ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА"

На правах рукописи

ЕФИМОВА ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Егоров И.Е.

Якутск – 2018

Содержание

Введение

Актуальность темы диссертации. Теория краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени является одним из активно развивающихся направлений теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики (краевые задачи с нелокальными условиями по пространственным и временным переменным, краевые задачи для уравнений математической физики с меняющимся направлением времени, обратные краевые задачи и др.).

Неклассические краевые задачи для уравнений математической физики имеют широкий класс приложений. В частности, параболическими уравнениями с меняющимся направлением времени описываются различные физические процессы: перенос нейтронов в ядерном реакторе, перенос радиации, диффузионные процессы рассеивания электронов в металле, осцилляция плазмы, стационарные волны в плазме и др.

Для многих неклассических уравнений обычная задача Коши или задача, близкая к ней, является некорректной. В этом случае при исследовании вопросов разрешимости, единственности и устойчивости решений возникает ряд проблем, связанных в основном с тем фактом, что на данном временном интервале решение данной задачи не всегда существует. Как правило, оно существует (например, решение первой начально-краевой задачи), но на некотором малом временном промежутке, а далее может разрушиться в том смысле, что решение или его производные могут обратиться в ∞. Примером может служить тот случай, когда коэффициенты уравнения на какой-то поверхности в области задания уравнения плохо себя ведут, например, обращаются в ∞. Другими примерами не очень хороших сингулярных параболических задач служат параболические уравнения с меняющимся направлением времени.

Такие уравнения в настоящее время представляет большой интерес, который вызван, в частности, их приложениями в гидродинамике, газовой динамике, теории пластичности и в других областях.

Начало исследований краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени было положено в работах М. Жевре (1914) [86, 87]. Позже краевые задачи для линейных неклассических уравнений математической физики с переменным направлением времени рассматривались в работах Г. Фикеры [78], О.А. Олейник [55], в которых были предложены новые подходы и методы построения единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений.

Неклассическим уравнениям с меняющимся направлением времени посвящены многие работы, в том числе работы С.А. Терсенова [76], И.Е. Егорова и В.Е. Федорова [16], R. Beals и V. Ptotopopescu [81], Ж.-Л. Лионса [49], И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова и С.В. Попова [15]. Нелинейные параболические уравнения с меняющимся направлением времени рассматривались впервые в работах Н.Н. Яненко [48] для описания сложных течений вязкой жидкости. Также в работе [66] рассматривался вопрос о разрешимости краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. При исследовании краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени применяются различные методы решения, такие, как метод компактности, метод монотонности, метод «ε - регуляризации» и др., которые приведены в [49].

Достаточно полная библиография работ, посвященных неклассическим уравнениям математической физики, имеется в ряде монографий и статей [10,14,21,44,48,55,68–71,74,76,78,80,82,90]. Среди работ, оказавших влияние на исследования по теории краевых задач для неклассических уравнений, отметим следующие: В.Н. Врагова [6], А.М. Нахушева [54], Ю.А. Дубинского [11, 12], В.К. Романко [67], Е.И. Моисеева [52], С.М. Пономарева [60], Т.Ш. Кальменова [34], Б.А. Бубнова [2], Н.В. Кислова [38,39], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкина [77], В.В. Катрахова [36], А.И. Кожанова [40,41,43], С.Г. Пяткова [65].

Уравнения с меняющимся направлением времени исследовались в работах С.А. Терсенова [75,76], А.М. Нахушева [54], И.Е. Егорова, В.Е. Федорова [16], С.Г. Пяткова [64], И.М. Петрушко [58], С.В. Попова [61,62], Н.В. Кислова [38].

В работе С.Н. Глазатова [9] анонсируются результаты в теории краевых задач для некоторого класса линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, который включает в себя прямые и обратные параболические, вырождающиеся параболические уравнения, параболические уравнения с меняющимся направлением времени и стационарные уравнения.

Качественные свойства уравнений с меняющимся направлением времени оказались такими, что в весовых пространствах Соболева имеется условная разрешимость краевых задач, а вопросы о гладкости решений можно рассматривать только внутри области. Краевые задачи для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени в гельдеровских классах функций изучались С.А. Терсеновым (1985) [76]. Известно, что в обычных краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий полностью обеспечивает принадлежность решения пространствам Гельдера. Но в случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения этим пространствам. С.А. Терсеновым, С.В. Поповым получены в простейших случаях необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач в пространствах Гельдера.

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени входят в класс эллиптико-параболических уравнений. Отметим, что эллиптико-параболическим уравнениям посвящена обширная литература [16, 18, 22, 53, 55, 76, 78]. Краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [59, 63]. В этих работах выписывались необходимые и достаточные условия разрешимости задач в пространствах Гельдера, при выполнении которых при повышении гладкости данных задачи повышалась и гладкость решений вплоть до границы. В работах [18, 22] установлено, что при определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения единственное обобщенное решение первой (третьей) краевой задачи можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галеркина.

Стационарный метод Галеркина является универсальным методом и широко применяется к решению краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго и высокого порядков [4, 5, 11–13, 45, 50]. В работах [4,5,13] установлены оценки погрешности метода Галеркина. При изучении краевых задач для неклассических уравнений до настоящего времени в основном применялся нестационарный модифицированный метод Галеркина, а стационарный метод Галеркина применялся только для эллиптико-параболических уравнений второго порядка.

Метод Галеркина для нестационарных уравнений изучался во многих работах [45], в частности, в [5] установлены оценки погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений.

Общая схема стационарного метода Галеркина такова: строятся приближенные решения краевой задачи, дальше для этих решений устанавливаются априорные оценки, на основе которых доказывается существование последовательности приближенных решений, которая сходится к точному решению краевой задачи. Обзор фундаментальных результатов в этом направлении можно найти в известной монографии О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой [46]. Основоположниками метода Галеркина являются Б.Г. Галеркин [8], И.Г. Бубнов [3], Г.И. Петров [56,57] и М.В. Келдыш [37].

Еще в 1940 г. Г.И. Петров предложил одно обобщение стационарного метода Галеркина [57] для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. При этом приближенное решение исходной задачи ищется в виде линейных комбинаций функций, удовлетворяющих поставленным краевым условиям.

В данной работе проведено обобщение идеи Г.И. Петрова, и стационарный метод Галеркина применяется для исследования неклассических линейных и нелинейных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени.

Из анализа научно-технической литературы следует, что исследования неклассических уравнений с меняющимся направлением времени стационарным методом Галеркина и получение оценки погрешности данного метода представляют собой актуальную научную проблему. Тем самым результаты исследования новых фундаментальных задач, поставленных в рамках данной работы, будут способствовать развитию теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. При проведении исследований этих задач использованы современные математические методы и результаты мировой науки в данной области. Опишем математические методы, использованные при выполнении работы.

1. Метод априорных оценок.

Априорные оценки широко применяются в теории уравнений с частными производными. Они позволяют осуществить предельный переход от приближенных решений краевой задачи к точному решению.

2. Стационарный метод Галеркина.

Стационарный метод Галеркина позволяет нахождение приближенных решений краевых задач для неклассических уравнений свести к решению системы алгебраических уравнений, как и в случае эллиптических уравнений. При этом появляется необходимость оценки погрешности метода.

Целью работы является изучение разрешимости краевых задач для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени с помощью стационарного метода Галеркина и оценка погрешности данного метода.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Исследование разрешимости краевых задач для линейных и нелинейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени стационарным методом Галеркина.

2. Получение для исследуемых уравнений оценки погрешности стационарного метода Галеркина.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, метод априорных оценок, стационарный метод Галеркина.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые применяется стационарный метод Галеркина к решению краевых задач для рассматриваемых неклассических уравнений с меняющимся направлением времени, и для них устанавливаются оценки погрешности данного метода через собственные значения спектральной задачи для $(n+1)$-мерного оператора Лапласа по $x \in R^n$ и t (линейного самосопряженного квазиэллиптического оператора четного порядка в случае уравнения высокого порядка).

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Для приближенных решений краевых задач, построенных по методу Галеркина, получены глобальные априорные оценки во всей области.

- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени.

- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для нелинейных неклассических уравнений: полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени, нелинейного неклассического уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени.

- Установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина для исследуемых линейных и нелинейных неклассических уравнений.

Степень достоверности результатов диссертации.

Достоверность всех результатов диссертации подтверждается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость диссертации.

Результаты работы имеют теоретический характер. Исследуемые задачи являются актуальными и перспективными в области теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Полученные результаты могут быть использованы для постановки новых задач и в дальнейших исследованиях в теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Их практическая значимость заключается в том, что проведено теоретическое обоснование применения стационарного метода Галеркина для нахождения приближенных решений прикладных задач математической физики для уравнений с меняющимся направлением времени.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались:

– на научном семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством член-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова (2017);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством профессора А.М. Блохина (2018);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО

РАН "Неклассические уравнения математической физики"под руководством профессора А.И. Кожанова (2017);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Избранные вопросы математического анализа"под руководством профессора Г.В. Демиденко (2017);

– на семинаре Научно-исследовательского института математики СВФУ "Неклассические уравнения математической физики"под руководством профессора И.Е. Егорова (2012-2017);

– на XVI, XVII, XVIII и XXI Лаврентьевских чтениях (г. Якутск, 2012, 2013, 2014, 2017);

– на XIX и XXI Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(г. Москва, 2012, 2014);

– на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Белгород, 2013);

– на III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации"(г. Якутск, 2012);

– на Аспирантских чтениях СВФУ (г. Якутск, 2012).

Работа выполнена при поддержке гранта ректора СВФУ (2013), при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект 4402) и на 2014-2016 гг. (проект 3047), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 гг., мероприятие 1.3.2 "Проведение научных исследований целевыми аспирантами"(Соглашение 14.132.21.1352).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах: 9 статьях [19, 20, 23, 29–32, 84, 85], тезисах 5 докладов [24–28]. 7 статей [19, 20, 23, 29–31, 84] опубликованы в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ, в том числе 1 статья (переводная) входит в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus, а также 1 обзорная статья [85] - в Web of Science. В совместных публикациях автором проведены доказательства утверждений лемм и теорем, а соавторам принадлежат постановки задач и методика их исследования. В работах [29, 31] результаты получены автором единолично. В обзорной статье [85] в том числе приведены основные результаты данной диссертационной работы.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы. Общий объем составляет 87 страниц. Список литературы содержит 91 наименование.

Содержание работы.

В первой главе приведены геометрические обозначения, функциональные пространства и некоторые вспомогательные сведения.

Во второй главе диссертации с помощью стационарного метода Галеркина проведено исследование линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. Данная глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе с помощью стационарного метода Галеркина доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Также установлена оценка погрешности данного метода для исследуемого уравнения.

Все задачи исследуются в цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей S класса C^2, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $\Gamma = S \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \tag{0.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (0.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Введем следующие множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{0.2}$$

$$u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \;\; u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{0.3}$$

При $k(x,0) > 0, \; k(x,T) \geq 0$ краевые условия (0.3) имеют вид:

$$u|_{t=0} = 0.$$

При $k(x,0) > 0, \; k(x,T) < 0$ краевые условия (0.3) имеют вид:

$$u|_{t=0} = 0, \; u|_{t=T} = 0.$$

При $k(x,0) \leq 0, \; k(x,T) < 0$ краевые условия (0.3) имеют вид:

$$u|_{t=T} = 0.$$

При $k(x,0) \leq 0, \; k(x,T) \geq 0$ краевые условия не задаются.

Во втором параграфе в случае вырождающегося параболического уравнения получена более сильная оценка погрешности стационарного метода Галеркина. С помощью теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи (0.1)-(0.3) и вспомогательной задачи доказана теорема о повышении гладкости решения в этом случае, которая позволяет получить более сильную оценку погрешности приближенных решений относительно точного решения задачи.

В третьем параграфе проведено исследование неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени, для него доказана разрешимость рассматриваемой краевой задачи в весовом пространстве Соболева, и установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина.

В цилиндрической области Q рассматривается неклассическое уравнение высокого порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \triangle u + c(x)u = f(x,t), \tag{0.4}$$

где $s \geq 1$ - целое число, $f \in L_2(Q)$.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (0.4) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Рассматриваются множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.4) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{0.5}$$

$$D_t^j u|_{t=0,\, t=T} = 0, \ \ j = \overline{0, s-1}; \ \ D_t^s u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \ \ D_t^s u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{0.6}$$

Исследование проведено в случае, когда

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0, \ \ (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0.$$

В четвертом параграфе исследуется нелокальная краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

$$Lu \equiv k(t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{0.7}$$

в случае $k(0) > 0, \; k(T) > 0$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.7) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \;\; u(x,0) = \alpha u(x,T), \tag{0.8}$$

где α - вещественное число.

Для нелокальной задачи (0.7), (0.8) доказана ее регулярная разрешимость, а также установлена оценка погрешности стационарного метода Галеркина.

Третья глава диссертации посвящена исследованию нелинейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени с помощью стационарного метода Галеркина. Для всех исследуемых уравнений доказана однозначная разрешимость рассматриваемых краевых задач. Данная глава включает три параграфа.

В первом параграфе исследуется полулинейное параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, и для него установлена оценка погрешности стационарного метода Галеркина.

В цилиндрической области Q рассматривается полулинейное уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u + |u|^\rho u = f(x,t). \tag{0.9}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (0.9) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Вводятся множества

$$S_0^\pm = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \;\; S_T^\pm = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.9) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \;\; u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \;\; u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{0.10}$$

Исследование проведено в четырех случаях:

1. $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0;$

2. $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geq 0;$

3. $k(x,0) \leq 0,\ k(x,T) < 0;$

4. $k(x,0) \leq 0,\ k(x,T) \geq 0.$

Во втором параграфе рассматривается сильно нелинейное неклассическое уравнение третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени

$$Lu = Pu - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}) + c(x)u = f(x,t), \tag{0.11}$$

где $p > 2,\ Pu = \sum\limits_{i=1}^{3} k_i(x,t)D_t^i u$, причем коэффициенты $k_i(x,t),\ c(x)$ являются достаточно гладкими функциями.

