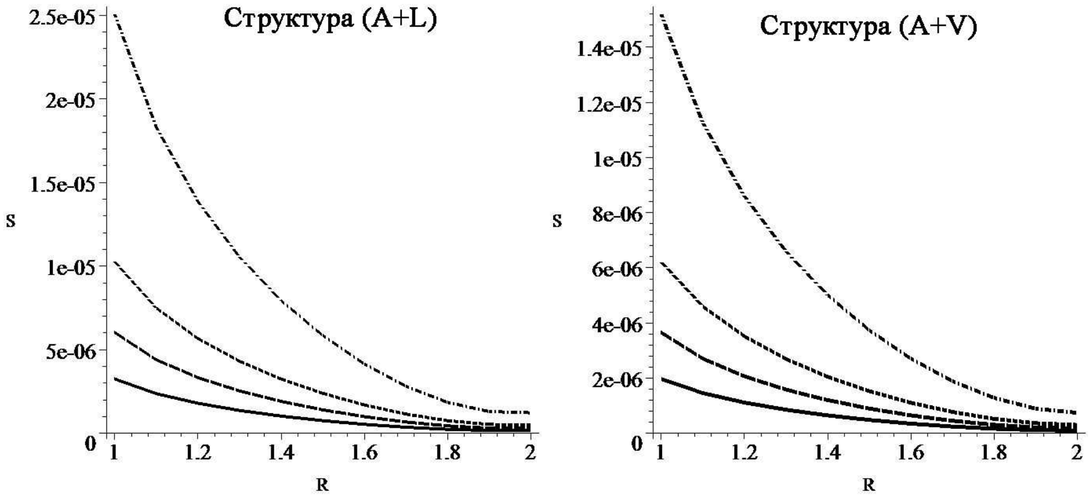


Рис. 7.2. Функция Баландина S: **1** – $n = 3000$, **2** – $n = 3500$, **3** – $n = 4000$, **4** – $n = 5000$

показано влияние начального условия выхода арматуры на функцию Баландина для двух видов структур армирования – (A+L) и (A+V). Начальные интенсивности армирования первого и второго семейств волокон заданы как четыре варианта: I) $\omega_{01} = 0,145, \omega_{02} = 0,13$; II) $\omega_{01} = 0,155, \omega_{02} = 0,18$; III) $\omega_{01} = 0,26, \omega_{02} = 0,23$; IV) $\omega_{01} = 0,3, \omega_{02} = 0,5$. Как видим, за счет изменения начального условия выхода арматуры можем повышать техническую характеристику диска – его скорость вращения. Графики на рис. 7.3 демонстрируют, что функция Баландина близка к предельным значениям для разных структур в разной степени.

7.4.2 Применение структуры армирования "семейство логарифмических спиралей и "спицы велоколеса" для моделирования диска гидротурбины

Рассматривается структура армирования двумя семействами волокон, представляющая семейства логарифмических спиралей и семейства "спицы велоколеса" –(L+V), изображенных на рис. 6.13 – 6.16 главы 6. Данная структура применена для вращающегося диска гидротурбины при фиксированном материале и внешних нагрузках. Начальные интенсивности армирования первого и второго семейств волокон заданы величинами $\omega_{01} = 0,3, \omega_{02} = 0,3$. Пусть ма-

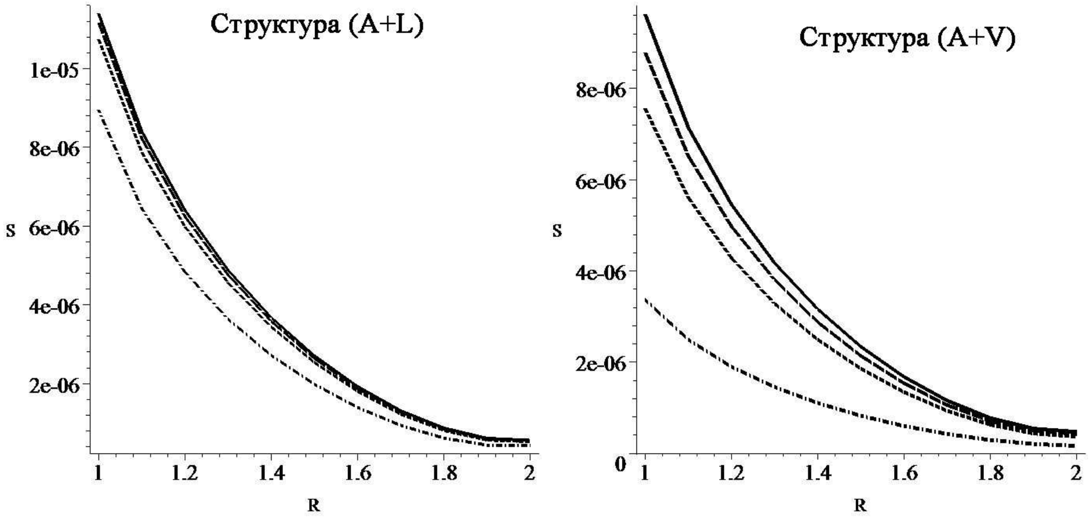


Рис. 7.3. Функция Баландина S для $n = 4000$: **1** – $\omega_{10} = 0,145$, $\omega_{20} = 0,13$, **2** – $\omega_{10} = 0,155$, $\omega_{20} = 0,18$, **3** – $\omega_{10} = 0,26$, $\omega_{20} = 0,23$, **4** – $\omega_{10} = 0,3$, $\omega_{20} = 0,5$

териал связующего конструкции – сталь, армирующие волокна изготовлены из бериллия. Будем менять геометрию семейств спирали: спираль закручивается по часовой стрелке, когда параметр спирали $b < 1$, и против часовой стрелки, когда параметр спирали $b > 1$. При этом направление семейств касательных к внутреннему радиусу кольцевой пластины ("спиц велоколеса") выберем в направлении потока воды $\beta_1 = \dfrac{7\pi}{6}$ и в направлении, противоположном потоку, $\beta_2 = \dfrac{\pi}{12}$.

