

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Бурмистрова Оксана Александровна

**УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНЫХ ПЛЕНОК
ЖИДКОСТИ И ВРАЩАЮЩИХСЯ ЖИДКИХ СЛОЕВ**

Специальность 01.02.05 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.
Пухначев Владислав Васильевич

Новосибирск — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	3
Глава 1. Слоистое течение для бесконечно протяженной вертикальной пленки жидкости	15
1.1 Постановка задачи	15
1.2 Плоское слоистое течение с постоянной толщиной	18
1.3 Задача об устойчивости слоистого решения	22
1.4 Численное исследование устойчивости методом ортогонализации	28
Глава 2. Равновесие и малые возмущения ограниченной по вертикали свободной пленки жидкости	36
2.1 Постановка задачи	36
2.2 Система уравнений в приближении тонкого слоя	39
2.3 Численное решение плоской стационарной задачи	43
2.4 Исследование устойчивости решения с постоянной толщиной	46
Глава 3. Термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра	55
3.1 Постановка задачи	55
3.2 Асимптотики нейтральных кривых для длинных волн	60
3.3 Асимптотики нейтральных кривых для коротких волн	62
3.4 Численные результаты	65
Заключение	73
Список литературы	75

Введение

Актуальность темы исследования

Изучение течений со свободной поверхностью является актуальной темой исследования, так как такие течения имеют много практических приложений. Для понимания процессов, происходящих в жидких слоях, важно исследовать в них конвективное движение. Под конвекцией понимается перемещение макроскопических частей жидкости, приводящее к переносу тепла и других физических величин [1; 2]. При этом существует два вида конвекции: естественная (свободная) конвекция, которая вызвана неоднородностью среды, и вынужденная, которая вызвана внешним механическим воздействием на среду.

Важную роль в неизотермических движениях со свободной поверхностью играет термокапиллярный эффект [3–5], обусловленный зависимостью поверхностного натяжения от температуры. При этом для достаточно тонких слоев жидкости термокапиллярная конвекция играет доминирующую роль [6].

Под жидкой пленкой понимается слой жидкости малой толщины по крайней мере с одной свободной поверхностью. Пленки жидкости применяются в таких аппаратах, как испарители, конденсаторы, электролизеры, абсорберы, кристаллизаторы [7]. В пищевой промышленности жидкие пленки используются для производства сахара, в нефтеперерабатывающей — при дистилляции горюче-смазочных материалов. Кроме того, пленки жидкости широко применяются в химической, энергетической и фармацевтической промышленности. В новых технологиях используются пленки различного масштаба, они применяются в мини- и микросистемах. Важным применением свободных пленок жидкости является технология опреснения соленой воды [8; 9]. Благодаря большой поверхности контакта при малых расходах жидкости, область применения пленок в различных технологиях велика и постоянно растет. Поэтому важно понимать процессы теплообмена и гидродинамику жидких пленок.

Еще одним примером движения жидкости со свободной поверхностью является жидкий слой на внутренней поверхности вращающегося цилиндра, важным применением которого является производство пластиковых труб [10]. Технологические аспекты данного вопроса обсуждаются в [11]. В процессе произ-

водства пластиковых труб возникают неровности, которые образуются вследствие неустойчивости течения. Таким образом, важно понимать механизмы развития неустойчивости жидкости на поверхности вращающегося цилиндра.

Степень разработанности темы исследования

Основные понятия теории устойчивости и исследование многих общих задач об устойчивости течений жидкости изложены в монографиях [12; 13]. Первой работой, посвященной термокапиллярной неустойчивости, является [14]. Там была решена задача об устойчивости плоского жидкого слоя, подогреваемого со стороны твердой стенки, в предположении, что свободная поверхность недеформируема. Подробный обзор работ об устойчивости неизотермических жидкостей представлен в [15]. Монографии [6; 16] посвящены исследованию конвективной устойчивости течений жидкости, изучено влияние на устойчивость различных осложняющих факторов. Устойчивость и ветвление равновесных состояний жидкости исследовано в [17; 18]. В монографиях [19; 20] изучены вопросы устойчивости неизотермических течений жидкости с поверхностью раздела и свободной поверхностью. Исследование устойчивости некоторых течений при совместном действии внешних и термокапиллярных сил выполнено в монографиях [21; 22].

Главным инструментом, позволяющим решать задачи о жидких пленках, является приближение тонкого слоя [23], основанное на том, что характерная длина возмущений много больше средней толщины пленки. Большая часть работ о неизотермических пленках жидкости рассматривает пленки, находящиеся на твердой поверхности или стекающие по стенке. В работе [24] экспериментально и теоретически исследовано влияние термокапиллярной конвекции в тонкой горизонтальной жидкой пленке на искривление свободной поверхности. Экспериментальная работа [25] посвящена изучению закономерностей формирования регулярных структур при стекании тонких пленок под действием термокапиллярного эффекта. В экспериментах [26] обнаружена неустойчивость пленки, стекающей по вертикальной стенке. Динамика неизотермических жидких пленок на подложке теоретически исследована в [27]. Работы [28; 29] посвящены термокапиллярной неустойчивости течений пленок по наклонной плоскости. В [30] изучен вопрос о подавлении термокапиллярной неустойчивости для стекающей по пластине жидкой пленки. Деформация жидкой пленки термокапиллярными

силами при стационарном течении по вертикальной пластине изучена в [31]. В работе [32] рассмотрена устойчивость течения неизотермической пленки на подложке, исследовано влияние термокапиллярного эффекта на область устойчивости в зависимости от числа Пекле. Влияние изменений внутренней энергии поверхности раздела на устойчивость течения для пленки, увлекаемой потоком газа, изучено в [33].

Течения жидких пленок с двумя свободными поверхностями (свободных пленок) менее изучены. Среди работ на данную тему можно выделить два основных класса: посвященные пленкам, содержащим поверхностно-активные вещества, и о пленках с неравномерно нагретыми свободными поверхностями. Движение свободных пленок, содержащих поверхностно-активные вещества, теоретически рассмотрено в [34; 35] и экспериментально в [36], в частности изучены механизмы утоньшения пленок.

В работах [37–40] в приближении тонкого слоя теоретически исследована деформация свободной жидкой пленки под действием термокапиллярных сил в условиях невесомости. При этом в [37] в предположении, что свободная поверхность является идеально теплопроводящей, получено уравнение для толщины пленки. В работе [38] изучено равновесие невесомой жидкой пленки, закрепленной по контуру, при этом рассмотрен как случай теплопроводящей, так и теплоизолированной свободной поверхности. Случай идеально теплоизолированной свободной поверхности детально исследован в работе [39], в плоском случае доказано существование стационарного решения и проведены численные расчеты. В работе [41] найдено представление решения системы уравнений, а также второе решение для системы, исследованной в [39]. Групповые свойства уравнений и инвариантные решения для бесконечно протяженной пленки исследованы в работе [40].

В теоретических работах [42; 43] в точной постановке рассмотрены деформация и разрыв тонкой жидкой пленки под действием концентрированной тепловой нагрузки при отсутствии гравитации, предложена схема численных расчетов в переменных вихрь — функция тока. В [44] для этой задачи исследуется влияние числа Прандтля на разрыв пленки.

В [45] экспериментально исследованы деформация и разрыв свободной горизонтальной пленки жидкости термокапиллярным движением. В экспери-

ментальных работах [8; 9] получены протяженные по длине свободные вертикальные жидкие пленки.

В экспериментах [46; 47] для горизонтальной свободной пленки, закрепленной по прямоугольному контуру, обнаружена неустойчивость течения, а также описаны ячеистые структуры, вызванные термокапиллярным эффектом. Эти результаты сравнивались с численными решениями уравнений Навье – Стокса и переноса тепла в [48], при этом в расчетах предполагалось, что свободные поверхности недеформируемы. В [49; 50] проводилось более подробное исследование режимов течения при малых числах Марангони. При этом в [49] также проведено численное моделирование в предположении плоских свободных границ. Влияние формы свободной поверхности на структуру течения для данной задачи экспериментально изучалось в [51]. В [52] наблюдалась неустойчивость течения в виде гидротермических волн.

В работе [53] проведено численное моделирование термокапиллярного течения в свободной жидкой пленке, натянутой на круговой контур, в условиях невесомости. В предположении недеформируемости свободной поверхности рассматривались три случая ее заданной формы: плоской, вогнутой и выпуклой. Влияние числа Прандтля на структуру течения изучалось в [54]. В [55] для случая свободной поверхности сферической формы численно исследованы колебательные термокапиллярные течения.

Следует заметить, что течения с двумя свободными поверхностями также возникают в геофизике (течение в мантии) [56; 57]. Однако эти задачи имеют другие масштабы, и неустойчивость в них определяется другими физическими факторами.

Первой работой о жидком слое на внешней поверхности вращающегося цилиндра является [58], где задача решалась в условиях невесомости. Там был исследован принцип смены устойчивости. В [59] для задачи в поле тяжести доказано существование стационарного решения в точной постановке, эволюционное уравнение динамики пленки получено в приближении тонкого слоя. Это уравнение позже изучалось в [60] и решалось в [61]. В [62] в приближении тонкого слоя плоская задача решалась численно. В работе [63] численно построены осесимметричные, а в [64] — плоские нетривиальные равновесные формы жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра.

Задача о жидком слое на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической полости впервые была теоретически рассмотрена в [65], где обнаружено, что от формы равновесия жидкости с цилиндрической свободной поверхностью могут ответвляться нетривиальные формы равновесия, получено условие ветвления в терминах бифуркационного значения числа Вебера. Эти формы равновесия были построены и исследованы на устойчивость в работе [66]. В [67] нетривиальные формы равновесия построены в случае горизонтально расположенного цилиндра, изучено влияние перепада давлений в жидкости и окружающей среде на форму слоя.

Также задача об изотермической жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра теоретически исследовалась в [68–79]. При этом в работах [68; 69] исследование проводилось без учета сил поверхностного натяжения. В [70; 71] изучалась плоская стационарная задача. При этом в [70] рассмотрены предельные случаи, в [71] задача решалась численно. В [72; 73] изучено влияние поверхностного натяжения на устойчивость пленки в случае плоской задачи в приближении тонкого слоя. В работе [74] проведено численное моделирование двумерного течения с помощью метода граничных элементов. Трехмерное течение на внутренней и внешней поверхностях цилиндра в приближении тонкого слоя исследовано в [75; 76]. В [77] в приближении тонкого слоя изучена устойчивость плоского решения относительно малых осесимметричных возмущений. Устойчивость плоской стационарной жидкой пленки относительно трехмерных возмущений исследована в [78]. В [79] проведено сравнение численных решений, полученных на основе модели Стокса с решениями, полученными в рамках приближения тонкого слоя.

В [80–83] задача о жидком слое на внутренней поверхности вращающегося цилиндра исследовалась экспериментально. При этом в [80] наблюдалось формирование жидких колец внутри цилиндра. Влияние значения угловой скорости на устойчивость течения исследовано в [81]. В [82] изучена устойчивость центрифугированного слоя маловязкой жидкости и влияние на нее инерционных волн. Устойчивость жидкого слоя при вибрациях исследована в [83].

Тепловая конвекция в центробежном поле для слоя жидкости, расположенного в зазоре между двумя вращающимися с одной скоростью коаксиальными цилиндрами, рассмотрена в работах [84–92]. При этом в [84] теоретически и

экспериментально исследована зависимость центробежного числа Рэлея от числа Тейлора. Также в данной работе теоретически предсказаны конвективные структуры в виде валов, ориентированных вдоль оси вращения, позже наблюдаемые в экспериментах [85]. Влияние гравитационного поля на течение изучалось в работах [86–88]. В [89] доказано, что кроме ранее обнаруженной стационарной конвекции для данной задачи может возникать колебательная неустойчивость. В работе [90] задача решалась для случая быстрого вращения, при этом число Экмана выбиралось в качестве малого параметра. В экспериментах [91] обнаружено, что в зависимости от направления градиента температуры тепловая конвекция может определяться двумя различными механизмами: центробежным и термовибрационным. В [92] экспериментально и теоретически изучены условия механического квазиравновесия, определены границы его устойчивости и формы критических движений.

Цели и задачи исследования

Целью работы является построение решений для неизотермических задач со свободной границей в полях внешних сил (гравитационном или центробежном) и исследование их на устойчивость. В ходе работы были решены следующие задачи об устойчивости:

- задача о слоистом течении бесконечно протяженной свободной жидкой пленки при совместном действии вертикальной силы тяжести и термокапиллярной силы;
- задача о равновесии свободной вертикальной пленки жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками;
- задача о термокапиллярной неустойчивости жидкости на внутренней поверхности цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Научная новизна

При решении задач были получены следующие новые результаты:

- для бесконечно протяженной вертикальной свободной жидкой пленки в случае плоского стационарного неизотермического слоистого течения с постоянной толщиной найдено и исследовано на устойчивость точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла. При различных значениях числа

Галилея и числа Био получено значение волнового числа, при котором течение становится неустойчивым;

- для неизотермической пленки жидкости, находящейся в продольном поле тяжести и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками, в приближении тонкого слоя получена система дифференциальных уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и температуру. Плоская стационарная задача численно решена при различных значениях краевого угла, близких к $\pi/2$. Решение с постоянной толщиной пленки исследовано на устойчивость аналитически и численно при различных значениях ускорения тяжести;

- для неизотермического слоя жидкости, находящейся на внутренней поверхности цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью, точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла исследовано на устойчивость. Построены нейтральные кривые. Исследована зависимость критического значения числа Марангони от числа Био, числа Рейнольдса и безразмерного радиуса цилиндра.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа носит теоретический характер. Получены и исследованы на устойчивость точные решения некоторых задач со свободной поверхностью. Работа вносит вклад в теорию гидродинамической устойчивости. Результаты исследования задач о свободной жидкой пленке, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил, помогают интерпретировать результаты экспериментов [8; 9], в результате которых получены пленки, которые могут быть использованы в технологии опреснения воды. Результаты решения задачи об устойчивости жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра позволяют понять некоторые механизмы развития неустойчивости при производстве пластиковых труб [11].

Методология и методы исследования

При решении поставленных задач использовались

- аппарат механики сплошных сред;
- теория дифференциальных уравнений, метод согласования асимптотических разложений;
- приближение тонкого слоя;

- методы гидродинамической теории устойчивости;
- численный метод стрельбы, метод ортогонализации, метод Рунге – Кутты, методы численного решения, реализованные в пакете Mathematica.

Положения, выносимые на защиту

Автор диссертационной работы защищает:

- построение и результаты исследования на устойчивость точного решения уравнений Навье – Стокса и переноса тепла для бесконечно протяженной свободной жидкой пленки при совместном действии вертикальной силы тяжести и термокапиллярной силы;
- вывод в приближении тонкого слоя уравнений для свободной вертикальной пленки жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками; построение стационарных решений при краевом угле, близком к $\pi/2$; результаты исследования на устойчивость пленки с постоянной толщиной;
- результаты исследования термокапиллярной неустойчивости слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается использованием известных моделей гидродинамики и математических методов теории устойчивости, применением апробированных численных методов. Корректность результатов численного решения подтверждается сравнением с аналитическими результатами в предельных случаях.

Доклады по теме работы были представлены и обсуждались

- на Всероссийской научной конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» с элементами школы молодых ученых (Ялта, 2016), где был получен диплом третьей степени;
- на Международной конференции «8th Conference of the International Marangoni Association» (Bad Honnef, Germany, 2016);
- на Всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова (Новосибирск, 2016);
- на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);

- на V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2014);
- на IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 2012);
- на XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2011), где был получен диплом первой степени;
- на XI Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики» (Новосибирск, 2010);
- на Всероссийской конференции «XXIX Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 2010);
- на конкурсе молодых ученых Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2016), где было присуждено призовое первое место;
- на конкурсе молодых ученых Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2017), где было присуждено призовое второе место;
- на семинаре под руководством чл.-корр. РАН В.В. Пухначева и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюка «Прикладная гидродинамика» Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2016, 2019);
- на семинаре под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова «Математические модели механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2018);
- на семинаре под руководством д.ф.-м.н. Д.А. Брацуна кафедры прикладной физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, 2018, 2019);
- на семинаре под руководством д.ф.-м.н. А.М. Блохина «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018);
- на семинаре под руководством д.ф.-м.н. О.А. Кабова лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (Новосибирск, 2018).

Результаты диссертационной работы опубликованы в 11 изданиях: 3 статьи в журналах из списка ВАК [93–95], 2 статьи в трудах конференций [96; 97] и 6 публикаций в сборниках тезисов докладов [98–103].

Исследования по теме диссертации проводились при поддержке

– Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00007 «Сопряженные задачи тепловой конвекции в условиях микрогравитации и в микромасштабах» (2010-2012 гг.) и № 13-01-00526 «Вязкие течения со свободными границами и проблема динамического краевого угла» (2013-2015 гг.));

– интеграционного проекта СО РАН – УрО РАН – ДВО РАН № 38 «Фундаментальные задачи конвекции в неоднородных средах: теория, эксперимент и новые приложения» (2012-2014 гг.);

– гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-8146.2016.1 «Аналитические методы для описания нелинейных волновых процессов в природных системах» (2016-2017 гг.).

Личный вклад

Автор диссертационной работы выполнял все аналитические и численные исследования поставленных задач самостоятельно. Все публикации в изданиях, рекомендованных ВАК, выполнены без соавторов.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из 86 страниц, в которые входят введение, три главы, заключение и список литературы. В работе 17 рисунков, 2 таблицы, а список литературы содержит 108 наименований.

Краткое содержание работы

В первой главе диссертационной работы рассматривается задача о бесконечно протяженной по вертикали свободной пленке жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил.

В параграфе 1.1 формулируется постановка задачи. В параграфе 1.2 в точной постановке получено решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла в виде плоского слоистого течения с постоянной толщиной. Приведены графики точного решения при различном задании расхода жидкости через поперечное сечение пленки. В параграфе 1.3 сформулирована задача об устойчивости решения, аналитически найдены собственные значения в нулевом по волновому

числу приближении. В параграфе 1.4 при малых волновых числах задача об устойчивости решена численно с помощью метода ортогонализации при различных значениях числа Галилея и числа Био. Найдены критические значения волнового числа.

Во второй главе рассматривается задача о неизотермической свободной жидкой пленке, находящейся в поле тяжести и ограниченной по вертикали твердыми стенками.

В параграфе 2.1 формулируется постановка задачи. В параграфе 2.2 в приближении тонкого слоя получена система трех дифференциальных уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и осредненную температуру. В параграфе 2.3 плоская стационарная задача решена численно методом стрельбы при краевом угле, близком к $\pi/2$. В параграфе 2.4 решение с постоянной толщиной пленки исследуется на устойчивость. Задача решается аналитически с помощью метода согласования асимптотических разложений, а также численно методом ортогонализации при различных значениях ускорения тяжести. Обнаружено, что инкремент возмущений является малым.

В третьей главе рассматривается задача о неизотермическом слое жидкости на внутренней поверхности цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

В параграфе 3.1 формулируется постановка задачи. Предполагается, что цилиндр является бесконечно протяженным, а сила тяжести отсутствует. Также считается, что слой достаточно тонкий, поэтому можно пренебречь силами плавучести, возникающими вследствие вращения. Решение с цилиндрической свободной поверхностью исследуется на устойчивость. По аналогии с задачей Пирсона ([14]), где изучалась термокапиллярная конвекция в плоском слое, считается, что свободная поверхность недеформируема. Число Марангони играет роль спектрального параметра. В параграфе 3.2 аналитически найдены асимптотики решения для длинных, а в параграфе 3.3 — для коротких волн. В параграфе 3.4 задача об устойчивости решена численно, построены нейтральные кривые при различных значениях числа Био, числа Рейнольдса и безразмерного радиуса цилиндрической полости. Найдены критические значения числа

Марангони и волнового числа. Проведено сравнение с задачей Пирсона, выявлена роль кривизны и вращения.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

Благодарности

Автор выражает большую благодарность своему научному руководителю чл.-корр. РАН Владиславу Васильевичу Пухначеву за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе. Также автор выражает благодарности д.ф.-м.н. Олегу Александровичу Кабову и д.ф.-м.н. Владимиру Васильевичу Кузнецову за ценные советы и замечания.