Обозначим

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : x \in \Omega,\ -k_3(x,0) \gtrless 0\},\quad S_T^{\pm} = \{(x,T) : x \in \Omega,\ -k_3(x,T) \gtrless 0\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.11) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{0.12}$$

$$u|_{t=0} = 0;\ u|_{t=T} = 0;\ u_t|_{\overline{S_0^+}} = 0;\ u_t|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{0.13}$$

Рассматривается случай $k_3(x,0) > 0,\ k_3(x,T) < 0,\ x \in \Omega.$

В третьем параграфе исследовано полулинейное неклассическое уравнение высокого порядка с меняющимся направлением времени

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t)D_t^i u - \triangle u + c(x)u + |u|^{\rho}u = f(x,t), \tag{0.14}$$

где $s \geq 1$ - целое число, $f \in L_2(Q)$. Также установлены 2 разные оценки погрешности стационарного метода Галеркина для следующей краевой задачи.

Краевая задача. Найти решение уравнения (0.14) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{0.15}$$

$$D_t^j u|_{t=0,\, t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \quad D_t^s u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{0.16}$$

Рассматривается случай

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0.$$

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

ГЛАВА 1.

Обозначения и вспомогательные сведения

1.1 Геометрические обозначения и функциональные пространства

Определим необходимые для дальнейшего изложения геометрические обозначения и функциональные пространства.

Геометрические объекты:

R^n- n-мерное евклидово пространство, $R^1 = R$;

$x = (x_1, ..., x_n)$ - произвольная точка из R^n;

$\partial\Omega = S$ - граница области Ω, которая предполагается достаточно гладкой;

$\overline{\Omega}$ - замыкание Ω: $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$;

$$Q_t = \Omega \times (0, t),\ t \in (0, T];\ T > 0;\ \ \overline{Q_T} = \overline{\Omega} \times [0, T];$$

$$\Gamma = S \times (0, T);$$

$\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ - единичный вектор нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω;

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ - частная производная по переменной x_i;

$D_t^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ - частная производная по t порядка k;

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}\nu_i$ - производная по нормали ν;

$|\nabla u| = |u_x| = [\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}^2]^{1/2}$;

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$;

$\otimes$ - прямое произведение.

Функциональные пространства:

Пусть $L_p(\Omega)(1 < p < \infty)$ - банахово пространство измеримых в Ω функций, суммириуемых с p-ой степенью [72, 79]; норма в $L_p(\Omega)$ определяется равенством

$$||u||_{L_p(\Omega)} = [\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx]^{1/p}, \qquad (1.1.1)$$

а при $p = \infty$

$$||u||_{L_\infty(\Omega)} = vraisup|u(x)|.$$

Измеримость и суммируемость понимаются в смысле Лебега, а $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx, \qquad (1.1.2)$$

$$||u||^2 = (u, u).$$

$W_p^1(\Omega) = \{v : v \in L_p(\Omega),\ v_{x_i} \in L_p(\Omega),\ i = \overline{1, n}\}$ - банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_p(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные первого порядка, суммируемые со степенью p [1, 72]. Норма в $W_p^1(\Omega)$ определяется равенством

$$||v||_{W_p^1(\Omega)} = ||v||_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||v_{x_i}||_{L_p(\Omega)}. \qquad (1.1.3)$$

$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ - подпространство $W_p^1(\Omega)$, полученное замыканием множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W_p^1(\Omega)$.

$W_{p'}^{-1}(\Omega)$ - банахово пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;

$L_p((0, T), \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)),\ 1 \leq p < \infty$, - банахово пространство измеримых на $[0, T]$ функций из $[0, T]$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ с конечной нормой

$$||f|| = (\int\limits_0^T ||f(t)||^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} dt)^{1/p}. \qquad (1.1.4)$$

$W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева: множество функций из $L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные из $L_2(Q)$ по x до порядка m и по t до порядка s включительно. Норма в $W_2^{m,s}(Q)$ определяется равенством

$$||u||^2_{m,s} = \int\limits_Q [\sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2] dQ, \tag{1.1.5}$$

причем $(u,v) = \int\limits_Q uvdQ$ для функций u, v из $L_2(Q)$, $||u||^2 = (u,u)$.

$W_2^{-1,0}(Q)$ - негативное пространство Лакса: множество функций из $L_2(Q)$ с конечной нормой

$$||f||_{W_2^{-1,0}(Q)} = \sup_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)} \frac{(f,v)}{||v||_{W_2^{1,0}(Q)}}. \tag{1.1.6}$$

1.2 Некоторые вспомогательные сведения

Для построения приближенных решений краевой задачи применяется лемма о разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений.

Лемма 1.2.1 *[49] Пусть $\xi \to P(\xi)$ - такое непрерывное отображение R^m в себя, что для подходящего $\rho > 0$*

$$(P(\xi), \xi) \geq 0 \ \ \forall \xi \text{ из сферы } |\xi| = \rho, \tag{1.2.1}$$

где для $\xi = \{\xi_i\},\ \eta = \{\eta_i\} \in R^m$ мы полагаем

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i, \ \ |\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}. \tag{1.2.2}$$

Тогда найдется такое $\xi,\ |\xi| \leq \rho$, что $P(\xi) = 0$.

При выводе априорных оценок мы будем часто использовать известное неравенство Пуанкаре-Фридрихса [21, 72]

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx, \ \ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{1.2.3}$$

и неравенство Коши

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \ \ \varepsilon > 0. \tag{1.2.4}$$

Мы будем использовать следующую теорему о компактности:

Теорема 1.2.1 *[33, 79] Пусть X - рефлексивное банахово пространство, и $\{x_n\}$ - ограниченная по норме последовательность в X. Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке x пространства X, и*

$$||x|| \leq \lim_{n' \to \infty} ||x_{n'}||. \tag{1.2.5}$$

При изучении нелинейных уравнений важным этапом является обоснование предельного перехода в нелинейных членах. В некоторых случаях такое обоснование дает

Лемма 1.2.2 *[49] Пусть Q - ограниченная область в $R^n \times R$, g_μ и g - такие функции из $L_q(Q)$, $1 < q < \infty$, что $||g_\mu||_{L_q(Q)} \leq c$, $g_\mu \to g$ почти всюду в Q. Тогда $g_\mu \to g$ слабо в $L_q(Q)$.*

Теоремы вложения [72].

Теорема 1.2.2 *Вложение $W_p^{(l)}$ в C. Если $\varphi \in W_p^{(l)}$ и $n < lp$, то φ - непрерывная функция. Обозначая, как обычно, пространство непрерывных функций через C и полагая $||\varphi||_C = \max\limits_{\overline{\Omega}} |\varphi|$, будем иметь:*

$$||\varphi||_C \leq M||\varphi||_{W_p^{(l)}}, \tag{1.2.6}$$

где M - постоянная, не зависящая от выбора функции φ.

Теорема 1.2.3 *Вложение $W_p^{(l)}$ в L_{q^*}. Если $\varphi \in W_p^{(l)}$ и $n \geq lp$, то $\varphi \in L_{q^*}$ на любой гиперплоскости s измерений, где $s > n - lp$ и $q^* < q = \frac{sp}{n-lp}$.*

Кроме того, имеет место неравенство:

$$||\varphi||_{L_{q^*}} \leq M||\varphi||_{W_p^{(l)}}. \tag{1.2.7}$$

Теорема 1.2.4 *(о следах) [1] Пусть $f \in B_{p,\theta}^{(r)}$ или $f \in W_p^{(r)}(r = 1, 2, ...)$ и*

$$p = r - \frac{n-m}{p} > 0. \tag{1.2.8}$$

Тогда существует след $f|_\Psi \in B_{p,\theta}^{(p)}(\Psi)$, соответственно $f|_\Psi \in B_p^{(p)}$, и если S - ограниченное многообразие, удовлетворяющее условию $S \subset \overline{S} \subset \Psi$ (в частности, условию $S = \overline{S} = \Psi$), то

$$||f|_S||_{B_{P,\theta}^{(p)}(S)} \leq C||F||_{B_{p,\theta}^{(r)}},$$

$$||f|_S||_{B_P^{(p)}(S)} \leq C||F||_{W_p^{(r)}}, (B_p^{(p)} = B_{p,p}^{(p)}), \tag{1.2.9}$$

где C не зависит от f.

Пусть S - гладкая поверхность. Тогда для анизотропного пространства $W_2^{m,s}(Q)$ справедливы [1] неравенства

$$||D^\beta D_t^j u||^2 \leq \varepsilon \int_Q [\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2] dQ + C_\varepsilon ||u||^2, \ \varepsilon > 0 \tag{1.2.10}$$

при $\frac{|\beta|}{m} + \frac{j}{s} < 1$, $C_\varepsilon > 0$ не зависит от u;

$$||D^\beta D_t^j u(x,t)||_0^2 \leq \varepsilon \int_Q [\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2] dQ + C_\varepsilon ||u||^2, \ \varepsilon > 0, \ 0 \leq t \leq T, \tag{1.2.11}$$

при $\frac{|\beta|}{m} + \frac{j}{s} < 1$.

Сведения о симметричных операторах [51].

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется симметричным, если $\overline{D(A)} = H$ и если для любых $u, v \in D(A)$ справедливо тождество

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{1.2.12}$$

Симметричный оператор А называется положительным, если квадратичная форма $(Au, u) \geq 0$ и $(Au, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Симметричный оператор А называется положительно определенным, если

$$\inf_{u \in D(A), u \neq 0} \frac{(Au, u)}{||u||^2} > 0. \tag{1.2.13}$$

С каждым положительным оператором можно связать некоторое гильбертово пространство, которое называется энергетическим пространством данного оператора.

Теорема 1.2.5 *Энергетическое пространство H_A положительно определенного оператора A ограниченно вкладывается в исходное пространство.*

Пусть A - линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Число λ и элемент u называется соответственно собственным числом и собственным элементом оператора А, если u не есть нулевой элемент пространства H и

$$Au - \lambda u = 0 \tag{1.2.14}$$

О собственном элементе u говорят, что он соответствует собственному числу λ.

Теорема 1.2.6 *Собственные числа симметричного оператора вещественны.*

Теорема 1.2.7 *Собственные элементы симметричного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.*

Теорема 1.2.8 *Если система $\{u_n\}$ собственных элементов положительно определенного оператора A ортонормирована в исходном пространстве H, то она ортогональна и в соответствующем энергетическом пространстве H_A, причем*

$$|u_n|_A = \sqrt{\lambda_n},$$

где λ_n - собственное число, соответствующее собственному элементу u_n.

Теорема 1.2.9 *Пусть положительно определенный оператор таков, что любое множество, ограниченное в энергетической метрике, компактно в метрике исходного пространства. Тогда обобщенный спектр этого оператора дискретен.*

2. ГЛАВА 2. Линейные неклассические уравнения с меняющимся направлением времени

Во второй главе с помощью стационарного метода Галеркина исследуются линейные неклассические уравнения с меняющимся направлением времени. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для рассматриваемых уравнений, и для них установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина через собственные значения самосопряженной спектральной задачи, собственные функции которой выбираются в качестве базиса при построении приближенных решений. Доказательство теорем проводится на основе полученных автором глобальных априорных оценок по всей области.

2.1 Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени входят в класс эллиптико-параболических уравнений, и им посвящена обширная литература [16, 18, 22, 53, 55, 76, 78]. В работах [18, 22] установлено, что при определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения единственное обобщенное решение первой (третьей) краевой задачи можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галеркина. В данном параграфе, в отличие от работ [18, 22], базисные функции строятся явным образом, и приближенные решения сходятся к точному решению краевой задачи для рассматриваемого параболического уравнения с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с границей S класса C^2, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $\Gamma = S \times (0,T)$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \tag{2.1.1}$$

Отметим, что коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Предположим, что коэффициенты уравнения (2.1.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем следующие множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad S_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

<u>Краевая задача.</u> Найти решение уравнения (2.1.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \quad u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{2.1.3}$$

Через C_L обозначим множество функций из $W_2^{2,1}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.1.2), (2.1.3).

Лемма 2.1.1 *[22] Пусть выполнено условие*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \ (x,t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ имеет место оценка

$$C_1||u||_{1,0}^2 \leq (Lu, u), \quad C_1 > 0.$$

Всюду ниже будем предполагать, что правая часть уравнения (2.1.1) принадлежит $W_2^{0,1}(Q)$.

При $k(x,0)>0,\ k(x,T)<0$ краевые условия (2.1.3) принимают вид

$$u|_{t=0}=0,\ \ u|_{t=T}=0,$$

а также пусть выполнены условия $f(x,0)=0$ и $f(x,T)=0$. В качестве базисных выбираются функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta}\varphi_k=\lambda_k\varphi_k,\ \ k=1,2,..., \tag{2.1.4}$$

$$\varphi_k|_\Gamma=0, \tag{2.1.5}$$

$$\varphi_k|_{t=0}=0,\ \ \varphi_k|_{t=T}=0, \tag{2.1.6}$$

где $\widetilde{\Delta}u=u_{tt}+\Delta u$. При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ и $\lambda_k\to+\infty$ при $k\to\infty$.

При $k(x,0)>0,\ k(x,T)\geq 0$, краевые условия (2.1.3) имеют вид

$$u|_{t=0}=0,$$

поэтому вместо краевых условий (2.1.6) выбираем условия

$$\varphi_k|_{t=0}=0,\ \ \varphi_{kt}|_{t=T}=0, \tag{2.1.6^1}$$

а также предполагается выполненным условие $f(x,0)=0$.

При $k(x,0)\leq 0,\ k(x,T)\geq 0$ вместо краевых условий (2.1.6) имеем условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0}=0,\ \ \varphi_{kt}|_{t=T}=0. \tag{2.1.6^2}$$

При $k(x,0)\leq 0,\ k(x,T)<0$ краевые условия (2.1.3) имеют вид

$$u|_{t=T}=0,$$

поэтому вместо краевых условий (2.1.6) рассматриваем краевые условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0}=0,\ \ \varphi_k|_{t=T}=0, \tag{2.1.6^3}$$

кроме того, считаем выполненным условие $f(x,T)=0$.

Приближенные решения $u^N(x,t)$ первой краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N,\varphi_l)=(f,\varphi_l),\ \ l=\overline{1,N}. \tag{2.1.7}$$

Лемма 2.1.2 *Пусть выполнено условие леммы 2.1.1. Тогда система* (2.1.7) *однозначно определяет приближенные решения* u^N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_k^N,\ \ k=\overline{1,N}$, - решение однородной системы (2.1.7). Тогда, умножая каждое уравнение на свое c_l^N и складывая по l от 1 до N, получаем соотношение

$$(Lu^N,u^N)=0,$$

из которого в силу леммы 2.1.1 имеем

$$0=||u^N||^2=\sum_{k=1}^{N}(c_k^N)^2,$$

т.е. $c_k^N=0$ при $k=\overline{1,N}$. Следовательно, система (2.1.7) однозначно разрешима, ибо для нее имеет место теорема единственности. Лемма доказана.

