

На правах рукописи



Байкин Алексей Николаевич

**ДИНАМИКА ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА
ПЛАСТА В НЕОДНОРОДНОЙ
ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, проф. РАН **Головин Сергей Валерьевич**.

Официальные оппоненты:

Губайдуллин Амир Анварович, д-р физ.-мат. наук, проф., директор Тюменского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук,

Перепечко Юрий Вадимович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института геологии и минералогии им. В.С. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация:

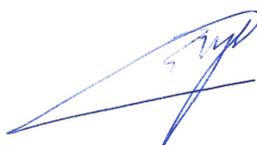
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Защита состоится 6 декабря 2016 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 22 октября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук



Рудой
Евгений Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

На сегодняшний день мировая практика нефтегазовой промышленности направлена на применение различных воздействий на продуктивный пласт горных пород для интенсификации добычи из него углеводородов. К числу этих воздействий относятся кислотная обработка добывающих скважин, акустическая обработка, электрическая обработка и волновое воздействие, гидравлический и газодинамический разрыв пласта. По количеству дополнительно добытой нефти после обработки технология гидроразрыва пласта занимает лидирующие позиции. Суть данного метода заключается в следующем. При помощи закачки вязкой жидкости на забое скважины создается избыточное давление, достаточное для того, чтобы преодолеть горное давление и разорвать горную породу. Породы разрываются вдоль поверхностей минимальных напряжений в пласте, и за счет гидродинамического воздействия жидкости в породе начинает расти и раскрываться трещина. На определенном этапе работы вместе с жидкостью в трещину транспортируется расклинивающий агент (пропант), который удерживает трещину от полного закрытия после прекращения закачки. Таким образом создается высокопроводящий канал для извлечения дополнительных труднодоступных запасов нефти и газа. Для максимизации будущей добычи необходимо понимать, какие факторы влияют на образование и рост трещины качественно и количественно. Одним из инструментов для предсказания геометрии и проводимости получившейся трещины является математическое моделирование. В современных реалиях увеличивается количество месторождений со сложным строением, таких как низкопроницаемые коллекторы (сланцы, угольные залежи, плотные песчаники), откуда все труднее извлекать нефть. Как следствие, усложняются технологии гидроразрыва, для описания которых требуются более адекватные и сложные математические модели.

При моделировании гидроразрыва пласта необходимо учитывать несколько взаимосвязанных физических процессов: течение вязкой жидкости по трещине, упругую реакцию стенок трещины на давление жидкости, фильтрацию жидкости через стенки трещины в пласт, разрушение породы и продвижение фронта трещины. Описание динамики трещины является сложной задачей, которая редко решается в ее полной постановке.

Цели и задачи исследования

Несмотря на обширное количество исследований, проведенных в области моделирования гидроразрыва пласта, остается открытым вопрос о поведении трещины ГРП в неоднородной среде с учетом влияния порового давления. Изучение данного вопроса требует построения более полной математической модели для задачи гидроразрыва и эффективных численных методов ее решения, поскольку полученные ранее аналитические результаты о виде асимптотики решения вблизи вершины трещины, на которых базируется большинство существующих численных алгоритмов, оказываются неприменимыми.

В связи с этим целью диссертационной работы является разработка численного подхода для эффективного решения задачи гидроразрыва в неоднородной пороупругой среде и его применение к детальному исследованию влияния порового давления и неоднородностей породы на динамику развития трещины ГРП.

В ходе работы были решены следующие задачи:

- разработка эффективного численного алгоритма на основе метода конечных элементов в рамках модели KGD для режима распространения трещины с преобладанием вязкой диссипации, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины в процессе расчета;
- тестирование предложенного численного метода для модели KGD на сходимость с использованием известного аналитического решения;
- построение и анализ численного решения задачи о периодической закачке жидкости на основе предложенного алгоритма;
- построение численной модели динамики трещины ГРП в неоднородной пороупругой среде в условиях плоской деформации на основе алгоритма, не требующего явного отслеживания положение вершины трещины и перестраивания расчетной области в процессе расчета;
- анализ сходимости численного алгоритма на основе построенного точного автомодельного решения, описывающего дипольное течение в окрестности вершины стационарной полубесконечной трещины в пороупругой среде;

- исследование алгоритма на численную сходимость, а также проведение сравнения результатов численных экспериментов с известными данными из литературы;
- применение разработанной модели для детального анализа влияния порового давления, эффектов пороупругости и неоднородностей в сжимающих напряжениях и физических характеристиках среды на динамику и направление распространения трещины ГРП.