Глава 1. Слоистое течение для бесконечно протяженной вертикальной пленки жидкости

1.1 Постановка задачи

Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, которая занимает плоскую область $\Omega_t = \{x \in (-\infty, \infty); z \in (-h(x, t), h(x, t))\}$, где $z = \pm h(x, t)$ — неизвестные свободные поверхности (рисунок 1.1). Направление ускорения свободного падения $\mathbf{g} = (-g, 0)$ противоположно направлению оси x . Пусть $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости, p — давление жидкости, T — ее температура. Будем полагать, что течение симметрично относительно прямой $z = 0$. Также считаем, что слой достаточно тонкий, поэтому можно пренебречь силами плавучести [6].

Уравнения Навье – Стокса и переноса тепла запишутся в виде

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

$$T_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \chi\Delta T, \quad (1.3)$$

где ρ — плотность жидкости, ν — ее кинематический коэффициент вязкости, χ — коэффициент температуропроводности.

Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ линейно зависит от T :

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(T - T_0). \quad (1.4)$$

Здесь $\sigma_0 > 0$, $\kappa > 0$, $T_0 > 0$ — постоянные.

На свободной поверхности $z = h(x, t)$ задаются граничные условия

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad (1.5)$$

$$(p_0 - p)\mathbf{n} + 2\rho\nu D \cdot \mathbf{n} = -2K\sigma\mathbf{n} + \nabla_{\Gamma}\sigma, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \beta(T_\Gamma - T). \quad (1.7)$$

Здесь $D = (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций, $\nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ — поверхностный градиент,

$$\mathbf{n} = \frac{(-h_x, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2}}$$

— единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности,

$$K = \frac{-h_{xx}}{2(1 + h_x^2)^{3/2}}$$

— ее средняя кривизна, V_n — скорость ее перемещения в направлении \mathbf{n} , $p_0 = \text{const}$ — атмосферное давление, $\beta > 0$ — коэффициент межфазного теплообмена, T_Γ — температура окружающей среды, которая считается заданной. Условия (1.5) и (1.6) — это кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности соответственно, (1.7) — условие теплообмена с окружающей средой.

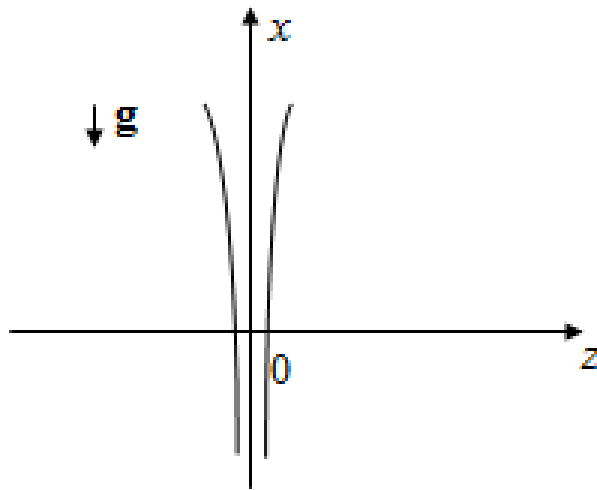


Рисунок 1.1 — Схема течения

1.2 Плоское слоистое течение с постоянной толщиной

Предположим, что движение стационарно, $w \equiv 0$, и пленка имеет постоянную толщину $2a$. Тогда задача (1.1)-(1.7) имеет решение

$$\begin{aligned} u &= \frac{g}{2\nu}z^2 + c, \quad p = p_0, \quad h = a, \\ T &= -bx - \frac{b}{\chi} \left(\frac{g}{24\nu}z^4 + \frac{cz^2}{2} \right) + f, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где c, b, f — постоянные.

Зададим расход жидкости через поперечное сечение пленки и обозначим его через $2q$. По определению

$$q \equiv \int_0^a u(z) dz = \frac{g}{6\nu}a^3 + ca, \quad (1.9)$$

откуда следует, что

$$c = \frac{q}{a} - \frac{ga^2}{6\nu}, \quad (1.10)$$

то есть постоянная c однозначно определяется заданным расходом.

Предположим сначала, что свободные поверхности идеально теплоизолированы, то есть в краевом условии (1.7) $\beta = 0$. Подставляя выражение для температуры из (1.8) в (1.7), получаем

$$c = -\frac{g}{6\nu}a^2. \quad (1.11)$$

Из соотношений (1.9), (1.11) следует, что $q = 0$.

Для того, чтобы найти решение с ненулевым расходом, для температуры зададим краевое условие третьего рода, то есть будем полагать, что в (1.7) $\beta \neq 0$. Из проекции (1.6) на касательную к свободной поверхности получаем соотношение между толщиной пленки и производной температуры по переменной x :

$$\kappa b = \rho g a. \quad (1.12)$$

Полагая, что $T_\Gamma = -bx + T_0$, из (1.7) находим постоянную f :

$$f = \frac{b}{\chi} \left(\frac{q}{\beta} + \frac{a}{2} \left(q - \frac{ga^3}{12\nu} \right) \right) + T_0. \quad (1.13)$$

Следовательно, для замыкания модели в качестве входных параметров необходимо задавать расход жидкости через поперечное сечение пленки q и производную b температуры по переменной x (либо толщину пленки a). Для определенности будем задавать q и a .

На рисунках 1.2, 1.3 приведена зависимость скорости и температуры от z при различных значениях расхода q , где выбраны следующие значения параметров: $\sigma_0 = 0.075$ Н/м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\kappa = 2 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К), $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $g = 0.98$ м/с², $T_0 = 293$ К, $\beta = 5000$ м⁻¹, $x = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $a = 0.0001$ м. Как видно из рисунка 1.2, в зависимости от задаваемого расхода скорость может оставаться знакопостоянной, а может менять знак.

Замечание. Уравнение (1.3) может содержать в правой части диссипативный член ([104]) который для решения (1.8) имеет вид $\nu(c_p)^{-1}u_z^2$, где c_p — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении. Для воды она имеет значение $c_p = 4180$ Дж/(кг·К). Значит, при вышеуказанных значениях параметров диссипативный член равен $2.29 \cdot 10^{-4}$ К/с, поэтому пренебрежение им в уравнении переноса тепла оправдано.

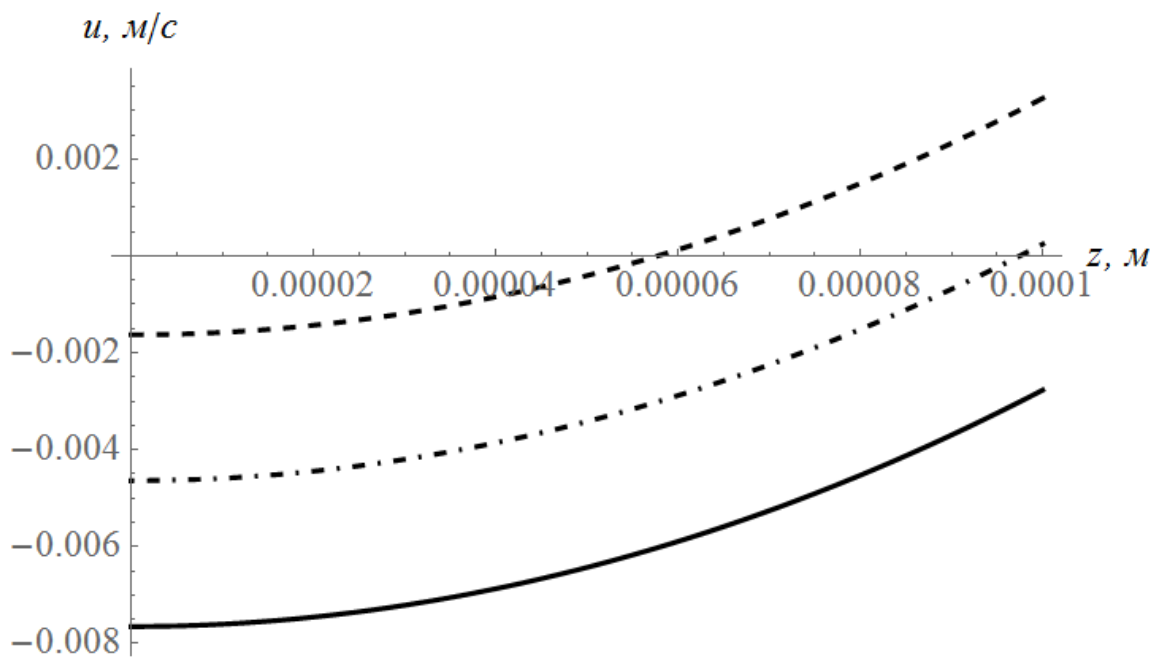


Рисунок 1.2 — Зависимость скорости от поперечной координаты при различных значениях расхода. Штриховая линия соответствует нулевому расходу, штрихпунктиная — $q = -3.01 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, сплошная — $q = -6.02 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

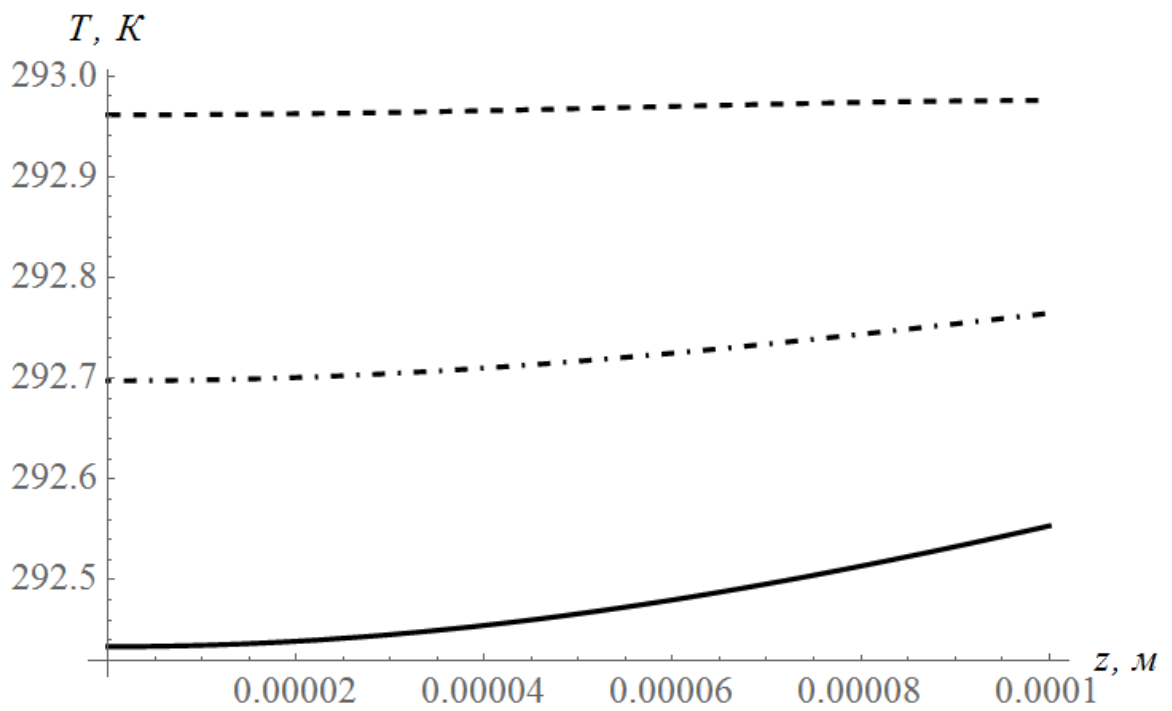


Рисунок 1.3 — Зависимость температуры от поперечной координаты при различных значениях расхода. Штриховая линия соответствует нулевому расходу, штрихпунктирная — $q = -3.01 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, сплошная — $q = -6.02 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

1.3 Задача об устойчивости слоистого решения

Пусть $\psi(t, x, z)$ – функция тока течения, то есть скалярная функция, удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$u = \psi_z, w = -\psi_x.$$

Тогда, исключая давление, уравнения (1.1)-(1.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{txx} + \psi_{tzz} + \psi_z(\psi_{xxx} + \psi_{xzz}) - \psi_x(\psi_{zzz} + \psi_{xxz}) = \\ = \nu(\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxzz} + \psi_{zzzz}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$T_t + \psi_z T_x - \psi_x T_z = \chi(T_{xx} + T_{zz}), \quad (1.15)$$

а граничные условия при $z = h(x, t)$ – в виде

$$h_t + \psi_z h_x = -\psi_x, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho\nu}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(h_x \left(-h_x(\psi_{zz} - \psi_{xx}) - 4\psi_{xz} \right) + \right. \\ \left. + \psi_{zz} - \psi_{xx} \right) = \sigma_x + h_x \sigma_z, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\psi_{tz} + \psi_z \psi_{xz} - \psi_x \psi_{zz} - \nu(\psi_{zzz} + \psi_{xxz}) + g \right) + \\ + \frac{2\rho\nu}{1+h_x^2} \left(-h_x(-h_x\psi_{xxz} + \psi_{xzz} - \psi_{xxx}) - h_{xx}(-2h_x\psi_{xz} + \right. \\ \left. + \psi_{zz} - \psi_{xx}) - \psi_{xxz} \right) - \frac{4\rho\nu h_x h_{xx}}{(1+h_x^2)^2} \left(-h_x(-h_x\psi_{xz} + \right. \\ \left. + \psi_{zz} - \psi_{xx}) - \psi_{xz} \right) = -2\sigma_x K - 2\sigma K_x, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\frac{-h_x T_x + T_z}{\sqrt{1+h_x^2}} = \beta(T_\Gamma - T). \quad (1.19)$$

Заметим, что скорости в решении с постоянной толщиной пленки (1.8) соответствует функция тока

$$\psi_0 = \frac{g}{6\nu} z^3 + cz. \quad (1.20)$$

Систему уравнений (1.14), (1.15) и краевые условия (1.16)-(1.19) линеаризуем на решении, заданном формулами (1.20), (1.8), (1.10), (1.12), (1.13). Получаем систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} & \psi_{txx} + \psi_{tzz} + \left(\frac{g}{2\nu} z^2 + c \right) (\psi_{xzz} + \psi_{xxx}) - \frac{g}{\nu} \psi_x = \\ & = \nu (\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxzz} + \psi_{zzzz}), \\ & T_t + \left(\frac{g}{2\nu} z^2 + c \right) T_x - b\psi_z + \frac{b}{\chi} \left(\frac{g}{6\nu} z^3 + cz \right) \psi_x = \chi (T_{xx} + T_{zz}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

с краевыми условиями при $z = a$

$$\begin{aligned} & \rho\nu \left(\psi_{zz} - \psi_{xx} + \frac{g}{\nu} h \right) = -\kappa T_x + \frac{\kappa b}{\chi} \left(\frac{g}{6\nu} a^3 + ca \right) h_x, \\ & \rho \left(-\psi_{tz} + \nu (\psi_{zzz} + \psi_{xxz}) - \left(\frac{g}{2\nu} a^2 + c \right) \psi_{xz} + \frac{g}{\nu} a \psi_x \right) + \\ & + 2\rho\nu \left(\frac{ga}{\nu} h_{xx} + \psi_{xxz} \right) = -h_{xxx} \left(\sigma_0 + \right. \\ & \left. + \kappa T_0 + \kappa \left(bx + \frac{b}{\chi} \left(\frac{g}{24\nu} a^4 + \frac{ca^2}{2} \right) - f \right) \right) - \kappa b h_{xx}, \\ & h_t + \left(\frac{g}{2\nu} a^2 + c \right) h_x = -\psi_x, \\ & h_x b + T_z - \frac{b}{\chi} \left(\frac{g}{2\nu} a^2 + c \right) h = -\beta \left(T - \frac{b}{\chi} \left(\frac{g}{6\nu} a^3 + ca \right) h \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x' = x/a, \quad z' = z/a, \quad \psi' = \psi/(Va), \quad t' = t/t^*,$$

$$h' = h/a, \quad T' = T/\theta,$$

где $t^* = \rho\nu a/(\kappa\theta)$, $V = \kappa\theta/(\rho\nu)$, θ — характерный перепад температур. Далее штрихи над безразмерными переменными опускаются. В безразмерных пере-

менных система уравнений (1.21) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (\psi_{txx} + \psi_{tzz}) + \left(\text{Re} - \frac{\text{Ga}}{6} + \frac{\text{Ga}}{2} z^2 \right) (\psi_{xzz} + \psi_{xxx}) - \text{Ga} \psi_x = \\ & = \psi_{xxxx} + 2\psi_{xxzz} + \psi_{zzzz}, \\ & \text{Ma} T_t + \left(\text{RePr} - \frac{\text{GaPr}}{6} + \frac{\text{GaPr}}{2} z^2 \right) T_x - \text{GaPr} \psi_z + \\ & + \left(\frac{\text{Ga}^2 \text{Pr}^2}{6} z^3 + \text{GaPr}^2 (\text{Re} - \text{Ga}) z \right) \psi_x = T_{xx} + T_{zz}, \end{aligned}$$

а граничные условия (1.22) превращаются в условия при $z = 1$:

$$\begin{aligned} & \psi_{zz} - \psi_{xx} + \frac{\text{GaPr}}{\text{Ma}} h = -T_x + \frac{\text{GaPr}^2 \text{Re}}{\text{Ma}} h_x, \\ & -\frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \psi_{tz} + 3\psi_{xxz} + \psi_{zzz} - \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \psi_{xz} + \text{Ga} \psi_x + 3\frac{\text{GaPr}}{\text{Ma}} h_{xx} = \\ & = -h_{xxx} \left(\text{Cr}^{-1} + \frac{\text{GaPr}}{\text{Ma}} x - \frac{\text{RePr}^2 \text{Ga}}{\text{MaBi}} \right), \\ & h_t + \left(\frac{\text{GaPr}}{3\text{Ma}} + \frac{\text{RePr}}{\text{Ma}} \right) h_x = -\psi_x, \\ & T_z + \text{Bi} T + \frac{\text{GaPr}}{\text{Ma}} h_x - \frac{\text{GaPr}^2}{\text{Ma}} \left(\frac{\text{Ga}}{3} + \text{Re}(1 + \text{Bi}) \right) h = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Ma} = \kappa \theta a / (\rho \nu \chi)$ — число Марангони, $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля, $\text{Ga} = g a^3 / \nu^2$ — число Галилея, $\text{Re} = q / \nu$ — число Рейнольдса, $\text{Bi} = \beta a$ — число Био, параметр $\text{Cr} = \kappa \theta / \sigma_0$ описывает деформируемость свободной границы термокапиллярными силами. Заметим, что в силу (1.12) имеет место соотношение

$$\text{Ga} = \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}}. \quad (1.23)$$

Решение задачи для возмущений ищем в виде

$$\psi = \varphi(z) e^{\lambda t + i k x}, \quad T = \xi(z) e^{\lambda t + i k x}, \quad h = A e^{\lambda t + i k x},$$

где $k > 0$ — волновое число, λ — комплексный параметр. Для функций φ , ξ , A , с учетом равенства (1.23), получаем систему обыкновенных дифференциальных

уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)} - \left(\lambda \text{Ga} + ik \left(\text{Re} - \frac{\text{Ga}}{6} + \frac{\text{Ga}}{2} z^2 \right) + 2k^2 \right) \varphi'' + \\ + \left(ik \text{Ga} + \text{Gak}^2 + ik^3 \left(\text{Re} - \frac{\text{Ga}}{6} + \frac{\text{Ga}}{2} z^2 \right) + k^4 \right) \varphi = 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \xi'' - \left(\lambda \text{GaPr} + ik \left(\text{RePr} - \frac{\text{GaPr}}{6} + \frac{\text{GaPr}}{2} z^2 \right) + k^2 \right) \xi + \\ + \text{GaPr} \varphi' - ik \left(\frac{\text{Ga}^2 \text{Pr}^2}{6} z^3 + \text{GaPr}^2 (\text{Re} - \text{Ga}) z \right) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

со следующими краевыми условиями при $z = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi'' + k^2 \varphi + ik \xi + (1 - ik \text{RePr}) A = 0, \\ \varphi''' - \left(\lambda \text{Ga} + ik \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) + 3k^2 \right) \varphi' + ik \text{Ga} \varphi - \\ - \left(3k^2 - ik^3 \left(\text{Cr}^{-1} + x - \frac{\text{RePr}}{\text{Bi}} \right) \right) A = 0, \\ ik \varphi + \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right) A = 0, \\ \xi' + \text{Bi} \xi - \left(\text{Pr} \left(\frac{\text{Ga}}{3} + \text{Re}(1 + \text{Bi}) \right) - ik \right) A = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь и далее в данной главе штрих означает производную по переменной z .

