

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Баянов Евгений Викторович

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В КОРОТКИХ СПЛОШНЫХ
ЦИЛИНДРАХ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор техн. наук

Курлаев Н.В.

доктор физ.-мат. наук

Гулидов А.И.

Новосибирск – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЦИЛИНДРАХ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ.....	9
1.1. Типы волн и методы решения одномерного волнового уравнения.....	10
1.2. Обзор исследований распространения упругих волн в однородных цилиндрах.....	17
1.3. Обзор исследований распространения волн других типов в телах различной геометрии.....	22
1.4. Выводы по главе, цель и задачи диссертации.....	27
Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ.....	28
2.1. Система уравнений теории упругости в перемещениях.....	29
2.2. Постановка задачи о распространении упругой волны в осесимметричном цилиндре и запись системы уравнений.....	31
2.3. Нахождение частных решений задачи методом разделения переменных.....	34
2.4. Вывод характеристического уравнения.....	39
2.5. Выводы по главе	43
Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ЦИЛИНДРА	44
3.1. Использование программного комплекса AUTODYN	45
3.2. Использование программного комплекса KRUG24.....	48
3.3. Параметры численного расчета и постановка задачи о столкновении цилиндра с преградой	52
3.4. Определение параметров цилиндра, влияющих на фазовую скорость волны	55
3.5. Выводы по главе	62

Глава 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА

РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРЕ	63
4.1. Типы ультразвукового контроля	64
4.2. Оборудование ультразвукового контроля и результаты исследования	67
4.3. Анализ процесса распространения упругой волны в цилиндре.....	73
4.4. Выводы по главе	79
ОБЩИЕ ВЫВОДЫ	80
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	81

ВВЕДЕНИЕ

Исследования по распространению волн в цилиндрах различных сечений и труб проводятся уже более века. Современное применение эти исследования находят в области ультразвуковых волн при неразрушающих методах контроля, для анализа напряженно-деформированного состояния и определении характеристик материала [1].

Упругие волны представляют собой высокоэффективный инструмент исследования напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств материала. Это связано с тем, что волны распространяются на большие глубины и не вносят искажения в происходящие в материале процессы. Знание эффектов, возникающих при распространении волн, позволяет использовать их во многих отраслях.

Задачи, связанные с ударным взаимодействием тел, встречаются в строительной индустрии, машиностроении и при эксплуатации механизмов в различных условиях. Это требует учитывать все волновые явления, происходящие в твердых телах.

Чаще всего изучение задачи распространения волн ограничивается одномерным случаем распространения гармонической волны в бесконечном цилиндре без учета дисперсии, т.е. зависимости скорости волны от ее частоты. Решение динамических уравнений для таких цилиндров было получено еще в конце XIX века [2]. Подход к задачам распространения волн в одномерном случае позволяет объяснить некоторые закономерности процесса соударения цилиндров, однако, не отражают полной волновой картины, возникающей при ударе. Более детальное исследование можно выполнить только в двумерном и трехмерном приближении.

Актуальность

При решении многих задач, связанных с распространением волн вдоль цилиндра, часто применяется ряд приближений. В частности, из решения задачи о продольном ударе цилиндра в одномерной постановке определена скорость распространения упругой волны [3, 4, 5]. Однако, рассматривая осесимметричную зада-

чу, скорость распространения волны в цилиндре принимается равной скорости звука в цилиндре, полученной из одномерной теории. Данное предположение дает удовлетворительные решения, но не отражает полной волновой картины, в особенности при ударе коротких цилиндров.

Задача о распространении упругих волн в цилиндрах конечной длины при продольном ударе, с точки зрения волновых процессов при движении фронта волны, является недостаточно исследованной. Поэтому, актуальным представляется изучение факторов, влияющих на изменение скорости распространения упругой волны.

Цель работы

Исследование упругой волны, возникающей при продольном ударе короткого цилиндра, и выявление факторов, влияющих на скорость ее распространения.

Научная новизна

1. Подробно описано явление повторного отскока однородного цилиндра от преграды при продольном ударе и проанализированы причины его возникновения.
2. Предложен метод определения отскока упругого цилиндра от жесткой преграды.
3. Исследовано влияние длины цилиндра на время контакта с абсолютно жесткой преградой при продольном ударе.
4. Показано, что упругая волна в коротком цилиндре распространяются со скоростью, отличной от скорости звука в стержнях.
5. С помощью ультразвукового дефектоскопа подтверждено, что скорость волны в коротких цилиндрах выше, чем скорость распространения в цилиндрах большой длины.

Научная и практическая значимость

Предложенная закономерность изменения (повышения) скорости упругой волны на малом удалении от торца цилиндра может использоваться для уточнения методов неразрушающего акустического контроля при определении расстояния до дефекта.

Полученный алгоритм визуализации волн напряжений в цилиндре можно использовать в других задачах механики сплошной среды, в которых используется метод конечных элементов.

Достоверность научных результатов

Обеспечивается использованием строгого математического аппарата и законов механики деформируемого твердого тела; использованием двух апробированных программных комплексов для получения численного решения задачи; совпадением предельных случаев полученных решений с известными решениями и результатами проведенного эксперимента.

Апробация работы

Основные научные положения и результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры самолето- и вертолетостроения НГТУ (2008, 2009); Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (2008); Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образовании и промышленности" (2009–2013); Международной научно-практической интернет-конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития» (2011); Всероссийской научно-технической конференции «Наука. Промышленность. Оборона» (2013); научно-практической конференции "Современные тенденции развития науки и технологий" (2015-2016); Международной научной конференции «Тенденции развития науки и образования» (2017); научных семинарах института гидродинамики СО РАН (2016, 2018); 13й международный форум по стратегическим технологиям IFOST (2018).

Публикации

Основное содержание диссертации изложено в 15 печатных работах, в том числе в одном журнале, входящем в список ВАК и одном журнале, зарегистрированный в системе SCOPUS.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Определение времени контакта цилиндра с преградой при продольном ударе и установление его зависимости от длины и материала цилиндра.
2. Влияние параметров цилиндра на возможность повторного отскока от преграды при продольном ударе.
3. Установление зависимости средней скорости распространения упругой волны от геометрических и материальных параметров цилиндра.
4. Результаты сравнений компьютерного моделирования процессов упругой волны с точными решениями и данными эксперимента.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, общих выводов, списка литературы.

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертации и ее научной новизны, указана цель и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе приводится обзор работ, посвященных исследованию динамической задачи распространения волн в цилиндрах и других средах. Дан анализ степени изученности задачи о распространении упругой волны в цилиндре.

Во второй главе приведена общая постановка динамической задачи теории упругости. Приведен обзор характеристических уравнений для распространения различных типов волн. В двумерной осесимметричной постановке представлен порядок вывода характеристического уравнения, построены и проанализированы дисперсионные кривые. Показано, что при соразмерных диаметре и длине цилиндра скорость волны отличается от значения скорости, получаемой при одномерной постановке задачи.

Третья глава посвящена постановке численной задачи об упругом ударе цилиндра с жесткой преградой. Приведен математический аппарат, лежащий в основе программного комплекса KRUG24, используемый для численного решения задач об ударе. Приведены теоретические положения, реализованные в коде программы AUTODYN. Для подтверждения достоверности результатов приводится сравнение предельных случаев решений с решениями, полученными другими ав-

торами. Представлен подробный анализ результатов численного решения задачи о продольном ударе цилиндра с абсолютно жесткой преградой. Показано, что существуют длины цилиндра, при которых средняя скорость распространения волны отличается от скорости звука в стержне.

В четвертой главе приводится описание и схема эксперимента по определению скорости упругой волны в цилиндрах различных длин и из разного материала. Исследование проводится с помощью ультразвукового дефектоскопа. Приведены и проанализированы результаты эксперимента с несколькими образцами. Описывается алгоритм визуализации результатов численного решения задачи, созданный на языке программирования AutoLISP. Проводятся сравнение данных эксперимента с результатами численного решения. Показано, что скорость волны в коротком цилиндре превышает значение скорости в длинных стержнях.

Общий объем работы составляет 91 страниц, в том числе 28 рисунков. Список литературы содержит 122 наименования.

Глава 1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЦИЛИНДРАХ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Задача о распространении волн в цилиндрах является одной из классических задач механики деформируемого твердого тела.

Исследования распространения волн проводятся с конца XIX-го века. Область этих исследований охватывает как изотропные, так и анизотропные среды. При решении таких задач используются различные модели. Упругие волны изучались многими авторами, например, в работах [3, 6]. Закономерности распространения волн в упругопластической среде рассмотрены в [7, 8, 9].

Одними из первых задач о распространении волн в стержнях занимались Кри [2] и Похгаммер [10]. В последующие годы исследования охватывали более широкий круг задач таких, как распространения волн в анизотропных стержнях и коаксиальных стержневых системах.

Часто такая задача рассматривается с точки зрения ударного взаимодействия тел. В данной работе исследуются процессы, возникающие в цилиндре при продольном упругом ударе с абсолютно твердой недеформируемой преградой.

1.1. Типы волн и методы решения одномерного волнового уравнения

Прежде всего, определим несколько понятий. Волной является процесс распространения колебаний или некоторых возмущений, в частности напряжений сжатия [6]. Фронтом волны называется граница возмущенной области тела [6]. Скоростью волны будем считать скорость движения ее фронта [6].

Во многих работах [11, 12, 13, 14] приводится общая информация о типах волн и волновом уравнении в зависимости от среды, в которой они распространяются. В монографии В. И. Ерофеева [15] приводится подробное описание различных волн. Аналитический обзор позволяет выделить основные типы волн.

Волны в неограниченной упругой среде.

В безграничной среде возможно распространение двух типов возмущений: волна дилатации и волна сдвига. Эти волны также называют продольными и поперечными, соответственно. В волне дилатации направление перемещения частиц среды совпадает с направлением перемещения волны. В волне сдвига перемещения частиц перпендикулярны направлению распространения волны. При этом в сейсмологии различают также вертикально (SV) и горизонтально поляризованные (SH) волны сдвига.

Скорость продольной волны определяется по формуле [15]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (1.1)$$

где λ, μ - постоянные Ламе, ρ - плотность материала.

Скорость поперечной волны определяется по формуле [15]:

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.2)$$

Скорости этих волн не зависят от частоты колебаний. В этом случае говорят, что волны не обладают дисперсией.

Отношение скоростей этих волн зависит только от коэффициента Пуассона [15]:

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}, \quad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Волны в упругом полупространстве.

В безграничной среде продольные и поперечные волны распространяются независимо друг от друга. Наличие границ в твердом теле существенно меняет волновую картину. При взаимодействии с границей волны разных типов могут трансформироваться друг в друга.

Если на свободную от напряжений границу падает продольная волна под произвольным углом, то отраженное возмущение будет представлять собой сумму продольной и поперечной волн. При падении на свободную поверхность поперечной волны в отраженном возмущении также будут оба типа волн. При взаимной трансформации волн может возникнуть такая комбинация продольной и поперечной волн, что возмущение будет представлять собой волну, бегущую вдоль границы и резко затухающую при удалении вглубь полупространства (волна Релея) [15]. Характеристическое уравнение для такой волны определяется следующим выражением [15]:

$$\left[\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \right] = 0. \quad (1.4)$$

Так как это выражение не содержит частоту, то можно сделать вывод, что поверхностные волны Релея не имеют дисперсию. Уравнение (1.4) имеет одно действительное положительное решение для скорости волны Релея c_R . Аналитическое выражение для скорости c_R сводится к отношению, осредненному для металлов [15]:

$$c_R \approx 0.75 c_2. \quad (1.5)$$

Волны в упругом слое.

Ограничение упругого пространства двумя плоскостями вызывает возмущения, влияющие на изменение фазовой скорости и напряженного состояния. В результате многократных отражений и взаимных трансформаций продольных и поперечных волн в слое могут сформироваться нормальные волны, т.е. гармонические волны, распространяющиеся в слое без изменения формы. Такие нормальные волны называются волнами Лэмба [15].

В литературе [15] приводится следующее выражение для определения фазовой скорости такой волны

$$c = 2 \sqrt{\frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho}}. \quad (1.6)$$

Волны в упругом цилиндре круглого сечения.

Рассмотрим бесконечный цилиндр кругового сечения, находящийся в пустоте. Пусть в цилиндре, свободном от нагрузки на боковой поверхности, распространяется продольная волна в направлении его оси.

Если радиус цилиндра мал по сравнению с длиной волны, получается следующее выражение для фазовой скорости волны [11]:

$$c_E \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.7)$$

Скорость, определяемая формулой (1.7) соответствует скорости звука в цилиндре. В литературе [16] встречается понятие «стержневая скорость» для скорости, определяемой по формуле (1.7).

Во втором приближении скорость определяется формулой [11]:

$$c \approx \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{1}{4} \nu^2 k^2 a^2 \right)}, \quad (1.8)$$

где k – волновое число, a – радиус стержня.

У волны, скорость которой определена по формуле (1.8), имеет место дисперсия.

Авторы монографии [15] упоминают о теории Бишопа, в которой при определении скорости волны в цилиндре учитывается кинетическая энергия движения частиц и потенциальная энергия сдвига. В результате скорость волны определится формулой:

$$c = \sqrt{\frac{c_E^2 + c_2^2 \nu^2 k^2 (I_0/F)}{1 + \nu^2 k^2 (I_0/F)}}, \quad (1.9)$$

где c_E - «стержневая» скорость, определяемая формулой (1.7), I_0 - полярный момент инерции, F - площадь поперечного сечения цилиндра.

Волны в упругом слое на границе полупространства.

Наблюдения на поверхности земной коры показали, что при распространении поверхностных волн вдоль x_2 (x_1 , при этом, направлена вглубь полупространства), могут возникать поперечные волны. Перемещения частиц происходит в горизонтальной плоскости. Это значит, что в этих волнах присутствует компонента перемещения $u_3(x_1, x_2, t)$. Ляв [17] показал, что эти волны могут возникать в упругом полупространстве с упругими свойствами, изменяющимися скачкообразно.

Характеристическое уравнение этой задачи представлено в виде:

$$\mu_2 b_2 = \mu_1 b_1 \operatorname{tg}(k b_1 h), \quad (1.10)$$

где

$$b_1 = \sqrt{\frac{c^2}{c_{S1}^2} - 1}, \quad b_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{S2}^2}}. \quad (1.11)$$

Здесь через c_{S1} и c_{S2} обозначены скорости поперечных волн в слое и полупространстве, соответственно.

Действительный корень уравнения (1.10), а значит и волна Лява, может существовать только при условии $c_{S2} > c_{S1}$. Само значение скорости волны Лява лежит в промежутке $c_{S2} > c > c_{S1}$. Эти волны имеют дисперсию, т.к. их скорость зависит от частоты.

Методы решения задач о распространении упругих волн.

Основой для рассмотрения одномерных задач об упругих волнах является задача о колебаниях струны. Эта задача заключается в нахождении решения одномерного волнового уравнения с начальными и граничными условиями [11]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (1.12)$$

Одним из методов решения такой задачи является метод Даламбера или метод бегущих волн [12]. В этом методе решение представляется в виде

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct). \quad (1.13)$$

Первое слагаемое описывает прямую волну, а второе – волну, бегущую в обратном направлении.

В результате решение Даламбера для бесконечной струны представляется в виде [12]

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(x) dx. \quad (1.14)$$

Анализ решения Даламбера производится методом характеристик. Этот метод позволяет наглядно показать поведение одномерной волны, скорость которой не зависит от частоты.

Вторым методом решения волнового уравнения является метод Фурье или метод разделения переменных [12]. Этот метод является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. В случае рассмотрения задачи о колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, решение представляется в виде [12]

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1.15)$$

После нахождения собственных функций при применении граничных условий решение записывается в виде [12]

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k c t}{l} + b_k \sin \frac{\pi k c t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (1.16)$$

Коэффициенты этого уравнения находятся из начальных условий.

С развитием вычислительной техники появилась возможность численного моделирования и решения задач механики деформируемого твердого тела. Численные расчеты достаточно хорошо согласуются с данными экспериментов, поэтому их используют для решения задач статики и динамики, в том числе задач, связанных с высокоскоростным взаимодействием тел [18, 19].

Для численного моделирования в основном используют методы Лагранжа и Эйлера. В методе Лагранжа [20] отслеживается изменение параметров среды в каждой материальной частице. Но при большой величине деформаций возможно сильное искажение сетки, что ведет к снижению точности расчетов. В методе Эйлера [21, 22, 23] измерение параметров среды происходит относительно неподвижной точки пространства. Это исключает проблему искажения сетки, но становится сложнее отслеживать границу тела.

На основе метода конечных элементов создано немало коммерческих программных комплексов. Довольно распространенными системами являются ANSYS, LS DYNA [24]. Стоит также отметить программный продукт MSC.Marc [25], предназначенный для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. Этот комплекс широко используется в работах [25, 26] С. Н. Коробейниковым применительно к исследованиям деформирования гиперупругих тел.

Альтернативным методом численных исследований является метод сглаженных частиц [25, 26]. На его основе построен численный комплекс MASTER Professional.

Иногда в научных организациях разрабатываются собственные вычислительные комплексы для решения задач, связанных с тематикой исследования организации. Во Всероссийском научно-исследовательском институте автоматики был создан комплекс программ "ТИС" для решения гидродинамических и упругопластических задач [7, 29].

Комплекс "KRUG24" разработан А. И. Гулидовым в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Российской Академии наук. Он предназначен для численного решения двумерных плоских и осесимметричных задач высокоскоростного взаимодействия системы деформируемых тел с учетом

разрушения [18]. На его основе проводились исследования по соударению стержня с преградой в упругой постановке и с учетом разрушения [18, 30], а также в задачах, связанных с магнитно-импульсным воздействием на материалы [31].

В данной работе будут исследоваться процессы распространения упругих волны в цилиндре. Для нахождения характеристического уравнения и определения скоростей используется метод разделения переменных.

1.2. Обзор исследований распространения упругих волн в однородных цилиндрах

Значимый вклад в исследования колебаний стержней внес Кри [2]. В своей работе [2] Кри рассматривал систему уравнений равновесия в цилиндрической системе координат. Большую часть статьи автор посвятил решению уравнений равновесия для бесконечных цилиндров и оболочек, а так же для случая их колебаний. Автор выводит выражение для функции перемещения, но без учета координаты z . Однако, такие уравнения не могут описать реальной картины распространения волн в стержне. Стержень конечной длины автор рассматривает лишь в контексте статической задачи.