Определим величину значений функции Баландина $S(R)$ для структуры армирования (L+V) с четырьмя направлениями армирования для рассмотренных выше четырех значений угловых скоростей, соответствующих числу оборотов в минуту n при $n = 3000$, $n = 3500$, $n = 4000$, $n = 5000$. Фиксируем значение $T1 = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\ln b}$ – задаваемый тангенс угла наклона логарифмической спирали при выбранном параметре b спирали.

Тип графиков соответственно – сплошная линия, линия из тире, линия из точек, линия из точек-тире. Результат показан на рис. 7.4 – 7.7.

Как показывают графики на рис. 7.2 – 7.7 конструкция допускает число оборотов в минуту, не превышающее $n = 4000$ для всех марок стали. Для высокопрочных сталей возможно увеличение числа оборотов до $n = 5000$. На рис. 7.8– 7.8 рассмотрена конструкция со связующим — титан, армирование

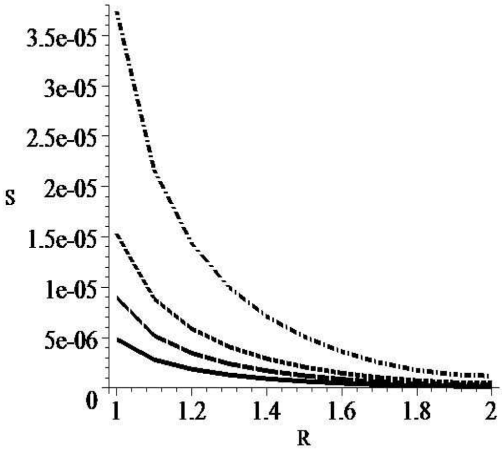


Рис. 7.4 $b < 1, T1 = -9,49,\ \beta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

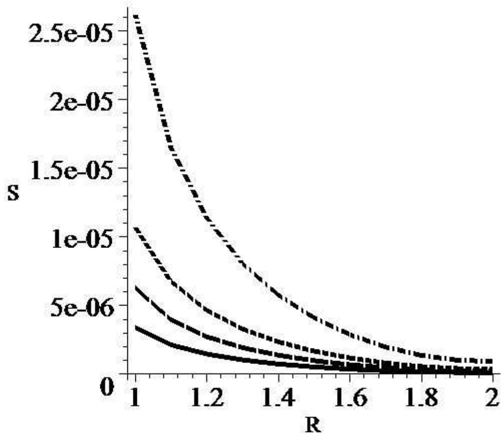


Рис. 7.5 $b > 1, T1 = 0,873,\ \beta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

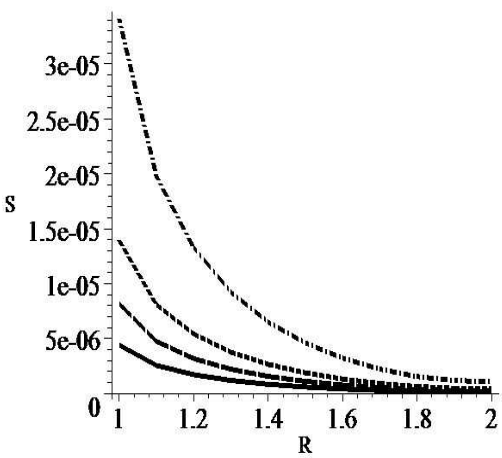


Рис. 7.6 $b > 1, T1 = 0,873,\ \beta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

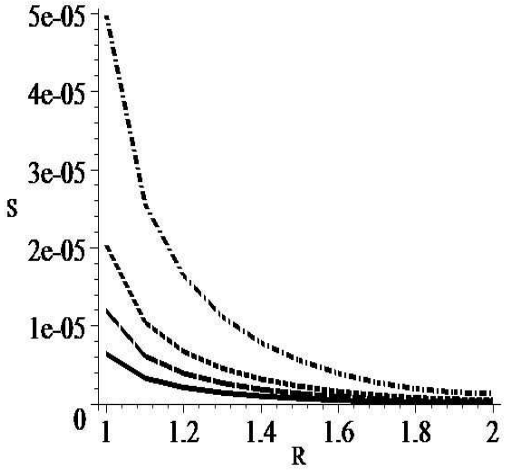


Рис. 7.7 $b < 1, T1 = -9,49,\ \beta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

выполнено стальными волокнами, эта уже конструкция не допускает увеличение числа оборотов до $n = 5000$.

