МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Байкин Алексей Николаевич

ДИНАМИКА ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. РАН
Головин Сергей Валерьевич

Новосибирск — 2016

Оглавление

Стр.

Введение . . . 4

Глава 1. МОДЕЛЬ KGD . . . 24
- 1.1 Постановка задачи . . . 24
- 1.2 Определяющие уравнения . . . 25
- 1.3 Численный алгоритм . . . 30
- 1.4 Сравнение с полуаналитическим решением . . . 32
- 1.5 Численный эксперимент . . . 35

Глава 2. МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ . . . 39
- 2.1 Математическая формулировка задачи . . . 39
- 2.2 Автомодельное решение для стационарной полубесконечной трещины . . . 45
  - 2.2.1 Упрощающие предположения . . . 45
  - 2.2.2 Аналитическое решение . . . 46
  - 2.2.3 Физическая интерпретация решения . . . 48
- 2.3 Численный алгоритм . . . 51
- 2.4 Верификации численного алгоритма . . . 53
  - 2.4.1 Проверка на стационарном решении . . . 53
  - 2.4.2 Проверка на численную сходимость . . . 56
  - 2.4.3 Сравнение с известными моделями трещин ГРП . . . 60
- 2.5 Влияние порового давления на динамику развития трещины . . . 66
  - 2.5.1 Коэффициент Био . . . 66
  - 2.5.2 Влияние деформации породы на фильтрацию жидкости . . . 68
  - 2.5.3 Влияние порового давления на напряжения . . . 69
  - 2.5.4 Влияние порового давления на динамику развития трещины в связанной задачи Био . . . 70
- 2.6 Неоднородный пласт . . . 73
  - 2.6.1 Контраст сжимающих напряжений . . . 73

2.6.2 Контраст проницаемости . . . 75
2.6.3 Отсутствие влияния порового давления . . . 78

Заключение . . . 80

Список литературы . . . 82

Введение

Актуальность темы исследования

На сегодняшний день мировая практика нефтегазовой промышленности направлена на применение различных воздействий на продуктивный пласт горных пород для интенсификации добычи из него углеводородов. К числу этих воздействий относятся кислотная обработка добывающих скважин, акустическая обработка, электрическая обработка и волновое воздействие, гидравлический и газодинамический разрыв пласта [1]. По количеству дополнительно добытой нефти после обработки технология гидроразрыва пласта занимает лидирующие позиции. Суть данного метода заключается в следующем. При помощи закачки вязкой жидкости на забое скважины создается избыточное давление, достаточное чтобы преодолеть горное давление и разорвать горную породу. Порода разрывается вдоль поверхностей минимальных напряжений в пласте, и за счет гидродинамического воздействия жидкости в породе начинает расти и раскрываться трещина. На определенном этапе работы вместе с жидкостью в трещину транспортируется расклинивающий агент (проппант), который удерживает трещину от полного закрытия после прекращения закачки. Таким образом создается высокопроводящий канал для извлечения дополнительных труднодоступных запасов нефти и газа. Для максимизации будущей добычи необходимо понимать, какие факторы влияют на образование и рост трещины качественно и количественно. Одним из инструментов для предсказания геометрии и проводимости получившейся трещины является математическое моделирование. В современных реалиях увеличивается количество месторождений со сложным строением [2], откуда все сложнее извлекать нефть, таких как низкопроницаемые коллекторы (сланцы, угольные залежи, плотные песчаники). Как следствие, усложняются технологии гидроразрыва, для описания которых требуются более адекватные и сложные математические модели.

При моделировании гидроразрыва пласта необходимо учитывать несколько взаимосвязанных физических процессов: течение вязкой жидкости по трещине, упругую реакцию стенок трещины на давление жидкости, фильтрацию жидкости через стенки трещины в пласт, разрушение породы и продвижение фронта трещины. Описание динамики трещины является сложной задачей и редко решается в ее полной постановке.

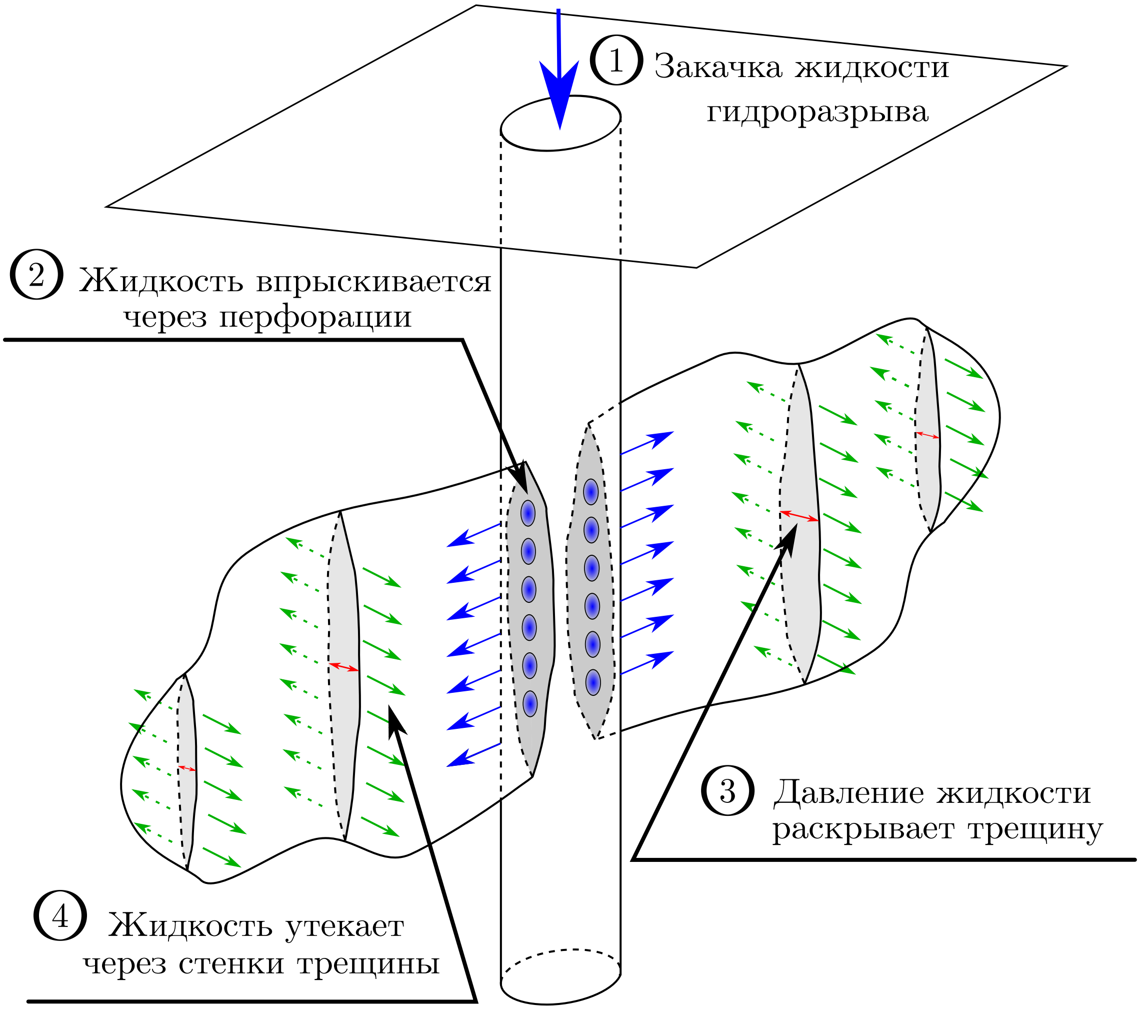


Рисунок 1 — Процесс технологии гидроразрыва

Степень разработанности темы исследования

Математическое моделирование задачи гидроразрыва пласта началось с 50–60-х годов прошлого века. Одна из первых попыток построить геомеханическую модель трещины гидроразрыва была предпринята в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [3], где рассматривалась плоская вертикальная трещина (рисунок 2, а) в однородной линейно-упругой среде. Закачка ньютоновской жидкости гидроразрыва происходила с постоянным расходом через длинный перфорационный интервал вдоль всей высоты трещины. В данных предположениях можно пренебречь краевыми эффектами сверху и снизу и достаточно рассмотреть центральное горизонтальное сечение трещины в условиях плоской деформации, что существенно упростило задачу. В оригинальной модели отсутствовали утечки в пласт и явная зависимость ширины трещины от времени, а также профиль давления в трещине был заменен эквивалентной равномерной нагрузкой. Это позволило получить приближенные аналитические формулы для вычисления падения давления в зависимости от длины трещины. Позднее в работе J. Geertsma и F. de Flerk [4] модель была обобщена на случай радиальных трещин (рисунок 2, б), когда закачка жидкости происходит через точечный источник, и дополнена подмоделью утечек жидкости в пласт на основе формулы Картера [5]. Таким образом, модель получила название Христиановича — Гиртсма — де Клерка (KGD).

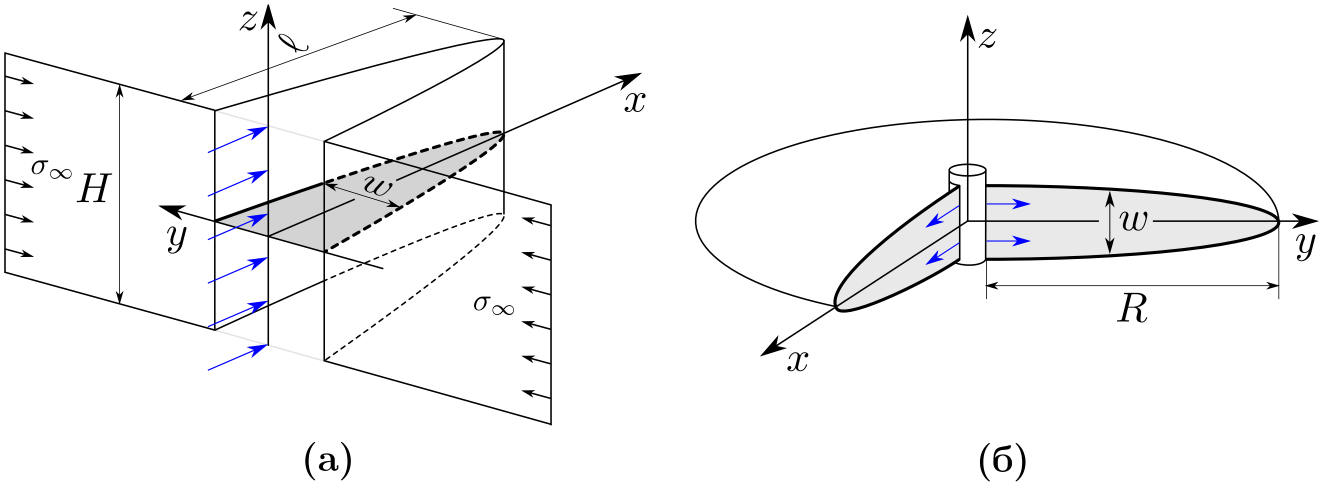


Рисунок 2 — Представление трещины ГРП в модели KGD (а) и радиальной модели (б)

В более поздних работах был проведен безразмерный анализ и рассмотрены различные асимптотические режимы распространения трещины. В результате было показано, что в случае отсутствия отставания фронта жидкости от фронта распространения трещины существуют два конкурирующих механизма диссипации энергии (вязкая диссипация и разрушение породы) и два механизма запасания закачиваемой жидкости (в трещине и в пласте). Поэтому можно выделить 4 предельных режима распространения трещины (рисунок 3): режим преобладания вязкой диссипации с отсутствием утечек в пласт (M) [6–8], режим преобладания вязкой диссипации с существенными утечками в пласт ($\tilde{M}$) [9], режим преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт (K) [8; 10; 11], режим преобладания разрушения породы с существенными утечками в пласт ($\tilde{K}$) [10]. Каждому из режимов соответствует своя схема масштабирования и полуаналитическое автомодельное решение. Общий подход для построения этих решений основывается на разложении неизвестных в ряд из подходящих специальных функций и нахождении коэффициентов ряда при помощи некоторой оптимизационной процедуры [12; 13].

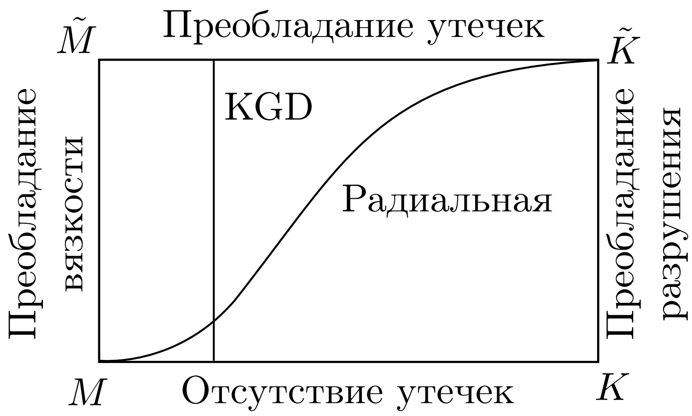


Рисунок 3 — Диаграмма возможных режимов распространения трещины в рамках моделей KGD и радиальной в отсутствие отставания фронта жидкости от положения вершины трещины

На рисунке 3 также можно выделить переходные режимы, соответствующие ребрам прямоугольника $M\tilde{M}\tilde{K}K$. Например, ребро $M\tilde{M}$ соответствует режиму преобладания вязкости [9], при котором трещина раскрывается вдоль заранее созданного пути, так что разрушение породы отсутствует. В работе [9] также были построены решения вблизи точек M (near-M решение) и $\tilde{M}$ (near-$\tilde{M}$ решение), уточняющие в первом приближении решения для соответствующих вершин. Решение MK, характеризующееся отсутствием утечек жидкости в пласт, было получено впервые в оригинальной работе [12] и улучшено в [13]. Однако точность полученных результатов резко ухудшалась при малых значениях вязкости разрушения, что побудило авторов [14] построить решение для малой вязкости разрушения путем добавления поправки к M-решению. Режим $\tilde{M}\tilde{K}$, при котором большая часть жидкости утекает в пласт, описывается в работе [15]. Решение вдоль ребра $K\tilde{K}$, где преобладает вязкость разрушения в отсутствие падения давления вдоль трещины, рассмотрено в работе [10], где также найдены асимптотические решения на раннем (near-K) и позднем (near-$\tilde{K}$) временном интервале. Численный алгоритм для расчета произвольного решения внутри прямоугольника $M\tilde{M}\tilde{K}K$ представленно в работе [15].

Важной деталью при построении решений в том или ином режиме распространения является правильный учет асимптотического поведения давления и раскрытия трещины вблизи ее вершины [16–18]. Согласно линейно-упругой механике разрушения значение ширины трещины вблизи вершины $x \approx x_{tip}$

асимптотически эквивалентно $\dfrac{8(1-\nu^2)K_{Ic}}{E\sqrt{2\pi}}\sqrt{x_{tip}-x}$ [19], где x_{tip} — положение вершины трещины, K_{Ic} — вязкость разрушения, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды соответственно. Однако при малых значениях вязкости разрушения $K_{Ic} \ll 1$ определяющими становятся асимптотики, которые связывают течение жидкости по трещине с раскрытием и утечками в пласт. Более того, при конечной вязкости разрушения вблизи вершины трещины имеется пограничный слой [15], в котором решение определяется режимом преобладания вязкости разрушения. На большом расстоянии от вершины решение будет в большей степени походить на решение с малым K_{Ic} [15].

Методы моделирования трещин в условиях плоской деформации очень часто хорошо переносятся на радиальную модель, в которой развитие трещины происходит вследствие закачки из точечного источника. Таким образом, в случае однородного пласта задача является осесимметричной. Впервые данная модель была рассмотрена в работе [4]. Впоследствии по аналогии с моделью KGD для модели радиальных трещин были найдены и проанализированы предельные режимы распространения (Madyarova M. Propagation of a fluid-driven penny-shaped fracture in a permeable elastic medium: master's thesis. / Univ. of Minnesota. Minneapolis, 2003.) [10;20]. В частности, было показано, что в общем случае радиальная трещина распространяется из M-режима в $\tilde{K}$-режим (см. рисунок 3).

В некоторых работах в рамках радиальной и KGD моделей учитывалось отставание (лаг) фронта жидкости гидроразрыва от фронта разрушения. В такой постановке предполагается, что вблизи фронта трещины существует зона кавитации, где давление равно давлению жидкости в пласте или нулю. Границы этой зоны ищутся из критерия разрушения и закона сохранения массы в трещине. При исследовании модели KGD с лагом авторами [21] было замечено, что стандартные итерационные процедуры, связывающие течение жидкости по трещине, упругую реакцию стенок и продвижение вершины трещины, оказываются расходящимися. В качестве альтернативы был предложен оригинальный итерационный алгоритм со сжимающим оператором, гарантирующим сходимость. Различные режимы распространения трещины с учетом лага при малом времени закачки были рассмотренны в работе [22]. Случаи больших и малых утечек были аналитически проанализированы авторами [23], где в результате были получены оценки размеров радиальной трещины, которые можно использовать в инженерной практике. Что касается учета лага фронта жидкости в более общих моделей плоских трещин, один из эффективных методов представлен в работе [24].

Другую концепцию гидроразрыва предложили в своей работе [25] T. K. Perkins и L. R. Kern, где предполагается, что трещина имеет конечную постоянную высоту, намного меньшую ее длины. В такой постановке можно считать, что все параметры изменяются медленно вдоль трещины. Поэтому каждое вертикальное сечение трещины рассматривается отдельно как плоское напряженно-деформированное состояние (рисунок 4, а). Избыточное давление предполагается постоянным в каждом сечении, которое будет представлять собой эллипс. Скорость течения жидкости определяется по формуле Пуазейля для эллиптических труб [26]. В работе Нордгрена [27] данная модель была усовершенствована использованием нестационарного закона сохранения массы в трещине и дополнена моделью Картера [5] утечек в пласт, что определило финальное название модели PKN (Perkins — Kern — Nordgren). Режимы распространения трещины и поведение решения вблизи ее вершины исследовались в работах [28; 29].

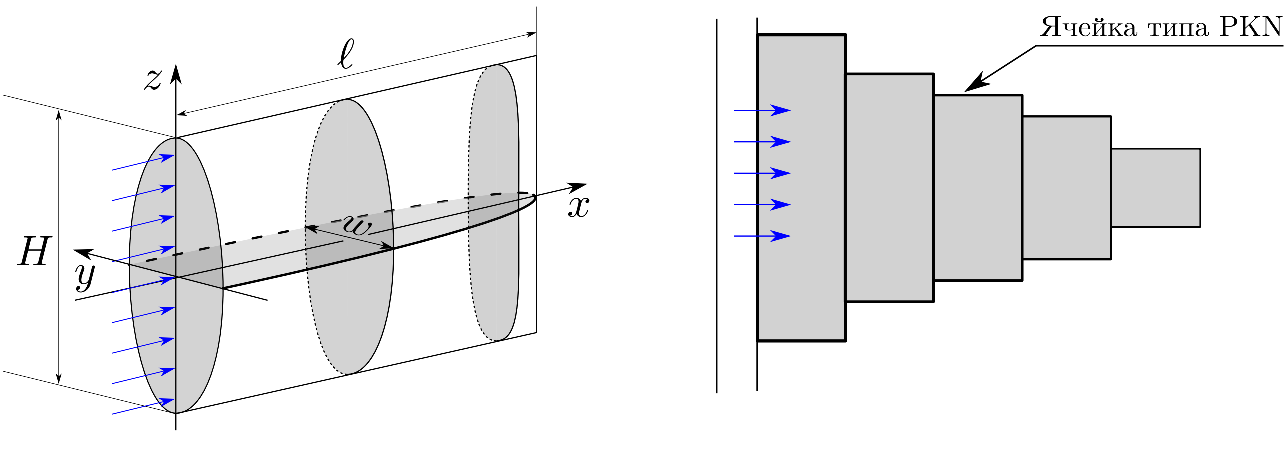


Рисунок 4 — Представление трещины в модели KGD (а) и радиальной модели (б)

В рамках данной модели в работе [30] была рассмотрена нелокальная связь между максимальным раскрытием различных вертикальных сечений трещины. Для этого с учетом предположений модели PKN было проведено упрощение в общей зависимости между давлением и раскрытием для планарной трещины в трехмерном пространстве. Асимптотический анализ показал, что вдали от вершины трещины решение в первом приближении аппроксимируется классическим решением PKN модели, что может служить ее строгим обоснованием. Вблизи вершины трещина ведет себя как в условиях плоской деформации, что приводит к степенной асимптотике для раскрытия. Таким образом, это дает шанс в модели PKN учитывать разрушение породы и правильное поведение решения вблизи вершины трещины.

Как обобщение PKN подхода для слоистого пласта возникли псевдотрехмерные модели (P3D) [31–33]. В наиболее распространенном их варианте трещина разбивается вдоль всей своей длины на ячейки типа PKN (рисунок 4, б), высота которых определяется с помощью критерия, рассматриваемого в линейно-упругой механике разрушения. Отличие от PKN модели также проявляется в том, что в каждом сечении трещины кроме среднего избыточного давления в ячейке учитывается разница между смыкающими напряжениями в слоях и перепад давления за счет гидростатики. При существенном вертикальном течении вязкой жидкости к верхней и нижней границе трещины, наблюдаемом, например, при прорыве трещины в высокопроницаемую зону, используют модель P3D с неравновесной высотой. В этом случае, используя асимптотическое решение вблизи вершины трещины для модели KGD [16], в давление вносят поправку, возникающую из-за ненулевой скорости жидкости вблизи верхней и нижней границ. На практике же подправляется не давление, а вязкость разрушения [32;34]. В недавней публикации [34] модель P3D была также усовершенствована введением нелокальной зависимости между давлениями в PKN-ячейках и учетом закругленной формы трещины вблизи ее вершины. Кроме этого в работе уделено особое внимание обсуждению границ применимости модели путем сравнения с более общей трехмерной моделью для планарных трещин.

Несмотря на общность постановки задачи в модели P3D, существуют типы пласта и трещин, которые не могут быть описаны в рамках данного подхода, например, если сжимающие напряжения в слоях меняются немонотонно вдоль глубины залегания или если возникает неограниченный рост трещины в высоту [30]. В любом из случаев, когда трещина имеет форму «песочных часов», модель P3D неприменима. Для моделирования таких трещин была разработана модель Planar 3D (PL3D) на основе метода разрывных смещений для плоской трещины в трехмерной постановке задачи линейной теории упругости (рисунок 5). Как и в модели P3D, трещина распространяется в слоистом пласте, но в Planar 3D появляется возможность учитывать не только контраст сжимающих напряжений в слоях, но и изменение упругих свойств [35]. Течение вязкой жидкости по трещине описывается законом сохранения массы в приближении теории смазки в двумерном случае, а утечки в пласт — законом Картера. Как и в модели KGD, вблизи фронта трещины давление имеет разную особенность в зависимости от режима распространения, который реализуется в данной точке. Для правильного учета поведения решения при численном расчете методом граничных элементов используются специальные «умные» элементы вблизи границы трещины, что позволяет получать достаточно точные результаты на относительно грубых сетках. В этих элементах заложена универсальная асимптотика для раскрытия трещины, адаптирующаяся под произвольный режим распространения [36; 37]. Она была получена сведением задачи описания локального решения вблизи границы планарной трещины к анализу асимптотических решений вблизи вершины трещины модели KGD [36]. Для отслеживания фронта трещины во время распространения используется неявный метод функции уровня.

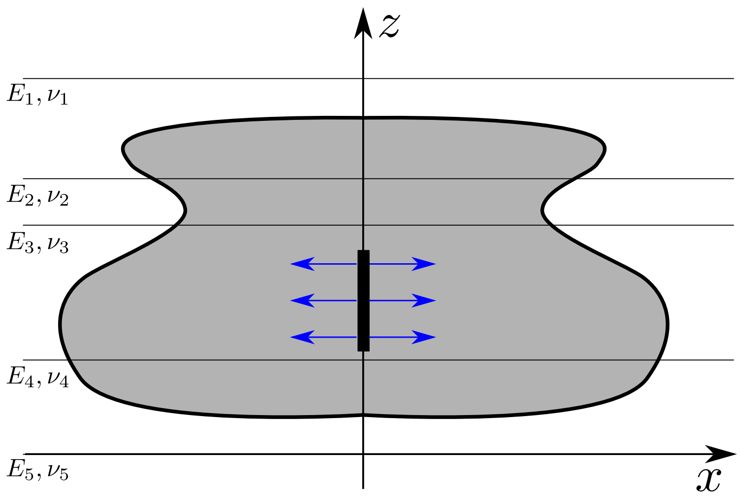


Рисунок 5 — Трещина в модели Planar 3D

Иной подход к задаче гидроразрыва был развит А. М. Линьковым с соавторами. Им было показано, что задача гидроразрыва является некорректной по Адамару, если ее решать при некотором фиксированном положении фронта трещины на каждом шаге по времени с использованием известной асимптотики решения вблизи фронта [38]. С вычислительной точки зрения это ведет к существенной потери сходимости при использовании стандартных вычислительных схем [39; 40]. Для устранения этой проблемы было предложено переформулировать задачу в терминах скорости частиц жидкости. Таким образом, определяющим уравнением становится уравнение скорости, которое позволяет явно находить скорость фронта трещины и отслеживать его при помощи различных методов распространяющихся поверхностей (метод функции уровня, метод быстрой прогонки) [41]. Для корректной постановки задачи необходимо также провести ее ε-регуляризацию [42]. Данный метод был сформулирован в общем виде для произвольно распространяющихся трещин ГРП и успешно применялся для моделей PKN [39], KGD [43] и P3D [44].

В вышеперечисленных моделях плоских трещин считается, что трещина инициируется и распространяется в плоскости, перпендикулярной минимальным главным сжимающим напряжениям в пласте. Однако данное предположение нарушается, когда начальные перфорации не лежат в этой плоскости. В этом случае на начальном этапе распространения траектория трещины заметно искривляется, пытаясь вернуться в эту плоскость. Как обобщение подхода KGD, в работах [45–49] были построены модели, в которых рассматривалась криволинейная двумерная трещина, распространяющаяся из скважины конечного размера в условиях плоской деформации. Уравнения движения жидкости в трещине берутся из модели KGD с заменой прямолинейной координаты x на криволинейную вдоль линии распространения трещины. В качестве условия роста и выбора направления трещины используется критерий из линейно-упругой механики разрушения для трещин нормального отрыва [19]. В первых работах [45–47] по изучению двумерных трещин давление, создаваемое жидкостью, считалось постоянным или аппроксимировалась заданным профилем. В [48] определяющие уравнения записывались в криволинейных координатах и решались вдоль наперед заданной траектории трещины. В самой общей постановке задача была решена в [49] с помощью дуального метода граничных элементов. Двумерное моделирование трещин гидроразрыва показало, что траектория трещины определяется в основном углом перфорирования и соотношением между максимальным и минимальным напряжениями залегания. Кроме того, неверный выбор угла перфорирования приводит к пережатию трещины вблизи скважины.

Описанию самой ранней стадии гидроразрыва пласта — инициации трещины из перфораций было посвящено несколько работ [50–54]. Целью данных исследований было определение давления инициации, местоположения и ориентации зародышевой трещины. В предложенных подходах моделировалось напряженно-деформированное состояние пласта со включениями в виде скважины с перфорациями, которые представлялись цилиндрическими полостями. В качестве критерия разрушения использовался критерий максимальных растягивающих напряжений. В результате моделирования в [52] были сделаны следующие выводы: перфорации не оказывают влияния друг на друга, если они расположены на расстоянии 6–8 их диаметров; для снижения давления инициации необходимо направлять перфорации в сторону максимального напряжения залегания. Также было показано [50], что трещина инициируется на стыке скважины и той перфорации, которая направлена в сторону максимального напряжения залегания. Более детально поведение давления инициации было исследовано в [51]. В работах [53; 54] были проанализированы все возможные режимы инициации и установлены условия их реализации: от полости скважины, от стыка скважины и перфорации и от середины перфорации.