Теорема 2.1.1 *Пусть выполнены условия*

$$c-\frac{1}{2}k_t\geq 0,\ \ c+\frac{1}{2}k_t\geq\delta>0,\ \ f\in W_2^{0,1}(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,0)>0,\ \ k(x,T)<0,\ \ f(x,0)=0,\ \ f(x,T)=0,$$

$$\text{или } k(x,0)>0,\ \ k(x,T)\geq 0,\ \ f(x,0)=0,$$

$$\text{или } k(x,0)\leq 0,\ \ k(x,T)\geq 0,$$

$$\text{или } k(x,0)\leq 0,\ \ k(x,T)<0,\ \ f(x,T)=0.$$

Тогда краевая задача (2.1.1)-(2.1.3) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^{2,1}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для приближенных решений $u^N(x,t)$ получим оценки, не зависящие от N. Действительно, из уравнений (2.1.7) нетрудно получить соотношение

$$(Lu^N,u^N)=(f,u^N),$$

из которого в силу леммы 2.1.1 имеем оценку

$$||u^N||_{1,0}\leq C_2||f||,\ \ C_2>0. \tag{2.1.8}$$

Умножим каждое уравнение из (2.1.7) на свое $c_l^N\lambda_l$, просуммируем по l от 1 до N. В результате придем к равенству

$$-(Lu^N,\widetilde{\Delta}u^N)=-(f,\widetilde{\Delta}u^N). \tag{2.1.9}$$

Рассмотрим случай

$$k(x,0)>0,\ k(x,T)<0,\ f(x,0)=0,\ f(x,T)=0.$$

После интегрирования по частям с учетом краевых условий для u^N из (2.1.9) получим

$$\int\limits_Q[(c+\frac{1}{2}k_t)v_t^2+\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2+(\Delta v)^2+v_t\sum_{i=1}^n k_{x_i}v_{x_i}+k\sum_{i=1}^n v_{tx_i}v_{x_i}+c_tv_tv-cv\Delta v]dQ$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}kv_t^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}kv_t^2dx=\int\limits_Q[f_tv_t-f\Delta v]dQ, \tag{2.1.10}$$

где $v = u^N$. В силу условий теоремы, неравенства Коши и оценки (2.1.8) из соотношения (2.1.10) будем иметь

$$\int\limits_Q [(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^N)^2 + (\Delta u^N)^2] dQ \leq C_3(||f||^2 + ||f_t||^2), \ C_3 > 0. \quad (2.1.11)$$

Благодаря оценкам (2.1.8), (2.1.11) из последовательности $\{u^N\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, слабо сходящуюся в $W_2^{2,1}(Q)$ к некоторой функции $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. При фиксированном φ_l в (2.1.7) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности $\{u^{N_k}\}$. В результате получим равенство

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \ l = 1, 2, ...$$

В силу того, что $\{\varphi_l\}$ образуют базис в $L_2(Q)$, из последнего равенства следует, что уравнение (2.1.1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (2.1.2), (2.1.3) удовлетворяются в среднем. Остальные три случая рассматриваются аналогичным образом. Единственность решения краевой задачи (1.1)-(1.3) из $W_2^{2,1}(Q)$ непосредственно вытекает из леммы 2.1.1. Теорема доказана.

Теорема 2.1.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1. Тогда галёркинские приближения $u^N(x,t)$ при $N \to \infty$ слабо сходятся в $W_2^{2,1}(Q)$ и сходятся в норме $L_2(Q)$ к решению краевой задачи* (2.1.1)-(2.1.3) *из* $W_2^{2,1}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 2.1.1 показано, что существует подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, слабо сходящаяся в $W_2^{2,1}(Q)$ к $u(x,t)$ - решению краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) из $W_2^{2,1}(Q)$. Выбирая из $\{u^N\}$ любую другую подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $v(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$, получим $v(x,t) \equiv u(x,t)$, так как решение краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) из $W_2^{2,1}(Q)$ единственно. Это означает, что последовательность $\{u^N\}$ имеет единственную предельную точку $u(x,t)$. Отсюда в силу слабой компактности $\{u^N\}$ в $W_2^{2,1}(Q)$ получаем, что вся последовательность $\{u^N\}$ слабо сходится к $u(x,t)$ в $W_2^{2,1}(Q)$. Второе утверждение теоремы 2.1.2 следует из того, что вложение пространства $W_2^{1,1}(Q)$ в $L_2(Q)$ вполне непрерывно. Теорема доказана.

Теорема 2.1.3 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u-u^N||_{1,0} \le C_4(||f||+||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4},\ C_4>0, \tag{2.1.12}$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (2.1.1)-(2.1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место один из случаев теоремы 2.1.1, для определенности $k(x,0)>0, k(x,T)<0$, и $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3), гарантированное теоремой 2.1.1. Заметим, что функция $u(x,t)$ представима в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x,t),\ \ c_k=(u,\varphi_k),$$

который сильно сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. При этом имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\lambda_k = \int\limits_Q [u_t^2+\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2]dQ \le C_5(||f||^2+||f_t||^2),\ C_5>0. \tag{2.1.13}$$

С другой стороны, для функции $u(x,t)$ справедливы равенства

$$(Lu,\varphi_l)=(f,\varphi_l),\ \ l=1,2,.... \tag{2.1.14}$$

Пусть H_N - линейная оболочка элементов $\varphi_1,...,\varphi_N$, а P_N - проектор в $L_2(Q)$ на H_N. В силу (2.1.7), (2.1.14) имеем

$$(Lu^N,\eta)=(f,\eta),\ \ (Lu,\eta)=(f,\eta)\ \ \forall\eta\in H_N.$$

Отсюда при $\eta = v - u^N,\ v \in H_N$, получаем

$$(L(u - u^N), v - u^N) = 0$$

или

$$(L(u - u^N), u - u^N) = (f - Lu^N, u - v). \tag{2.1.15}$$

В силу леммы 1.1 из (2.1.15) следует, что

$$||u - u^N||^2_{1,0} \leq C_6(||f|| + ||f_t||)||u - v||, \ \ C_6 > 0, \tag{2.1.16}$$

для всех $v \in H_N$. Справедливо неравенство

$$||u - P_N u||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \leq \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k. \tag{2.1.17}$$

Полагая в неравенстве (2.1.16) $v = P_N u$ и учитывая (2.1.13) и (2.1.17), получаем оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема 2.1.3 доказана.

2.2 Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для вырождающегося параболического уравнения

Во втором параграфе в случае, когда функция $k(x,t)$ не меняет знак в $\overline{Q}$, с помощью теоремы 2.1.1 докажем теорему о повышении гладкости решения, которая позволяет получить более сильную оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Для этого рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\widetilde{L}v \equiv kv_t - \triangle v + (c + k_t)v = g(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{2.2.1}$$

$$v|_{\Gamma} = 0,\ \ v|_{\overline{S}_0^+} = 0,\ \ v|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{2.2.2}$$

Заметим, что решение $u(x,t)$ краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3), гарантированное теоремой 2.1.1, удовлетворяет условию $u_t \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

Через $\widehat{W}_2^{1,1}(Q)$ обозначим подпространство $W_2^{1,1}(Q)$, выделенное краевыми условиями

$$\eta|_{\Gamma} = 0,\ \ \eta|_{\overline{S}_0^-} = 0,\ \ \eta|_{\overline{S}_T^+} = 0.$$

Определение 2.2.1 *Функция $v(x,t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи (2.2.1), (2.2.2), если выполнено тождество*

$$\int\limits_Q [-kv\eta_t + \sum_{i=1}^n v_{x_i}\eta_{x_i} + cv\eta]dQ = (g,\eta)\ \ \forall \eta \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q),$$

где $g(x,t) \in L_2(Q)$.

Теорема 2.2.1 *Пусть $c(x,t) \geq c_0 > 0,\ (x,t) \in \overline{Q}$, и имеет место один из следующих случаев: $k(x,t) \geq 0,\ (x,t) \in \overline{Q}$, или $k(x,t) \leq 0,\ (x,t) \in \overline{Q}$.*

Тогда краевая задача (2.2.1), (2.2.2) может иметь не более одного обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $k(x,t) \geq 0$. В интегральном тождестве из определения 2.2.1 положим $g \equiv 0$ и

$$\eta(x,t) = \int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v(x,\tau) d\tau \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q).$$

Интегрируя по частям, получим

$$0 = \int_Q [k e^{-2\lambda t} v^2 + \lambda e^{2\lambda t} \sum_{i=1}^n (\int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v_{x_i} d\tau)^2 + (\lambda c + \frac{1}{2} c_t) e^{2\lambda t} (\int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau)^2] dQ$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} [\sum_{i=1}^n (\int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v_{x_i} d\tau)^2 + c(\int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau)^2] dx.$$

Отсюда, выбирая положительное число λ так, что $\lambda c + \frac{1}{2} c_t \geq \delta_0 > 0$, получим $\int\limits_t^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau = 0$ в Q. Тем самым $v(x,t) = 0$ для почти всех (x,t) из Q. Случай $k(x,t) \leq 0$ рассматривается аналогично, если положить

$$\eta(x,t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} v d\tau \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q)$$

и выбрать $\lambda > 0$ такое, что $\lambda c - \frac{1}{2} c_t \geq \delta_1 > 0$. Теорема 2.2.1 доказана.

Теорема 2.2.2 *Пусть выполнены условия*

$$c \geq c_0 > 0, \;\; c - \frac{1}{2} k_t \geq 0, \;\; c + \frac{1}{2} k_t \geq \delta > 0, \;\; c + \frac{3}{2} k_t \geq \delta > 0,$$

$$f \in W_2^{0,2}(Q)$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,t) \geq 0, \;\; k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) > 0, \;\; f|_{t=0} = f_t|_{t=0} = 0,$$

$$\text{или } k(x,t) \leq 0, \;\; k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; f|_{t=T} = f_t|_{t=T} = 0.$$

Тогда для решения $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ *краевой задачи* (2.1.1)-(2.1.3) *имеют место*

$$u_t \in W_2^{2,1}(Q), \; u_{tt} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай

$$k(x,t) \geq 0, \; k(x,0) > 0, \; k(x,T) > 0.$$

В силу теоремы 2.1.1 краевая задача (2.1.1)-(2.1.3) имеет единственное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$. В уравнении (2.2.1) положим $g(x,t) = f_t(x,t) - c_t u(x,t)$. Тогда функция $u_t(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Заметим, что краевая задача (2.2.1), (2.2.2) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.1, следовательно, она имеет единственное решение $v \in W_2^{2,1}(Q)$. В силу теоремы 2.2.1 получаем, что $u_t = v$, т.е.

$$u_t \in W_2^{2,1}(Q), \; u_{tt} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q).$$

Второй случай рассматривается аналогично. Теорема 2.2.2 доказана.

В дальнейшем будем считать, что выполнены все условия теоремы 2.2.2. При $k(x,t) \geq 0, \; k(x,0) > 0, \; k(x,T) > 0$, в качестве базисных функций берем функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\varphi_{ktt} - \triangle\varphi_k = \lambda\varphi_k, \;\; (x,t) \in Q, \tag{2.2.3}$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0, \;\; \varphi_k|_{t=0} = 0, \;\; \varphi_{kt}|_{t=T} = 0. \tag{2.2.4}$$

При этом функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Во втором случае краевые условия (2.2.4) имеют вид

$$\varphi_k|_{S_T} = 0, \;\; \varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \;\; \varphi_k|_{t=T} = 0.$$

Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \tag{2.2.5}$$

Теорема 2.2.3 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.2. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^N||_{1,0} \le C_1(||f|| + ||f_t|| + ||f_{tt}||)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \quad C_1 > 0, \tag{2.2.6}$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (2.1.1)-(2.1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай

$$k(x,t) \ge 0, \; k(x,0) > 0, \; k(x,T) > 0.$$

Пусть $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3), гарантированное теоремой 2.2.2.

Как и в доказательстве теоремы 2.1.3, верна оценка

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \lambda_l^2 \le C_2[||f||^2 + ||f_t||^2 + ||f_{tt}||^2], \quad C_2 > 0, \tag{2.2.7}$$

и справедливо неравенство

$$||u - P_N u||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \le \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2. \tag{2.2.8}$$

Далее, как в доказательстве теоремы 2.1.3, получаем оценку погрешности стационарного метода Галеркина (2.2.6). Второй случай рассматривается аналогично. Теорема 2.2.3 доказана.

Замечание 2.2.1 *Отметим, что теорема 2.2.3 справедлива, если в уравнении* (2.1.1) *оператор Лапласа заменить линейным эллиптическим оператором второго порядка более общего вида [45]. При этом коэффициент* $c > 0$ *необходимо выбрать достаточно большим.*

2.3 Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени

В данном параграфе исследуется неклассическое уравнение нечетного порядка по времени с помощью стационарного метода Галеркина. Показано, что при определенных условиях точное решение первой краевой задачи из весового пространства Соболева является пределом приближенных решений, построенных по методу Галеркина.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим неклассическое уравнение высокого порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \triangle u + c(x)u = f(x,t), \qquad (2.3.1)$$

где $s \geq 1$ - целое число, $f \in L_2(Q)$.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (2.3.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (2.3.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \qquad (2.3.2)$$

$$D_t^j u|_{t=0,\, t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}, \quad D_t^s u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \quad D_t^s u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \qquad (2.3.3)$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2.3.2), (2.3.3), а W_L - замыкание C_L по норме

$$||u||_L^2 = ||u||_{2,2s}^2 + ||k_{2s+1} D_t^{2s+1} u||^2.$$

Лемма 2.3.1 *[16] Пусть коэффициент $c(x) > 0$, и выполнено условие*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $u \in C_L$ имеет место оценка

$$(Lu, u) \geq C_1||u||^2_{1,s}, \ \ C_1 > 0.$$

В случае

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) \leq 0, \ \ (-1)^s k_{2s+1}(x, T) \geq 0$$

рассмотрим спектральную задачу

$$Z\varphi \equiv (-1)^s D_t^{2s}\varphi - \Delta\varphi = \lambda\varphi, \ (x, t) \in Q, \tag{2.3.4}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0, \tag{2.3.5}$$

$$D_t^i\varphi|_{t=0,\, t=T} = 0, \ i = \overline{0, s-1}. \tag{2.3.6}$$

Заметим, что Z является квазиэллиптическим оператором.