Относительно точные результаты задачи осевого колебания стержней были получены Миндлином и Германом [32]. В дальнейшем совместно с Макмивеном в работе [33] Миндлин использовал в решении так называемые поправочные коэффициенты, что позволило получить дисперсионные кривые для первой моды, близкие к решению задачи в трехмерной постановке.

Система уравнений динамической теории упругости является основой для многих задач [14, 34, 35, 36]. В работе [34] приводятся базовые уравнения динамической теории упругости, решение уравнений с помощью интегральных преобразований для одномерного случая. В статье [14] авторы подробнее останавливаются на фундаментальных понятиях и классификации динамических процессов и основные зависимости, характеризующие каждый из процессов. В приложениях описаны модели сплошных сред. В монографии [36] Сухинин и Макаренко подробно раскрывают основные понятия и алгоритмы теории волн.

Общее решение уравнения движения в перемещениях представляется в виде суммы градиента скалярного и ротора векторного потенциалов, которые удовлетворяют системе независимых волновых уравнений. На основе такого разделения выражения для перемещений через потенциалы строится решения в основополагающих работах [11, 13, 17, 21]. А. А. Клещев [13] подробно приводит вывод системы независимых уравнений для бесконечного стержня, в том числе и осесим-

метричного. Но при дальнейшем решении искомая функция сразу ищется в виде бегущей волны и содержит функцию Бесселя. Сам переход от волновых уравнений к этим выражениям не показан. При получении выражений для перемещений автор ограничивается лишь нахождением неизвестных коэффициентов через граничные условия и выводом характеристического уравнения.

Наряду с нахождением компонент перемещения, важной задачей также является вывод характеристического или дисперсионного уравнения [32, 36, 37, 38, 39]. Такое уравнение устанавливает зависимость между скоростью волны в стержне и частотой [15, 39, 40]. Решение характеристического уравнения позволяет найти фазовую скорость волны, проходящей вдоль стержня. Авторы монографии [36] исследуют дисперсионные соотношения и приводят задачи по нахождению фазовых и групповых скоростей волн.

Бэнкрофт [39] одним из первых изучил нижние моды корней дисперсионного уравнения Похгаммера и получил зависимость между фазовой скоростью и волновым числом. Позже Хадсон [40] подтвердил эти результаты. Он выводит характеристическое уравнение из системы уравнений теории упругости, однако, не приводит подробных выкладок.

Уравнения одномерной теории использованы Кесслером [37] для исследования распространения волн в нагруженной арматуре. Так же, используя поправочные коэффициенты по теории Миндлина [32], автор приводит дисперсионные кривые для фазовой и групповой скоростей волны, распространяющейся в круглых стержнях. Оное, Макмивен и Миндлин [38] подробно изучили дисперсионное уравнение Похгаммера в широком частотном диапазоне.

При рассмотрении волн в стержне Ерофеев [15] показывает, чем отличается формула для фазовой скорости волны с учетом дисперсии и без него. В этих выражениях в качестве одного из слагаемых используется скорость звука в стержне c_E . Рассмотрение, таким образом, одномерной задачи, хотя и с учетом дисперсии, не будет характеризовать все процессы, происходящие с волной в стержне в трехмерной постановке.

В своей статье М. Шаталов и И. Федотов [41] рассматривали дифференциальные уравнения для продольных колебаний стержня, решение которых основано на вариационном принципе Гамильтона. Приведен сравнительный анализ моделей Релея-Лява, Релея-Бишопа [42], Миндлина-Германна [32] с моделью Похгаммера-Кри. Авторы показали, что модель Бишопа достаточно точна, но дисперсионная кривая асимптотически стремится к скорости поперечной волна, тогда как в точной модели Похгаммера-Кри асимптотой является скорость волны Релея.

А. А. Клещев, Ф. Ф. Легуша, В. Л. Маслов [13] рассматривают задачу о нахождении перемещений в осесимметричной постановке и получают характеристическое уравнение для продольных волн. Однако, в дальнейшем не приводится анализ этого уравнения и не находятся неизвестные постоянные в выражениях для компонент перемещения. При анализе дисперсионных кривых для продольной волны авторы показывают, что нулевая мода начинается со «стержневой» скорости c_E и стремится к скорости волны Релея. Однако формула для «стержневой» скорости c_E получена из решения задачи о колебаниях стержня в одномерной постановке, и учитывать эту формулу при решении задачи в осесимметричном случае не корректно. Помимо случая продольных волн, в монографии [13] подробно рассматривают изгибные и крутильные волны. Однако, все выкладки завершаются нахождением характеристического уравнения, и лишь на его основе авторы строят дисперсионные кривые для скоростей различных типов волн.

Дейвис [43] вплотную занимался теоретическим и экспериментальным исследованиями распространением коротких импульсов в цилиндрических стержнях. Он показал, что решения Похгаммера [10] и Кри [2] не точны для стержней конечной длины, но для большинства случаев эти решения близки к точным.

Численное решение волновых уравнений требует высокой точности. При решении методом конечных элементов задач о высокочастотном нагружении необходимо выбирать размер ячейки соразмерным длине волны, которая в этом случае, довольно мала. Одним из методов решения таких задач является спектральный метод конечных элементов, рассмотренный в работе Дойла [44].

Метод конечных объемов, как метод численного решения уравнений, используется авторами работы [45]. Здесь используется представление элемента в виде многогранника в анизотропной сетке. Ранее с изотропной сеткой работали авторы работы [46], применяя этот метод к решению задачи о распространении сейсмических волн.

Для экспериментального изучения процесса распространения волн в стержне рассматривается задача о соосном соударении двух одинаковых круглых стержней [18, 43, 47, 48]. При симметричном соударении таких стержней, если плоскость контакта рассматривается как жесткая преграда, такая задача становится эквивалентной задаче об ударе стержня об абсолютно жесткую преграду. При соударении двух одинаковых стержней, через промежуток времени $2L/a$ после начала соударения, в точке их соприкосновения исчезает давление. Таким образом, происходит отскок. Если предположить, что стержень полубесконечен, то можно считать, что длина волны сжатия равна $2L$.

В. К. Манжосов в работе [47] представляет модели продольного удара стержней, описываются этапы их разработки и развития и методы для приближенного решения задач об ударе. Однако особое внимание уделено подходам к описанию динамических процессов при продольном ударе. Приводятся математическое описание областей напряжений сжатия и растяжения в процессе распространения по стержню волн нагрузки и разгрузки.

В книге Дейвиса [43] помимо основных сведений об ударе по тонкому стержню приводятся решения задач о распространении волн напряжений, возникающих при взрыве большой мощности. Однако анализ процесса отскока стержней от преграды в одномерном приближении упрощает волновой анализ.

В монографии В. М. Фомина, А. И. Гулидова и др. [18] рассмотрены задачи отскока различных тел с разными скоростями от твердых преград в двумерной постановке. Здесь приводятся системы уравнений, методика и описание разностной схемы численного решения таких задач. Описаны результаты задач об ударе цилиндрических и конических стержней, а так же двухслойных цилиндрических стержней. В последнем случае было обнаружено явление повторного отскока, т.е.

повторное касания стержня преграды после выхода всех точек стержня из контакта. Для экспериментального наблюдения процесса соударения тела с преградой был разработан стробоскопический источник световых импульсов на основе рубинового лазера. Приведена схема экспериментальной установки и результаты наблюдений процесса соударения.

Во многих работах при рассмотрении задач о распространении волн в качестве волны разгрузки принимают волну, распространяющуюся от ненагруженного торца стержня после отражения от него волны нагрузки. Дейвис и Рахматулин [49, 50] в своих работах принимают во внимание отражение волны от свободной боковой границы стержня. Таким образом, в некоторый момент после удара стержня возникает волна разгрузки, распространяющаяся в прямом направлении.

Х. А. Рахматулин [50] описывает волны разгрузки применительно к упругопластическому деформированию стержня. Автор подчеркивает, что основной проблемой решения задачи о распределении напряжений в стержне является определение закона распространения волн разгрузки. В качестве методов решения этой задачи приведен графоаналитический метод, предложенный Шапиро и Бидерманом [51] и рассмотрены решения для частных случаев нагружения.

Таким образом, значительно менее исследованной представляется задача распространения волн в двух и трехмерной постановке. Обобщение результатов одномерной задачи, а именно выражение для скорости волны, на более сложные задачи не корректно. Дело не только в наличии дисперсии волны, но и в безусловном влиянии свободных поверхностей цилиндра. За счет свободных границ возникают поперечные волны, распространяющиеся к оси цилиндра, что оказывает влияние на волну, бегущую вдоль него.

1.3. Обзор исследований распространения волн других типов в телах различной геометрии

Распространение волны в стержнях произвольного сечения, является более сложной задачей.

Распространение волн в прямоугольных пластинах и стержнях различного сечения изучено довольно подробно [51, 53, 54, 55]. Область применения результатов исследования достаточно обширна: использование ультразвуковых волн для неразрушающего метода контроля и определения характеристик материала.

Многие авторы в своих анализах распространения волн опираются на монографию Акенбаха [56]. Кольский в монографии [57] приводит подробный обзор работ по изучению волн в изотропных телах. В статье [58] в общих чертах описываются продольные, поперечные и изгибные волны. Приводятся результаты трех экспериментов: волны в стержне, стоячие волны в круглой и квадратной пластине.

Довольно большой объем работ [58, 59, 74, 61] связан с изгибными и крутильными колебаниями стержней. В частности, А. Баскар [59] рассматривает изгибные волны применительно к стержням различных сечений. Также приводит примеры численного решения задачи для сечений разной геометрии. Крутильными колебаниями в сплошном и полом цилиндрах занимался Д. Пан [60]. Свойства крутильных волн в бесконечном цилиндре рассмотрены Карчионэ и Сериани в работе [61].

Наряду с изучением круглых стержней значительный интерес вызывает исследование волн в прямоугольных стержнях и пластинах [16, 52, 53, 62, 63]. Релей [50] и Лэмб [64] одни из первых занимались изучением упругих волн в изотропных пластинах.

Морзе [53] приводит подробные экспериментальные результаты исследования дисперсии волны для прямоугольных стержней. Но показывает результаты только для случая, когда отношение поперечных размеров стержня велико, т.е. стержень близок к пластине. Автор также показал, что результаты, полученные для квад-

ратного стержня, близки к результатам задачи для круглого стержня аналогичной площади поперечного сечения. Используя модель Морзе, Кинч и Грин [65] изучали деформацию стержня эллиптического сечения.

Аднан, Абдельрахман и др. [16] сформулировали приближенную модель распространения волны в прямоугольных стержнях. Авторы приняли некоторые упрощения в этой задаче по сравнению с моделью Морзе, а именно пренебрежение зависимостью сдвиговых напряжений от одной или двух координат. Они привели точное дисперсионное уравнение для этого случая и подробно описали модель распространения волны в стержне прямоугольного сечения. Дисперсионное уравнение в этом случае также зависит от волновых чисел в поперечных направлениях. Результаты численного решения [16] приведены для различных соотношений поперечных размеров прямоугольного стержня.

Результаты лабораторных наблюдений распространения упругой волны в пластинах и прямоугольных стержнях, приводятся в статье Лундберга [52]. Один из экспериментальных анализов описан в работе Россинга и Рассела [58]. Анализ физических явлений, возникающих при распространении волн в оболочках, приведен в работе Х. Юберала [63].

К широкому классу задач относятся вопросы распространения волн в тонких трубах [54, 66, 67, 68, 69]. Решение этих задач строится на предположении о том, что волновая картина в тонких трубах аналогична распространению волн в тонком слое. На основе этого Газис [66] доказал, что в трубах распространяются волны Лэмба. Современное применение исследований волн Лэмба находится в области неразрушающего методов контроля на предмет обнаружения повреждений труб или наличия несплошностей в их материале [67, 68].

Ляв [17] анализировал полые цилиндры с помощью теории оболочек. Он также приводит дисперсионные кривые для случая распространения осесимметричных волн в пустых и заполненных жидкостью цилиндрических оболочках. Подобная проблема описана в работе Ф. Ахмада [70].

Шульга [54, 71] также используют численные методы для решения волновых уравнений. В его работах численно решаются задачи для случаев ортотропного цилиндра и осесимметричных полых цилиндров.

В работах по исследованию распространения волн в полых стержнях, заполненных жидкостью, представляется интерес постановка задачи в цилиндрических координатах. В частности, Гринченко и Комиссарова [72] подробно расписали выражения для компонент перемещения, удовлетворяющих уравнению Ламэ. В выражениях для компонент перемещений используется волновое число только для волны, двигающейся вдоль стержня. На самом деле стоит учитывать и поперечное движение частиц при распространении волны.

Кунду, Эхсани и др. в работе [73] исследовали распространение волн в трубах в круговом (касательном) направлении. Эта задача имеет большое значение при ультразвуковом контроле различных труб. В таких задачах трубу часто представляют как пластину и пренебрегают продольными компонентами перемещения. Для нахождения перемещений используют систему уравнений движения в цилиндрических координатах. Скорость касательных волн зависит от так называемого углового волнового числа [74]. Метод решения уравнений в данной статье заключается в разложении в ряд Фурье неизвестных функций. Само решение производится численно с помощью программного пакета Mathematica.

За пределами теории упругости также широко рассмотрены проблемы распространения волн, возникающих при ударе [29, 75, 76].

Задачу о соударении стержня с преградой в упругопластической постановке решают Киселев и Сережкин [29]. Используется модель Прандтля-Рейса. Также учитывается влияние трения между ударником и преградой. Анализируется зависимость времени контакта от начальной скорости удара и исследуются закономерности микро- и макроразрушений стержня.

В подобной постановке особенности взаимодействия стержня с преградой рассмотрены в работах Ильюшина, Годунова и др. [75, 76, 77]. Отскок стержня всегда происходит в момент потери контакта торца стержня с преградой. Авторы показали, что за счет взаимодействия упругих и пластических волн происходит час-

тичный отход поверхности торца от преграды в процессе деформирования. Значительная кольцевая деформация приводит к частичному разрушению материала стержня.

Исследования волн связаны не только с изотропными цилиндрами различного сечения, но и с задачами в упруго-пластичной или вязкоупругой постановке [29, 78], объектами которых являются анизотропные цилиндры [55, 79, 80].

Кесслер и Кослоф [37] изучали распространение двумерных упругих волн в окрестности цилиндрических объектов. Задача решается применительно к скважинам. Уравнения составляются в полярных координатах. Численный алгоритм основан на разложении Чебышева в радиальном направлении и разложении Фурье в угловом направлении. Подобный метод авторы использовали в своей работе с акустическими волнами [81]. Работа Биота [82] посвящена распространению незатухающей волны по цилиндрическому отверстию в безграничной среде, заполненному жидкостью. Получены дисперсионные кривые для фазовой и групповой скоростей.

Б. Пашайе [55] занимается проблемой распространения волн в неоднородных стержнях и стержнях, состоящих из двух материалов. Упругие полые стержни, покрытые вязкоупругим материалом, исследуются Баршингером и Роуз [79]. Авторы статьи [80] изучали влияние микровключений на распространение волны в тонких стержнях.

Большинство задач по распространению волн в вязкоупругих стержнях ограничивается одномерным случаем. Кольский [78] одним из первых изучил распространение коротких механических импульсов в полимерном стержне.

В связи с большим количеством задач, связанных с нелинейностью материала, большой практический интерес представляет решение волновых нелинейных уравнений. Коллектив авторов [72] приводит решение нелинейного волнового уравнения для продольных колебаний стержня. Здесь, как и в ряде других работ, задача рассматривается в рамках одномерной теории и за скорость продольной волны принимается «стержневая» скорость c_E .

Данная работа не ставит целью решение задач за пределами распространения упругих волн в сплошных цилиндрах. Анализ вышеупомянутых работ показывает, что перечень задач механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением волн, довольно обширен. Каждая из них представляет либо теоретический интерес, либо находит применение в практических областях. Во многих работах авторы используют различные приближения, в частности, рассматривают задачи в одномерной постановке. В подавляющем большинстве случаев такие решения хорошо согласуются с реальными экспериментами. Однако, не всегда это может подробно отражать физические явления и процессы, происходящие в телах при ударном воздействии.

1.4. Выводы по главе, цель и задачи диссертации

Несмотря на достаточную изученность задачи о распространении волн в сплошных цилиндрах, остаются менее исследованными задачи в трехмерной постановке. При нахождении скорости волн часто ограничиваются использованием результатов одномерной задачи. Этот подход обеспечивает достаточную точность при определении скорости, однако, не отражает все процессы, происходящие с волной в процессе ее распространения.

В частности открытым остается вопрос об определении времени контакта цилиндра с преградой при продольном ударе и установление его зависимости от длины и материала цилиндра. Остается практически открытым вопрос о достоверности компьютерных моделирований процессов распространения волн в цилиндрах и его выхода из контакта с жесткой стенкой путем сравнения результатов этих моделирований с экспериментальными данными. Ответы на эти вопросы и являются главной целью настоящего исследования.

Целью работы является:

Исследование процесса распространения упругой волны в цилиндре и выявление факторов, влияющих на скорость ее распространения.

Для достижения цели в диссертации поставлены следующие **задачи исследования**:

1. В трехмерной осесимметричной постановке численно исследовать взаимовлияние продольных и поперечных волн в цилиндрах различной длины при ударе об абсолютно жесткую преграду.
2. Измерить среднюю скорость прохождения волны в цилиндрах разной длины с помощью ультразвукового дефектоскопа.
3. Проанализировать параметры цилиндра, влияющие на скорость распространения волны при продольном ударе.

Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Задачи о распространении волн в различных средах представляют интерес с точки зрения изучения факторов, влияющих на скорость движения волны. В частности, на анализе этих факторов построены неразрушающие методы контроля.

Часто решение задач в осесимметричном случае ограничивается одномерной постановкой, когда дисперсия, т.е. зависимость скорости распространения волны от частоты, не учитывается.

Многочисленные эксперименты по соударению цилиндров с достаточной степенью точности подтверждают результаты одномерной задачи [18, 43].

Целью данной главы является показать вывод дисперсионного (характеристического) уравнения. На основе полученного характеристического уравнения необходимо построить и проанализировать моды дисперсионных кривых для поставленной задачи.

2.1. Система уравнений теории упругости в перемещениях

Запишем полную систему уравнений движения в декартовых координатах для динамической задачи без учета массовых сил [11]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\end{aligned}\tag{2.1}$$

или

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука [11]

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13},\end{aligned}\tag{2.2}$$

или

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Связь перемещений и деформаций в декартовой системе координат определяется соотношениями [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right),\end{aligned}\tag{2.3}$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Таким образом, имеем полную систему 15-ти уравнений с 15-ю неизвестными.

