

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА
им. Н.А. ЧИНАКАЛА**

На правах рукописи

Александрова Надежда Ивановна

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В
БЛОЧНЫХ И УПРУГИХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ
ВЯЗКОСТИ И ВНЕШНЕГО СУХОГО ТРЕНИЯ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

**Научный консультант:
д.ф.-м.н. Шер Евгений Николаевич**

Новосибирск, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Анализ исследований по проблеме волновых процессов в блочных и упругих средах с учетом вязкости и внешнего сухого трения. Современное состояние вопроса	16
Глава 2. Моделирование распространения волн в блочных средах	32
§ 2.1. Одномерные блочные среды	32
2.1.1. О распространении упругих волн в стержневой системе при импульсном нагружении	32
2.1.2. Моделирование процесса распространения волн в составных стержневых системах с учетом вязкости прослоек	46
2.1.3. Влияние иерархической структуры блочных пород на особенности распространения волн	57
2.1.4. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах	61
2.1.5. Общий случай модели периодической блочной структуры	69
2.1.6. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов моделирования процесса распространения волн в составных стержневых системах с учетом вязкости и структурности	73
2.1.6.1. Однородная система стальных стержней с прослойками из резины, линолеума и пенопласта	73
2.1.6.2. Система стальных стержней, разделенных чередующимися прослойками из резины и пенопласта	82
2.1.7. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде, составленной из кирпичей	87
2.1.8. Заключение к § 2.1.	97
§ 2.2. Двумерные блочные среды	99
2.2.1. Формулы приближенного представления для функций Ломмеля и Бесселя и их производных	99
2.2.2. Моделирование антиплоского движения двумерной блочной среды	110

2.2.2.1. Постановка задачи и аналитическое решение в изображениях по Лапласу и Фурье для сосредоточенной нагрузки	110
2.2.2.2. Распространение резонансных волн в блочной среде	111
2.2.2.3. Распространение волны при действии ступенчатой нагрузки	119
2.2.2.4. Моделирование распространения сейсмических волн от взрыва в условиях двухслойного строения блочного породного массива	127
2.2.3. Моделирование плоского движения двумерной блочной среды	140
2.2.3.1. Двумерная упругая модель блочной среды в плоской постановке	140
2.2.3.2. Дисперсионные свойства модели	142
2.2.3.3. Воздействие типа «центр расширения»	147
2.2.3.4. Воздействие типа «центр вращения»	154
2.2.3.5. Задача Лэмба для блочного полупространства. Ступенчатое воздействие	162
2.2.3.6. Задача Лэмба для блочного полупространства. Импульсное воздействие	185
2.2.3.7. Задача Лэмба для блочного полупространства с учетом вязкости	187
2.2.4. Заключение к § 2.2.	190
Глава 3. Моделирование распространения нестационарных волн в трубе с внешним сухим трением	196
§ 3.1. Внешняя среда не деформируема	196
3.1.1. Постановка одномерной задачи	196
3.1.2. Особенности численных алгоритмов для одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения	197
3.1.3. Аналитические решения одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения	199
3.1.4. Сравнение численных и аналитических решений одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения	207
§ 3.2. Внешняя среда деформируема	216
3.2.1. Постановка двумерной задачи	216
3.2.2. Особенности численных алгоритмов для двумерной задачи с	220

учетом внешнего сухого трения	
3.2.3. Аналитические решения одномерной в радиальном направлении задачи упругого взаимодействия трубы и грунта	222
3.2.4. Результаты численных расчетов двумерной задачи упругого взаимодействия трубы и грунта	227
3.2.5. Результаты численных расчетов двумерной задачи с учетом проскальзывания на границе трубы и грунта	229
Заключение к Главе 3	233
Заключение к диссертации	235
Литература	241

Введение

Выяснение различных вопросов нестационарного деформирования неоднородных сред и конструкций необходимо для создания моделей, методов расчета и обоснования оценок опасности в таких различных областях как распространение сейсмических волн в блочных средах при землетрясениях, при проведении подземных взрывов, при вибровоздействии, а также при распространении волн в подземных трубопроводах.