Научная новизна

В настоящей работе впервые представлен алгоритм для модели KGD, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины. Это позволяет избежать построения специальных итерационных процедур для связывания течения жидкости по трещине, упругой реакции стенок трещины и продвижения ее вершины. Кроме того, благодаря общим предположениям о механизме потерь жидкости в пласт, данный алгоритм позволяет эффективно моделировать распространение трещины гидроразрыва в случае произвольной зависимости утечек от давления жидкости в трещине.

Для моделирования развития трещины ГРП в неоднородной пороупругой среде разработан новый численный алгоритм на основе метода конечных элементов. Отличительной особенностью алгоритма является то, что задача формулируется в единой слабой постановке, позволяющей одновременно решать двумерные уравнения равновесия и фильтрации и одномерное уравнение для течения жидкости по трещине. В существующих работах указанные уравнения решаются по отдельности и связываются с помощью специальной итерационной процедуры или требуют искусственного введения дополнительных переменных (множителей Лагранжа), что обуславливает необходимость использования дополнительных вычислительных ресурсов. Кроме этого в предложенном численном подходе также нет необходимости перестраивать расчетную область, явно отслеживать положение вершины трещины и делать априорные предположения относительно поведения решения вблизи нее, что существенно расширяет класс решаемых задач.

Для задачи о стационарной полубесконечной трещине в пороупругой среде построено новое точное автомодельное решение, для которого была дана физическая интерпретация и которое использовалось для верификации численного подхода.

Отличительной особенностью пороупругой среды является взаимное влияние фильтрации жидкости и напряженно-деформированного состояния скелета. В диссертации приводится подробный анализ этой взаимосвязи путем сравнения результатов численных расчетов для связанной, несвязанной и частично связанных задач Био. Также в работе выводятся эмпирические правила, позволяющие качественно объяснить различия в геометрии трещины с учетом и без учета влияния порового давления.

В ходе исследования показано, что при наличии неоднородности проницаемости среды роль порового давления усиливается, что качественно влияет на направление распространения трещины ГРП и ее геометрические характеристики. Кроме этого обнаружено, что в среде со слоистой структурой контраст сжимающих напряжений даже в 1 % приводит к несимметричному распространению трещины.

Теоретическая и практическая значимость

Разработанные в диссертации численные алгоритмы могут применяться для расчета развития реальных трещин ГРП на начальном этапе закачки жидкости, а также послужить основой для коммерческого симулятора гидроразрыва пласта.

Полученные результаты численных экспериментов свидетельствуют о необходимости учета влияния порового давления на процесс развития трещины ГРП. Проведенный в настоящей работе тщательный анализ взаимосвязи давления в порах и деформации пороупругой среды, а также учет влияния неоднородностей ее физических характеристик дают новое, более глубокое понимание процесса образования трещин ГРП. Таким образом, полученные качественные и количественные результаты могут быть полезны при оптимизации работ по гидроразрыву пласта.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе для решения поставленных задач использовались: аппарат механики сплошных сред для формулирования математической постановки задачи; методы теории дифференциальных уравнений для построения и анализа точных решений, вывода слабой формулировки задачи; метод конечных элементов для численного решения сформулированных задач в слабой постановке, реализованный с помощью открытого программ-

ного продукта FreeFEM++; правило Рунге для практической оценки погрешности численного метода.

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

На защиту выносятся следующие результаты:

- численный подход к моделированию гидроразрыва пласта без отслеживания положения вершины трещины и перестраивания расчетной области в процессе расчета, а также его применение в рамках моделей KGD и модели трещины ГРП в пороупругой среде в условиях плоской деформации;
- точное автомодельное решение, описывающее дипольное течение в окрестности вершины стационарной полубесконечной трещины в пороупругой среде, и его использование для верификации численного подхода;
- описание влияния порового давления и наличия контраста проницаемости и сжимающих напряжений на геометрию, динамику и направление распространения трещины гидроразрыва в пороупругой среде.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов, полученных в настоящей работе, обеспечивается использованием законов механики и определяющих соотношений, устоявшихся в научном сообществе, при выводе математических моделей. Численное решение задач в диссертации было проведено широко известным методом конечных элементов, реализованным в хорошо оттестированной среде FreeFEM++. Корректность результатов математического моделирования также подтверждается проделанной проверкой численных алгоритмов на сходимость, в том числе с использованием аналитических решений.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах и конкурсах Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, на семинаре кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, а также на следующих научных конференциях: Всероссийская конференция «Новые мате-

матические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 95-летию академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2014); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); VIII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2016); Международная конференция «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2016).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 4 — в тезисах докладов [4–7], 1 — в трудах конференции [8], индексируемых в РИНЦ.