7.4.3 Расход арматуры

Введем характеристику армирования, которую назовем **расход арматуры**. Обозначим ее символом B. Для рассматриваемых способов армирования

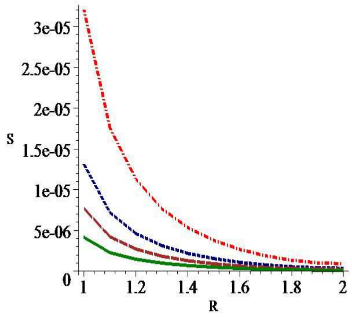


Рис. 7.8 Функция Баландина $S(R)$ при $b\ <\ 1,\, T1=-9,49,\, \beta_2=\dfrac{3\pi}{4}$

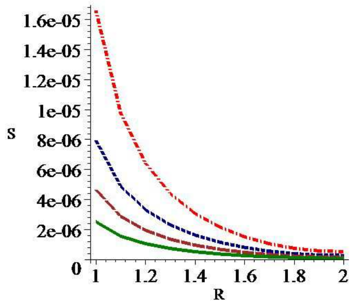


Рис. 7.9 Функция Баландина $S(R)$ при $b\ >\ 1,\, T1=0,873,\, \beta_2=\dfrac{3\pi}{4}$

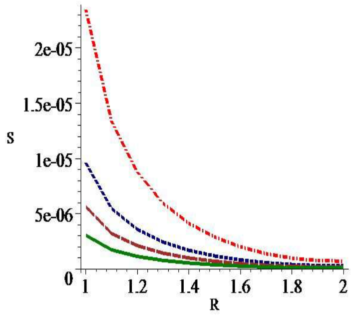


Рис. 7.10 Функция Баландина $S(R)$ при $b\ >\ 1,\, T1=0,873,\, \beta_1=\dfrac{\pi}{3}$

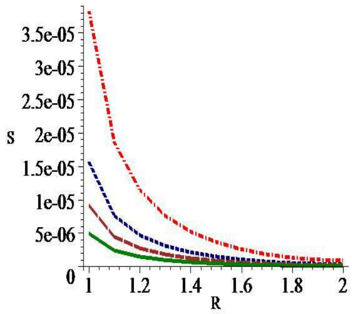


Рис. 7.11 Функция Баландина $S(R)$ при $b\ <\ 1,\, T1=-9,49,\, \beta_1=\dfrac{\pi}{3}$

двумя семействами волокон будем определять ее по формуле

$$B=\int_{R_1}^{R_2} R(\omega_1(R)+\omega_2(R))dR.$$

Пусть армирование выполнено в соответствие с рис. 6.13 – 6.16 (семейства логарифмических спиралей и "спицы велоколеса"). Интенсивности армирования для данной структуры получены в главе 6, определяются по формулам (6.23), (6.33). Их значения существенно зависят от начальной интенсивности и начальных углов выхода арматуры. Рассмотрим армирование кольцевой пластинки структурой (L+V) для острого $\dfrac{\pi}{3}$ и тупого $\dfrac{3\pi}{4}$ углов θ_0 начального выхода семейства армирующих волокон "спицы велоколеса".

Расход арматуры при различных начальных углах выхода θ_0 семейства армирующих волокон "спицы велоколеса" показан в таблице 7.4.

Таблица 7.4 Расход арматуры

Структура армирования	Начальный угол θ_0 выхода арматуры "спиц велоколеса"	Начальная интенсивность армирования ω_{01}, ω_{02}	Расход арматуры B
(L+V) (рис.6.13)	$3\pi/4$	0,3	0,65372
(L+V) (рис.6.14)	$3\pi/4$	0,3	0,65372
(L+V) (рис.6.15)	$\pi/3$	0,3	0,60594
(L+V) (рис.6.16)	$\pi/3$	0,3	0,60594

Графики на рис. 7.4 – 7.7 иллюстрируют, что ограничения на предельные значения напряжений для фиксированного материала связующего и арматуры допускают повышение числа оборотов в минуту для гидротурбины только за счет изменения направления траекторий армирующих волокон, при этом расход арматуры B изменяется незначительно.

В настоящей главе разработана методика расчета армированных вращающихся дисков для газовых и гидротурбин. Показано существенное влияние различных структур армирования и геометрических параметров армирования на предельные скорости вращения диска.

Основные результаты главы 7 опубликованы в работах [73, 76, 130, 132, 134, 78].

Заключение

В диссертационной работе впервые разработан общий подход к моделированию плоских конструкций, армированных вдоль непрерывных криволинейных траекторий. Подход основан на структурной модели волокнистого материала и выполнен в рамках линейной неоднородной анизотропной теории упругости. Полученное в диссертации многообразие структур армирования по криволинейным траекториям позволяет создавать композиционный материал и конструкцию с заранее заданными свойствами. Методы расчета позволяют выполнить математическое моделирование с целью предвидения новых свойств композиционного материала.

Сформулируем основные результаты диссертации.

1. Предложены новые постановки задачи об армировании одним семейством волокон при различных механических условиях равнодеформируемости или нерастяжимости семейства волокон. Разработан численно-аналитический метод решения краевой задачи об армировании одним семейством волокон.

2. Получена разрешающая система уравнений для среды, армированной двумя семействами волокон в направлениях ортогональных и изогональных к ним траекторий. Найдены некоторые частные аналитические решения. Исследованы краевые задачи для семейств равнонапряженных и нерастяжимых волокон с различными упругими свойствами и установлены зависимости решений от выбора интенсивностей армирования, формы контура, внешней нагрузки, условий равнонапряженности.

3. Сформулированы разрешающие системы уравнений для возможных комбинаций армирования тремя нерастяжимыми и равнонапряженными се-

мействами волокон. С помощью алгоритма построения инвариантных решений уравнений в частных производных найдены некоторые точные решения этой модели. На их основе получено уравнение граничного контура при условии равнодеформируемости волокон.