Общий недостаток всех приведенных выше моделей заключается в том, что продуктивный пласт рассматривается в них как упругая среда. Таким образом, в этих подходах не учитывается взаимное влияние давления в порах горной породы на напряженного-деформированное состояние среды, что существенно сказывается на геометрии трещины и давлении жидкости в ней.

Для описания деформаций в пористых средах с учетом фильтрации К. Терцаги была предложенна модель для пористых упругих сред [55], которая впоследствие была усовершенствована в работах М. А. Био [56–58]. В рамках данного подхода тензор напряжений в среде представляется в виде суммы тензора эффективных напряжений, отвечающего за деформацию породы, и слагаемого, уравновешивающего действие жидкости в порах. Определяющим уравнением для порового давления служит уравнение фильтрации с учетом деформирования упругого скелета и сжимаемости пор. Подробный вывод этих уравнений представлен в [59; 60]. Данная модель позволяет решать множество задач механики грунтов: задачу об уплотнения грунта, задачу о деформации морского дна под действием волн, задачу о притоке к скважине и др.

Первые попытки применить уравнения Био в теории трещин были сделаны в 1970-е годы в работах [61–63], где рассматривались стационарные и распространяющиеся трещины в пороупругой среде. Давление и нагрузки, приложенные к трещине, считались заданными априори.

При моделирования трещин гидроразрыва влияние порового давления в ранних работах рассматривалось как дополнительное сжимающее напряжение, которое препятствует раскрытию трещины, и получило название «обратное напряжение» (backstress). Аналогичные соображения использовались в [64], где был предложен симулятор гидроразрыва в упрощенной постановке модели KGD, учитывающий фильтрацию и перенос тепла в пласте. Позднее был построен численный алгоритм [65] для модели PKN с утечками в пласт по закону Картера, учитывающий обратное напряжение. В результате численных экспериментов было показано, что давление в трещине увеличивается с увеличением влияния эффекта пороупругости, а геометрия трещины почти не изменяется. Учет обратного напряжения при трехмерной симуляции трещин гидроразрыва был сделан в работе [66]. В наиболее общем виде численный алгоритм для задачи гидроразрыва на основе фундаментальных решений для трехмерных уравнений пороупругости был рассмотрен в [67].

С вычислительной точки зрения особый интерес представляет работа [68], где моделируется взаимодействие трещины ГРП с известным распределением давления и естественной неоднородности в виде высокопроводящего разлома. Для решения трехмерных уравнений пороупругости используется гибридная схема на основе метода опорных операторов и модифицированного метода конечных объемов. Линейная задача решается с помощью многосеточного метода (MULTIGRID) [69], который зарекомендовал себя как один из самых эффективных. При моделировании распространение трещины не рассматривается, но рассчитываются зоны возможного разрушения, а также исследуются режимы взаимодействия трещины и разлома.

Аналитический подход к проблеме гидроразрыва в пороупругой среде был предпринят в [70]. Исходя из общих уравнений Био автором были выведены определяющие соотношения для распространяющейся трещины в радиальной и KGD геометрии. Решение задачи было явно построено только для случая радиальной трещины при большом времени, когда трещина перестает распространяться. В более поздней работе [71] также исследовались радиальные трещины и трещины в условиях плоской деформации. Однако вместо использования критерия разрушения авторами постулировалось, что длина трещины в каждый момент времени пропорциональна квадратному корню из времени. Таким образом удалось построить автомодельное решение для указанной задачи.

Важнейшие аналитические результаты для трещин ГРП в пороупругой среде были получены в диссертации [72]. В данной работе рассматривалась радиальная трещина гидроразрыва и изучалось влияние трехмерной фильтрации вблизи трещины на ее распространение. В результате было показано, что трехмерный режим фильтрации и связанный с ним пороупругий эффект оказывают существенное влияние на развитие трещины. В частности, были замечены более высокие значения давления в трещине вследствие расширения порового пространства, чем в случае одномерной фильтрации (закон Картера). Другим последствием трехмерной фильтрации оказалась возможность реализации режимов остановки трещины. В этом случае трещина прекращает свое распространение, когда расход закачиваемой жидкости уравновешивается утечками через стенки трещины в пласт. Кроме этого был проведен анализ асимптотического поведения решения вблизи вершины трещины с помощью методов, изложенных в [16; 17]. В случае развитой картины трехмерной фильтрации решение вблизи вершины трещины не может рассматриваться в общем случае как решение для полубесконечной трещины, которая распространяется с постоянной скоростью. Более того, при данных обстоятельствах нельзя разбить решение на два, что характерно для постановок задач ГРП в рамках теории упругости: решение вблизи вершины и глобальное решение во всей трещине, не учитывающее поведение вблизи ее вершины.

Обобщая теоретические исследования влияния порового давления на распространение трещины, можно сделать следующие выводы, сформулированные в [73]:

1. Давление на забое скважины, полученное с учетом эффекта пороупругости, может быть до 60 % выше давления, рассчитанного без учета этого эффекта [74].
2. Мгновенное давление после закрытия трещины может быть больше минимальных главных напряжений [75].
3. Отношение размеров трещины (длина/раскрытие) зависит от выбора модели утечек. При использовании модели Картера, где отсутствует зависимость утечек от давления в трещине, наблюдается малая разница между размерами трещин с учетом и без учета эффекта пороупругости [65]. Если утечки зависят от давления в трещине, то разница в размерах получившейся трещины начинает проявляться.

Результаты некоторых теоретических исследований нашли свое отражение в эксперименте. Например, реальная полевая практика показала наличие роста давления закрытия трещины с течением времени [76; 77]. Благодаря анализу измеренного пластового давления и давления на поверхности скважины при распространении трещины была обнаружена тесная связь между этими величинами [78; 79]. В работе [80] на основе данных множества проведенных микроГРП был сделан вывод, что при закачке жидкости с высоким расходом давление закрытия трещины и мгновенное давление на устье закрытой скважины после ГРП ниже, чем в случае закачки с низким расходом. Объяснение причины возникающей разницы было найдено при помощи сравнения полевых данных и результатов расчета с использованием модели Био [81]. Кроме этого некоторые лабораторные эксперименты [77; 82–84] показали, что мгновенное давление после закрытия трещины превышает известные или ожидаемые значения минимальных главных напряжений в пласте. Теоретическое обоснование данного явления также было отнесено к эффекту пороупругости [75]. Экспериментальная работа, проделанная в работах [85; 86], показала, что давление разрыва в трещине зависит от величины закачиваемого расхода, что тоже нашло объяснение при помощи модели пороупругости [75; 87; 88].

Существует множество примеров эффектов пороупругости из других областей геомеханики. К ним относятся эффект Манделя — Краера (немонотонная предыстория давления) [89;90] и эффект Нордбергума (повышение уровня грунтовых вод в начале добычи воды из неподалеку расположенного водоносного пласта) [91].

Цели и задачи исследования

Несмотря на обширное количество открытий сделанных в области моделирования гидроразрыва пласта, остается открытым вопрос о поведении трещины ГРП в неоднородной среде с учетом влияния порового давления. Изучение данного вопроса требует построения более общей математической модели для задачи гидроразрыва и эффективных численных методов ее решения, потому как полученные ранее аналитические результаты о виде асимптотики решения вблизи вершины трещины, на которых базируется большинство существующих численных алгоритмов, оказывается неприменимыми [72].

В связи с этим целью диссертационной работы является разработка численного подхода для эффективного решения задачи гидроразрыва в неоднородной пороупругой среде и его применение к детальному исследованию влияния порового давления и неоднородностей породы на динамику развития трещины ГРП.

В ходе работы были решены следующие задачи:

– разработка эффективного численного алгоритма на основе метода конечных элементов в рамках модели KGD для режима распространения трещины с преобладанием вязкой диссипации, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины в процессе расчета;
– тестирование предложенного численного метода для модели KGD на сходимость с использованием известного аналитического решения;
– при помощи предложенного алгоритма решена задача о периодической закачке жидкости в трещину и проведен анализ решения;
– построение численной модели трещины ГРП, в которой отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины и перестраивать расчетную область в процессе расчета, при распространении трещины в неоднородной пороупругой среды в условиях плоской деформации;
– построение точного автомодельного решения, описывающего дипольное течение в окрестности вершины стационарной полубесконечной трещины в пороупругой среде;
– верификация применяемого численного подхода на построенном автомодельном решении; исследование алгоритма на численную сходимость, а также проведение сравнения результатов численных экспериментов с известными данными из литературы;
– применение разработанной модели для детального анализа влияния порового давления, эффектов пороупругости и неоднородностей в сжимающих напряжениях и физических характеристиках среды на динамику и направление распространения трещины ГРП.

Научная новизна

Обычной практикой при решении задачи о распространении трещины ГРП является инкрементальное наращивание длины трещины и перемещение ее вершины в процессе численного счета. Однако при таком подходе, как было показано в [21], применение стандартных итерационных методов для соблюдения закона сохранения массы в трещине приводит к расходящейся процедуре, поэтому задача требует специальных приемов для ее решения [21; 37; 39]. В настоящей работе впервые представлен алгоритм для модели KGD, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины, что позволяет избежать вышеуказанной проблемы. Кроме того, благодаря общим предположениям о механизме потерь жидкости в пласт, данный алгоритм позволяет эффективно моделировать распространение трещины гидроразрыва в случае произвольной зависимости утечек от давления жидкости в трещине.

Для моделирования развития трещины ГРП в неоднородной пороупругой среде был разработан численный алгоритм на основе метода конечных элементов. Отличительной особенностью алгоритма является то, что задача формулируется в единой слабой постановке, позволяющей одновременно решать двумерные уравнения равновесия и фильтрации и одномерное уравнение для течения жидкости по трещине. В существующих работах указанные уравнения решаются по отдельности и связываются с помощью специальной итерационной процедуры или требуют искусственного введения дополнительных переменных (множителей Лагранжа) [92], что обуславливает необходимость использования дополнительных вычислительных ресурсов. Кроме этого в предложенном численном подходе также нет необходимости перестраивать расчетную область, явно отслеживать положение вершины трещины и делать априорные предположения относительно поведения решения вблизи нее, что существенно расширяет класс решаемых задач.

Для задачи о стационарной полубесконечной трещине в пороупругой среде было построено точное автомодельное решение, для которого была дана физическая интерпретация и которое было использовано для верификации численного алгоритма.

В рамках модели пороупругости давление в порах среды способно изменять ее напряженно-деформированное состояние и, обратно, деформация среды влияет на фильтрацию. В диссертации приводится подробный анализ каждой из этих взаимосвязей в отдельности путем сравнения результатов численных расчетов для связанной, несвязанной и частично связанных задач Био. Также в работе выводятся эмпирические правила, позволяющие качественно объяснить различие в геометрии трещины с учетом и без учета влияния порового давления.

В ходе исследования было показано, что при наличии неоднородностей физических характеристик среды роль порового давления усиливается, что качественно влияет на направление распространения трещины ГРП и ее геометрические характеристики. В частности, при наличии в среде слоев с существенно различной проницаемостью и возникающей неоднородностью обратного напряжения, препятствующего распространению трещины, наблюдается рост либо только правого, либо левого крыла трещины. В случае когда влияние порового давления отсутствует, такого не происходит, и трещина распространяется в обоих направлениях. Кроме этого было обнаружено, что в среде со слоистой структурой контраст сжимающих напряжений даже в 1 % приводит к существенно несимметричному распространению трещины.

Теоретическая и практическая значимость

Разработанные в диссертации численные алгоритмы могут применяться для расчета развития реальных трещин ГРП на начальном этапе закачки жидкости без добавления расклинивающего агента, а также послужить основой для коммерческого симулятора гидроразрыва пласта.

Полученные результаты численных экспериментов свидетельствуют о необходимости учета влияния порового давления на процесс развития трещины ГРП. Проделанный в настоящей работе тщательный анализ взаимосвязи давления в порах и деформации пороупругой среды, а также учет влияния неоднородностей ее физических характеристик, дают новое, более глубокое понимание процесса образования трещин ГРП. Таким образом, полученные качественные и количественные результаты могут быть полезны в проектировании оптимальных работ по гидроразрыву пласта.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе для решения поставленных задач использовались:

– аппарат механики сплошных сред для формулирования математической постановки задачи;
– методы теории дифференциальных уравнений для построения и анализа точных решений, вывода слабой формулировки задачи;
– метод конечных элементов [93] для численного решения сформулированных задач в слабой постановке, реализованный с помощью открытого программного продукта FreeFEM++ [94];

– правило Рунге для практической оценки погрешности численного метода [95].

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университе»..

На защиту выносятся следующие результаты:

– численный подход к моделированию гидроразрыва пласта без отслеживания положения вершины трещины и перестраивания расчетной области в процессе расчета, а также его применение в рамках моделей KGD и модели трещины ГРП в пороупругой среде в условиях плоской деформации;
– точное автомодельное решение, описывающее дипольное течение в окрестности вершины стационарной полубесконечной трещины в пороупругой среде, и его использование для верификации численного подхода;
– описание влияния порового давления и наличия контраста проницаемости и сжимающих напряжений на геометрию, динамику и направление распространения трещины гидроразрыва в пороупругой среде.

Степень достоверности и апробация результатов

Прежде всего достоверность результатов, полученных в настоящей работе, обеспечивается использованием законов механики и определяющих соотношений, устоявшихся в научном сообществе, при выводе математических моделей. Численное решение задач в диссертации было проведено широко известным методом конечных элементов [93], реализованным в хорошо оттестированной среде FreeFEM++ [94]. Корректность результатов математического моделирования также подтверждается проделанной проверкой численных алгоритмов на сходимость, в том числе с использованием аналитических решений.

Основные результаты работы докладывались

– на семинаре «Прикладная гидродинамика» института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2013),
– на конкурсе молодых ученых института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2013), где было получено призовое 2-е место,

- на конкурсе среди аспирантов СО РАН и НГУ 1-го и 2-го годов обучения на соискание стипендий Шлюмберже (Новосибирск, 2014), где было получено призовое 3-е место,
- на конкурсе молодых ученых института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2014), где было получено призовое 1-е место,
- на конкурсе молодых ученых института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015), где было получено призовое 1-е место,
- на семинаре «Численные методы в механике сплошной среды» института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2016),
- на семинаре кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, 2016),
- на семинаре «Прикладная гидродинамика» института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2016),

а также на следующих научных конференциях:

- Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 95-летию академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2014),
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015)
- VIII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015),
- Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2016),
- Международная конференция «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2016).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [96–98], 4 — в тезисах докладов [99–102], 1 — в трудах конференции [103], индексируемое в РИНЦ.

Диссертационная работа выполнена при государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проекты НШ-2133.2014.1, НШ-8146.2016.1).

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, разработке и верификации численного метода для ее решения, проведении численных экспериментов, обсуждении полученных результатов и их физической интерпретации, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов. В частности, большинство результатов, изложенных во второй главе диссертации, были получены автором полностью самостоятельно.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 94 страницы с 46 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 115 наименований.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации посвящена классической модели KGD и предложенному для нее численному алгоритму, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины. В параграфах 1.1 и 1.2 сформулирована постановка задачи и приведены определяющие уравнения модели. В параграфе 1.3 подробно рассмотрен численный алгоритм на основе метода конечных элементов, а в параграфе 1.4 продемонстрирована его сходимость при помощи сравнения численного решения и автомодельного полуаналитического решения из [7] на последовательности сеток. На примере модельной задачи о периодической закачке жидкости гидроразрыва в трещину в параграфе 1.5 показана возможность алгоритма адекватно моделировать случаи с переменным сценарием закачки и нестационарными утечками в пласт.

Во второй главе описана модель развития трещины гидроразрыва в пороупругой среде в условиях плоской деформации, а также ее применение к исследованию влияния давления поровой жидкости на геометрию и динамику распространения трещины ГРП. В параграфе 2.1 приведены общая математическая формулировка задачи и определяющие уравнения модели. В параграфе 2.2 рассматривается упрощенная задача о стационарной полубесконечной трещине в пороупругой среде, для которой в явном виде находится точное решение. Там же дается физическая интерпретация полученного решения. Параграф 2.3 посвящен описанию численного алгоритма на основе метода конечных элементов для задачи о распространении трещины в общей постановке. В основе предлагаемого алгоритма лежит возможность решения двумерных уравнений равновесия и фильтрации совместно с одномерным уравнением для течения жидкости по трещине в единой слабой формулировке. С помощью данного алгоритма в параграфе 2.4 численно воспроизводится точное решение из параграфа 2.2 с оценкой порядка сходимости. Построенный численный алгоритм также проверяется на численную сходимость в более общей постановке при решении нестационарной задачи. В качестве дополнительной верификации показывается согласие результатов, полученных в диссертации и работе [92], где рассматривается аналогичная модель трещины в пороупругой среде. В параграфе 2.5 при помощи разработанной численной модели исследуется влияние порового давления на геометрические характеристики трещины гидроразрыва. В частности, подробно исследуется взаимосвязь между уравнениями равновесия и фильтрации посредством коэффициента Био и объясняются причины различия в получившихся трещинах для связанной, несвязанной и частично связанных задачах. В параграфе 2.6 исследуется динамика трещины гидроразрыва в слоистой пороупругой среде с контрастом в сжимающих напряжениях и проницаемости. В результате численных экспериментов обнаруживается выделенное направление распространения трещины и приводится подробное объяснение физических механизмов, лежащих в основе данного феномена.

В заключении кратко формулируются основные результаты диссертации.

Благодарности

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д-р физ.-мат. наук, проф. Сергею Валерьевичу Головину за интересную задачу, обсуждение идей и результатов, постоянное внимание и руководство работой, а также Вадиму Исмаиловичу Исаеву за моральную поддержку и ценные комментарии.

Глава 1. МОДЕЛЬ KGD

1.1 Постановка задачи

Данная глава диссертации будет посвящена рассмотрению симметричной вертикальной трещины гидроразрыва длины $2L$ и высоты H, распространяющейся в бесконечной упругой пористой среде в условиях плоской деформации. Для начала введем систему координат, как показано на рисунке 1.1. Рост трещины будет происходить за счет гидродинамического воздействия на стенки трещины несжимаемой неньютоновской степенной жидкостью. Закачка жидкости в трещину будет происходить равномерно через перфорационный интервал длины H, расположенный вдоль оси Oz. Благодаря этому можно пренебречь краевыми эффектами вблизи верхней и нижней границ трещины и рассматривать только центральное горизонтальное сечение трещины плоскостью $z = H/2$ как плоское напряженно-деформированное состояние.

Таким образом, делаются следующие предположения относительно геометрии трещины: трещина плоская, и ее сечение плоскостью Oxz представляет собой прямоугольник; раскрытие трещины не зависит от координаты z: $w = w(t,x)$, где t — время. Также предполагается, что в пласте изначально действуют сжимающие напряжения σ_∞, направленные перпендикулярно плоскости трещины.

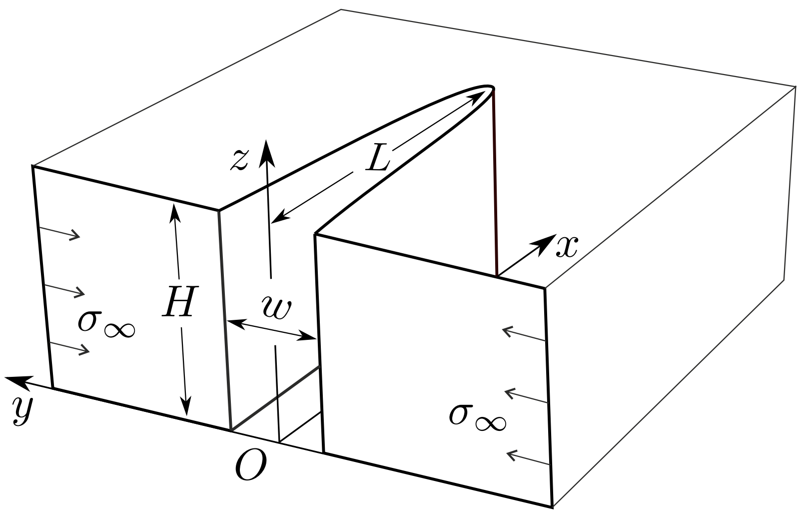


Рисунок 1.1 — Геометрия трещины в модели KGD

Горная порода, в которой распространяется трещина, моделируется как однородный изотропный линейно-упругий материал. Стенки трещины предполагаются проницаемыми, но влиянием давления в порах породы на напряженное состояние пласта будем пренебрегать. Модель, в которой это влияние учитывается, будет описана в главе 2. Скорость утечек жидкости через стенки трещины q_l либо является заданной функцией от (t, x), либо функционально зависит от абсолютного давления жидкости $P(t,x)$ в трещине. Следуя подходу, используемому в работах многих авторов, в этой главе все операции будут производиться с давлением жидкости, которое будет отсчитываться от величины σ_∞: $p(t,x) = P(t,x) - \sigma_\infty$. Таким образом, p будет иметь смысл избыточного давления по сравнению с начальными сжимающими напряжениями в пласте.

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу: при известных параметрах среды (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, утечки в пласт, сжимающие напряжения), жидкости гидроразрыва (коэффициент густоты потока, показатель поведения), интенсивности процесса гидроразрыва (величина закачиваемого расхода) необходимо определить геометрию трещины (полудлину $L(t)$ и раскрытие $w(t,x)$), а также распределение избыточного давления $p(t,x)$ в трещине.

1.2 Определяющие уравнения

В первую очередь в данной модели предполагается, что течение жидкости ГРП по трещине определяется законом сохранения массы в следующей форме [104]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -q_l. \tag{1.1}$$

Здесь q обозначает расход жидкости через поперечное сечение трещины, а q_l — скорость утечек в пласт. Выражение для q в случае неньютоновской степенной жидкости задается формулой Пуазейля [32]:

$$q = -\frac{w^{\frac{2n+1}{n}}}{M'^{1/n}\left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|^{\frac{n-1}{n}}}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad M' = \frac{2^{n+1}\,(2n+1)^n\,M}{n^n}. \tag{1.2}$$

Здесь M и n — коэффициент густоты потока и показатель поведения жидкости гидроразрыва соответственно. Величина

$$\Lambda(w, p_x) = w^{\frac{2n+1}{n}}\ M'^{-1/n}\ \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|^{\frac{1-n}{n}}$$

называется мобильностью жидкости. Уравнение (1.1) в совокупности с выражением (1.2) дает так называемое уравнение теории смазки.

Реакция стенок трещины на давление жидкости в случае плоской деформации выражается формулой Колосова—Мусхелишвили [105]:

$$w(t,x) = \frac{4}{\pi E'}\int\limits_0^L p(t,\xi)\,B(x,\xi;L)\,d\xi, \qquad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \tag{1.3}$$

с сингулярным ядром

$$B(x,\xi;L) = \ln\left|\frac{\sqrt{L^2-x^2}+\sqrt{L^2-\xi^2}}{\sqrt{L^2-x^2}-\sqrt{L^2-\xi^2}}\right|. \tag{1.4}$$

Здесь E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругой среды, соответственно. Обратная зависимость для (1.3) записывается в виде

$$p(t,x) = \frac{E'}{4\pi}\int\limits_0^L \frac{\partial w(t,\xi)}{\partial \xi}\frac{2\,\xi\,d\xi}{x^2-\xi^2}. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.1) для одномерного течения жидкости по трещине и формула (1.3) для раскрытия трещины образуют замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений с неизвестными p и w. Граничные условия для этой системы зависят от выбора критерия разрушения, приведенного ниже.

Согласно классической линейно-упругой механике разрушения (ЛУМР) распространение трещины гидроразрыва описывается в терминах коэффициента интенсивности напряжений K_I [19] для трещины нормального разрыва. В рассматриваемом случае плоской симметричной трещины K_I вычисляется

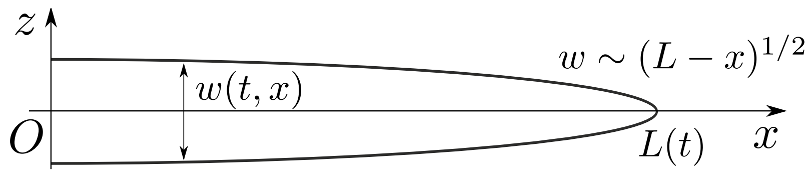


Рисунок 1.2 — Форма трещины в классической ЛУМР

следующим образом:

$$K_I = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}} \int\limits_0^L \frac{p(t,\xi)}{\sqrt{L^2-\xi^2}} d\xi. \tag{1.6}$$

Критерий распространения трещины в ЛУМР записывается как

$$K_I = K_{Ic}, \tag{1.7}$$

где K_{Ic} — константа материала, которая носит название вязкости разрушения.

Согласно ЛУМР трещина имеет эллиптическую форму вблизи ее вершины (рисунок 1.2). Вязкость разрушения участвует в выражении для асимптотики раскрытия трещины следующим образом:

$$w(t,x) = \frac{8\ K_{Ic}}{\sqrt{2\ \pi}\ \ E'}\sqrt{L-x} + O\left((L-x)^{3/2}\right). \tag{1.8}$$

Данный критерий разрушения упрощается в случае, когда энергия вязкой диссипации намного превышает энергию, затрачиваемую на разрушение породы в процессе распространения трещины, что реализуется в широком диапазоне параметров при реальных работах по ГРП [106; 107]. Поэтому, как и в [3; 9; 12], далее в этой главе будет предполагаться, что в окрестности вершины трещины $x = L$ выполнено условие равенства нулю вязкости разрушения: $K_{Ic} = 0$.

Заметим, что в этом предельном случае, когда $K_{Ic} = 0$, асимптотика (1.8) неприменима. Известно, что поведение раскрытия трещины вблизи вершины в случае нулевой вязкости разрушения имеет порядок $w \sim (L - x)^{\beta}$, где $\beta = 2/(n+2)$ [16]. При этом давление имеет особенность порядка $p \sim (L-x)^{\beta-1}$.

Заметим, что в приближении нулевой вязкости разрушения

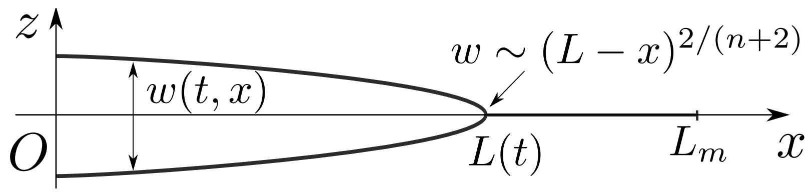


Рисунок 1.3 — Распространение трещины гидроразрыва вдоль предсозданного пути

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t{,}x) = \frac{8L(t)L^{'}(t)}{\pi E'\sqrt{L^2(t)-x^2}}\int\limits_0^{L(t)}\frac{p(t{,}\xi)}{\sqrt{L^2(t)-\xi^2}}d\xi +$$

$$+\frac{4}{\pi E'}\int\limits_0^{L(t)}\frac{\partial p}{\partial t}(t{,}\xi)B(x{,}\xi;L(t))d\xi = \frac{4L^{'}(t)}{E'\sqrt{L^2(t)-x^2}}\sqrt{\frac{L(t)}{\pi}}K_I + \tag{1.9}$$

$$+\frac{4}{\pi E'}\int\limits_0^{L(t)}\frac{\partial p}{\partial t}(t{,}\xi)B(x{,}\xi;L(t))d\xi = \frac{4}{\pi E'}\int\limits_0^{L(t)}\frac{\partial p}{\partial t}(t{,}\xi)B(x{,}\xi;L(t))d\xi.$$

Поэтому в этом случае можно считать, что трещина уже была создана, но впереди вершины ее раскрытие равно нулю: $w(t{,}x) = 0$ при $L(t) \leq x \leq L_m$ (рисунок. 1.3), где L_m — полудлина предсозданной трещины. Таким образом, функция $p(t{,}x)$ рассматривается далее не только на открытой части трещины, но также и перед ее вершиной. Значения этой функции на закрытой части предсозданной трещины (т. е. для $L(t) < x \leqslant L_m$) имеют смысл нормальных напряжений (точнее, разницы между нормальными напряжениями и сжимающими напряжениями σ_∞), возникающих из-за контакта двух противоположных стенок трещины.