Пусть $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$ есть замыкание множества функций из $C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих краевым условиям (2.3.5), (2.3.6), по норме пространства $W_2^{2,2s}(Q)$.

Справедливы равенство

$$(Z\varphi, \psi) = (\varphi, Z\psi) \ \ \forall\varphi, \psi \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$$

и оценка

$$(Z\varphi, \varphi) = \int\limits_Q [(D_t^s\varphi)^2 + \sum_{i=1}^n \varphi^2_{x_i}]dQ \geq C_2||\varphi||^2_{1,s}, \ \ C_2 > 0.$$

Тогда спектральная задача (2.3.4)-(2.3.5) имеет собственные значения λ_k такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,\ \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и собственные функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортогональный базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ и ортонормированный базис в $L_2(Q)$. При этом для любой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x,t), \quad c_k = (u, \varphi_k), \tag{2.3.7}$$

причем ряд (2.3.7) сходится в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$.

С другой стороны, имеет место второе основное неравенство [45]

$$||u||_{2,2s} \leq C_3 ||Zu||, \quad C_3 > 0, \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q).$$

В силу последнего неравенства собственные функции φ_k спектральной задачи (2.3.4)-(2.3.6) принадлежат $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$.

Лемма 2.3.2 *Для любой функции $u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$ ряд (2.3.7) сходится в $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u(x,t)$ из $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$ норма $||u||_{2,2s}$ эквивалентна новой норме $|u| = ||Zu + u||$ со скалярным произведением

$$[u, v] = (Zu + u, Zv + v), \quad u, v \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q),$$

причем $[\varphi_k, \varphi_l] = (\lambda_k + 1)^2 \delta_{k,l}$.

Тогда в силу равенства Парсеваля имеем

$$|\sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\varphi_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)^2 (\lambda_k + 1)^2. \tag{2.3.8}$$

Справедливы равенства

$$(u, \varphi_k) = \frac{1}{\lambda_k}(u, Z\varphi_k) = \frac{1}{\lambda_k}(Zu, \varphi_k).$$

Теперь ряд (2.3.8) оценивается рядом

$$(1 + \frac{1}{\lambda_1})^2 \sum_{k=1}^{\infty} (Zu, \varphi_k)^2 = (1 + \frac{1}{\lambda_1})^2 ||Zu||^2 < \infty,$$

т.е. ряд (2.3.8) сходится. Тогда ряд (2.3.7) сходится в $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$. Лемма 2.3.2 доказана.

Далее, приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (2.3.1)-(2.3.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1,N}. \tag{2.3.9}$$

Лемма 2.3.3 *Пусть коэффициент* $c(x) > 0$ *достаточно большой, и выполнены условия*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0.$$

Тогда имеет место оценка

$$||u^N||_{1,s} \leq C_4||f||, \quad C_4 > 0. \tag{2.3.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив обе части (2.3.9) на C_l^N и просуммировав по l от 1 до N, получим равенство

$$(Lu^N, u^N) = (f, u^N). \tag{2.3.11}$$

Обозначим $w = u^N$. В результате интегрирования левой части (2.3.11) по частям с учетом условий (2.3.5), (2.3.6) получим

$$(Lw, w) = \int\limits_Q \{\frac{1}{2}(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}](D_t^s w)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + cw^2\} dQ$$

$$+\frac{(-1)^s}{2}\int\limits_\Omega k_{2s+1}(D_t^s w)^2 dx|_{t=0}^{t=T} + ...,$$

где многоточием обозначены подчиненные слагаемые. Воспользовавшись неравенством Коши и теоремой вложения, из (2.3.11) получаем первую априорную оценку. Лемма 2.3.3 доказана.

Лемма 2.3.4 *Пусть выполнены условия леммы 2.3.3 и*

$$(-1)^s[2k_{2s} - k_{2s+1t}] \geq \delta > 0, \ \ s > 1.$$

Тогда имеет место оценка

$$||u^N||_{2,2s} \leq C_5||f||, \ \ C_5 > 0. \qquad (2.3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив обе части (2.3.11) на $\lambda_l C_l^N$ и просуммировав по l от 1 до N, получим равенство

$$(Lu^N, (-1)^s D_t^{2s} u^N - \triangle u^N) = (f, (-1)^s D_t^{2s} u^N - \triangle u^N). \qquad (2.3.13)$$

В результате интегрирования левой части (2.3.13) по частям с учетом условий (2.3.2), (2.3.3) получим

$$(Lw, (-1)^s D_t^{2s} w - \triangle w) =$$

$$\int\limits_Q \{(-1)^s(k_{2s} - \frac{1}{2}k_{2s+1t})(D_t^{2s}w)^2 + [(-1)^s(k_{2s} - \frac{2s+1}{2}k_{2s+1t}) + 1]\sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2$$

$$+(\triangle w)^2\}dQ + \frac{(-1)^s}{2}\int\limits_\Omega k_{2s+1}(D_t^{2s}w)^2 dx|_{t=0}^{t=T} + ...,$$

где многоточием обозначены младшие члены, $w = u^N$.

Воспользовавшись неравенством Коши, теоремой вложения и первой априорной оценкой (2.3.10), получаем вторую априорную оценку. Лемма 2.3.4 доказана.

Теорема 2.3.1 *Пусть выполнены условия лемм 2.3.3, 2.3.4. Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in W_L$ краевой задачи* (2.3.1)-(2.3.3). *При этом $u^N \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря оценкам (2.3.10), (2.3.12) из последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_k}, слабо сходящуюся в $W_2^{2,2s}(Q)$ к некоторой функции $u(x,t)$ из $W_2^{2,2s}(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$. При фиксированном φ_l в (2.3.9) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности, так как

$$\int\limits_Q k_{2s+1} D_t^{2s+1} u^{N_k} \varphi_l dQ = -\int\limits_Q D_t^{2s} u^{N_k} (k_{2s+1}\varphi_{lt} + k_{2s+1t}\varphi_l) dQ,$$

$$-\int\limits_Q D_t^{2s} u^{N_k} (k_{2s+1}\varphi_{lt} + k_{2s+1t}\varphi_l) dQ \longrightarrow -\int\limits_Q D_t^{2s} u (k_{2s+1}\varphi_{lt} + k_{2s+1t}\varphi_l) dQ,$$

$$N_k \longrightarrow \infty.$$

Теперь, используя теорию обобщенных функций, получим равенство

$$k_{2s+1} D_t^{2s+1} u = -[\sum_{i=1}^{2s} k_i D_t^i u - \triangle u + c(x)u] + f,$$

где $f \in L_2(Q)$, $[\sum\limits_{i=1}^{2s} k_i D_t^i u - \Delta u + c(x)u] \in L_2(Q)$. Отсюда следует, что $k_{2s+1} D_t^{2s+1} u \in L_2(Q)$, т.е. $u \in W_L$. Единственность решения краевой задачи (2.3.1)-(2.3.3) следует из леммы 2.3.1. Теорема 2.3.1 доказана.

Теорема 2.3.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^N||_{1,s} \le C_6 ||f|| \lambda_{N+1}^{-1/4}, \;\; C_6 > 0, \tag{2.3.14}$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (2.3.1)-(2.3.3) *из* W_L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (2.3.1)-(2.3.3), для которого имеют место: представление в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x,t), \;\; c_k = (u, \varphi_k),$$

и равенство

$$(-1)^s D_t^{2s} u - \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

Отсюда в силу оценки (2.3.12) получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = ||D_t^{2s} u + \Delta u||^2 \leq C_7 ||f||^2, \ \ C_7 > 0 \tag{2.3.15}$$

Аналогично имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k = \int_Q [(D_t^s u)^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2] dQ \leq C_8 ||f||^2, \ \ C_8 > 0. \tag{2.3.16}$$

Пусть H_N - линейная оболочка элементов $\varphi_1, ..., \varphi_N$, а P_N - проектор в $L_2(Q)$ на H_N.

Как и в § 1 главы 2, легко установить равенство

$$(L(u - u^N), u - u^N) = (f - Lu^N, u - v), \ \ v \in H_N. \tag{2.3.17}$$

При этом справедливо равенство

$$-(Lu^N, u - v) = \int_Q D_t^{2s} u^N [k_{2s+1}(u - v)]_t dQ - (\sum_{i=1}^{2s} k_i D_t^i u^N - \Delta u^N + cu^N, u - v).$$

С учетом данного равенства имеем

$$|(f - Lu^N, u - v)| \leq C_9 ||f|| (||u - v|| + ||u_t - v_t||), \ \ C_9 > 0. \tag{2.3.18}$$

Положим $v = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \varphi_k$. Тогда с учетом (2.3.15) получаем оценку

$$||u - v||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 \leq C_{10} ||f||^2 \lambda_{N+1}^{-2}, \ C_{10} > 0. \tag{2.3.19}$$

С другой стороны, при $w = u - v$ имеем цепочку неравенств

$$||w_t||^2 \leq T^{2s-2} ||D_t^s w||^2 \leq T^{2s-2} \int_Q [(D_t^s w)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2] dQ \leq T^{2s-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$$

$$\leq T^{2s-2}\lambda_{N+1}^{-1}\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k^2\lambda_k^2 \leq C_{11}||f||^2\lambda_{N+1}^{-1},\ \ C_{11}>0. \tag{2.3.20}$$

В силу леммы 2.3.3 и неравенств (2.3.15), (2.3.19), (2.3.20) из соотношения (2.3.17) получаем (2.3.14) - оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Теорема 2.3.2 доказана.

Теорема 2.3.3 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.1 и* $||k_{2s+1}D_t^{2s+1}u^N|| \leq C_{12}||f||,\ C_{12}>0$. *Тогда справедлива оценка*

$$||u-u^N||_{1,s} \leq C_{13}||f||\lambda_{N+1}^{-1/2},\ \ C_{13}>0, \tag{2.3.21}$$

где $u(x,t)$*- точное решение краевой задачи* (2.3.1)-(2.3.3) *из* W_L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x,t)$- точное решение краевой задачи (2.3.1)-(2.3.3). Как и в теореме 2.3.2, легко установить равенство

$$(L(u-u^N),u-u^N)=(L(u-u^N),u-w),\ \ w\in H_N. \tag{2.3.22}$$

Воспользовавшись леммой 2.3.1, будем иметь

$$C_{14}||u-u^N||_{1,s}^2 \leq ||f-Lu^N||||u-w||,\ \ C_{14}>0.$$

Отсюда

$$||u-u^N||_{1,s}^2 \leq C_{15}||f||||u-w||,\ \ C_{15}>0, \tag{2.3.23}$$

для $\forall w\in H_N$.

Как и в доказательстве теоремы 2.3.2, имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\lambda_k^2=||D_t^{2s}u+\triangle u||^2 \leq C_{16}||f||^2,\ \ C_{16}>0. \tag{2.3.24}$$

Справедливо неравенство

$$||u-P_Nu||^2 \leq C_{17}||f||^2\lambda_{N+1}^{-2},\ \ C_{17}>0. \tag{2.3.25}$$

Теперь, полагая в неравенстве (2.3.23) $w=P_Nu$ и учитывая оценки (2.3.24), (2.3.25), из (2.3.23) получаем (2.3.21) - оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Теорема 2.3.3 доказана.

2.4 Нелокальная краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

Нелокальные краевые задачи представляют собой новый класс задач для уравнений с частными производными. На этот класс не всегда напрямую переносятся методы, использованные ранее при исследовании локальных краевых задач. Впервые внимание к задачам с нелокальными условиями для параболических и гиперболических уравнений было привлечено в работах Дж. Кэннона [83] и Л.И. Камынина [35]. Нелокальные краевые задачи для неклассических уравнений в своих работах исследовали В.Н. Врагов [6], С.А. Терсенов [73], Н.Л. Лажетич [47,88], И.Е. Егоров [17], А.И. Кожанов [42] и др.

В этом параграфе с помощью стационарного метода Галеркина доказана разрешимость нелокальной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu \equiv k(t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \tag{2.4.1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (2.4.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (2.4.1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(x,0) = \alpha u(x,T), \quad \alpha = const. \tag{2.4.2}$$

Отметим, что регулярная разрешимость краевой задачи (2.4.1), (2.4.2) была доказана А.П. Львовым [89] методом "ε регуляризации"в случае, когда коэффициент k зависит от x и t, а коэффициент c не зависит от t.

Через C_L обозначим множество функций из $W_2^{2,1}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.4.2).

Лемма 2.4.1 *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad k(T) - \alpha^2 k(0) \geq 0.$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ *имеет место оценка*

$$C_1 ||u||_{1,0}^2 \leq (Lu, u), \quad C_1 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение (Lu, u) для $u \in C_L$. После интегрирования по частям с учетом краевых условий (2.4.2) получим

$$(Lu, u) = \int\limits_Q [(c - \frac{1}{2}k_t)u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2]dQ + \frac{1}{2}[k(T) - \alpha^2 k(0)] \int\limits_\Omega u^2(x,T)dx$$

Отсюда, используя неравенство Пуанкаре-Фридрихса, получаем утверждение леммы.

Рассмотрим случай $k(0) > 0, \; k(T) > 0$. В качестве базисных выбираются функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta}\varphi = \lambda\varphi, \tag{2.4.3}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0, \tag{2.4.4}$$

$$\varphi(x,0) = \alpha\varphi(x,T), \quad \varphi_t(x,T) = \alpha\varphi_t(x,0), \tag{2.4.5}$$

где $\widetilde{\Delta}u = u_{tt} + \Delta u$. При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (2.4.1), (2.4.2) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \tag{2.4.6}$$

Однозначная разрешимость системы (2.4.6) следует из леммы 2.4.1.