Для получения системы уравнений, выраженных через перемещения, подставим соотношения (2.2) и (2.3) в систему уравнений (2.1)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Полученное уравнение (2.4) называется уравнением Ламэ [11]. В такой форме записи оно может применяться для решения обширного круга задач с возможностью выражения в различных системах координат.

2.2. Постановка задачи о распространении упругой волны в осесимметричном цилиндре и запись системы уравнений

Введем систему координат для цилиндра таким образом, что ось z направлена вдоль оси цилиндра, а ось r – в радиальном направлении.

Будем искать перемещения $\mathbf{u}(r, z, \theta)$ для полубесконечного осесимметричного цилиндра ($0 < z < \infty$) конечного радиуса R ($0 < r \leq R$) в любой момент времени $t \geq 0$.

Рассмотрим уравнение теории упругости в перемещениях [11]:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (2.5)$$

где λ, μ – постоянные Ламэ, Δ – оператор Лапласа.

Здесь и далее точками будем обозначать производную по времени.

Разложим вектор перемещения $\mathbf{u}$ на две составляющие с помощью скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов [11]:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi. \quad (2.6)$$

Выразим каждую компоненту вектора перемещения $\mathbf{u}$ из уравнения (2.6), применяя операции градиента и ротора в цилиндрических координатах.

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Psi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае осевой симметрии компонента перемещения u_θ равна нулю. Т.к. перемещения не меняются при изменении угла θ , то производные по θ также равны нулю. В связи с этим, в соотношениях (2.7) у вектора Ψ остается одна компонента Ψ_θ , которую далее будем записывать как Ψ . С учетом этого соотношения (2.7) примут вид

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (2.8)$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}. \quad (2.9)$$

Распишем слагаемые выражения (2.5) при подстановке в него уравнения (2.6).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{div} \operatorname{rot} \Psi = \Delta \Phi, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \operatorname{grad} \Delta \Phi, \\ \Delta \mathbf{u} &= \Delta \operatorname{grad} \Phi + \Delta \operatorname{rot} \Psi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Представим выражение (2.10) через операторы Набла [7]

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla (\nabla \Phi)) + \nabla \cdot (\nabla (\nabla \times \Psi)).$$

В скалярном произведении множители можно менять местами, а согласно свойству смешанного произведения векторов, допускается менять порядок знаков векторного и скалярного произведения [84]. Таким образом, перепишем выражение (2.10) в виде

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot (\nabla \Phi)) + \nabla \times (\nabla \cdot (\nabla \Psi)) = \operatorname{grad} \Delta \Phi + \operatorname{rot} \Delta \Psi. \quad (2.11)$$

Подставим выражение (2.6) в (2.5) с учетом (2.11):

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \Delta \Phi + \mu (\operatorname{grad} \Delta \Phi + \operatorname{rot} \Delta \Psi) = \rho (\operatorname{grad} \ddot{\Phi} + \operatorname{rot} \ddot{\Psi}).$$

После упрощения получим

$$\operatorname{grad} [(\lambda + \mu) \Delta \Phi - \rho \Phi] + \operatorname{rot} (\mu \Delta \Psi - \rho \Psi) = 0. \quad (2.12)$$

Равенство (2.12) будет, соблюдаться, если аргументы операций градиента и ротора обращаются в ноль. Принимая во внимание следующие выражения [11]

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.13)$$

где c_1 и c_2 – скорость продольной и поперечной волны [1], получим систему двух волновых уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi} &= 0, \\ \Delta \Psi - \frac{1}{c_2^2} \ddot{\Psi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Распишем систему уравнений (2.14) в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\Psi}{r^2} - \frac{1}{c_2^2} \ddot{\Psi} &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Такое разделение вектора перемещения на потенциалы используется во многих задачах. Основная цель такого представления – это получение двух независимых волновых уравнений относительно этих потенциалов. Таким образом, задача сводится к нахождению функций Φ и Ψ .

2.3. Нахождение частных решений задачи методом разделения переменных

Обе функции в системе (2.15) зависят от трех аргументов, поэтому для дальнейшего решения применим метод разделения переменных для нахождения функций:

$$\begin{aligned}\Phi(r, z, t) &= P(r) \cdot Q(z) \cdot T(t), \\ \Psi(r, z, t) &= R(r) \cdot S(z) \cdot N(t).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Подставим выражения (2.16) в уравнения (2.15). Здесь и далее будем считать, что производная, записанная с помощью штрихов, означает дифференцирование функции по ее аргументу.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} P'QT + P''QT + PQ''T - \frac{1}{c_1^2} PQT'' &= 0, \\ \frac{1}{r} R'SN + R''SN + RS''N - \frac{1}{r^2} RSN - \frac{1}{c_2^2} RSN'' &= 0.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Запишем (2.17) в другом виде:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} \left[P'' + \frac{1}{r} P' \right] - \frac{1}{c_1^2} \frac{T''}{T} &= -\frac{Q''}{Q}, \\ \frac{1}{R} \left[R'' + \frac{1}{r} R' \right] - \frac{1}{c_2^2} \frac{N''}{N} - \frac{1}{r^2} &= -\frac{S''}{S}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Введем две константы разбиения такие, что

$$-\frac{Q''}{Q} = \gamma^2, \quad -\frac{S''}{S} = \vartheta^2. \quad (2.19)$$

Эти константы будут являться собственными числами для функций $Q(z)$ и $S(z)$.

С учетом (2.19) получим два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned}Q'' + \gamma^2 Q &= 0, \\ S'' + \vartheta^2 S &= 0.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Общие решения уравнений (2.20) запишутся в виде

$$\begin{aligned} Q_{\gamma}(z) &= A_{\gamma} e^{i\gamma z} + C_{\gamma} e^{-i\gamma z}, \\ S_{\vartheta}(z) &= B_{\vartheta} e^{i\vartheta z} + D_{\vartheta} e^{-i\vartheta z}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где A_i, C_i, B_i, D_i – произвольные постоянные.

Будем считать, что в стержне вдоль положительного направления координаты z распространяется волна с волновым числом k , частотой ω и фазовой скоростью c . Волновое число k определяется выражением [11]

$$k = \frac{2\pi}{L},$$

где L – длина волны [13].

Волновое число, частота и фазовая скорость волны связаны между собой соотношением [13]

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Собственные функции (2.21) определяют волны, бегущие в положительном и отрицательном направлении оси z . При этом собственные числа являются волновыми числами такой волны. В связи с этим

$$\gamma = \vartheta = k.$$

Т.к. рассматривается только полубесконечный цилиндр, то будем учитывать только волны, бегущие в положительном направлении.

Таким образом, собственные функции (2.21) перепишем в виде

$$\begin{aligned} Q_k(z) &= A_k e^{ikz}, \\ S_k(z) &= B_k e^{ikz}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Введем еще две постоянных разбиения:

$$-\frac{1}{c_1^2} \frac{T''}{T} = \xi^2, \quad -\frac{1}{c_2^2} \frac{N''}{N} = \chi^2. \quad (2.23)$$

Из (2.23) получим два дифференциальных уравнения

$$T'' + c_1^2 \xi^2 T = 0,$$

$$N'' + c_2^2 \chi^2 N = 0. \quad (2.24)$$

Таким образом, общие решения уравнений (2.24) запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_\xi(t) &= F_\xi e^{i\xi c_1 t} + C_\xi e^{-i\xi c_1 t}, \\ N_\chi(t) &= K_\chi e^{i\chi c_2 t} + D_\chi e^{-i\chi c_2 t}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где F_i, C_i, K_i, D_i – произвольные постоянные.

Форма записи гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси z , определяется соотношением вида [13]

$$A(z, t) = A_0 \sin(kz - \omega t),$$

или в комплексном виде

$$A(z, t) = A_0 e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (2.26)$$

Отсюда можно сделать вывод, что функции (2.25) описывают зависящую от времени компоненту гармонической волны, которая распространяется с некоторой частотой. При этом в выражениях (2.25) условию (2.26) удовлетворяют только слагаемые при постоянных C_i и D_i . Остальные слагаемые выражения (2.25) исключаем в связи с несоответствия условию (2.26).

Роль частоты в функциях (2.25) выполняют множители ξc_1 и χc_2 .

Пусть

$$\xi = k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \chi = k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad (2.27)$$

где k_1 и k_2 – волновые числа продольной и поперечной волны, соответственно, а c_1 и c_2 – их фазовые скорости.

С учетом вышеизложенного решение (2.25) перепишем в виде

$$\begin{aligned} T_k(t) &= C_k e^{-i\omega_k t}, \\ N_k(t) &= D_k e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Множество волновых чисел k является собственными числами функций (2.28) и частота ω зависит от k . Поэтому добавляется индекс k для частоты в выражениях (2.28).

Из уравнений (2.18) с учетом (2.19) и (2.23) получаются еще два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} r^2 P'' + rP' + Pr^2 \alpha^2 &= 0, \\ r^2 R'' + rR' + R(r^2 \beta^2 - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\alpha^2 = \xi^2 - \gamma^2 \equiv k_1^2 - k^2$, $\beta^2 = \chi^2 - \vartheta^2 \equiv k_2^2 - k^2$.

Сделаем замену переменной

$$r\alpha = h, \quad r\beta = g.$$

Тогда

$$P' = \frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dh} \frac{dh}{dr} = \alpha \frac{dP}{dh}, \quad P'' = \alpha^2 \frac{d^2 P}{dh^2}.$$

И аналогично

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dg} \frac{dg}{dr} = \beta \frac{dR}{dg}, \quad R'' = \beta^2 \frac{d^2 R}{dg^2}.$$

Следовательно, функции P и R удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} h^2 P'' + hP' + Ph^2 &= 0, \\ g^2 R'' + gR' + R(g^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Выражения (2.30) являются уравнениями Бесселя [85]. С учетом обратной замены переменной общее решение уравнений (2.30) запишется в виде

$$\begin{aligned} P_k(r) &= F_k J_0(\alpha_k r) + M_k Y_0(\alpha_k r), \\ R_k(r) &= K_k J_1(\beta_k r) + W_k Y_1(\beta_k r), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где F_i , M_i , K_i , W_i – произвольные постоянные, J_0 и J_1 – цилиндрические функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, Y_0 и Y_1 – цилиндрические функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядка [85].

Собственные функции (2.31) описывают компоненту волны, которая зависит от радиуса стержня. Функция Бесселя второго рода Y_i не ограничена в окрестности нуля [85], поэтому для сплошного стержня необходимо исключить слагаемые с этой функцией из выражений (2.31).

Таким образом, функции (2.31) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} P_k(r) &= F_k J_0(\alpha_k r), \\ R_k(r) &= K_k J_1(\beta_k r). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Частные решения для потенциалов с учетом (2.22), (2.28) и (2.32) запишутся в виде

$$\Phi_k = M_k e^{ikz} e^{-i\omega_k t} J_0(\alpha_k r), \quad (2.33)$$

$$\Psi_k = N_k e^{ikz} e^{-i\omega_k t} J_1(\beta_k r), \quad (2.34)$$

где M_i , N_i – постоянные, полученные в результате перемножения постоянных A_i , B_i , C_i , D_i , F_i , K_i .

Частные решения компонент перемещения с учетом (2.8), (2.9), (2.33) и (2.34) определяются по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(r, z, t) &= e^{-i(\omega_k t - kz)} \left(\frac{dJ_0(\alpha_k r)}{dr} M_k - ikJ_1(\beta_k r) N_k \right), \\ \bar{u}_z(r, z, t) &= e^{-i(\omega_k t - kz)} \left(ikJ_0(\alpha_k r) M_k + \left(\frac{dJ_1(\beta_k r)}{dr} + \frac{J_1(\beta_k r)}{r} \right) N_k \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Выражения (2.35) содержат неизвестные постоянные. Для нахождения неизвестных к этим выражениям применяются граничные условия задачи. Это, также, позволяет получить характеристическое уравнение системы. Для получения общего решения необходимо обращаться к начальным условиям.

2.4. Вывод характеристического уравнения

Применим следующие граничные условия для этой задачи: радиальные и касательные напряжения в стержне на свободной цилиндрической границе равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0.\end{aligned}\quad (2.36)$$

В результате подстановки выражений (2.35) в граничные условия (2.36) получаем систему уравнений.

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)\alpha_k^2 J_0'' + \frac{\lambda}{R}\alpha_k J_0' - \lambda k^2 J_0 & -2\mu i k \beta_k J_1' \\ 2\mu i k \alpha_k J_0' & \mu \left[\beta_k^2 J_1'' + \frac{1}{R}\beta_k J_1' + \left(k^2 - \frac{1}{R^2} \right) J_1 \right] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_k \\ N_k \end{vmatrix} = 0. \quad (2.37)$$

Здесь чертами обозначены производные функции по ее аргументу, а запись аргументов при функциях Бесселя для удобства пропущена.

Решение уравнения (2.37) возможно, если определитель системы равен нулю. Приравнявая определитель первой матрицы системы (2.37) к нулю, получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}\left[(\lambda + 2\mu)\alpha_k^2 J_0'' + \frac{\lambda}{R}\alpha_k J_0' - \lambda k^2 J_0 \right] \cdot \left[\beta_k^2 J_1'' + \frac{1}{R}\beta_k J_1' + \left(k^2 - \frac{1}{R^2} \right) J_1 \right] - \\ - 4\mu k^2 \alpha_k \beta_k J_0' J_1' = 0.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Для первого приближения представим функции Бесселя в виде рядов с помощью формулы [85]

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m} \frac{1}{n!(n+m)!}.$$

Возьмем лишь первые два члена этих рядов, т.е.

$$J_0(\alpha_k r) = 1 - \frac{1}{4}(\alpha_k r)^2, \quad J_1(\beta_k r) = \frac{1}{2}(\beta_k r) - \frac{1}{16}(\beta_k r)^3.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (2.38) с учетом (2.27) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ -k^2 \lambda \left[1 - \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{\omega_k^2}{c_1^2} - k^2 \right) \right] - (\lambda + \mu) \left(\frac{\omega_k^2}{c_1^2} - k^2 \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ k^2 \left[1 - \frac{1}{8} R^2 \left(\frac{\omega_k^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right] - \left(\frac{\omega_k^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right\} + \\ & + 2\mu k^2 \left(\frac{\omega_k^2}{c_1^2} - k^2 \right) \left[1 - \frac{3}{8} R^2 \left(\frac{\omega_k^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Уравнение (2.39) представляет собой зависимость частоты ω от волнового числа k . Эта зависимость называется дисперсионным уравнением [11].

Рассмотрим частный случай одномерного цилиндра. Исключим из характеристического уравнения (2.39) слагаемые с R^2 . Таким образом, уравнения (2.39) перепишем в виде

$$\left\{ -k^2 \lambda - (\lambda + \mu) \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \right) \right\} \left\{ k^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \right) \right\} + 2\mu k^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \right) = 0. \quad (2.40)$$

Решая уравнение (2.40) относительно ω , и отбрасывая отрицательный корень, получим

$$\omega = \frac{\sqrt{(\lambda + \mu)(2\lambda c_2^2 + \mu c_1^2)}}{\lambda + \mu} k. \quad (2.41)$$

Найдем из выражения (2.41) скорость волны c . С учетом (2.13) получим

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.42)$$

Соотношение (2.42) показывает, что в частном случае скорость волны равна «стержневой» скорости c_E , что соответствует решению задачи в одномерном случае [11].

Теперь найдем корни уравнения (2.39) с сохранением всех слагаемых при помощи программы MathCAD. При этом будем искать только положительные корни. В результате получим

$$\omega_{1,2} = k \sqrt{\frac{A_4 k^4 + A_5 k^2 - A_6 \pm \sqrt{A_7 k^8 + A_8 k^6 + A_9 k^4 + A_{10} k^2 + A_{11}}}{2\rho(A_1 k^4 + A_2 k^2 - A_3)}}, \quad (2.43)$$

где $A_1 = \lambda R^4$,

$$A_2 = 4(\lambda + 5\mu)R^2,$$

$$A_3 = 32(\lambda + \mu),$$

$$A_4 = \lambda(\lambda + 3\mu)R^4,$$

$$A_5 = 4(2\lambda^2 + 12\lambda\mu + 15\mu^2)R^2,$$

$$A_6 = 32\mu(3\lambda + 2\mu),$$

$$A_7 = \lambda^2(\lambda + \mu)^2 R^8,$$

$$A_8 = 8\lambda[2\lambda^3 + 5\mu^3 + \lambda\mu(8\lambda + 11\mu)]R^6,$$

$$A_9 = 16[4\lambda^4 + 25\mu^4 + \lambda\mu(28\lambda^2 + 52\lambda\mu + 52\mu^2)]R^4,$$

$$A_{10} = 256\mu[2\lambda^3 - 10\mu^3 - \lambda\mu(6\lambda + 23\mu)]R^2,$$

$$A_{11} = 1024\mu^2(3\lambda + 2\mu)^2.$$

Уравнение (2.39) имеет два положительных корня. Если поделить каждый из корней на волновое число k , то получим зависимость скорости волны c от частоты ω . Дальнейшие приближения достаточно сложны для аналитического представления, поэтому последующие моды волны будут показаны только графически.

На рис. 2.1 представлены дисперсионные кривые для алюминиевого цилиндра. График полученной зависимости построен в безразмерных величинах. Для этого по оси ординат отложим отношение скорости волны c к «стержневой» скорости c_E . По оси абсцисс вместо частоты ω отложим отношение радиуса стержня R к длине волны L

$$\frac{R}{L} = \omega \bigg/ \frac{2\pi}{cR}.$$

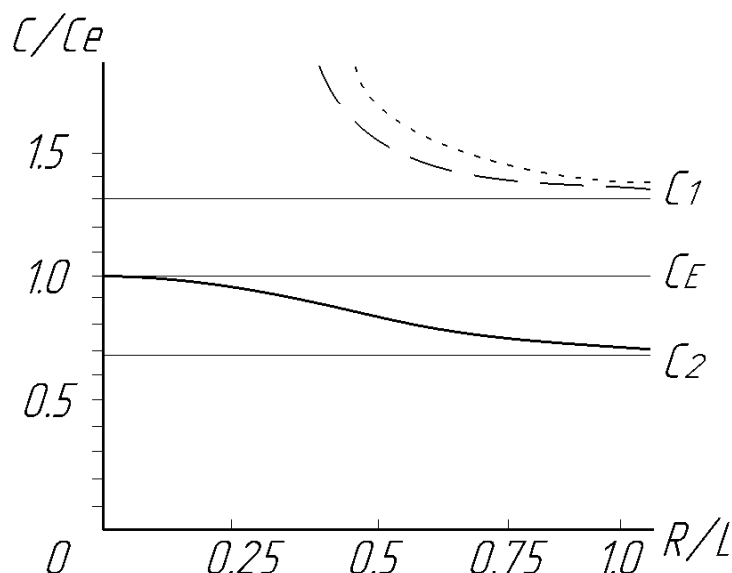


Рис. 2.1. Дисперсионные кривые.