В последнее время в сейсмике и геомеханике широко применяются подходы к описанию деформирования породного массива как блочной среды сложного иерархического строения. Согласно концепции академика М.А. Садовского, горный массив представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня. Часто прослойки между блоками представлены более слабыми, трещиноватыми породами. Наличие таких податливых прослоек приводит к тому, что деформирование блочного массива, как в статике, так и в динамике происходит в основном за счет деформации прослоек. Как показывают эксперименты, проведенные в ИГД СО РАН, блочная структура отфильтровывает высокочастотные колебания, и в блочной среде распространяются преимущественно низкочастотные волны. Их принято называть маятниковыми волнами. Они обладают необъяснимыми с позиций однородной модели свойствами: низкая скорость распространения, сравнительно большая длина при коротком импульсном воздействии. Таким образом, наличие блочной структуры приводит к существенному изменению процесса распространения волн в горных породах. Замечено, что при крупных взрывах в протяженных выработках в массивах горных пород с крупными трещинами и разломами возникают остаточные угловые смещения в противоположные стороны, что свидетельствует о независимом движении структурных элементов массива. Также при техногенных землетрясениях смещения горных пород чаще всего происходят по уже существующим межблочным контактными границам. Поэтому важной задачей геомеханики является исследование процесса

распространения сейсмических волн с учетом структуры породного массива, реологических свойств прослоек и проскальзывания по границам структурных блоков.

Проблемы с трением возникают также во многих технологических процессах: забивка и ударное извлечение свай, бестраншейная прокладка подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт, поведение подземных трубопроводов при землетрясениях. Движение разного рода стержневых элементов в механических системах также сопровождается трением. Поэтому одной из важнейших задач является изучение влияния на волновой процесс сухого трения между внешней средой и боковой поверхностью трубы, стержня или блоков.

Целью диссертационной работы является разработка моделей, описывающих динамическое поведение неоднородных сред и конструкций, методов решения нестационарных задач механики твердого тела и анализ полученных результатов для прогнозирования поведения возмущений при нестационарном воздействии для конкретных систем и их применение в прикладных задачах механики.

В работе применяются следующие **методы исследований**: математическое моделирование механических процессов с использованием явного конечно-разностного метода решения частных дифференциальных уравнений и аналитического метода решения, состоящего в применении интегральных преобразований и их асимптотическом, и, если возможно, то в точном, обращении; экспериментальное моделирование волновых процессов в лабораторных и натурных условиях с использованием сейсмометров и цифровых осциллографов.

Исследования проводятся в рамках научной специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твёрдого тела».

Идея работы заключается в использовании:

— аналитических методов для получения точных решений и асимптотических решений, описывающих поведение при больших временах с начала процесса;

- численных методов, позволяющих получить достоверные количественные оценки на всем временном интервале;
- лабораторных экспериментов, которые позволяют определить приемлемость используемых математических моделей.

Главная проблема численного решения — это тестирование численных алгоритмов, достижение адекватности дискретного решения континуальному. И с этой точки зрения наличие аналитических решений является полезным. С другой стороны, численные решения необходимы для проверки аналитических решений, полученных при некоторых упрощающих предположениях, а также для определения области параметров, при которых аналитические решения справедливы. Сравнивая аналитические и численные решения с данными физических экспериментов, можно оценить адекватность применяемых математических моделей.

Достоверность научных результатов, выводов и положений обеспечивается хорошим совпадением численных, аналитических и экспериментальных данных, сопоставлением с известными результатами других авторов.