Уравнение (1.1) тождественно выполнено не только при $0 \leq x < L(t)$, но и на закрытой части трещины при $L(t) < x < L_m$, где $w = 0$ и $q_l = 0$. Это позволяет решать вышеприведенные уравнения вдоль всей линии распространения трещины (открытой и закрытой частей) $0 \leq x \leq L_m$ без явного выделения вершины. При этом L_m играет роль фиктивной постоянной полудлины предсозданной трещины. Решение не зависит от L_m, пока вершина распространяющейся трещины не дошла до конца предсозданной трещины: $L(t) < L_m$. Как только вершина трещины достигнет L_m (т. е. $L(t_m) = L_m$ для некоторого t_m), алгоритм будет рассчитывать решение для трещины фиксированной полудлины.

Подстановка выражения из (1.9) для производной раскрытия трещины по времени с фиктивной полудлинной трещины L_m вместо $L(t)$ в закон сохранения массы (1.1) дает интегро-дифференциальное уравнение для давления:

$$\frac{4}{\pi E'} \int\limits_0^{L_m} \frac{\partial p}{\partial t}(t,\xi)\ B(x,\xi;L_m)\ d\xi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda(w,p_x)\ \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -q_l. \tag{1.10}$$

В качестве граничных условий заданы значение расхода на скважине на единицу высоты трещины и нулевой расход на конце предсозданной трещины:

$$q(0) = Q(t), \quad q(L_m) = 0. \tag{1.11}$$

В расчетах, приведенных ниже, начальные данные для давления и раскрытия трещины брались из известного автомодельного решения [7]. При этом давление на закрытой части трещины может быть найдено, если положить на ней нулевое раскрытие и применить формулу (1.5).

Для упрощения дальнейших обозначений перепишем задачу (1.10) в безразмерном виде. Для этого введем новые переменные по следующему правилу:

$$t' = \frac{t}{t_*}, \quad x' = \frac{x}{L_m}, \quad w' = \frac{w}{L_m}, \quad q_l' = \frac{t_*\, q_l}{L_m}, \quad L' = \frac{L}{L_m}, \quad p' = \frac{p}{E'}, \quad Q' = \frac{t_* Q}{L_m^2}.$$

Здесь t_* обозначает характерный масштаб времени, определяемый как

$$t_* = \left(\frac{M}{E'}\right)^{1/n}.$$

Таким образом, если сделать указанную замену переменных в (1.10) и после этого опустить штрихи, то получим

$$\begin{gathered}\frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1} \frac{\partial p}{\partial t}(t,\xi)\ B(x,\xi;1)\ d\xi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda(w,p_x)\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -q_l, \\ \Lambda(w,p_x) = w^{\frac{2n+1}{n}}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|^{\frac{1-n}{n}}.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Безразмерные граничные условия совпадают с их размерной формулировкой, если положить в (1.11) $L_m = 1.0$.

1.3 Численный алгоритм

Задачу (1.11), (1.12) планируется решать методом конечных элементов. Для этого запишем ее в слабой формулировке. С этой целью умножим уравнение (1.12) на пробную функцию $\psi(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. После применения формулы интегрирования по частям с учетом краевых условий получим

$$\begin{gathered}\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \psi(x) \ \int\limits_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(t,\xi)B(x,\xi;1)d\xi dx + \int\limits_0^1 \Lambda(w,p_x)\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx = \\ Q(t)\ \psi(0) \ - \ \int\limits_0^1 \psi\ q_l^k dx, \quad p(0,x) = p_0(x).\end{gathered} \tag{1.13}$$

Таким образом, необходимо найти решение задачи (1.13) на интервале времени $t \in [0,T]$, где $T > 0$ — произвольная положительная константа (безразмерное время закачки).

Для пространственной дискретизации (1.13) разобьем отрезок [0,1] на N равных подынтервалов:

$$x_{i-1} \le x \le x_i, \quad x_i = h\ i, \quad h = 1/N, \quad i = 1,\ldots,N, \quad x_0 = 0.$$

В дальнейшем давление p будет представляться своей кусочно-линейной аппроксимацией по переменной x так, что

$$p = \sum_{i=0}^{N} p_i(t)\psi_i(x), \tag{1.14}$$

где $\psi_i(x)$ — «треугольные» функции

$$\psi_i(x) = \begin{cases} (x/h) - (i-1), & i-1 \le x/h \le i, \\ (i+1) - (x/h), & i \le x/h \le i+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.15}$$

Если подставить представление (1.14) в (1.13) и положить $\psi = \psi_j$, задача (1.13) преобразуется в следующую задачу Коши:

$$A\,\dot{\mathbf{p}} + B\,\mathbf{p} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{p} = (p_0(t), \ldots, p_N(t))^T$; симметричные матрицы A, B и вектор $\mathbf{c}$ в координатах определяются как

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \psi_j(x) \int\limits_0^1 \psi_i(\xi)\; B(x,\xi;1)\; d\xi\; dx, \\ B_{ij} &= \int\limits_0^1 \Lambda(w,p_x)\; \psi_i'(x)\; \psi_j'(x)\; dx, \\ c_i &= Q\;\delta_{0i} - \int\limits_0^1 q_l\; \psi_i\; dx. \end{aligned}$$

Здесь δ_{0i} обозначена дельта-функция Кронекера; $\psi_i'(x) = d\psi_i/dx$. При вычислении коэффициентов B_{ij} неизвестная мобильность Λ вначале берется с предыдущего шага по времени, а потом уточняется в процессе итераций по нелинейности.

Производная по времени в задачи Коши (1.16) аппроксимируется обратным методом Эйлера (неявная конечно-разностная схема):

$$A\;(\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k) + \tau\;B\;\mathbf{p}^{k+1} = \tau\;\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^{k+1} = (A + \tau B)^{-1}(A\;\mathbf{p}^k + \tau\;\mathbf{c}),$$

где $\mathbf{p}^k$ — значение вектора $\mathbf{p}$ на k-м временном шаге $t_k = \tau k$, $k = 0,1,\ldots,K$, $\tau = T/K$.

Матрица $(A + \tau B)$, очевидно, симметричная. Положительная определенность матрицы A была проверена для всех используемых значений N прямым вычислением ее собственных значений. Максимальные и минимальные значения A, а также числа обусловленности, для различных значений N даны в таблице 1. Компактность оператора, определенного уравнением (1.3), (подробнее см. [96]) подразумевает, что значение минимального собственного числа A стремится к нулю при больших N: $\lambda_{\min}(A) \to 0$ при $N \to \infty$. Несмотря на это, число обусловленности получается меньше 10^5 для всех сеток, рассматриваемых в данной работе. Поэтому с использованием современных вычислительных методов линейной алгебры матрица $(A + \tau B)$ может быть обращена без ощутимого влияния погрешности округления.

Таблица 1 — Минимальные и максимальные собственные значения и число обусловленности матрицы A при различных размерах N вычислительной сетки

N	h	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\max}$	Число обусловленности
150	0.02	$8.12 \cdot 10^{-6}$	0.018038411	$2.22 \cdot 10^{3}$
300	0.01	$2.03 \cdot 10^{-6}$	0.009032086	$4.45 \cdot 10^{3}$
600	0.005	$5.08 \cdot 10^{-7}$	0.004519255	$8.90 \cdot 10^{3}$
1200	0.0025	$1.27 \cdot 10^{-7}$	0.002260429	$1.78 \cdot 10^{4}$
2400	0.00125	$3.17 \cdot 10^{-8}$	0.001130415	$3.56 \cdot 10^{4}$

Важно отметить то, что матрица A не зависит от решения $\mathbf{p}$ и вычисляется только однажды перед расчетом. Другое положительное качество данного метода заключается в его устойчивости к выбору временного шага τ, который может быть выбран независимо от шага сетки h.

1.4 Сравнение с полуаналитическим решением

Для одномерной задачи распространения трещины гидроразрыва, состоящей из уравнения на давление (1.1) в отсутствие утечек в пласт ($q_l = 0$) и формулы Колосова—Мусхелишвили (1.3), допускается полуаналитическое автомодельное решение [7]. В безразмерных переменных это решение имеет следующее представление:

$$
\begin{aligned}
L &= \gamma\ Q_0^{1/2}\ t^{\frac{n+1}{n+2}} && \text{— полудлина терщины,} \\
p &= t^{\,-\frac{n}{n+2}}\ \Pi(\xi) && \text{— давление в трещине,} \\
w &= \gamma\ Q_0^{1/2}\ t^{\frac{1}{n+2}}\ \Omega(\xi) && \text{— раскрытие трещины,} \\
q &= Q_0\ \Psi(\xi) && \text{— расход через поперечное сечение,} \\
\xi &= x/L(t) && \text{— автомодельная переменная.}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Данное решение описывает распространение симметричной трещины, возникающее за счет закачивания неньютоновской степенной жидкости с постоянным расходом Q_0, в приближении нулевой вязкости разрушения ($K_{Ic} = 0$). Здесь γ — постоянная, зависящая только от n, а функции Π, Ω и Ψ выражаются явно в терминах полиномов Гегенбауэра (см. [7]).

Описанное выше решение было использовано в целях проверки корректности работы численного алгоритма. Для этого за начальные данные для задачи (1.13) было взято решение (1.17) при $t_0 = 100$. После этого численное решение было посчитано до момента времени $t = 300$ и все найденные функции переписаны в автомодельных переменных согласно представлению (1.17). Сравнение результатов расчетов на сетках с размерами $N = 150$, 300, 600 и 1200 с точным решением представленно на рисунке 1.4. Хорошее согласие между численным и точным решением наблюдается по всей трещине за исключением области вблизи вершины трещины размером около двух или трех ячеек сетки.

Численная сходимость метода была показана путем сравнения разности между численным $\Omega_h(\xi)$ и точным решением $\Omega(\xi)$ в автомодельных переменных в норме пространства L_2. Таблица 2 содержит значения h и относительную норму разности численного и точного решения

$$E_\Omega(h) = \frac{||\Omega_h - \Omega||_{L_2}}{||\Omega||_{L_2}}$$

для соответствующей сетки при $n = 0.5$, 0.7, 1.0 и $N = 150$, 300, 600, 1200, 2400.

Если численный метод сходится с порядком κ, то это означает, что $E_\Omega(h) = C_1 h^\kappa + o(h^\kappa)$. Отсюда, как следствие, вытекает, что в логарифмиче-

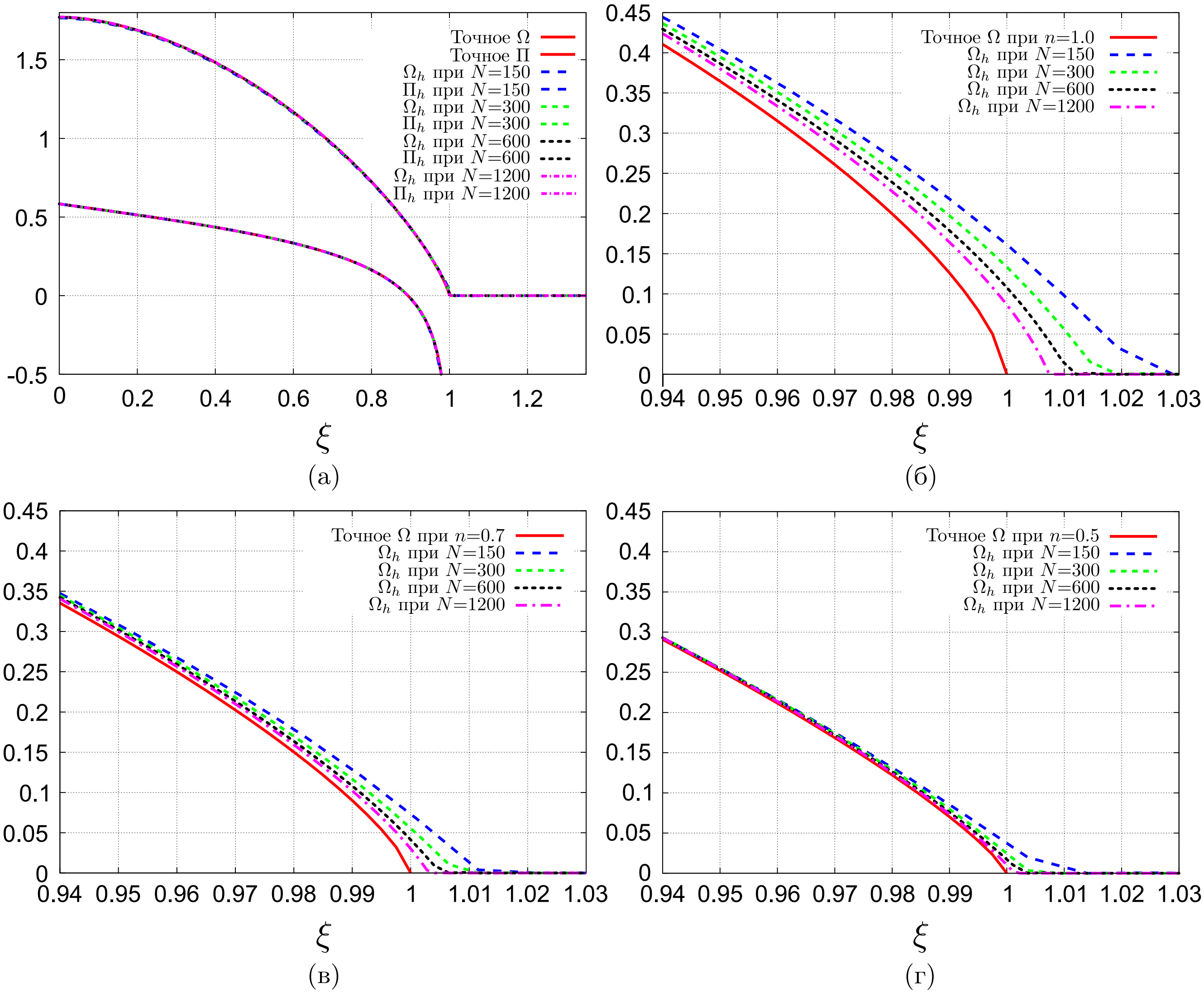


Рисунок 1.4 — Сравнение численного решения, посчитанного на сетках с увеличивающимся $N = 150$, 300, 600, 1200, и точного решения: (а) — графики $\Omega_h(\xi)$ и $\Pi_h(\xi)$ при $n = 0.5$; (б)–(г) — $\Omega_h(\xi)$ в окрестности $\xi = 1$ при $n = 1.0$, 0.7, 0.5. Все решения показаны в автомодельных переменных (1.17)

ских координатах тангенс угла наклона линии $\log(\text{error}) = \kappa \log h + C$, аппроксимирующей данные из таблицы 2, выражает фактический порядок сходимости метода. На рисунке 1.5 продемонстрированы результаты теста на сходимость метода. В частности, показано, что фактическая скорость сходимости получается не меньше чем $O(h^{1/2})$ для всех рассматриваемых значений n.

Таблица 2 — Результаты теста на сходимость: относительная погрешность в норме L_2 численного решения на сетках с различным шагом h

N	$n = 0.5$		$n = 0.7$		$n = 1$	
	h	error	h	error	h	error
150	0.01035	0.00581	0.01002	0.01150	0.00962	0.02913
300	0.00517	0.00250	0.00501	0.00678	0.00481	0.02040
600	0.00259	0.00134	0.00250	0.00424	0.00240	0.01421

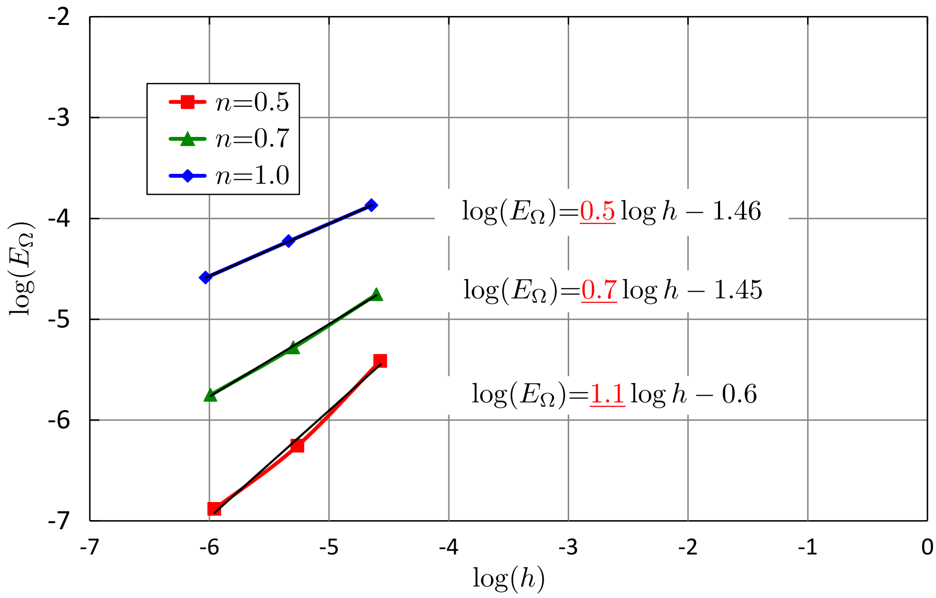


Рисунок 1.5 — Оценка скорости сходимости численного алгоритма при различных показателях поведения n. Тангенс угла наклона графиков в логарифмическом масштабе показывает фактический порядок сходимости

1.5 Численный эксперимент

Целью численного эксперимента, приведенного в данном параграфе, является демонстрация того, что разработанный алгоритм способен описывать распространение трещины в случае непостоянного расхода на скважине $Q(t)$. Для этого были выбраны следующие параметры задачи:

- модуль Юнга $E = 25$ GPa, коэффициент Пуассона $\nu = 0.15$;
- коэффициент густоты потока жидкости гидроразрыва $M = 0.1$ Па·с, а показатель поведения $n = 1.0$;

– закачиваемый расход на единицу высоты трещины $Q_0 = 10^{-3}$ м^2/с. При расчетах была использована сетка с числом ячеек $N = 600$, а безразмерный шаг по времени τ был эквивалентен 1 с. Сценарий закачки был следующим:

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0, & 100 \cdot 2k \le t < 100 \cdot (2k+1), \\ 0, & 100 \cdot (2k+1) \le t < 100 \cdot 2(k+1), \end{cases} \qquad k = 0,1,2.$$

Далее определим эффективность жидкости $FE(t)$ как следующее отношение:

$$FE(t) = \frac{\text{Изменение объема трещины}}{\text{Закачиваемый объем}} = 1 - \frac{1}{Q(t)} \int\limits_0^1 q_l(t,x)\, dx.$$

Для наглядности предположим, что скорость утечек $q_l(t,x)$ в каждой точке трещине пропорциональна значению положительного давления $p_{pos}(t,x)$. Если давление отрицательное, будем считать утечки равными нулю:

$$q_l(t,x) = \alpha\, p_{pos}(t,x),$$

где

$$p_{pos}(t,x) = \begin{cases} p(t,x), & \text{если } p(t,x) > 0, \\ 0, & \text{если } p(t,x) \le 0. \end{cases}$$

Данный подход обобщает хорошо известную формулу Картера [32] для скорости утечек жидкости в пласт на случай непостоянного давления в трещине. Коэффициент пропорциональности α подобран таким образом, чтобы эффективность жидкости в каждый момент времени оставалась величиной постоянной:

$$\alpha(t) = \frac{(1 - FE)Q(t)}{\int\limits_0^1 p_{\text{pos}}(t,x)\, dx}.$$

Выбор условия постоянства эффективности жидкости в численном эксперименте обусловлен двумя причинами. Во-первых, это позволяет продемонстрировать возможность алгоритма обрабатывать ситуации с утечками в пласт, зависящими от давления жидкости в трещине. А во-вторых, при постоянной эффективности жидкости оказывается удобным проверять выполнение закона сохранения массы в трещине, так как количество отфильтровавшейся в пласт жидкости есть фиксированная часть расхода, закачиваемого в каждый момент времени.

На рисунке 1.6 в размерных переменных показаны графики давления и раскрытия трещины, измеренные на скважине в точке $x = 0$, при различных значениях эффективности жидкости. Заметим, что при остановке закачки давление на скважине падает, а трещина начинает закрываться, что соотвествует ожидаемому поведению решения.

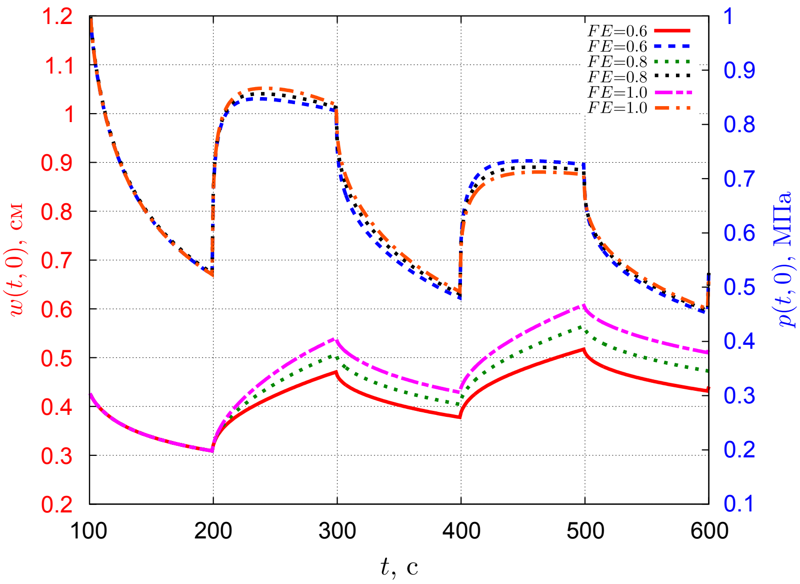


Рисунок 1.6 — Раскрытие трещины (нижние кривые) и давление (верхние кривые), измеренные на скважине в точке $x = 0$, в зависимости от времени при различных значениях эффективности жидкости

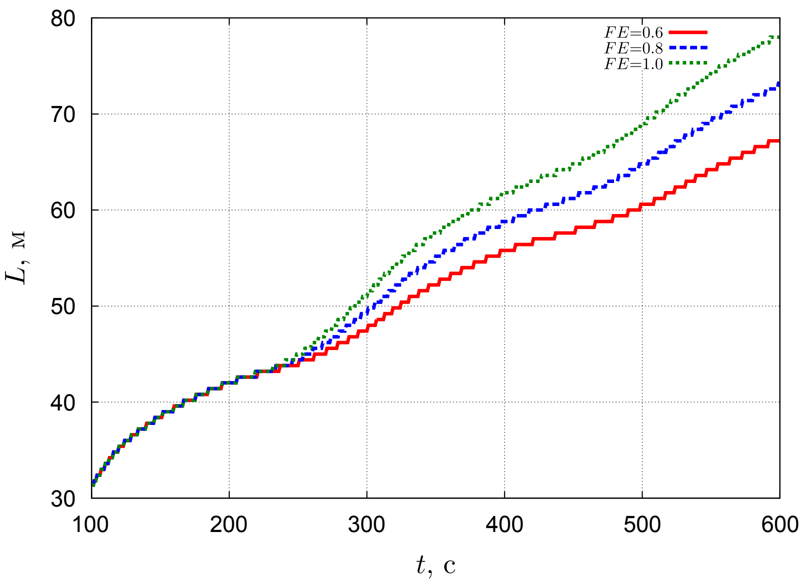


Рисунок 1.7 — Зависимость полудлины трещины от времени при различных значениях эффективности жидкости

Зависимость полудлины трещины от времени показана на рисунке 1.7. Положение вершины трещины определялось как минимальная координата узла сетки x_i, такая что $w(x_i) < \epsilon$, где $\epsilon = 10^{-5}$. Ступенчатый вид графиков объясняется дискретностью шага сетки h. На графиках можно заметить, что вследствие конечности скорости жидкости существует задержка между откликом в изменении скорости продвижения вершины и моментами возобновления закачки.

Глава 2. МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

2.1 Математическая формулировка задачи

В этой главе будет рассматриваться плоская вертикальная трещина фиксированной высоты H, распространяющаяся вдоль оси Ox (рисунок 2.1). Ось Oz направлена вверх перпендикулярно оси Ox. Как и в модели KGD (см. главу 1), далее будет предполагаться, что раскрытие трещины зависит только от координаты x и времени t. Кроме этого вслед за [3; 4] будем считать, что раскрытие трещины постоянно вдоль вертикальной координаты z. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением только центрального горизонтального сечения $z = H/2$ трещины в условиях плоской деформации.

Пороупругая среда, в которой рассматривается трещина, характеризуется своей пористостью ϕ и проницаемостью $k_r(\mathbf{x})$, а также перемещением твердой фазы $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ и поровым давлением $p(t,\mathbf{x})$. Поры заполнены однофазной ньютоновской жидкостью с эффективной вязкостью η_r. Для выражения скорости фильтрации жидкости в пласте будет использоваться линейный закон Дарси $\mathbf{q} = -(k_r/\eta_r)\nabla p$. Также предполагается, что жидкость, фильтрующаяся из трещины в пласт, имеет ту же самую вязкость, что и поровая жидкость. Однако жидкость гидроразрыва, закачиваемая в трещину, имеет вязкость η_f, вообще говоря, отличную от вязкости поровой жидкости. Это соответствует типичной ситуации при гидроразрыве, когда жидкостью гидроразрыва является высоковязкий гель, а отфильтровывается в пласт лишь его низковязкая основа.

Для общности предполагается, что изначально пласт находился в преднапряженном состоянии, характеризующемся тензором $\boldsymbol{\tau}_0(x,y)$. В дальнейшем будут рассматриваться только плоские трещины, распространяющиеся вдоль оси Ox, поэтому тензор $\boldsymbol{\tau}_0$ должен удовлетворять условиям симметрии относительно этой оси.

Определяющие соотношения квазистатической модели пороупругости формулируются следующим образом:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{I} + 2\mu\,\mathcal{E}(\mathbf{u}) - \alpha p\,\mathrm{I},$$
$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{k_r}{\eta_r}\nabla p - \alpha\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right). \tag{2.1}$$

Здесь $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ обозначает тензор малых деформаций Коши $2\mathcal{E}(\mathbf{u})_{ij} = \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$ $(i,j = 1,2)$, α — коэффициент Био, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ — модули упругости, I представляет собой единичный тензор. Упругоемкость S_ε отражает зависимость лагранжевой пористости ϕ от $\epsilon = \operatorname{tr}\mathcal{E}$ и p, как описано в [60]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + S_\varepsilon\frac{\partial p}{\partial t}, \quad S_\varepsilon = \frac{(\phi_0 - \alpha)(1-\alpha)}{K}, \tag{2.2}$$

где $K = \lambda + \dfrac{2\mu}{3}$ — объемный модуль упругости, ϕ_0 — начальная пористость. В силу приближения плоской деформации вектор перемещения твердой фазы $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (u, v)$ двухмерный, все векторные операции также рассматриваются в двухмерном пространстве независимых переменных $(x_1, x_2) = (x, y)$.