Заметим, что во второе краевое условие (1.26) входит переменная x , поэтому, вообще говоря, переменные не разделяются. Однако согласно [15; 20] переменную x в этом условии можно зафиксировать, положив $x = 1/2$.

Система (1.24), (1.25) с краевыми условиями (1.26) является системой комплексных уравнений шестого порядка с переменными коэффициентами и несамосопряженным оператором. При этом собственное значение входит в краевые условия, а задача содержит несколько независимых параметров. Таким образом, данная спектральная задача решается только численно. Для этого аналитически ищется начальное приближение в случае длинных волн.

Разложим функции по малому параметру k :

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + \dots, \quad \xi = \xi_0 + k\xi_1 + \dots,$$

$$\lambda = \lambda_0 + k\lambda_1 + \dots, \quad A = A_0 + kA_1 + \dots,$$

и подставим данные разложения в уравнения (1.24), (1.25) и краевые условия (1.26). В нулевом порядке получаем краевую задачу для φ_0 и ξ_0 :

$$\varphi_0^{(4)} - \lambda_0 \text{Ga} \varphi_0'' = 0, \quad (1.27)$$

$$\xi_0'' - \lambda_0 \text{GaPr} \xi_0 = -\text{GaPr} \varphi_0', \quad (1.28)$$

$$\varphi_0''(1) = 0, \quad (1.29)$$

$$\varphi_0'''(1) - \lambda_0 \text{Ga} \varphi_0'(1) = 0, \quad (1.30)$$

$$\xi_0'(1) + \text{Bi} \xi_0(1) = 0. \quad (1.31)$$

Функция ξ_0 не входит в уравнение (1.27) и краевые условия (1.29), (1.30), из которых находятся φ_0 , λ_0 , то есть в нулевом порядке задача для гидродинамических возмущений отделяется. Уравнение (1.27) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, а искомая функция φ_0 имеет лишь два крайних условия, поэтому необходимо задать еще два крайних условия – условия четности. Для четных возмущений эти условия имеют вид

$$\varphi_0'(0) = \varphi_0'''(0) = 0,$$

для нечетных –

$$\varphi_0(0) = \varphi_0''(0) = 0.$$

Домножим уравнение (1.27) на $\bar{\varphi}_0''$ – функцию, комплексно-сопряженную функции φ_0'' , и проинтегрируем его по переменной z от 0 до 1. Используя формулу интегрирования по частям и учитывая условие (1.29), можно сделать вывод, что $\lambda_0 \leq 0$. В результате решения краевой задачи для φ_0 получаем следующие собственные значения и собственные функции:

– в случае четных возмущений

$$(\lambda_0)_n = -\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}{\text{Ga}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.32)$$

$$(\varphi_0)_n = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)z\right),$$

– в случае нечетных возмущений

$$(\lambda_0)_n = -\frac{(\pi n)^2}{\text{Ga}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.33)$$

$$(\varphi_0)_n = \sin(\pi n z).$$

Положим $\varphi_0 \equiv 0$ и рассмотрим спектральную задачу для тепловых возмущений. Для решения уравнения (1.28) зададим условие четности:

– для четных возмущений

$$\xi'_0(0) = 0,$$

– для нечетных возмущений

$$\xi_0(0) = 0.$$

Как и в случае собственных значений для функции тока, получаем $\lambda_0 \leq 0$. Решая краевую задачу (1.28), (1.31) для ξ_0 , в случае четных возмущений получаем выражение для собственных значений в неявном виде:

$$\text{ctg}\sqrt{-\lambda_0 \text{GaPr}} = \text{Bi}^{-1} \sqrt{-\lambda_0 \text{GaPr}},$$

в случае нечетных возмущений имеем

$$\text{tg}\sqrt{-\lambda_0 \text{GaPr}} = -\text{Bi}^{-1} \sqrt{-\lambda_0 \text{GaPr}}.$$

Поскольку во всех случаях значения λ_0 вещественны и отрицательны, длинноволновые возмущения функции тока и температуры являются устойчивыми.

1.4 Численное исследование устойчивости методом ортогонализации

Следуя алгоритму, предложенному одновременно и независимо в работах [105] и [106], продолжим решение для возмущений по малому параметру k . Зададим некоторое достаточно малое значение волнового числа k и запишем систему (1.24), (1.25) в виде

$$\mathbf{y}' = M(z, \lambda) \cdot \mathbf{y}, \quad (1.34)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \\ \varphi' \\ \varphi'' \\ \varphi''' \\ \xi' \end{pmatrix}, \quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{51} & 0 & 0 & m_{54} & 0 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{51} = - \left(ik\text{Ga} + \lambda\text{Ga}k^2 + ik^3 \left(\text{Re} - \frac{\text{Ga}}{6} + \frac{\text{Ga}}{2}z^2 \right) + k^4 \right),$$

$$m_{54} = \lambda\text{Ga} + ik \left(\text{Re} - \frac{\text{Ga}}{6} + \frac{\text{Ga}}{2}z^2 \right) + 2k^2,$$

$$m_{61} = ik \left(\frac{\text{Ga}^2 \text{Pr}^2}{6} z^3 + \text{GaPr}^2 (\text{Re} - \text{Ga}) z \right),$$

$$m_{62} = \lambda\text{GaPr} + ik \left(\text{RePr} - \frac{\text{GaPr}}{6} + \frac{\text{GaPr}}{2}z^2 \right) + k^2, \quad m_{63} = -\text{GaPr}.$$

Собственные значения в нулевом порядке вещественны, следовательно,

$$\lambda \neq -ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right).$$

Тогда толщину пленки A можно исключить из краевых условий с помощью третьего граничного условия (1.26). Краевые условия при $z = 1$ принимают

вид

$$D(\lambda) \cdot \mathbf{y}(1) = \mathbf{0}, \quad (1.35)$$

где

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = -ik(1 - ik\text{RePr}) + k^2 \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right),$$

$$d_{12} = ik \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right), \quad d_{14} = \lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right),$$

$$d_{21} = ik \left(3k^2 - ik^3 \left(\text{Cr}^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{\text{RePr}}{\text{Bi}} \right) \right) +$$

$$+ ik\text{Ga} \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right),$$

$$d_{23} = - \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right) \left(\lambda\text{Ga} + ik \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) + 3k^2 \right),$$

$$d_{25} = \lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right),$$

$$d_{31} = ik \left(\text{Pr} \left(\frac{\text{Ga}}{3} + \text{Re}(1 + \text{Bi}) \right) - ik \right),$$

$$d_{32} = \text{Bi} \left(\lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right) \right), \quad d_{36} = \lambda + ik \frac{1}{\text{Ga}} \left(\text{Re} + \frac{\text{Ga}}{3} \right).$$

Из уравнения (1.25) следует, что функции φ и ξ имеют разную четность. Краевое условие при $z = 0$ имеет вид

$$B \cdot \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad (1.36)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

в случае четных возмущений функции тока и нечетных возмущений температуры и

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

в случае нечетных возмущений функции тока и четных возмущений температуры.

Рассмотрим полную систему линейно независимых векторов, для которых выполняется условие (1.36), и обозначим их через $\mathbf{y}_1(0)$, $\mathbf{y}_2(0)$, $\mathbf{y}_3(0)$. Для (1.37) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_3(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

в случае (1.38) —

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_3(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решения системы, принимающие при $z = 0$ значения $\mathbf{y}_j(0)$ ($j = 1, 2, 3$), обозначим через \mathbf{y}_j ($j = 1, 2, 3$) и найдем эти решения численно с помощью метода Рунге – Кутты четвертого порядка. При этом в точках остановки будем проводить ортогонализацию векторов \mathbf{y}_j методом Грама – Шмидта, что препятствует «сплющиванию» векторов.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (1.35), будем искать решение в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \mathbf{y}_j, \quad (1.39)$$

где α_j ($j = 1, 2, 3$) — постоянные.

Подставляя (1.39) в (1.35), для параметра λ получаем условие, при котором задача имеет нетривиальное решение:

$$\det \begin{pmatrix} D(\lambda) \cdot \mathbf{y}_1(1) & D(\lambda) \cdot \mathbf{y}_2(1) & D(\lambda) \cdot \mathbf{y}_3(1) \end{pmatrix} = 0. \quad (1.40)$$

Для того, чтобы при заданном k найти значение λ , удовлетворяющее условию (1.40), используем метод секущих, где в качестве начальных приближений берутся значения λ , близкие к найденным в предыдущем параграфе λ_0 (для случая (1.32) берется $n = 0$, для случая (1.33) — $n = 1$).

Как показали расчеты (инкременты возмущений λ_r в зависимости от k для случаев (1.37) и (1.38) представлены на рисунке 1.4), наиболее опасными являются возмущения, для которых амплитуда функции тока является четной, то есть случай (1.37). Поэтому далее будут исследоваться именно такие возмущения.

На рисунках 1.5 и 1.6 приведены графики зависимости вещественной λ_r и мнимой λ_i частей собственных значений соответственно от волнового числа при различных Ga . При этом брались следующие значения параметров: $\text{Pr} = 7.18$, $\text{Vi} = 0.1$, $\text{Re} = -1$. Как видно из рисунка 1.5, критическое значение волнового числа уменьшается с возрастанием Ga .

На рисунке 1.7 приведены графики зависимости λ_r от волнового числа при различных Vi . При этом брались следующие значения параметров: $\text{Pr} = 7.18$, $\text{Ga} = 0.97$, $\text{Re} = -1$. Таким образом, критическое значение волнового числа увеличивается с возрастанием Vi . При этом графики для λ_i при различных значениях Vi практически совпадают и здесь не приводятся.

Замечание 1. В данной главе рассматривалась задача о бесконечно протяженной по x пленке, а температура в точном решении линейно зависит от x , что не имеет физического смысла. Однако неустойчивость возникает при конечной длине волны (порядка миллиметра), поэтому постановка рассмотренной задачи имеет смысл.

Замечание 2. Устойчивость при больших волновых числах не изучалась. Но можно предполагать, что решение будет устойчивым относительно коротковолновых возмущений благодаря стабилизирующему влиянию капиллярности.

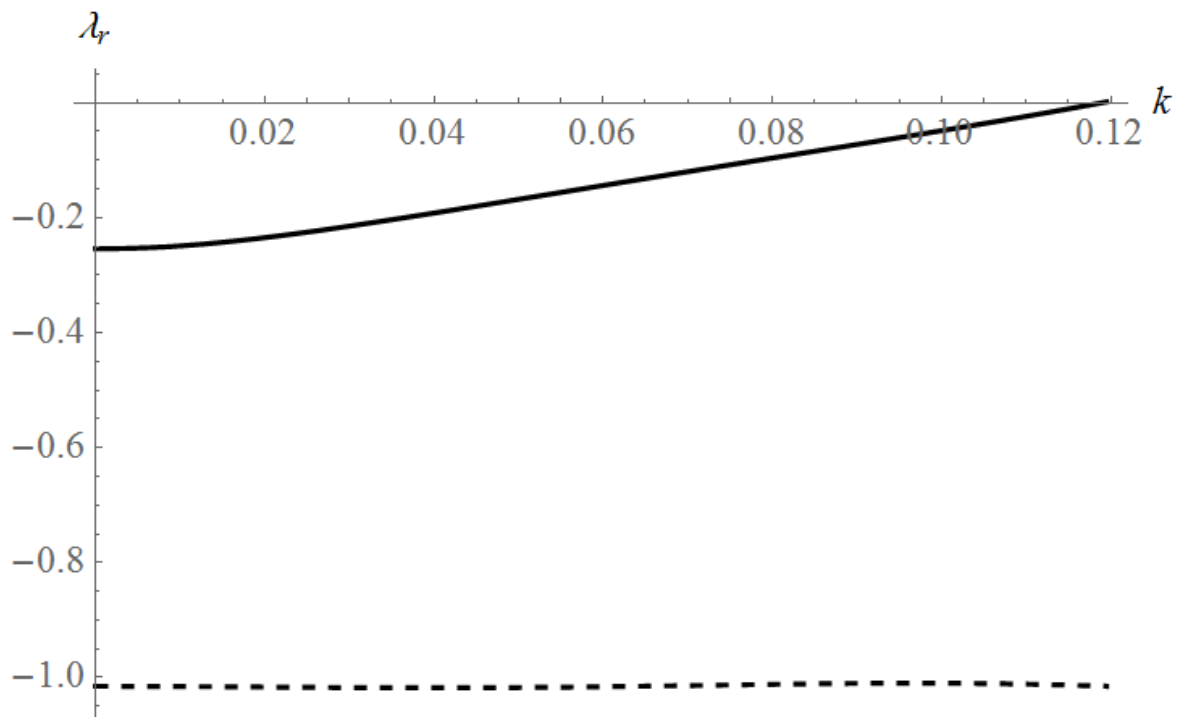


Рисунок 1.4 — Зависимость инкрементов возмущений от волнового числа при $Ga = 9.72$, $Pr = 7.18$, $Bi = 0.2$, $Re = -0.1$. Сплошная линия соответствует случаю (1.37), штриховая — случаю (1.38).

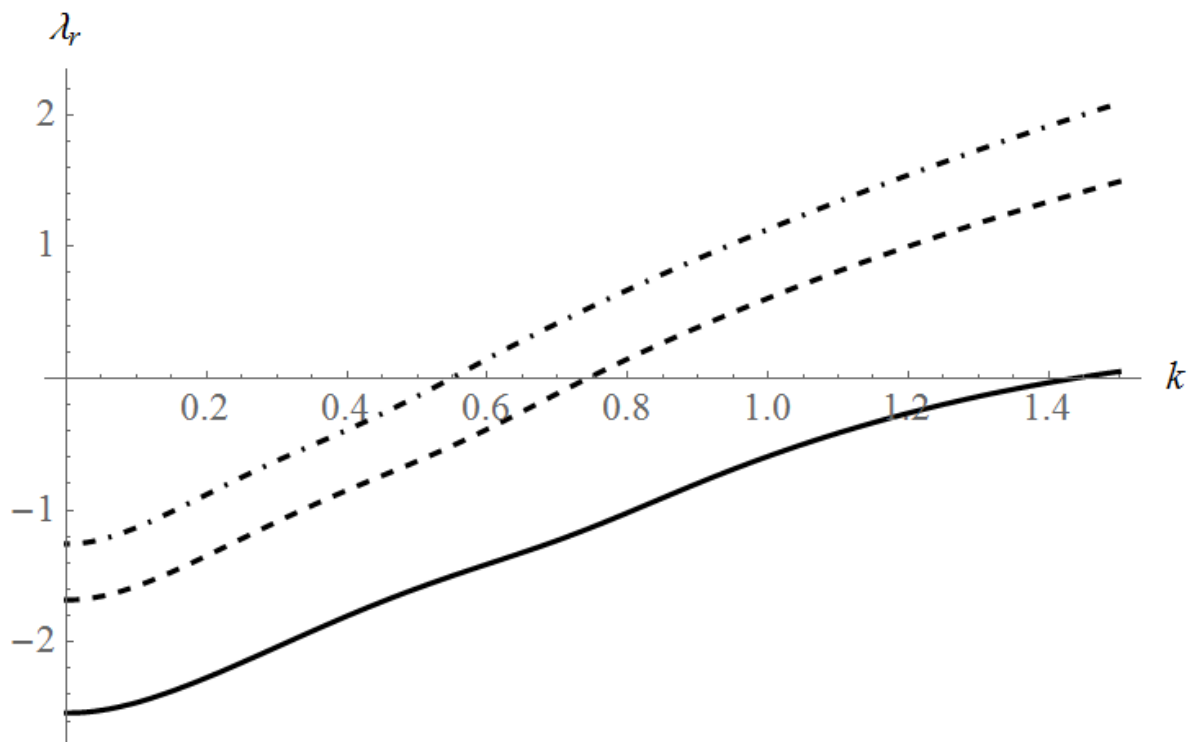


Рисунок 1.5 — Зависимость инкрементов возмущений от волнового числа при различных значениях числа Галилея. *Сплошная линия соответствует $Ga = 0.97$, штриховая — $Ga = 1.47$, штрихпунктирная — $Ga = 1.96$.*

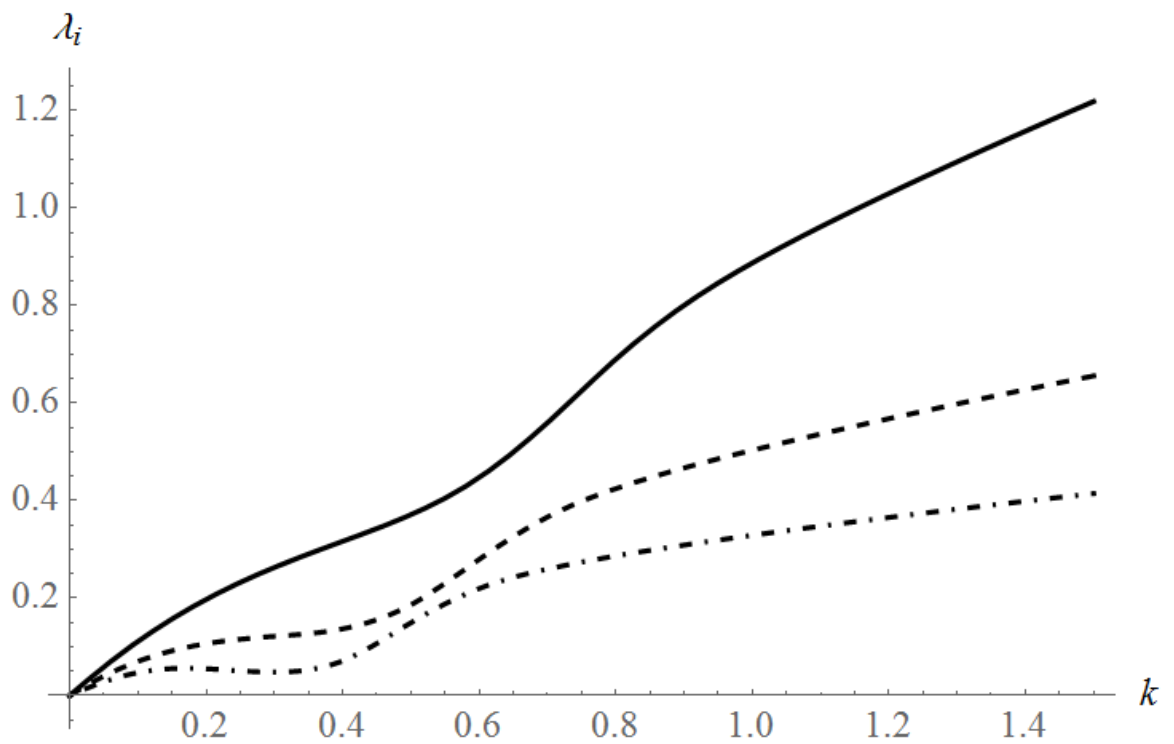


Рисунок 1.6 — Зависимость частот возмущений от волнового числа при различных значениях числа Галилея. *Сплошная линия соответствует $Ga = 0.97$, штриховая — $Ga = 1.47$, штрихпунктирная — $Ga = 1.96$.*