Научная новизна:

1. Получены асимптотические решения одномерных задач распространения нестационарных низкочастотных волн при импульсном воздействии в составной стержневой системе с упругими прослойками и в цепочках масс, моделирующих иерархическую блочную среду с вязкоупругими прослойками.
2. Получены аналитические оценки спектральных характеристик возмущений, распространяющихся в составной стержневой системе и в цепочках масс с пружинами и демпферами с учетом иерархичности.
3. Исследованы дисперсионные свойства составной стержневой системы и цепочек масс с пружинами и демпферами с учетом иерархичности.
4. На примерах экспериментальной сборки из стальных стержней, соединенных прослойками, и стопки силикатных кирпичей, взаимодействующих через резиновые прокладки, продемонстрирована возможность моделирования

процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах с использованием модели цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами.

5. В результате сравнения теоретических расчетов и экспериментальных данных для одномерных блочных сред определены параметры моделей, используемых в теоретических расчетах для описания лабораторных экспериментов.

6. Выведены формулы приближенного представления функции Ломмеля через функцию Скорера и производной функции Ломмеля через производную функции Скорера.

7. Предложен асимптотический подход к обращению интегральных преобразований Лапласа и Фурье применительно к решению задач механики дискретно-периодических сред.

8. Получены асимптотические формулы, описывающие поведение двумерных блочных сред в антиплоской постановке при большом времени с начала процесса при ступенчатом воздействии и синусоидальном нагружении с резонансной частотой.

9. С использованием разработанного асимптотического метода получено аналитическое решение плоской задачи Лэмба для блочного полупространства с упругими прослойками.

10. Исследованы дисперсионные свойства двумерной блочной среды в плоской постановке.

11. Численно исследовано распространение сейсмических волн при поверхностном и заглубленном импульсном воздействии в условиях двухслойного строения блочного породного массива в антиплоской постановке.

12. Получены численные решения, описывающие поведение двумерных блочных сред в плоской постановке при действии импульсных нагрузок типа «центр расширения» и «центр вращения».

13. Получено конечно-разностное решение плоской задачи Лэмба для блочного полупространства с упругими и вязкоупругими прослойками.

14. Разработан аналитический метод решения задачи взаимодействия трубы с окружающим грунтом по закону сухого трения при продольном воздействии импульса произвольной выпуклой формы. С помощью данного метода получено решение этой задачи с учетом многократных отражений от торцов трубы.

15. Разработаны конечно-разностные алгоритмы решения задачи о распространении волн в трубе с внешним сухим трением в случаях, когда внешняя среда деформируема и не деформируема.

Научную и практическую значимость (ценность) работы составляют:

- 1.** Математические модели блочных геосред с учётом иерархической структуры и вязкости прослоек.
- 2.** Аналитические и численные решения одномерных и двумерных задач для блочных сред и сделанные на их основе выводы по качественному и количественному поведению сейсмических волн в блочно-иерархических средах.
- 3.** Аналитический метод решения нестационарных задач для дискретно-периодических сред.
- 4.** Аналитические и численные решения задачи взаимодействия трубы с окружающим грунтом по закону сухого трения и сделанные на их основе выводы по качественному и количественному поведению нестационарных возмущений в трубе при импульсном воздействии.
- 5.** Аналитический метод решения и конечно-разностные алгоритмы решения задачи взаимодействия трубы с внешней средой по закону сухого трения.

Апробация работы.

Научные результаты и основные идеи, изложенные в диссертации, докладывались на следующих международных, всероссийских и всесоюзных конференциях, симпозиумах и других научных совещаниях:

Международная конференция “Проблемы и перспективы развития горных наук” к 60-летию Горно-геологического института ЗСФ АН СССР — Института горного дела СО РАН (Новосибирск, 2004); Научная конференция с участием иностранных ученых “Геодинамика и напряженное состояние недр земли” (Новосибирск, 2005); Всероссийская конференция «Деформирование и

разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 2006); 5th European Congress of Mathematics (Amsterdam, The Netherlands, 2008); Всероссийская конференция «Фундаментальные проблемы формирования техногенной среды» (Новосибирск, 2008); Конференция «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» (Новосибирск, 2009); Всероссийская конференция «Фундаментальные проблемы формирования техногенной геосреды» с участием иностранных ученых (Новосибирск, 2009); Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л.В.Овсянникова (Новосибирск, 2009); Международная конференция «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвященная 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова (Москва, 2010); The 1st Sino-Russian Joint Scientific- Technical Forum on Deep-level Rock Mechanics and Engineering (China, Fuxin, 2011); Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011); Всероссийская конференция «Геодинамика и напряженное состояние недр земли», посвященной 80-летию академика М.В. Курлени, с участием иностранных ученых (Новосибирск, 2011); II Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», посвященной 85-летию со дня рождения профессора О.В. Соснина (Новосибирск, 2011); 2-ая Российско-Китайская научная конференция «Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах» (Новосибирск, 2012); Всероссийская конференция «Фундаментальные проблемы формирования техногенной геосреды» с участием иностранных ученых (Новосибирск, 2012); XX Всероссийская конференция «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» (Новосибирск, 2013); Научно-практическая конференция «Проблема безопасности и эффективности освоения георесурсов в современных условиях» (Пермь, 2013); 13 Всероссийский семинар «Геодинамика, геомеханика и геофизика» (Новосибирск,

2013); The 3rd Sino-Russian Joint Scientific-Technical Forum on Deep-level Rock Mechanics and Engineering (China, Nanjing, 2013); Международный научный конгресс «Интерэкспо ГЕО-Сибирь» (Новосибирск, 2014); 4-ая Российско-Китайская научная конференция «Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах» (Владивосток, 2014); III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», посвященной 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова (Новосибирск, 2014); 14 Всероссийский семинар «Геодинамика, геомеханика и геофизика». (Алтайский край, 2014); XXIV Международная научная школа имени академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках» (Крым, Алушта, 2014).

Связь работы с научными проектами и грантами.

Диссертационные исследования проводились по планам НИР Института горного дела СО РАН., а также в диссертацию включены результаты научных исследований, поддержанных грантами РФФИ: № 08-05-00509 «Моделирование деформационных процессов в блочных массивах горных пород» (Руководитель – д.ф.-м.н. Шер Е.Н.), № 06-05-64738 «Моделирование динамических явлений в средах с блочной структурой», № 11-05-00369 «Теоретическое и экспериментальное моделирование динамических деформационных процессов в блочных геосредах» (Руководитель проектов – к.ф.-м.н. Сарайкин В.А.), и интеграционными проектами: Интеграционный проект СО РАН № 129 «Разработка методов и создание уникального комплекса приборов и оборудования для моделирования и натурных исследований нелинейных деформационно-волновых процессов в блочных массивах горных пород», Интеграционный проект СО РАН № 93 «Разработка методов и создание систем сейсмодеформационного мониторинга техногенных землетрясений и горных ударов», Интеграционный проект СО РАН №74 «Теоретические, приборно-экспериментальные и геоинформационные основы мониторинга напряженно-

деформационного состояния породных массивов в областях сильных техногенных воздействий», ОНЗ – 3.1 «Фундаментальные проблемы и перспективы использования потенциала комплексного освоения недр на основе развития ресурсосберегающих и ресурсовоспроизводящих геотехнологий» (Руководитель проектов – член-корр. Опарин В.Н.), ОНЗ – 3.2 «Теоретическое и экспериментальное изучение путей повышения эффективности и экологической безопасности импульсных машин для разрушения горных пород и изменения свойств породного массива» (Руководитель – д.т.н. Смоляницкий Б.Н.).

Личный вклад автора заключается в: постановке задач, разработке аналитических методов решения; получении аналитических решений конкретных задач; разработке конечно-разностных алгоритмов и написании комплексов программ, анализе аналитических и численных результатов, выработке практических рекомендаций, в определении параметров теоретических моделей, адекватно описывающих экспериментальные данные, и сопоставлении результатов теоретических и экспериментальных исследований.

Основные результаты диссертации опубликованы более чем в 33 статьях, из них 14 из списка ВАК.