4. Получены новые аналитические решения для интенсивностей армирования двумя семействами волокон, направленными вдоль траекторий ортогональных систем координат и им изогональных траекторий. Исследованы поля интенсивностей армирования в полярной системе координат, получены новые аналитические решения в условиях постоянства сечений волокон.

5. Впервые разработана методика армирования плоской конструкции вдоль непрерывных семейств траекторий, являющихся алгебраическими и логарифмическими спиралями и изогональными к ним траекториями, в осесимметрической постановке задачи.

6. Разработана методика расчета армированных вращающихся дисков газовых и гидротурбин. Показано существенное влияние геометрии и структуры армирования на предельную скорость вращения диска.

Представленные результаты позволяют решать как прямые задачи исследования напряженно деформированного состояния плоской конструкции с заданными структурами армирования, так и обратные, когда на основе введенных дополнительных требований равнодеформируемости и (или) нерастяжимости волокон определяются необходимые траектории и условия нагружения на контуре плоской конструкции.

Армирование криволинейными семействами волокон позволяет учесть случаи неравномерного нагружения. За счет выбора расположения арматуры можно добиться такого перераспределения полей напряжений и деформаций, которое позволило бы увести места разрушения в безопасные зоны конструкции. Полученные решения новых краевых задач линейной неоднородной анизотропной теории упругости показывают широкие возможности управления полями напряжений и деформаций в плоских тонкостенных конструкциях за счет целевого выбора криволинейных структур армирования.

Перспектива дальнейшего развития полученных в диссертации результатов состоит в следующем. Решение задачи об армированной плоской среде служит основой для расчетов слоисто-волокнистых тонкостенных конструкций с применением различных гипотез. С последующим сбором слоистой конструкции по уточненным теориям. Полученные результаты планируется использовать при решении задач управления тепловыми и термонапряженными полями в композитных конструкциях. За счет криволинейного армирования управление свойствами материала дает возможность создавать новый материал, "эквивалентный" известному изотропному.

Литература

[1] Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 446 с.

[2] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1987. — 360 с.

[3] Андреев А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. — Новосибирск: Наука, 2001.— 288 с.

[4] Аннин Б. Д. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партов. — Новосибирск: Наука, 1993.– 253 с.

[5] Аннин Б. Д. Механика деформирования и проектирование слоистых тел / Б. Д. Аннин. — Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2005.— 203 с.

[6] Бабенко К. И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. — М.: Наука, 1986.— 744 с.

[7] Баландин П. П. К вопросу о гипотезах прочности / П. П. Баландин //Вестник инженеров и техников. — 1937. — № 1. — С. 19-24.

[8] Батаев А. А., Батаев В. А. Композиционные материалы: строение, получение, применение / А. А. Батаев, В. А. Батаев. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. — 384 с.

[9] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Наука, 2004.— 636 с.

[10] Березин Н.С. Методы вычислений, т.2 / Н.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Наука, 1962.— 464 с.

[11] Биргер И.А. Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей / И. А. Биргер, В. М. Даревский, И. В. Демьянушко [и др.] — М.: Машиностроение, 1984. — 208 с.

[12] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 447 с.

[13] Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1984. – 320 с.

[14] Бицадзе А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

[15] Боган Ю. А. О распределении напряжений в упругой равнонапряженно-армированной пластине / Ю. А. Боган, Ю. В. Немировский // Прикладная механика. — 1976. — Т. XII. — № 7. — С. 33–38.

[16] Болотин В. В. Механика многослойных конструкций /В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков – М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

[17] Буланов И. М. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов / И. М. Буланов, В. В. Воробей — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. — 516 с.

[18] Бушманов С. Б. Оптимальное армирование пластин при плоском напряженном состоянии / С. Б. Бушманов, Ю. В. Немировский // Прикл. механика и техн. физика. — 1983. — № 5. — С. 158–165.

[19] Бушманов С. Б. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения / С. Б. Бушманов, Ю. В. Немировский // Механика композитных материалов. — 1983. — № 2. — С. 278-284.

[20] Васильев В.В. Композиционные материалы. Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов,В.В. Болотини и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 510 с.

[21] Власов В. З. Избранные труды. Известия АН СССР / В. З. Власов. — М.: Наука, 1962. — 528 с.

[22] Вохмянин И.Т. Вторые предельные состояния трехслойных круглых и кольцевых пластинок / И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский // Безопасность и живучесть технических систем: Тр. III Всерос. науч. конф. (Красноярск, 21-25 сент. 2009 г.).— Красноярск: ИВМ СО РАН, 2009. — С. 22–27.

[23] Вохмянин И. Т. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластин с несимметричными структурами армирования / И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский // Краевые задачи и математические модели. Труды 8 - й Всероссийской конференции. Новокузнецк, 2006.— Т.1.— С. 25–31.

[24] Галанин М.П. Армирование плоских конструкций по изогональным траекториям / М.П. Галанин, Н.А. Федорова // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2017. — № 33. — 16 с.

[25] Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов // Успехи математических наук. — 1961. Т. 16, вып. 3(99). — С. 171–174.

[26] Голушко С. К. Расчет напряженно-деформированного состояния круглых многослойных композитных пластин / С. К. Голушко, Е. В. Морозова // Вычислительные технологии. 2003. Т.8. Ч. IV. — С. 167 –175.

[27] Голушко С. К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 432 с.

[28] Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.

[29] Гусак А. А. Линии и поверхности / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. — Минск: Вышэйшая школа, 1985.— 220 с.