Теорема 2.4.1 *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \; c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \; f \in W_2^{0,1}(Q), \quad \alpha f(x,0) = f(x,T),$$

$$k(T) - \alpha^2 k(0) \geq 0, \quad k(0) - \alpha^2 k(T) \geq 0, \quad k(0) > 0, \; k(T) > 0.$$

Тогда краевая задача (2.4.1), (2.4.2) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^{2,1}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для приближенных решений $u^N(x,t)$ получим оценки, не зависящие от N. Из уравнений (2.4.6) умножением на c_l^N и суммированием по l от 1 до N получаем соотношение

$$(Lu^N, u^N) = (f, u^N),$$

из которого в силу леммы 2.4.1 имеем оценку

$$||u^N||_{1,0} \leq C_2 ||f||, \quad C_2 > 0. \tag{2.4.7}$$

Умножим каждое уравнение из (2.4.6) на $c_l^N \lambda_l$, просуммируем по l от 1 до N. В результате придем к равенству

$$-(Lu^N, \widetilde{\Delta} u^N) = -(f, \widetilde{\Delta} u^N). \tag{2.4.8}$$

После интегрирования по частям с учетом краевых условий для u^N из (2.4.8) получим

$$\int\limits_Q [(c + \frac{1}{2}k_t)v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + (\Delta v)^2 - \frac{1}{2}k_t \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 - cv\Delta v] dQ$$

$$+\frac{1}{2}[k(0)-k(T)\alpha^2]\int\limits_{\Omega} v_t^2(x,T)dx+\frac{1}{2}[k(T)-\alpha^2 k(0)]\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x,0)dx$$

$$=\int\limits_{Q}[f_t v_t - f\Delta v]dQ, \tag{2.4.9}$$

где $v=u^N$. В силу условий теоремы, неравенства Коши и оценки (2.4.7) из соотношения (2.4.9) получаем оценку

$$\int\limits_{Q}[(u_t^N)^2+\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^N)^2+(\Delta u^N)^2]dQ \le C_3(||f||_{0,1}^2),\ \ C_3>0,$$

из которой следует вторая априорная оценка:

$$||u^N||_{2,1}\le C_4||f||_{0,1},\ \ C_4>0. \tag{2.4.10}$$

Благодаря оценкам (2.4.7) и (2.4.10) стандартным образом завершается доказательство данной теоремы.

Теорема 2.4.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.4.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u-u^N||_{1,0}\le C_5||f||_{0,1}\lambda_{N+1}^{-1/4},\ \ C_5>0,$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (2.4.1), (2.4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 2.1.3.

3. ГЛАВА 3. Нелинейные неклассические уравнения с меняющимся направлением времени

Третья глава посвящена исследованию нелинейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. С помощью стационарного метода Галеркина на основе полученных по всей области априорных оценок доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для рассматриваемых уравнений. Также для этих уравнений, кроме уравнения третьего порядка по времени, установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина через собственные значения самосопряженных спектральных задач. Собственные функции этих спектральных задач выбираются в качестве базисных при построении приближенных решений.

3.1 Полулинейное параболическое уравнение с меняющимся направлением времени

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим полулинейное уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u + |u|^\rho u = f(x,t). \qquad (3.1.1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (3.1.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^\pm = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^\pm = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Положим $p = \rho + 2, \;\; 0 < \rho \leq \frac{4}{n-1}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (3.1.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{3.1.2}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $\widetilde{\Delta} u = u_{tt} + \Delta u$. Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}$ являются решениями спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta}\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad x \in \Omega, \tag{3.1.3}$$

$$\varphi_k|_{\Gamma} = 0, \tag{3.1.4}$$

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_k|_{t=T} = 0, \tag{3.1.5}$$

при $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$. В этом случае краевые условия (3.1.2) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=T} = 0.$$

Далее, при $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geq 0$, краевые условия (3.1.2) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0,$$

поэтому вместо краевых условий (3.1.5) будут условия

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_{kt}|_{t=T} = 0, \tag{3.1.5^1}$$

При $k(x,0) \leq 0,\ k(x,T) < 0$ краевые условия (3.1.2) имеют вид

$$u|_{t=T} = 0,$$

поэтому вместо краевых условий (3.1.5) будут условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \ \varphi_k|_{t=T} = 0. \tag{3.1.5^2}$$

При $k(x,0) \leq 0,\ k(x,T) \geq 0$ вместо краевых условий (3.1.5) будут условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \quad \varphi_{kt}|_{t=T} = 0. \tag{3.1.5^3}$$

При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Далее, приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \qquad (3.1.6)$$

Лемма 3.1.1 *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad f \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,0) > 0, \quad k(x,T) < 0 \;\; \text{или}\; k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) \geqslant 0$$

$$\text{или}\; k(x,0) \leqslant 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; \text{или}\; k(x,0) \leqslant 0, \;\; k(x,T) \geqslant 0$$

Тогда для приближенных решений задачи (3.1.1), (3.1.2) $u^N(x,t)$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_Q |u^N|^p dQ + ||u^N||_{1,0}^2 \leq C_1 ||f||^2, \quad C_1 > 0. \qquad (3.1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство $(Lu^N, u^N) = (f, u^N)$, полученное из (3.1.6). Обозначим $v = u^N$. После интегрирования по частям с учетом краевых условий (3.1.5) получим

$$(f,v) = (Lv,v) = \int\limits_Q [\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 + (c - \frac{1}{2}k_t)v^2 + |v|^{\rho+2}]dQ + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T} kv^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} kv^2 dx.$$

Отсюда, используя неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int\limits_Q u^2 dQ \le C_\Omega^2 \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ,$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 3.1.2 *Пусть выполнены условия леммы 3.1.1. Тогда система* (3.1.6) *однозначно определяет приближенные решения* u^N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_k^N, \quad k = \overline{1, N}$, - решение однородной системы (3.1.6). Тогда, умножая каждое уравнение (3.1.6) на свое c_l^N и складывая по l от 1 до N, получаем соотношение

$$(Lu^N, u^N) = 0,$$

из которого в силу леммы 3.1.1 имеем

$$0 = ||u^N||^2 = \sum_{k=1}^N (c_k^N)^2,$$

т.е. $c_k^N = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, для системы (3.1.6) имеет место теорема единственности. Рассмотрим отображение $B : R^N \to R^N$ такое, что

$$B\xi = \eta, \;\; \eta_l = (Lv^N, \varphi_l) - (f, \varphi_l), \;\; l = 1, ..., N, \;\; v^N = \sum_{k=1}^N \xi_k \varphi_k.$$

Вычислим

$$(B\xi, \xi) = \sum_{l=1}^N \eta_l \xi_l = (Lv^N, v^N) - (f, v^N).$$

Тогда на основании доказательства леммы 3.1.1 получаем, что

$$(B\xi, \xi) \ge C_2 ||v^N||_{1,0}^2 + \int\limits_Q |v^N|^p dQ - ||f|| ||v^N||, \;\; C_2 > 0.$$

Отсюда в силу неравенства Коши

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \ \ \varepsilon > 0,$$

с $\varepsilon = \frac{C_2}{2}$ будем иметь неравенство

$$(B\xi, \xi) \geq \frac{C_2}{2} ||v^N||^2 - \frac{1}{2C_2} ||f||^2 = \frac{C_2}{2} |\xi|^2 - \frac{1}{2C_2} ||f||^2 = 0,$$

при $R = \frac{1}{C_2} ||f||$. Следовательно, $(B\xi, \xi) \geq 0$ для $|\xi| = R$. Тогда в силу леммы 1.2.1 главы 1 следует разрешимость системы (3.1.6).

Лемма 3.1.3 *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2} k_t \geq 0, \ \ c + \frac{1}{2} k_t \geq \delta > 0, \ \ f \in W_2^{0,1}(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев

$$k(x, 0) > 0, \ \ k(x, T) < 0, \ \ f(x, 0) = 0, \ \ f(x, T) = 0,$$

или

$$k(x, 0) > 0, \ k(x, T) \geqslant 0, \ f(x, 0) = 0,$$

или

$$k(x, 0) \leqslant 0, \ k(x, T) < 0, \ f(x, T) = 0,$$

или

$$k(x, 0) \leqslant 0, \ k(x, T) \geqslant 0.$$

Тогда для приближенных решений задачи (3.1.1), (3.1.2) $u^N(x, t)$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_Q [(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^N)^2 + (\Delta u^N)^2] dQ + (\rho + 1) \int\limits_Q (|u^N|^\rho (u_t^N)^2 + |u^N|^\rho \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2) dQ$$

$$\leq C_3 (||f||^2 + ||f_t||^2), \ \ C_3 \geq 0. \qquad (3.1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова обозначим $v = u^N$ Рассмотрим выражение $-(Lv, v_{tt} + \Delta v)$, которое преобразуем, проведя интегрирование по частям. Складывая полученные интегралы, окончательно получаем:

$$-(Lv, \widetilde{\Delta} v) = \int\limits_Q [(c + \frac{1}{2}k_t)v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + (\Delta v)^2 + v_t \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{x_i} + k \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i}$$

$$+c_t v_t v - cv\Delta v]dQ + (\rho + 1) \int\limits_Q (|u^N|^\rho (u_t^N)^2 + |u^N|^\rho \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2) dQ$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} k v_t^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} k v_t^2 dx. \qquad (3.1.9)$$

Из (3.1.9) в силу условий леммы, неравенства Коши и первой априорной оценки (3.1.7) получаем вторую априорную оценку (3.1.8). Лемма 3.1.3 доказана.

Теорема 3.1.1 *Пусть выполнены все условия леммы 3.1.3. Тогда краевая задача* (3.1.1), (3.1.2) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^{2,1}(Q) \cap L_p(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1.2 система нелинейных алгебраических уравнений (3.1.6) имеет единственное решение $c_k^N,\ k = \overline{1, N}$, т.е. для $N = 1, 2, ...$ построены приближенные решения краевой задачи (3.1.1), (3.1.2). Благодаря оценкам (3.1.7), (3.1.8) из последовательности $\{u^N\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, слабо сходящуюся в $W_2^{2,1}(Q)$ к некоторой функции $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q) \cap L_p(Q)$ и $|u^{N_k}|^\rho u^{N_k} \to w(x,t)$ слабо в $L_q(Q),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ w \in L_q(Q)$.

Из компактности вложения $W_2^{2,1}(Q)$ в $L_2(Q)$ следует, что $u^{N_k} \to u$ сильно в $L_2(Q)$ и почти всюду в Q. Теперь в лемме 1.2.2 главы 1 положим

$$g_{N_k} = |u^{N_k}|^\rho u^{N_k}, \ \ g = |u|^\rho u.$$

Тогда в силу леммы 1.2.2 главы 1 $|u^{N_k}|^\rho u^{N_k}$ сходится слабо к $|u|^\rho u$ в $L_q(Q)$. В силу единственности слабого предела имеем $w = |u|^\rho u$.

При фиксированном φ_l в (3.1.6) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности $\{u^{N_k}\}$. В результате получим равенство

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l),\ l = 1, 2, ...$$

В силу того, что $\{\varphi_l\}$ образуют плотное множество в $L_p(Q)$, из последнего равенства следует, что уравнение (3.1.1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (3.1.2) удовлетворяются в среднем. Единственность решения краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) из $W_2^{2,1}(Q) \cap L_p(Q)$ непосредственно вытекает из доказательства леммы 3.1.1, т.к. $(|u|^\rho u - |v|^\rho v)(u - v) \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.1.2 *Пусть выполнены все условия леммы 3.1.3. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_4(||f||, ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-\frac{1-\alpha}{4}},\ \ C_4 > 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1/2 - 1/p}{1/2 - 1/\overline{m}},\ \ \overline{m} = \frac{2(n+1)}{n-1},$$

$u(x,t)$ - *точное решение краевой задачи* (3.1.1), (3.1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (3.1.1), (3.1.2). Представим Lu в следующем виде

$$Lu = L_0 u + |u|^\rho u.$$

Для функций $u(x,t)$ справедливы следующие соотношения

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l),\ \ l = 1, 2... \tag{3.1.10}$$

Пусть H_N - линейная оболочка элементов $\varphi_1, ..., \varphi_N$, а P_N - проектор в $L_2(Q)$ на H_N. Теперь из (3.1.6) и (3.1.10) имеем равенства

$$(Lu^N, \eta) = (f, \eta), \ \ (Lu, \eta) = (f, \eta) \ \ \forall \eta \in H_N.$$

Отсюда получаем

$$(L_0(u - u^N) + |u|^\rho u - |u^N|^\rho u^N, \eta) = 0.$$

Из последнего равенства при $\eta = w - u^N = (u - u^N) + (w - u), \ \ w \in H_N$, получаем

$$(L_0(u - u^N), u - u^N) + (|u|^\rho u - |u^N|^\rho u^N, u - u^N) = (f - Lu^N, u - w). \quad (3.1.11)$$

$(f - Lu^N) \in L_q(Q)$ и $|u^N|^\rho u^N$ ограничена в $L_q(Q)$ на основании оценки (3.1.7) Далее, в силу неравенства Пуанкаре-Фридрихса справедлива оценка

$$C_5 ||u - u^N||^2_{1,0} \leq (L_0(u - u^N), u - u^N), \ C_5 > 0.$$

Отсюда с учетом монотонности функции $|\tau|^\rho \tau$ из (3.1.11) будем иметь

$$C_5 ||u - u^N||^2_{1,0} \leq ||f - Lu^N||_{L_q(Q)} ||u - w||_{L_p(Q)}. \quad (3.1.12)$$

Функция $u(x, t)$ представима в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x, t).$$

Имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \leq C_6 ||u||^2_{1,1} \leq C_7 [||f||^2 + ||f_t||^2], \ \ C_6, \ C_7 > 0.$$

Справедливо соотношение

$$||u - P_N u||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k, \quad (3.1.13)$$

из которого получаем

$$||u - P_N u|| \leq C_8(||f||, ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_8 > 0.$$

В силу последней оценки, полагая в неравенстве (3.1.12) $w = P_N u$, учитывая оценки (3.1.7), (3.1.8) и используя мультипликативное неравенство [45]

$$||u - w||_{L_p(Q)} \leq C_{10}||u - w||_{1,1}^{\alpha}||u - w||^{1-\alpha}, \; C_{10} > 0,$$

из (3.1.12) получим оценку погрешности стационарного метода Галеркина:

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_4(||f||, ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-\frac{1-\alpha}{4}}.$$

Теорема доказана.

3.2 Сильно нелинейное неклассическое уравнение третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = Pu - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}) + c(x)u = f(x,t), \tag{3.2.1}$$

где $p > 2$, $Pu = \sum\limits_{i=1}^{3} k_i(x,t) D_t^i u$, причем коэффициенты $k_i(x,t)$, $c(x)$ являются достаточно гладкими функциями.

Обозначим

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : x \in \Omega,\ -k_3(x,0) \gtrless 0\},\ \ S_T^{\pm} = \{(x,T) : x \in \Omega,\ -k_3(x,T) \gtrless 0\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (3.2.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{3.2.2}$$

$$u|_{t=0} = 0;\ \ u|_{t=T} = 0;\ \ u_t|_{\overline{S_0^+}} = 0;\ \ u_t|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{3.2.3}$$

В дальнейшем рассмотрим случай $k_3(x,0) > 0$, $k_3(x,T) < 0$, $x \in \Omega$. Вообще говоря, уравнение (3.2.1) является уравнением с меняющимся направлением времени.