Объем и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Она изложена на 270 страницах машинописного текста, включая 119 рисунков и 3 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 283 наименования. Фамилия автора в этом списке выделена жирным шрифтом.

В диссертации принята тройная нумерация формул и рисунков. Первая цифра определяет номер главы, вторая – номер параграфа в данной главе, третья – порядковый номер формулы или рисунка внутри данного параграфа.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные идеи исследований, перечислены используемые методы и полученные новые результаты, показана их научная и практическая ценность, представлены основные научные положения, выносимые на защиту, приведено описание структуры диссертации.

В первой главе выполнен анализ отечественных и зарубежных исследований, касающихся распространения нестационарных волн в блочных средах и в упругом стержне с внешним сухим трением на границе контакта.

Во второй главе, посвященной распространению нестационарных волн в блочных иерархических средах, рассматриваются вопросы создания одномерных и двумерных моделей блочных сред и решения динамических задач с использованием данных моделей. Исследуются две основных модели одномерных блочных сред. В качестве первой модели рассматривается блочная среда, состоящая из цепочки упругих стержней, соединенных вязкоупругими прослойками. В качестве второй модели рассматриваются жесткие блоки, масса которых равна массе стержней, а прослойки остаются прежними (цепочка масс с пружинами и демпферами). Прослойки моделируются как набор вязких и упругих элементов, соединенных последовательно и параллельно. Рассматриваются также одномерные периодические системы произвольного иерархического строения. Теоретически исследуется задача о распространении волны деформации в этих системах. Получены аналитические оценки степени затухания скоростей и ускорений блоков при ударном воздействии, проведено сравнение с численными расчетами и с данными экспериментов по ударному возбуждению волны деформации в цепочке стальных стержней, разделенных прослойками из резины, и в стопке силикатных кирпичей.

Для двумерных блочных сред рассматривается антиплоская и плоская постановки задач. В антиплоской постановке получены аналитические и численные оценки нестационарного поведения возмущений при сосредоточенном синусоидальном и ступенчатом воздействии. В плоской постановке получены теоретические оценки поведения блочной среды при воздействии типа «центр расширения», «центр вращения» и при сосредоточенном воздействии на поверхность блочного полупространства (задача Лэмба). В задаче Лэмба также исследовано влияние вязкости на распространение волн в полупространстве, заполненном блочной средой.

В третьей главе численно и аналитически исследуется влияние сухого трения на поверхности контакта упругой трубы и внешней среды на процесс распространения нестационарных волн при ударном воздействии. Рассматриваются два варианта: труба взаимодействует с деформируемой и недеформируемой окружающей средой. Разработан аналитический метод решения нелинейной задачи взаимодействия по закону сухого трения трубы и недеформируемого грунта и получено решение задачи при импульсном продольном воздействии на трубу, противоположный конец которой свободен от напряжений.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы представленной работы.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. математические модели для одномерных и двумерных блочных иерархических сред с учетом вязкости;
2. обоснование приемлемости математических моделей для описания поведения блочных сред в лабораторных экспериментах;
3. асимптотические представления функции Ломмеля через функцию Скорера и производной функции Ломмеля через производную функции Скорера;
4. аналитические методы решения задач для одномерных и двумерных блочных сред с учетом вязкости прослоек и иерархичности блочной структуры и решение конкретных задач при различных нестационарных воздействиях;
5. аналитический метод решения задачи распространения волн в трубе с учетом внешнего сухого трения на поверхности трубы при продольном воздействии импульса произвольной выпуклой формы и аналитические решения конкретных задач с учетом и без учета многократных отражений от торцов трубы конечной длины;
6. численное решение задачи о распространении волн в трубе с учетом внешнего сухого трения на границе трубы и окружающего деформируемого грунта при продольном импульсном воздействии.

Настоящая работа выполнена в лаборатории Механики взрыва Института горного дела СО РАН.