[30] Демидов С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. — М.: Высшая школа, 1979. — 432 с.

[31] Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. — М: Машиностроение, 1978. — 248 с.

[32] Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений /Дж. Ортега, У. Пул. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

[33] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типа / Т. Д. Джураев – Ташкент: Фан, 1979. — 237 с.

[34] Джураев А. Системы уравнений составного типа / А. Джураев — М.: Наука, 1972. — 227 с.

[35] Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. — М.: СОЛОН-Пресс, 2006. — 720 с.

[36] Кайзер А. К. (A.C. Kyser) Равнонапряженный вращающийся диск, навитый из волокон / А. К. Кайзер // Ракетная техника и космонавтика. 1965. — № 6. — С. 127–131.

[37] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник / Д. М. Карпинос, Л. Р. Вишняков [и др.] — Киев: Высшая школа, 1985. — 295 с.

[38] Колпаков А. Г. Композиционные материалы и элементы конструкций с начальными напряжениями / А. Г. Колпаков. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. — 255 с.

[39] Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А. Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1965. — 204 с.

[40] Комков М. А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения : учеб. пособие / М. А. Комков, В. А. Тарасов. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 431 с.

[41] Композиционные материалы. Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин [и др.] — М.: Машиностроение, 1990. — 510 с.

[42] Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1974. — 831 с.

[43] Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика в 2-х частях, Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М.: Физматгиз, 1963. — 728 с.

[44] Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. Пер. с англ. под. ред. Ю. М. Тарнопольского / Р. М. Кристенсен. — М.: Мир, 1982. — 334 с.

[45] Крылов В.И. Вычислительные методы, т. 2 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. — М.: Наука, 1977. — 400 с.

[46] Кузнецов Э. Н. Введение в теорию вантовых систем / Э. Н. Кузнецов. — М.: Изд-во лит-ры по стр-ву, 1969. — 143 с.

[47] Лавреньтьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лавреньтьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1974. — 468 с.

[48] Лаевский Ю. М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи) / Ю. М. Лаевский. — Новосибирск: НГУ, 1999. — 166 с.

[49] Лажетич Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка / Н. Л. Лажетич // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 8. — С. 1072–1077.

[50] Ламб Г. Гидродинамика /перевод с английского / Г. Ламб. — М. — Ижевск, РХД, 2003. — 452 с.

[51] Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. — М.: Физматгиз, 1957. — 463 с.

[52] Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. — М.: ОНТИ, 1935. — 674 с.

[53] Малмейстер А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г.А. Тетере. — Рига: Зинатне, 1980. — 572 с.

[54] Милейко С. Т. Механика волокнистых композитов / С. Т. Милейко, Ю. Н. Работнов // Успехи механики, "Advances in Mechanics". — 1980. Т. 3, вып. 1. — С. 3–55.

[55] Немировский Ю. В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя / Ю. В. Немировский // Прикл. механика и техн. физика. — 1969. — № 6. — С. 81–89.

[56] Немировский Ю.В. К вопросу об оптимальной укладке арматуры в пластинках / Ю.В. Немировский // Механика полимеров. — 1978. — № 4. — С. 675–682.

[57] Немировский Ю. В. Гибридное и оптимальное проектирование композитных пластин / Ю. В. Немировский // Известия национальной академии наук Армении, – 2007. — Т. 60. — № 1. — С. 82–88.

[58] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование дисков газовых турбин / Ю. В. Немировский, О. А. Богомолова // Известия вузов. Авиационная техника, № 3, 2004. — С. 16–19.

[59] Немировский Ю. В. Стеновые железобетонные панели со сложными структурами армирования / Ю. В. Немировский, В. Д. Кургузов // Эффективные строительные конструкции, теория и практика. Матер. междунар. научно-техн. конф. (Пенза, 28-30 мая 2002). Изд-во РААСН, ПГАСА, 2002. — Т. 1 . — С. 90–96.

[60] Немировский Ю. В. Прочность и жесткость стеновых железобетонных панелей со сложными структурами армирования / Ю. В. Немировский, В. Д. Кургузов // Известия вузов. Строительство. — 2003. — № 2. — С. 4–11.

[61] Немировский Ю. В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. — Новосибирск: Наука, 1986. — 165 с.

[62] Немировский Ю. В. Анализ структурной модели плоской задачи армированных сред с двумя семействами ортогональных волокон / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова //Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 12-й Межвуз. конф. — Самара: СамГТУ, 2002. — Ч.1 — С. 132–133.

[63] Немировский Ю. В. Решение плоской задачи для металлокомпозита, армированного семейством криволинейных волокон / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Труды III Международной научно-техн. конф. — Томск: ТПУ, 2006. — С. 105–112.

[64] Немировский Ю. В. Моделирование деформирования плоских авиационных конструкций, армированных двумя семействами криволинейных волокон / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Вестник Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та. Вып. 6(13). — Красноярск, 2006. — С. 38–44.

[65] Немировский Ю. В. Прочность плоских конструкций, армированных двумя семействами криволинейных волокон / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Безопасность и живучесть технических систем: Труды II Всероссийской конференции/ Научн.ред. В.В. Москвичев. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007. — С. 200 – 203.

[66] Немировский Ю. В. Предельные деформации плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Безопасность и живучесть технических систем: Труды III Всероссийской конференции/ Научн.ред. В. В. Москвичев. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 2009. — С. 220 - 225.