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, разработке и верификации численного метода для ее решения, проведении численных экспериментов, обсуждении полученных результатов и их физической интерпретации, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов. В частности, большинство результатов, изложенных во второй главе диссертации, были получены автором полностью самостоятельно.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность моделирования гидроразрыва пласта, рассматриваемого в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, а также ее научная новизна и практическая значимость, представлены основные положения, выносимые на защиту, обоснована достоверность результатов и описан личный вклад автора работы. В конце приводится структура диссертации и кратко излагается ее содержание.

Первая глава диссертации посвящена классической одномерной модели KGD и предложенному для нее численному алгоритму, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины. В па-

параграфах 1.1 и 1.2 сформулирована постановка задачи распространения трещины гидроразрыва в проницаемой среде в условиях плоской деформации. В качестве определяющих соотношений модели выступают закон сохранения массы в трещине в приближении теории смазки для степенной неньютоновской жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -q_l, \quad (1)$$

где $w(t, x)$ — ширина трещины, $p(t, x)$ — избыточное давление жидкости в трещине, $q_l(t, x, p)$ — априори известный закон утечек жидкости через стенки в пласт, $q(t, x) = \Lambda(w, p_x) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x)$ — расход жидкости через поперечное сечение трещины, $\Lambda(w, p_x) = w^{\frac{2n+1}{n}} M'^{-1/n} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{\frac{1-n}{n}}$ — мобильность жидкости, $M' = \frac{2^{n+1} (2n+1)^n M}{n^n}$, M — коэффициент густоты потока, n — показатель поведения степенной жидкости. Связь давления и раскрытия трещины задается с помощью формулы Колосова — Мусхелишвили

$$w(t, x) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^L p(t, \xi) B(x, \xi; L) d\xi, \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (2)$$

с сингулярным ядром $B(x, \xi; L) = \ln \left| \frac{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 - \xi^2}}{\sqrt{L^2 - x^2} - \sqrt{L^2 - \xi^2}} \right|$, где L — полу-длина трещины, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругой среды соответственно.

Система (1), (2) снабжается начальными данными в некоторый момент времени t_0 и краевыми условиями на расход на скважине и в вершине трещины: $q(t, 0) = Q(t)$, $q(t, L) = 0$, где $Q(t)$ — известная функция.

В предположении, что энергия, затрачиваемая на разрушение породы, намного меньше энергии вязкой диссипации, в параграфе 1.2 показано, что задача ГРП сводится к решению уравнения

$$\frac{4}{\pi E'} \int_0^{L_m} \frac{\partial p}{\partial t}(t, \xi) B(x, \xi; L_m) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda(w, p_x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -q_l, \quad (3)$$

где $L_m > L(t)$ — максимальное значение полудлины трещины. Заметим, что полудлина трещины L не входит явно в уравнение (3).

С учетом краевых условий и начальных данных задачу (3) можно записать в слабой формулировке и решать численно. В параграфе 1.3 подробно рассмотрен численный алгоритм на основе метода конечных элементов, а в параграфе 1.4 продемонстрирована его сходимость при помощи сравнения численного решения и известного из литературы автомодельного полуаналитического решения на последовательности сеток.

В параграфе 1.5 с помощью предложенного численного подхода решается задача о периодической закачке жидкости в трещину с расходом

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0, & 100 \cdot 2k \leq t < 100 \cdot (2k + 1) \\ 0, & 100 \cdot (2k + 1) \leq t < 100 \cdot 2(k + 1) \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Утечки жидкости в пласт q_l считаются пропорциональными положительной составляющей давления так, чтобы эффективность жидкости FE (отношение изменения объема трещины к закачиваемому объему жидкости) было величиной постоянной.

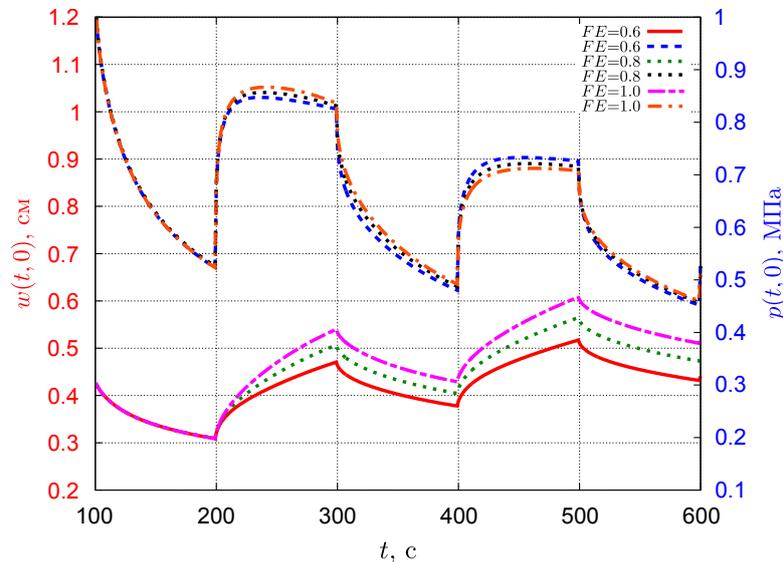


Рис. 1 — Раскрытие трещины (нижние кривые) и давление (верхние кривые), измеренные на скважине, в зависимости от времени при различных значениях эффективности жидкости