Симметрия задачи относительно оси Ox позволяет ограничиться рассмотрением системы уравнений (2.1) в области $\Omega = \{(x,y) : |x| \le R, 0 \le y \le R\}$, изображенной на рисунке 2.2.

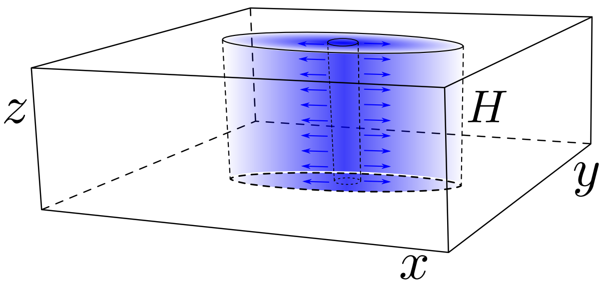


Рисунок 2.1 — Плоская вертикальная трещина гидроразрыва в пороупругой среде

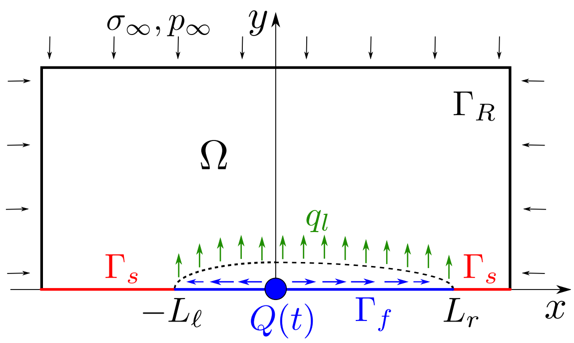


Рисунок 2.2 — Верхняя часть горизонтального сечения трещины плоскостью $z = 0$

На внешней границе $\Gamma_R : \ |\mathbf{x}|_\infty = R$ заданы сжимающие напряжения $\boldsymbol{\sigma}_\infty$ и постоянное поровое давление $p = p_\infty$:

$$\Gamma_R : \quad p = p_\infty, \quad \boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = \boldsymbol{\sigma}_\infty, \quad (\boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle)_i = \tau_{ij}n_j. \tag{2.3}$$

Далее за $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ обозначены единичные вектор внешней нормали и касательный вектор к границе области Ω соответственно; также предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Далее будет рассматриваться только случай, когда $\boldsymbol{\sigma}_\infty = -\sigma_\infty \mathbf{e}_2$, где σ_∞ — скалярная функция. Кроме того, будет предполагаться, что тензор преднапряженного состояния $\boldsymbol{\tau}_0$ удовлетворяет тем же краевым условиям на внешней границе, что и тензор $\boldsymbol{\tau}$: $\boldsymbol{\tau}_0\langle\mathbf{n}\rangle|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{\sigma}_\infty$.

Линия $y = 0$ распространения трещины разделена на часть

$$\Gamma_f = \{-L_\ell(t) \leqslant x \leqslant L_r(t),\, y = 0\},$$

занятую трещиной, и оставшуюся часть

$$\Gamma_s = \{-R < x < -L_\ell(t),\, y = 0\} \bigcup \{L_r(t) < x < R,\, y = 0\}.$$

Вне трещины на Γ_s выполнены условия симметрии (см. [108]):

$$\Gamma_s: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

Вводя обозначение $p_f(t,x)$ для давления жидкости внутри трещины, запишем баланс сил на ее стенках следующим образом:

$$\Gamma_f: \quad p = p_f, \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = -p_f + \sigma_{coh}, \quad \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = 0. \tag{2.5}$$

Здесь касательные напряжения пренебрежимо малы в силу того, что трение жидкости о стенки трещины мало по сравнению с нормальными напряжениями.

Для того чтобы учесть разрушение породы во время гидроразрыва, в качестве критерия разрушения была использована модель сил сцепления. Этот подход был изначально предложен Баренблаттом [109] и Дагдейлом [110], где они постулировали существование сил сцепления σ_{coh} (рисунок 2.3), которые действуют в зоне образования микротрещин и пластических деформаций вблизи вершин трещины, препятствуя ее раскрытию. С вычислительной точки зрения наличие сил сцепления устраняет сингулярность напряжений в вершинах трещины, свойственную линейно-упругой механике разрушения (ЛУМР), делая раскрытие трещины гладко стремящимся к нулю вблизи вершин.

Воспользуемся следующей билинейной зависимостью [111] величины напряжений сил сцепления σ_{coh} от ширины трещины w (рисунок 2.4):

$$\sigma_{coh}(w) = \begin{cases} \sigma_c \dfrac{w}{w_m}, & 0 \leqslant w \leqslant w_m, \\ \sigma_c \left(\dfrac{w_c - w}{w_c - w_m} \right), & w_m \leqslant w \leqslant w_c, \\ 0, & w \geqslant w_c. \end{cases} \tag{2.6}$$

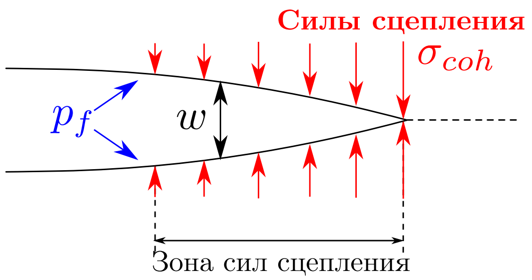


Рисунок 2.3 — Зона действия сил сцепления вблизи вершины трещины

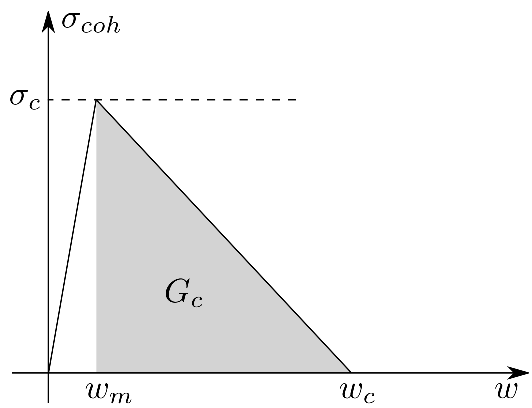


Рисунок 2.4 — Билинейная зависимость величины напряжений сил сцепления от ширины трещины

Напряжения сил сцепления достигают своего максимума вблизи вершины трещины. Участок убывания сил сцепления ограничен значением ширины w_c. Эта величина вычисляется с учетом того, что энергия разрушения должна равняться работе сил сцепления на раскрытии трещины. Таким образом,

$$G_c = \frac{1}{2}\sigma_c w_c, \tag{2.7}$$

где G_c — энергия разрушения, рассматриваемая в теории хрупких трещин Гриффитса [112], σ_c — максимальное значение напряжений сил сцепления. Упругий участок сил сцепления считается очень малым, $w_m = 5 \times 10^{-4} w_c$. Его наличие требуется для регуляризации энергии сил сцепления вблизи $w = 0$ [92].

Если зона сил сцепления мала по сравнению с длиной трещины, то связь между вязкостью разрушения K_{Ic} из ЛУМР и параметрами модели сил сцепления определяется формулой Ирвина [113]:

$$K_{Ic} = \sqrt{G_c \frac{E}{1 - \nu^2}}, \tag{2.8}$$

где E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона.

Течение жидкости в трещине определяется законом сохранения массы, снабженным формулой Пуазейля для течения вязкой жидкости по узкой щели:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=-2q_l, \quad w\equiv 2v|_{y=0}, \quad q=-\frac{w^3}{12\eta_f}\frac{\partial p_f}{\partial x}. \tag{2.9}$$

Здесь w — ширина трещины, q — расход жидкости в направлении оси Ox через поперечное сечение трещины. Кроме этого делается предположение, что отсутствует отставание положения фронта жидкости в трещине от вершины трещины.

Скорость утечек жидкости в пласт q_l задается законом Дарси:

$$q_l=-\left.\frac{k_r}{\eta_r}\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{2.10}$$

Множитель 2 в правой части (2.9) показывает, что утечки происходят через верхнюю и нижнюю стенки трещины.

Окончательное определяющее соотношение для течения жидкости в трещине дается уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{12\eta_f}\frac{\partial p_f}{\partial x}\right)+2\left.\frac{k_r}{\eta_r}\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{2.11}$$

Расход жидкости (на единицу высоты), закачиваемый в верхнюю половину трещины, рассчитывается как

$$Q(t)=\frac{Q_v(t)}{2H}=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{w^3}{12\eta_f}\frac{\partial p_f}{\partial x}\right|_{x=0-}-\left.\frac{w^3}{12\eta_f}\frac{\partial p_f}{\partial x}\right|_{x=0+}\right), \tag{2.12}$$

где деление на 2 показывает, что полный расход одинаково распределен между симметричными (верхней и нижней) частями трещины, а $Q_v(t)$ обозначает объемный расход, закачиваемый в скважину.

Уравнение (2.11) часто называют уравнением теории смазки [106]. Заметим, что вследствие вида правой части уравнения (2.10) уравнение (2.11) представляет собой краевое условия для основной модели (2.1). Скорость утечек q_l возникает здесь естественным образом в рамках решения задачи, что существенно отличает модель от обычных искусственных аппроксимаций типа формулы Картера или аналогичных [32].

Для замыкания модели снабдим ее начальными данными в некоторый момент времени t^0:

$$\mathbf{u}|_{t=t^0} = \mathbf{u}^0(x,y), \quad p|_{t=t^0} = p^0(x,y), \quad L_i|_{t=t^0} = L_i^0,\, i = \ell,r. \tag{2.13}$$

С вычислительной точки зрения удобно перейти к однородным краевым условиям на внешней границе Γ_R. Этого можно добиться, если рассматривать напряжения в пласте относительно преднапряженного состояния $\boldsymbol{\tau}_0$, и взять p_∞ за нулевой уровень давления. По аналогии с [108] введем следующие неизвестные функции:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \varkappa \mathbf{x}, \quad \varkappa = \frac{\alpha p_\infty}{2(\lambda+\mu)}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_0, \quad \tilde{p} = p - p_\infty. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в уравнения (2.1) и принимая во внимание граничные условия (2.3)–(2.5), (2.11) и (2.12), получим следующую задачу:

$$\Omega: \quad \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\tau}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \lambda \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}\, \mathrm{I} + 2\,\mu\, \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}) - \alpha \tilde{p}\, \mathrm{I}, \tag{2.15}$$

$$\Omega: \quad S_\varepsilon \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{k_r}{\eta_r} \nabla \tilde{p} - \alpha \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\right), \tag{2.16}$$

$$\Gamma_R: \quad \tilde{p} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}\langle \mathbf{n} \rangle = 0, \tag{2.17}$$

$$\Gamma_s: \quad \tilde{u_y} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{p_y} = 0, \tag{2.18}$$

$$\Gamma_f: \quad \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}\langle \mathbf{n} \rangle = -(\tilde{p} + p_\infty) - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \langle \mathbf{n} \rangle + \sigma_{coh}, \quad \mathbf{s} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}\langle \mathbf{n} \rangle = 0, \tag{2.19}$$

$$\Gamma_f: \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{v}^3}{3\eta_f} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \\ &-\frac{\tilde{v}^3}{3\eta_f} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\Big|_{y=0,x=0+} + \frac{\tilde{v}^3}{3\eta_f} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\Big|_{y=0,x=0-} = Q(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

В дальнейшем мы будем работать с новыми неизвестными функциями, опуская тильды для упрощения обозначений.

2.2 Автомодельное решение для стационарной полубесконечной трещины

2.2.1 Упрощающие предположения

В рамках теории трещин в пороупругой среде, созданных под воздействием жидкости внутри них, можно сформулировать следующую задачу. В бесконечном однородном пространстве в условиях плоской деформации рассматривается неподвижная полубесконечная трещина, расположенная вдоль положительного направления оси Ox (рисунок 2.5). Будем предполагать, что задача является стационарной благодаря балансу между количеством жидкости, притекающем в трещину и утекающем из нее через стенки трещины в пласт. Для простоты будем считать, что жидкость гидроразрыва и жидкость, находящаяся в пласте, имеют одинаковые значения вязкости: $\eta_r = \eta_f = \eta$. Силами сцепления пренебрежём, а в качестве преднапряженного состояния рассмотрим однородное сжатие вдоль оси Oy: $\boldsymbol{\tau}_0\langle\mathbf{n}\rangle = -\sigma_\infty \mathbf{n}$. Таким образом, руководствуясь рассуждениями из параграфа 2.1, можно вывести определяющие уравнения, аналогичные уравнениям (2.15)–(2.20):

$$\Omega: \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{I} + 2\,\mu\, \mathcal{E}(\mathbf{u}) - \alpha p\, \mathrm{I}, \tag{2.21}$$

$$\Omega: \quad \operatorname{div}\left(\frac{k_r}{\eta}\nabla p\right) = 0, \tag{2.22}$$

$$\Gamma_\infty: \quad \lim_{|x|\to\infty} p = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = 0, \tag{2.23}$$

$$\Gamma_s: \quad u_y = 0, \quad v = 0, \quad p_y = 0, \tag{2.24}$$

$$\Gamma_f: \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = -p + (\sigma_\infty - p_\infty), \quad \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\tau}\langle\mathbf{n}\rangle = 0, \tag{2.25}$$

$$\Gamma_f: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^3}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{k_r}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2.26}$$

Заметим, что в данной задаче для полного определения ее решения отсутствует

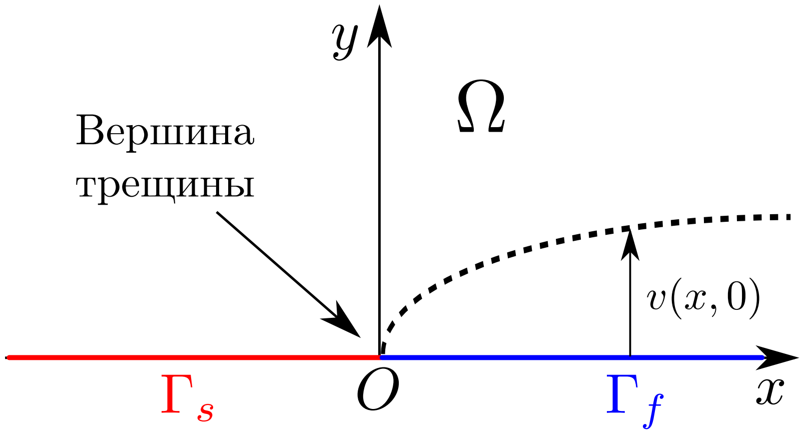


Рисунок 2.5 — Полубесконечная трещина в пороупругой среде

необходимость в краевом условии на заданный расход на скважине (см. (2.20)), что будет показано ниже.

2.2.2 Аналитическое решение

В том случае, когда все параметры среды (λ, μ, k_r) постоянны, а поровое давление на бесконечности и сжимающие напряжения взаимокомпенсируют друг друга ($\sigma_\infty = p_\infty$), для задачи (2.21)–(2.26) существует решение в следующем виде:

$$u^r = r^{1/3}U(\theta), \quad u^\theta = r^{1/3}V(\theta), \quad p = r^{-2/3}P(\theta). \tag{2.27}$$

Здесь (r,θ) полярные координаты в плоскости Oxy: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, а $u^r = u\cos\theta + v\sin\theta$, $u^\theta = -u\sin\theta + v\cos\theta$ — проекции вектора $\mathbf{u}$ на орты полярной системы координат. Компоненты тензоров деформации $\mathcal{E}$ и напряжений τ вычисляются как

$$\mathcal{E}_{11} = r^{-2/3}U/3, \quad 2\mathcal{E}_{12} = r^{-2/3}\Big(U' - 2V/3\Big), \quad \mathcal{E}_{22} = r^{-2/3}(U + V'),$$
$$\tau_{11} = r^{-2/3}\Big(2\big(2\lambda + \mu\big)U/3 + \lambda V' - \alpha P\Big), \quad \tau_{12} = r^{-2/3}\mu\Big(U' - 2V/3\Big),$$
$$\tau_{22} = r^{-2/3}\Big(2\big(2\lambda/3 + \mu\big)U + (\lambda + 2\mu)V' - \alpha P\Big).$$

Далее в данном параграфе штрихами будет обозначаться производная по переменной θ. Подставляя представление (2.27) в уравнения (2.21), (2.22) и сокращая на множители, содержащие переменную r, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\mu U'' - 2(\lambda+4\mu)V'/3 - 8(\lambda+2\mu)U/9 + 2\alpha P/3 = 0,\\
&(\lambda+2\mu)V'' + 2(2\lambda+5\mu)U'/3 - 8\mu V/9 - \alpha P' = 0,\\
&P'' + 4P/9 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Последнее уравнение из (2.28) с учетом условий симметрии (2.24) интегрируется как

$$
P = A\cos\Big(\frac{2(\theta-\pi)}{3}\Big). \tag{2.29}
$$

Общее решение однородной системы ОДУ (2.28) для U и V, удовлетворяющее условиям симметрии (2.24), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&U_0 = -C_1\big(\lambda+4\mu\big)\cos\big(2(\theta-\pi)/3\big) - C_2\cos\big(4(\theta-\pi)/3\big),\\
&V_0 = C_1\big(2\lambda+5\mu\big)\sin\big(2(\theta-\pi)/3\big) + C_2\sin\big(4(\theta-\pi)/3\big)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

с произвольными постоянными C_1, C_2. Компоненты частного решения неоднородной системы можно найти в форме

$$
U_p = \frac{\alpha\lambda A\cos\big((2\theta+\pi)/3\big)}{4\mu(\lambda+2\mu)}, \quad V_p = -\frac{\alpha A(2\lambda+3\mu)\sin\big((2\theta+\pi)/3\big)}{4\mu(\lambda+2\mu)}. \tag{2.31}
$$

Общее решение (2.28) есть сумма (2.30) и (2.31).

Теперь проверим краевые условия. Компоненты тензоров напряжений и деформации, как и давление, имеют порядок $r^{-2/3}$ при $r\to\infty$. Поэтому эти значения исчезают на бесконечности, и условия (2.23) можно считать выполненными. Условия симметрии (2.24) выполнены по построению решения.

На трещине необходимо удовлетворить условиям баланса сил (2.25), а также уравнению теории смазки (2.26). Заметим, что

$$
\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{y=0,\,x>0} = \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{\theta=0}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{y=0,\,x>0} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}.
$$

Из уравнения баланса сил (2.25) имеем

$$\tau_{22}|_{\theta=0} + r^{-2/3}P(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &4C_1\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu) - 2C_2\mu(\lambda+2\mu)+ \\ &\qquad + A\big((\alpha-3)\lambda + 3(\alpha-2)\mu\big) = 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\tau_{12}|_{\theta=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &4C_1\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu) + 4C_2\mu(\lambda+2\mu)+ \\ &\qquad + A\alpha(\lambda+3\mu) = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Из уравнения теории смазки (2.26) следует

$$\frac{4V(0)^3}{27\eta}P(0) + \frac{k_r}{\eta}P'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$C_1(2\lambda+5\mu) - C_2 + A\alpha\frac{2\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)} = -(12k_r)^{1/3}. \tag{2.34}$$

Решение системы (2.32), (2.33), (2.34) относительно неизвестных C_1, C_2 и A выражается в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{k_r}{18}\right)^{1/3} \frac{(\alpha-2)\lambda + (3\alpha-4)\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+(2-\alpha)\mu)}, \\ C_2 &= \left(\frac{4k_r}{9}\right)^{1/3} \frac{\lambda+\mu}{\lambda+(2-\alpha)\mu}, \\ A &= -\left(\frac{4k_r}{9}\right)^{1/3} \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+(2-\alpha)\mu}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Формулы (2.35) полностью определяют решение.

2.2.3 Физическая интерпретация решения

Согласно построенному выше решению раскрытие трещины выражается как

$$w = 2u^\theta|_{\theta=0} = 3^{5/6}2^{2/3}(k_r\, x)^{1/3}, \tag{2.36}$$

откуда вытекает, что трещина имеет форму кубической параболы.

В окрестности вершины трещины давление и компоненты тензора напряжений имеют особенность порядка $r^{-2/3}$, в то время как в случае использования модели линейной теории упругости эта особенность, например в режиме преобладания вязкой диссипации энергии, имеет порядок $r^{-1/3}$ [16]. Раскрытая трещина поддерживается в равновесии благодаря балансу давления в трещине и пороупругих напряжений. Важно отметить, что полученное аналитическое решение описывает течение жидкости внутри трещины и фильтрацию в пласте без каких-либо дополнительных предположений.

Расход через поперечное сечение трещины $x = x_0$ может быть вычислен как

$$Q_f = -2\frac{v^3}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=x_0,y=0} = \frac{4V(0)^3}{9\eta}P(0)r^{-2/3}\bigg|_{r=x_0} = \frac{2^{5/3}k_r^{4/3}\mu(\lambda+\mu)}{3^{1/6}\eta(\lambda+(2-\alpha)\mu)}x_0^{-2/3}.$$

Полный приток жидкости к началу координат $(x,y) = (0,0)$ из пласта равен

$$\begin{gathered} Q_r = -\int_0^{2\pi} \mathbf{q}_r\cdot\mathbf{e}_r\; r d\theta\bigg|_{r=x_0} = -\int_0^{2\pi}\frac{2k_r}{3\eta}r^{-2/3}P(\theta)d\theta\bigg|_{r=x_0} = \\ = -\frac{\sqrt{3}Ak_r}{\eta}r^{-2/3}\bigg|_{r=x_0} = Q_f, \end{gathered} \tag{2.37}$$

откуда можно сделать вывод, что вся жидкость, притекающая к вершине из пласта, впоследствии потечет по трещине. Таким образом, данная картина течения может быть интерпретирована как стационарный диполь, расположенный в вершине трещины.

Скорость утечек жидкости в пласт q_l выражается формулой (2.10) в виде

$$q_l = -\frac{k_r}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{k_r}{\eta}r^{-5/3}P'(0) = -\frac{k_r A}{\sqrt{3}\eta}r^{-5/3}. \tag{2.38}$$

Нетрудно показать, что полные утечки через стенки трещины на интервале $[x_0, +\infty)$ в точности равны Q_f.

Векторное поле скорости фильтрации в пласте $\mathbf{q}_r = -k_r/\eta\nabla p$ вместе с линиями тока изображено на рисунке 2.6. Отсюда видно, что жидкость перемещается по трещине, частично отфильтровывается в пласт и возвращается в начало координат O с отрицательной стороны оси Ox. Деформация равно-

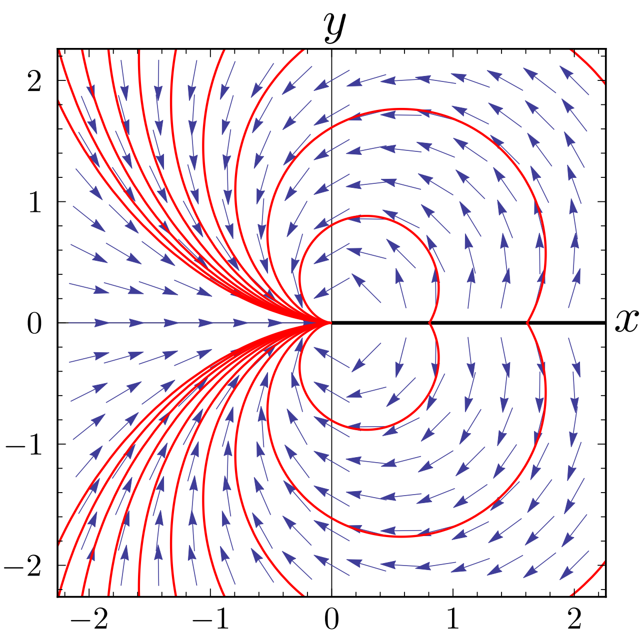


Рисунок 2.6 — Поле скорости фильтрации и линии тока в окрестности вершины трещины

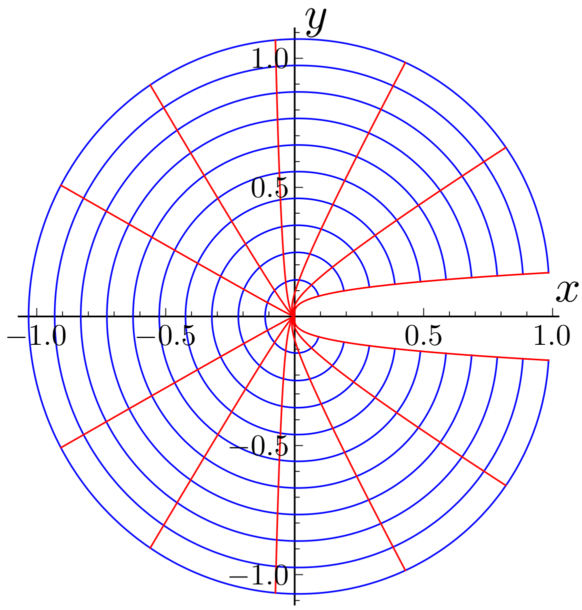


Рисунок 2.7 — Деформация полярной сетки, состоящей из радиальных лучей и окружностей

мерной полярной сетки, состоящей из радиальных лучей и окружностей, под воздействием давления жидкости в трещине показана на рисунке 2.7.

Сравнение выражений для давления (2.29), расхода через поперечное сечение трещины (2.37) и скорости утечек (2.38) показывает, что все эти величины пропорциональны константе A. Последняя может быть представленна в терминах модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν как

$$A = \frac{(2/3)^{2/3} E k_r^{1/3}}{(1+\nu)(2(1-\nu)+\alpha(2\nu-1))}. \tag{2.39}$$

Отсюда следует, что расход, давление и утечки будут тем выше, чем больше значения E, k_r и α (так как $0 < \nu \leqslant 1/2$). При фиксированных E, k_r и α максимумы давления, расхода и утечек достигаются при

$$\nu_* = \frac{\alpha}{4(1-\alpha)} \tag{2.40}$$

с условием, что $0 < \alpha < 2/3$.

Раскрытие трещины в построенном решении зависит только от проницаемости k_r, что следует из формулы (2.36). При большей проницаемости расход через поперечное сечение трещины выше, поэтому выше и раскрытие трещины. Заметим также, что вязкость жидкости η присутствует только в знаменателях выражений (2.37) и (2.38) для расхода и утечек соответственно. Поэтому при более высокой вязкости расход и утечки пропорционально уменьшаются, оставляя неизменным раскрытие трещины.