[67] Немировский Ю. В. Армирование плоских конструкций по изогональным траекториям / Ю. В. Немировский, Н.А. Федорова //Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 6-й Всерос. конф. — Самара: СамГТУ, 2009.— Ч.1 — С. 159–163.

[68] Немировский Ю. В. Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям / Ю. В. Немировский, Н. А. Федоро-

ва // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук. — Самара, 2010. №5(21)— С. 96–104.

[69] Немировский Ю. В. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова.— Красноярск: СФУ, 2010.— 136 с.

[70] Немировский Ю. В. Изогонально армированные кольцевые пластины в полярной и биполярной системах координат / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 50 – летию полета Ю. А. Гагарина и 90 — летию со дня рождения основателя и первого директора НИИ ПММ ТГУ А. Д. Колмакова, 12 – 14 апреля 2011. Томск. — С. 309–312.

[71] Немировский Ю. В. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения": Материалы конф./ под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воровича и д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. г. Самара 27 августа – 1 сентября 2012. — Самара: СамГТУ, 2012. — С. 211–213.

[72] Немировский Ю. В. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Вестн. Сам. Гос.тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — №1 (30). — С. 233–244.

[73] Немировский Ю. В. Предельное деформирование дисков газовых и гидротурбин при различных структурах армирования / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2013.— Т. 56, № 7/3.— С. 191–196.

[74] Немировский Ю. В. Рациональные и эффективные криволинейные структуры армирования плоских конструкций / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Тезисы Международной конференции "Математические и информационные технологии в нефтегазовом комплексе", посвященной дню

рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева и приуроченной к 20- летию сотрудничества ОАО "Сургутнефтегаз" и компании SAP, г. Сургут 14-18 мая 2014.— С. 211–214.

[75] Немировский Ю.В. Рациональные и эффективные криволинейные структуры армирования плоских конструкций / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Вестник сургутского государственного университета, 2014, №4, (физико-математические и технические науки), ГБОУ "Сургутский государственный университет", Сургут, 2014. — С. 70–72.

[76] Немировский Ю. В. Моделирование криволинейно армированных дисков / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Четвертая международная конференция "Математическая физика и ее приложения": Материалы конф./ под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воровича и д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. г. Самара 28 августа – 1 сентября 2014. — Самара: СамГТУ, 2014. — С. 270-271.

[77] Немировский Ю. В. Эффективные криволинейные структуры армирования термоупругих плоских конструкций / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // IX Международная конференция "Математические проблемы механики неоднородных структур": 15-19 сентября 2014. Львов. — С. 82-86.

[78] Немировский Ю. В. Предельные деформации термоупругих плоских конструкций с криволинейным армированием / Ю. В. Немировский, Р. Терлецкий, Н. А. Федорова // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-прак. конф.,посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева (10-14 нояб. 2015, г. Красноярск): в 2 ч. / под. общ. ред. Ю.Ю. Логинова: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2015. — Ч. 2. — С. 130–131.

[79] Немировский Ю. В. Предельные деформации термоупругих плоских конструкций с криволинейным армированием/ Ю. В. Немировский, Н. А.

Федорова // Вестник Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та. Том 17, № 1 — Красноярск, 2016. — С. 73–78.

[80] Немировский Ю. В. Обратная задача криволинейно армированных пластин с равной трещиностойкостью связующего / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова //Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 9- й Всерос. конф. с международным участием — Самара: СамГТУ, 2016.— Ч.1 — С. 155–158.

[81] Немировский Ю. В. Решение плоской задачи для металлокомпозита, армированного одним семейством криволинейных волокон / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2017. — №2 (32). — С. 3–16.

[82] Немировский Ю. В. О некоторых свойствах решений плоских термоупругих задач рационального армирования композитнных конструкций / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. — Вып.2. — С. 312–321.

[83] Немировский Ю. В. О проектировании прямоугольных и многоугольных плоских композитных конструкций с равнонапряженной арматурой / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Прикладные проблемы прочности и пластичности. — 1998. — Вып. 58. — С. 78–92.

[84] Немировский Ю. В. Проектирование плоских термоупругих конструкций с равнонапряженной арматурой постоянного поперечного сечения при действии двух независимых систем нагрузок / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 1999. — Т. 5. — № 2. — С. 61–88.

[85] Немировский Ю. В. Численные решения двумерных краевых задач с большими градиентами решения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5. — № 4. — С. 82–96.

[86] Немировский Ю. В. Применение методов теории возмущений в упругих задачах для плоских композитных конструкций с равнонапряженной ар-

матурой / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2000.— Т. 6. — № 2. — С. 162–180.

[87] Немировский Ю. В. Проектирование плоских термоупругих конструкций с равнонапряженной арматурой / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Прикл. механика и техн. физика. — 2001. — Т. 42. — № 2. — С. 213–223.

[88] Немировский Ю. В. Проектирование плоских термоупругих композитных конструкций с мозаичными равнонапряженными структурами / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2002. — Т. 8. — № 1. — С. 3–27.

[89] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. — Новосибирск: Наука, 2002. — 487 с.

[90] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М.: Мир, 1989. — 635 с.

[91] Орго В. М. Основы конструирования и расчеты на прочность гидротурбин / В. М. Орго.— Л.: Машиностроение, 1978. — 112 с.

[92] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

[93] Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу / Б. Е. Победря. — МГУ, 1986. — 264 с.

[94] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.

[95] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. — М.: МГУ, 1981.— 344 с.

[96] Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. — М.: Высшая школа, 1964. — 560 с.