В результате численных расчетов давление и раскрытие трещины, измеренные на скважине (рис. 1), показывают возможность алгоритма адекватно

моделировать случаи с переменным сценарием закачки и произвольной зависимостью утечек в пласт от давления жидкости в трещине.

Во второй главе описана модель развития трещины гидроразрыва в пороупругой среде в условиях плоской деформации, а также показано ее применение для исследования влияния давления поровой жидкости и неоднородностей пласта на геометрию и динамику распространения трещины ГРП.

Математическая постановка задачи сформулирована в параграфе 2.1. Рассмотрена пороупругая среда, характеризующаяся своей пористостью ϕ и проницаемостью $k_r(\mathbf{x})$, перемещением твердой фазы $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и поровым давлением $p(t, \mathbf{x})$. Поры заполнены однофазной ньютоновской жидкостью с вязкостью η_r . Скорость фильтрации жидкости в пласте определяется законом Дарси $\mathbf{q} = -(k_r/\eta_r)\nabla p$. Вдоль оси Ox расположена трещина ГРП. Жидкость, утекающая из трещины в пласт, имеет ту же самую вязкость, что и поровая жидкость, а жидкость гидроразрыва, закачиваемая в трещину, имеет вязкость η_f . Начальное состояние среды обуславливается преднапряженным состоянием, описываемым тензором $\boldsymbol{\tau}_0(x, y)$.

Закачка жидкости происходит равномерно через всю высоту трещины, поэтому достаточно рассмотреть горизонтальное центральное полусечение трещины Ω (рис. 2) в условиях плоской деформации, где выполнены уравнения пороупругости Био:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) - \alpha p \mathbf{I}, \quad (4)$$

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{k_r}{\eta_r} \nabla p - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right). \quad (5)$$

Здесь $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u})$ обозначает тензор малых деформаций Коши

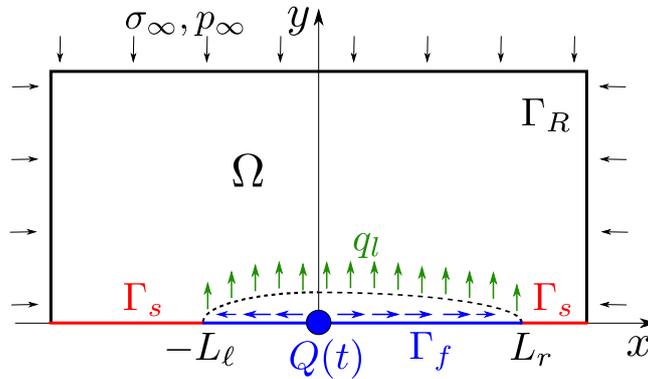


Рис. 2 — Верхняя часть горизонтального сечения трещины плоскостью $z = 0$

$2\mathcal{E}(\mathbf{u})_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ ($i, j = 1, 2$), α — коэффициент Био, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ — модули упругости, \mathbf{I} представляет собой единичный тензор. Упруго-емкость S_ε отражает зависимость лагранжевой пористости ϕ от $\epsilon = \text{tr } \mathcal{E}$ и p . Вектор перемещения твердой фазы $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (u, v)$ и пространство независимых переменных $(x_1, x_2) = (x, y)$ предполагаются двухмерными.

На внешней границе области $\Gamma_R : |\mathbf{x}|_\infty = R$ заданы сжимающие напряжения $\boldsymbol{\sigma}_\infty$ и постоянное поровое давление $p = p_\infty$:

$$\Gamma_R : \quad p = p_\infty, \quad \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_\infty, \quad (\boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle)_i = \tau_{ij} n_j, \quad (6)$$

где \mathbf{n} и \mathbf{s} — единичные вектор внешней нормали и касательный вектор к границе области Ω соответственно; также предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Далее предполагается, что $\boldsymbol{\sigma}_\infty = -\sigma_\infty \mathbf{e}_2$, где σ_∞ — скалярная функция, а тензор преднапряженного состояния $\boldsymbol{\tau}_0$ удовлетворяет тем же краевым условиям на внешней границе, что и тензор $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{\sigma}_\infty$.