Первая кривая на рис. 1 (сплошная линия) стремится к значению скорости поперечных волн c_2 . Вторая и третья кривые (штриховая линия) существует лишь с некоторого значения относительной длины волны, а затем стремится к значению скорости продольных волн c_1 . Последующие моды показаны точками.

Как видно из графика (рис. 2.1), при стремлении радиуса цилиндра к нулю скорость волны стремится к c_E , что соответствует результатам задачи в одномерной постановке и подтверждает достоверность полученных результатов.

Со значительным увеличением радиуса цилиндра, по сравнению с длиной волны, преобладают значения скоростей, близкие к скоростям продольных и поперечных волн.

2.5. Выводы по главе

1. Приведено характеристическое уравнение для задачи в осесимметричной постановке.

2. Построены дисперсионные кривые для нескольких мод гармонической волны, распространяющейся в полубесконечном цилиндре. В результате анализа кривых показано, что:

- при стремлении радиуса цилиндра к нулю скорость волны соответствует «стержневой» скорости c_E ;

- при радиусе цилиндра, превышающем длину волны, первая мода стремится к скорости поперечных волн c_2 , а последующие – к скорости продольных волн c_1 .

Вышеуказанное свидетельствует о том, что при рассмотрении цилиндра с радиусом соразмерным длине волны некорректно использовать «стержневую» скорость c_E в качестве скорости волны.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ЦИЛИНДРА

Большинство задач механики деформируемого твердого тела решаются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Такие уравнения, в виду сложности их аналитического решения, решают с помощью численных методов.

Визуализация результатов численного решения и их достоверность является важной задачей при анализе того или иного процесса в среде.

Одним из методов численного решения задач является метод конечных элементов. Суть этого метода заключается в том, что расчетная область разбивается на множество областей, которые представляют собой ячейки сетки [78]. В каждом элементе задается функция определенного вида, а значения этой функции в узлах элемента и будет являться решением. Количество элементов в конечно-элементной сетке может быть достаточно большим, поэтому решение таких задач производится с помощью ЭВМ.

В качестве программ для решения задачи об ударе стержня в данной работе были выбраны программные комплексы KRUG24 и AUTODYN.

Целями данной главы являются:

- проведение численных расчетов для задачи о распространении упругой волны в цилиндре при ударе и анализ их результатов;
- изучение влияния геометрических и физических параметров цилиндра на среднюю скорость волны.

3.1. Использование программного комплекса AUTODYN

ANSYS AUTODYN – это инструмент для моделирования сложной нелинейной динамики твердых тел, жидкостей, газов и их взаимодействия [86]. Эти функции позволяют быстро и просто подготовить модель на основе CAD-геометрии, создать сетку, наиболее подходящую для анализа, и выполнить множество расчетов с использованием параметров, основанных на геометрии, деталях, моделях материалов и начальных условиях.

Программа использует различные методы расчета: конечных элементов, конечных разностей и конечных объемов [86].

Этот расчетный комплекс, включает в себя встроенные средства для препроцессинга (подготовки расчетной модели), постпроцессинга (получение данных о результатах расчета) и решатели. Также реализованы средства импорта конечно-элементных моделей из различных систем.

В программе используются базовые схемы описания среды:

- Лагранжева – схема, основанная на материале, дискретные части движутся вместе с материалом.
- Эйлера – схема, основанная на пространстве, дискретные части остаются неподвижными в пространстве и материал движется через них.

Постановка задачи происходит в несколько этапов: выбор материала и схемы описания среды, задание начальных и граничных условий, создание геометрии тел, указание параметров сохранения.

Задачу о продольном ударе будем решать в двумерной осесимметричной постановке. В качестве материала выбираем алюминий. Создавать геометрию для расчета будем в системе Эйлера, т.е. конечно-элементная сетка создается в неподвижном пространстве, а материал может двигаться через сетку. Плотность сетки назначим в размере 2 элемента на 1 миллиметр.

На рис. 3.1 показана созданная геометрия.

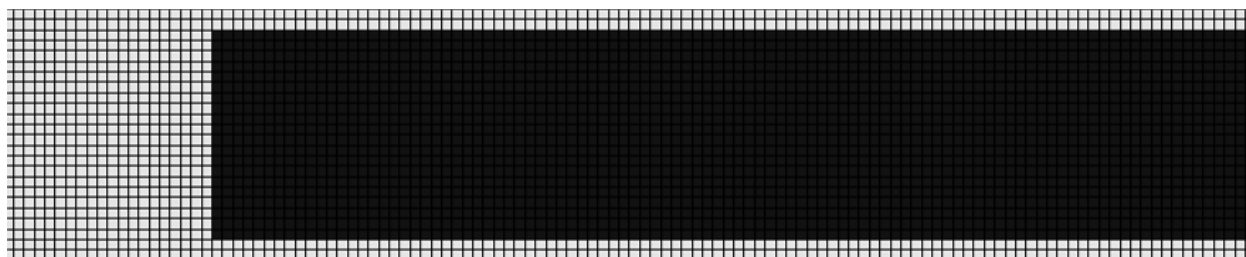


Рис. 3.1. Границы цилиндра в AUTODYN.

Вначале создается область вакуума (сетка на белом фоне), затем внутри нее создается геометрия самого цилиндра (сетка на темном фоне). В такой постановке программа воспринимает границы вакуума, как абсолютно жесткую границу. Таким образом, данная задача соответствует задаче об ударе цилиндра с преградой. На материал цилиндра накладывается начальное условие: начальная скорость цилиндра равна 5 м/с. Длина цилиндра равна 50 мм, а его радиус – 5 мм.

В общем виде уравнение состояния в программе представляет гидростатическое давление, как функцию от удельных объема и энергии [86]. В зависимости от используемой модели уравнение может принимать различный вид. В данной задаче используется линейное уравнение состояния, которое описывает упругие деформации с помощью закона Гука. При этом эта модель используется только для малых деформаций.

Численная методика расчета основана на методе Уилкинсона [87]. На ее основе построены прочностные модели в программе. В данном расчете используется упругая модель прочности среды. Модель описывается уравнениями движения (2.1), законом Гука (2.2) и связью деформаций и перемещений (2.3). При данных выбранных условиях численный расчет производится методом конечных разностей.

После проведения расчета в программе существует возможность отследить изменение большого числа показателей в процессе удара.

На рис. 3.2 представлена зависимость напряжения вдоль оси цилиндра от его длины в момент времени 5 мкс.

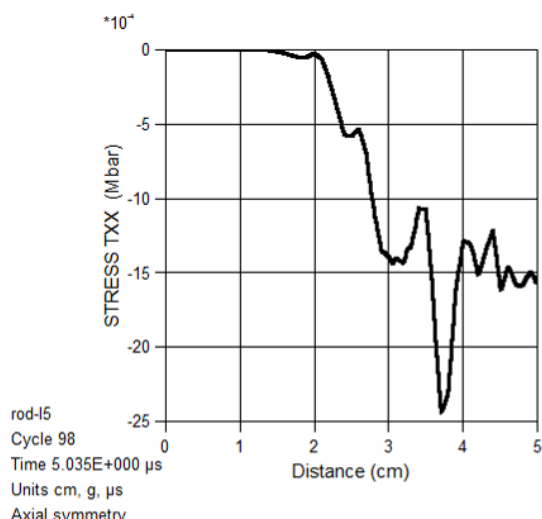


Рис. 3.2. Напряжения в цилиндре (5 мкс).

После удара правого торца цилиндра с преградой волна напряжения сжатия распространяется влево вдоль цилиндра. В части цилиндра, куда поверхность разрыва волны еще не распространилась, напряжения равны нулю.

На рис. 3.3 показана та же зависимость, но в момент времени 20 мкс.

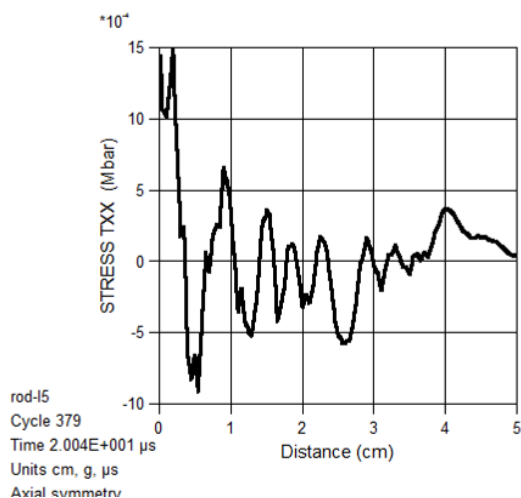


Рис. 3.3. Напряжения в цилиндре (20 мкс).

В данный момент времени напряжения на правом торце цилиндра становятся близки к нулю, что свидетельствует о прекращении контакта цилиндра с преградой. Если принять за время контакта 20 мкс, то средняя скорость волны равна 5 км/с, что приблизительно соответствует скорости звука в алюминии.

3.2. Использование программного комплекса KRUG24

Комплекс KRUG24 предназначен для численного решения двумерных плоских и осесимметричных задач высокоскоростного взаимодействия системы деформируемых тел с учетом разрушения. KRUG24 разработан А. И. Гулидовым в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Российской Академии наук.

Программный комплекс позволяет:

- проводить расчеты высокоскоростного взаимодействия системы тел с учетом разрушения;
- записывать промежуточные данные на запоминающие устройства для дальнейшей обработки или продолжения счета;
- выводить текущую информацию на дисплей персонального компьютера.

Используемая математическая модель комплекса KRUG24 основана на определенных уравнениях [18].

1. Уравнение траектории материальных частиц:

$$\dot{x}_i = U_i, \quad (3.1)$$

где U_i – скорость материальной частицы.

2. Уравнение неразрывности среды:

$$V_0 \rho_0 = V \rho, \quad (3.2)$$

где V – объем тела, ρ – плотность тела.

3. Закон изменения импульса материальной частицы:

$$\rho \dot{U}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (3.3)$$

Тензор напряжений представлен в виде

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} P + s_{ij}, \quad (3.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, P – давление, s_{ij} – девиатор тензора напряжений.

В расчетах используется условие пластичности Губера-Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} \leq 2Y_0^2/3, \quad (3.5)$$

где Y_0 – динамический предел текучести. В данной задаче рассматривается только малая упругая деформация.

В программе используется схема Уилкинса [87] для описания упруго-пластического деформирования. Численное решение задачи использует конечно-разностный метод Неймана-Рихтмайера, в котором для устойчивости расчета волн сжатия используется искусственная вязкость, которая добавляется к давлению. При моделировании ударного взаимодействия искусственная вязкость вводится только на фронте волны сжатия [18].

При численном решении системы уравнений механики деформируемого твердого тела в счетной области задается конечное множество узлов. Область покрывается ячейками сетки, не налегающими друг на друга и заполняющими счетную область без зазоров. Вершины ячеек являются узлами сетки [18].

Компоненты векторов скорости и координат определяются в узлах сетки, а плотность, искусственная вязкость, внутренняя энергия, компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций относятся к геометрическим центрам ячеек и считаются постоянными в пределах ячейки. Для каждого узла сетки назначается разностная схема, которая позволяет перейти от дифференциальных уравнений с краевыми условиями к системе алгебраических уравнений [18]. Далее такая система уравнений решается уже численно.

Для обеспечения условия упругости в программе задается завышенный предел текучести. Дополнительным условием является невысокое значение начальной скорости удара цилиндра для предотвращения появления пластических деформаций.

Для начала расчета необходимо задать все условия задачи во входном файле данных. Все входные данные разделяются на текстовые и числовые. Текстовые в свою очередь делятся на строки-комментарии, которые служат для разделения групп чисел и при вводе пропускаются, и текстовые строки, которые служат для идентификации варианта расчета и выводятся в выходной файл.

Все данные разделены на три части по количеству подпрограмм, в которых производится ввод. В первой части находятся параметры записи информации в

файл. Во второй части задается информация о границах, параметрах материала, шаге расчета по времени, параметры контакта тел, плотность и тип сетки, геометрия тела и начальные условия и другая вспомогательная информация. Третья часть связана с параметрами графического вывода результатов расчета на экран.

В результате расчета создается файл выходных данных с информацией в текстовом виде.

Все выходные данные комплекса KRUG24 можно разделить на два типа. Первый тип - это то, что выводится в файл в процессе счета, и второй тип данных - это то, что записывается на запоминающее устройство.

Дальнейшая информация, получаемая в процессе расчета, делится на несколько частей. Наибольшее число данных выводится при печати насчитываемых на разностной сетке величин, таких как, момент времени, координаты узлов, значения напряжений, энергии, скорости точки, и т. д.

В комплексе KRUG24 во входном файле данных задаются геометрия цилиндра, плотность конечно-элементной сетки и начальные условия задачи. Значения этих параметров берутся такие же, как и в задаче, решаемой в AUTODYN.

В результате работы программы в реальном времени отображаются распределения скоростей или напряжений в цилиндре (рис. 3.4).



Рис.3.4. Напряжения в стержне (KRUG24).

По завершению работы программа формирует несколько файлов с выходными данными такими, как время контакта, силы на контакте, энергия и напряжения в цилиндре.

В результате решения этой задачи время контакта равно 19,786 мкс, что соответствует скорости звука равной 5,05 км/с. Более наглядно время контакта можно увидеть на графике зависимости силы в месте контакта от времени (рис. 3.5).

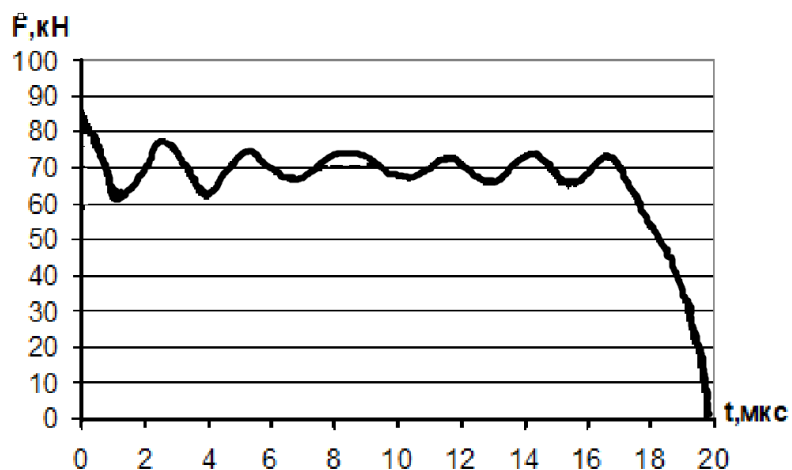


Рис. 3.5. Силы на контакте цилиндра с преградой.

Таким образом, можно сравнить (таблица 3.1) скорости, вычисленные по результатам обеих программ со скоростью звука, приведенную в справочнике [89].

Таблица 3.1 Сравнение скорости звука.

Источник	ANSYS	KRUG24	Справочник
Скорость звука, км/с	5,00	5,05	5,08

Погрешность вычисления скорости не превышает 2%. Отсюда можно сделать вывод о достаточной достоверности и согласованности результатов задачи, решенной в обеих программах.

3.3. Параметры численного расчета и постановка задачи о столкновении цилиндра с преградой

Рассмотрим задачу о соосном соударении двух одинаковых цилиндров. При симметричном соударении таких цилиндров плоскость контакта можно рассматривать как жесткую преграду, и задача соударения становится эквивалентна задаче удара цилиндра длиной L и радиусом R по жесткой преграде со скоростью V_0 . Координата z отсчитывается от преграды вдоль оси цилиндра в противоположном движению стержня направлении. Материал цилиндра принимается абсолютно упругим.

При ударе цилиндра по жесткой преграде в начальный момент времени все точки торца цилиндра приходят в соприкосновение с преградой и остаются с ней в контакте некоторое время, после чего все сразу или по частям отделяются от преграды. В качестве времени контакта выбирается время от начала контакта до момента времени, когда все точки торца цилиндра отойдут от преграды [90].

Стоит рассмотреть такое понятие как поверхность разрыва. В случае распространения волн в неограниченной среде фронт волны представляет собой определенную поверхность, например плоскость или сферу. Если же рассматривать трехмерный случай распространения волны в цилиндре, то фронт не имеет постоянную форму поверхности. Это связано как с затуханием продольной волны, так и с влиянием на нее поперечных волн в радиальном направлении.

Будем считать, что существует такая поверхность S , что в момент времени t среда по одну сторону от S невозмущена, а по другую сторону имеют место перемещения или напряжения по всем осям координат. Таким образом, поверхность S является поверхностью разрыва. Пусть скорость движения этой поверхности направлена с возмущенной части среды к невозмущенной.

Здесь и далее условимся называть эту поверхность фронтом волны.

В одномерном случае скорость волны равна c_E . Тогда время контакта t_K равно

$$t_K = \frac{2L}{c_E}. \quad (3.1)$$

В общем случае в цилиндре, как твердом теле, распространяются несколько типов волн с разными скоростями. На основании формулы (3.1) предположим, что по стержню распространяется волна с некоторой неизвестной средней скоростью c такой что, после ее прохождения двух длин стержня за время t_K происходит отскок стержня. Таким образом, среднюю скорость волны будем искать по формуле [90]:

$$c = \frac{2L}{t_K}, \quad (3.2)$$

а время контакта определим из решения осесимметричной задачи численно.

В этой главе будет использоваться алюминиевый стержень длиной 50 мм и радиусом 5 мм. Скорость удара будем принимать равной 5 м/с.

Выбор конечно-элементной сетки.

При численном решении задачи необходимо определить размер ячейки сетки или ее плотность. С одной стороны сетка должна обеспечивать корректность результатов решения, с другой стороны – не перегружать ресурсы ЭВМ для успешного завершения расчетов.

Выясним, как плотность сетки влияет на результат.

На рис. 3.5 представлен график зависимости средней скорости волны, определенной по формуле (3.2) от плотности сетки.