Благодарности. Автор благодарит д.ф.-м.н. Е.Н. Шера за внимание и поддержку при выполнении данной работы и полезное обсуждение научных результатов. Автор благодарит д.ф.-м.н. Е.Н. Шера и с.н.с. А.Г. Черникова за проведение лабораторных экспериментов.

Глава 1.

Анализ исследований по проблеме волновых процессов в блочных и упругих средах с учетом вязкости и внешнего сухого трения. Современное состояние вопроса.

До последнего времени в геомеханике широко применялась теория деформирования породного массива как однородной среды, динамика которой описывается хорошо разработанной линейной теорией распространения упругих волн. На базе этой теории построены методологические основы расчета напряженного состояния горных пород вблизи выработок, обработки сейсмических данных и интерпретации сейсмологической информации в разведочной геофизике и горном деле. Серьезный повод к пересмотру сложившихся взглядов дают исследования последних лет, касающиеся распространения сейсмических волн в породных массивах, свидетельствующие о необходимости учета в математических моделях, предназначенных для геомеханики и сейсмики, блочного строения горных пород [95–98, 162–166]. Особенно большое влияние на развитие этих разработок оказала фундаментальная концепция М.А. Садовского [164], согласно которой, массив горных пород представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня, соединенных между собой прослойками, состоящими из более слабых трещиноватых пород, деформирование которых существенно нелинейно и обладает сложной реологией. Анализ размеров блоков в масштабах от кристаллов, фракций породного массива до геоблоков земной коры показал, что отношение размеров блоков, соседних по масштабу, $a = l_{N+1} / l_N$, обладает определенной устойчивостью $a \approx 1.4$ [98]. Работа [98] посвящена изучению отношения линейных размеров блоков горных пород к раскрытию трещин между ними в иерархической структуре массивов. Другим важным экспериментально найденным статистическим инвариантом блочной структуры

является μ , отношение толщины прослойки между блоками одного масштаба к характерному размеру блока. Было, например, найдено [98], что для пород рудников Норильска $\mu \approx (0.5 - 2) \cdot 10^{-2}$. Исследования деформационных свойств прослоек между блоками разных размеров сейсмическими методами [79] показали, что жесткость прослоек изменяется обратно пропорционально размеру блоков. Часто прослойки между блоками представлены более слабыми, трещиноватыми породами.

Наличие таких податливых прослоек приводит к тому, что деформирование блочного массива как в статике, так и в динамике происходит в основном за счет их деформации. Как отмечено в работах [83, 95, 106] и многих других, блочная структура с учетом ее иерархичности — причина различных динамических явлений, которые отсутствуют в однородной среде, а значит, не могут быть описаны ее моделями. Среди них выделим распространение в породных массивах со структурой волн маятникового типа, обладающих низкой скоростью распространения существенно меньшей скорости упругих волн в среде, состоящей из материала блоков, большой длиной при коротком импульсном воздействии и слабым затуханием.

В работах [26, 33, 41, 45, 95 – 97, 190] показано, что представление блоков как массивных недеформируемых тел позволяет выделить из сложного динамического состояния упругой блочной среды ту её часть, которая определяется деформированием прослоек между блоками. При этом достаточно точно описываются возникающие при ударном воздействии низкочастотные волны маятникового типа. При импульсном воздействии в блочной среде возникает широкополосное возмущение, которое по мере распространения разделяется на высокочастотное, характерное для собственных колебаний блоков, и низкочастотное. Эксперименты на моделях блочных сред показали, что высокочастотные волны быстро затухают, и основное сейсмическое воздействие оказывают низкочастотные волны, ограниченные по спектру первой полосой пропускания фильтра низких частот, которым оказывается блочная среда.