Линия $y = 0$ распространения трещины разделена на часть Γ_f , занятую трещиной, и оставшуюся часть Γ_s . Вне трещины на Γ_s выполнены условия симметрии:

$$\Gamma_s : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Вводя обозначение $p_f(t, x)$ для давления жидкости внутри трещины, запишем баланс сил на ее стенках следующим образом:

$$\Gamma_f : \quad p = p_f, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle = -p_f + \sigma_{coh}, \quad \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau} \langle \mathbf{n} \rangle = 0. \quad (8)$$

В качестве критерия разрушения использована модель сил сцепления, где постулируется существование напряжений

$$\sigma_{coh}(w) = \begin{cases} \sigma_c \frac{w}{w_m}, & 0 \leq w \leq w_m, \\ \sigma_c \left(\frac{w_c - w}{w_c - w_m} \right), & w_m \leq w \leq w_c, \\ 0, & w \geq w_c, \end{cases} \quad (9)$$

которые действуют в зоне образования микротрещин и пластических деформаций вблизи вершин трещины, препятствуя ее раскрытию. Присутствие сил сцепления устраняет сингулярность вертикальных напряжений в вершинах трещины, свойственную линейно-упругой механике разрушения (ЛУМР).

Течение жидкости в трещине определяется законом сохранения массы в приближении теории смазки для течения ньютоновской вязкой жидкости по узкой щели:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -2q_l, \quad w \equiv 2v|_{y=0}, \quad q = -\frac{w^3}{12\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \quad q_l = -\frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (10)$$

Отставание положения фронта жидкости в трещине от вершины трещины отсутствует. Скорость утечек жидкости в пласт q_l выражается законом Дарси.

Расход жидкости (на единицу высоты), закачиваемый в верхнюю половину трещины, рассчитывается как

$$Q(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{w^3}{12\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \Big|_{x=0-} - \frac{w^3}{12\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \Big|_{x=0+} \right). \quad (11)$$

Из вычислительных соображений в задаче (4)–(11) удобно произвести замену:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \varkappa \mathbf{x}, \quad \varkappa = \frac{\alpha p_\infty}{2(\lambda + \mu)}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_0, \quad \tilde{p} = p - p_\infty \quad (12)$$

и решать задачу в новых переменных.

В качестве частного случая в параграфе 2.2 рассматривается упрощенная задача о стационарной полубесконечной трещине в однородной пороупругой среде, для которой в явном виде находится следующее точное решение,

записанное в полярных координатах (r, θ) :

$$\begin{aligned}
p(r, \theta) &= r^{-2/3} A \cos\left(\frac{2(\theta - \pi)}{3}\right), \\
u^r(r, \theta) &= r^{1/3} \left(\frac{\alpha \lambda A \cos((2\theta + \pi)/3)}{4\mu(\lambda + 2\mu)} - C_1(\lambda + 4\mu) \cos(2(\theta - \pi)/3) - \right. \\
&\quad \left. - C_2 \cos(4(\theta - \pi)/3) \right), \\
u^\theta(r, \theta) &= r^{1/3} \left(-\frac{\alpha A(2\lambda + 3\mu) \sin((2\theta + \pi)/3)}{4\mu(\lambda + 2\mu)} + \right. \\
&\quad \left. + C_1(2\lambda + 5\mu) \sin(2(\theta - \pi)/3) + C_2 \sin(4(\theta - \pi)/3) \right),
\end{aligned}$$

где A, C_1 и C_2 — константы, определяемые из граничных условий.

Данное решение описывает фильтрационное решение дипольного типа, когда жидкость циркулирует по замкнутым траекториям между трещиной и пластом.

Для построения численного алгоритма для решения задачи (4)–(12) в общем виде в параграфе 2.3 записывается слабая постановка задачи:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) - \alpha p) \operatorname{div}(\boldsymbol{\psi}) + 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi}) \, dx dy - \\
&- \int_{\{y=0\} \cap \partial\Omega} (p + p_\infty + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \langle \mathbf{n} \rangle - \sigma_{coh}) \psi_2 \, dx + \frac{1}{\delta} \int_{\{y=0\} \cap \partial\Omega} \chi_{[v<0]} v \psi_2 \, dx = 0, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, dx dy + \int_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx dy + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \varphi \, dx dy + \\
&+ \int_{\{y=0\} \cap \partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi \, dx + \int_{\{y=0\} \cap \partial\Omega} \frac{v^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx - Q(t) \varphi(0,0) = 0, \quad (14)
\end{aligned}$$

где для решения задачи контакта противоположных берегов трещины используется штрафная функция, в которой участвуют малое число $\delta \ll 1$ и $\chi_{[v<0]}$ — индикатор множества $\{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) < 0\}$. Заметим что в (13), (14) двумерные

уравнения равновесия и фильтрации и одномерное уравнение для течения жидкости по трещине связаны в единую формулировку. Кроме этого положение вершин трещины явно не входит в (13), (14). Эти обстоятельства позволяют избежать нестандартных итерационных процедур, обеспечивающих одновременное выполнение уравнений модели.