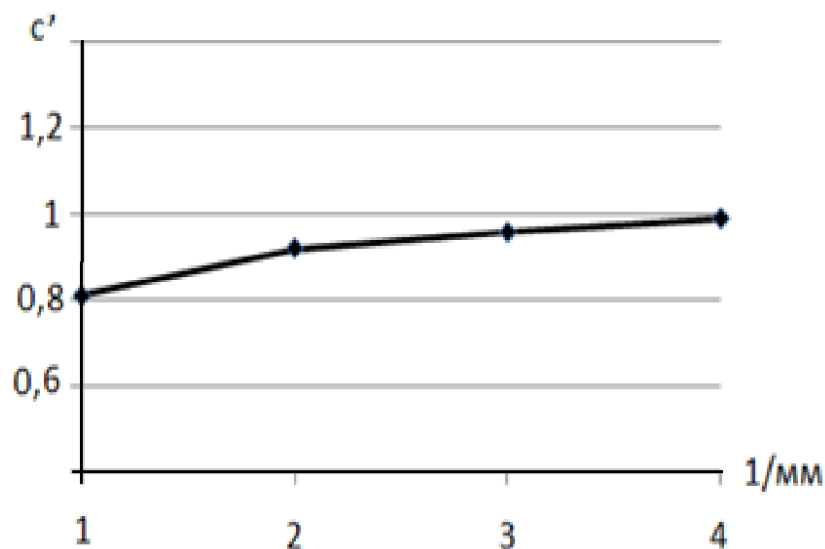


Рис. 3.5. Влияние плотности расчетной сетки на среднюю скорость волны.

Погрешность результатов на сетках разной плотности составляет 0,3%. Для дальнейших расчетов выбираем сетку с плотностью 2 элемента на 1 мм. Такая сетка обеспечит и достоверность результатов, и достаточную скорость расчета на ЭВМ.

3.4. Определение параметров цилиндра, влияющих на среднюю скорость волны

В задаче использовались следующие константы для материалов:

Материал	$\rho, 10^3$ кг/м ³	$K,$ ГПа	$\mu,$ ГПа	$\lambda,$ ГПа	ν	$c_E, 10^3$ м/с	$c_1, 10^3$ м/с	$c_2, 10^3$ м/с
Алюминий	3.7	69	27	51	0.33	5.14	6.23	3.16
Железо	7.884	170	80	117	0.29	5.13	5.92	3.19
Медь	8.9	137	48	105	0.34	3.8	4.75	3.32
Свинец	11.3	14	7	9	0.28	1.26	1.44	0.79
Титан	4.5	139	41	112	0.36	4.99	6.56	3.02
Вольфрам	19.35	233	140	139	0.25	4.25	4.66	3.69

Здесь ρ - плотность, K - объемный модуль упругости, μ - модуль сдвига, λ - постоянная Ламэ, ν - коэффициент Пуассона, c_E - скорость звука в стержне, c_1 - скорость продольных волн, c_2 - скорость поперечных волн.

Рассмотрим удар однородного цилиндра диаметром $D=10^{-2}$ м и калибрами $L/D=0,1...10$ об абсолютно жесткую преграду.

На рисунке 3.7 приведены графики зависимости относительной скорости волны c' от калибра для однородных цилиндров из алюминия (а) и вольфрама (б). Здесь и далее, относительной скоростью c' , будет называться отношение средней скорости волны c , вычисляемой по формуле (3.2), к скорости звука c_E .

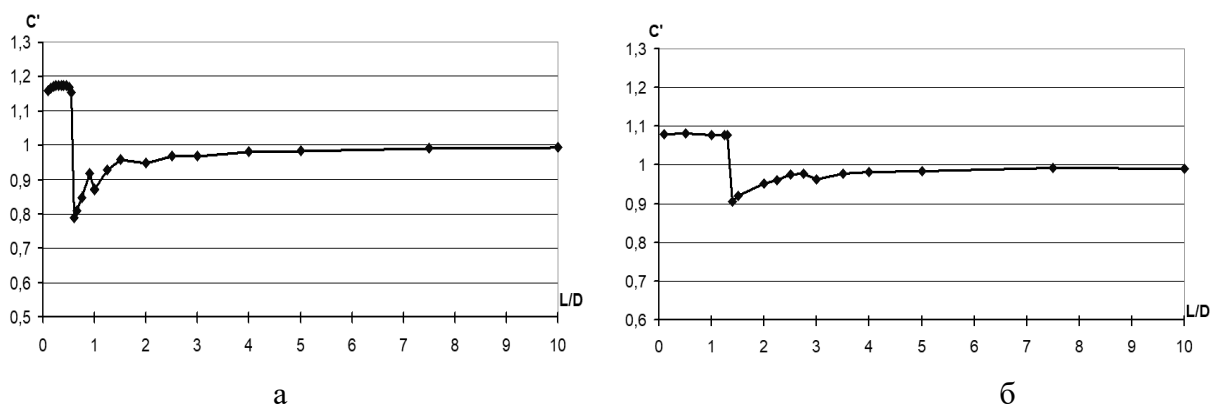


Рис. 3.7. Зависимость относительной скорости волны от калибра цилиндра:
а – алюминий, б – вольфрам.

Из графиков, представленных на рис. 3.7, следует, что:

- при малых значениях калибра цилиндра ($L/D < 1$) средняя скорость распространения волны близка к скорости продольных волн c_1 . Это объясняется тем, что более медленные поперечные волны, зарождающиеся у свободной цилиндрической границы, не успевают повлиять на продольную волну, путь распространения которой мал, по сравнению с радиусом цилиндра;
- средняя скорость волны стремится к «стержневой» скорости c_E при увеличении калибра (уже начиная с размера цилиндра в три калибра, различие между средней скоростью волны и стержневой скоростью составляет не более 3%);
- существует такое значение калибра (0,5 – 1,5), при котором средняя скорость минимальна. Это происходит в связи с большим влиянием поперечных колебаний на продольную волну, что приводит к значительному снижению средней скорости.

При построении графиков (рис. 3.7) за время контакта бралось время первого отскока цилиндра от преграды. Для некоторых размеров цилиндра наблюдались повторные касания цилиндра с преградой, т.е. после отскока цилиндра часть его точек входила в контакт с преградой. Наличие повторных отскоков приводит к неоднозначности определения средней скорости волны по времени контакта.

Так на рис. 3.8 представлен график зависимости относительной скорости волны c' от калибра алюминиевого цилиндра. Сплошной линией показана средняя скорость, вычисленная по времени первого отскока, штрихпунктирной – средняя скорость, вычисленная по времени последнего отскока, штриховой – средняя скорость, вычисленная по времени нахождения в контакте за вычетом времени нахождения точек вне контакта. Из рис. 3.8 следует, что повторные отскоки происходят в цилиндрах размером, близким к калибру, при котором наблюдается минимум средней скорости волны.

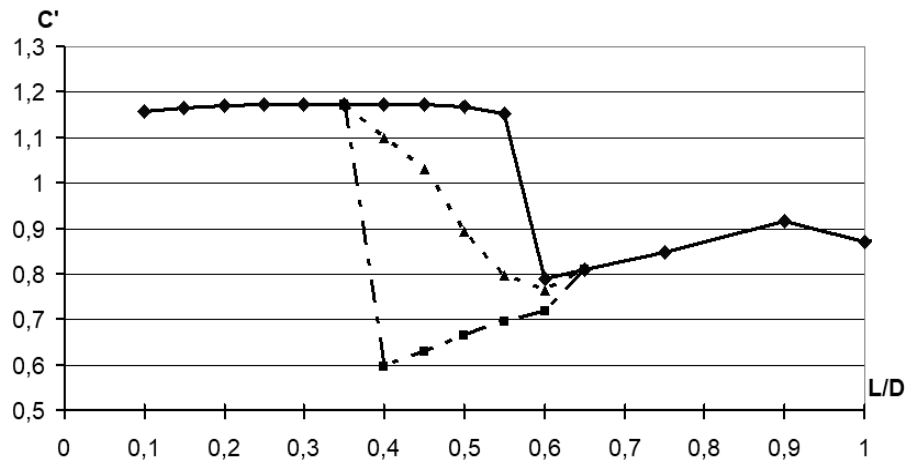


Рис. 3.8. Зависимость относительной скорости волны от калибра цилиндра.

Рассмотрим влияние повторного отскока на изменение сил на контакте цилиндра с преградой.

На рис. 3.9 представлено изменение сил на контакте алюминиевого цилиндра со временем, полученное из численного эксперимента. Для длинных цилиндров (рис. 3.9 а) после удара о преграду значение силы на контакте начинает колебаться. Период этих колебаний приблизительно равен времени прохождения поперечной волны со скоростью c_2 от свободной цилиндрической поверхности до центра цилиндра. Наличие поперечных колебаний обусловлено наличием свободной боковой поверхности. В момент, когда сила становится равной нулю, цилиндр отскакивает от преграды.

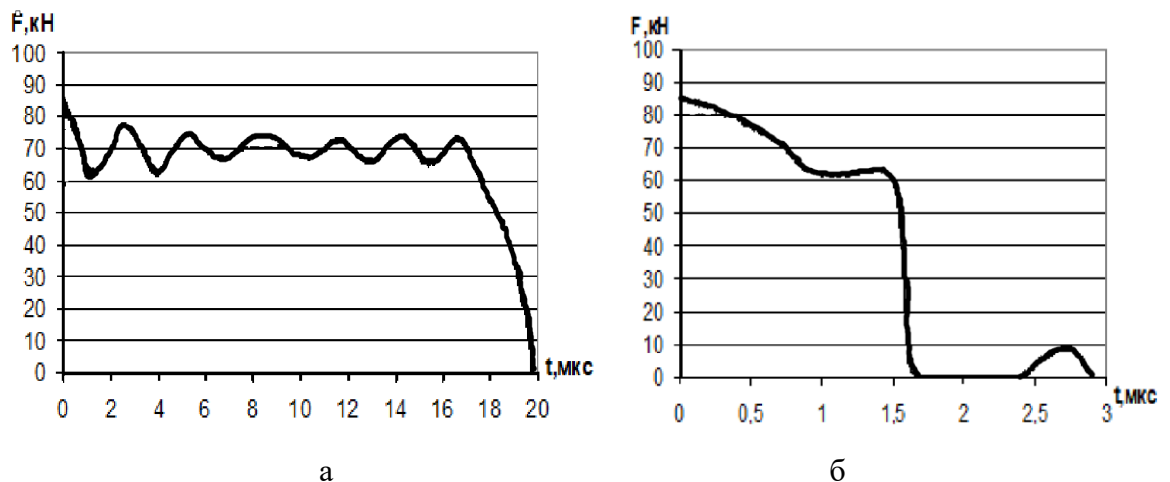


Рис. 3.9. Сила на контакте цилиндра с преградой:

а – длинный цилиндр, б – короткий цилиндр.

В коротких цилиндрах (рис. 3.9 б) понижение силы на контакте до нуля так же приводит к выходу всех точек торца цилиндра из контакта с преградой, но затем

часть этих точек снова касается преграды на определенный промежуток времени и сила на контакте становится отличной от нуля до момента окончательного отскока. Явление повторного отскока ранее наблюдалось лишь в цилиндрах, состоящих из нескольких материалов [18].

Для анализа причин повторного касания цилиндра с преградой рассмотрим баланс энергии в процессе распространения волны на примере алюминиевого цилиндра.

На рис. 3.10 изображен график зависимости относительных значений энергии от времени. На рисунках сплошной линией показан график для потенциальной энергии, штрихпунктирной – для полной кинетической энергии. Значения вышеупомянутых энергий взяты отнесенными к значению полной энергии ξ_0 , равной начальной кинетической энергии цилиндра. На графиках вертикальные линии показывают время выхода из контакта всех точек цилиндра.

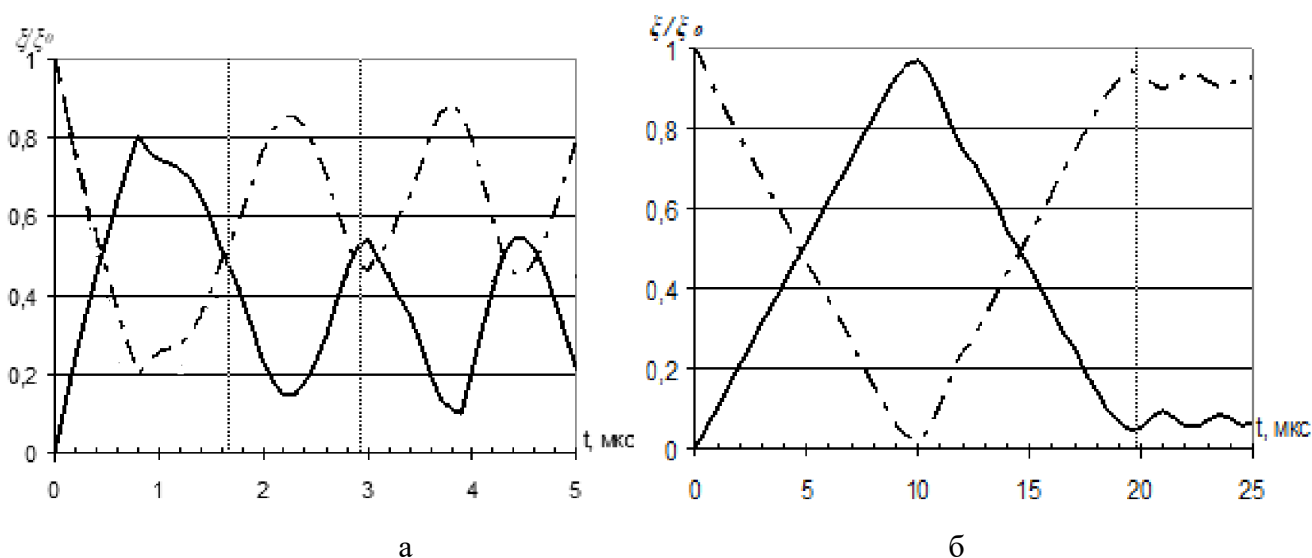


Рис. 3.10. Зависимость относительных значений энергии от времени:

а – короткий цилиндр, б – длинный цилиндр.

На рис. 3.10а, соответствующим цилиндру размером 0,5 калибра левая вертикальная линия показывает время первого отскока, а правая – время последнего отскока. В таком цилиндре после момента соприкосновения с преградой начинает возрастать потенциальная энергия, и уменьшаться кинетическая. Потенциальная и кинетическая энергии достигают своих максимального и минимального значений, соответственно, в момент прихода волны к верхнему торцу цилиндра. Первый от-

скок происходит после возврата волны к нижнему торцу цилиндра. В этот момент кинетическая энергия еще мала по сравнению с начальным значением, вследствие чего, центр масс цилиндра после отскока движется со скоростью меньшей, чем скорость удара. Колебание кинетической энергии после отскока при малом изменении ее продольной составляющей свидетельствует о значительных поперечных колебаниях. Потенциальная энергия волны напряжения сжатия в момент отскока еще остается в цилиндре. Скорость отскока меньше скорости удара, а скорость возврата цилиндра к начальному размеру после сжатия велика. Это приводит к повторному касанию с преградой вследствие продолжающегося растяжения цилиндра.

На рис. 3.10б изображен график для цилиндра размером 5 калибров. До отскока цилиндра энергия изменяется по тому же закону, что и для коротких цилиндров. Но к моменту прихода волны к нижнему торцу потенциальная энергия волны растяжения практически полностью переходит в кинетическую энергию отскока, и незначительная доля оставшейся потенциальной энергии не приводит к повторному контакту цилиндра с преградой.

На рис. 3.11 представлены зависимости скорости центра масс цилиндра (короткого 0,5 калибра рис. 3.11а и длинного – 3.11б) от времени. Короткий цилиндр теряет почти 40% скорости при отскоке, вследствие упомянутого выше малого значения кинетической энергии. Длинный цилиндр отскакивает практически со скоростью удара.

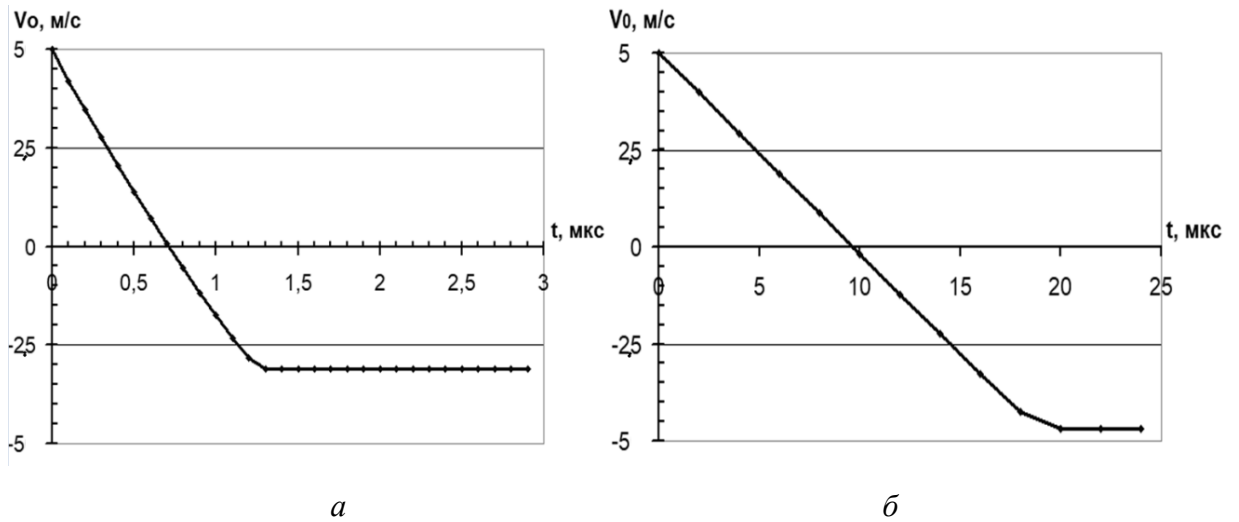


Рис. 3.11. Зависимость скорости центра масс цилиндра от времени:

а – короткий цилиндр, б – длинный цилиндр.

Будем далее во всех расчетах принимать за время контакта время первого отскока цилиндра от преграды.

Калибр стержня, при котором наблюдается минимум средней скорости (вычисленной по первому отскоку), разный для каждого из материалов. Для оценки положения минимума средней скорости воспользуемся отношением поперечной и продольной скоростей c_2/c_1 , значение которого является постоянной величиной для материала.

На рис. 3.12 построена зависимость значения калибра $K_{\min}$, при котором средняя скорость волны достигает минимума от отношения c_2/c_1 .