Некоторые особенности маятниковых волн были изучены экспериментально и теоретически на одномерных моделях блочных сред, представленных цепочкой упругих блоков, разделенных податливыми прослойками в работах [12, 24, 26, 33, 34, 41, 45, 49, 56, 58, 94, 97, 98, 104, 110, 131 – 134, 160, 168, 190, 197, 199, 250, 270, 281]. Большое внимание уделено маятниковым волнам, распространяющимся в блочных средах в работах [51, 95, 96, 251, 252, 257, 269, 271 – 273, 280, 282]. В работе [51] проведен анализ деформационного процесса в нескольких сильных сейсмических событиях Байкальской рифтовой зоны и зафиксирована медленная деформационная волна в диапазоне скоростей $\sim 0.43 - 1.76$ м/с.

В отличие от работ [49, 95, 97, 99, 134, 281], в которых основное внимание уделено изучению результатов лабораторных и натурных экспериментов в блочных средах при ударных нагрузках, в работе автора [26] проводится теоретический анализ влияния блочности среды на процесс распространения волн и спектральные характеристики возмущений. В [26] исследуется периодическая система, состоящая из стержней конечной длины, взаимодействующих между собой через соединяющие их пружины, которая в первом приближении моделирует среды с блочной структурой, свойственной горным породам. Как частный случай изучается цепочка масс, связанных пружинами. Анализ дисперсионных свойств и нестационарных процессов в цепочке масс проводился также в [175, 176, 263]. Теоретические расчеты [26] волнового движения в цепочке упругих стержней, разделенных податливыми прослойками, показали, что низкочастотное возмущение, возникающее при импульсном воздействии, достаточно хорошо описывается в модели “жесткие блоки – вязкоупругие прослойки”. В [26] исследованы общие свойства и различия в спектральных характеристиках возмущений и процессах распространения волн в цепочке масс и системе стержней. В [168] также рассматривалась цепочка стержней и цепочка масс, но в отличие от [26, 35, 41] учтено необратимое смятие прослоек на контактной границе. Результаты экспериментальных и теоретических исследований спектральных характеристик

динамических процессов в блоках, соединенных между собой нелинейными пружинами представлены в [94, 134].

В [33, 98] для экспериментального изучения процесса распространения маятниковых волн в блочной среде была использована модель блочной среды, составленная из стопки силикатных кирпичей. В [98] исследован характер изменения зависимости ускорения от времени и спектрального состава колебаний при распространении волны по сборке из кирпичей.

С целью исследования закона затухания нестационарной волны и определения скорости её распространения в [33, 34, 41, 45, 190] предложено для описания поведения прослоек между стержнями использование двух вариантов соединения вязких и упругих элементов: параллельного и последовательного. Для оценки адекватности принятой модели в [33, 34, 41, 45] проведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов исследования распространения волны при ударном нагружении системы стержней, разделенных резиновыми прослойками. Эксперименты по ударному нагружению систем с небольшим количеством блоков (19–20), показали, что степень затухания волны в основном определяется демпфирующими свойствами прослоек.

В [45, 190] исследуется влияние иерархической структуры блочной среды и демпфирующих свойств прослоек между блоками на закономерности распространения нестационарных волн в блочных средах периодического строения. В [34, 45] для получения теоретических оценок в математической модели используется только параллельное соединение. Такое упрощение позволяет получить простые аналитические выражения для описания затухания одномерных маятниковых волн.

Двумерные модели блочных сред рассматривались в работах [16 – 19, 22, 27 – 29, 31, 32, 43, 50, 59, 83, 86, 169, 170, 257, 133, 204].

В [59] блочная среда моделируется набором шестиугольных элементов, взаимодействующих с силой равной отношению давления к площади соприкосновения. Для данной модели была изучена динамика ненапряженного

полупространства, при условии, что слой поверхностных элементов подвержен гармоническим колебаниям.

В работе [83] горный массив представлен блоками кубической формы, расположенными по одну сторону от трещины. Причем больший структурный блок может состоять из меньших блоков. Между собой и массивом блоки взаимодействуют по закону сухого трения. Для такой модели оценены параметры движения блоков при действии плоской волны давления треугольной формы.