При $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ положим

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\varphi_{x_i}|^{p-2} \varphi_{x_i}) + c(x)\varphi = A_0(\varphi) + c(x)\varphi.$$

Тогда оператор $\varphi \to A_0(\varphi)$ является ограниченным из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ [7, 49].

Обозначим через $\beta(\tau)$ функцию

$$\beta(\tau) = |\tau|^{(p-2)/2} \tau.$$

Пусть Ω - ограниченная область с границей S класса C^∞. Пусть функция $\psi(x)$ обладает свойствами:

$$\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \psi(x) > 0 \ \text{ при } \ x \in \Omega,$$

$$\psi|_S = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial \psi}{\partial n}|_S = 0.$$

В области Ω рассмотрим задачу Дирихле

$$-\psi \Delta u + \mu u = f,\ u|_S = 0. \tag{3.2.4}$$

Лемма 3.2.1 *[49]. Если* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$*, то при достаточно большом* μ *существует единственное решение краевой задачи* (3.2.4) *такое, что*

$$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega),\ \sqrt{\psi} D^\alpha u \in L_2(\Omega),\ |\alpha| = k+1.$$

Пусть функции $g_k(t) (k = 1, 2, ...)$ являются решениями спектральной задачи

$$-\frac{d^2 g_k}{dt^2} = \mu_k g_k, \ \ g_k(0) = 0, \ \ g_k(T) = 0, \tag{3.2.5}$$

при этом собственные значения $\mu_k > 0$, а собственные функции g_k удовлетворяют условиям нормировки

$$\int\limits_0^T g_k^2(t) = 1.$$

Пусть далее, $\xi_j(x)$ - некоторый базис в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, причем $\xi_j \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$ при достаточно большом k.

Пусть $v_{km}(x)$ является решением задачи

$$-\psi \Delta v_{km} + (\lambda + \mu_k) v_{km} = \xi_m,\ v_{km}|_S = 0, \tag{3.2.6}$$

где λ - число, а $m = 1, 2, ...$

Из леммы 3.2.1 следует

Лемма 3.2.2 *[49]. Для достаточно большого $\lambda > 0$ задача (3.2.6) имеет единственное гладкое решение в $\overline{\Omega}$.*

Положим

$$B\varphi \equiv -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \psi\Delta\varphi + \lambda\varphi,$$

где λ выбрано в лемме 3.2.2.

Лемма 3.2.3 *Существует такой базис из функций $\{\varphi_j\}$, достаточно гладких в $\overline{Q}$, что функции $\{B\varphi_j\}$ образуют базис в пространстве $L_p((0,T), \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.2.3 аналогично [49] следует из (3.2.5), (3.2.6) и леммы 3.2.2 в силу равенства

$$B(v_{km} \otimes g_k) = \xi_m \otimes g_k,$$

где $\otimes$-прямое произведение.

Теорема 3.2.1 *Пусть выполнены условия*

$k_3(x,0) > 0$, $k_3(x,T) < 0$, $x \in \Omega$ и $f, \sqrt{\psi}\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_2(Q)$, $i = \overline{1,n}$, $-k_2 + \frac{1}{2}k_{3t} \geq \delta > 0$, $-k_2 + \frac{3}{2}k_{3t} \geq \delta > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}((k_3\psi)_{x_i})^2 \leq \frac{1}{4}\delta^2\psi$, коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой.

Тогда существует, и притом единственная, функция $u(x,t)$, такая, что

$$u \in L_p((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)),$$

$$u_t, u_{tt} \in L_2(Q),\ k_3 D_t^3 u \in L_{p'}((0,T); W_{p'}^{-1}(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x,0) \in L_2(\Omega),\ u_{tt}(x,T) \in L_2(\Omega),$$

$$\sqrt{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}(|u_{x_i}|^{(p-2)/2}u_{x_i}) \in L_2(Q),\ \forall i,j;$$

$$\sqrt{\psi}v_{tx_i} \in L_2(Q),\ \frac{\partial}{\partial t}(|u_{x_i}|^{(p-2)/2}u_{x_i}) \in L_2(Q)\forall i,$$

и удовлетворяющая (3.2.1)-(3.2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенные решения краевой задачи (3.2.1)-(3.2.3) будем искать в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k^m\varphi_k(x,t)$$

из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\int_0^T(Pu_m+Au_m,B\varphi_j)_0dt=\int_0^T(f,B\varphi_j)_0dt,\ j=\overline{1,m}, \tag{3.2.7}$$

где $(u,v)_0=\int\limits_\Omega uvdx,\ \forall u,v\in L_2(\Omega)$.

Сначала докажем существование функции $u_m\equiv v$, которая удовлетворяет (3.2.7) на основании неравенства

$$\int_0^T(Pv+Av,Bv)_0dt\geq c\{\int_0^T[v_{tt}^2+v_t^2+\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^p+\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial t}(\beta(v_{x_i})))^2$$

$$+\psi\sum_{i=1}^{n}v_{tx_i}^2+\sum_{i,j=1}^{n}\psi(\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta(v_{x_i})))^2]dQ+\int\limits_\Omega[v_{tt}^2(x,0)+v_{tt}^2(x,T)]dx\}, \tag{3.2.8}$$

где $c>0$.

Действительно, имеет место неравенство

$$|\int_0^T(f,Bv)_0dt|\leq c_*[\int_Q(v_{tt}^2+\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2)dQ]^{1/2}$$

с константой $c_*>0$. Отсюда следует оценка

$$\int_0^T(Pu_m+Au_m-f,Bu_m)_0dt\geq 0,$$

когда выражение

$$\int_Q(u_{mtt}^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{mx_i}|^2)dQ$$

достаточно велико. Тогда разрешимость нелинейной системы (3.2.7) получаем в силу леммы 1.2.1 главы 1.

Имеем

$$\int_0^T(Pv+Av,Bv)_0dt=\sum_{k=1}^{6}I_k, \tag{3.2.9}$$

где

$$I_1 = \int_0^T (Pv, -v_{tt})_0 dt,$$

$$I_2 = \int_0^T (Pv, -\psi\Delta v)_0 dt,$$

$$I_3 = \lambda\int_0^T (Pv, v)_0 dt,$$

$$I_4 = \int_0^T (A(v), -v_{tt})_0 dt,$$

$$I_5 = \int_0^T (A(v), -\psi\Delta v)_0 dt,$$

$$I_6 = \lambda\int_0^T (Av, v)_0 dt.$$

Далее, будем преобразовывать выражения I_k, используя условия теоремы и известные неравенства [49].

Имеем

$$I_1 = \int_Q [-(k_2 - \frac{1}{2}k_{3t})v_{tt}^2 - k_1 v_t v_{tt}]dQ - \frac{1}{2}\int_\Omega k_3 v_{tt}^2 dx|_{t=0}^{t=T} \geq \frac{\delta}{2}\int_Q v_{tt}^2 dQ$$

$$+C_0\int_\Omega [v_{tt}^2(x,0) + v_{tt}^2(x,T)]dx - C_1(\delta)\int_Q v_t^2 dQ,\ C_0,\ C_1(\delta) > 0. \qquad (3.2.10)$$

После некоторых преобразований получаем

$$I_2 = \int_Q \{(-k_2 + \frac{3}{2}k_{3t})\psi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 - v_{tt}\sum_{i=1}^n (k_3\psi)_{x_i} v_{tx_i}$$

$$-\frac{1}{2}(k_{1t} - k_{2tt} + k_{3ttt})\psi\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \frac{1}{2}\Delta(k_2\psi)v_t^2$$

$$-\sum_{i=1}^n [(k_{3t}\psi)_{x_i} v_{tt} + (k_{2t}\psi)_{x_i} v_t - (k_1\psi)_{x_i} v_t]v_{x_i} dQ - \frac{1}{2}\int_\Omega k_3\psi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx|_{t=0}^{t=T}.$$

Отсюда будем иметь

$$I_2 \geq \int_Q [\frac{\delta}{2}\psi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 - \frac{\delta}{4}v_{tt}^2 - C_2(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2)]dQ,\ C_2 > 0. \qquad (3.2.11)$$

Далее,

$$I_3=\lambda\int_Q[(-k_2+\frac{3}{2}k_{3t})v_t^2+\frac{1}{2}(-k_{1t}+k_{2tt}-k_{3ttt})v^2]dQ-\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega k_3v_t^2dx|_{t=0}^{t=T},$$

и, следовательно,

$$I_3\geq\lambda\int_Q[\delta v_t^2-C_3v^2]dQ,\ C_3>0. \qquad (3.2.12)$$

Имеем

$$I_4=\frac{4(p-1)}{p^2}\int_Q\sum_{i=1}^n(\frac{\partial}{\partial t}(\beta(v_{x_i})))^2dQ+\frac{1}{2}\int_Q c(x)v_t^2dQ. \qquad (3.2.13)$$

Снова, проводя некоторые преобразования, получим

$$I_5=\int_0^T(A_0(v),-\psi\Delta v)_0dt+\int_Q[c\psi\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2-\frac{1}{2}\Delta(c\psi)v^2]dQ.$$

Отсюда имеем

$$I_5\geq C_4\int_Q\psi\sum_{i,j=1}^n(\frac{\partial}{\partial x_j}\beta(v_{x_i}))^2dQ-C_5\int_Q[\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2+v^2]dQ,\ C_4,C_5>0. \qquad (3.2.14)$$

Справедливо равенство

$$I_6=\lambda\int_Q[\sum_{i=1}^n|v_{x_i}|^p+c(x)v^2]dQ. \qquad (3.2.15)$$

В силу (3.2.10)-(3.2.15) из (3.2.9) получим

$$\int_0^T(Pv+Av,Bv)_0dt\geq\int_Q\{\frac{\delta}{4}v_{tt}^2+\lambda\sum_{i=1}^n|v_{x_i}|^p+\frac{\delta}{2}\psi\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2$$

$$+\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^n(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_{x_i}))^2+C_4\psi\sum_{i,j=1}^n(\frac{\partial}{\partial x_j}\beta(v_{x_i}))^2-(C_2+C_5)\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2$$

$$+(\lambda\delta+\frac{1}{2}c(x)-C_1-C_2)v_t^2+[\lambda(c(x)-C_3)-C_5]v^2\}dQ. \qquad (3.2.16)$$

На основании неравенств

$$\int_Q v^2dQ\leq k_1\int_Q\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2dQ,\ \int_Q\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2dQ\leq k_2\int_Q\sum_{i=1}^n|v_{x_i}|^pdQ,\ k_1>0,\ k_2>0$$

из (3.2.16) получаем оценку (3.2.8) при

$$c(x) \geq C_3,\ \lambda\delta \geq C_1 + C_2,\ \lambda > C_5 k_1 k_2 + (C_2 + C_5) k_2.$$

Теперь покажем, что в силу оценки (3.2.8) можно установить существование искомого решения краевой задачи (3.2.1)-(3.2.3). Действительно, из (3.2.8) следует, что u_m (соответственно u_{mt}, u_{mtt}) ограничены в $L_p((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))$(соответственно в $L_2(Q)$), $u_{mtt}(x,0)$ и $u_{mtt}(x,T)$ ограничены в $L_2(\Omega)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta(u_{mx_i})),\ \sqrt{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta(u_{mx_i})),\ \sqrt{\psi}u_{mtx_i} \tag{3.2.17}$$

ограничены в $L_2(Q)$. Отсюда следует, что

$$|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

ограничены в $L^{p'}(Q)$. Пусть G - произвольная область в Ω, $\overline{G} \subset \Omega$. Тогда из (3.2.17) следует, что последовательность $\beta(u_{mx_i})$ ограничена в $W_2^1(G \times (0,T))$. В силу компактности вложения $W_2^1(G \times (0,T))$ в $L_2(G \times (0,T))$ из последовательности u_m можно выделить подпоследовательность u_μ, такую, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L_p((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)),$$

$$u_{\mu t} \to u_t,\ u_{\mu tt} \to u_{tt} \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$u_{\mu tt}(x,0) \to \chi_0(x),\ u_{\mu tt}(x,T) \to \chi_1(x) \text{ слабо в} L_2(\Omega)$$

$$\beta(u_{\mu x_i}) \text{ сходятся почти всюду в } Q,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta(u_{\mu x_i})) \to \xi_i \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$\sqrt{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta(u_{\mu x_i})) \to \eta_{ij} \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$|u_{\mu x_i}|^{p-2}u_{\mu x_i} \to \eta_i \text{ слабо в } L_{p'}(Q).$$

Отсюда в силу монотонности функции $\beta(\tau)$ следует, что подпоследовательность $u_{\mu x_i}$ сходится почти всюду в Q. Поэтому согласно лемме 1.2.2 главы 1 получаем

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial t}(\beta(u_{x_i})),\ \eta_{ij} = \sqrt{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta(u_{x_i})),\ \eta_i = |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}.$$

Тогда имеем $A_0(u_\mu) \to A_0(u)$ в $L_{p'}((0,T); W_{p'}^{-1}(\Omega))$, и равенства (3.2.7) приводят к равенствам

$$\int_0^T [(-u_{tt}, (k_3 B\varphi_j)_t)_0 + (\sum_{i=1}^{2} k_i D_t^i u + Au, B\varphi_j)_0] dt = \int_0^T (f, B\varphi_j)_0 dt\ \forall j. \tag{3.2.18}$$

Так как $\{B\varphi_j\}$ образует базис в $L_p((0,T); \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$, из (3.2.18) следует, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.2.1), краевым условиям (3.2.2), (3.2.3) и $k_3 D_t^3 u \in L_{p'}((0,T); W_{p'}^{-1}(\Omega))$.

Тогда в силу теоремы 1.2.4 о следах главы 1 существуют следы $u_{tt}(x,0), u_{tt}(x,T)$, при этом получаем $u_{tt}(x,0) = \chi_0(x) \in L_2(\Omega)$ и $u_{tt}(x,T) = \chi_1(x) \in L_2(\Omega)$.

Теперь переходим к доказательству единственности решения в теореме 3.2.1.

Пусть u_1, u_2 - два решения краевой задачи (3.2.1)-(3.2.3) из класса, указанного в теореме 3.2.1. Имеем

$$Pu + A_0(u_1) - A_0(u_2) + c(x)u = 0,$$

где $u = u_1 - u_2$. Отсюда в силу неравенства

$$(A_0(u_1) - A_0(u_2), u_1 - u_2)_0 \geq 0$$

получаем

$$\int_Q [\delta u_t^2 + (c(x) - C_3)u^2] dQ \leq 0.$$

Следовательно, $u = 0$, если $c(x) \geq C_3$, учитывая условия (3.2.3). Теорема 3.2.1 доказана.