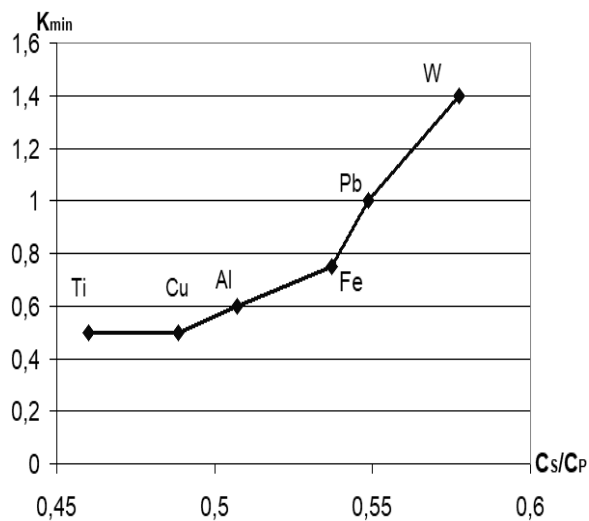


Рис. 3.12 Положение минимума средней скорости волны

Из графика следует, что калибр цилиндра, при котором наблюдается минимум скорости волны, тем больше, чем выше значение c_2/c_1 для материала цилиндра.

Результаты численного решения показали, что длина цилиндра влияет на время контакта его с преградой и, соответственно, на среднюю скорость волны. При небольших длинах цилиндра не только уменьшается средняя скорость волны, но и возникает повторный отскок цилиндра от преграды.

3.5. Выводы по главе

1. При ударе коротких ($L < D$) однородных цилиндров возникает явления повторного отскока от преграды. Длина цилиндра, при котором возникает повторный отскок, зависит от материала цилиндра.
2. При малых значениях калибра цилиндра ($L/D < 1$) средняя скорость распространения волны близка к скорости продольных волн c_1 за счет того, что поперечные волны не успевают повлиять на продольную волну.
3. Средняя скорость волны стремится к стержневой скорости c_E уже при $L = 3D$.
4. Существует такое значение калибра ($L/D = 0.5 \dots 1.5$), при котором средняя скорость минимальна. Это объясняется большим влиянием поперечных колебаний на продольную волну.
5. Калибр цилиндра, при котором наблюдается минимум средней скорости, разный для каждого из материалов. Он зависит от значения c_2/c_1 для материала цилиндра.

ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРЕ

Изделия промышленности характеризуются большим разнообразием конструктивных форм. Вне зависимости от типа изделия необходимо разрабатывать методики контроля. Довольно распространенными способами контроля являются неразрушающие методы контроля. Эти методы обеспечивают высокую скорость контроля, достоверность результатов и являются сравнительно дешевыми.

Акустические методы основаны на регистрации параметров упругих колебаний, возникающих в контролируемых объектах. Они позволяют обнаруживать внутренние и поверхностные дефекты. Одним из методов является ультразвуковая дефектоскопия [1].

Регистрируя время прихода волны к приемнику дефектоскопа, можно определять скорость этой волны. Таким образом, эксперимент будет служить подтверждением ранее полученных результатов.

Целью главы является постановка эксперимента с использованием ультразвукового дефектоскопа и определение скорости распространения упругой волны в цилиндрах различной длины.

4.1. Типы ультразвукового контроля

Упругая волна в любом материале представляет собой распространяющиеся механические возмущения. Основным свойством упругой волны является то, что волны переносят энергию без переноса вещества. Наиболее важным параметром волны для контроля является фазовая скорость фронта волны. Под фронтом будем понимать геометрическое место точек, в которых фаза волны имеет одинаковое значение для определенного промежутка времени.

В ультразвуковой дефектоскопии используют колебания от 0,5 до 10 МГц. Для создания колебаний применяют пьезоэлектрические преобразователи. При подведении к электродам переменного напряжения пьезоэлемент совершает вынужденные механические колебания. Также используется и обратный эффект, когда при воздействии упругих колебаний на элемент возникает напряжение на его электродах.

Рассмотрим звуковое поле дискового излучателя. Вблизи излучателя создается звуковое поле цилиндрической формы [1]. На некотором расстоянии поле приобретает форму усеченного конуса (рис. 4.1).

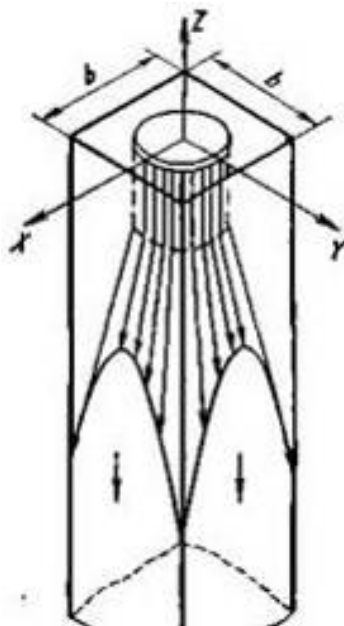


Рис. 4.1. Схема звукового поля от излучателя.

Наличие внешних границ приводит к касанию звукового поля и дополнительному отражению волны от этих границ. Частично избежать нежелательных отра-

жений можно за счет увеличения размера излучателя, чтобы его диаметр перекрывал сечение стержня.

Из методов акустического контроля, интересных с точки зрения отслеживания средней скорости упругой волны стоит выделить [92]:

1. Эхо-метод, при котором преобразователь генерирует колебания, а также принимает отраженные от дефекта эхо-сигналы. Таким образом, преобразователь является и генератором и приемником колебаний. К недостаткам метода стоит отнести низкую помехоустойчивость. Помехи может создавать усилитель прибора и шумы преобразователя, работающего по совмещенной схеме. На рис. 4.2 показана схема эхо-метода при отсутствии и наличии дефекта.

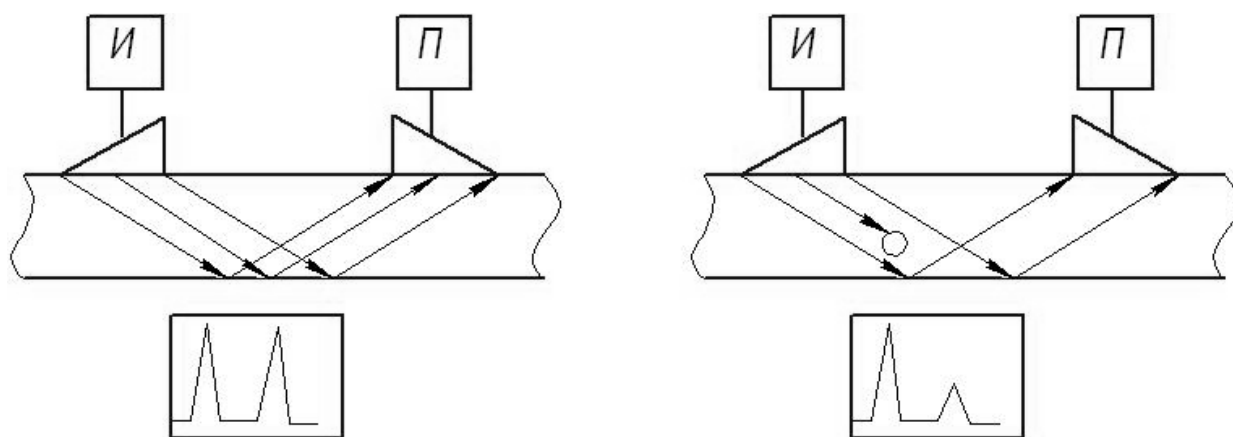


Рис. 4.2. Схема эхо-метода:

а – без дефекта, б – с наличием дефекта.

2. Теневой метод, при котором используются два преобразователя с двух сторон детали на одной акустической оси. Если в детали дефекты отсутствуют, то ультразвуковая волна движется прямолинейно, пока не достигнет противоположной стороны изделия. О наличии дефекта в этом случае свидетельствует ослабление или исчезновение сигнала на приемнике. Метод является помехоустойчивым и не предъявляет высоких требований к качеству поверхности. К недостаткам метода принято относить необходимость двустороннего доступа к изделию и невозможность замера глубины дефекта. В случае измерения скорости волны, распространяющейся вдоль стержня, этот недостаток неактуален. На рис. 4.3 показана схема теневого метода при отсутствии и наличии дефекта.

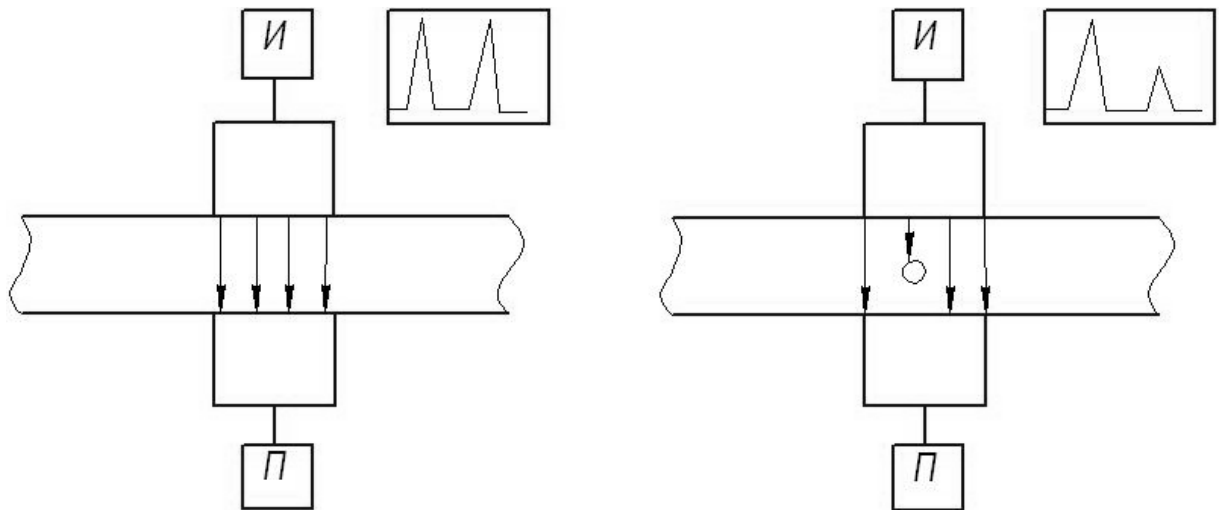


Рис. 4.3. Схема теневого метода:

а – без дефекта, б – с наличием дефекта.

Наиболее подходящим методом для измерения скорости волны в стержне является теневой метод [93]. При использовании этого метода путь ультразвукового импульса от источника до приемника короче, чем в эхо-методе. Это позволит получить более точные результаты.

4.2. Оборудование ультразвукового контроля и результаты исследования

Для проведения эксперимента применялся ультразвуковой дефектоскоп УД4-Т [94]. Прибор предназначен для неразрушающего контроля материалов, изделий, сварных соединений на наличие дефектов типа нарушение сплошности, определения координат дефектов, измерения времени распространения ультразвуковых колебаний в различных материалах. Дефектоскоп является средством измерения по ГОСТ 12997-84 «Изделия ГСП. Общие технические условия» и соответствует техническим условиям РТ МД 17-37084240-007:2004.

В его комплект входят различные по диаметру и частоте преобразователи. Дефектоскоп позволяет применять как эхо-метод, так и теневой. Прибор имеет такие особенности, как видимость расположения дефекта в толще металла или сварном соединении, прямое измерение эквивалентной площади дефекта, оценка его конфигурации и размеров, возможность измерения акустических свойств материалов без использования дополнительного оборудования. При выводе результатов на дисплей прибор позволяет делать "заморозку" изображения и представлять сигнал в виде огибающей.

Дефектоскоп имеет следующие технические характеристики [94]:

1. Диапазон рабочих частот – 0,4...10МГц;
2. Диапазон измеряемых глубин – 0,5...245 мм;
3. Погрешность измерения координат дефекта – не более 0,1мм;
4. Погрешность временных интервалов – 0,025 мкс.

На рис. 4.4 показана схема ультразвукового дефектоскопа. На рис. 4.5 изображена фронтальная панель прибора.

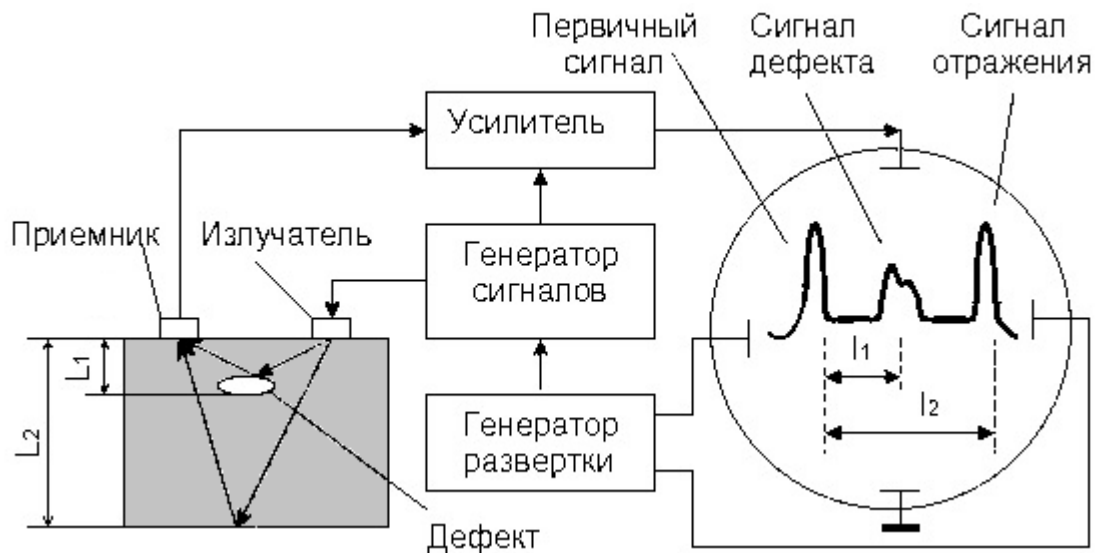


Рис. 4.4. Схема ультразвукового дефектоскопа



Рис. 4.5. Фронтальная панель ультразвукового дефектоскопа

В качестве образцов для эксперимента были выбраны прутки 8 мм из стали, дюралюминия и меди, из которых были изготовлены цилиндры длиной 2, 20 и 40 мм.

Исследование цилиндров ультразвуковым дефектоскопом проводилось с пьезоэлектрическими преобразователем, работающим с частотой 2,5 МГц, в качестве источника колебаний на одном из торцов цилиндра. Второй преобразователь, размещенный на противоположном торце, выполнял функцию приемника сигналов [95]. Схема эксперимента показана на рис. 4.6.

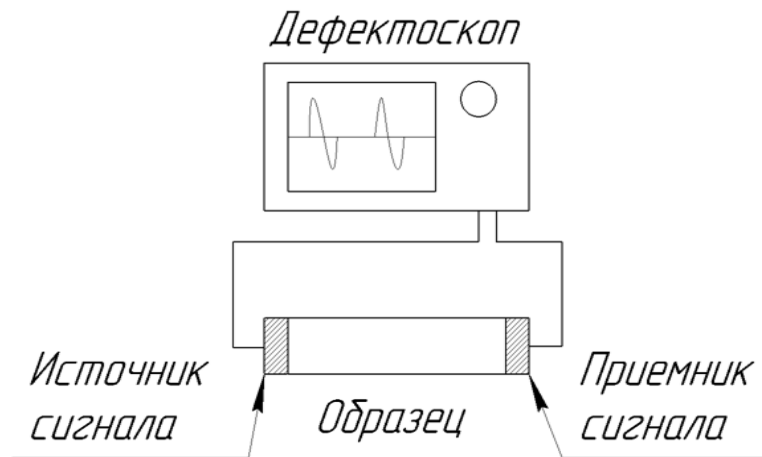


Рис. 4.6. Схема эксперимента

На рис. 4.7 представлено изображение эксперимента.



Рис. 4.7. Изображение эксперимента

После прохождения сигнала от источника к приемнику прибор выдает на дисплей время прихода волны к приемнику. Помимо этого, есть возможность увидеть осциллограмму сигнала или его огибающую (рис. 4.8).



Рис. 4.8. Дисплей ультразвукового дефектоскопа

Зная длительность прохождения волны и длину цилиндра, можно вычислить среднюю скорость распространения сигнала.

В таблице 4.1 представлены результаты исследования дефектоскопом.

Таблица 4.1. Результаты ультразвукового исследования

Материал	Длина цилиндра, мм	Длительность сигнала, мкс	Средняя скорость волны, м/с
Сталь	2	0,39	5160
	20	3,85	5194
	40	7,82	5114
Медь	2	0,48	4200
	20	5,22	3830
	40	10,33	3872
Алюминий	2	0,36	5500
	20	3,84	5209
	40	7,73	5173

Цилиндры длиной 40 мм являются проверочными. Как было показано ранее, в длинных цилиндрах волна распространяется со скоростью звука. Средняя ско-

рость, вычисленная по данным эксперимента, мало отличается от скорости звука, что свидетельствует о достоверности результатов.

Исследование цилиндров длиной 20 мм дает схожие результаты по величине скорости волны. Отсюда можно сделать вывод, что в цилиндрах размером 2...3 калибра свободные цилиндрические границы не оказывают сильное влияние на процесс распространения волны.

Вычисления скорости сигнала в коротких цилиндрах длиной 2 мм показали, что в некоторых материалах наблюдается повышение скорости распространяющейся волны относительно значения скорости звука. На отличие в величинах скоростей может влиять свободная цилиндрическая граница. А повышение скорости может свидетельствовать о снижении влияния границ короткого цилиндра на процесс распространения в нем волны.

Сравним полученные результаты со средними скоростями, определенными численным способом. На рис. 4.9 показано сравнение скоростей для трех материалов цилиндров.