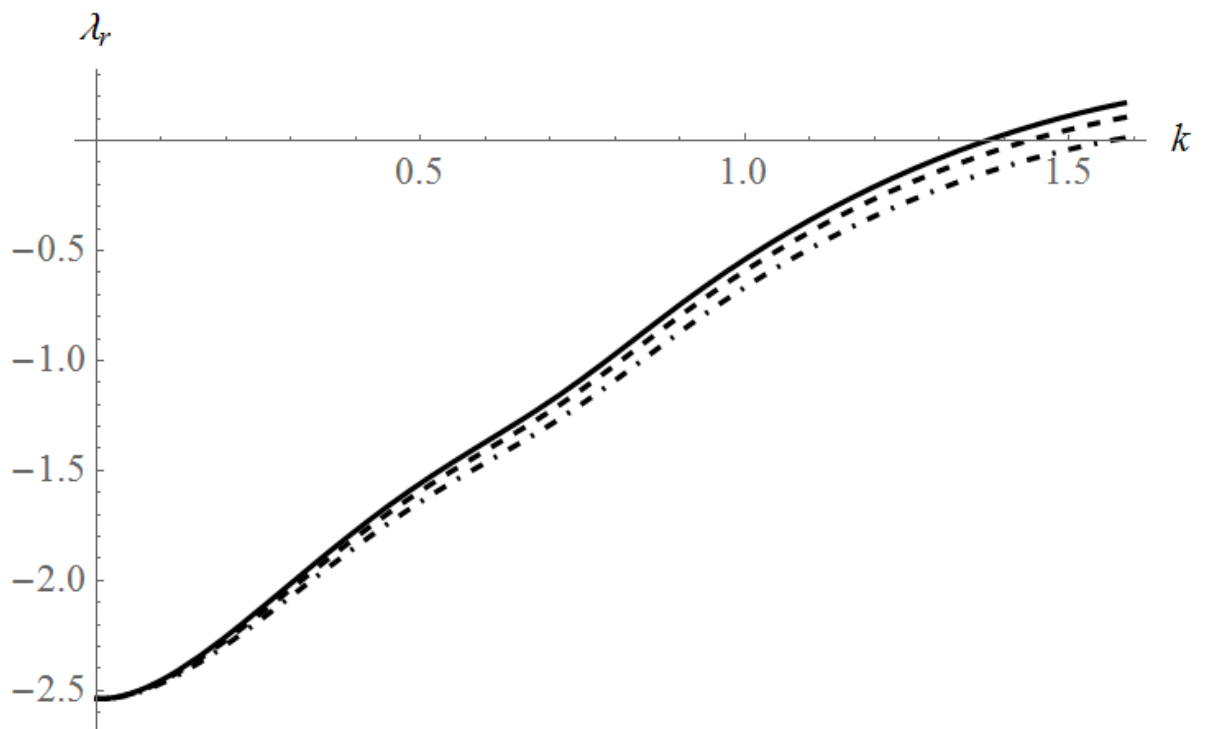


Рисунок 1.7 — Зависимость инкрементов возмущений от волнового числа при различных значениях числа Био. *Сплошная линия соответствует $Bi = 0.03$, штриховая — $Bi = 0.1$, штрихпунктирная — $Bi = 0.2$.*

Глава 2. Равновесие и малые возмущения ограниченной по вертикали свободной пленки жидкости

2.1 Постановка задачи

Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, заполняющая слой $\Omega_t = \{x \in (0, l); y \in (-\infty, \infty); z \in (-h(x, y, t), h(x, y, t))\}$. При этом $z = \pm h(x, y, t)$ — неизвестные свободные поверхности, а при $x = 0$ и $x = l$ жидкость граничит с твердыми стенками (сечение пленки плоскостью $y = 0$ схематически представлено на рисунке 2.1). Для жидкого слоя выполняются уравнения Навье – Стокса и переноса тепла (1.1)–(1.3) и краевые условия (1.5)–(1.7) на свободной поверхности $z = h(x, y, t)$. При этом вместо двумерных градиента и лапласиана в уравнениях присутствуют трехмерные градиент ∇_3 и лапласиан Δ_3 , а единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности и средняя кривизна имеют вид

$$\mathbf{n} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}$$

и

$$K = -\frac{h_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + h_x^2) - 2h_{xy}h_xh_y}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}$$

соответственно. Вектор скорости имеет компоненты $\mathbf{v} = (u, v, w)$, ускорение тяжести — компоненты $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$. Течение по-прежнему предполагается симметричным относительно плоскости $z = 0$. На твердых поверхностях задается условие прилипания

$$\mathbf{v} = 0 \quad (x = 0, \quad x = l) \tag{2.1}$$

и условия для температуры. Это либо условия второго рода

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= Q_1 \quad (x = 0), \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_2 \quad (x = l),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где Q_1, Q_2 — заданные тепловые потоки на нижней и верхней стенке соответственно, либо условия первого рода

$$\begin{aligned}T &= T_{1S} \quad (x = 0), \\ T &= T_{2S} \quad (x = l),\end{aligned}\tag{2.3}$$

где T_{1S}, T_{2S} — температуры нижней и верхней стенки соответственно. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры по-прежнему имеет вид (1.4).

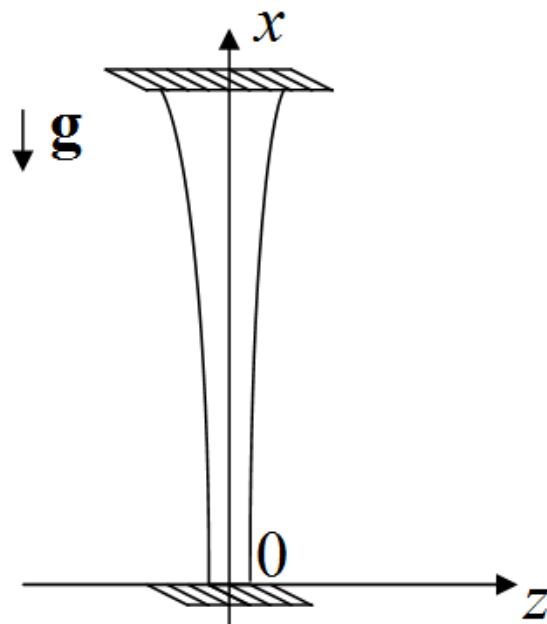


Рисунок 2.1 — Схема к постановке задачи в плоскости $y = 0$.

2.2 Система уравнений в приближении тонкого слоя

Задачу будем решать в приближении тонкого слоя ([37]), то есть считаем, что продольный масштаб много больше поперечного, и предполагаем, что $\max h = \varepsilon l$, $|\nabla h| = O(\varepsilon)$, $l\Delta h = O(\varepsilon)$, $w(u^2 + v^2)^{-1/2} = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ∇ и Δ – градиент и лапласиан соответственно по переменным x и y . В обозначениях, принятых в предыдущей главе, предположим также, что $\text{Cr} = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Осредняя уравнения движения (1.1)–(1.3) по z , получим систему дифференциальных уравнений, связывающих двумерный вектор расхода жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и температуру. Первые два уравнения выводятся по аналогии с работой [37], где рассматривалась задача о пленке, находящейся в невесомости, с заданной температурой свободной поверхности.

Определим функцию \tilde{p} следующим образом:

$$\tilde{p} = p + \rho g x - p_0.$$

Введем безразмерные переменные:

$$x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad u' = u/V, \quad v' = v/V, \quad z' = z/(\varepsilon l), \quad w' = w/(\varepsilon V),$$

$$t' = t/t^*, \quad \tilde{p}' = \tilde{p}/p^*, \quad h' = h/(\varepsilon l), \quad T' = T/\theta,$$

где, $t^* = \rho \nu l / (\varepsilon \kappa \theta)$, $V = \varepsilon \kappa \theta / (\rho \nu)$, $p^* = \varepsilon \sigma_0 / l$, θ – характерный перепад температур. Далее будем опускать штрихи над безразмерными переменными.

Пусть $T^*(x, y, t)$ – осредненное по поперечной координате z температурное распределение в пленке:

$$T^*(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_0^h T(x, y, z, t) dz.$$

Проекция условия (1.6) на нормаль к свободной поверхности запишется в виде

$$-\tilde{p} + \frac{\rho g l^2}{\varepsilon \sigma_0} x = \Delta h + O(\varepsilon^2) \quad (z = h(x, y, t)), \quad (2.4)$$

проекция на касательную плоскость — в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial T^*}{\partial x} + O(\varepsilon^2) \quad (z = h(x, y, t)), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial T^*}{\partial y} + O(\varepsilon^2) \quad (z = h(x, y, t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Проекция уравнения (1.1) на ось z имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = O(\varepsilon^2). \quad (2.6)$$

Пусть $2q_1$ и $2q_2$ — расходы жидкости через поперечное сечение пленки в направлениях x и y соответственно:

$$q_1 = \int_0^h u dz, \quad q_2 = \int_0^h v dz.$$

Введем обозначения $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ и $\mathbf{u} = (u, v)$. Из уравнения (1.2) и условия (1.5) с учетом того, что течение симметрично относительно плоскости Oxy , следует

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.7)$$

В силу (2.6) можем считать, что соотношение (2.4) выполняется всюду в области течения. Тогда проекция уравнения (1.1) на плоскость Oxy запишется в виде

$$\varepsilon^3 \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} (\mathbf{u}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla_3) \mathbf{u}) = \frac{\varepsilon^2}{\text{Cr}} \nabla \Delta h + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \rho g l^2 (\kappa \theta)^{-1} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad (2.8)$$

где $\text{Ma} = \kappa\theta l / (\rho\nu\chi)$ — число Марангони, $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля. Предположим, что $\varepsilon^{-2}\text{Cr} \rightarrow \gamma \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда из (2.8) получаем

$$\delta(\mathbf{u}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla_3)\mathbf{u}) = \nabla\Delta h + \gamma \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma\varepsilon\rho gl^2(\kappa\theta)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где $\delta = \varepsilon\text{MaCr}/\text{Pr}$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соотношениях (2.5), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\nabla T^* \quad (z = h(x, y, t)). \quad (2.10)$$

Интегрируя (2.9) по отрезку $(0, h(x, y, t))$ оси z и используя равенство (2.10), получаем уравнение

$$\delta \mathbf{q}_t = h\nabla\Delta h - \gamma\nabla T^* + \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma\varepsilon\rho gl^2 h / \kappa\theta \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Возвращаясь к размерным переменным в уравнениях (2.11), (2.7), имеем

$$-\mathbf{q}_t + \frac{\sigma_0}{\rho} h\nabla\Delta h = \frac{\kappa}{\rho} \nabla T^* - \mathbf{g}h, \quad (2.12)$$

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.13)$$

Из условия непроницаемости твердых стенок, следует, что

$$\mathbf{q} = 0 \quad (x = 0, x = l). \quad (2.14)$$

Еще одна пара краевых условий получается заданием угла трехфазного контакта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \alpha_0 \quad (x = 0), \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \alpha_1 \quad (x = l), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где при выборе значений α_0 и α_1 должно выполняться условие $|\alpha_0|, |\alpha_1| \ll 1$.

Предположим, что свободная поверхность идеально теплоизолирована, то есть в краевом условии (1.7) положим $\beta = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (z = h(x, y, t)). \quad (2.16)$$

По теореме о среднем существуют $\xi \in [0, h]$ и $\eta \in [z, \xi]$ такие, что выполняется равенство

$$T(x, y, z, t) - T^*(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, \eta, t) \cdot (z - \xi).$$

Тогда с учетом неравенства $|z - \xi| \leq h \leq \varepsilon l$, условия (2.16) и того, что $|\nabla h| = O(\varepsilon)$, получаем

$$T = T^* + O(\varepsilon^2).$$

Проинтегрируем левую часть уравнения (1.3) по отрезку $[0, h]$:

$$\begin{aligned} \int_0^h (T_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla_3)T) dz &= hT_t^* + \mathbf{q} \cdot \nabla T^* + O(\varepsilon^2) = hT_t^* + \nabla \cdot (\mathbf{q}T^*) - \\ &- T \nabla \cdot \mathbf{q} + O(\varepsilon^2) = \nabla \cdot (\mathbf{q}T^*) + (hT^*)_t + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из уравнения (2.13).

Интегрируя правую часть (1.3), получаем

$$\int_0^h \chi \Delta_3 T dz = \chi h \Delta_3 T^* + O(\varepsilon^2).$$

Из условия (2.16) следует, что $\nabla h \cdot \nabla T^* = 0$. Поэтому $h \cdot \Delta T^* = \nabla \cdot (h \nabla T^*)$ и

$$\int_0^h \chi \Delta_3 T dx_3 = \chi \nabla \cdot (h \nabla T^*) + O(\varepsilon^2).$$

Пренебрегая членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и полагая $T(x, y, t) := T^*(x, y, t)$, приходим к уравнению

$$(hT)_t + \nabla \cdot (\mathbf{q}T) = \chi \nabla \cdot (h \nabla T). \quad (2.17)$$

В итоге получаем замкнутую систему уравнений (2.12), (2.13), (2.17), связывающую расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и температуру.

2.3 Численное решение плоской стационарной задачи

Рассмотрим плоскую стационарную задачу. В этом случае система (2.12), (2.13), (2.17) в безразмерных переменных запишется в виде

$$h'''h = \gamma(T' + \frac{\varepsilon\rho gl^2}{\kappa\theta}h), \quad (hT')' = 0, \quad q' = 0, \quad (2.18)$$

где штрих означает дифференцирование по x , а q — расход жидкости через поперечное сечение пленки в направлении x . С учетом краевых условий (2.14) получаем, что

$$q \equiv 0. \quad (2.19)$$

Заметим, что если в краевом условии (2.15) положить $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ (краевой угол равен $\pi/2$), то система (2.18) имеет решение с постоянной толщиной:

$$h = 1, \quad T = -x + c, \quad (2.20)$$

где c — постоянная. При этом условием существования такого решения является следующее соотношение между гравитацией и характерным перепадом температур:

$$\theta = \frac{\rho g \varepsilon l^2}{\kappa}. \quad (2.21)$$

Известно [17], что при постоянной температуре пленка не может иметь длину, существенно превышающую капиллярный радиус. Значит, градиент температуры помогает создать пленку большей длины по сравнению с изотермическим случаем.

Теперь будем возмущать краевой угол α_1 и искать решения, отличные от найденного. Заметим, что если проинтегрировать второе уравнение системы (2.18) и исключить функцию T , подставив выражение для T в первое уравнение,

получим

$$h'''h = \gamma\left(-\frac{1}{h} + h\right). \quad (2.22)$$

Вместе с условиями (2.15) зададим условие

$$h(0) = 1, \quad (2.23)$$

которое эквивалентно заданию объема течения.

Задача (2.22), (2.23), (2.15) решалась численно методом стрельбы. Результаты численного решения представлены на рисунке 2.2. Как видно из графиков, при малых отклонениях краевого угла от $\pi/2$ решение еще существует, а при дальнейшем увеличении краевого угла начинает разрушаться.

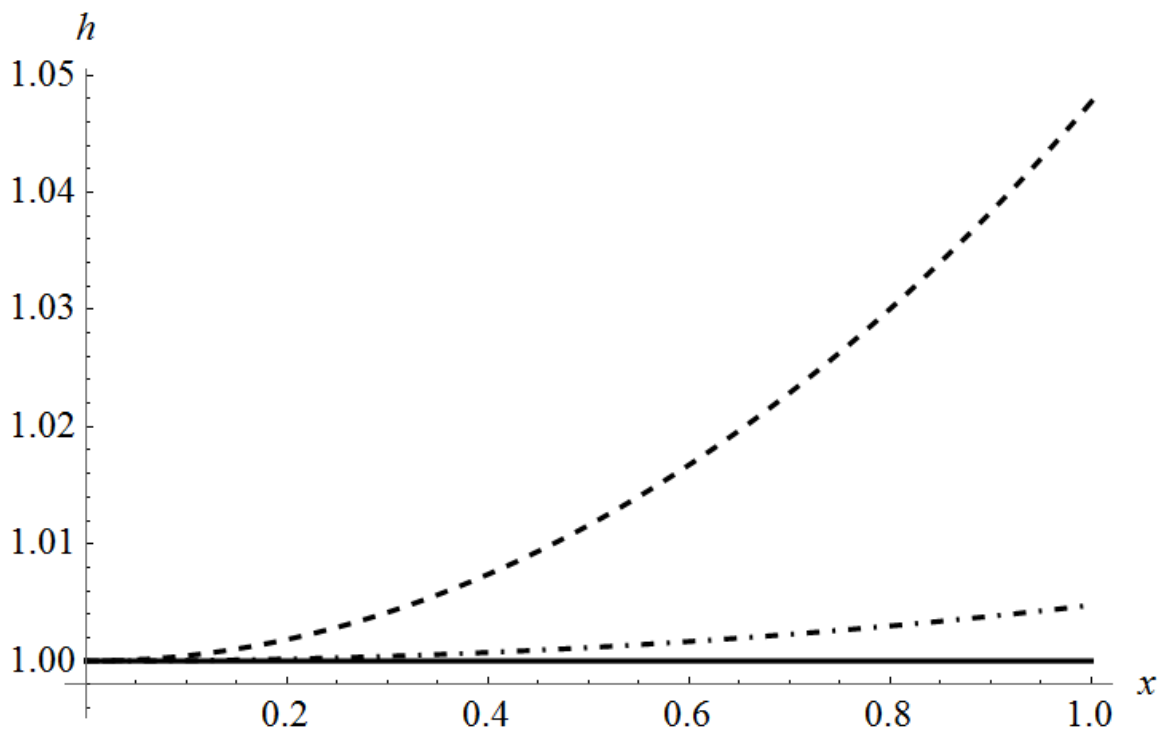


Рисунок 2.2 — Зависимость толщины от координаты для различных α_1 при $\alpha_0 = 0$, $\gamma = 1$. Сплошная линия соответствует $\alpha_1 = 0$, штрихпунктирная — $\alpha_1 = 0.01$, штриховая — $\alpha_1 = 0.1$.

2.4 Исследование устойчивости решения с постоянной толщиной

Исследуем на устойчивость найденное в предыдущем параграфе решение с постоянной толщиной. Сначала рассмотрим случай, когда для температуры на твердых стенках заданы условия (2.2). Линеаризуя задачу (2.12)–(2.17), (2.2) в безразмерных переменных на решении (2.19), (2.20), получаем систему уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned} -\delta q_t + h_{xxx} &= \gamma(T_x + h), \\ T_t - q &= \alpha(-h_x + T_{xx}), \\ h_t + q_x &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

с граничными условиями

$$h_x(0) = h_x(1) = q(0) = q(1) = 0, \tag{2.25}$$

$$T_x(0) = T_x(1) = 0, \tag{2.26}$$

где $\alpha = 1/(\varepsilon \text{Ma})$, $\delta = \varepsilon \text{MaCr}/\text{Pr}$, $\gamma = \text{Cr}/\varepsilon^2$.