3.3 Полулинейное неклассическое уравнение высокого порядка с меняющимся направлением времени

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим неклассическое уравнение высокого порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \triangle u + c(x)u + |u|^\rho u = f(x,t), \tag{3.3.1}$$

где $s \geq 1$ - целое число, $f \in L_2(Q)$.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (3.3.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Положим $p = \rho + 2,\ 0 < \rho \leq \frac{2}{n-1}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (3.3.1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \tag{3.3.2}$$

$$D_t^j u|_{t=T}^{t=0} = 0,\ \ j = \overline{0, s-1};\ \ D_t^s u|_{\overline{S_0^+}} = 0,\ \ D_t^s u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{3.3.3}$$

Пусть C_L - множество гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (3.3.2), (3.3.3), а W_L - замыкание C_L по норме

$$||u||_L^2 = ||u||_{2,2s}^2 + ||k_{2s+1} D_t^{2s+1} u||^2.$$

Рассмотрим случай

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0,\ \ (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0.$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}$ являются решениями спектральной задачи

$$(-1)^s D_t^{2s} \varphi_k - \triangle \varphi_k = \lambda_k \varphi_k,\ \ x \in \Omega, \tag{3.3.4}$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0, \qquad (3.3.5)$$

$$D_t^j\varphi_k|_{t=0} = 0, \;\; D_t^j\varphi_k|_{t=T} = 0, \;\; j = \overline{0, s-1}. \qquad (3.3.6)$$

При этом функции $\varphi_k(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$, ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \;\; l = \overline{1, N}. \qquad (3.3.7)$$

Лемма 3.3.1 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \ge \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \le 0, \;\; (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \ge 0.$$

Тогда имеет место оценка

$$\int\limits_Q |u^N|^p dQ + ||u^N||_{1,s}^2 \le C_1||f||^2, \;\; C_1 > 0, \;\; \forall u \in C_L. \qquad (3.3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив обе части (3.3.7) на C_l^N и просуммировав по l от 1 до N, получим равенство

$$(Lu^N, u^N) = (f, u^N). \qquad (3.3.9)$$

Обозначим $w = u^N$. В результате интегрирования левой части (3.3.9) по частям с учетом условий (3.3.2), (3.3.3) получим

$$(Lw, w) = \int\limits_Q |w|^p dQ + \int\limits_Q \{\frac{1}{2}(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}](D_t^s w)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + cw^2\}dQ + \frac{(-1)^s}{2}\int\limits_{\Omega} k_{2s+1}(D_t^s w)^2 dx|_{t=0}^{t=T} + I, \qquad (3.3.10)$$

где $|I| \leq M \int\limits_Q \sum\limits_{i=0}^{s-1}(D_t^i u)^2 dQ,\ M$ - положительная постоянная, зависящая от коэффициентов k_i уравнения (3.3.1). В силу теорем вложения [1] справедливы оценки

$$||D_t^i v||^2 \leq \varepsilon \int\limits_Q [\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 + (D_t^s v)^2]dQ + C_\varepsilon ||v||^2,\ v \in W_2^{1,s}(Q),$$

$1 \leq i \leq s-1,\ \varepsilon > 0,\ C_\varepsilon > 0$ зависит от параметра ε и Q. Тогда для I справедлива оценка

$$|I| \leq \gamma \int\limits_Q [\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + (D_t^s u)^2]dQ + \tilde{C}_\gamma ||u||^2,\ \ \gamma > 0,\ \ \tilde{C}_\gamma > 0.$$

Воспользовавшись неравенством Коши, полагая в соотношении (3.3.10) $\gamma = min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\}$ и считая, что $c(x) - \widetilde{C}_\gamma \geq c_0 > 0$, получим оценку леммы 3.3.1.

Лемма 3.3.2 *Пусть выполнены условия леммы 3.3.1. Тогда система* (3.3.7) *однозначно определяет приближенные решения* u^N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.3.2 проводится аналогично доказательству леммы 3.1.2 главы 3.

Лемма 3.3.3 *Пусть выполнены условия леммы 3.3.1 и*

$$(-1)^s[2k_{2s} - k_{2s+1t}] \geq \delta > 0,\ \ s > 1.$$

Тогда имеет место оценка

$$||u^N||_{2,2s}^2 \leq C_2[||f||^2 + ||f||^{2(\rho+1)}],\ \ C_2 > 0. \qquad (3.3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив обе части (3.3.7) на $\lambda_l C_l^N$ и просуммировав по l от 1 до N, получим равенство

$$(Lu^N, (-1)^s D_t^{2s}u^N - \triangle u^N) = (f, (-1)^s D_t^{2s}u^N - \triangle u^N). \qquad (3.3.12)$$

В результате интегрирования левой части (3.3.12) по частям, с учетом условий (3.3.2), (3.3.3) получим

$$(Lw,(-1)^s D_t^{2s}w-\triangle w)=(\rho+1)\int\limits_Q |w|^\rho \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2 dQ+(-1)^s\int\limits_Q |w|^\rho w D_t^{2s} w dQ$$

$$+\int\limits_Q \{(-1)^s(k_{2s}-\frac{1}{2}k_{2s+1t})(D_t^{2s}w)^2+[(-1)^s(k_{2s}-\frac{2s+1}{2}k_{2s+1t})+1]\sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2$$

$$+(\Delta w)^2+c(x)(D_t^s w)^2-c(x)w\Delta w\}dQ+(-1)^s\int\limits_Q \sum_{i=1}^{2s-1} k_i D_t^i w D_t^{2s} w dQ$$

$$-\int\limits_Q \sum_{i=1}^{2s-1} k_i D_t^i w\Delta w dQ+\frac{(-1)^s}{2}\int\limits_\Omega k_{2s+1}(D_t^{2s}w)^2 dx|_{t=0}^{t=T}$$

$$+\frac{(-1)^s}{2}\int\limits_\Omega k_{2s+1}\sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2 dx|_{t=0}^{t=T}+J_1+J_2+J_3, \qquad (3.3.13)$$

где

$$J_1=(-1)^s\int\limits_Q D_t^{s+1}w\sum_{i=1}^n k_{2s+1x_i}D_t^s w_{x_i} dQ,$$

$$J_2=(-1)^s\int\limits_Q [\sum_{i=1}^n D_t^s w_{x_i}(sk_{2s+1tt}D_t^{s-1}w_{x_i}+...)-D_t^s w(s\sum_{i=1}^n k_{2s+1x_it}D_t^s w_{x_i}+...)]dQ,$$

$$J_3=(-1)^s\int\limits_Q [D_t^s w(\sum_{i=1}^n k_{2sx_i}D_t^s w_{x_i}+...)+\sum_{i=1}^n D_t^s w_{x_i}(sk_{2st}D_t^{s-1}w_{x_i}+...)]dQ.$$

Используя неравенство Коши $|ab|\le\gamma a^2+\frac{1}{4\gamma}b^2,\ \gamma>0$, оценим J_k:

$$|J_1|\le\gamma_1\int\limits_Q \sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2 dQ+C(\gamma_1)\int\limits_Q (D_t^{s+1}w)^2 dQ,\ \gamma_1>0,$$

$$|J_2|\le\gamma_2\int\limits_Q \sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2 dQ+C(\gamma_2)\int\limits_Q [\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{i=1}^n (D_t^k w_{x_i})^2+(D_t^s w)^2]dQ,\ \gamma_2>0,$$

$$|J_3|\le\gamma_3\int\limits_Q \sum_{i=1}^n (D_t^s w_{x_i})^2 dQ+C(\gamma_3)\int\limits_Q [\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{i=1}^n (D_t^k w_{x_i})^2+(D_t^s w)^2]dQ,\ \gamma_3>0.$$

В силу теорем вложения [1] справедливо неравенство

$$\int\limits_Q (D_t^i D^\alpha u)^2 dQ \le \varepsilon \int\limits_Q [\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 + (D_t^{2s} u)^2] dQ + C(\varepsilon)||u||^2, \ \varepsilon > 0, \ u \in W_2^{2,2s}(Q), \tag{3.3.14}$$

при $\frac{i}{2s} + \frac{|\alpha|}{2} < 1$.

В силу теорем вложения имеем

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q) \subset L_q(Q), \ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \ n \ge 2.$$

Отсюда при $\rho \le \frac{2}{n-1}$ следует неравенство

$$|||w|^\rho w|| \le C_3 ||w||_{1,1}^{\rho+1}, \ \ C_3 > 0. \tag{3.3.15}$$

Далее, используя для дальнейшей оценки $|J_k|$ неравенства (3.3.14), (3.3.15), оценку (3.3.8) и неравенство Коши, из соотношения (3.3.13) получаем вторую априорную оценку. Лемма 3.3.3 доказана.

Теорема 3.3.1 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \ge \delta > 0, \ (-1)^s[2k_{2s} - k_{2s+1t}] \ge \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \le 0, \ \ (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \ge 0, \ x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in W_L$ краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3)*. При этом $u^N \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.3.2 система нелинейных алгебраических уравнений (3.3.7) имеет единственное решение $c_k^N, \ k = \overline{1,N}$, т.е. для $N = 1, 2, ...$ построены приближенные решения краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3). Благодаря оценкам (3.3.8), (3.3.11) из последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_k}, слабо сходящуюся в $W_2^{2,2s}(Q)$

к некоторой функции $u(x,t)$ из $W_2^{2,2s}(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$, такую, что $|u^{N_k}|^\rho u^{N_k}$ сходится к w слабо в $L_2(Q)$. Имеем

$$\int\limits_Q k_{2s+1} D_t^{2s+1} u^{N_k} \varphi_l dQ = -\int\limits_Q D_t^{2s} u^{N_k} (k_{2s+1}\varphi_{lt} + k_{2s+1t}\varphi_l) dQ$$

$$\to -\int\limits_Q D_t^{2s} u (k_{2s+1}\varphi_{lt} + k_{2s+1t}\varphi_l) dQ, \quad N_k \longrightarrow \infty.$$

Далее, используя теорию обобщенных функций, получим равенство

$$k_{2s+1} D_t^{2s+1} u = -(\sum_{i=1}^{2s} k_i D_t^i u - \triangle u + c(x)u + w) + f,$$

где $f \in L_2(Q)$, $\quad (\sum\limits_{i=1}^{2s} k_i D_t^i u - \triangle u + c(x)u + w) \in L_2(Q)$. Отсюда следует, что $k_{2s+1} D_t^{2s+1} u \in L_2(Q)$ и $u(x,t)$ принадлежит W_L.

Теперь в лемме 1.2.2 главы 1 положим

$$g_{N_k} = |u^{N_k}|^\rho u^{N_k}, \; g = |u|^\rho u.$$

Тогда в силу леммы 1.2.2 главы 1 $|u^{N_k}|^\rho u^{N_k}$ сходится слабо к $|u|^\rho u$ в $L_2(Q)$. В силу единственности слабого предела имеем $w = |u|^\rho u$.

Тогда получаем, что уравнение (3.3.1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$, и краевые условия (3.3.2), (3.3.3) удовлетворяются в среднем.

Докажем единственность решения краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3) из W_L.

Пусть $u_1, \; u_2$ являются решениями краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3) из W_L и $L_0 u \equiv Lu - |u|^\rho u$. Тогда, как в доказательстве леммы 3.3.1, получаем

$$0 = (L_0(u_1 - u_2), u_1 - u_2) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2), u_1 - u_2) \geq C_4 ||u_1 - u_2||_{1,s}^2, \; C_4 > 0.$$

Отсюда имеем $u_1 = u_2$. Теорема 3.3.1 доказана.

Теорема 3.3.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.3.1, и последовательность* $\{k_{2s+1} D_t^{2s+1} u^N\}$ *ограничена в* $L_2(Q)$. *Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^N||_{1,s} \leq C_5(||f|| + ||f||^{\rho+1}) \lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_5 > 0, \tag{3.3.16}$$

где $u(x,t)$- *точное решение краевой задачи* (3.3.1)-(3.3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x,t)$- точное решение краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3). Представим Lu в следующем виде

$$Lu = L_0 u + |u|^\rho u.$$

Для функции $u(x,t)$ справедливы равенства

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l),\ l = 1, 2, ... \tag{3.3.17}$$

Пусть H_N - линейная оболочка элементов $\varphi_1, ..., \varphi_N$, а P_N - проектор в $L_2(Q)$ на H_N. Теперь из (3.3.7), (3.3.17) имеем равенства

$$(Lu^N, \eta) = (f, \eta),\ \ (Lu, \eta) = (f, \eta)\ \ \forall \eta \in H_N.$$

Отсюда получаем

$$(L_0(u - u^N) + |u|^\rho u - |u^N|^\rho u^N, \eta) = 0.$$

Из последнего равенства при $\eta = w - u^N = (u - u^N) + (w - u),\ w \in H_N$ получаем

$$(L_0(u-u^N), u-u^N) + (|u|^\rho u - |u^N|^\rho u^N, u-u^N) = (f - Lu^N, u-w). \tag{3.3.18}$$

$(f - Lu^N) \in L_2(Q)$ и $|u^N|^\rho u^N$ ограничена в $L_2(Q)$ на основании оценки (3.3.8), (3.3.15) и $\rho \leq \frac{2}{n-1}$. Далее, как в доказательстве леммы 3.3.1, будем иметь

$$C_6 ||u - u^N||^2_{1,s} \leq (L_0(u - u^N), u - u^N),\ C_6 > 0.$$

Отсюда с учетом монотонности функции $|\tau|^\rho \tau$ из (3.3.18) получаем

$$C_6 ||u - u^N||^2_{1,s} \leq ||f - Lu^N|| ||u - w||.$$

Тогда

$$||u - u^N||^2_{1,s} \leq C_7(||f|| + ||f||^{\rho+1}) ||u - w||,\ C_7 > 0, \forall w \in H_N. \tag{3.3.19}$$

Функция $u(x,t)$ представима в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x,t).$$

Имеем равенство

$$(-1)^s D_t^{2s} u - \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

Отсюда следует соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = ||D_t^{2s} u + \Delta u||^2 \leq C_8[||f||^2 + ||f||^{2(\rho+1)}], \;\; C_8 \geq 0. \qquad (3.3.20)$$

Справедливо неравенство

$$||u - P_N u||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2,$$

из которого получаем оценку

$$||u - P_N u||^2 \leq C_9 \lambda_{N+1}^{-2}(||f||^2 + ||f||^{2(\rho+1)}), \; C_9 > 0. \qquad (3.3.21)$$

Теперь, полагая в неравенстве (3.3.19) $w = P_N u$ и учитывая оценки (3.3.20), (3.3.21), из (3.3.19) получаем (3.3.16) - оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Теорема 3.3.2 доказана.