[97] Понамарев С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Понамарев [и др.] Т. III — М.: Гос. н-т. изд-во машиностроит.лит., 1959. — 1120 с.

[98] Пулькина Л. С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44.— № 8. — С. 1084–1089.

[99] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1979. — 744 с.

[100] Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. — М.: ОНТИ, 1938. — 336 с.

[101] Репин С.И., Фролов М.Е. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа / С.И. Репин, М.Е. Фролов //Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2002. – Т.42, № 12 — С. 1774–1787.

[102] Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А. А. Савелов. — ГИФ-МЛ. — М.: 1960.— 296 с.

[103] Самарский А.А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М: Наука, 1989. — 614 с.

[104] Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М.: Наука, 1989. — 425 с.

[105] Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. — М.: Наука, 1974. — Т.3. — 672 с.

[106] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М.: ГИТ-ТЛ, 1953. — 467 с.

[107] Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М: Издательство "Мир", 1977. — 351 с.

[108] Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1979. — 560 с.

[109] Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 735 с.

[110] Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости / Я. С. Уфлянд. — М: Гостехиздат, 1950.—232 с.

[111] Фадеев С.И. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / С.И. Фадеев, В.В. Когай. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. — 278 с.

[112] Федорова Н. А. Асимптотика осесимметричной задачи упругости для анизотропной цилиндрической оболочки / Н. А. Федорова, Л. И. Шкутин // Прикл. механика и техн. физика. —1981. — № 5. — С. 156 – 162. Translation: N. A. Fedorova and L. I. Shkutin Asymptotic form of the axisymmetric elasticity problem for an anisotropic cylindrical shell // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1981, №5, P. 725-730.

[113] Федорова Н. А. Плоская задача армированных сред с тремя семействами равнодеформируемых волокон / Н. А. Федорова // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 1-й Всерос. конф. — Самара: СамГТУ, 2003. — Ч. 1. — С. 205–207.

[114] Федорова Н. А. Плоская задача армированных сред с двумя семействами нерастяжимых волокон / Н. А. Федорова // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 2-й Всерос. конф. — Самара: СамГТУ, 2004. — Ч. 1. — С. 235–237.

[115] Федорова Н. А. Решение плоской задачи упругой среды, армированной тремя семействами волокон / Н. А. Федорова // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10. Спец. выпуск. — С. 90–99.

[116] Федорова Н. А. Решение плоской задачи для металлокомпозита, армированного семейством криволинейных волокон / Н. А. Федорова // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 4-й Всерос. конф. — Самара: СамГТУ, 2007. — Ч. 1. — С. 258–262.

[117] Федорова Н. А. Интегро-интерполяционный метод решения плоской задачи для композита, армированного семейством криволинейных волокон / Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. — 2009. — 2 (1)— С. 112 – 120.

[118] Федорова Н. А. Моделирование плоской задачи армированных сред с двумя семействами криволинейных волокон / Н. А. Федорова // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XXI Всерос. конф. — Кемерово, 2009. — С. 213–220.

[119] Федорова Н. А. Армирование плоских конструкций по криволинейным траекториям / Н. А. Федорова // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 7-й Всерос. конф. (Самара 3-6 июня 2010). — Самара: СамГТУ, 2010. — Ч.1. С. 225–232.

[120] Федорова Н. А. Моделирование деформирования плоских авиационных конструкций со сложными криволинейными структурами армирования / Н. А. Федорова // Решетневские чтения: материалы XV Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (10-12 нояб. 2010, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. — Красноярск, 2010. — Ч. 2. С. 435 – 436.

[121] Федорова Н. А. Численное моделирование изогонально армированных кольцевых пластин / Н. А. Федорова // Решетневские чтения: материалы XV Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (10-12 нояб. 2011, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. — Красноярск, 2011. — Ч. 2. С. 514–515.

[122] Федорова Н. А. Моделирование деформирования плоских конструкций со сложными криволинейными структурами армирования / Н. А. Федорова // Вестник Сиб.гос.аэрокосмич.ун-та. Красноярск. — 2011.— Вып.3(36).— С.92 – 98.

[123] Федорова Н. А. Численное решение осесимметричной задачи изогонально армированных кольцевых пластин / Н. А. Федорова // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XXII Всероссийской конференции, 4-7 июля 2011. Барнаул. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2011.— С. 113–117.

[124] Федорова Н. А. Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат / Н. А. Федорова // Журнал Сибирского федерального университета, математика и физика. — 2011. — 4(3).— С. 400 – 405.

[125] Федорова Н. А. Моделирование предельного нагружения криволинейно армированной кольцевой пластины в полярной системе координат / Н. А. Федорова // Безопасность и живучесть технических систем: Труды IV Всероссийской конференции. В 2 т./ Научн.ред. В. В. Москвичев. – Красноярск: Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, 2012. — Т. 1. — С. 221–226.

[126] Федорова Н. А. Управление рациональными структурами криволинейного армирования в полярной системе координат / Н. А. Федорова, С. О. Вожов // Решетневские чтения: материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (7-9 нояб. 2012, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. - Красноярск, 2012. — Ч. 2. — С. 549 – 550.

[127] Федорова Н. А. Управление криволинейными структурами армирования плоских конструкций / Н. А. Федорова // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тезисы докладов XXIII Всероссийской конференции. Барнаул, 26-28 июня, 2013. Под редакцией академика В.М. Фомина. Новосибирск. 2013. — С. 176–177.