Система (2.24)–(2.26) сводится к уравнению относительно q :

$$q_{xxxxx} - \frac{1}{\alpha} q_{txxxx} - 2\gamma q_{xxx} + \delta q_{ttxx} - \frac{\delta}{\alpha} q_{ttt} = 0 \tag{2.27}$$

с граничными условиями

$$q = q_{xx} = q_{xxxx} - \gamma q_x = 0 \quad (x = 0, x = 1). \tag{2.28}$$

Решение задачи (2.27), (2.28) ищем в виде

$$q(x,t) = e^{\lambda t} f(x)$$

и получаем задачу на собственные значения:

$$f_{xxxxx} - \frac{\lambda}{\alpha} f_{txxxx} - 2\gamma f_{xxx} + \delta \lambda^2 f_{xx} - \frac{\delta \lambda^3}{\alpha} f = 0, \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(1) = f_{xx}(0) = f_{xx}(1) = \\
&= f_{xxxx}(0) - \gamma f_x(0) = f_{xxxx}(1) - \gamma f_x(1) = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Введем параметр

$$\beta = \alpha^2 \delta \tag{2.31}$$

и сделаем замену

$$\zeta = \sqrt{\delta} \lambda.$$

Тогда уравнение (2.29) примет вид

$$f_{xxxxxx} - \frac{\zeta}{\sqrt{\beta}} f_{xxxx} - 2\gamma f_{xxx} + \zeta^2 f_{xx} - \frac{\zeta^3}{\sqrt{\beta}} f = 0. \tag{2.32}$$

Заметим, что согласно определениям α и δ , параметр β не зависит от перепада температур (или, согласно связи (2.21), от ускорения свободного падения). При этом, если взять для воды следующие значения параметров: $\sigma_0 = 0.075$ Н/м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\kappa = 2 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К), $l = 0.01$ м, $\nu = 1.004 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\varepsilon = 10^{-2}$, то параметр β имеет значение $\beta = 2.61 \cdot 10^{-6}$.

Положим $\eta = \sqrt[4]{\beta}$. Уравнение (2.32) примет вид

$$\eta^2 f_{xxxxxx} - \zeta f_{xxxx} - 2\gamma \eta^2 f_{xxx} + \eta^2 \zeta^2 f_{xx} - \zeta^3 f = 0. \tag{2.33}$$

С учетом того, что малый параметр η^2 находится при старшей производной, будем искать решение задачи (2.33), (2.30) методом согласования асимптотических разложений [107; 108]. Данная задача является сингулярно возмущенной задачей с регулярным вырождением ([107]). Для ее решения нужно будет построить погранслоиные функции вблизи $x = 0$ и $x = 1$. При этом ζ раскладывается в ряд по степеням η :

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \zeta_k.$$

Внешнее разложение решения (то есть решение за пределами пограничных слоев) имеет вид

$$R \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k r_k(x). \tag{2.34}$$

Если подставить ряд (2.34) в задачу (2.33), (2.30) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях η , в нулевом порядке получим уравнение

$$r_{0xxxx} + \zeta_0^2 r_0 = 0 \quad (2.35)$$

с краевыми условиями

$$r_0(0) = r_0(1) = r_{0xx}(0) = r_{0xx}(1) = 0. \quad (2.36)$$

Из условия разрешимости краевой задачи (2.35), (2.36) получаем

$$\zeta_0 = i\pi^2. \quad (2.37)$$

При этом

$$r_0(x) = \sin \pi x. \quad (2.38)$$

Последняя пара краевых условий (2.30) для функции (2.38) не выполняется, и чтобы ликвидировать невязку в этих условиях, строятся внутренние (погранслойные) разложения решения. Введем «растянутую» координату

$$\xi = \frac{x}{\eta}$$

и будем искать внутреннее разложение вблизи $x = 0$ в виде

$$S \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+4} s_k(\xi). \quad (2.39)$$

Тогда из (2.29) следует, что S удовлетворяет уравнению

$$S_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \zeta S_{\xi\xi\xi\xi} - 2\gamma\eta^3 S_{\xi\xi\xi} + \eta^4 \zeta^2 S_{\xi\xi} - \eta^4 \zeta^3 S = 0. \quad (2.40)$$

Согласно теории [107; 108], погранслойные функции s_k должны удовлетворять условиям

$$s_k(\xi) \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (2.41)$$

Также сумма рядов (2.34) и (2.39) должна удовлетворять предпоследнему краевому условию (2.30).

Подставляя ряд (2.39) в уравнение (2.40) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях η , в главном порядке получаем

$$s_{0\xi\xi\xi\xi\xi} - \zeta_0 s_{0\xi\xi\xi\xi} = 0.$$

Решением данного уравнения, удовлетворяющим условию (2.41), является функция

$$s_0(\xi) = m e^{-\frac{(1+i)\pi\xi}{\sqrt{2}}},$$

где постоянная m определяется из условия

$$s_{0\xi\xi\xi\xi}(0) = \gamma r_{0x}(0) - r_{0xxxx}(0).$$

Находим

$$m = -\frac{\gamma}{\pi^3}.$$

Чтобы найти внутреннее разложение решения вблизи $x = 1$, вводится растянутая переменная

$$\tau = \frac{1-x}{\eta}.$$

Решение ищется в виде ряда

$$J \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+4} j_k(\tau). \quad (2.42)$$

J удовлетворяет уравнению

$$J_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} - \zeta J_{\tau\tau\tau\tau} + 2\gamma\eta^3 J_{\tau\tau\tau} + \eta^4 \zeta^2 J_{\tau\tau} - \eta^4 \zeta^3 J = 0. \quad (2.43)$$

Подставляем ряд (2.42) в уравнение (2.43) и с учетом последнего краевого условия (2.30) получаем, что

$$j_0(\tau) = \frac{\gamma}{\pi^3} e^{-\frac{(1+i)\pi\tau}{\sqrt{2}}}. \quad (2.44)$$

Продвигаясь дальше по степеням η , из условий разрешимости соответствующих краевых задач рекуррентно находим ζ_k :

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad \zeta_4 = -\frac{3i\gamma^2}{4\pi^4}, \quad \zeta_5 = \frac{\sqrt{2}\gamma^2(1+i)}{\pi^5}, \\ \zeta_6 &= \frac{5\gamma^2}{2\pi^4}, \quad \zeta_7 = \frac{2\sqrt{2}\gamma^2(i-1)}{\pi^5}, \\ \zeta_8 &= \frac{i\gamma^2(168\pi^6 - 21\gamma^2 + 32\pi^5 \coth \frac{\pi}{2})}{32\pi^{10}}, \\ \zeta_9 &= \frac{(i+1)\gamma^2(15\gamma^2 - 36\pi^6)}{4\sqrt{2}\pi^{11}}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Таким образом, мы можем найти λ с достаточной точностью для различных значений g .

Теперь рассмотрим случай, когда вместо условия (2.26) для возмущений температуры на твердых стенках выполнено условие

$$T(0) = T(1) = 0,\tag{2.46}$$

которое получается при линеаризации условия (2.3). Тогда для уравнения (2.27) должны выполняться условия

$$q = q_{xx} = q_{xxxxx} + \delta q_{ttx} = 0 \quad (x = 0, x = 1).\tag{2.47}$$

Решая задачу (2.27), (2.47) аналогично задаче (2.27), (2.28), получаем

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= i\pi^2, \quad \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad \zeta_4 = \frac{i\gamma^2(4 + 4e^\pi + 3\pi - 3e^\pi\pi)}{4\pi^5(e^\pi - 1)}, \\ \zeta_5 &= 0, \quad \zeta_6 = \frac{5\gamma^2}{2\pi^4}, \quad \zeta_7 = \frac{4\sqrt{2}\gamma^2(i-1)}{\pi^5}, \\ \zeta_8 &= \frac{i\gamma^2}{32\pi^{12}(1-e^\pi)^3} (32\pi^7(e^\pi - 1)^2(1+e^\pi) - 168\pi^8(e^\pi - 1)^3 + \\ &+ 40\gamma^2(e^\pi - 1)(e^\pi + 1)^2 - 16\pi\gamma^2(3 - 5e^\pi - 5e^{2\pi} + 3e^{3\pi}) + \\ &+ 3\pi^2\gamma^2(7e^{3\pi} - 37e^{2\pi} + 37e^\pi - 7)), \quad \zeta_9 = -\frac{8\sqrt{2}(i+1)\gamma^2}{\pi^5}.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Таблица 1 — Значения ζ для различных значений g в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие второго рода.

$g, \text{ м/с}^2$	$\tilde{\zeta}$	ζ
0.1	$1.05 \cdot 10^{-7} + i \cdot 9.8696$	$1.05 \cdot 10^{-7} + i \cdot 9.8696$
1.0	$1.05 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9.8693$	$1.05 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9.8693$
4.0	$1.68 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9.8640$	$1.68 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9.8640$
9.8	$1.02 \cdot 10^{-3} + i \cdot 9.8360$	$1.03 \cdot 10^{-3} + i \cdot 9.8358$

Таблица 2 — Значения ζ для различных значений g в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие первого рода.

$g, \text{ м/с}^2$	$\tilde{\zeta}$	ζ
0.1	$1.87 \cdot 10^{-8} + i \cdot 9.8696$	$1.89 \cdot 10^{-8} + i \cdot 9.8696$
1.0	$1.87 \cdot 10^{-6} + i \cdot 9.8694$	$1.87 \cdot 10^{-6} + i \cdot 9.8694$
4.0	$2.99 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9.8665$	$2.99 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9.8665$
9.8	$1.79 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9.8511$	$1.82 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9.8511$

Для численного решения задачи используется метод ортогонализации [105; 106], подробно описанный в предыдущей главе. При этом в качестве начальных приближений используются значения, найденные аналитически. Полученные численно собственные значения ζ для различных значений g представлены в Таблице 1 (для случая, когда для температуры выполняются условия (2.26)) и Таблице 2 (для случая, когда для температуры выполняются условия (2.46)), где также представлены собственные значения $\tilde{\zeta}$, вычисленные асимптотически по формулам (2.31), (2.45) и (2.48) соответственно. Как видно из таблиц, численные и аналитические результаты хорошо согласуются.

На рисунках 2.3 и 2.4 приведены графики зависимости вещественной λ_r и мнимой λ_i частей собственных значений соответственно от ускорения тяжести в размерных переменных. Таким образом, в случае краевого условия второго рода для температуры инкремент возмущений больше по сравнению со случаем краевого условия первого рода. При этом в обоих случаях решение неустойчиво, но инкремент остается малым даже при земной гравитации. Это означает, что пленка может существовать достаточно долго, что соответствует экспериментам [8; 9].

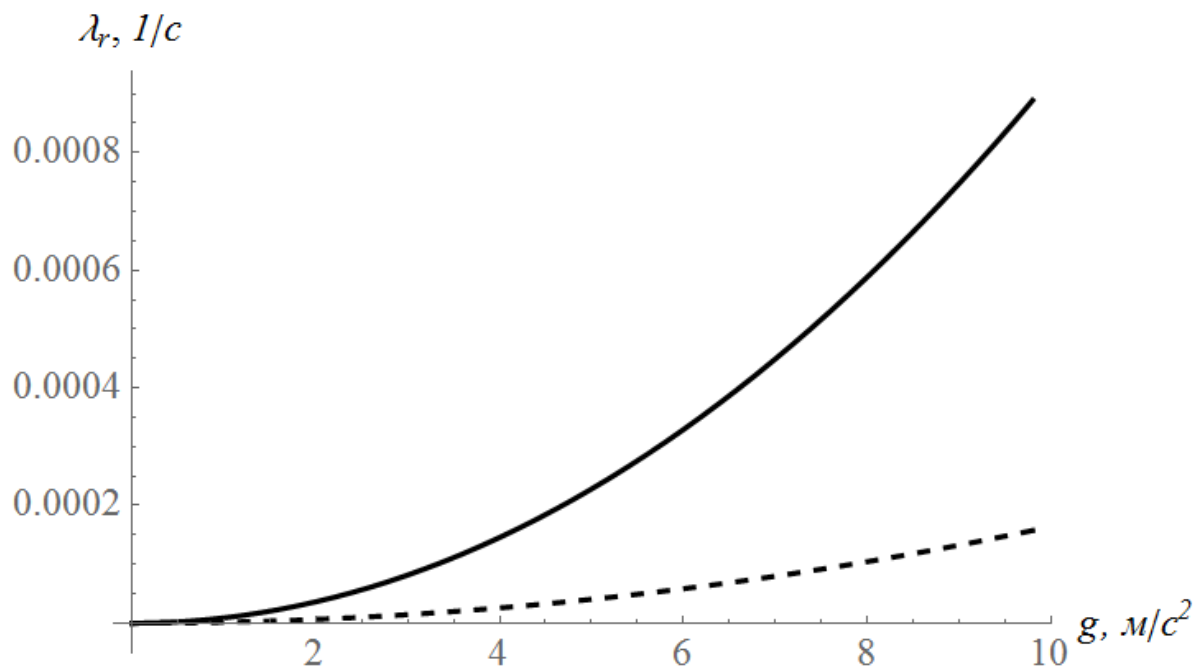


Рисунок 2.3 — Зависимость инкрементов возмущений от ускорения тяжести. Сплошная линия соответствует случаю, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие второго рода, штриховая — случаю, когда задано краевое условие первого рода.

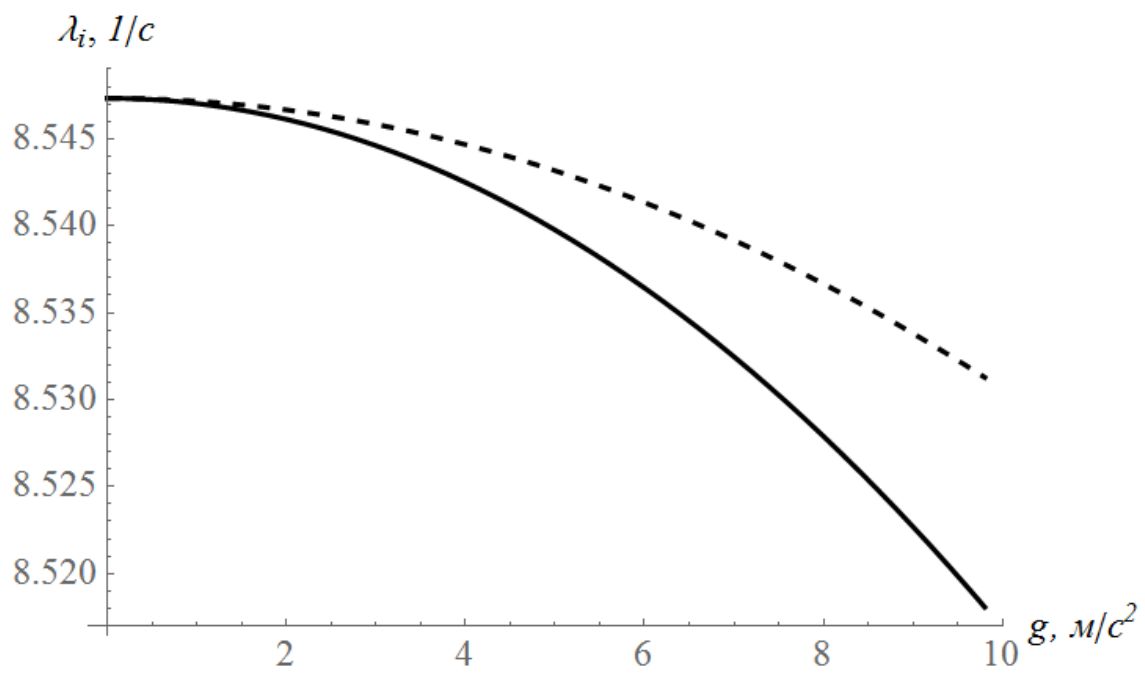


Рисунок 2.4 — Зависимость частот возмущений от ускорения тяжести. Сплошная линия соответствует случаю, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие второго рода, штриховая — случаю, когда задано краевое условие первого рода.

Замечание. В данной главе в приближении тонкого слоя выводились уравнения для свободной жидкой пленки в случае, когда имеется зависимость решения от переменной y , хотя далее решалась плоская задача. Вывод уравнений для трехмерного случая представляет методический интерес. Эти уравнения могут быть использованы при исследовании возмущений, зависящих от y , а также при изучении тонких нитей.

Глава 3. Термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра

3.1 Постановка задачи

Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, находящаяся между двумя бесконечными цилиндрическими поверхностями, которые имеют радиусы r_1 и $r_2 < r_1$ (рисунок 3.1). Поверхность $r = r_2$ предполагается свободной. Поверхность $r = r_1$ является твердой и вращается вокруг общей оси двух поверхностей с постоянной угловой скоростью ω . Предполагается, что сила тяжести отсутствует. Как и в предыдущих главах, считаем, что зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры имеет вид (1.4). Будем рассматривать задачу в цилиндрической системе координат r, φ, z .

Уравнения Навье – Стокса и переноса тепла в цилиндрических координатах [19] для осесимметричных (не зависящих от координаты φ) течений имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}p_r + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \\ v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} &= \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right), \\ w_t + uw_r + ww_z &= -\frac{1}{\rho}p_z + \nu \Delta w, \\ \frac{1}{r} (ru)_r + w_z &= 0, \\ T_t + uT_r + wT_z &= \chi \Delta T, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия (1.5)–(1.7) на свободной поверхности $r = h(z)$ запишутся так:

$$h_t + wh_z - u = 0, \tag{3.2}$$

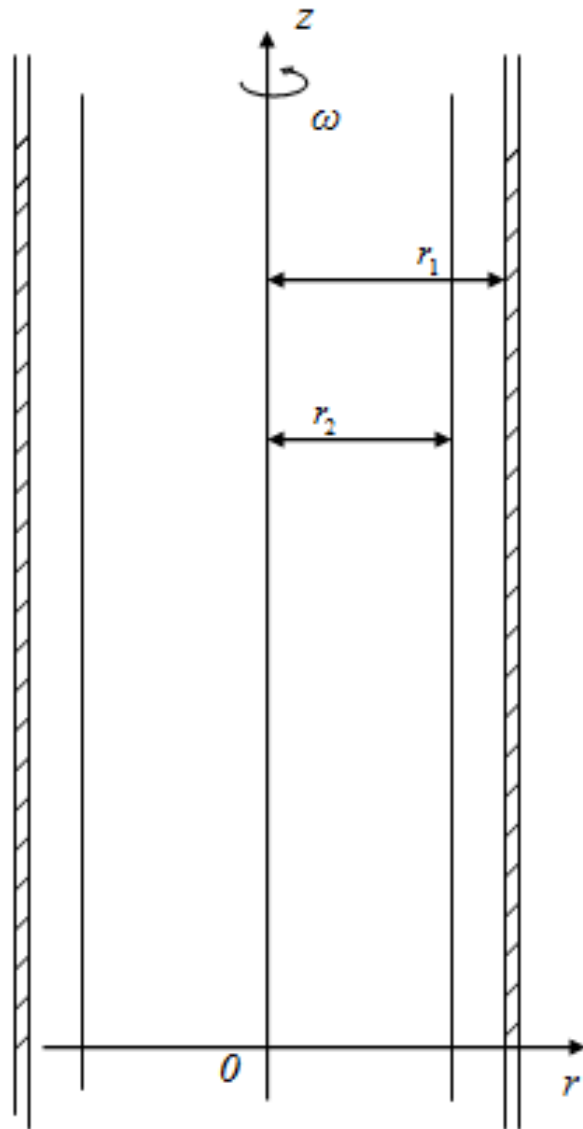


Рисунок 3.1 — Схема к постановке задачи

$$v_r - \frac{v}{r} - h_z v_z = 0, \quad (3.3)$$

$$\rho\nu \left((1 - h_z^2)(w_r + u_z) + 2h_z(u_r - w_z) \right) = \kappa(1 + h_z^2)^{1/2}(T_z + h_z T_r), \quad (3.4)$$

$$p_0 - p + 2\rho\nu (1 + h_z^2)^{-1} (u_r - h_z(u_z + w_r) + h_z^2 w_z) = -2\sigma K, \quad (3.5)$$

$$-T_r + h_z T_z + \beta (1 + h_z^2)^{1/2} (T - T_\Gamma) = 0. \quad (3.6)$$

На твердой стенке выполняются условия

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_S, \quad (3.7)$$

где $T_S \neq T_\Gamma$ – заданная положительная постоянная.