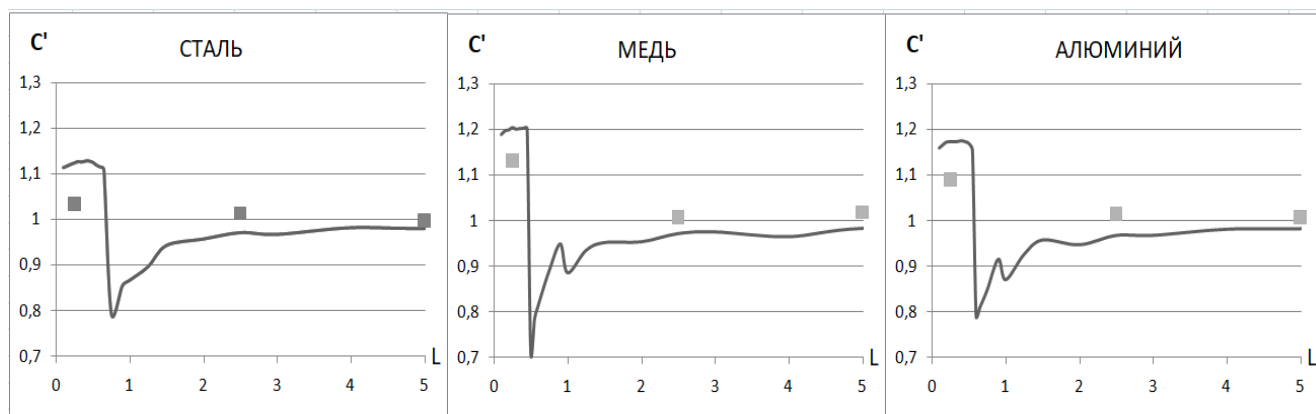


Рис. 4.9. Зависимость скорости волны от длины цилиндра, определенная из эксперимента и численно.

На графиках (рис. 4.9) по оси абсцисс отложена длина цилиндра, по оси ординат – скорость волны. Сплошной линией показан результат численного решения, точками – результат ультразвукового исследования. Видно, что при численном решении также наблюдается повышение скорости распространения волны на малых длинах цилиндра. Погрешность экспериментальных данных по сравнению с

численными результатами не превышает 12% для коротких цилиндров и 4% – для длинных цилиндров.

Для качественного анализа этого явления необходимо проанализировать распределение полей напряжений в цилиндре в каждый момент времени.

4.3. Анализ процесса распространения упругой волны в цилиндре

Рассмотрим процесс распространения возмущений в цилиндре в результате удара. Для этого проведем визуализацию распределения напряжений в цилиндре в определенные моменты времени. Значения напряжений будем брать из выходного файла после решения задачи в комплексе KRUG24. В связи с большим объемом выходных текстовых данных необходимо автоматизировать визуализацию получаемой информации.

Программа для визуализации результатов расчета программы KRUG24 написана на языке программирования AutoLISP. Для более удобного процесса визуализации была использована система автоматизированного проектирования AutoCAD. Эта система позволяет создавать поверхности из полигональных ячеек, а язык программирования AutoLISP уже изначально в нее встроен.

Программа состоит из нескольких подпрограмм. В первой подпрограмме реализуется открытие файла данных со значениями напряжений в узлах решетки стержня, который был получен из программы KRUG24. После прочтения файла формируются списки координат для каждой из трех точек треугольной ячейки.

При этом в программе считается, что ось x направлена вдоль цилиндра, ось y – в радиальном направлении. Вдоль оси z откладываются значения напряжений.

Во второй подпрограмме из полученных списков координат строятся треугольные грани, из которых формируется изображение поля напряжений в цилиндре.

В цикле основной подпрограммы создаются полигоны в AutoCAD для каждой ячейки, происходит экспорт полученного изображения в .wmf файлы.

В результате визуализации получается набор файлов с изображением распределения напряжений в разные моменты времени после удара.

Для более детального изучения распространения волны в цилиндре, проанализируем волну в процессе ее распространения вдоль длинного цилиндра.

Остановимся на задаче об ударе цилиндра длиной 5 см. На его примере рассмотрим поведение фронта волны по средствам визуализации напряжений в цилиндре в каждый момент времени.

На последующих рисунках изображен результат визуализации программой AutoLISP после расчета в комплексе KRUG24.

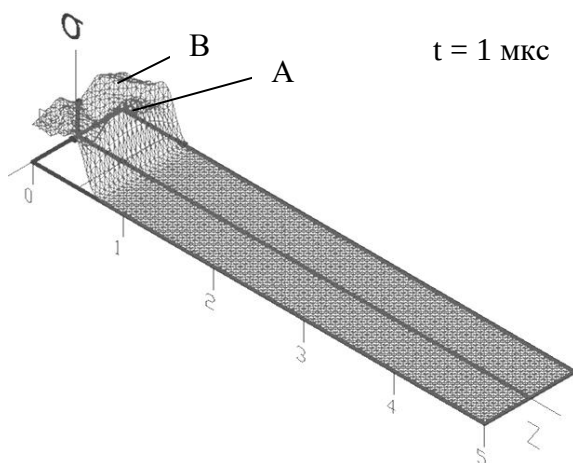


Рис. 4.9. Распределение напряжений
в момент времени 1 мкс

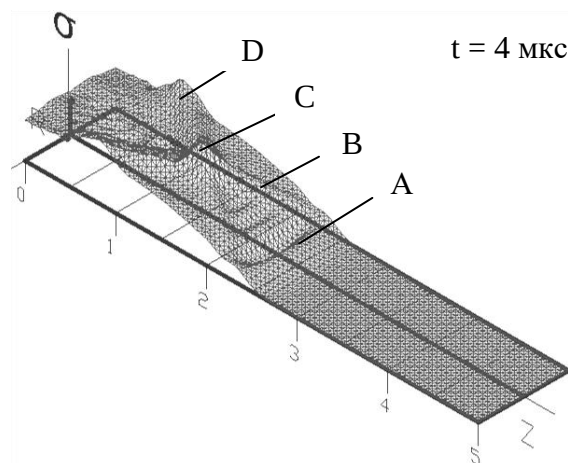


Рис.4.10. Распределение напряжений
в момент времени 4 мкс

Во время столкновения цилиндра с преградой возникает волна напряжений, которая перемещается вдоль стержня в направлении свободного торца (рис. 4.9). Плоский фронт волны A перемещается со скоростью продольных волн c_1 . В следствии наличия свободных цилиндрических поверхностей, фронт волны A порождает волну разгрузки с фронтом B . Волна разгрузки движется от свободной цилиндрической поверхности в направлении оси симметрии со скоростью поперечных волн c_2 .

В момент прихода волны B к оси симметрии цилиндра, т.е. при $t = R/c_2$ происходит столкновение волн разгрузки (рис. 4.10). Это приводит к увеличению напряжения сжатия в локальной области C на оси симметрии цилиндра. После столкновения волн происходит обратное движение фронта D в сторону наружной цилиндрической поверхности со скоростью c_2 . За счет взаимодействия продольной волны и поперечной волны разгрузки напряжение на фронтах A и B начинают ослабевать. При этом фронт A , локальная область C и фронт волны разгрузки в продольном направлении продолжают двигаться со скоростью c_1 .

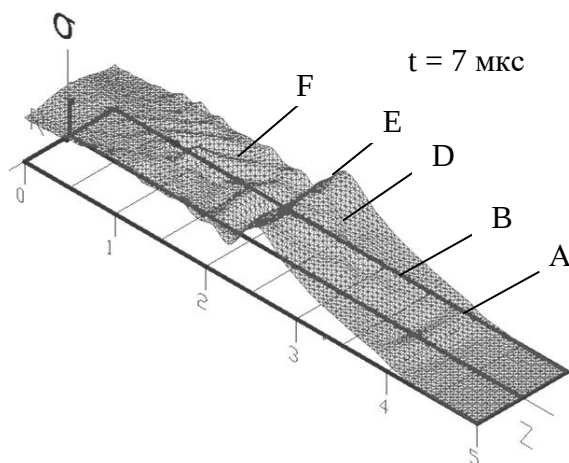


Рис. 4.11. Распределение напряжений
в момент времени 7 мкс

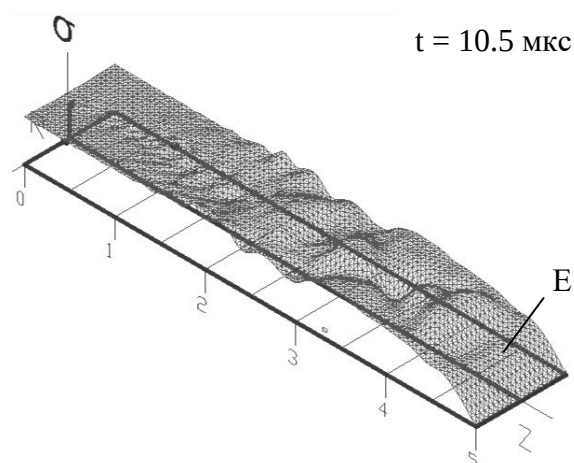


Рис.4.12. Распределение напряжений
в момент времени 10,5 мкс

После прохождения волны расстояния примерно в четыре калибра цилиндра фронты волны A , B и D размыты, а напряжения в них заметно снижены (рис. 4.11). После взаимодействия волны D с цилиндрической поверхностью происходит постепенное формирование плоского фронта волны E с большим напряжением сжатия. Это происходит потому, что в момент прихода волны D к наружной поверхности цилиндра, т.е. при $t = 2R/c_2$ в сечении цилиндра $z = 0$ отсутствует поперечная волна разгрузки. Таким образом, напряжение на фронте E приблизительно равно напряжению на фронте A в начальный момент после удара. Фронт волны F , возникающий из-за отражения волны D , не имеет ярко выраженных границ, вследствие того, что напряжение в нем сравнимо с напряжением сжатия стержня за фронтом E . Фронт волны E движется так же со скоростью c_1 .

В момент прихода фронта волны A к свободному торцу цилиндра напряжение в нем мало для появления отраженной волны (рис. 4.12). Отражение волн напряжений происходит лишь после подхода фронта волны E к свободному торцу. Напряжение на фронте волны E в этот момент ниже начального, но достаточно для появления отраженной продольной волны разгрузки.

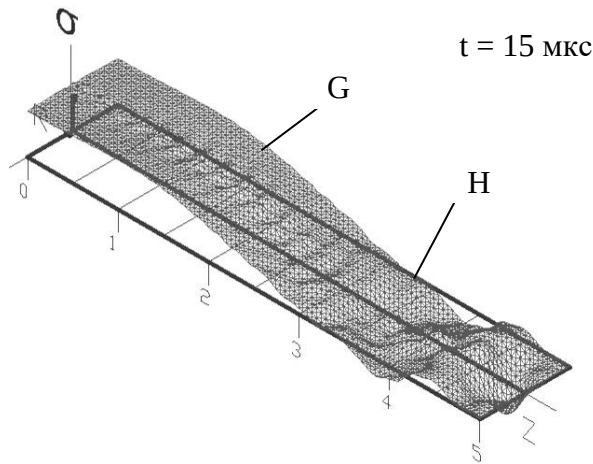


Рис. 4.13. Распределение напряжений
в момент времени 15 мкс

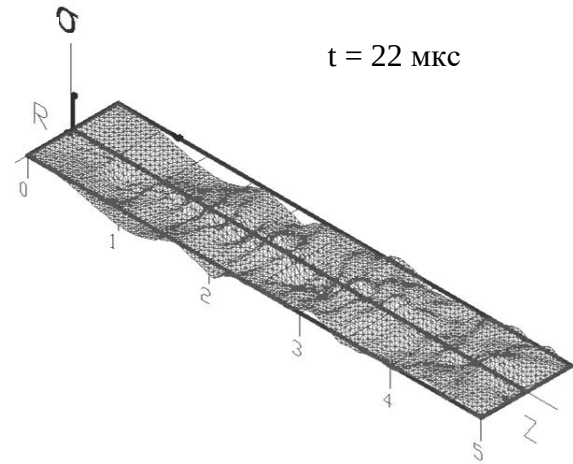


Рис.4.14. Распределение напряжений
в момент времени 22 мкс

При движении волны в обратном направлении в области разгрузки наблюдаются незначительные колебания напряжения (рис. 4.13). Фронт обратной продольной волны разгрузки достаточно растянут – от места начала снижения напряжений сжатия G до плоскости нулевых напряжений H . Фронт волны G движется со скоростью продольных волн c_1 . Учитывая время прихода фронта G ($t \approx 17.5 \text{ мкс}$) к нижнему торцу цилиндра ($z = 0$) и время движения его вдоль стержня ($t = L/c_1$), можно сделать вывод, что отраженная волна с фронтом G возникла в момент прихода фронта A к свободному торцу цилиндра.

Отскок цилиндра от преграды происходит в момент времени, когда в сечении $z = 0$ напряжения становятся равными нулю, т.е. когда фронт H приходит к нижнему торцу цилиндра (рис. 4.14). При этом в цилиндре после отскока продолжают наблюдаться незначительные колебания напряжений. В связи с взаимодействием отраженного фронта G и прямого фронта E в области свободного торца, скорость отраженного фронта H переменна. На движение фронта H так же оказывают влияние незначительные поперечные колебания.

Полученные результаты подтверждаются аналогичными результатами из программы AUTODYN.

На рис. 4.15 представлена визуализация данных по напряжениям из AUTODYN и KRUG24 в момент времени 5 мкс.

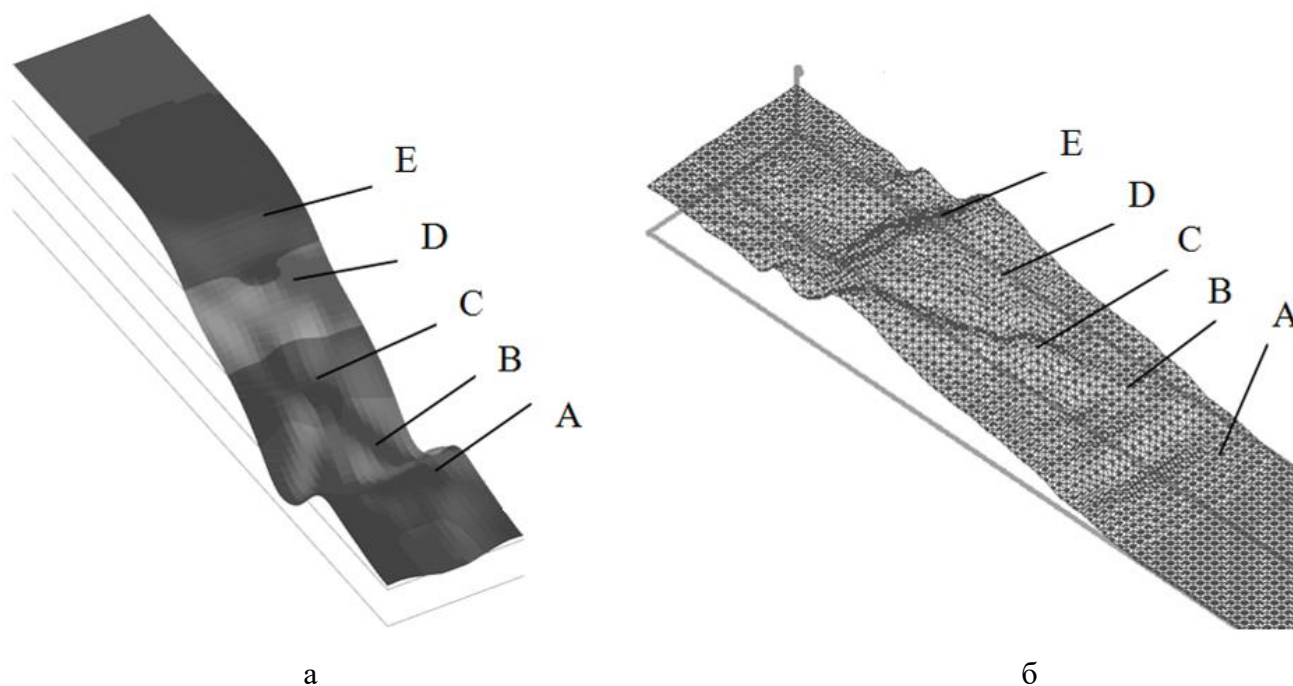


Рис. 4.15. Качественное сравнение распределения напряжений

а – AUTODYN, б – KRUG24

Характер распределения фронтов волны (А...Е) в качественной оценке аналогичен в обеих программах. Вследствие этого, можно сделать вывод о достоверности полученных результатов.

В результате анализа процесса распространения волн в цилиндре можно сделать вывод, что волны напряжений в продольном направлении распространяются только со скоростью, близкой к скорости продольных волн c_1 . В работе Слепяна [6] было отмечено, что фазовая скорость реальных возмущений отличается от «стержневой» в виду конечности длины волны. И вследствие дисперсии волна с течением времени будет размываться.

Поперечные волны разгрузки, идущие от свободной цилиндрической поверхности снижают интенсивность продольной волны, поэтому отскок цилиндра происходит позже, чем от продольной волны. В результате осредненная скорость волны становится равной c_E .

Посредством эксперимента и численного исследования обнаружено, что скорость волны в коротких цилиндрах (длина меньше диаметра) больше скорости звука c_E (в 1,1 .. 1,3 раза).

Анализ распределения напряжений показал, что фронт волны, бегущей вдоль цилиндра в прямом направлении на начальном этапе, распространяется со скоростью продольных волн c_1 . Затем на фронт оказывают влияние возмущения, распространяющиеся от свободных цилиндрических границ.

4.4. Выводы по главе

1. Эксперимент, проведенный с помощью ультразвукового дефектоскопа, подтвердил, что средняя скорость волны в длинных цилиндрах ($L > D$) соответствует скорости звука c_E .
2. Численно и экспериментально показано, что скорость волны в коротких цилиндрах ($L < D$) больше скорости звука ($c \approx 1,1 \dots 1,3 c_E$).
3. Анализ распределения полей напряжения показал, что фронт волны, бегущей вдоль цилиндра в прямом направлении, сначала распространяется со средней скоростью, близкой к скорости продольных волн c_1 . После прохождения волной расстояния ($L = 0,5 D$), возмущения, распространяющиеся от свободных цилиндрических границ, оказывают влияние на процесс движения волны. К моменту возвращения фронта волны к торцу цилиндра средняя скорость волны становится равной скорости звука c_E .

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. При продольном ударе коротких ($L < D$) однородных цилиндров возникает явление повторного отскока от преграды. Длина цилиндра, при которой возникает повторный отскок, зависит от материала цилиндра, но при этом длина соразмерна его диаметру ($L = 0,5 \dots 1,0 D$) при $L = 1 \dots 50$ мм.

2. Существуют такая длина цилиндра ($L = 0,1 \dots 0,2 D$), при которой средняя скорость распространения волны превышает «стержневую» скорость ($c \approx 1,2 c_E$), а также длина ($L = 0,5 \dots 0,8 D$), при которой средняя скорость волны оказывается меньше ($c \approx 0,6 c_E$).