[128] Федорова Н. А. Криволинейные структуры армирования плоских конструкций в биполярной системе координат / Н. А. Федорова, Д. А. Пан-

крац //Решетневские чтения: материалы XVII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (12-14 нояб. 2013, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. - Красноярск, 2013. — Ч. 2. — С. 116–118.

[129] Федорова Н. А. Математическое моделирование предельных деформаций плоских конструкций, армированных вдоль криволинейных траекторий / Н. А. Федорова // Решетневские чтения: материалы XVII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (12-14 нояб. 2013, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. - Красноярск, 2013. — Ч. 2.— С. 118–120.

[130] Федорова Н. А. Математическое моделирование предельных деформаций плоских конструкций, армированных вдоль криволинейных траекторий / Н. А. Федорова // Вестник Сиб.гос.аэрокосмич.ун-та. Красноярск.— 2014.— Вып.1 (53).— С. 91–94.

[131] Федорова Н. А. Управление криволинейными структурами армирования плоских конструкций / Н. А. Федорова // Известия Алтайского государственного университета. Серия математика и механика.— 2014.— 1/1(81).— С. 130 – 133.

[132] Федорова Н. А. Эффективные криволинейные структуры армирования термоупругих плоских конструкций / Н. А. Федорова //Решетневские чтения: материалы XVIII Междунар. науч. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (11-14 нояб. 2014, г. Красноярск): в 3 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. - Красноярск, 2014. — Ч. 2. — С. 160–162.

[133] Федорова Н. А. Построение эффективного численного метода решения осесимметрической задачи армированной среды / Н. А. Федорова // Чис-

ленные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы XXIV Всероссийской конференции. Омск, 2-4 июня, 2015/ Рос. фонд фундамент. исследований [и др.]; [науч. ред. академик В.М. Фомин]. Омск. 2015. — С. 200–204.

[134] Федорова Н. А. Предельные деформации плоских конструкций, армированных вдоль криволинейных траекторий / Н. А. Федорова // Безопасность и живучесть технических систем: Труды V Всероссийской конференции. В 3 т./ Научн.ред. В. В. Москвичев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. — Т. 2. — С. 209–214.

[135] Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении / В. И. Шуликовский. — М.: Физматгиз, 1963. — 540 с.

[136] Adkins J. E. A Three-dimensional Problem for highly elastic materials subject to constraints / J. E. Adkins // Journal Mech. and Applied Math., Vol. XI, Pt.1, 1958. — P. 88 – 97.

[137] Kassianides F. Azimuthal shear of a transversely isotropic elastic solid / F. Kassianides, R. W. Ogden, J. Merodio, T. J. Pence // Math. Mech. Solids. V. 13. 2008.— P. 690–724.

[138] Jog C. S. The equation of equilibrium in orthogonal curvilinear reference Coordinates / C. S. Jog // Journal of Elasticity. V. 104. 2011. P.385–395.

[139] Kolpakov A. G. Thermoelastic characteristics of a composite with initial stresses / A. G. Kolpakov, A. L. Kalamkarov // Intern. J. Solids and Structures. 2005. Vol. 41. P. 1249-1262.

[140] Kolpakov A. G. Stressed Composite Structures: Homogenized Models for Thin-Walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses / A. G. Kolpakov – Berlin: Heidelberg; New-York: Springer, 2004.

[141] Kozhanov A. I. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations

/ A. I. Kozhanov, L. S. Pul'kina // Differential equations. — 2006. — Vol. 42. — No 9. — C. 1233-1247.

[142] Nemirovsky Yu. V. On the elastic behavior of the rein-forced layer / Yu. V. Nemirovsky // Int.J.Mech. Sci. 1970. — Vol.12. — P. 898–903.

[143] Nemirovsky Yu. V. The mathematical analysis of permiting systems of the equations of a flat problem of the reinforsed environments / Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova // KORUS – 2002. Proceeding of the 6th International Symposium on Science and Technology. – Novosibirsk: NSTU, 2002. — P. 195–197.

[144] Nemirovsky Yu. V. Flat problem of the elastic environment reinforced with three families of fibres / Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova // KORUS – 2005. Proceeding of the 9th International Symposium on Science and Technology. – Novosibirsk: NSTU, 2005. — P. 506–511.

[145] Rivlin R. S. Plane Strain of a Net Formed by Inextensible Cords / R. S. Rivlin // Journal of Rational Mechanics and Analysis. – 1955. –Vol. 4, №6. — P. 951–974.

[146] Feodorova N.A. Kinematically nonlinear model of a shell with warping cross-section /N. A. Feodorova, L.I. Shkutin // Modelling, Measurement, Control, B, ASME Press, 1994, vol.53, № 1. — P. 55–63.

[147] Feodorova N.A. The double approximation model of a shell finite deformation / N. A. Feodorova, L.I. Shkutin // Modelling, Measurement, Control, B, ASME Press, 1995, vol.58, № 3.— P. 11–20.

[148] Vasiliev V. V. Advanced Mechanics of Composite Materials / V. V. Vasiliev, E. V. Morozov. – Elsevier, Oxford, Great Britain. 2007. — 505 p.

[149] Zhi Hao Zuoa Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies / Zhi Hao Zuoa, Xiaodong Huanga, Jian Hua Rongb, Yi Min Xie // Materials & Design. V. 51, 2013. — P. 1023-1034.

[150] **Федорова Н. А.** Программа расчета предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663035 от 09 декабря 2015 г.

[151] **Федорова Н. А.** Программа расчета предельных нагрузок для армированных эксцентрических колец // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016614441 от 25 апреля 2016 г.