Теорема 3.3.3 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.3.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^N||_{1,s} \leq C_{10}(||f|| + ||f||^{\rho+1})\lambda_{N+1}^{-1/4}, \; C_{10} > 0,$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (3.3.1)-(3.3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В правой части равенства (3.3.18) преобразуем второе слагаемое:

$$-\int\limits_Q k_{2s+1} D_t^{2s+1} u^N (u - w) dQ = \int\limits_Q D_t^{2s} u^N D_t[k_{2s+1}(u - w)] dQ. \qquad (3.3.22)$$

Далее, справедлива цепочка неравенств

$$||u_t||^2 \le T^{2s-2}||D_t^s u||^2 \le T^{2s-2}\int\limits_Q [(D_t^s u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2]dQ = T^{2s-2}\sum_{k=1}^\infty c_k^2\lambda_k.$$

Отсюда при $w = P_N u$ получаем неравенство

$$||u_t - w_t||^2 \le T^{2s-2}\lambda_{N+1}^{-1}\sum_{k=N+1}^\infty c_k^2\lambda_k^2. \qquad (3.3.23)$$

Теперь, учитывая равенство (3.3.22) и оценки (3.3.20), (3.3.21), (3.3.23), из соотношения (3.3.18) нетрудно получить оценку погрешности теоремы 3.3.3. Теорема доказана.

Замечание 3.3.1 *Не удается установить ограниченность последовательности* $k_{2s+1}D_t^{2s+1}u^N$ *в пространстве* $L_2(Q)$.

Замечание 3.3.2 *Результаты теорем 3.3.1, 3.3.2 справедливы при* $s = 1$, *если коэффициент* k_{2s+1} *не зависит от* x, *т.е.* $k_{2s+1}(x,t) = k_{2s+1}(t)$.

Заключение

В диссертации с помощью стационарного метода Галеркина проведено исследование разрешимости краевых задач для линейных и нелинейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени: первого, третьего и нечетного порядков по времени:

– Получены глобальные априорные оценки по всей области для приближенных решений, построенных по стационарному методу Галеркина.

– Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для исследуемых уравнений: линейных уравнений с меняющимся направлением времени первого и нечетного порядков, полулинейных уравнений с меняющимся направлением времени первого и нечетного порядков, а также нелинейного неклассического уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени.

– Для исследуемых уравнений получены оценки погрешности стационарного метода Галеркина через собственные значения самосопряженной спектральной задачи, собственные функции которой выбираются в качестве базисных при построении приближенных решений. Это стало возможным благодаря тому, что априорные оценки приближенных решений получены сразу во всей области, в которой рассматриваются уравнения.

Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, представляют теоретический интерес и могут быть использованы для постановки новых задач и в дальнейших исследованиях в теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики.

Список литературы

[1] Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский – Москва: Наука, 1975. – 480 с.

[2] Бубнов, Б.А. Корректность смешанной задачи для одного класса ультрагиперболических уравнений 1 / Б.А. Бубнов // Неклассические задачи уравнений математической физики. – Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 1982. – С. 42-48.

[3] Бубнов, И.Г. Избранные труды / И.Г. Бубнов – Ленинград: Судпромгиз., 1956. – 493 с.

[4] Виноградова, П.В. Метод Галеркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 242–249.

[5] Виноградова, П.В. Оценки погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 9. – С. 1643–1651.

[6] Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. – 84 с.

[7] Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас – Москва: Мир, 1978. – 336 с.

[8] Галеркин, Б.Г. Собрание сочинений / Б.Г. Галеркин – М.: Издательство АН СССР, 1953 – Т. 2. – 440 с.

[9] Глазатов, С.Н. О разрешимости неклассических краевых задач для дифференциальных уравнений переменного типа / С.Н. Глазатов // Некласс. ур. мат.-физ.: IV Сиб. конгресс по прикладной и индустриальной мат. (ИНПРИМ-2000), посв. М.А. Лаврентьеву (Новосибирск, 26 июня - 1 июля, 2000 г.) – Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2000. – С. 18–24.

[10] Глушко, В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко // Итоги науки. Матем. анализ. – 1985. – Т. 23. – С. 125–218.

[11] Дубинский, Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка / Ю.А. Дубинский // Успехи математических наук. – 1968. – Т. XXIII, В. 1 (139). – С. 45–90.

[12] Дубинский, Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю.А. Дубинский // В книге: "Современные проблемы математики". – Москва: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5–130

[13] Джишкариани, А.В. О быстроте сходимости метода Бубнова-Галеркина / А.В. Джишкариани // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 2. – С. 343–348.

[14] Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.

[15] Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально–операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

[16] Егоров, И.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров – Новосибирск: Издательство ВЦ СО РАН, 1995. – 133 с.

[17] Егоров, И.Е. Нелокальные краевые задачи для дифференциально–операторного уравнения смешанного типа / И.Е. Егоров // Уч. зап. Якутск. ун-та. – 1994. Сер.: матем., физ. – С. 18–24.

[18] Егоров, И.Е. О методе Галеркина для эллиптико-параболических уравнений / И.Е. Егоров, П.И. Степанова // Математические заметки ЯГУ. – 2008. – Т. 15, вып. 2. – С. 19–26.

[19] Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для нелинейного неклассического уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 19–27.

[20] Егоров, И.Е. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для вырождающегося параболического уравнения / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 1. – С. 27–33.

[21] Егоров, И.Е. Приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики / И.Е. Егоров – Якутск: ЯГУ, 1981. – 96 с.

[22] Егоров, И.Е. Применение метода Галеркина к третьей краевой задаче для эллиптико-параболического уравнения / И.Е. Егоров // Математические заметки ЯГУ. – 2009. – Т. 16, вып. 1. – С. 22–27.

[23] Егоров, И.Е. Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, вып. 2. – С. 41–46.

[24] Ефимова, Е.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для вырождающегося параболического уравнения / Е.С. Ефимова // Материалы XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2012". [Электронный ресурс] – Москва, 2012. – С. 1.

[25] Ефимова, Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка / Е.С. Ефимова, Г.Е. Семенова // Тезисы докладов III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации". – Якутск, 2012. – С. 101–102.

[26] Ефимова, Е.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Белгород, 2013. – С. 76.

[27] Ефимова, Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к нелинейному неклассическому уравнению третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова // Материалы

XXI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2014". [Электронный ресурс] – Москва, 2014. – С. 1.

[28] Ефимова, Е.С. Стационарный метод Галеркина для полулинейного неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова // Тезисы докладов VIII Международной конференции по математическому моделированию. – Якутск, 2017. – С. 38.

[29] Ефимова, Е.С. Стационарный метод Галеркина для полулинейного неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 1. – С. 16–23.

[30] Ефимова, Е.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова, И.Е. Егоров, М.С. Колесова // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2014. – Т.14, № 3. – С. 43–49.

[31] Ефимова, Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка / Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, Вып. 2. – С. 32–38.

[32] Ефимова, Е.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для вырождающегося параболического уравнения / Е.С. Ефимова // Сборник статей научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "XVI Лаврентьевские чтения". – Якутск, 2012. – С. 19–24.

[33] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[34] Кальменов, Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Т.Ш. Кальменов // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 8. – С. 1418–1425.

[35] Камынин, Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями / Л.И. Камынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 6.– С. 1006–1024.

[36] Катрахов, В.В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений / В.В. Катрахов // Матем. сб. – 1980. – Т. 112, № 3. – С. 354–379.

[37] Келдыш, М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач / М.В. Келдыш // Известия АН СССР, серия "Математика". – 1942. – Т. 6. – С. 309–330.

[38] Кислов, Н.В. Краевая задача с обобщенными условиями склейки для уравнения параболического типа / Н.В. Кислов, И.С. Пулькин // Вестник МЭИ. – 2000. – № 6. – С. 51–59.

[39] Кислов, Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально - операторного уравнения смешанного типа и их приложения / Н.В. Кислов // Математический сборник. – 1984. – Т. 125, Вып. 1. – С. 19–37.

[40] Кожанов, А.И. Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка / А.И. Кожанов // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 1. – С. 86–92.

[41] Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1999. – 132 с.

[42] Кожанов, А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7, № 1 (17). – С. 51–60.

[43] Кожанов, А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А.И. Кожанов // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35, № 2. – С. 359–376.

[44] Кузьмин, А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике / А.Г. Кузьмин - Ленинград: Издательство ЛГУ, 1990. – 204 с.

[45] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики. / О.А. Ладыженская – Москва: Наука, 1973. – 407 с.

[46] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

[47] Лажетич, Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка / Н.Л. Лажетич // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1072–1077.

[48] Ларькин, Н.А. Нелинейные уравнения переменного типа / Н.А. Ларькин, В.А. Новиков, Н.Н. Яненко – Новосибирск: Наука, 1983. – 170 с.

[49] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс – М.: Мир, 1973. – 588 с.

[50] Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин – Москва: Наука, 1970. – 512 с.

[51] Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.

[52] Моисеев, Е.И. О теоремах единственности для уравнений смешанного типа / Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук СССР. – 1978. – Т. 242, № 1. – С. 48–51.

[53] Нахушев, А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев – М.: Наука, 2006. – 287 с.

[54] Нахушев, А.М. О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 1. – С. 130–135.

[55] Олейник, О.А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Радкевич – М.: Издательство МГУ, 2010.

[56] Петров, Г.И. Оценка погрешности приближенно вычисленных собственных значений методом Галеркина / Г.И. Петров // ПММ. – 1957. – Т. 21. – С. 184.

[57] Петров, Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / Г.И. Петров // ПММ. – 1940. – Т. 4. – С. 1–13.

[58] Петрушко, И.М. О параболических уравнениях 2-го порядка с меняющимся направлением времени / И.М. Петрушко, Е.В. Черных // Вестник Московского энергетического института. – 2003. – № 6. – С. 85–93.

[59] Пинигина, Н.Р. Гельдеровская гладкость решений краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / Н.Р. Пинигина, С.В. Попов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №2 (52). – С. 67–79.

[60] Пономарев, С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях / С.М. Пономарев // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 246, № 6. – С. 1303–1305.

[61] Попов, С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400, № 1. – С. 29–31.

[62] Попов, С.В. О разрешимости краевой задачи для одного уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / С.В. Попов // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Якутск: ЯНЦ СО АН СССР, 1989. – С. 39–47.

[63] Потапова С.В. Краевая задача для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции при $n \geq 4$ / С.В. Потапова, С.В. Попов // Математические заметки ЯГУ. – 2009. – Т. 16, вып. 1. – С. 32–55.

[64] Пятков, С.Г. О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.Г. Пятков // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 285, № 6. – С. 1322–1327.

[65] Пятков, С.Г. Об одном линейном уравнении неклассического типа высокого порядка. / С.Г. Пятков – Новосибирск: Препринт ИМ СО АН СССР, 1981. – 24 с.

[66] Пятков, С.Г. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.Г. Пятков, А.Г. Подгаев // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 3. – С. 184.

[67] Романко, В.К. Операционное исчисление и разрешимость граничных задач / В.К. Романко // Математические заметки. – 1979. – Т. 26, № 3. – С. 399–409.

[68] Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа. / М.С. Салахитдинов – Ташкент: ФАН, 1974. – 156 с.

[69] Смирнов, М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. / М.М. Смирнов – Минск: Высшая школа, 1977. – 160 с.

[70] Смирнов, М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов – М.: Наука, 1966. – 292 с.

[71] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов – Москва: Наука, 1970. – С. 296.

[72] Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев – М.: Наука, 1988. – 333 с.

[73] Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов – Новосибирск: Сиб. отд–ние АН СССР. Ин–т математики, 1982. – 168 с.

[74] Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов – Новосибирск: НГУ, 1973. – 144 с.

[75] Терсенов, С.А. Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения / С.А. Терсенов // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, № 6. – С. 1413–1430.

[76] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов – Новосибирск: Наука, 1985. – 105 с.

[77] Успенский, С.В. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям / С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин – Новосибирск: Наука, 1984. – 223 с.

[78] Фикера, Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений / Г. Фикера // Математика. – 1963. – Т. 7, № 6. – С. 99–121.

[79] Эдварс, Р. Функциональный анализ / Р. Эдварс – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

[80] Якубов, С.Я. Краевая задача с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка / С.Я. Якубов, Б.А. Алиев // Сибирский математический журнал. – 1985. – Т. 26, № 4. – С. 176–188.

[81] Beals, R. Half-range completeness for the Fokker-Planck equation / R. Beals, V. Protopopescu // Journal of Statistical Physics. – 1983. – V. 32, № 3. – pp. 565–584.

[82] Canfora, A. Esisteza ed unicita delle soluzion di problema al contorno relativo ad un equazione elliptice di ordine 2m / A. Canfora // Ricerche di Matematica. – 1976. – V. 25. – pp. 247–304.

[83] Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. 21. – pp. 155–160.

[84] Efimova, E.S. Error estimate for the stationary Galerkin method applied to a semilinear parabolic equation with alternating time direction / E.S. Efimova, I.E. Egorov, M.S. Kolesova // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 213, № 6. – pp. 838-843.

[85] Egorov, I.E. The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics / I.E. Egorov, V.E. Fedorov, I.M. Tikhonova, E.S. Efimova // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1907, 020011.

[86] Gevrey, M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique / M. Gevrey // J. Math. Appl. – 1913. – V. 9, № 6. – pp. 305–478.

[87] Gevrey, M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique / M. Gevrey // J. de Math. – 1914. – V. 10, № 6. – pp. 105–148.

[88] Lazetic, N. On a classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order / N. Lazetic // Publ. de l'Institut Mathematique, Nouvelle Serie. – 2000. – V. 67 (81), – pp. 53–75.

[89] Lvov, A.P. On solvability of a nonlocal boundary value problem for an equation with varying time direction / A.P. Lvov // Математические заметки ЯГУ. – 2001. – Т. 8, вып. 2. – С. 103–111.

[90] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

[91] Triebel, H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / H. Triebel – Berlin: VEB Deucher Verlag Wiss, 1977. – 528 p.