2.3 Численный алгоритм

В этом параграфе приводится численный метод для решения задачи, сформулированной в параграфе 2.1. Для этого вначале запишем слабую формулировку задачи. Вслед за [108] выберем гладкую вектор-функцию $\boldsymbol{\psi} = \big(\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)\big)$ и скалярную функцию $\varphi(x,y)$, такие что

$$\psi_2|_{\Gamma_s} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_R} = 0. \tag{2.41}$$

Далее умножим скалярно уравнения (2.15) и (2.16) на $\boldsymbol{\psi}$ и φ соответственно и проинтегрируем по Ω. Принимая во внимание граничные условия (2.17)–(2.20), после интегрирования получим

$$\int\limits_{\Omega} \big(\lambda \operatorname{div}\big(\mathbf{u}\big) - \alpha\, p\big) \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\psi}\big) + 2\mu\, \mathcal{E}\big(\mathbf{u}\big) : \mathcal{E}\big(\boldsymbol{\psi}\,\big)\, dxdy -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_f} (p + p_\infty + \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\langle\mathbf{n}\rangle - \sigma_{coh})\psi_2\, dx = 0, \tag{2.42}$$

$$\int\limits_{\Omega} S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t}\varphi\, dxdy + \int\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r}\nabla p\cdot\nabla\varphi\, dxdy + \int\limits_{\Omega} \alpha\, \frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{div}\mathbf{u}\Big)\varphi\, dxdy +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_f} \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx + \int\limits_{\Gamma_f} \frac{v^3}{3\eta_f}\,\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx - Q(t)\varphi(0,0) = 0. \tag{2.43}$$

Такая формулировка не является удобной для конструирования численного алгоритма, потому что требует отслеживать положения левой и правой вершин трещины и изменять размер Γ_f на каждом временном шаге, когда трещина изменяет свои размеры. Поэтому мы модифицируем Γ_f, рассматривая ее как линию потенциального местонахождения трещины, у которой есть закрытая часть, где $v = 0$, и открытая часть с $v > 0$. Однако такая интерпретация не может гарантировать отсутствие взаимного проникновения противоположных берегов трещины в процессе вычислений. Чтобы избежать этого, необходимо наложить дополнительное ограничение на множество допустимых решений:

$$\Gamma_f : \quad v \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Для того чтобы применить ограничение (2.44), добавим штрафной член

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_{\Gamma_f} \chi_{[v<0]} \, v \, \psi_2 \, dx, \tag{2.45}$$

в слабую формулировку (2.42). Здесь $\delta \ll 1$ — малое число, а $\chi_{[v<0]}$ — индикатор множества $\{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) < 0\}$.

Таким образом, уравнение (2.42) преобразуется в

$$\int\limits_{\Omega} \big(\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) - \alpha\, p\big) \operatorname{div}(\boldsymbol{\psi}) + 2\mu\, \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi})\, dxdy -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_f} (p + p_\infty + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \langle \mathbf{n} \rangle - \sigma_{coh}) \psi_2 \, dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\Gamma_f} \chi_{[v<0]} \, v \, \psi_2 \, dx = 0, \tag{2.46}$$

В качестве обоснования используемого приема заметим, что введение штрафного члена эквивалентно замене краевого условия (2.19) на условие

$$\Gamma_f : \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle = -(p + p_\infty) + \frac{1}{\delta} \chi_{[v<0]} \, v - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \langle \mathbf{n} \rangle + \sigma_{coh}, \quad \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle = 0. \tag{2.47}$$

Если устремить $\delta \to 0$, то на Γ_f будет выполненно либо условие (2.19) для $v|_{\Gamma_f} > 0$, либо условие $v|_{\Gamma_f} = 0$ в противном случае. Применение штрафных функций для решения уравнений с ограничениями подробно обсуждается в [93; 114]. Местоположение вершин трещины можно вычислить как $L_l(t) = \inf\limits_{v|_{y=0} > 0} x$ и $L_r(t) = \sup\limits_{v|_{y=0} > 0} x$. Интегралы по границе Γ_f в уравнениях (2.43), (2.46) не равны нулю только на пересечении $\Gamma_f \cap \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) > 0\}$, поэтому течение жидкости рассчитывается только на раскрытой части трещины.

Основным преимуществом представления задачи в форме (2.43), (2.46) является то, что задача решается в единой слабой формулировке, связывающей двумерную геомеханику и фильтрацию с одномерным течением жидкости по трещине. В существующей работе [92], где рассматривается аналогичная модель трещины в пороупругой среде, записываются отдельно двумерная задача в пласте и одномерная задача в трещине. Связь слабых формулировок для этих задач осуществляется с помощью искусственного введения дополнительных переменных — множителей Лагранжа, что усложняет задачу и требует больших вычислительных ресурсов.

Задача (2.43), (2.46) решалась методов конечных элементов с использованием открытого МКЭ-пакета FreeFEM++ [94]. Для дискретизации по пространству использовались кусочно-линейные P1-элементы на триангуляции расчетной области Ω. Производные по времени аппроксимировались с первым порядком точности: $\dfrac{\partial f}{\partial t} \approx \dfrac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}$, где f обозначает одну из функций u, v или p; Δt — временной шаг. Верхний индекс означает номер шага по времени: $f^n = f(t^n, \mathbf{x})$, $t^n = t^0 + n\Delta t$. В качестве начальных данных бралось состояние пласта в отсутствие трещины: $\mathbf{u}^0 = 0$, $p^0 = 0$. Нелинейность задачи разрешалась методом Ньютона—Рафсона в комбинации с методом простой итерации.

2.4 Верификации численного алгоритма

2.4.1 Проверка на стационарном решении

Численный метод, построенный в параграфе 2.3, основывается на записи двумерных уравнений пороупругости и одномерного уравнения для течения по трещине в единой слабой формулировке, при этом одномерное уравнение второго порядка выступает в качестве краевых условий для двумерного уравнения фильтрации. Для доказательства корректности использования данного подхода рассмотрим стационарное автомодельное решение из параграфа 2.2 и попытаемся воспроизвести его численно.

С этой целью для нашей задачи выберем расчетную область в виде половины кольца с внутренней окружностью, расположенной вокруг вершины трещины (рисунок 2.8):

$$\Omega = \{(x,y) : r_\varepsilon \le |\mathbf{x}| \le R, \quad y \ge 0\}.$$

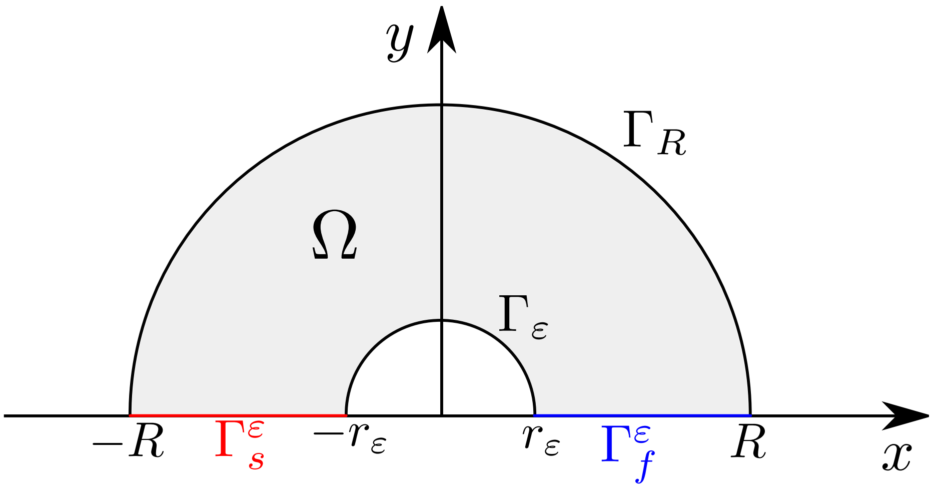


Рисунок 2.8 — Расчетная область для воспроизведения стационарного автомодельного решения

Присутствие внутренней полуокружности малого радиуса $r_\varepsilon = 0.1R$ необходимо для того, чтобы исключить особенность в вершине трещины из численного решения.

В указанной области Ω рассматривались уравнения (2.21), (2.22). Что касается краевых условий, на внутренней $\Gamma_\varepsilon = \{x : |\mathbf{x}| = r_\varepsilon\}$ и внешней $\Gamma_R = \{x : |\mathbf{x}| = R\}$ полуокружностях было задано давление p согласно точному решению (2.29). Кроме этого на Γ_R были заданы напряжения, а на Γ_ε — перемещения $\mathbf{u}$. На Γ_s^ε задавались условия симметрии (2.24), а на Γ_f^ε выполнялось уравнение теории смазки (2.26). В данной задаче представляется возможным варьировать краевые условия. Например, можно задать перемещения на внешней полуокружности, а напряжения — на внутренней. Также можно задать градиент давления на некоторой части границы вместо самого давления. Получившуюся задачу можно записать в слабой формулировке, руководствуясь аргументами, приведенными в параграфе 2.3, а после этого — решать методом конечных элементов.

Точное решение задачи было воспроизведено численно с помощью открытого конечно-элементного пакета FreeFEM++ [94]. В расчетах использовались следующие физические параметры: $R = 200$ м, $\alpha = 0.8$, $k_r = 0.3$ мД, $E = 15$ ГПа, $\nu = 0.18$, $\lambda = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$, $\mu = E/(2(1+\nu))$. При дискретизации задачи были использованы кусочно-линейные P1-элементы. Каждая из границ Γ_s^ε и Γ_f^ε разбивалась на N интервалов, внешняя полуокружность Γ_R — на $N/2$ интервалов, а внутренняя Γ_ε — на $N/10$.

Таблица 3 — Относительная погрешность численного решения на сетках с возрастающим числом узлов

N	N_v	$S_{\max}$	$h = \sqrt{S_{\max}}$	E_p	E_u	E_v
100	565	$9.13 \cdot 10^{-3}$	$9.56 \cdot 10^{-2}$	$4.90 \cdot 10^{-3}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$
200	2066	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$4.79 \cdot 10^{-2}$	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$5.41 \cdot 10^{-3}$	$3.59 \cdot 10^{-3}$
400	8026	$6.00 \cdot 10^{-4}$	$2.45 \cdot 10^{-2}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$8.71 \cdot 10^{-4}$
800	31300	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$	$8.17 \cdot 10^{-5}$	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$
1600	31300	$4.09 \cdot 10^{-5}$	$6.39 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$9.21 \cdot 10^{-5}$	$5.55 \cdot 10^{-5}$

Сходимость метода была продемонстрирована путем сравнения в норме пространства L_2 разности между численным и точным решениями для неизвестных функций $\mathbf{u}$ и p. Выбранные расчетные сетки отличаются числом N, показывающим степень разбиения границ, числом узлов сетки N_v, максимальной безразмерной площадью треугольника в сетке $S_{\max}$ и характерным безразмерным пространственным шагом $h = \sqrt{S_{\max}}$. В таблице 3 указаны эти параметры, а также значения относительной погрешности

$$E_f = \frac{||f - f_h||_{L_2}}{||f||_{L_2}}.$$

численного решения. Здесь f и f_h — компоненты точного и численного решения соответственно.

На рисунке 2.9 показаны результаты теста на сходимость. Как отмечалось в параграфе 1.4, тангенс угла наклона линии, аппроксимирующей график относительной погрешности $\log(E_f) = \kappa \log h + C$, показывает фактический порядок сходимости метода, который в данном случае равен 2.0.

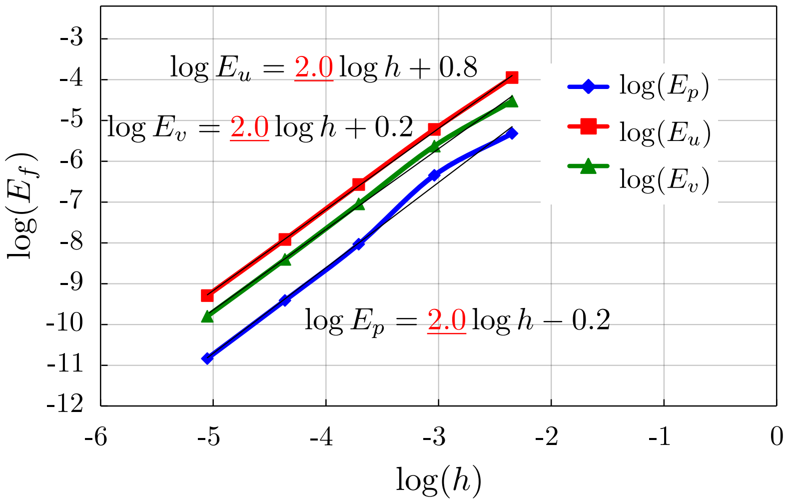


Рисунок 2.9 — Результаты теста на сходимость при $\alpha = 0.8$

2.4.2 Проверка на численную сходимость

Для того чтобы проверить вычислительный алгоритм, для более сложной задачи была исследована его численная сходимость. В качестве входных данных задачи были выбраны физические параметры, характерные для реального ГРП. При проведении расчетов предполагалось, что пласт является однородной средой и изначально находится в однородном преднапряженном состоянии, возникшем в результате действия напряжений на бесконечности σ_∞:

$$\boldsymbol{\tau}_0\langle\mathbf{n}\rangle = -\sigma_\infty \mathbf{n}.$$

Все параметры расчета приведены в таблице 4. Зная модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, по известным формулам можно рассчитать модули упругости λ и μ. Выражение для упругоемкости S_ε дается формулой (2.2).

Таблица 4 — Входные параметры модели, используемые при верификации численного алгоритма

Параметр	**Значение**
Размер области R	105 м
Макс. длина правой полутрещины $L_r^{\max}$	40 м
Макс. длина левой полутрещины $L_\ell^{\max}$	40 м
Модуль Юнга E	17 ГПа
Коэффициент Пуассона ν	0.2
Энергия разрушения G_c	120 Па·м
Критическое напряжение сцепления σ_c	1.25 МПа
Начальная пористость ϕ	0.2
Проницаемость пласта k_r	10^{-14} м^2
Коэффициент Био α	0.75
Упругоемкость S_ε	1.46×10^{-11} Па$^{-1}$
Напряжения на бесконечности σ_∞	10 МПа
Давление в пласте p_∞	0 МПа
Вязкость пластовой жидкости η_r	10^{-3} Па·с
Вязкость жидкости гидроразрыва η_f	10^{-1} Па·с
Расход жидкости на единицу высоты $2\,Q$	10^{-3} м^2/с

Дискретизации рассчетной области проводилась встроенными средствми пакета FreeFEM++ [94], как показано на рисунке 2.10. Здесь величины

$$\begin{gathered}
N_t = \frac{3N}{400}, \quad N_\ell = N_r = \frac{3N}{800}, \\
N_{s\ell} = \frac{N}{20}\left(\frac{R - L_\ell^{\max}}{R}\right), \quad N_{sr} = \frac{N}{20}\left(\frac{R - L_r^{\max}}{R}\right), \\
N_f = 4N\left(\frac{L_\ell^{\max} + L_r^{max}}{R}\right), \\
N_{it} = \frac{N}{20}\left(\frac{L_\ell^{\max} + L_r^{\max}}{R}\right), \quad N_{i\ell} = N_{ir} = \frac{N}{240}
\end{gathered} \tag{2.48}$$

обозначают число сегментов, на которые разбивается соответствующая часть границы. Для повышения надежности алгоритма граница Γ_s была переопределена как

$$\Gamma_s = \{-R < x < -L_\ell^{\max},\, y = 0\} \bigcup \{L_r^{\max} < x < R,\, y = 0\},$$

где $L_\ell^{\max}$ и $L_r^{\max}$ — максимальные длины левой и правой полутрещин соответственно.

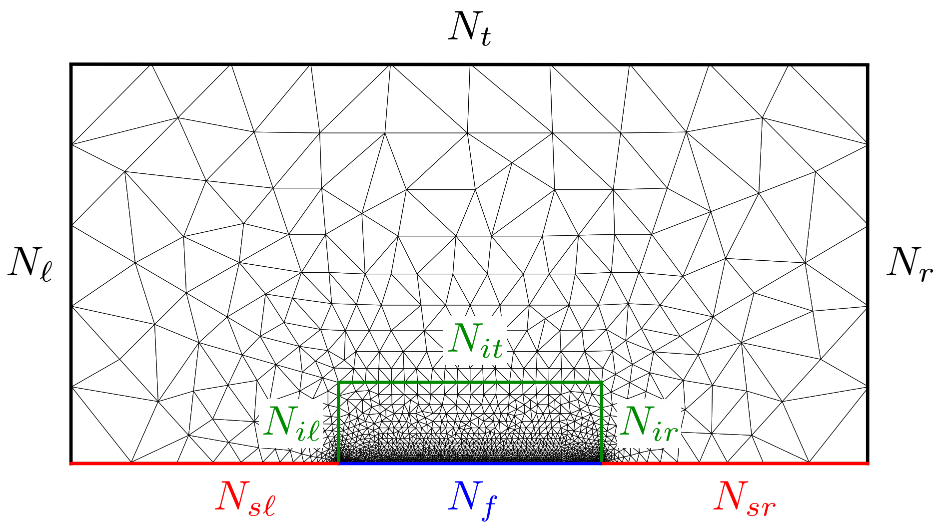


Рисунок 2.10 — Триангуляция расчетной области

На последовательности измельчающихся сеток была проведена серия расчетов со значением параметра $N = 800 \cdot 2^{k-1}$, где $k = 1, \ldots, 5$ — номер расчета.

Для анализа сходимости для каждой неизвестной функции p, u и v были расчитаны относительные разницы между решениями на двух последовательных сетках в норме пространства L_2:

$$\varepsilon_f(h) = \frac{||f_h - f_{h/2}||_{L_2}}{||f_{h/2}||_{L_2}}, \tag{2.49}$$

где f_h — одна из функций p, u или v, посчитанная на сетке с параметром измельчения $h = \sqrt{S_{\max}}$, $S_{\max}$ — максимальная безразмерная площадь среди всех треугольников в соответствующей сетке. Из таблицы 5, где показаны значения величин $\varepsilon_p(h)$, $\varepsilon_u(h)$ и $\varepsilon_v(h)$ в момент времени $t = 10$ с для сеток с убывающим параметром h, можно заключить, что для всех неизвестных функций наблюдается сходимость приблизительно со вторым порядком.

Графики максимума величины ε_f

$$\varepsilon_{\max}(h) = \max\Big(\varepsilon_p(h), \varepsilon_u(h), \varepsilon_v(h)\Big) \times 100\,\% \tag{2.50}$$

Таблица 5 — Результаты теста на численную сходимость по пространству в момент времени $t = 10$ с

N	N_v	$S_{\max}$	$h = \sqrt{S_{\max}}$	ε_p	ε_u	ε_v
800	4763	$6.13 \cdot 10^{-2}$	$2.48 \cdot 10^{-1}$	$5.90 \cdot 10^{-2}$	$4.76 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-2}$
1600	15836	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-1}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$
3200	61483	$4.49 \cdot 10^{-3}$	$6.70 \cdot 10^{-2}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$
6400	237765	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$3.57 \cdot 10^{-2}$	$9.68 \cdot 10^{-4}$	$9.18 \cdot 10^{-4}$	$6.99 \cdot 10^{-4}$
12800	954416	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$1.99 \cdot 10^{-2}$	—	—	—

Примечание. За N_v обозначено число вершин в соответствующей сетке

среди функций p, u или v в различные моменты времени представлены на рисунке 2.11.

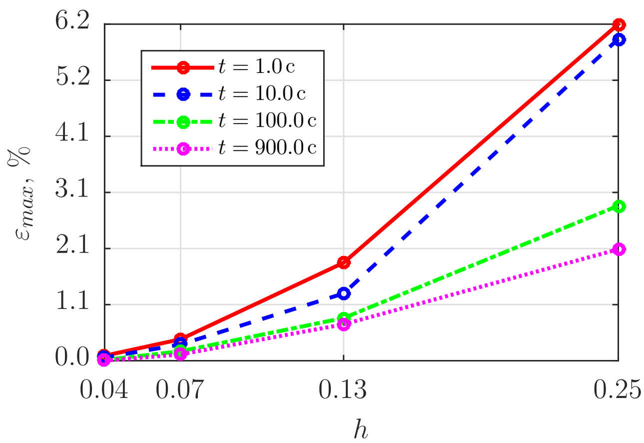


Рисунок 2.11 — Относительная разница в норме L_2 между решениями на двух последовательных сетках для разных моментов времени

Заметим, что при $h \approx 0.13\,(N = 1600)$ относительная разница между решениями меньше 2 % для любого момента времени, поэтому соответствующую сетку можно считать подходящей для проведения дальнейших расчетов.

2.4.3 Сравнение с известными моделями трещин ГРП

Как было указано во введении, согласно [9], [10] в модели KGD распространение трещины обуславливается двумя конкурирующими механизмами диссипации энергии (вязкая диссипация и разрушение породы) и двумя механизмами запасания жидкости (в трещине и в пласте). В результате можно выделить четыре предельных режима развития трещины: режим преобладания вязкой диссипации с отсутствием утечек в пласт, режим преобладания вязкой диссипации с существенными утечками в пласт, режим преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт, режим преобладания разрушения породы с существенными утечками в пласт. Используя модель трещины в пороупругой среде, аналогичную рассматриваемой в настоящей работе, авторы [92] воспроизвели все вышеперечисленные режимы и показали хорошее совпадение полученных численных решений с полуаналитическими решениями модели KGD. Поэтому в качестве дополнительной верификации модели автором диссертации было проведено сравнение результатов численных расчетов с результатами, приведенными в [92].

Входные параметры для расчетов, рассматриваемых в текущем параграфе, совпадают с приведенными в таблице 4 пункта 2.4.2 за исключением размера области $R = 45$ м, максимально допустимых длин правой и левой полутрещины $L_r^{\max} = L_l^{\max} = 15$ м и некоторых других параметров задачи, определяемых отдельно в каждом конкретном случае.

Для того чтобы воспроизвести режим преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт значения вязкости пластовой жидкости и жидкости гидроразрыва были выбраны равными $\eta_r = \eta_f = 10^{-4}$ Па·с для минимизации вязкой диссипации. Напряжения на бесконечности предполагались равными $\sigma_\infty = 3.7$ МПа. Автором диссертации были проведены два численных эксперимента со значениями проницаемости пласта $k_r = 10^{-15}$ м^2 и $k_r = 10^{-16}$ м^2 в течение 14 и 20 с соответственно, чтобы гарантировать, что трещина распространяется в нужном режиме. Согласно [92] при таком наборе параметров результаты расчетов хорошо согласуются с решением KGD модели для малых времен вблизи вершины K (near-K решение в [10]) фазовой диаграммы (см. введение, рисунок 3) .

На рисунке 2.12 продемонстрировано совпадение полудлин трещин, полученных в настоящей работе (сплошные линии 1, 2), с результатами из [92] (маркированные линии 5, 6). Хорошее совпадение положения границы действия зон сил сцепления (сплошные линии 3, 4 и маркированные линии 7, 8) показывает согласованность в реализации критерия разрушения. Также хорошо согласуются графики (рисунок 2.13) раскрытия трещины w, измеренного на скважине, и профили полуширины трещины вдоль линии ее распространения (рисунок 2.14). Все это подтверждает соответствие между геометриями трещин в настоящей работе и в [92].

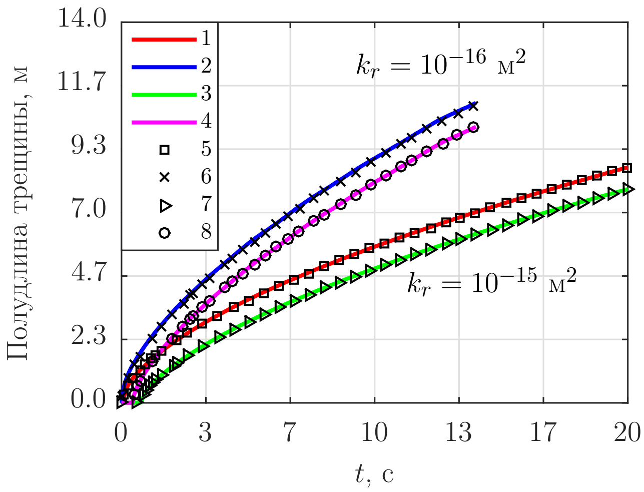


Рисунок 2.12 — Полудлина трещины для режима преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт: при $k_r = 10^{-15}$ м^2 (1) в настоящей работе, (5) в [92]; при $k_r = 10^{-16}$ м^2 (2) в настоящей работе, (6) в [92]. Положение границы действие сил сцепления возле правого кончика: при $k_r = 10^{-15}$ м^2 (3) в настоящей работе, (7) в [92]; при $k_r = 10^{-16}$ м^2 (4) в настоящей работе, (8) в [92]

Зафиксировав упругоемкость S_ε, можно искусственно положить в задаче $\alpha = 0$, что устранит взаимосвязь между уравнениями равновесия (2.42) и фильтрации (2.43). Сравнение графиков избыточного давления $p_{net} = p - \sigma_\infty$ для случаев с нулевым и ненулевым α показано на рисунке 2.15.