Решение уравнений (3.1) с краевыми условиями (3.2)–(3.7), при котором свободная поверхность цилиндрическая, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (0, \omega r, 0), \quad p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \tilde{p}_0, \quad h = r_2, \\ T &= \frac{\beta r_2 (T_S - T_\Gamma)}{1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_2} + \frac{T_S + T_\Gamma \beta r_2 \ln(r_1/r_2)}{1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где \tilde{p}_0 – постоянная.

Накладываем на решение (3.8) малые возмущения. При этом по аналогии с работой [58] рассматриваются осесимметричные возмущения как наиболее опасные. Система (3.1)–(3.7) линеаризуется на решении (3.8). Считаем, что свободная поверхность недеформируема. При этом условием (3.5) (проекция динамического условия на нормаль к свободной поверхности) пренебрегаем по аналогии с задачей Пирсона, где рассматривалась термокапиллярная конвекция в плоском слое [14]. Получаем краевую задачу в фиксированной области:

$$\begin{aligned} u_t - 2\omega v + \frac{p_r}{\rho} &= \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \quad v_t + 2\omega u = \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right), \\ w_t + \frac{p_z}{\rho} &= \nu \Delta w, \quad \frac{1}{r}(ru)_r + w_z = 0, \quad T_t + \frac{\beta r_2 (T_S - T_\Gamma)}{1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2)} \frac{u}{r} = \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$u = v = w = T = 0 \quad (r = r_1), \quad (3.10)$$

$$u = v_r - \frac{v}{r} = -T_r + \beta r_2 T = \rho\nu(w_r + u_z) - \kappa T_z = 0 \quad (r = r_2). \quad (3.11)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$r' = r/d, \quad z' = z/d, \quad t' = t\chi/d^2, \quad u' = ud/\chi, \quad v' = vd/\chi,$$

$$w' = wd/\chi, \quad p' = pd^2/(\rho\nu\chi), \quad T' = T/\theta,$$

где $d = r_1 - r_2$, $\theta = \beta r_2 (T_S - T_\Gamma) (1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2))^{-1} (\ln(r_1/r_2))$. Далее будем опускать штрихи над безразмерными переменными. Выпишем систему (3.9)–(3.11) в безразмерных переменных:

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} - p_r = \text{Pr}^{-1} u_t - 2\text{Re}v, \quad \Delta v - \frac{v}{r^2} = \text{Pr}^{-1} v_t + 2\text{Re}u, \quad (3.12)$$

$$\Delta w - p_z = \text{Pr}^{-1} w_t, \quad \frac{1}{r}(ru)_r + w_z = 0, \quad T_t + \left(\ln \frac{b}{b-1} \right)^{-1} \frac{u}{r} = \Delta T,$$

$$u = v = w = T = 0 \quad (r = b), \quad (3.13)$$

$$u = v_r - \frac{v}{b-1} = -T_r + \text{Bi}T = w_r + u_z - \text{Ma}T_z = 0 \quad (r = b-1), \quad (3.14)$$

где $\text{Re} = \omega d^2/\nu$ — число Рейнольдса, $\text{Bi} = \beta d$ — число Био, $b = r_1/d$ — безразмерный радиус полости, $\text{Ma} = \kappa \theta d/(\rho\nu\chi)$ — число Марангони, $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля.

Как и во многих других задачах конвекции [6], в том числе в задаче Пирсона [14], будем считать, что неустойчивость вызвана монотонными возмущениями. Поэтому ищем решение задачи (3.12)–(3.14) в виде

$$u = A(r) \cos(kz), \quad v = B(r) \cos(kz), \quad w = C(r) \sin(kz),$$

$$p = \xi(r) \cos(kz), \quad T = \zeta(r) \cos(kz).$$

Получаем краевую задачу

$$\frac{1}{r}(rA')' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) A + 2\text{Re}B - \xi' = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{r}(rB')' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) B - 2\text{Re}A = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{r}(rC')' - k^2 C + \xi k = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{r}(rA)' + kC = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{r}(r\zeta')' - k^2\zeta - \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} \frac{A}{r} = 0, \quad (3.19)$$

$$A(b) = B(b) = C(b) = \zeta(b) = 0, \quad (3.20)$$

$$A(b-1) = B'(b-1) - \frac{B(b-1)}{b-1} = -\zeta'(b-1) + \text{Vi}\zeta(b-1) = 0, \quad (3.21)$$

$$C'(b-1) + \text{Ma}k\zeta(b-1) = 0. \quad (3.22)$$

Здесь и далее в этой главе штрих означает производную по переменной r .

Пусть Ma играет роль спектрального параметра. Тогда независимыми безразмерными параметрами задачи являются Re , Vi и b . Следует заметить, что в полной постановке (при деформируемой свободной поверхности) $\text{Cr} = \kappa\theta/\sigma_0$ также является определяющим безразмерным параметром. Следуя работе [14], пренебрегаем этим параметром, так как для реальных течений он является малым.

Введем обозначение

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2 \right).$$

Заметим, что из (3.17) следует

$$\xi' = -\frac{1}{k}L(C'), \quad (3.23)$$

а (3.18) влечет

$$C' = -\frac{1}{k}(L + k^2)A. \quad (3.24)$$

После исключения B , C и ξ с помощью (3.23), (3.24) задача (3.15)–(3.22) принимает вид

$$(L^3 - 4\text{Re}^2k^2)A = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{r}(r\zeta')' - k^2\zeta - \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} \frac{A}{r} = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
A(b) &= A'(b) = L^2 A(b) = \\
&= A(b-1) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{b-1} \right) L^2 \right) A(b-1) = 0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\zeta(b) = 0, \tag{3.28}$$

$$-\zeta'(b-1) + \text{Vi}\zeta(b-1) = 0, \tag{3.29}$$

$$A''(b-1) + \frac{A'(b-1)}{b-1} = \text{Ma}k^2\zeta(b-1). \tag{3.30}$$

Спектральная задача (3.25)–(3.30) для параметра Ma является вырожденной. Решение задачи определяется с точностью до мультипликативной постоянной. Поэтому можно положить

$$A''(b-1) + \frac{A'(b-1)}{b-1} = 1, \tag{3.31}$$

тогда A находится из краевой задачи (3.25), (3.27), (3.31). Затем из краевой задачи (3.26), (3.28), (3.29) находится ζ . Заметим, что $\zeta(b-1) \neq 0$, так как иначе бы из (3.30) следовало, что собственная функция A тождественно равна нулю. Следовательно, Ma всегда можно определить единственным образом из (3.30). Также из этого условия следует, что Ma не может обращаться в нуль.

3.2 Асимптотики нейтральных кривых для длинных волн

Найдем асимптотики нейтральных кривых для задачи (3.25)–(3.30) при $k \rightarrow 0$ (длинные волны). Разложим функции A и ζ по малому параметру k :

$$A = A_0 + kA_1 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + k\zeta_1 + \dots$$

В нулевом по k порядке уравнения (3.25), (3.26) и граничные условия (3.27)–(3.29) имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right)^3 A_0 = 0, \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{r}(r\zeta_0')' - \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} \frac{A_0}{r} = 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} A_0(b) = A_0'(b) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)^2 A_0(b) = \\ &= A_0(b-1) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{b-1}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)^2\right) A_0(b-1) = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\zeta_0(b) = -\zeta_0'(b-1) + \text{Bi}\zeta_0(b-1) = 0. \quad (3.35)$$

Заметим, что уравнение шестого порядка (3.32) решается аналитически благодаря факторизуемости оператора, стоящего в левой части. Решая данное уравнение с пятью краевыми условиями (3.34), находим функцию A_0 с точностью до мультипликативной постоянной. Затем получаем решение уравнения (3.33) с краевыми условиями (3.35). Ввиду громоздкости выражения для A_0 и ζ_0 не приводятся.

С помощью краевого условия (3.30) получаем асимптотику для числа Марангони:

$$\begin{aligned} \text{Ma}_0 &= 64 \left(\text{Bi}(1-b) \ln \frac{b}{b-1} - 1 \right) \left((2b-1)(3+2b(b-3)) - \right. \\ &\quad \left. -4(b-1)^4 \ln \frac{b}{b-1} \right) \ln \frac{b}{b-1} / \\ &\quad / \left(k^2(b-1) \left(-(1-2b)^2(11-12b+6b^2) + 2(b-1)^2(8b^4 \ln(b-1))^3 - \right. \right. \\ &\quad \left. -4 \ln(b-1)^2((1+b(b-1))(1+3b(b-1)+6b^4 \ln b)) + \right. \\ &\quad \left. + \ln b(3(2b-1)(3-6b+4b^2) - 4 \ln b((1+b(b-1))(1+3b(b-1))+ \right. \\ &\quad \left. +2b^4 \ln b)) + \ln(b-1)(3(1-2b)(3-6b+4b^2) + \right. \\ &\quad \left. \left. +8 \ln b((1+b(b-1))(1+3b(b-1))+3b^4 \ln b)) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким образом, число Марангони при $k \rightarrow 0$ ведет себя как некоторая постоянная, деленная на k^2 . Причем эта постоянная не зависит от числа Рейнольдса, а зависит только от числа Био и безразмерного радиуса полости.

Замечание. Для задачи Пирсона числа Марангони, приводящие к неустойчивости, выражаются в явном виде (в монографии [6] была исправлена опечатка, допущенная в [14]):

$$\text{Ma} = \frac{8k(k \cosh k + \text{Bi} \sinh k)(\sinh k \cosh k - k)}{\sinh^3 k - k^3 \cosh k}. \quad (3.37)$$

Если в (3.36) перейти к пределу $b \rightarrow \infty$ (бесконечный безразмерный радиус полости), получим $\text{Ma}_0 = 80(1 + \text{Bi})/k^2$, что эквивалентно асимптотическому поведению числа Марангони для задачи Пирсона (3.37) при $k \rightarrow 0$.

3.3 Асимптотики нейтральных кривых для коротких волн

Асимптотики при $k \rightarrow \infty$ (короткие волны) находятся методом согласования асимптотических разложений [107;108]. Для этого вводится в рассмотрение параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{k^2},$$

и уравнения (3.25), (3.26) переписываются в терминах ε :

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 A^{(VI)} + 3\varepsilon^3 \frac{A^{(V)}}{r} - 3\varepsilon^2 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{r^2}\right) A^{(IV)} + \frac{6\varepsilon^2}{r} \left(\frac{2\varepsilon}{r^2} - 1\right) A''' + \\ &+ 3\varepsilon \left(1 + \frac{3\varepsilon}{r^2} - \frac{9\varepsilon^2}{r^4}\right) A'' + \frac{3\varepsilon}{r} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{r^2} + \frac{15\varepsilon^2}{r^4}\right) A' + \\ &+ \left(-\frac{3\varepsilon}{r^2} + \frac{9\varepsilon^2}{r^4} - \frac{45\varepsilon^3}{r^6} - 4\text{Re}^2 \varepsilon^2 - 1\right) A = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\varepsilon \zeta'' + \frac{\varepsilon}{r} \zeta' - \zeta - \varepsilon \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} \frac{A}{r} = 0. \quad (3.39)$$

Краевые условия (3.27) примут вид

$$\begin{aligned}
A(b-1) &= \varepsilon^2 A^{(V)}(b-1) + \varepsilon^2 \frac{A^{(IV)}(b-1)}{b-1} - \\
&- \varepsilon \left(2 + 7 \frac{\varepsilon}{(b-1)^2} \right) A'''(b-1) + 12\varepsilon^2 \frac{A''(b-1)}{(b-1)^3} + \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left(1 + 6 \frac{\varepsilon}{(b-1)^2} - 15 \frac{\varepsilon^2}{(b-1)^4} \right) A'(b-1) = 0, \\
A(b) &= A'(b) = \varepsilon A^{(IV)}(b) + \frac{2\varepsilon}{b} A'''(b) - \\
&- \left(\frac{3\varepsilon}{b^2} + 2 \right) A''(b) = 0. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

В силу уравнения (3.38), внешнее решение в главном порядке тождественно равно нулю.

Теперь будем искать поправки к внешнему решению, чтобы удовлетворялись краевые условия. Сначала найдем внутреннее решение вблизи $r = b - 1$ в главном порядке, которое обозначим через W . Для этого введем растянутую переменную

$$\eta = \frac{r - (b - 1)}{\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.42)$$

Подставляя $W(\eta)$ в уравнение (3.38) и выписывая получившееся выражение в нулевом по ε порядке, получаем уравнение

$$W_{\eta\eta\eta\eta\eta} - 3W_{\eta\eta\eta\eta} + 3W_{\eta\eta} - W = 0. \quad (3.43)$$

Условия при $r = b - 1$ (3.40) примут вид

$$W(0) = W_{\eta\eta\eta\eta}(0) - 2W_{\eta\eta}(0) + W_\eta(0) = 0. \quad (3.44)$$

С учетом того, что решение определяется с точностью до мультипликативной постоянной, полагаем

$$W_{\eta\eta}(0) = 1. \quad (3.45)$$

Согласно теории [108], функция W должна удовлетворять условию

$$W(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty). \quad (3.46)$$

Разрешая уравнение (3.43) с учетом условий (3.44)–(3.46), получаем

$$W(\eta) = -\frac{1}{2}e^{-\eta}\eta. \quad (3.47)$$

Аналогично из уравнения (3.38) и краевых условий (3.41) находится внутреннее решение вблизи $r = b$, которое тождественно равно нулю.

Таким образом, в силу (3.47), (3.42) асимптотика для функции A имеет вид

$$A_\infty(r) = -\frac{1}{2}k(r-1)e^{-k(r-1)}. \quad (3.48)$$

Теперь найдем коротковолновую асимптотику для ζ . В силу (3.39) внешнее решение в главном по ε порядке тождественно равно нулю. Чтобы найти внутреннее решение в главном порядке вблизи $r = b - 1$, которое обозначим через Y , вновь введем переменную (3.42). С учетом разложения

$$\frac{1}{b-1+\eta\varepsilon^{1/2}} = \frac{1}{b-1} \left(1 - \frac{\eta\varepsilon^{1/2}}{b-1}\right) + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

из уравнения (3.39) получаем

$$Y_{\eta\eta} - Y = -\frac{1}{2(b-1)} \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} e^{-\eta}\eta. \quad (3.49)$$

Из краевого условия (3.29) следует, что

$$Y_\eta(0) = 0. \quad (3.50)$$

Также должно выполняться условие

$$Y(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty). \quad (3.51)$$

Решая уравнение (3.49) с учетом (3.50) и (3.51), получаем

$$Y(\eta) = \frac{1}{8(b-1)} \left(\ln \frac{b}{b-1}\right)^{-1} e^{-\eta}(1 + \eta + \eta^2). \quad (3.52)$$

Из уравнения (3.39) и условия (3.28) следует, что в главном порядке внутреннее решение вблизи $r = b$ тождественно равно нулю.

Таким образом, из (3.52) и (3.42) следует, что

$$\zeta_{\infty}(r) = \frac{1}{8(b-1)k^2} \left(\ln \frac{b}{b-1} \right)^{-1} (1 + (r-b+1)k + (r-b+1)^2 k^2) e^{-(r-b+1)k}. \quad (3.53)$$

И наконец, из (3.48), (3.53) и краевого условия (3.30) получаем

$$\text{Ma}_{\infty} = 8(b-1)k^2 \ln \frac{b}{b-1}. \quad (3.54)$$

Значит, при $k \rightarrow \infty$ нейтральная кривая ведет себя как константа, зависящая только от b , умноженная на k^2 . Следует заметить, что если в (3.54) перейти к пределу $b \rightarrow \infty$ (бесконечный безразмерный радиус полости), получим $\text{Ma}_{\infty} = 8k^2$, что совпадает с коротковолновыми асимптотиками задачи Пирсона (3.37).

Замечание. Из положительности асимптотик и того, что число Марангони не может обращаться в нуль, следует, что $\text{Ma} > 0$, то есть термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра возможна лишь тогда, когда подогрев происходит со стороны твердой стенки, как и в классической задаче Пирсона.

3.4 Численные результаты

Нейтральные кривые в виде зависимости числа Марангони от волнового числа получены численно с помощью метода ортогонализации [105; 106]. При этом, в частности, находились критическое значение числа Марангони Ma^* (минимум нейтральной кривой) и критическое значение волнового числа k^* (точка минимума нейтральной кривой).

На рисунке 3.2 построены графики численно полученных нейтральных кривых при $\text{Vi} = 0.5$, $\text{Re} = 10$, $b = 20.37$, а также длинноволновая и коротко-

волновая асимптотики числа Марангони, найденные в предыдущем параграфе. Как видно из графиков, асимптотики дают хорошее представление о нейтральных кривых в предельных случаях. Абсцисса точки пересечения асимптотических кривых позволяет предсказывать критическое значение волнового числа.

На рисунке 3.3 изображены нейтральные кривые для различных значений Vi при $b = 20.37$, $Re = 10$. Критические значения таковы: $k^* = 2.28$, $Ma^* = 148.34$ при $Vi = 0.5$; $k^* = 2.44$, $Ma^* = 173.64$ при $Vi = 1$; $k^* = 2.57$, $Ma^* = 198.02$ при $Vi = 1.5$. Таким образом, при увеличении Vi значения Ma^* и k^* также увеличиваются.

На рисунке 3.4 изображены нейтральные кривые для различных значений b при $Vi = 0.5$, $Re = 10$. Критические значения таковы: $k^* = 3.12$, $Ma^* = 273.87$ при $b = 1.1$; $k^* = 2.76$, $Ma^* = 190.69$ при $b = 1.2$; $k^* = 2.46$, $Ma^* = 149.88$ при $b = 1.5$. Таким образом, при увеличении b значения Ma^* и k^* уменьшаются.

На рисунке 3.5 изображены нейтральные кривые для различных значений Re при $Vi = 0.5$, $b = 20.37$. Критические значения таковы: $k^* = 2.28$, $Ma^* = 148.34$ при $Re = 10$; $k^* = 2.87$, $Ma^* = 267$ при $Re = 20$; $k^* = 3.6$, $Ma^* = 394.95$ при $Re = 30$. Таким образом, при увеличении Re значения Ma^* и k^* также увеличиваются.

На рисунке 3.6 изображена нейтральная кривая при $Re=0$ (вращение отсутствует), $Vi = 0.5$, $b = 20.37$, а также нейтральная кривая из работы Пирсона о термокапиллярной конвекции в плоском слое [14], выражающаяся формулой (3.37), при $Vi = 0.5$. Таким образом, при отсутствии вращения и большом (много больше единицы) безразмерном радиусе цилиндра кривые практически совпадают.