Дискретизация задачи по пространству проводится методом конечных элементов на триангуляции расчетной области. Для аппроксимации по времени используется неявный метод Эйлера, а нелинейность разрешается методом Ньютона — Рафсона в комбинации с методом простой итерации. Численные эксперименты проведены программным пакетом FreeFEM++.

В параграфе 2.4 проводится верификация предложенного численного подхода при помощи численного воспроизведения точного решения из параграфа 2.2 и сравнения результатов расчетов с известными решениями из литературы. С помощью правила Рунге показано, что алгоритм сходится приблизительно со вторым порядком в норме пространства $L_2(\Omega)$.

В параграфе 2.5 при помощи разработанной численной модели исследуется влияние порового давления на геометрические характеристики трещины гидроразрыва. Для этого коэффициент Био в уравнении равновесия (4) обозначается α_e , а в уравнении фильтрации (5) — α_f . Таким образом, можно рассмотреть 4 задачи: А) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0.75$ (связанная); Б) $\alpha_e = 0.75$, $\alpha_f = 0.0$ (частично связанная); В) $\alpha_e = 0.0$, $\alpha_f = 0.75$ (частично связанная); Г) $\alpha_e = 0.0$, $\alpha_f = 0.0$ (несвязанная). В случае В трещина получается немного больше (рис. 3, б) из-за того, что деформация породы уменьшает утечки в пласт (см. уравнение (5)). В случае Б объемное сжатие пор в окрестности трещины создает так называемое обратное напряжение, препятствующее раскрытию трещины. Для преодоления этого воздействия давление в трещине поднимается, что ведет к увеличению утечек в пласт и меньшему размеру трещины. В случае А трещина получается наименьшей за счет обратного напряжения, а также из-за того, что деформация породы увеличивает утечки. Отличие в характере влияния деформации породы на утечки в случаях А и В объясняется различием в знаке скорости объемной деформации вблизи трещины в этих случаях.

Параграф 2.6 посвящен исследованию динамики трещины гидроразрыва в слоистой пороупругой среде с контрастом в сжимающих напряжениях

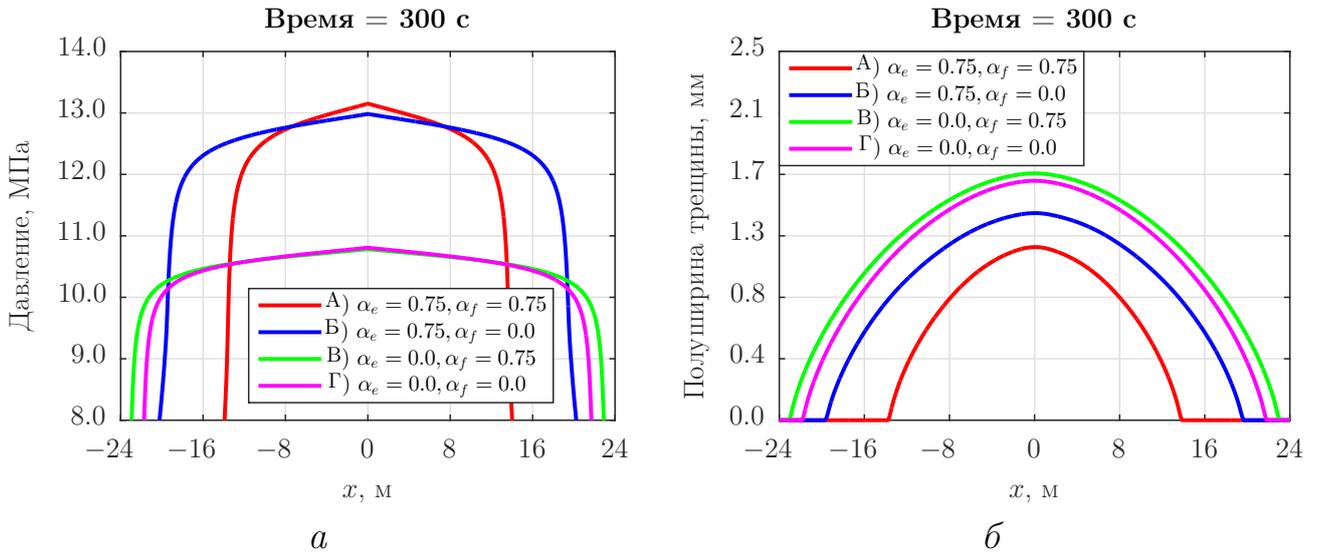


Рис. 3 — Профили давления (а) и полуширины трещины (б) вдоль линии ее распространения для связанной, несвязанной и частично связанных задач при $t = 300$ с. Проницаемость $k_r = 10^{-14}$ м², упругоэластичность