На рисунке 2.16 приведено сравнение с [92] раскрытия трещины (а), измеренного на скважине, и полудлины трещины в режиме преобладания разрушения породы с существенными утечками в пласт. Вязкости пластовой жидкости и жидкости гидроразрыва были взяты те же, что и в расчетах в режиме преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт. Напряжения на бесконечности $\sigma_\infty = 5$ МПа и проницаемость в направлении оси Oy $k_r^y = 5 \times 10^{-15}$ м^2

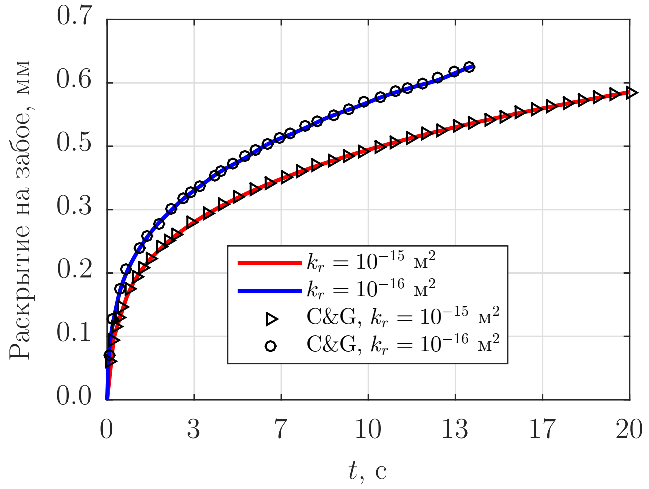


Рисунок 2.13 — Графики раскрытия трещины, измеренного на скважине, в зависимости от времени при $k_r = 10^{-15}$ м^2 и $k_r = 10^{-16}$ м^2, посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт

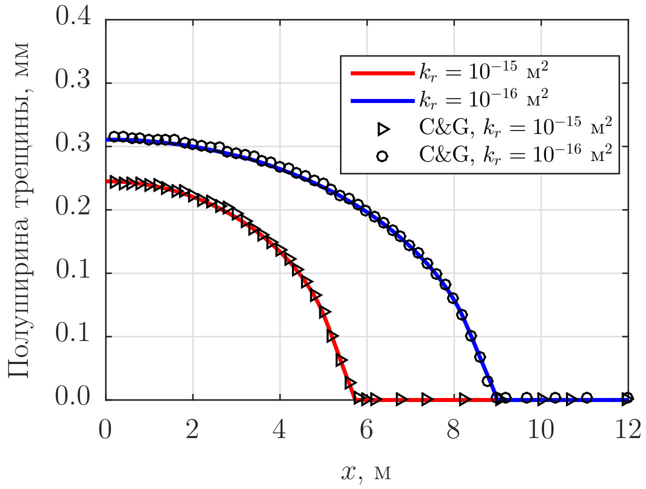


Рисунок 2.14 — Профили полуширины трещины в момент времени $t = 10$ с при $k_r = 10^{-15}$ м^2 и $k_r = 10^{-16}$ м^2, посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт

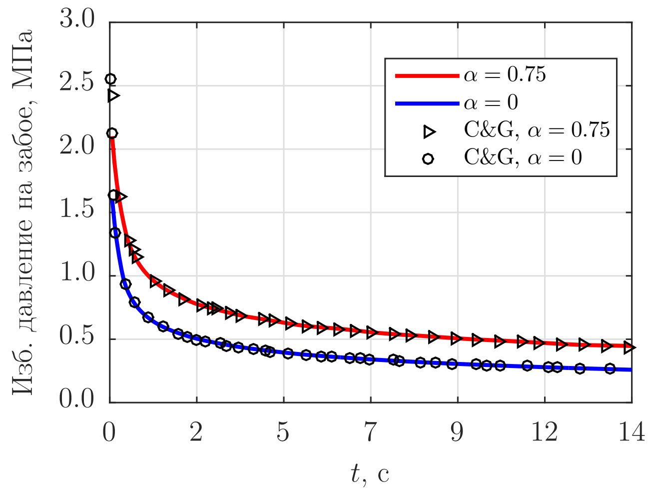
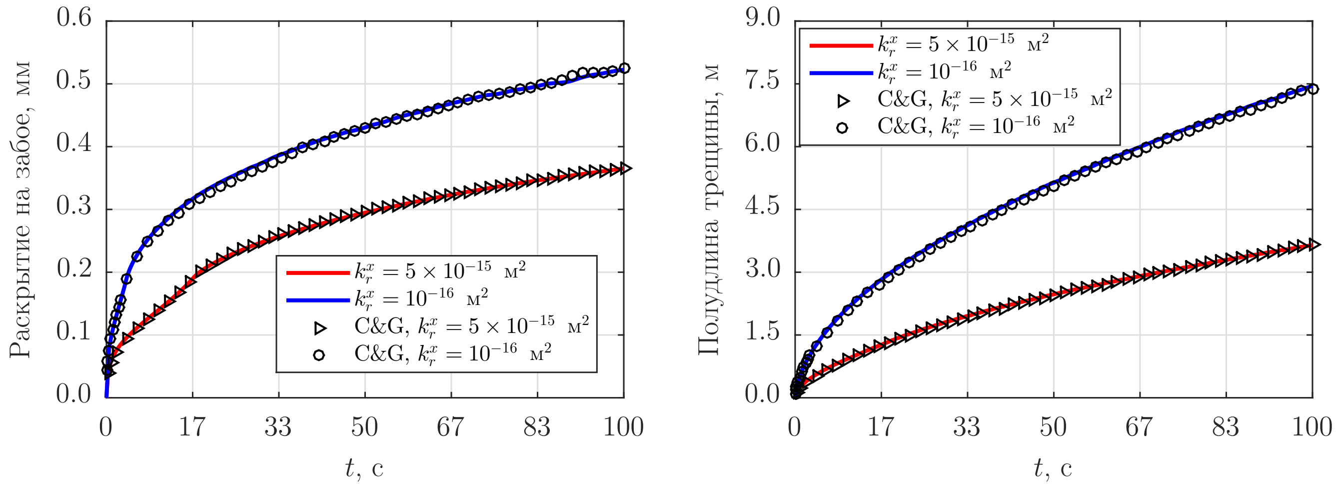


Рисунок 2.15 — Зависимость избыточного давления от времени в режиме преобладания разрушения породы с отсутствием утечек в пласт для связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0.0$) задач, посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) при $k_r = 10^{-16}$ м^2

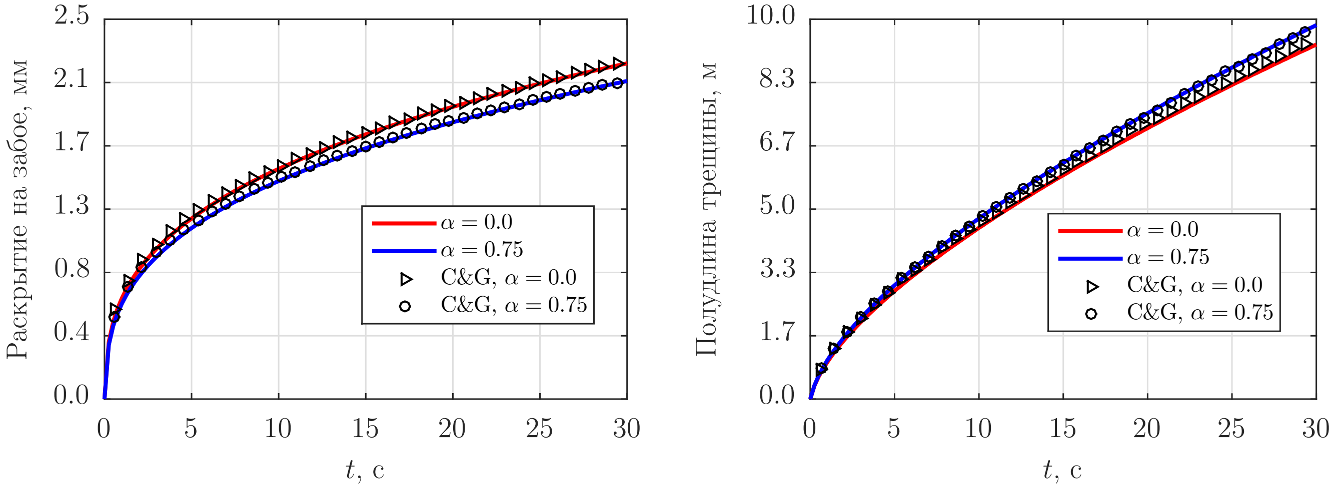
были увеличены, чтобы обеспечить распространение трещины в режиме существенных утечек в пласт. Проницаемость в направлении оси Ox $k_r^x = k_r^y$ для случая двумерной фильтрации в пласте, а для реализации режима одномерной фильтрации $k_r^x = 0.02\,k_r^y$. Режим одномерной фильтрации попадает в одно из предположений, сделанное в модели Картера [5], и поэтому хорошо согласуется с решением (near-$\tilde{K}$ решение в [10]) вблизи вершины $\tilde{K}$ (см. введение, рисунок 3), как указано в [92].



а б

Рисунок 2.16 — Раскрытие трещины (а), измеренное на скважине, и полудлина (б) в случаях двумерной ($k_r^x = 5 \times 10^{-15}$ м^2) и одномерной фильтрации в пласте ($k_r^x = 10^{-16}$ м^2), посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания разрушения породы с существенными утечками в пласт

Чтобы воспроизвести режим преобладания вязкой диссипации с отсутствием утечек в пласт, были выбраны следующие значения вязкостей: $\eta_r = \eta_f = 10^{-1}$ Па·с. Проницаемость пласта при расчетах равна $k_r = 10^{-15}$ м^2, а напряжения на бесконечности $\sigma_\infty = 3.7$ МПа. На рисунках 2.17, 2.18 показано совпадение с данными из [92] для полудлины трещины, а также для ее раскрытия и избыточного давления, которые были измерены на скважине для связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач. Соответствующее автомодельное решение (M-решение в [9]) хорошо согласуется [92] с расчетом для несвязанной задачи. В работе [92] было также отмечено, что изменение коэффициента Био α слабо влияет на геометрию трещины (см. рисунок 2.17), но вызывает повышение давления (см. рисунок 2.18) вследствие наличия «обратного напряжения» [115], [72]. Однако, как будет показано ниже, это реализуется только в режиме с отсутствием утечек.



(а) **(б)**

Рисунок 2.17 — Графики раскрытия трещины (а), измеренного на скважине, и ее полудлины (б) в зависимости от времени для связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач, посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания вязкой диссипации с отсутствием утечек в пласт

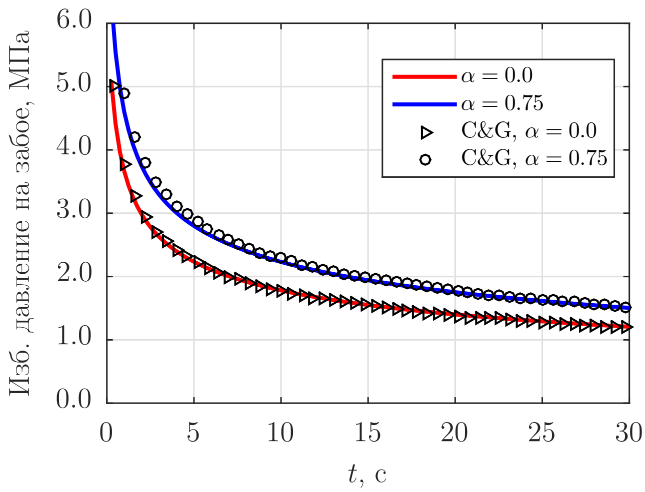
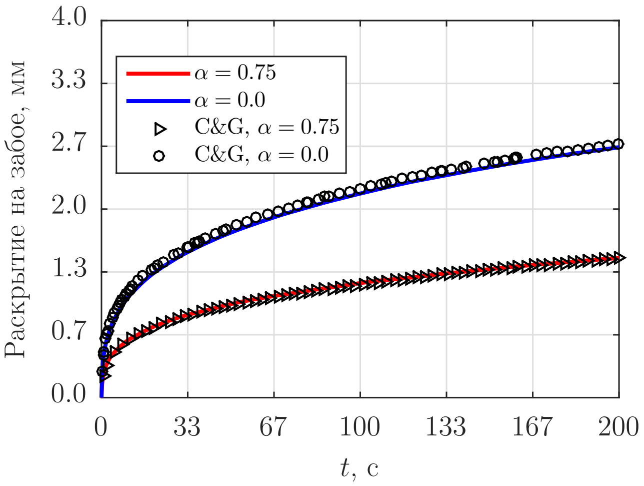
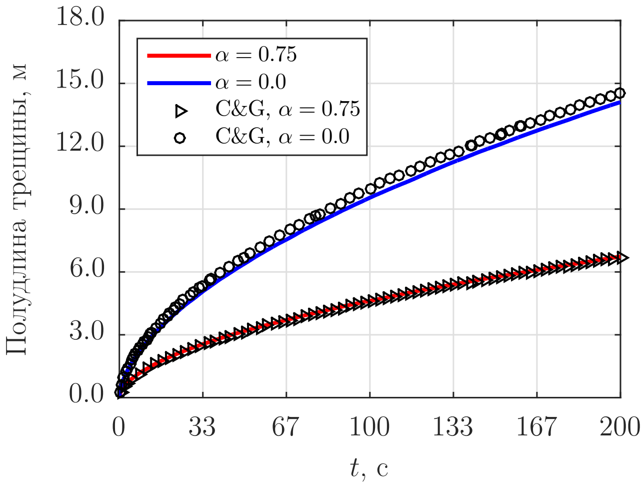


Рисунок 2.18 — Избыточное давление в случае связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач, посчитанное в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания вязкой диссипации с отсутствием утечек в пласт

В режиме преобладания вязкой диссипации с существенными утечками в пласт были проведены два расчета: для случаев связанной и несвязанной задач. Чтобы обеспечить фильтрацию в пласте только в одном направлении, значение проницаемости было выбрано равным $k_r^y = 5 \times 10^{-12}$ м^2 в направлении оси Oy и $k_r^x = 0.00002\, k_r^y$ в направлении оси Ox. Напряжения на бесконечности σ_∞ равны 7.2 МПа, а вязкости $\eta_r = \eta_f = 10^{-1}$ Па·с. На рисунках 2.19, 2.20 показан сравнительный анализ для полудлины трещины, а также для ее раскрытия и избыточного давления p_{net}, которые были измерены на скважине, для связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач. В случае несвязанной задачи все кривые совпадают с $\tilde{M}$-решением из [9] для модели KGD. Кроме этого в связанной задаче давление в трещине значительно выше из-за действия обратного напряжения (см. рисунок 2.20). В свою очередь, это приводит к образованию трещины меньших размеров (см. рисунок 2.19) по причине большего оттока жидкости из трещины в пласт.



(а)



(б)

Рисунок 2.19 — Графики раскрытия трещины (а), измеренного на скважине, и ее полудлины (б) в зависимости от времени для связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач, посчитанные в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания вязкой диссипации с существенными утечками в пласт

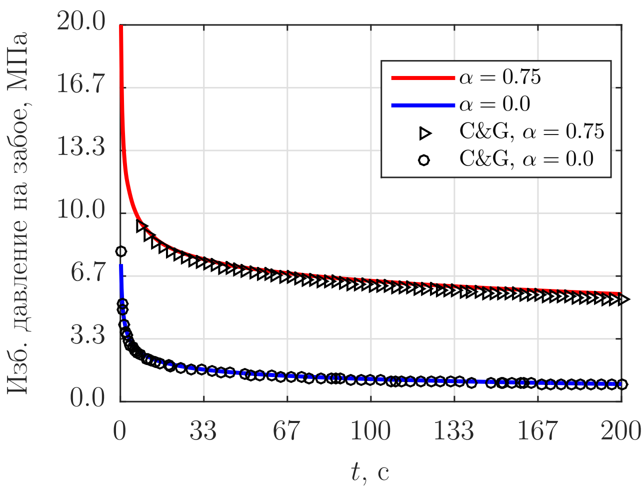


Рисунок 2.20 — Избыточное давление в случае связанной ($\alpha = 0.75$) и несвязанной ($\alpha = 0$) задач, посчитанное в настоящей работе и в [92] (C&G) в режиме преобладания вязкой диссипации с существенными утечками в пласт

2.5 Влияние порового давления на динамику развития трещины

Данный параграф посвящен изучению влияния порового давления p на распределение напряжений в окрестности трещины и динамику распространения трещины с помощью разработанной численной модели. Как и в предыдущем параграфе, значения основных параметров задачи для численных экспериментов взяты из таблицы 4, если не оговорено обратное.

2.5.1 Коэффициент Био

Коэффициент Био α является параметром, определяющим вклад порового давления в полные напряжения (см. уравнение (2.1)). Нулевой коэффициент Био $\alpha = 0$ означает, что поровое давление и упругие напряжения не связаны так, что процесс фильтрации и деформация породы не взаимодействуют друг с другом. Максимальное значение коэффициента $\alpha = 1$ ведет к наиболее тесной взаимосвязи давления в порах и напряженно-деформированного состояния. Общая тенденция влияния порового давления p и зависимость геометрических параметров трещины (длины и полуширины) от коэффициента Био продемонстрирована на рисунке 2.21.

Можно заметить, что при больших значениях α давление в трещине выше (см. рисунок 2.21, а), в то время как сама трещина получается уже (см. рисунок 2.21, б).

Данный эффект является следствием взаимного влияния двух факторов: изменения напряженно-деформированного состояния вблизи трещины из-за дополнительного всестороннего сжатия породы поровой жидкостью и влияния деформации породы на фильтрацию жидкости. В приведенном ниже анализе этого явления эти факторы будут рассмотрены отдельно и продемонстрировано влияние каждого из них на динамику развития трещины.

Для того чтобы более тщательно исследовать влияние порового давления и фильтрации жидкости на распространение трещины, будем различать коэффициент Био α в уравнении равновесия (2.15) и уравнении фильтрации (2.16),

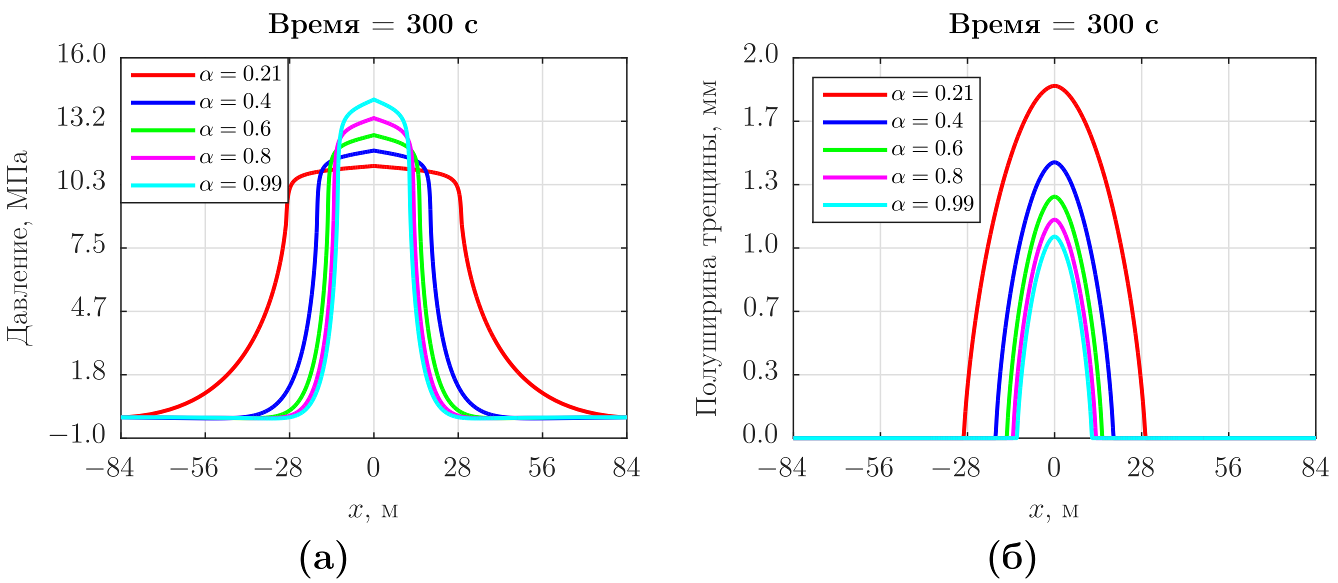
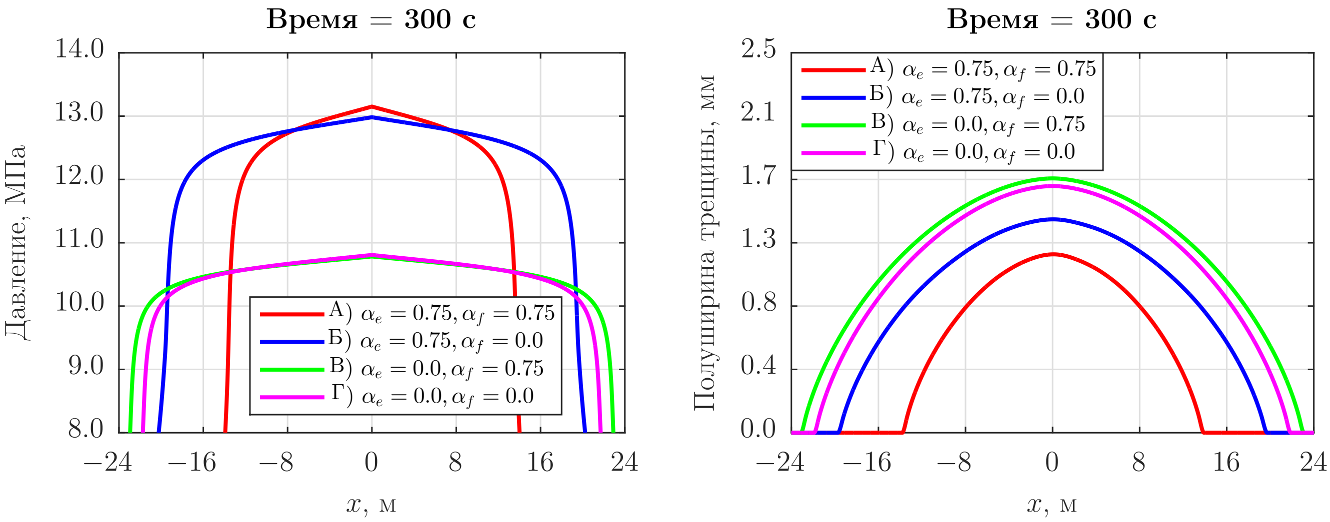


Рисунок 2.21 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для различных значений коэффициента α при $t = 300$ с

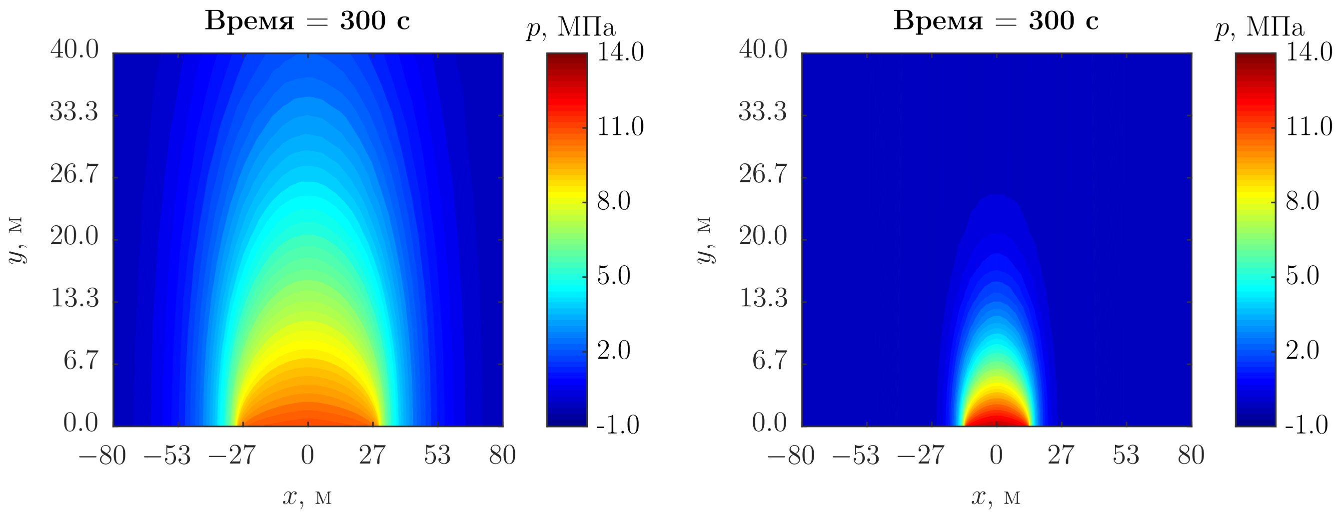
обозначая их α_e и α_f соответственно. Таким образом, случай $\alpha_e = 0$, $\alpha_f \neq 0$ означает, что поровое давление не осуществляет вклад в напряжения, в то время как случай $\alpha_e \neq 0$, $\alpha_f = 0$ соответствует несвязанным процессам деформации и фильтрации.

Если искусственно зафиксировать упругоемкость S_ε и проницаемость k_r, то можно сравнить следующие четыре задачи Био: А) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0.75$ (связанная); Б) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0.0$ (частично связанная); В) $\alpha_e = 0.0$, $\alpha_f = 0.75$ (частично связанная); Г) $\alpha_e = 0.0$, $\alpha_f = 0.0$ (несвязанная). На рисунке 2.22 показаны профили давления и полуширины трещины вдоль линии ее распространения для всех четырех случаев при высокой проницаемости пласта ($k_r = 10^{-14}$ м^2) и низкой упругоемкости ($S_\varepsilon = 1.46 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$) в момент времени $t = 300$ с. Отсюда можно заметить, что трещина наименьших размеров получается в связанной задаче. Как будет показано ниже, сокращение длины трещины в связанной задаче есть следствие больших утечек из трещины в пласт. Это также можно увидеть на рисунке 2.23, где сравниваются распределения давления в пласте для малого и большого коэффициента Био. Заметим, что при большем α зона обводнения получается меньше, а градиент давления — выше.



(а) (б)

Рисунок 2.22 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для связанной, несвязанной и частично связанных задач при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-14}$ м^2, упругоемкость $S_\varepsilon = 1.46 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$



(а) (б)

Рисунок 2.23 — Распределение давления в пласте при $\alpha = 0.21$ (а) и $\alpha = 0.99$ (б) в момент времени $t = 300$ с

2.5.2 Влияние деформации породы на фильтрацию жидкости

Для того чтобы отдельно рассмотреть влияние деформации породы на фильтрацию жидкости, сравним случай В) $\alpha_e = 0$, $\alpha_f = 0.75$ и Г) $\alpha_e = \alpha_f = 0$ на рисунке 2.22. Можно заметить, что трещина получается слегка меньше в несвязанной задаче Г. Как следует из уравнения фильтрации (2.16), если пренебречь упругоемкостью $S_\varepsilon = 0$, расход жидкости через любую замкнутую поверхность пропорционален потоку скорости упругого скелета через эту поверхность с обратным знаком. Это означает, что деформация породы порождает фильтрацию жидкости относительно нормали к рассматриваемой поверхности в направлении, противоположном производной по времени от объемной деформации. Присутствие упругоемкости $S_\varepsilon \neq 0$ уменьшает описанный эффект.

В приложении к случаям В и Г на рисунке 2.22 это означает, что в случае В деформация породы создает приток жидкости в трещину, что снижает величину полных утечек в пласт и, как следствие, увеличивает объем получившейся трещины. Сделанные выше наблюдения можно резюмировать в виде первого эмпирического правила: «Деформация порождает противоположно направленную фильтрацию».

2.5.3 Влияние порового давления на напряжения

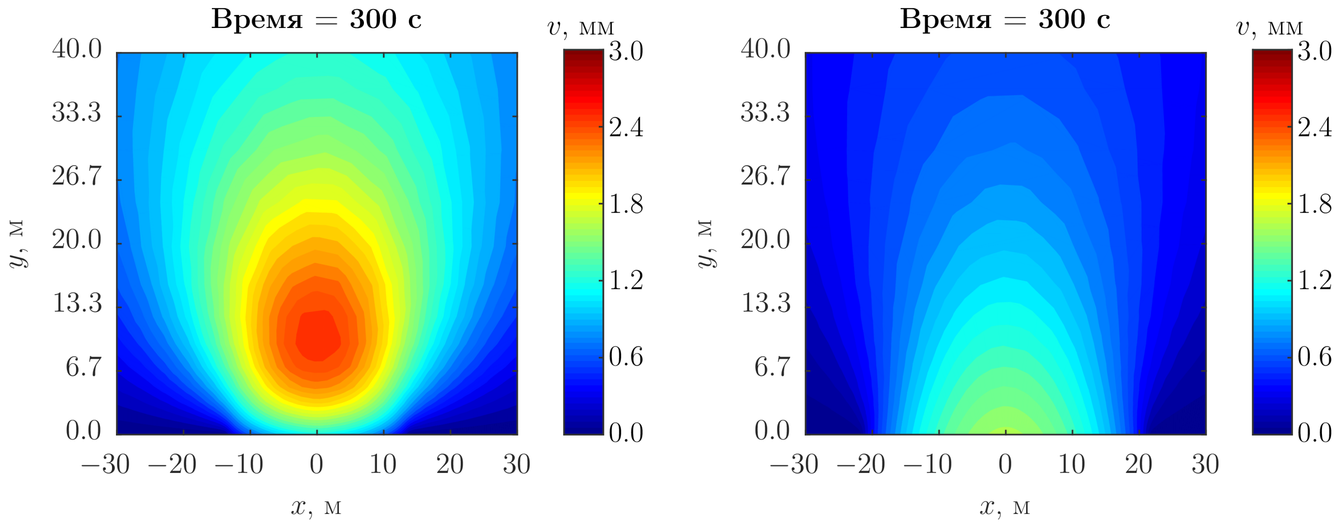
Для того чтобы обнаружить воздействие давления поровой жидкости на напряженное состояние в окрестности трещины, сравним случаи Б) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0$ и Г) $\alpha_e = \alpha_f = 0$ на рисунке 2.22. В обоих случаях деформация породы не изменяет фильтрацию жидкости. Однако в частично связанной задаче Б поровая жидкость создает дополнительное объемное сжатие породы, которое компенсирует часть давления жидкости гидроразрыва на стенки трещины. Этот эффект носит название обратного напряжения [72; 115]. Обратное напряжение эффективно снижает давление, приложенное к стенкам трещины жидкостью гидроразрыва. В свою очередь, это приводит к увеличению давления жидкости внутри трещины для того, чтобы создать трещину требуемых размеров согласно величине расхода, закачиваемого в скважину. Это наблюдение подтверждается сравнением графиков давления для случаев Б и Г на рисунке 2.22, а. Увеличение давления внутри трещины приводит к более высоким значениям утечек в пласт вследствие фильтрации через стенки трещины, что, в свою очередь, снижает эффективность жидкости и уменьшает размеры трещины (см. рисунок 2.22, б). Таким образом, второе эмпирическое правило для воздействия жидкости в порах на деформацию породы звучит так: «Поровое давление увеличивает жесткость породы».