Замечание 1. Силы плавучести в данной задаче не учитывались. Если сравнить результаты данной главы с результатами работы [84], где рассматривалась тепловая конвекция в центробежном поле для жидкости в зазоре между вращающимися с одной скоростью твердыми цилиндрами, можно сделать вывод, что для тонких слоев термокапиллярная неустойчивость возникает при гораздо меньших перепадах температуры, чем неустойчивость, обусловленная силами плавучести. Например, при $Vi = 2$ критическое значение числа Рэлея $Ra^* = 1311$. (Число Рэлея определяется по формуле $Ra = r_2 \omega^2 \alpha \theta d^3 / (\nu \chi)$, где α — коэффициент объемного расширения жидкости). При этом, если на твер-

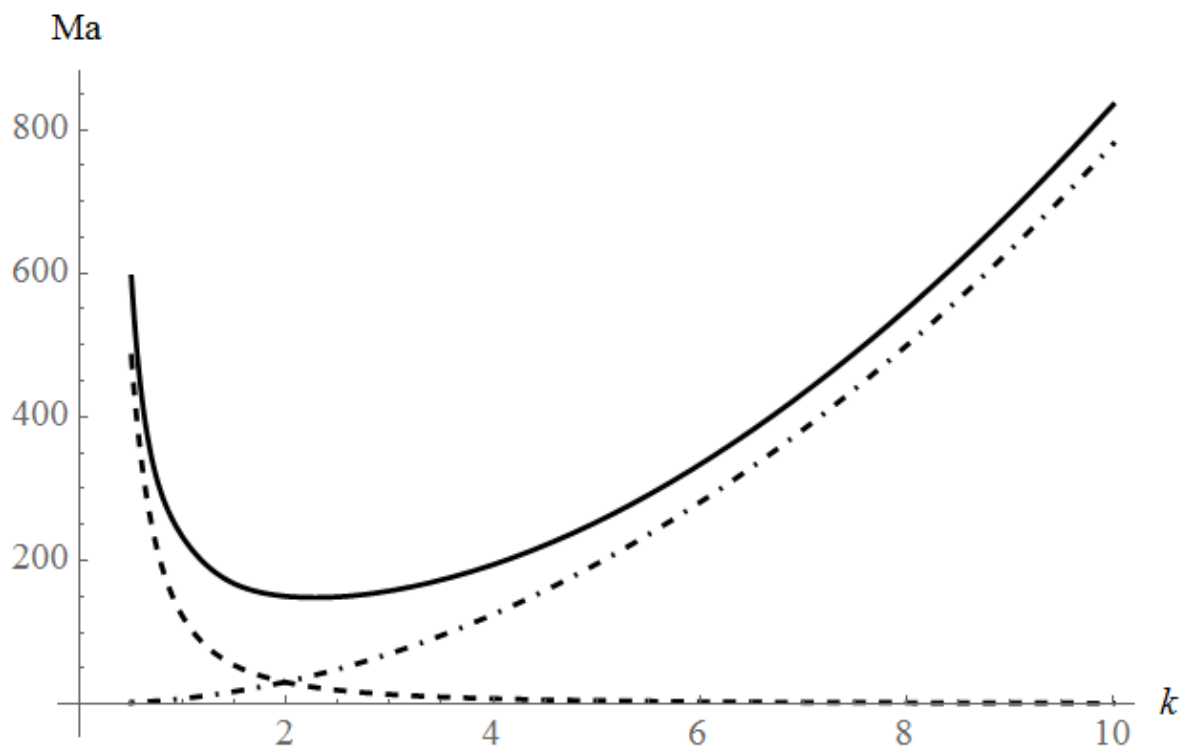


Рисунок 3.2 — Нейтральная кривая и ее асимптотики. Сплошная линия соответствует численному решению, штриховая — длинноволновой асимптотике, штрихпунктирная — коротковолновой асимптотике.

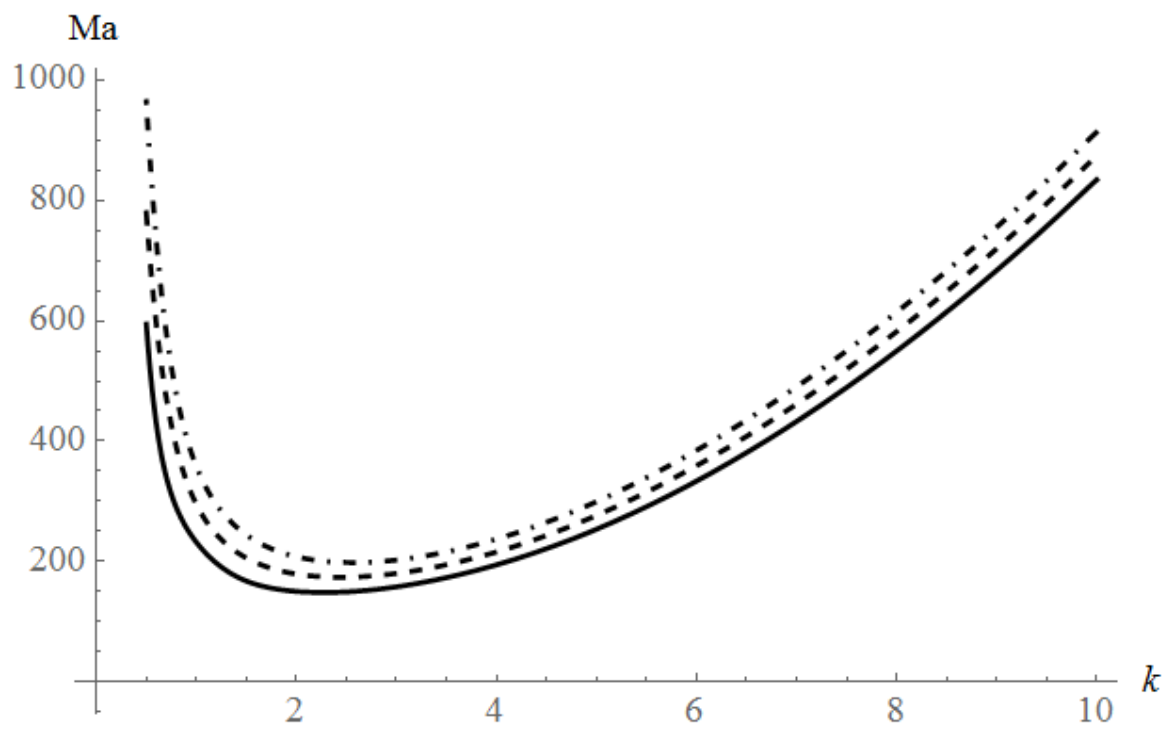


Рисунок 3.3 — Нейтральные кривые при различных значениях Vi . Сплошная линия соответствует $Vi = 0.5$, штриховая — $Vi = 1.0$, штрихпунктирная — $Vi = 1.5$.

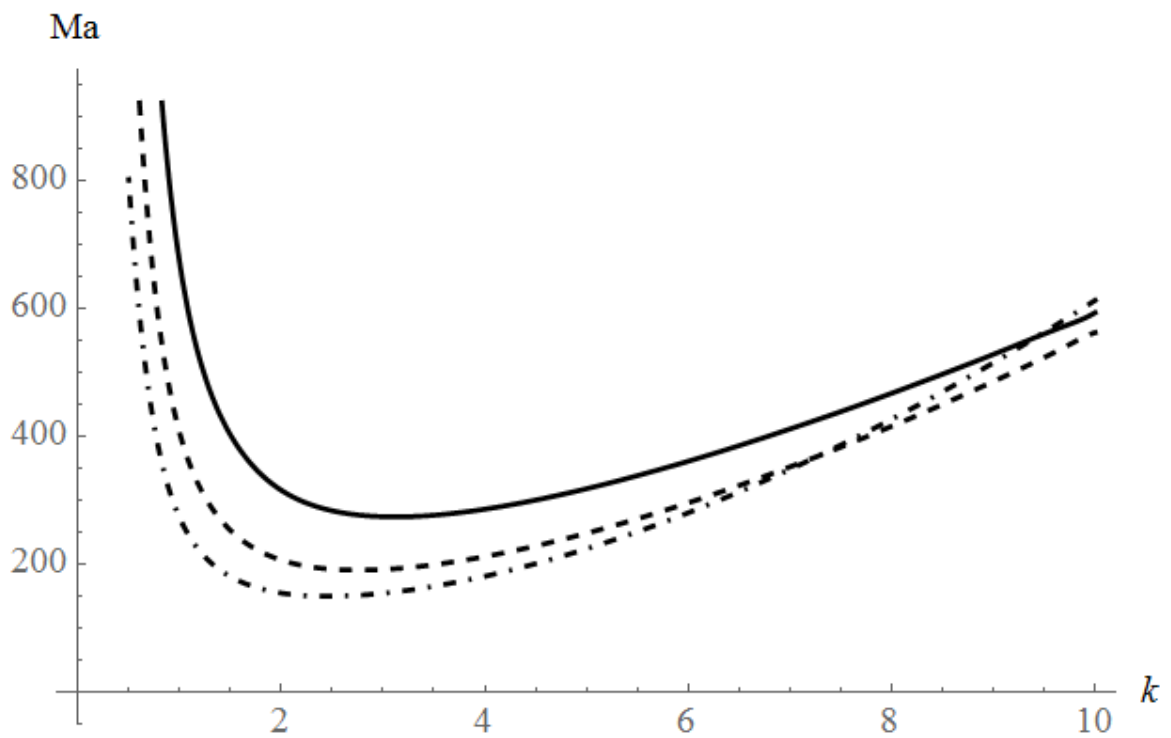


Рисунок 3.4 — Нейтральные кривые при различных значениях b . Сплошная линия соответствует $b = 1.1$, штриховая — $b = 1.2$, штрихпунктирная — $b = 1.5$.

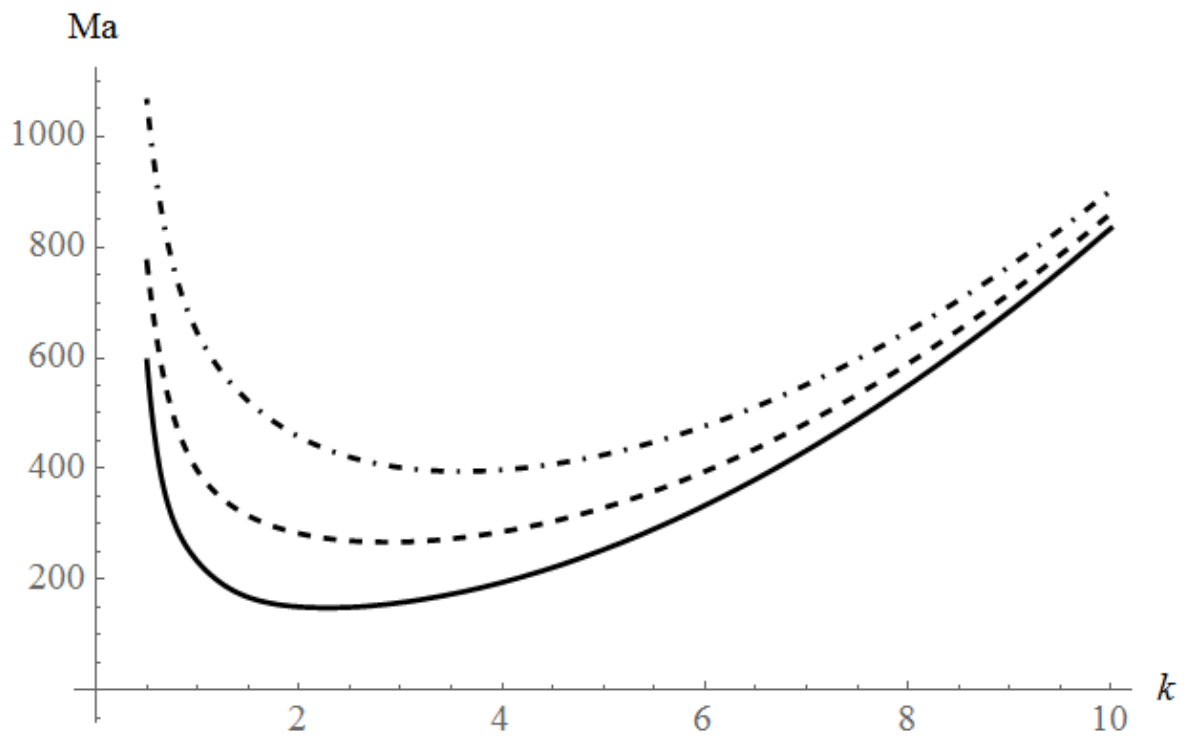


Рисунок 3.5 — Нейтральные кривые при различных значениях Re . *Сплошная линия соответствует $Re = 10$, штриховая — $Re = 20$, штрихпунктирная — $Re = 30$.*

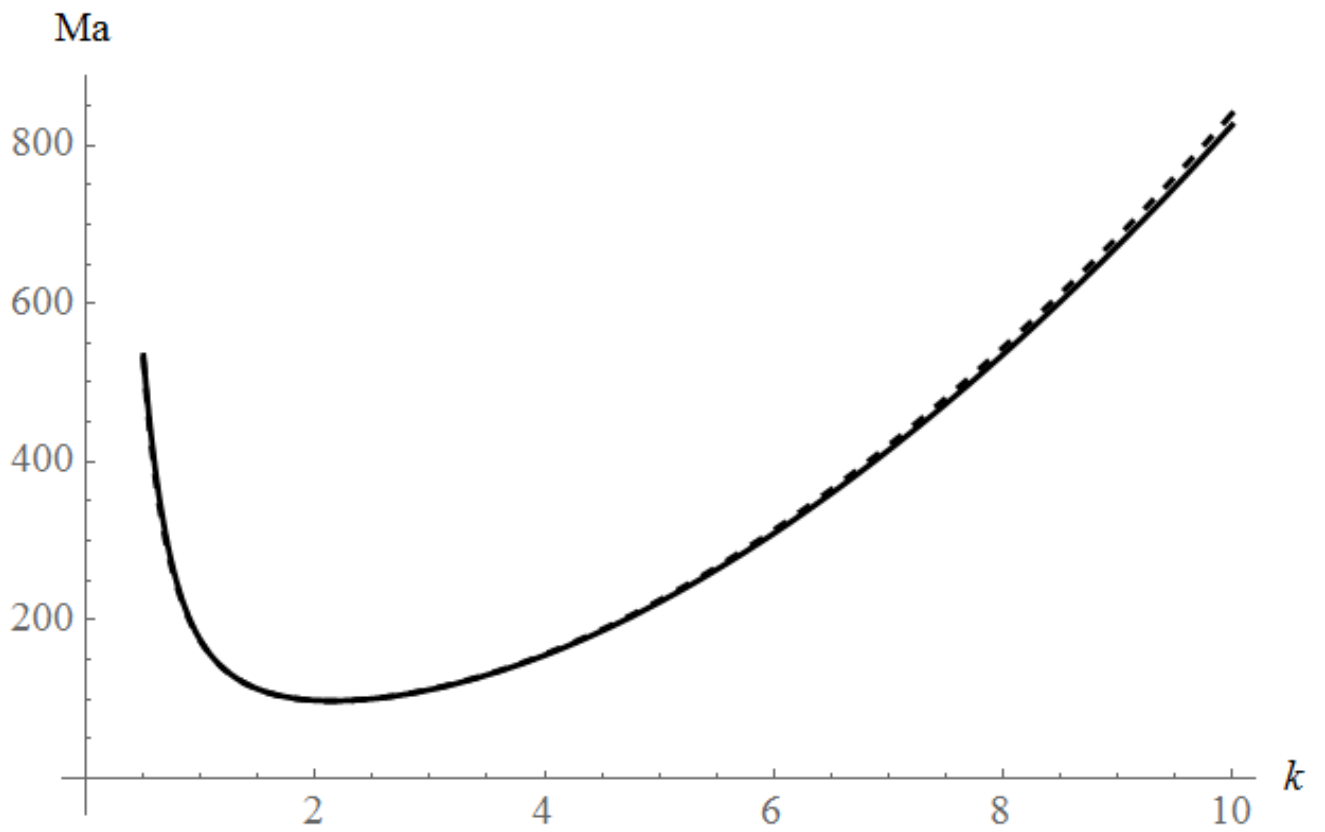


Рисунок 3.6 — Сравнение с задачей Пирсона. *Сплошная линия соответствует $Re = 0$, штриховая — задаче Пирсона.*

дой стенке и свободной поверхности задаются условия третьего рода для температуры с числом Био $Bi = 2$, то в результате численного решения получаем $Ma^* = 979.02$. Значит, для воды ($\alpha = 21 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) при $\omega = 30.83 \text{ c}^{-1}$, $r_1 = 28.92 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $d = 1.42 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ критический перепад температур для термокапиллярной конвекции равен $\theta^* = 0.48 \text{ К}$, для тепловой — $\theta^* = 11.72 \text{ К}$, поэтому пренебрежение силами плавучести оправдано.

Замечание 2. Так как критический перепад температур имеет порядок 0.5 К , безразмерный параметр $St = \kappa\theta/\sigma_0$ имеет порядок 10^{-3} . Таким образом, пренебрежение этим параметром оправдано.

Заключение

В работе решены задачи об устойчивости неизотермических течений со свободной поверхностью в гравитационном или центробежном поле. Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для бесконечно протяженной по вертикали свободной жидкой пленки найдено точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла в виде плоского стационарного слоистого течения с постоянной толщиной. Показано, что если свободные поверхности пленки идеально теплоизолированы, расход жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю. В случае если коэффициент межфазного теплообмена отличен от нуля, свободными параметрами являются расход жидкости и производная от температуры по продольной координате, являющаяся постоянной, либо расход и толщина пленки. Найденное решение исследовано на устойчивость при малых значениях волнового числа. В длинноволновом приближении пленка устойчива. С помощью продолжения по параметру получено значение волнового числа, при котором решение теряет устойчивость (критическое значение). Обнаружено, что при возрастании числа Галилея критическое значение волнового числа уменьшается, а при возрастании числа Био — увеличивается.
2. В приближении тонкого слоя для свободной пленки жидкости, находящейся в продольном поле тяжести и ограниченной по вертикали твердыми стенками, получена система дифференциальных уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и температуру. Найдено решение системы с постоянной толщиной пленки. При этом температура является линейной функцией продольной координаты. Плоская стационарная задача решена численно для различных значений краевого угла, близких к $\pi/2$. Решение с постоянной толщиной исследовано на устойчивость при различных значениях ускорения тяжести, при этом аналитические и численные результаты согласуются. Показано, что решение неустойчиво, но даже при земной гравитации инкремент возмущений остается малым. Таким образом,

- пленка может существовать достаточно долго. Обнаружено, что в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие первого рода, инкремент возмущения меньше, чем в случае краевого условия второго рода.
3. Для неизотермической жидкости, расположенной на внутренней поверхности вращающегося цилиндра, точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла исследовано на устойчивость. В качестве спектрального параметра выбиралось число Марангони. Аналитически найдены асимптотики нейтральных кривых, которые для длинных волн имеют порядок $O(k^{-2})$ при $k \rightarrow 0$, а для коротких волн — $O(k^2)$ при $k \rightarrow \infty$. Численно построены нейтральные кривые. Обнаружено, что критические значения числа Марангони и волнового числа увеличиваются с увеличением чисел Био и Рейнольдса и уменьшаются с увеличением безразмерного радиуса цилиндра. При отсутствии вращения и при большом безразмерном радиусе асимптотики и результаты численного решения согласуются с решением задачи Пирсона о термокапиллярной конвекции в плоском слое.

Список литературы

1. *Андреев, В. К.* Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с.
2. *Andreev, V. K.* Mathematical models of convection / V. K. Andreev, Yu. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. — Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2012. — 417 p.
3. *Napolitano, L. G.* Thermodynamics and dynamics of surface phases / L. G. Napolitano // *Acta Astronaut.* — 1979. — Vol. 6, no. 9. — P. 1093–1112.
4. *Pukhnachov, V. V.* Thermocapillary convection under low gravity / V. V. Pukhnachov // *Fluid Dynamics Transaction. Warszawa: PWN.* — 1989. — Vol. 14. — P. 145–204.
5. *Batishchev, V. A.* Marangoni boundary layers / V. A. Batishchev, V. V. Kuznetsov, V. V. Pukhnachov // *Prog. Aerospace Sci.* — 1989. — Vol. 26, no. 4. — P. 353–370.
6. *Гершуни, Г. З.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
7. *Алексеевко, С. В.* Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеевко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. — Новосибирск: Наука, 1992. — 256 с.
8. *Soua, W.* Hydrodynamic and heat transfer of a falling liquid film on a horizontal heated tube: simulation and experimentation / W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist, O. Kabov // Proc. of the 3 Intern. topical team workshop on two-phase systems for ground and space applications (Brussels, Belgium, September 10-12, 2008). — Brussels: Université Libre de Bruxelles, 2008. — P. 50.
9. *Fridhi, H.* Flow patterns and wavelength measurement for liquid film falling around horizontal tube / H. Fridhi, W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist // 2014

- International Conference on Composite Materials & Renewable Energy Applications (Sousse, Tunisia, January 22-24, 2014). — IEEE, 2014.
10. *Benilov, E. S.* Inertial instability of a liquid film inside a rotating horizontal cylinder / E. S. Benilov, S. B. G. O'Brien // *Phys. Fluids*. — 2005. — Vol. 17, no. 5. — 052106.
 11. *Crawford, R. J.* Rotational molding technology / R. J. Crawford, J. L. Throne. — Norwich, NY: Plastics Design Library / William Andrew Publishing, 2002. — 426 p.
 12. *Линь, Ц.-Ц.* Теория гидродинамической устойчивости / Ц.-Ц. Линь. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 194 с.
 13. *Джозеф, Д.* Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. — М.: Мир, 1981. — 638 с.
 14. *Pearson, J. R. A.* On convection cells induced by surface tension / J. R. A. Pearson // *J. Fluid Mech.* — 1958. — Vol. 4, no. 5. — P. 489–500.
 15. *Андреев, В. К.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова // *ПМТФ*. — 2013. — Т. 54, № 2. — С. 3–20.
 16. *Гершуни, Г. З.* Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. — М.: Наука, 1989. — 320 с.
 17. *Бабский, В. Г.* Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др. — М.: Наука, 1976. — 504 с.
 18. *Бабский, В. Г.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский и др. — Киев: Наукова думка, 1992. — 592 с.
 19. *Андреев, В. К.* Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. — Новосибирск: Наука, 2000. — 280 с.
 20. *Андреев, В. К.* Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. — Красноярск: СФУ, 2010. — 356 с.