3. Экспериментально было подтверждено, что средняя скорость волны в коротких цилиндрах ($L < D$) при $L = 2$ мм больше «стержневой» скорости ($c \approx 1,1 \dots 1,3 c_E$). Погрешность результатов эксперимента не превысила 12% от результатов численного решения.

5. Численный анализ полей напряжений подтвердил, что фронт волны, бегущей вдоль короткого цилиндра при $L = 50$ мм и $D = 10$ мм ($L < D$) в прямом направлении распространяется со скоростью, близкой к скорости продольных волн c_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выборнов Б. И. Ультразвуковая дефектоскопия / Б. И. Выборнов. – М. : Металлургия, 1985. – 256с.
2. C. Chree. Longitudinal vibrations of a circular bar // Q. J. Math., – 1886. – vol. 21, – P. 287–298.
3. Shul'ga V. M. Elastic-Wave Propagation in Orthotropic Cylinders // International Applied Mechanics, 1998. – Vol. 34. - №7. – P. 635-641.
4. Shul'ga V. M. Propagation of acoustoelectric waves in a hollow cylinder with a longitudinal physical-properties-symmetry axis // International Applied Mechanics, 1999. – Vol. 35. - №4. – P. 356-365.
5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т.VII. Теория упругости : Учеб. пособие. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
6. Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. – 376с.
7. Киселев А.Б. Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного разрушения термовязкоупругопластической среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. 1998. № 6. – С. 32-40.
8. Никитин Л. В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 2. С. 166-170.
9. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И., Рыбакина О.Г. Разрыхление и критерий разрушения в условиях ползучести // ДАН СССР. 1983. Т. 270, №4.
10. L. Pochhammer. Uber die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiscylinder // J. fur Math., – 1876. – vol. 81, – P. 324–336.
11. Новацкий В. Теория упругости. / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 798с.
13. Клещев А. А. Волновые процессы в твердых телах: монография / А. А. Клещев, Ф. Ф. Легуша, В. Л. Маслов. – СПб, 2010. – 215 с.

14. Горшков А.Г. Волны в сплошных средах: Учеб. пособие : для вузов. / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рябинский, Д.В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
15. Ерофеев В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208с.
16. Adnan H. Nayfeh, Wael G. Abdelrahman. An Approximate Model for Wave Propagation in Rectangular Rods and Their Geometric Limits // Journal of Vibration and Control, 2000. – 6. – P. 3-17.
17. A. Love. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, – 1944. – New York: Dover. – 583 p.
18. Фомин В. М. Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников и др., Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
19. Bayanov E. V. Propagation of Elastic Waves in Circular Rods Homogeneous Over The Cross Section / E. V. Bayanov, A. I. Gulidov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2011. T.52. №5. - P. 808-814.
20. Collins J.P., Colella P., Glaz H.M. An implicit-explicit Eulerian Godunov scheme for compressible flow // J. of Comp. Phys. 1995. V. 116. – P. 195–211.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т. 4. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. – 736с.
22. Loub'ere R., Maire P.H., Shashkov M. ReALE: A Reconnection-based Arbitrary-Lagrangian-Eulerian Method in cylindrical geometry // Comput. Fluids. 2010. – P. 4724-4761.
23. Menshov I., Nakamura Y. Implementation of the LU-SGS method for an arbitrary finite-volume discretization // Proc. of 9th Conference of CFD. Tokyo: 1995. – P. 123.
24. Loub ere R., Maire P.-H., Shashkov M., Breil J., Galera S. ReALE: A Reconnectionbased Arbitrary-Lagrangian-Eulerian Method // J. Comput. Phys. 2010. V. 229 (12). – P. 4724-4761.

25. Коробейников С. Н., Олейников А. А. Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки // Дальневосточный математический журнал. — 2011. — Т. 11, № 2. — С. 155-180.
26. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск, 2000. — 262 с.
27. Tang A. and Ting T. Wave curves for the Riemann problem of plane waves in elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1987. V. 25. — P. 1343.
28. Trangenstein J. A. and Pember R.B. The Riemann problem for longitudinal motion in an elastic-plastic bar // SIAM J. Sei. Stat. Comput. 1991. V. 12. — P. 180.
29. Киселев А.Б., Серёжкин А.А. Особенности процесса соударения упруго-пластического цилиндра с недеформируемой преградой // ПММ. — 2015. — Т. 79, №4. — с. 571-583.
30. Баянов Е. В. Распространение упругих волн в однородных по сечению круглых стержнях / А. И. Гулидов, Е. В. Баянов // Прикладная механика и техническая физика. — 2011. — Т. 52, № 5. — С. 155–162.
31. Курлаев Н.В. Гулидов А.И., Рынгач Н.А., Красовский В.В. Смыкание несплошностей в структуре материалов при магнитно-импульсной обработке // Научный вестник НГТУ. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. — №1(12). — С. 131-140.
32. Mindlin, R. D., Herrmann G. A One-Dimensional Theory of Compressional Waves in an Elastic Rod // Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1951. — P. 187-191.
33. Mindlin, R. D., McNiven H. D. Axially Symmetric Waves in Elastic Rods // Journal of Applied Mechanics, 1960. — 27. — P. 145-151.
34. Harris J. G. Linear Elastic Waves / J. G. Harris. — Cambridge University Press, 2001. — 159 p.
35. Баянов Е. В. Анализ дисперсионного уравнения в задаче о распространении упругой волны в стержне / Е. В. Баянов, Н. В. Курлаев // Современные тенденции развития науки и технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. - 2016. - № 6/2. - С. 5-8.

36. Gavriluk, S. L., Makarenko, N.I., Sukhinin, S.V. Waves in Continuous Media. – Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing, Springer International Publishing AG, 2017. – 140 p.
37. Kessler, D., Kosloff, D. Elastic wave propagation using cylindrical coordinates // *Geophysics*, – 1991. – Vol. XI. – NO. I. – P. 2080-2089.
38. Onoe, M., McNiven, H.D., Mindlin, R.D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *J. Appl. Mech.*, – 1962. – 29. – P. 729–734.
39. Bancroft, D. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // *Phys. Rev.*, – 1941. – v. 59. – P. 588–593.
40. Hudson, G.E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.*, – 1943. – v. 63. – P. 46–51.
41. Shatalov M., Fedotov I. Comparison of classical and modern theories of longitudinal wave propagation in elastic rods // *The 16th International Congress on Sound and Vibration*, 2009. – P. 1–8.
42. Bishop, R. E. D. Longitudinal Waves in Beams // *Aero Qly*, – 1952. – Vol. 3, 2. – P. 280.
43. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. / Р.М. Дейвис. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1961. – 102 с.
44. Doyle, J.F. A spectrally formulated finite element for longitudinal wave propagation // *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, – 1988. – 3, – P. 1–5.
45. Dormy E., Tarantola A. Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method // *Journal of geophysical research*, 1995. – Vol. 100, No. B2. – P. 2123–2133.
46. Kelly, K. R., Ward, R. W., et al. Synthetic Seismograms, a Finite Difference Approach // *Geophysics*, 1976. – 41. – P. 2-27.
47. Манжосов В.К. Модели продольного удара / В.К. Манжосов. – Ульяновск : УЛГТУ, 2006. – 160 с.
48. Баянов Е. В. Визуализация распространения волн в стержне / Е. В. Баянов // *Труды 14 Всероссийской научно-технической конференции «Наука. Промышлен-*

ность. Оборона», посвященной 100-летию со дня рождения А. И. Покрышкина (24–26 апр. 2013 г.). – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. – С. 29-31.

49. Davies R. M. A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1948. – 240. – P. 375-457.

50. Рахматулин Х. А. Распространение волн деформации / Х. А. Рахматулин, Н. Жубаев, Т. Ормонбеков. – Изд-во Илим, 1985. – 148 с.

51. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней / Г. С. Шапиро // Прикладная математика и механика. 1946. — № 5 — 6. С. 597 - 616.

52. Lundberg B., Henchoz A. Analysis of elastic waves from two-point strain measurement // Experimental mechanics, 1977. – P. 213–218.

53. Morse, R. W. Dispersion of Compressional Waves in Isotropic Rods of Rectangular Cross Section // Journal of the Acoustical Society of America, – 1948. – 20. – P. 833-838.

54. Shul'ga N. A. Propagation of axisymmetric elastic waves in an orthotropic hollow cylinder // Prikladnaya Mekhanika, 1974. - №9. – P. 14-18.

55. Pashaie B. Wave Propagation in a Nonhomogeneous Elastic Rod : a thesis in mathematics / B. Pashaie. – 1990. – 27 p.

56. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. – North Holland, Amsterdam, 1973. – 440 p.

57. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1955. – 194 с.

58. Rossing T. D., Russel D. A. Laboratory observation of elastic solids // Am. J. Phys, 1990. – Vol. 58, No. 12. – P. 1153–1162.

59. Bhaskar A. Waveguide modes in elastic rods // Proc. R. Soc. Lond., 2003. – 459. – P. 175–194.

60. Pan J., Pan Jie. Structural in tensivity of torsional vibration in solid and hollow cylindrical bars. // JASA. 1998, v. 103, № 3, P. 1475–1482.

61. Carcione J.M., Seriani G. Torsional waves in loss cylinders. // JASA. 1998, v. 103, № 2, P. 760–766.

62. J. Rayleigh. The Theory of Sound. – 1945. – vol. I and II. New York: Dover. – 544 p.
63. Юберал Х. Акустика оболочек. // Акуст. Ж. 2001, т. 47, № 2, С. 149-177.
64. H. Lamb. On waves in an elastic plate // Proc. R. Soc. London, – 1917. – vol. A93. – P. 114.
65. Kynch, G. J., Green, W. A. Vibration of Beams (I)-Longitudinal modes // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, – 1957. – 10. – P.63-73.
66. D. C. Gazis. Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation // J. Acoust. Soc. Amer., – 1959. – vol. 31, P. 568–573.
67. Bingham J., Hinders M. Lamb wave detection of delamination in large diameter pipe coatings // The open acoustic journal, 2009. – Vol. 2. – P. 75–86.
68. Hayashi T., Kawashima K., Rose J. L. Calculation for guided waves in pipes and rails // Key engineering materials, 2004. – Vols. 270–273. – P. 410–415.
69. Баянов Е. В. Распространение упругих волн в трубе / Е. В. Баянов, А. И. Гулидов // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. - 2012. - № 1-1.- С. 100-103.
70. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid. // JASA. 2001, v. 110, № 1, P. 68–79.
71. Ramsakaya E. I., Shul'ga N. A. Propagation of nonaxisymmetric elastic waves in an orthotropic hollow cylinder // Prikladnaya Mekhanika, 1983. – Vol. 19. - № 9. P. 9-13.
72. Grinchenko V.T., Komissarova G. L. Wave Propagation in a Hollow Elastic Cylinder with a Fluid // Prikladnaya Mekhanika, 1984. – Vol. 20. - №1. P. 21-26.
73. Towfighi S., Kundu T., Ehsani M. Elastic wave propagation in circumferential direction in anisotropic cylindrical curved plates // Journal of Applied Mechanics, 2002. – Vol. 69. – P. 283–291.
74. Viktorov, I. A. Rayleigh-Type Waves on a Cylindrical Surface // Sov. Phys. Acoust., 1958. – 4. – P. 131–136.

75. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 312 с.
76. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271-306.
77. Годунов С. К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н. Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики/ Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. – 400 с.
78. Kolsky, H. The propagation of stress pulses in viscoelastic solids // Philos. Mag., – 1956. – 1. – P. 693–710.
79. Barshinger J. N., Rose J. L. Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with viscoelastic material // Transaction on ultrasonic, ferroelectric, and frequency control, 2004. – Vol. 51, No. 11. – P. 1547–1556.
80. Zhao Ya-Pu, Zhao Han, Hu Yu-Qun. Stress wave propagation in a gradient elastic media // Chin. Phys. Lett, 2002. – Vol. 19, No. 7. – P. 950–952.
81. Kessler, D., Kosloff, D. Acoustic wave propagation in 2-D cylindrical coordinates // Geophys. J. Internat., – 1990. – 103. – P. 577-587.
82. Biot M. A. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid // Journal of Applied Physics, 1952. – 23, – P. 997-1006.
83. Guo Peng, Zhang Lei, Lu Ke-pu, Duan Wen-shan. Solution of nonlinear wave equation of elastic rod // Appl. Math. Mech., 2008. – Vol. 29. – № 1. – P. 61–66.
84. Гусятников П. Б., Резниченко С. В. Векторная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1985. – 232 с.
85. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 799 с.
86. Century Dynamics 2005. Theory Manual of AUTODYN. Revision 4.3. ANSYS Inc.
87. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212-263.
88. Баянов Е. В. Уравнение поверхности скорости волны / Е. В. Баянов // Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образова-

нии и промышленности : сб. материалов II Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием, Новосибирск, 21-23 апр. 2010 г. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. - С. 155-156.

89. Справочник по элементарной физике / Н.Н. Кошкин, М.Г. Ширкевич. М., Наука. 1976. 256 с.

90. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. – 1980. – №3. – С. 126-132.

91. Баянов Е. В. К вопросу о скорости упругих волн в коротких осесимметричных стержнях / Е. В. Баянов, А. И. Гулидов // Сборник научных трудов НГТУ. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. - Вып.1(59).- С.65-72.

92. Ключев В. В. Неразрушающий контроль. Том 3.: Справочник. В 7-и книгах / Под ред. Ключева В. В. — М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.

93. Баянов Е. В. Определение скорости звука в стержне с помощью ультразвукового дефектоскопа / Е. В. Баянов, Н. В. Курлаев, Ю.О. Поляков // Тенденции развития науки и образования : сб. ст. по материалам междунар. науч. конф. - 2017. - № 33/1. - С. 15-17.

94. Ультразвуковой дефектоскоп ТОМОГРАФИК УД4-Т. Руководство по эксплуатации VTM 038 РЭ. 2003.

95. Bayanov E. V. Study of elastic wave propagation in a short rod by ultrasound method / E. V. Bayanov, N. V. Kurlaev, K. A. Matveev // Physics AUC. - 2017. - Vol. 27. - 69-78.

96. Udaykumar H.S., Tran L., Belk D.M., Vanden K.J. An Eulerian method for computation of multimaterial impact with ENO shock-capturing and sharp interfaces // Journal of Computational Physics. 2003. V. 186. – P. 136-177.

97. Yanenko NN. The method of fractional steps // Berlin: SpringerVerlag, 1971. – 160 p.

98. Mitra M., Gopalakrishnan S. Spectrally formulated wavelet finite element for wave propagation and impact force identification in connected 1-d waveguides // International Journal of Solids and Structures, 2005. – Vol. 42. – P. 4695–4721.

99. Баянов Е. В. Визуализация напряжений в стержне с помощью AutoLISP / Е. В. Баянов // Сборник материалов I Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образовании и промышленности". - НГТУ, 2009. - с.50-52.
100. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. – 714 p.
101. Chree C. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application // Transactions of Cambridge Philosophical Society, 1889. – 14. – P. 205-369.
102. Lundberg B., Henchoz A. Analysis of elastic waves from two-point strain measurement // Experimental mechanics, 1977. – P. 213–218.
103. Баянов Е. В. Упругие волны в тонких трубах / Е. В. Баянов // Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития, 2011.
104. Cohen H. On wave propagation and evolution in rods // Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, 1989. – Vol. 47. – № 2. – P. 97–124.
105. Cohen, H. A. Nonlinear Theory of Elastic Directed Curves // Int. J. Engng. Sci. – 1966. – 4. – P. 511-524.
106. Green, A.E., N. Laws. A General Theory of Rods // Proc. Roy. Soc., – 1966. – A293. – P. 145-155.
107. Cohen, H., A.B. Whitman. Waves in Elastic Rods // Journal of Sound and Vibration, – 1977. – 51, 1. – P. 283-302.
108. Баянов Е. В. Визуализация волн напряжений в стержне при ударе / Е. В. Баянов // Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образовании и промышленности : сб. материалов III Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием, Новосибирск, 19-20 апр. 2011 г. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. - С. 40-45.
109. Zarutskii V. A., Prokopenko N. Ya. Dispersion curves for harmonic waves in longitudinally reinforced cylindrical shells // International Applied Mechanics, 2003. – Vol. 39. - № 6. – P. 721-725.

110. Chih-Peng Yu, Chih-Hung Chiang. Prediction of dispersion relation for elastic stress waves in prestresses tendons using 1-d member theories // International Journal of Applied Sciens and Engineering, 2003. – Vol. 1, No. 1. – P. 1–16.
111. Saccomandi G. Elastic rods, Weierstrass' theory and special travelling waves solution with compact support // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2004. – 39. – P. 331–339.
112. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике — М.: Мир, 1975. – 543с.
113. Савельев И. В. Курс общей физики / Под редакцией Л. И. Гладнева, Н. А. Михалина, Д. А. Миртова. – 3-е изд. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 496 с.
114. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. / Ю.Н. Работнов. - М. : Наука, 1979. – 712 с.
115. Кошелев А.И. Механика деформируемого твердого тела. / А.И. Кошелев, М.А. Нарбут / Электронный учебник. – Санкт-Петербург, 2002. – 287 с.
116. Баврин И.И. Курс высшей математики : Учебник. / И.И. Баврин. – М. : Просвещение, 1992. – 560 с.
117. Honarwar F., Enjilela E., Sinclair A., Mirnezami S. Wave Propagation in Transversely Isotropic Cylinders // International Journal of Solids and Structures. 2007, №44, P. 5236-5246.
118. Бидерман В. Л. Расчеты на ударную нагрузку / В. Л. Бидерман // Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1959. - Т. 3. - С. 479 - 580.
119. Баянов Е. В. Распространение упруго-пластических волн в неоднородных и составных стержнях / Е. В. Баянов // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2008, 248с. - С.163
120. Баянов Е. В. Визуализация распространения волн с помощью прикладных программ / Е. В. Баянов // Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образовании и промышленности : сб. материалов V Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Новосибирск, 16 мая 2013 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. – С. 35–37.

121. Баянов Е. В. Компоненты вектора перемещений в упругом осесимметричном стержне / Е. В. Баянов, К. А. Матвеев // Современные тенденции развития науки и технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. - 2015. - № 6-1. - С. 5-8.

122. Bayanov E. V. Determination of the speed of an elastic wave in a short rod by an ultrasonic method [Electronic resource] / E. V. Bayanov, N. V. Kurlaev, K. A. Matveev // 13 International forum on strategic technology (IFOST 2018) : proc., China, Harbin, 30 May – 1 June 2018. – Harbin : IEEE, 2018. – P. 670-672.