2.5.4 Влияние порового давления на динамику развития трещины в связанной задачи Био

В связанной задаче Био распространение трещины управляется взаимодействием двух факторов: влиянием деформации породы на фильтрацию и действием обратного напряжения, повышающего давление жидкости в трещине и, как следствие, утечки в пласт. Благодаря сравнению случаев А) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0.75$ и Г) $\alpha_e = \alpha_f = 0$ на рисунке 2.22, можно заметить, что трещина получается на 20 % шире и длиннее в несвязанной задаче Г, чем в связанной А.

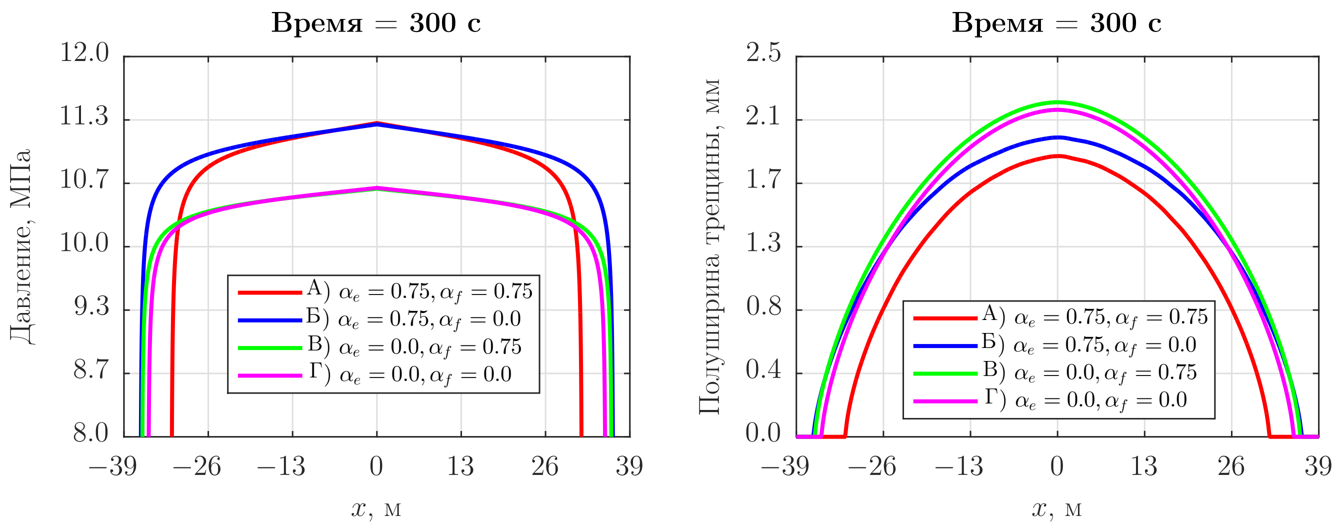
Для этого есть две причины. Во-первых, в связанной задаче А давление жидкости в трещине выше из-за присутствия обратного напряжения (Второе эмпирическое правило). Поэтому скорость утечек в этом случае выше, а объем трещины меньше. Однако только один этот аргумент не объясняет значительную разницу в геометриях трещины, что следует из сравнения случаев Б и Г предыдущего пункта.

Второй фактор заключается во влиянии деформации жидкости на фильтрацию. Согласно первому эмпирическому правилу можно ожидать, что утечки жидкости из трещины в пласт снизятся вследствие деформации породы, как это произошло в случае В (см. п. 2.5.2). Этот эффект имеет место, но не в направлении трещины, а в направлении области с максимальной скоростью перемещения среды. В самом деле, наличие порового давления придает породе дополнительную жесткость в окрестности трещины (второе эмпирическое правило), которая уменьшается вдоль оси Oy. Поэтому максимальное значение перемещения среды достигается не на стенке трещины, а на некотором расстоянии от трещины. Этот эффект продемонстрирован на рисунке 2.24, где приводится сравнение вертикальной компоненты перемещения v для случая связанной задачи Био А (слева) и несвязанной Г (справа). Согласно первому эмпирическому правилу жидкость притягивается областью с наибольшей скоростью перемещения, которая находится на некотором расстоянии от трещины, что приводит к дополнительным потерям жидкости из трещины.



(а) (б)

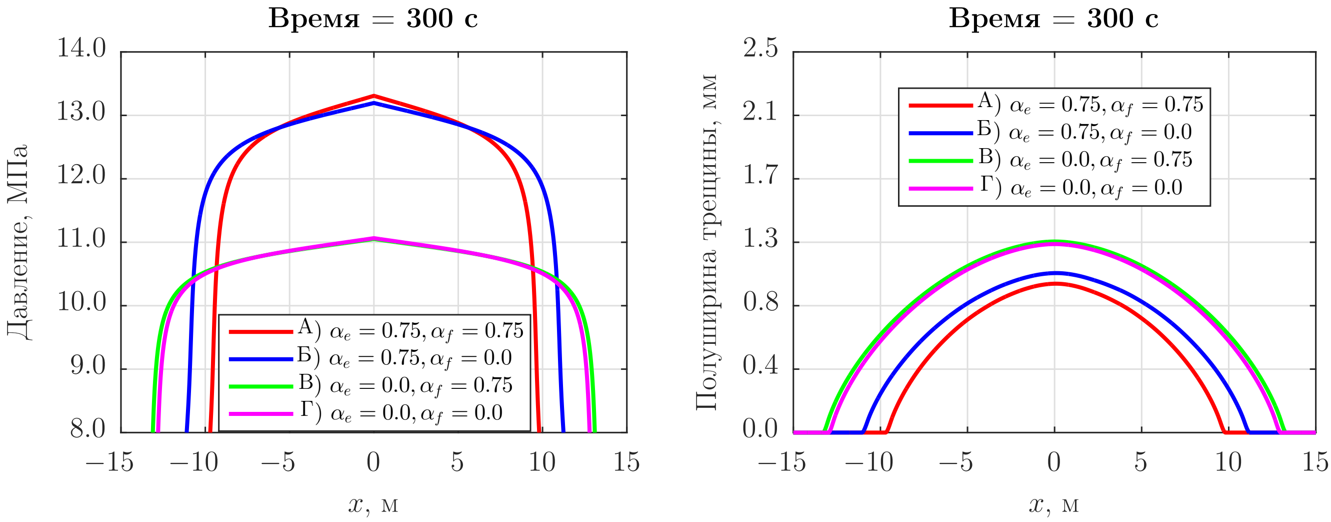
Рисунок 2.24 — Распределение компоненты перемещений v в пласте, полученное в связанной (а) и несвязанной (б) задачах при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-14}$ м^2, упругоемкость $S_\varepsilon = 1.46 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$



(а) (б)

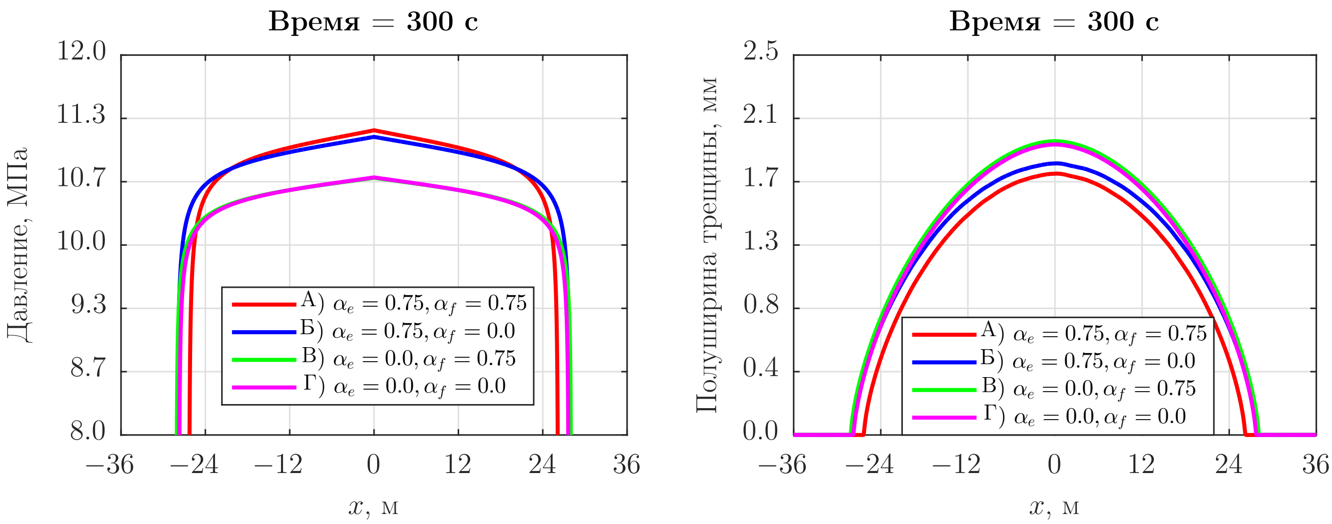
Рисунок 2.25 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для связанной, несвязанной и частично связанных задач при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-15}$ м^2, упругоемкость $S_\varepsilon = 1.46 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$

В заключение заметим, что в случае относительно высокой проницаемости породы $k_r = 10^{-14}$ м^2 поровое давление играет значительную роль в перераспределении напряжений вблизи трещины гидроразрыва и приводит к различиям в геометрических характеристиках трещины до 20 %. В случаях более низкой проницаемости или высокой упругоемкости все упомянутые эффекты сохраняются, но проявляются в меньшей степени, как показано на рисунках 2.25, 2.26, 2.27.



(а) **(б)**

Рисунок 2.26 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для связанной, несвязанной и частично связанных задач при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-14}$ м^2, упругоемкость $S_\varepsilon = 7.3 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$



(а) **(б)**

Рисунок 2.27 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для связанной, несвязанной и частично связанных задач при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-15}$ м^2, упругоемкость $S_\varepsilon = 7.3 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$

2.6 Неоднородный пласт

Численный алгоритм, построенный в параграфе 2.3, позволяет моделировать трещину гидроразрыва в неоднородной среде. В текущем параграфе будет показано, как влияют неоднородности в сжимающих напряжениях и физических характеристиках среды на распространение трещины.

2.6.1 Контраст сжимающих напряжений

Идея данного пункта заключается в том, чтобы продемонстрировать, как влияют непостоянные по пространству сжимающие напряжения в пласте на направление распространения трещины и симметрию ее крыльев. Для этого была рассмотрена задача ГРП в среде с различными сжимающими напряжениями при положительных и отрицательных значениях x (правый и левый слои соответственно):

$$\sigma_\infty(x) = \begin{cases} \sigma_\infty^\ell, & x \leqslant 0, \\ \sigma_\infty^r, & x > 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

Параметры расчета представлены в таблице 4 кроме $R = 150$ м, $L_\ell^{\max} = 40$ м, $L_r^{\max} = 73$ м. При фиксированном значении сжимающих напряжений в правом слое $\sigma_\infty^r = 10$ МПа для различных расчетов варьировалась аналогичная величина в левом: $\sigma_\infty^\ell = 10.1$, 10.2, 10.4, 10.6 и 10.8 МПа.

Результаты численных экспериментов показаны на рисунке 2.28, где представленны профили распределения давления (а) и полуширины трещины (б) на линии ее распространения в момент времени $t = 1800$ с. Заметим, что ассиметрия крыльев трещины в правом и левом слоях наблюдается даже при разнице сжимающих напряжений в 1 %.

Раскрытие трещины (см. рисунок 2.28, б) больше на правой стороне трещины из-за меньших сжимающих напряжений. В местах с более высокими значениями раскрытия гидродинамическое сопротивление меньше. В совокупности с большим градиентом давления справа от места закачки (рисунок 2.29) это со-

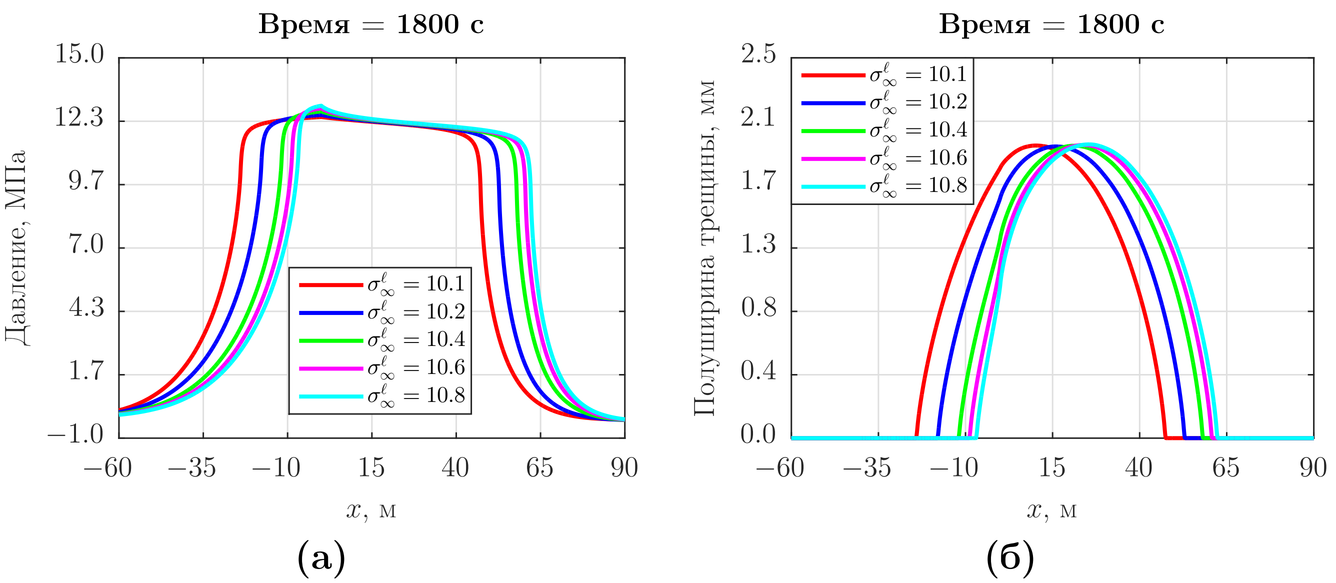


Рисунок 2.28 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для различных значений сжимающих напряжений в пласте слева от точки закачки в момент времени $t = 1800$ с

здает течение по трещине, направленное преимущественно в правую часть трещины. Поэтому левая вершина трещины почти останавливается (рисунок 2.30) из-за недостатка притока жидкости влево.

Таким образом, численные эксперименты доказывают, что даже при малом контрасте сжимающих напряжений в пласте, левое и правое крылья трещины становятся существенно несимметричными. Особенно отчетливо это проявляется у длинных трещин.

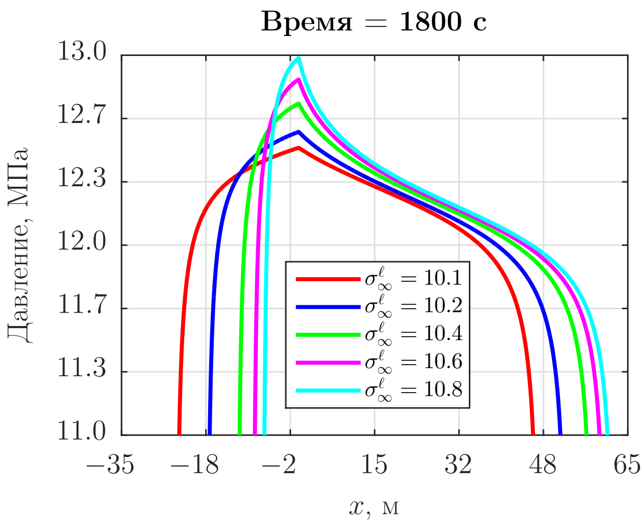


Рисунок 2.29 — Профили давления вдоль линии распространения трещины для различных значений сжимающих напряжений в пласте слева от точки закачки в момент времени $t = 1800$ с (увеличенный фрагмент рисунка 2.28, а)

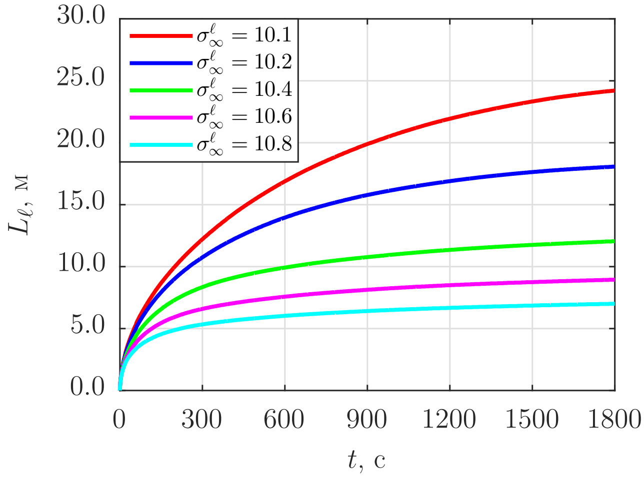


Рисунок 2.30 — Положение L_ℓ левой вершины трещины относительно точки закачки в зависимости от времени

2.6.2 Контраст проницаемости

В данном пункте будет проанализировано влияние порового давления на динамику раскрытия трещины путем варьирования проницаемости горной породы. Для этого рассмотрим продуктивный пласт, состоящий из двух слоев (рисунок 2.31), со следующим распределением проницаемости:

$$k_r(x) = \begin{cases} 10^{-14}\ \text{м}^2, & x \leqslant x^*, \\ 10^{-16}\ \text{м}^2, & x > x^*. \end{cases} \tag{2.52}$$

Здесь $x = x^*$ обозначает границу между слоями, представленную на рисунке 2.31 в виде коричневой линии справа от оси Oy. Таким образом, утечки в пласт будут больше в левом слое.

Параметры расчетов даны в таблице 4 за исключением размеров расчетной области, которые совпадают с используемыми в пункте 2.6.1: $R = 150$ м, $L_\ell^{\max} = 40$ м, $L_r^{\max} = 73$ м. Слева от оси Oy в точке $x = -L_\ell^{\max}$ расположен барьер, изображенный на рисунке 2.31, за который трещина не может переходить в численном эксперименте.

Целью представленных ниже расчетов является изучение поведения распространения трещины в зависимости от местонахождения границы x^* между высокопроницаемым и низкопроницаемым слоем относительно точки закачки. В первом эксперименте граница слоев была расположена вблизи скважины в

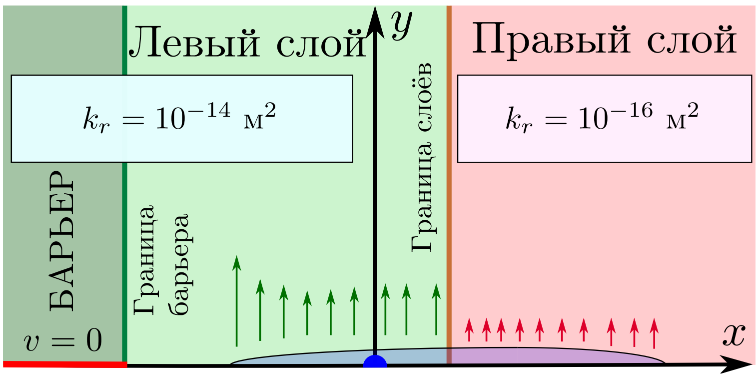


Рисунок 2.31 — Продуктивный пласт, состоящий из высокопроницамого (слева) и низкопроницаемого (справа) слоев. Барьер, расположенный в левом слое, предотвращает дальнейшее распространение трещины

точке $x^* = 3.5$ м. На рисунке 2.32 показаны профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения в различные моменты времени. Можно заметить, что трещина распространяется симметрично, пока не дойдет до границы слоев в момент времени $t \approx 35$ с. После этого она внезапно прорывается в низкопроницаемый (правый) слой и распространяется только вправо так, что левая вершина останавливается. Такое поведение объясняется тем, что трещине значительно легче распространяться при более низких утечках и слабом действии обратного напряжения в области $x > x^*$.

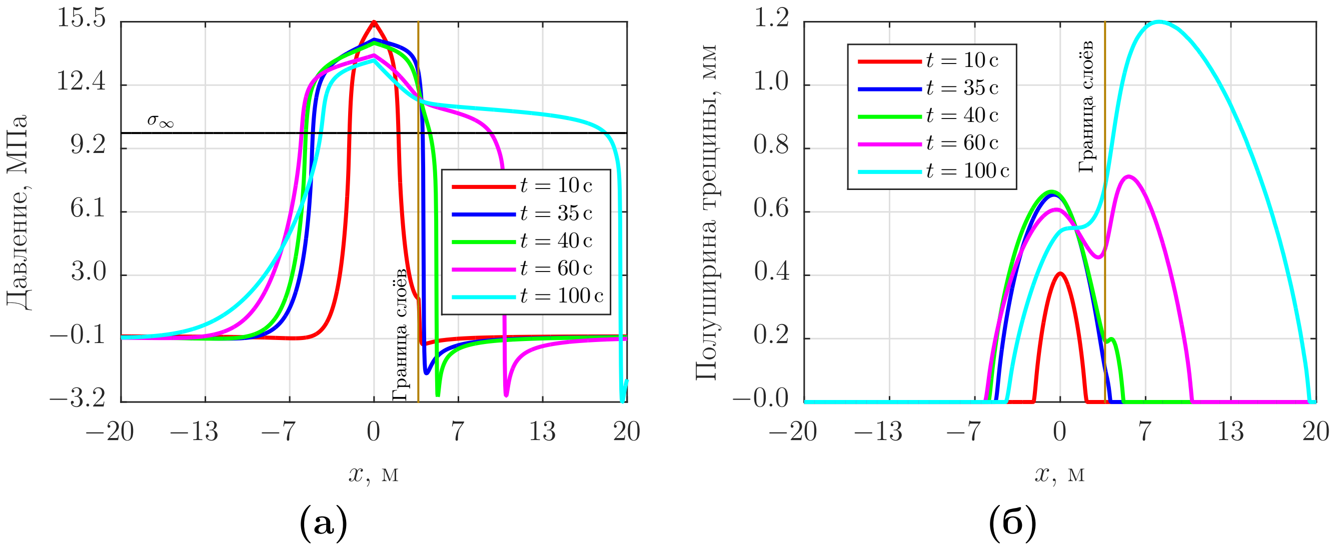


Рисунок 2.32 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения в различные моменты времени в случае пласта, состоящего из двух слоев с высоким контрастом проницаемости. Граница слоев (вертикальная коричневая линия) расположена в точке $x = 3.5$ м

Удивительно то, что в данном эксперименте полуширина трещины имеет невыпуклый профиль с точкой перегиба, формирующейся около границы слоев. Другой интересный факт — это образование зоны отрицательного давления перед фронтом трещины, распространяющейся в низкопроницаемой зоне. Это означает, что деформация перед фронтом трещины индуцирует приток жидкости к области вблизи вершины трещины. В данном случае можно провести аналогию с губкой, на которую нажимают и из которой начинает вытекать жидкость в направлении, противоположном воздействию.

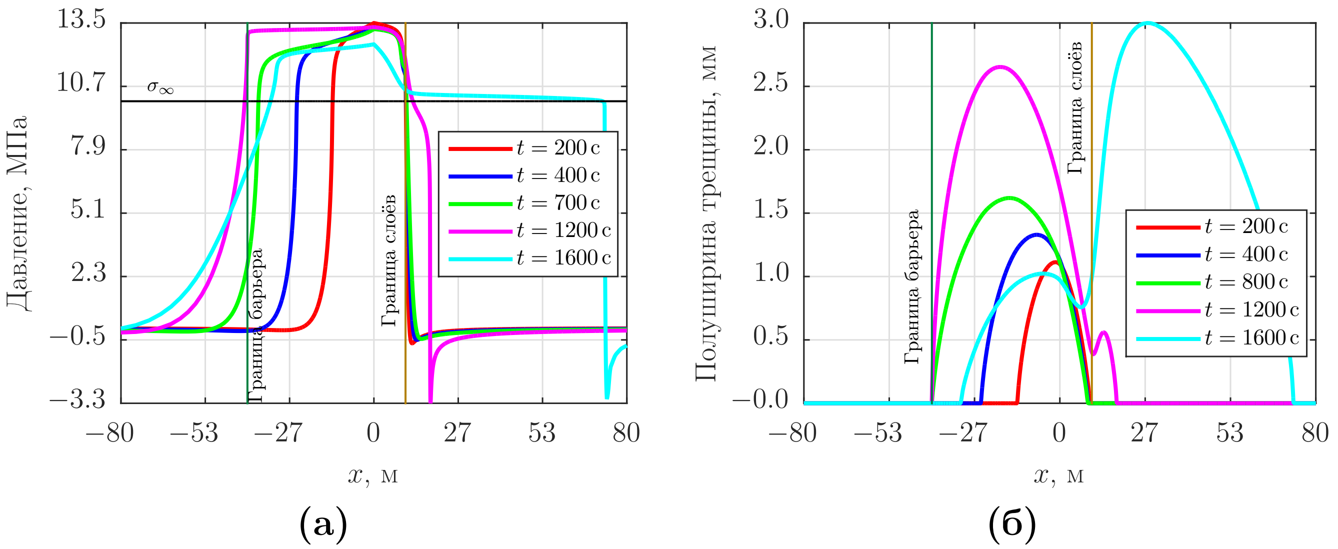
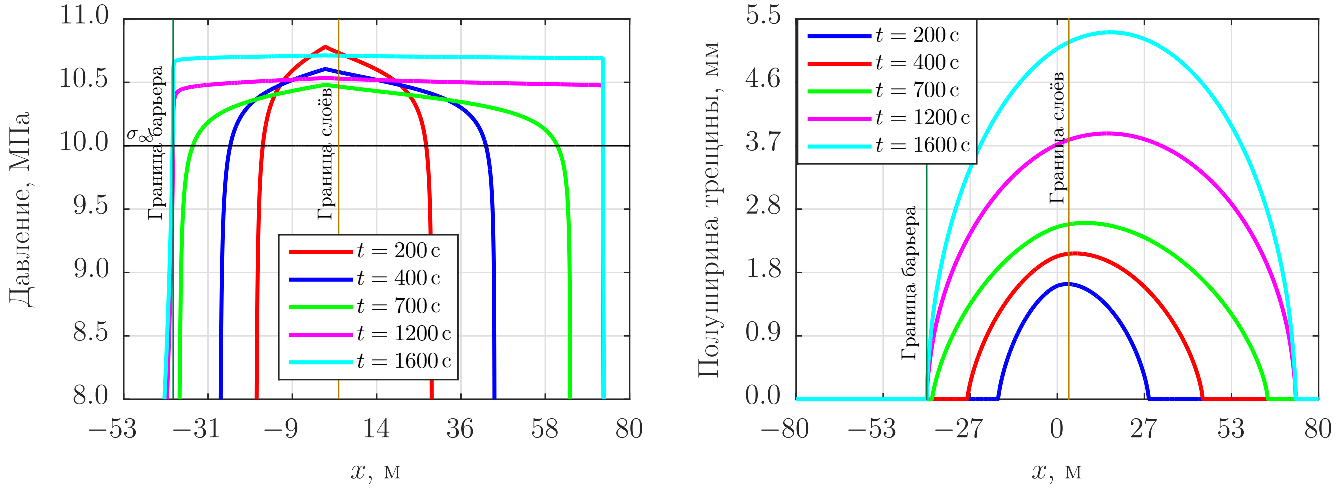


Рисунок 2.33 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения в различные моменты времени в случае пласта, состоящего из двух слоев с высоким контрастом проницаемости. Граница слоев (вертикальная коричневая линия) расположена в точке $x = 10$ м

Другая ситуация возникает, если сдвинуть положение границы слоев в точку $x^* = 10$ м (рисунок 2.33). В этом случае трещина начинает расти в обоих направлениях до того момента пока не достигнет границы слоев в момент времени $t \approx 200$ с. Далее, в отличие от предыдущего случая, трещина будет распространяться влево в высокопроницаемой области. Такая разница в поведении объясняется тем, что во втором случае ($x^* = 10$ м) к тому времени, когда правая вершина достигнет границы слоев, в пласте успевает сформироваться подушка из жидкости, которая посредством обратного напряжения препятствует распространению трещины. Благодаря тому, что граница между слоями является барьером для фильтрации жидкости вправо в направлении оси Ox, скопление утекшей в пласт жидкости, а значит, и обратное напряжение, становится больше около правой вершины, чем около левой. Таким образом, трещина начинает расти в том направлении, где обратные напряжения меньше, т. е. влево. Движение трещины влево продолжается до тех пор, пока ее левая вершина не достигнет барьера при $t \approx 700$ с. После этого, для того чтобы обеспечить рост объема трещины при ее фиксированной длине, давление начнет увеличиваться. В тот момент, когда оно перейдет некоторое критическое значение, трещина прорвется в низкопроницаемый правый слой ($t \approx 1200$ с) так, что левое крыло трещины начнет закрываться (см. рисунок 2.33, б при $t = 1600$ с).