21. *Nepomnyashchy, A. A.* Interfacial phenomena and convection / A. A. Nepomnyashchy, M. G. Velarde, P. Colinet. — Boca Raton / London / New York / Washington. D. C.: Chapman and Hall / CRC, 2002. — 384 p.
22. *Братухин, Ю. К.* Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей / Ю. К. Братухин, С. О. Макаров. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2005. — 239 с.
23. *Oron, A.* Long-scale evolution of thin liquid films / A. Oron, S. H. Davis, S. G. Bankoff // *Rev. Mod. Phys.* — 1997. — Vol. 69, no. 3. — P. 931–980.
24. *Пшеничников, А. Ф.* Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением / А. Ф. Пшеничников, Г. А. Токменина // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1983. — № 3. — С. 150–153.
25. *Кабов, О. А.* Формирование регулярных структур в стекающей пленке жидкости при локальном нагреве / О. А. Кабов // *Теплофизика и аэромеханика.* — 1998. — Т. 5, № 4. — С. 597–602.
26. *Kabov, O. A.* Thermal imaging study of the liquid film flowing on vertical surface with local heat source / O. A. Kabov, I. V. Marchuk, V. M. Chupin // *Russ. J. Eng. Therm.* — 1996. — Vol. 6, no. 2. — P. 105–138.
27. *Kuznetsov, V. V.* Dynamics of locally heated liquid films / V. V. Kuznetsov // *Russ. J. Eng. Therm.* — 2000. — Vol. 10, no. 2. — P. 107–121.
28. *Goussis, D. A.* Surface wave and thermocapillary instabilities in a liquid film flow / D. A. Goussis, R. E. Kelly // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 223. — P. 25–45.
29. *Kalliadasis, S.* Thermocapillary instability and wave formation on a film falling down a uniformly heated plane / S. Kalliadasis, E. A. Demekhin, C. Ruyer-Quil, M. G. Velarde // *J. Fluid Mech.* — 2003. — Vol. 492. — P. 303–338.
30. *Frank, A. M.* Suppression of thermocapillary instability in a falling film / A. M. Frank // *Phys. Fluids.* — 2006. — Vol. 18, no. 7. — 078106.

31. *Актершев, С. П.* Деформация поверхности пленки вязкой жидкости вследствие термокапиллярного эффекта при стационарном течении по вертикальной обогреваемой пластине / С. П. Актершев // *Теплофизика и аэромеханика*. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 295–307.
32. *Актершев, С. П.* Устойчивость нагреваемой пленки жидкости при наличии термокапиллярного эффекта / С. П. Актершев // *Теплофизика и аэромеханика*. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 1–16.
33. *Bekezhanova, V. B.* Influence of internal energy variations of the interface on the stability of film flow / V. B. Bekezhanova, O. A. Kabov // *Interfacial phenomena and heat transfer*. — 2016. — Vol. 4, no. 2-3. — P. 133–156.
34. *Воинов, О. В.* Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утоньшения / О. В. Воинов // *Докл. АН СССР*. — 1974. — Т. 216, № 2. — С. 285–288.
35. *Воинов, О. В.* К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости / О. В. Воинов // *ПМТФ*. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 67–78.
36. *Caratenuto, L.* Influence of surfactants on the thinning of a free liquid film with rims fixed at a frame / L. Caratenuto, L. K. Antanovskii // *Microgravity Quart.* — 1995. — Vol. 5, no. 4. — P. 199–209.
37. *Пухначев, В. В.* Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил / В. В. Пухначев, С. Б. Дубинкина // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2006. — № 5. — С. 89–107.
38. *Пухначев, В. В.* Задача о равновесии свободной неизотермической пленки жидкости / В. В. Пухначев // *ПМТФ*. — 2007. — Т. 48, № 3. — С. 16–29.
39. *Карабут, Е. А.* Стационарные состояния неизотермической пленки с теплоизолированной свободной границей / Е. А. Карабут, В. В. Пухначев // *ПМТФ*. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 59–73.
40. *Meleshko, S. V.* Traveling waves and self-similar solutions in model of free non-isothermal liquid film / S. V. Meleshko, V. V. Pukhnachev,

- T. P. Pukhnacheva // *Adv. Math. Sci. Appl.* — 2009. — Vol. 19, no. 2. — P. 465–477.
41. *Duffy, B. R.* Closed-form solution of a thermocapillary free-film problem due to Pukhnachev / B. R. Duffy, M. Langer, S. K. Wilson // *Eur. J. Appl. Math.* — 2015. — Vol. 26, no. 5. — P. 721–741.
 42. *Ovcharova, A.* A deformation and a break of hanging thin film under microgravity conditions / A. Ovcharova, N. Stankous // *Fluid Dyn. Mater. Process.* — 2007. — Vol. 3, no. 4. — P. 349–356.
 43. *Ovcharova, A. S.* Features of the rupture of free hanging liquid film under the action of a thermal load / A. S. Ovcharova // *Phys. Fluids.* — 2011. — Vol. 23, no. 10. — 102106.
 44. *Овчарова, А. С.* Влияние теплофизических свойств жидкости на особенности разрыва пленки под действием тепловой нагрузки. Роль числа Прандтля / А. С. Овчарова // *ПМТФ.* — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 43–52.
 45. *Зуев, А. Л.* Деформация и разрыв пленки жидкости под действием термокапиллярной конвекции / А. Л. Зуев, А. Ф. Пшеничников // *ПМТФ.* — 1987. — Т. 28, № 3. — С. 90–95.
 46. *Ueno, I.* Thermocapillary-driven flow in a thin liquid film sustained in a rectangular hole with temperature gradient / I. Ueno, T. Torii // *Acta Astronaut.* — 2010. — Vol. 66, no. 7-8. — P. 1017–1021.
 47. *Ueno, I.* Thermocapillary-driven flow in a free liquid film / I. Ueno, T. Watanabe, T. Katsuta // *Proc. of Int. Symp. Turbul. Shear Flow Phenom.*(Ottawa, Canada, July 28-31, 2011). — Vol. 2. — Ottawa, 2011. — P. 1–5.
 48. *Limsukhawat, D.* Flow patterns induced by thermocapillary effect in a thin free liquid film of a high Prandtl number fluid / D. Limsukhawat, Y. Dekio, K. Ikebukuro et al. // *Prog. Comput. Fluid Dynam. Int. J.* — 2013. — Vol. 13, no. 3/4. — P. 133–144.

49. *Messmer, B.* Confined thermocapillary flows in a double free-surface film with small Marangoni numbers / B. Messmer, T. Lemeë, K. Ikebukuro et al. // *Int. J. Heat Mass Transf.* — 2014. — Vol. 78. — P. 1060–1067.
50. *Kuhlmann, H. C.* Large-scale liquid motion in free thermocapillary films / H. C. Kuhlmann // *Microgravity Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 26, no. 6. — P. 397–400.
51. *Fei, L.* Effect of static deformation on basic flow patterns in thermocapillary-driven free liquid film / L. Fei, K. Ikebukuro, T. Katsuta et al. // *Microgravity Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 29, no. 1-2. — P. 29–36.
52. *Watanabe, T.* Flow transition and hydrothermal wave instability of thermocapillary-driven flow in a free rectangular liquid film / T. Watanabe, Y. Kowata, I. Ueno // *Int. J. Heat Mass Transf.* — 2018. — Vol. 116. — P. 635–641.
53. *Yamamoto, T.* Numerical investigation for the effect of the liquid film volume on thermocapillary flow direction in a thin circular liquid film / T. Yamamoto, Y. Takagi, Y. Okano, S. Dost // *Phys. Fluids.* — 2013. — Vol. 25, no. 8. — 082108.
54. *Adkar, N.* Numerical simulation of the effect of free surface shape on Marangoni convection in a liquid film sustained in a circular ring with different Prandtl numbers / N. Adkar, T. Yamamoto, Y. Takagi et al. // *Int. J. Microgravity Sci. Appl.* — 2016. — Vol. 33, no. 3. — 330309.
55. *Yamamoto, T.* Numerical investigation of oscillatory thermocapillary flows under zero gravity in a circular liquid film with concave free surfaces / T. Yamamoto, Y. Takagi, Y. Okano, S. Dost // *Phys. Fluids.* — 2016. — Vol. 28, no. 3. — 032106.
56. *Ribe, N. M.* Bending and stretching of thin viscous sheets / N. M. Ribe // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 433. — P. 135–160.
57. *Ribe, N. M.* A general theory for the dynamics of thin viscous sheets / N. M. Ribe // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 457. — P. 255–283.

58. *Yih, C.-S.* Instability of a rotating liquid film with a free surface / C.-S. Yih, J. F. C. Kingman // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1960. — Vol. 258, no. 1292. — P. 63–89.
59. *Пухначев, В. В.* Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести / В. В. Пухначев // *ПМТФ.* — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 78–88.
60. *Moffatt, H. K.* Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder / H. K. Moffatt // *J. de Mécanique.* — 1977. — Vol. 16, no. 5. — P. 651–673.
61. *Карабут, Е. А.* Два режима течения жидкой пленки на вращающемся цилиндре / Е. А. Карабут // *ПМТФ.* — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 68–78.
62. *Hinch, E. J.* On the decay and drift of free-surface perturbations in viscous thin-film flow exterior to a rotating cylinder / E. J. Hinch, M. A. Kelmanson // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 2003. — Vol. 459, no. 2033. — P. 1193–1213.
63. *Епихин, В. Е.* О форме осесимметричного слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра / В. Е. Епихин, П. Н. Конон, В. Я. Шкадов // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1989. — № 4. — С. 23–27.
64. *Епихин, В. Е.* О форме жидкого слоя постоянной массы на поверхности вращающегося цилиндра / В. Е. Епихин, П. Н. Конон, В. Я. Шкадов // *ИФЖ.* — 1990. — Т. 59, № 1. — С. 80–84.
65. *Пухначев, В. В.* Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течения вязкой жидкости со свободной границей / В. В. Пухначев // *ПМТФ.* — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 127–134.
66. *Бадрадинова, Л. Г.* О неустойчивых состояниях невесомого вязкого жидкого слоя во вращающемся цилиндрическом сосуде / Л. Г. Бадрадинова // *ПМТФ.* — 1993. — Т. 34, № 3. — С. 50–58.
67. *Конон, П. Н.* О бифуркации равновесных состояний слоя жидкости внутри вращающегося цилиндра / П. Н. Конон, А. В. Жук // *ИФЖ.* — 2017. — Т. 90, № 2. — С. 471–477.

68. *Deiber, J. A.* Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum. I. Hydrodynamics / J. A. Deiber, R. L. Cerro // *Ind. Eng. Chem. Fundam.* — 1976. — Vol. 15, no. 2. — P. 102–110.
69. *Johnson, R. E.* Steady-state coating flows inside a rotating horizontal cylinder / R. E. Johnson // *J. Fluid Mech.* — 1988. — Vol. 190. — P. 321–342.
70. *Ruschak, K. J.* Rimming flow of liquid in a rotating cylinder / K. J. Ruschak, L. E. Scriven // *J. Fluid Mech.* — 1976. — Vol. 76, no. 1. — P. 113–126.
71. *Orr, F. M.* Rimming flow: numerical simulation of steady, viscous, free-surface flow with surface tension / F. M. Orr, L. E. Scriven // *J. Fluid Mech.* — 1978. — Vol. 84, no. 1. — P. 145–165.
72. *Ashmore, J.* The effect of surface tension on rimming flows in a partially filled rotating cylinder / J. Ashmore, A. E. Hosoi, H. A. Stone // *J. Fluid Mech.* — 2003. — Vol. 479. — P. 65–98.
73. *Benilov, E. S.* Does surface tension stabilize liquid films inside a rotating horizontal cylinder? / E. S. Benilov, N. Kopteva, S. B. G. O'Brien // *Q. J. Mech. Appl. Math.* — 2005. — Vol. 58, no. 2. — P. 185–200.
74. *Шрагер, Г. Р.* Формирование свободной поверхности объема вязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра / Г. Р. Шрагер, М. Н. Штоколова, В. А. Якутенок // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2009. — № 2. — С. 179–185.
75. *Pougatch, K.* Thin film flow on the inside surface of a horizontally rotating cylinder: Steady state solutions and their stability / K. Pougatch, I. Frigaard // *Phys. Fluids.* — 2011. — Vol. 23, no. 2. — 022102.
76. *Leslie, G. A.* Three-dimensional coating and rimming flow: a ring of fluid on a rotating horizontal cylinder / G. A. Leslie, S. K. Wilson, B. R. Duffy // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 716. — P. 51–82.
77. *Aggarwal, H.* Generalized linear stability of non-inertial rimming flow in a rotating horizontal cylinder / H. Aggarwal, N. Tiwari // *Eur. Phys. J. E.* — 2015. — Vol. 38, no. 10. — 111.

78. *Benilov, E. S.* Inertial instability of flows on the inside or outside of a rotating horizontal cylinder / E. S. Benilov, V. N. Lapin // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 736. — P. 107–129.
79. *Lopes, A. V. B.* On the multiple solutions of coating and rimming flows on rotating cylinders / A. V. B. Lopes, U. Thiele, A. L. Hazel // *J. Fluid Mech.* — 2018. — Vol. 835. — P. 540–574.
80. *Debler, W. R.* Formation of rings in a liquid film attached to the inside of a rotating cylinder / W. R. Debler, C.-S. Yih // *J. Aerospace Sci.* — 1962. — Vol. 29, no. 3. — P. 364.
81. *Thoroddsen, S. T.* Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder / S. T. Thoroddsen, L. Mahadevan // *Exp. Fluids.* — 1997. — Vol. 23, no. 1. — P. 1–13.
82. *Иванова, А. А.* Динамика жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре / А. А. Иванова, В. Г. Козлов, А. В. Чиграков // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2004. — № 4. — С. 98–111.
83. *Kozlov, V. G.* Stability of rimming flow under vibration / V. G. Kozlov, D. A. Polezhaev // *Microgravity Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 21, no. 1-2. — P. 79–82.
84. *Шайдуров, Г. Ф.* Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости / Г. Ф. Шайдуров, М. И. Шлиомис, Г. В. Ястребов // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1969. — Т. 4, № 6. — С. 88–93.
85. *Ястребов, Г. В.* Применение электрохимической методики для визуализации конвективных движений быстровращающейся жидкости / Г. В. Ястребов // *Гидродинамика.* — № 5. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 1974. — С. 287–293.
86. *Чернатыйнский, В. И.* Конвективная устойчивость жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами в поле тяжести / В. И. Чернатыйнский // *Конвективные течения.* — Пермь: ПГПИ, 1985. — С. 31–36.

87. Шайдуров, Г. Ф. К вопросу о конвективной неустойчивости вращающейся жидкости / Г. Ф. Шайдуров, Г. В. Ястребов // Гидродинамика. — № 4. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 1972. — С. 33–35.
88. Ястребов, Г. В. Влияние ориентации быстровращающегося цилиндрического слоя жидкости на структуру надкритических конвективных движений / Г. В. Ястребов // Гидродинамика. — № 8. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 1976. — С. 28–30.
89. Хаит, В. Д. О тепловой неустойчивости жидкости в поле центробежных сил / В. Д. Хаит // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1971. — № 1. — С. 137–143.
90. Busse, F. H. Thermal instabilities in rapidly rotating systems / F. H. Busse // *J. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 44, no. 3. — P. 441–460.
91. Вяткин, А. А. Конвективная устойчивость неизотермической жидкости во вращающемся горизонтальном коаксиальном зазоре / А. А. Вяткин, А. А. Иванова, В. Г. Козлов // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2010. — № 1. — С. 12–21.
92. Вяткин, А. А. О конвективной устойчивости жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндрическом слое / А. А. Вяткин, В. Г. Козлов, Р. Р. Сираев // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2017. — № 4. — С. 73–84.
93. Бурмистрова, О. А. Устойчивость вертикальной пленки жидкости с учетом эффекта Марангони и теплообмена с окружающей средой / О. А. Бурмистрова // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2014. — Т. 55, № 3. — С. 17–25.
94. Burmistrova, O. A. Equilibrium and stability of a free liquid film in a longitudinal gravitational field / O. A. Burmistrova // *Journal of SibFU. Mathematics and Physics*. — 2015. — Vol. 8, no. 3. — P. 253–259.
95. Burmistrova, O. A. Thermocapillary instability of a liquid layer on interior surface of a rotating cylinder / O. A. Burmistrova // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — Vol. 754, no. 3. — 032004.

96. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и малые возмущения свободной пленки жидкости в продольном поле тяжести / О. А. Бурмистрова, В. В. Пухначев // Сб. тр. Всерос. конф. «XXIX Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 15–17 ноября, 2010 г.). — Новосибирск: Изд-во ин-та теплофизики СО РАН, 2010. — CD-диск, 17 с.
97. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и устойчивость свободной жидкой пленки в продольном поле тяжести под действием термокапиллярных сил / О. А. Бурмистрова // Сборник трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа, 2015 г.). — Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. — С. 638–640.
98. *Бурмистрова, О. А.* Длинноволновое приближение в динамике неизотермических жидких пленок / О. А. Бурмистрова // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (Новосибирск, 16–20 апреля, 2011 г.). — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2011. — С. 121.
99. *Бурмистрова, О. А.* Устойчивость свободной пленки жидкости в продольном поле тяжести с учетом эффекта Марангони / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 15-17 ноября, 2012 г.). — Донецк: Изд-во Дон. нац. ун-та, 2012. — С. 28.
100. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и устойчивость неизотермической пленки жидкости в продольном поле тяжести / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 29 июня – 4 июля, 2014 г.). — Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2014. — С. 23–24.
101. *Бурмистрова, О. А.* Термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов Всероссийской конференции «Нелинейные волны:

- теория и новые приложения», посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова (Новосибирск, 29 февраля – 2 марта, 2016 г.). — Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2016. — С. 35.
102. *Burmistrova, O. A.* Thermocapillary instability of a liquid layer on interior surface of a rotating cylinder / O. A. Burmistrova, V. V. Pukhnachev // Book of abstracts of IMA8 – 8th Conference of the International Marangoni Association, (Bad Honnef, Germany, 12-16 June 2016). — Bad Honnef, 2016. — P. 90.
103. *Бурмистрова, О. А.* Стационарные режимы вращающегося слоя жидкости на цилиндрической поверхности / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов Всероссийской научной конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» с элементами школы молодых ученых (Ялта, 18-25 сентября, 2016 г.). — Новосибирск: Изд-во Института теплофизики СО РАН, 2016. — С. 18.
104. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
105. *Годунов, С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов // УМН. — 1961. — Т. 16, № 3. — С. 171–174.
106. *Абрамов, А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) / А. А. Абрамов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 542–545.
107. *Вишик, М. И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // УМН. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
108. *Ильин, А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М.: Наука, 1989. — 336 с.