$$S_\varepsilon = 1.46 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$$

и проницаемости. Обнаружено, что различие в сжимающих напряжениях даже в 1 % приводит к существенной асимметрии крыльев трещины. В случае когда проницаемость в пласте имеет распределение вида

$$k_r(x) = \begin{cases} 10^{-14} \text{ м}^2, & x \leq x^* \\ 10^{-16} \text{ м}^2, & x > x^* \end{cases} \quad (15)$$

где x^* — граница между слоями. Если граница слоев x^* находится достаточно близко к скважине, то трещина предпочтительно распространяется по низкопроницаемому слою (рис. 4, а), где утечки ниже и отсутствует обратное напряжение. Если сдвинуть границу слоев вправо на достаточное расстояние, то трещина будет распространяться по высокопроницаемому слою (рис. 4, б) из-за присутствия контраста обратного напряжения возле правой и левой вершин трещины. Когда трещина достигнет барьера, который препятствует ее дальнейшему движению влево, давление жидкости в трещине начинает расти. После достижения некоторого критического уровня давления трещина прорывается в низкопроницаемый слой (см. рис. 4, б в моменты $t = 1200, 1600$ с).

Стоит отметить, что подобное поведение — чисто пороупругий эффект, который не наблюдается, если положить в модели $\alpha = 0$.

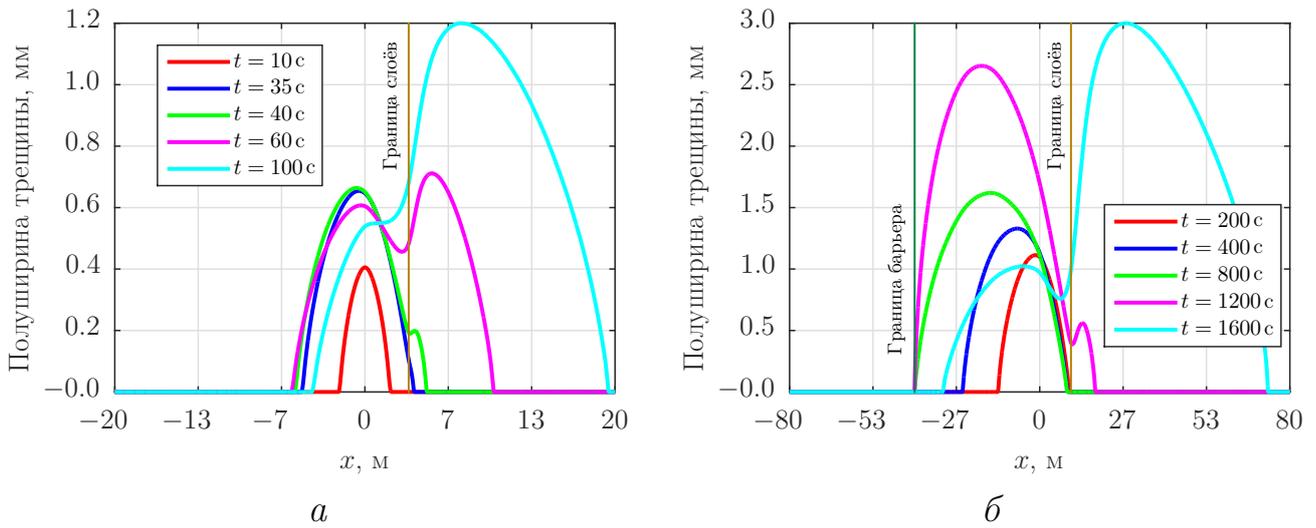


Рис. 4 — Профили полуширины трещины вдоль линии ее распространения в различные моменты времени в случае пласта, состоящего из двух слоев с высоким контрастом проницаемости. Граница слоев (вертикальная коричневая линия) расположена в точке (а) $x = 3.5$ м и (б) $x = 10$ м

В **заклЮчении** приведены основные результаты работы:

1. Для классической модели Христиановича—Гиртсма—де Клерка (KGD) распространения трещины ГРП в режиме преобладания вязкой диссипации построен численный алгоритм, в котором отсутствует необходимость явно отслеживать положение вершины трещины. Данная особенность алгоритма позволяет эффективно решать поставленную задачу и избегать при этом расходящихся итерационных процедур. Корректность работы алгоритма подтверждена проверкой сходимости численного алгоритма с использованием известного аналитического решения задачи. С помощью предложенного подхода решена задача о периодической закачке жидкости гидро-разрыва в трещину, где продемонстрированы возможности алгоритма адекватно описывать ситуации с переменным сценарием закачки и произвольной зависимостью утечек в пласт от давления жидкости в трещине.
2. Как обобщение подхода KGD в настоящей работе рассмотрена модель трещины в порупругой среде в условиях плоской деформации. Модель основана на уравнениях Био, позволяющих учитывать взаимное влияние давления в порах и напряженно-деформированного состояния породы. Благодаря структуре модели оказалось возмож-

ным записать одномерную задачу для определения течения жидкости по трещине, двумерный расчет фильтрации в пласте и деформации горной породы в единой слабой постановке. Данное обстоятельство позволило построить численный алгоритм на основе метода конечных элементов для совместного решения упомянутых задач. Несмотря на то, что алгоритм построен для двумерного случая, его обобщение на трехмерный может быть сделано по аналогии.

3. В упрощенной постановке рассмотрена задача о стационарной полубесконечной трещине в пороупругой среде, для которой найдено точное автомодельное решение. Полученное стационарное решение применялось для верификации используемого подхода к построению предложенного численного алгоритма. Для нестационарной задачи распространения трещины ГРП в общей постановке отдельно показана численная сходимость и определен ее порядок. В качестве дополнительной проверки корректности работы алгоритма проведено сравнение результатов численных экспериментов в настоящей работе с известными численными и аналитическими решениями из литературы.
4. Предложенная численная модель успешно применена для тщательного анализа влияния порового давления распространение трещины гидроразрыва в пороупругой среде. Эффект воздействия порового давления на напряженное состояние пласта и эффект влияния деформации породы на фильтрацию были исследованы отдельно и в совокупности. Полученные результаты помогают объяснить качественные различия в геометриях трещин, посчитанных с учетом и без учета пороупругих эффектов.
5. Благодаря универсальности предложенной модели оказалось возможным изучить динамику развития трещины ГРП в пороупругой среде, состоящей из слоев с контрастом физических свойств. Математическое моделирование обнаружило, что даже при небольшом различии сжимающих напряжений в слоях трещина гидроразрыва развивается несимметрично. При наличии значительного контраста проницаемости в слоях поведение трещины в большой степени управляется влиянием порового давления на напряженное состоя-

ние породы. Таким образом, в зависимости от перераспределения упругих напряжений в пласте трещина распространяется предпочтительно либо по низкопроницаемому, либо по высокопроницаемому слою. Данный эффект наблюдается только в пороупругой среде, что говорит о необходимости учета влияния порового давления для правильного описания процесса гидроразрыва пласта.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Golovin, S.V.* Hydraulic fracture numerical model free of explicit tip tracking / S.V. Golovin, V.I. Isaev, A.N. Baykin et al. // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 2015. — Vol. 76. — P. 174–181.
2. *Golovin, S.V.* Stationary dipole at the fracture tip in a poroelastic medium / S.V. Golovin, A.N. Baykin // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Vol. 69–70. — P. 305–310.
3. *Baykin, A.N.* Modelling of hydraulic fracture propagation in inhomogeneous poroelastic medium / A.N. Baykin, S.V. Golovin // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 722, no. 012003.
4. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва в пороупругой среде / А. Н. Байкин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015г.). — Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. — С. 27–28.
5. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде / А. Н. Байкин, С. В. Головин // VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 7–11 сентября 2015 г.): тезисы докладов / Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. — Новосибирск, 2015. — С. 78–79.
6. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде / А. Н. Байкин, С. В. Головин // Всероссийская конференция, посвящен-

ная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Владимира Михайловича Тешукова «Нелинейные волны: теория и новые приложения» (Новосибирск, 29 февраля — 2 марта 2016 г.): тезисы докладов / Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. — Новосибирск, 2016. — С. 15–16.

7. *Baykin, A. N.* Hydraulic fracture propagation in inhomogeneous poroelastic medium / A. N. Baykin, S. V. Golovin // XLIV International Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 27 — July 02, 2016, St. Petersburg, Russia. Books of Abstracts. / Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. — St. Petersburg, 2016. — P. 33.
8. *Байкин, А. Н.* Развитие трещины гидроразрыва в пороупругой среде / А. Н. Байкин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). — Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. — С. 294–296.