2.6.3 Отсутствие влияния порового давления

Для того, чтобы подтвердить наблюдения, сделанные в пункте 2.6.2, и показать, что описанное нестабильное поведение трещины целиком является следствием влияния порового давления, проделаем следующий численный эксперимент. Оставляя прежней упругоемкость S_ε (см. таблицу 4), искусственно положим коэффициент Био $\alpha = 0$ и повторим второй численный эксперимент из пункта 2.6.2. Пренебрежение коэффициентом α устраняет прямую связь между уравнением равновесия (2.15) и уравнением фильтрации (2.16) таким образом, что поровое давление не влияет на напряженное состояние пласта, и обратное напряжение не возникает. Расчеты показывают, что при таких условиях разница в проницаемости слоев не оказывает такого эффекта на процесс распространения трещины, как в предыдущем примере. В самом деле, как следует из рисунка 2.34, трещина распространяется в обоих слоях, отдавая небольшое предпочтение низкопроницаемому правому слою вследствие более низких утечек в пласт из-за меньшей проницаемости.



(а) **(б)**

Рисунок 2.34 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения в различные моменты времени в случае пласта, состоящего из двух слоев с высоким контрастом проницаемости. Граница слоев (вертикальная коричневая линия) расположена в точке $x = 10$ м. Коэффициент Био $\alpha = 0$

Этот пример демонстрирует, что влияние порового давления является решающим фактором при правильной оценке роста трещины гидроразрыва в неоднородной пористой среде.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для классической модели Христиановича—Гиртсма—де Клерка (KGD) распространения трещины ГРП в режиме преобладания вязкой диссипации построен численный алгоритм, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины. Данная особенность алгоритма позволяет эффективно решать поставленную задачу и избегать при этом расходящихся итерационных процедур. Корректность работы алгоритма подтвержденна проверкой сходимости численного алгоритма с использованием известного аналитического решения задачи. С помощью предложенного подхода решена задача о периодической закачке жидкости гидроразрыва в трещину, где продемонстрированы возможности алгоритма адекватно описывать ситуации с переменным сценарием закачки и произвольной зависимостью утечек в пласт от давления жидкости в трещине.
2. Как обобщение подхода KGD в настоящей работе рассмотрена модель трещины в пороупругой среде в условиях плоской деформации. Модель основана на уравнениях Био, позволяющих учитывать взаимное влияние давления в порах и напряженно-деформированного состояния породы. Благодаря структуре модели оказалось возможным записать одномерную задачу для определения течения жидкости по трещине, двумерный расчет фильтрации в пласте и деформации горной породы в единой слабой постановке. Данное обстоятельство позволило построить численный алгоритм на основе метода конечных элементов для совместного решения упомянутых задач. Несмотря на то, что алгоритм построен для двумерного случая, его обобщение на трехмерный может быть сделано по аналогии.
3. В упрощенной постановке рассмотрена задача о стационарной полубесконечной трещине в пороупругой среде, для которой найдено точное автомодельное решение. Полученное стационарное решение применялось для верификации используемого подхода к построению предложенного численного алгоритма. Для нестационарной задачи распространения

трещины ГРП в общей постановке отдельно показана численная сходимость и определен ее порядок. В качестве дополнительной проверки корректности работы алгоритма проведено сравнение результатов численных экспериментов в настоящей работе с известными численными и аналитическими решениями из литературы.

4. Предложенная численная модель успешно применена для тщательного анализа влияния порового давления распространение трещины гидроразрыва в пороупругой среде. Эффект воздействия порового давления на напряженное состояние пласта и эффект влияния деформации породы на фильтрацию были исследованы отдельно и в совокупности. Полученные результаты помогают объяснить качественные различия в геометриях трещин, посчитанных с учетом и без учета пороупругих эффектов.
5. Благодаря универсальности предложенной модели оказалось возможным изучить динамику развития трещины ГРП в пороупругой среде, состоящей из слоев с контрастом физических свойств. Математическое моделирование обнаружило, что даже при небольшом различии сжимающих напряжений в слоях трещина гидроразрыва развивается несимметрично. При наличии значительного контраста проницаемости в слоях поведение трещины в большой степени управляется влиянием порового давления на напряженное состояние породы. Таким образом, в зависимости от перераспределения упругих напряжений в пласте трещина распространяется предпочтительно либо по низкопроницаемому, либо по высокопроницаемому слою. Данный эффект наблюдается только в пороупругой среде, что говорит о необходимости учета влияния порового давления для правильного описания процесса гидроразрыва пласта.

Список литературы

1. *Веселков, С.* Интенсификация добычи нефти. Технико-экономические особенности методов [Электронный ресурс] / С. Веселков // *Промышленные ведомости.* — 2007. — № 1. — Режим доступа: http://www.promved.ru/articles/article.phtml?id=1039&nomer=38.

2. *Masters, J. A.* Deep Basin Gas Trap, Western Canada / J. A. Masters // *AAPG Bulletin.* — 1979. — Vol. 63, no. 2. — P. 152–181.

3. *Желтов, Ю. П.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта / Ю. П. Желтов, С. А. Христианович // *Известия Академии наук СССР. Отд-ние техн. наук.* — 1955. — № 5. — С. 3–41.

4. *Geertsma, J.* A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. D. Klerk // *J. Petrol. Tech.* — 1969. — Vol. 21, no. 12. — P. 1571–1581.

5. *Carter, R. D.* Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area / R. D. Carter // Drilling and Production Practice / Ed. by G. C. Howard, C. R. Fast. — N.Y.: Amer. Petrol. Inst., 1957. — P. 267–268.

6. *Carbonell, R.* A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture / R. Carbonell, J. Desroches, E. Detournay // *Int. J. Solids Struct.* — 1999. — Vol. 36, no. 31–32. — P. 4869–4888.

7. *Adachi, J. I.* Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid / J. I. Adachi, E. Detournay // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* — 2002. — Vol. 26, no. 6. — P. 579–604.

8. *Detournay, E.* Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks / E. Detournay // *Int. J. Geomech.* — 2004. — Vol. 4, no. 1. — P. 35–45.

9. *Adachi, J.* Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock / J. Adachi, E. Detournay // *Engng. Fract. Mech.* — 2008. — Vol. 75, no. 16. — P. 4666–4694.

10. *Bunger, A.* Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off / A. Bunger, E. Detournay, D. Garagash // *Int. J. Fract.* — 2005. — Vol. 134, no. 2. — P. 175–190.

11. *Garagash, D. I.* Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness / D. I. Garagash // *Engng. Fract. Mech.* — 2006. — Vol. 73, no. 4. — P. 456–481.

12. *Spence, D. A.* Self-similar solution for elastohydrodynamic cavity flow / D. A. Spence, Sharp P. W. // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1985. — Vol. 400, no. 1819. — P. 289–313.

13. *Adachi, J. I.* Fluid-driven fracture in permeable rock: Ph.D. thesis / J. I. Adachi; Univ. of Minnesota. — Minneapolis, 2001.

14. *Garagash, D.* Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution / D. Garagash, E. Detournay // *J. Appl. Mech.* — 2005. — Vol. 72, no. 6. — P. 916–928.

15. *Hu, J.* Plane-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness / J. Hu, D. Garagash // *J. Eng. Mech.* — 2010. — Vol. 136, no. 9. — P. 1152–1166.

16. *Desroches, J.* The crack tip region in hydraulic fracturing / J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach et al. // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1994. — Vol. 447, no. 1929. — P. 39–48.

17. *Lenoach, B.* The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid / B. Lenoach // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1995. — Vol. 43, no. 7. — P. 1025–1043.

18. *Garagash, D.* Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off / D. Garagash, E. Detournay, J. Adachi // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 669. — P. 260–297.

19. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

20. *Savitski, A. A.* Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. A. Savitski, E. Detournay // *Int. J. Solids Struct.* — 2002. — Vol. 39, no. 26. — P. 6311–6337.

21. *Alekseenko, O.P.* Exact solution of one classical problem on hydraulic fracturing / O.P. Alekseenko, A. M. Vaisman // *J. Min. Sci.* — 2001. — Vol. 37, no. 5. — P. 493–503.

22. *Garagash, D.* Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution / D. Garagash // *Int. J. Solids Struct.* — 2006. — Vol. 43, no. 18–19. — P. 5811–5835.

23. *Алексеенко, О.П.* Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках / О.П. Алексеенко, А. М. Вайсман // *ФТПРПИ.* — 2004. — № 3. — С. 3–13.

24. *Linkov, A. M.* Solution of hydraulic fracture problem accounting for lag [Electronic resource] / A. M. Linkov. — 2014. — Access mode: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1404/1404.5246.pdf (Accessed 24.07.2016).

25. *Perkins, T. K.* Widths of hydraulic fractures / T. K. Perkins, L. R. Kern // *J. Petrol. Tech.* — 1961. — Vol. 13, no. 9. — P. 937–949.

26. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1970. — 904 с.

27. *Nordgren, R. P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren // *SPE J.* — 1972. — Vol. 12, no. 4. — P. 306–314.

28. *Kemp, L. F.* Study of Nordgren's equation of hydraulic fracturing / L. F. Kemp // *SPE Prod. Eng.* — 1990. — Vol. 5, no. 3. — P. 311–314. — SPE-18959-PA.

29. *Kovalyshen, Y.* A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture / Y. Kovalyshen, E. Detournay // *Transp. Porous Med.* — 2010. — Vol. 81, no. 2. — P. 317–339.

30. *Adachi, J. I.* Asymptotic analysis of an elasticity equation for a finger-like hydraulic fracture / J. I. Adachi, A. P. Peirce // *J. Elast.* — 2007. — Vol. 90, no. 1. — P. 43–69.

31. *Simonson, E. R.* Containment of massive hydraulic fractures / E. R. Simonson, A. S. Abou-Sayed, R. J. Clifton // *SPE J.* — 1978. — Vol. 18, no. 1. — P. 27–32. — SPE-6089-PA.

32. *Economides, M. J.* Reservoir stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. — 3rd edition. — Chichester: John Wiley&Sons Ltd, 2000. — 856 p.

33. *Adachi, J. I.* Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers / J. I. Adachi, E. Detournay, A. P. Peirce // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 2010. — Vol. 47, no. 4. — P. 625–639.

34. *Dontsov, E. V.* An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness / E. V. Dontsov, A. P. Peirce // *Engng. Fract. Mech.* — 2015. — Vol. 141. — P. 116–139.

35. *Siebrits, E.* An efficient multi-layer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach / E. Siebrits, A. P. Peirce // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* — 2002. — Vol. 53. — P. 691–717.

36. *Peirce, A.* An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures / A. Peirce, E. Detournay // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2008. — Vol. 197. — P. 2858–2885.

37. *Peirce, A. P.* Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm / A. P. Peirce // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2015. — Vol. 283. — P. 881–908.

38. *Linkov, A. M.* The particle velocity, speed equation and universal asymptotics for the efficient modelling of hydraulic fractures / A. M. Linkov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* — 2015. — Vol. 79.

39. *Линьков, А. М.* Уравнение скорости и его применение для решения некорректных задач о гидроразрыве / А. М. Линьков // *ДАН.* — 2011. — Т. 439, № 4. — С. 473–475.

40. *Linkov, A. M.* Numerical modeling of hydraulic fractures: state of art and new results [Electronic resource] / A. M. Linkov // Proceedings of the XL Summer School—Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM) 2012", St. Petersburg, July 2–8, 2012 / IPME RAS. — 2012. — P. 225–236. — Access mode: http://www.spsl.nsc.ru/FullText/konfe/APBD-2012.pdf (Accessed 24.07.2016).

41. *Sethian, J. A.* Level set methods and fast marching methods / J. A. Sethian. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999. — 378 p.

42. *Linkov, A. M.* Universal asymptotic umbrella for hydraulic fracture modeling [Electronic resource] / A. M. Linkov. — 2014. — Access mode: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1404/1404.4165.pdf (Accessed 24.07.2016).

43. *Linkov, A. M.* On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity / A. M. Linkov // *Int. J. Eng. Sci.* — 2012. — Vol. 52. — P. 77–88.

44. *Linkov, A.M.* Modified formulation, ε-regularization and the efficient solution of hydraulic fracture problems [Electronic resource] / A.M. Linkov, G. Mishuris // Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing / Ed. by A. P. Bunger, J. McLennan, R. Jeffrey; InTech. — 2013. — P. 641–657. — Access mode: http://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/44771.pdf (Accessed 24.07.2016).

45. *Atkinson, C.* Numerical and analytical solutions for the problem of hydraulic fracturing from a cased and cemented wellbore / C. Atkinson, D.A. Eftaxiopoulos // *Int. J. Solids Struct.* — 2002. — Vol. 39, no. 6. — P. 1621–1650.

46. *Зубков, В. В.* Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва / В. В. Зубков, В. Ф. Кошелев, А. М. Линьков // *ФТПРПИ.* — 2007. — № 1. — С. 45–63.

47. *Мартынюк, П. А.* Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия / П. А. Мартынюк // *ФТПРПИ.* — 2008. — № 6. — С. 19–29.

48. *Cherny, S.* Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect / S. Cherny, D. Chirkov, V. Lapin et al. // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 2009. — Vol. 46, no. 6. — P. 992–1000.

49. *Алексеенко, О. П.* Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва / О. П. Алексеенко, Д. В. Есипов, Д. С. Куранаков и др. // *Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика.* — 2011. — Т. 11, № 3. — С. 36–60.

50. *Papanastasiou, P.* Three-dimensional stress analysis of a wellbore with perforations and a fracture / P. Papanastasiou, A. Zervos // Proceedings of the SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering, 8–10 July, Trondheim, Norway. — 1998. — P. 347–355. — SPE-47378-MS.

51. *Hossain, M. M.* Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes / M. M. Hossain, M. K. Rahman, S. S. Rahman // *J. Petrol. Sci. Eng.* — 2000. — Vol. 27, no. 3–4. — P. 129–149.

52. *Yuan, Y. G.* Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole / Y. G. Yuan, Y. Abousleiman, X. Weng, J.-C. Roegiers // Joint Rocky Mountain Regional Meeting/Low Permeability Res. Symp., Denver, CO, March 19–22. — 1995. — SPE paper 29601.

53. *Есипов, Д.В.* Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины / Д.В. Есипов, Д.С. Куранаков, В.Н. Лапин, С.Г. Чёрный // *Вычисл. технологии.* — 2011. — Т. 16, № 6. — С. 13–26.

54. *Alekseenko, O.P.* 3D Modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore / O.P. Alekseenko, D.I. Potapenko, S.G. Cherny et al. // *SPE J.* — 2013. — Vol. 18, no. 3. — P. 589–600. — SPE-151585-PA.

55. *Terzaghi, K.* Theoretical Soil Mechanics / K. Terzaghi. — New York: John Wiley and Sons, 1943. — 510 p.

56. *Biot, M. A.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid / M. A. Biot // *Journal of Applied Physics.* — 1955. — Vol. 26, no. 2. — P. 182–185.

57. *Biot, M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. A. Biot // *Journal of the Acoustical Society of America.* — 1956. — Vol. 28, no. 2. — P. 168–178.

58. *Biot, M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range / M. A. Biot // *Journal of the Acoustical Society of America.* — 1956. — Vol. 28, no. 2. — P. 179–191.

59. *Verruijt, A.* Theory and problems of poroelasticity [Electronic resource] / A. Verruijt. — Delf, 2016. — 270 p. — Access mode: http://geo.verruijt.net/software/PoroElasticity2016b.pdf (Accessed 07.08.2016).

60. *Coussy, O.* Poromechanics / O. Coussy. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004. — 315 p.

61. *Rice, J.R.* The stabilization of spreading shear faults by coupled deformation-diffusion effect in fluid-infiltrated porous materials / J.R. Rice, M.P. Cleary // *J Geophys. Res.* — 1976. — Vol. 81. — P. 3322–3334.

62. *Cleary, M.P.* Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid / M.P. Cleary // *Int. J. Solids Struct.* — 1977. — Vol. 13. — P. 783–806.

63. *Cleary, M.P.* Moving singularities in elasto-diffusive solids with applications to fracture propagation / M.P. Cleary // *Int. J. Solids Struct.* — 1978. — Vol. 14. — P. 81–97.

64. *Settari, A.* Simulation of the hydraulic fracture process / A. Settari // *SPE J.* — 1980. — Vol. 20, no. 6. — P. 487–500. — SPE-7693-PA.

65. *Detournay, E.* A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm / E. Detournay, A. H.-D. Cheng, J. D. McLennan // *J. Energy Resources Tech.* — 1990. — Vol. 112, no. 4. — P. 224–230.

66. *Clifton, R. J.* Modeling of poroelastic effects in hydraulic fracturing / R. J. Clifton, J. J. Wang // Rocky Mountain Regional Meeting and Low Permeability Reservoirs Symposium, 15–17 April, Denver, Colorado. — 1991. — P. 661–670. — SPE-21871-MS.

67. *Ghassemi, A.* Three-Dimensional Poroelastic Hydraulic Fracture Simulation Using the Displacement Discontinuity Method: Ph.D. thesis / A. Ghassemi; Univ. of Oklahoma. — USA, 1996. — 173 p.

68. *Гарипов, Т. Т.* Математическое моделирование задач пороупругости и проблема гидроразрыва: дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / Т. Т. Гарипов; Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. — М., 2005. — 77 с.

69. *Федоренко, Р. П.* Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко. — Москва: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. — 528 с.

70. *Gordeyev, Yu. N.* Growth of a crack produced by hydraulic fracture in a poroelastic medium / Yu. N. Gordeyev // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* — 1993. — Vol. 30, no. 3. — P. 233–238.

71. *Gordeyev, Yu.N.* The pressure distribution around a growing crack / Yu.N. Gordeyev, V.M. Entov // *J. Appl Math Mechs.* — 1997. — Vol. 61, no. 6. — P. 1025–1029.

72. *Kovalyshen, Y.* Fluid-driven fracture in poroelastic medium: Ph.D. thesis / Y. Kovalyshen; University of Minnesota. — Minneapolis, 2010. — 215 p.

73. *Yuan, Y.* Simulation of penny-shaped hydraulic fracturing in porous media: Ph.D. thesis / Y. Yuan; Univ. of Oklahoma. — Norman, 1997. — 230 p.

74. *Zhang, X.* Study of Poroelasticity and Its Application to Petroleum Related Problems: Ph.D. thesis / X. Zhang; Univ. of Texas at Austin. — Austin, 1994. — 123 p.

75. *Boone, T .J.* Simulation of hydraulic fracturing propagation in poroelastic rock with application to stress measurement techniques / T .J. Boone, A.R. Ingraffea, J.-C. Roegiers // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* — 1991. — Vol. 28, no. 1. — P. 1–14.

76. *Nierode, D.E.* Comparison of hydraulic fracture design methods to observed field results / D.E. Nierode // *JPT.* — 1985. — Vol. 37, no. 10. — P. 1831–1839. — SPE-12059-PA.

77. *Smith, M.B.* Stimulation design for short, precise hydraulic fractures / M.B. Smith // *SPE J.* — 1981. — Vol. 25, no. 03. — SPE-10313-PA.

78. *Felsenthal, M.* Fracturing gradients in waterfloods of low-permeability, partially depleted zones / M. Felsenthal, H.H. Ferrell // *JPT.* — 1971. — Vol. 23, no. 06. — P. 727–730. — SPE-2854-PA.

79. *Salz, L.B.* Relationship between fracture propagation pressure and pore pressure / L.B. Salz // SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, 9-12 October, Denver, Colorado. — 1977. — SPE-6870-MS.

80. *Kry, P. R.* Field observations of steam distribution during injection into the Cold Lake reservoir / P. R. Kry // Rock Mechanics and Rock Physics at great Depth, ISRM-SPE Joint Symp.,30 August–2 September, Pau, France. — 1989.

81. *Boone, T. J.* Poroelastic effects related to stress determ ination by micro-frac tests in permeable rock / T. J. Boone, P. R. Kry, S. Bharatha, J. M. Gronseth // The 32nd U.S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS), 10–12 July, Norman, Oklahoma / Ed. by J.-C. Roegiers. — Norman, 1991. — P. 25–34. — ARMA-91-025.

82. *Nolte, K.G.* Fracture design considerations based on pressure analysis / K.G. Nolte // SPE Cotton Valley Symp., Tyler., TX., May 20. — Richardson,Texas: SPE, 1982. — SPE paper 10911.

83. *McLennan, J.D.* How instantaneous are instantaneous shut-in pressures / J.D. McLennan, J.-C. Roegiers // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 26–29 September, New Orleans, Louisiana. — 1982. — SPE-11064-MS.

84. *Medlin, W.L.* Laboratory experiments in fracture propagation / W.L. Medlin, L. Masse // *SPE J.* — 1985. — Vol. 24. — P. 256–268.

85. *Haimson, B.* Hydraulic fracturing in porous permeable materials / B. Haimson, C. Fairhurst // *JPT.* — 1969. — Vol. 21, no. 7. — P. 811–817.

86. *Zoback, M. D.* Laboratory hydraulic fracturing experiments in intact and pre-fractured rock / M. D. Zoback, F. Rummel, R. Jung, C.B. Raleigh // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* — 1977. — Vol. 14, no. 2. — P. 49–58.

87. *Detournay, E.* Poroelastic response of a borehole in a no-hydrostatic stress field / E. Detournay, A.H.-D. Cheng // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* — 1988. — Vol. 25, no. 3. — P. 171–182.

88. *Detournay, E.* Poroelasticity considerations in in-situ stress determination by hydraulic fracturing / E. Detournay, A.H.-D. Cheng, J.-C. Roegiers, McLennan. J.D. // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr.* — 1989. — Vol. 26, no. 6. — P. 507–513.

89. *Mandel, J.* Consolidation des sols (étude mathématique) / J. Mandel // *Géotechnique.* — 1953. — Vol. 3, no. 7. — P. 287–299.

90. *Cryer, C.* A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi / C. Cryer // *Quart. J. Mech. .Appl. Math.* — 1963. — Vol. 16, no. 4. — P. 401–412.

91. *Verruijt, A.* Elastic storage of aquifers / A. Verruijt // Flow Through Porous Media / Ed. by R. J. M. De Wiest. — New York: Academic Press Inc., 1969. — P. 331–376.

92. *Carrier, B.* Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model / B. Carrier, S. Granet // *Engng. Fract. Mech.* — 2012. — Vol. 79. — P. 312–328.

93. *Стренг, Г.* Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — Москва: Издательство Мир, 1977. — 351 с.

94. *Hecht, F.* New development in FreeFem++ / F. Hecht // *J. Numer. Math.* — 2012. — Vol. 20, no. 3-4. — P. 251–265.

95. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 8-е изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2015. — 639 с.

96. *Golovin, S.V.* Hydraulic fracture numerical model free of explicit tip tracking / S.V. Golovin, V.I. Isaev, A.N. Baykin et al. // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 2015. — Vol. 76. — P. 174–181.

97. *Golovin, S.V.* Stationary dipole at the fracture tip in a poroelastic medium / S.V. Golovin, A.N. Baykin // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Vol. 69–70. — P. 305–310.

98. *Baykin, A.N.* Modelling of hydraulic fracture propagation in inhomogeneous poroelastic medium / A.N. Baykin, S.V. Golovin // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 722, no. 012003.

99. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва в пороупругой среде / А. Н. Байкин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015г.). — Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. — С. 27–28.

100. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде / А. Н. Байкин, С. В. Головин // VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Тезисы докладов. (Новосибирск, 7–11 сентября 2015г.) / Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. — Новосибирск, 2015. — С. 78–79.

101. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде / А. Н. Байкин, С. В. Головин // Всероссийская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Владимира Михайловича Тешукова «Нелинейные волны: теория и новые приложения». Тезисы докладов. (Новосибирск, 29 февраля — 2 марта 2016г.) / Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. — Новосибирск, 2016. — С. 15–16.

102. *Baykin, A. N.* Hydraulic fracture propagation in inhomogeneous poroelastic medium / A. N. Baykin, S. V. Golovin // XLIV International Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 27 — July 02, 2016, St. Petersburg, Russia. Books of Abstracts. / Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. — St. Petersburg, 2016. — P. 33.

103. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва в пороупругой среде / А. Н. Байкин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам

теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). — Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. — С. 294–296.

104. *Бабе, Г. Д.* Идентификация моделей гидравлики / Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарев, А. Ф Воеводин, М. А. Каниболотский. — Новосибирск: Наука, 1980. — 161 с.

105. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. — Москва: Наука, 1966. — 707 с.

106. *Adachi, J.* Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, J. Desroches // *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.* — 2007. — Vol. 44, no. 5. — P. 739–757.

107. *Entov, V.* Fracture propagation in high-permeability rocks: the key influence of fracture tip behavior / V. Entov, E. Chekhonin, E. Detournay, M. Thiercelin // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, 29-31 January, College Station, Texas, U.S.A. — Texas, 2007. — SPE-106225-MS.

108. *Shelukhin, V. V.* Fractured water injection wells: Pressure transient analysis / V. V. Shelukhin, V. A. Baikov, S. V. Golovin et al. // *Int. J. Solids Struct.* — 2014. — Vol. 51, no. 11. — P. 2116–2122.

109. *Barenblatt, G. I.* The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture / G. I. Barenblatt // *Adv. Appl. Mech.* — 1962. — Vol. 7. — P. 55–129.

110. *Dugdale, D.* Yielding of steel sheets containing slits / D. Dugdale // *J Mech Phys.* — 1962. — Vol. 8, no. 2. — P. 100—-104.

111. *Geubelle, P. H.* Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation / P. H. Geubelle, J. S. Baylor // *Compos Part B.* — 1998. — Vol. 29. — P. 589–602.

112. *Griffith, A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids / A. A. Griffith // *Phil. Trans. R. Soc. A.* — 1921. — Vol. 221. — P. 163–198.

113. *Irwin, G.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. Irwin // *J Appl Mech.* — 1957. — Vol. 24. — P. 361—-364.

114. *Khludnev, A. M.* Analysis of Cracks in Solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. — Southampton: WIT Press, 2000. — 386 p.

115. *Vandamme, L.* Poroelasticity in hydraulic fracturing simulators / L. Vandamme, J. Roegiers // *JPT*. — 1990. — Vol. 42, no. 9. — P. 1199–1203.