В [50] расчеты движения блочной среды проводились на основе двумерной модели изотропных упругопластических сред методом подвижных клеточных автоматов. В качестве уравнений движения использовались уравнения Ньютона–Эйлера. Блочная среда моделируется как упаковка из круглых относительно прочных дисков (клеточных автоматов) одинакового радиуса, разделенных границами со свойствами, существенно отличающимися от свойств блоков.

В [86] исследовались некоторые особенности сейсмического процесса в блочной среде на модели, описывающей нерегулярную упаковку жестких дисков, радиусы которых распределены в интервале 0,65–1,35. Сдвиговая компонента контактной силы рассчитывалась с учетом внешнего сухого трения. Фрагмент из 300 частиц подвергался деформации путем задания кинематического смещения дисков. В качестве меры сейсмической активности использовалась кинетическая энергия блоков. Исследовалась зависимость суммарной кинетической энергии блоков от времени нагружения. Изучалось также влияние микроколебаний на процесс выделения энергии при деформировании блочной среды.

Для описания динамического поведения двумерной блочной среды такой же подход, как и для одномерных блочных сред [26, 33, 34, 41, 45, 168, 190], был использован в работах [169, 170, 257], в которых предполагалось, что блоки прямоугольной формы взаимодействуют через податливые прослойки. В [169] блоки предполагались жесткими, в [170, 257] – упругими. В [257] для моделирования упругих волн в двумерной блочной среде использовались также

уравнения ортотропного континуума Коссера. Численно показано хорошее соответствие в результатах расчетов по этим двум моделям. В [170] показано, что модель среды из абсолютно жестких блоков применима только в случае малой жесткости прослоек относительно жесткости блоков.

Более упрощенную модель двумерной блочной среды можно получить, если считать блоки сосредоточенными массами, соединенными пружинами. В этом случае регулярную блочную систему можно представить как решетку масс, связанных пружинами. Различные варианты такой модели использованы в плоской [31, 43; 206, 207 208, 224, 225, 267] и антиплоской [16, 17, 210, 247, 248] постановке.

Несмотря на очевидную ограниченность периодических решеток, как моделей для описания реальных структурных объектов, их преимущество в возможности конструировать иерархические модели, привлекать к расчету аналитические и численные методы, качественно описывать динамические явления, свойственные этим объектам, и, что немаловажно, получать результаты в обозримом виде. Теория волн в периодических структурах, имеющая своим истоком классическую работу Рэлея [235] и опирающаяся на работы [55, 101, 239, 240, 241], нашла вначале широкое применение в механике составных конструкций и композитов [104, 201; 232], для описания дискретной модели одномерного кристалла, подвергаемого одноосному растяжению [67], и не привлекалась для описания динамических событий в породном массиве иерархического строения. В то же время результаты проведенных исследований интересны для приложений в сейсмике. Так, в [210] при исследовании колебаний решеток в антиплоской постановке открыто существование “звездных волн” — динамического возмущения, распространяющегося в среде вдоль лучей, определяемых геометрией решеток, а также получено аналитическое решение при монохроматическом сосредоточенном воздействии. В [210] допущены небольшие ошибки в аналитическом решении, которые исправлены в [32]. В антиплоской постановке в [16] получено аналитическое решение, описывающее

поведение волн, распространяющихся в квадратной решетке масс при ступенчатом сосредоточенном нагружении.

Моделированию особенностей распространения сейсмических волн при взрыве в однородной или слоистой блочной среде в двумерной антиплоской постановке посвящена работа [17].

В работе [225] анализировалось распространение волн в одно- и двумерных структурах “цепочки – массы”, подверженных периодическому нагружению. Двумерная задача рассматривалась в плоской постановке. Внимание было уделено структурам, имеющим периодически меняющиеся свойства масс и пружин. Исследованы амплитудно-частотные характеристики, показано влияние границ, вязкости и изменения параметров структуры на волноводные и фильтрационные свойства системы.

Помимо перечисленных выше работ, есть еще обширная литература, посвящённая структурно неоднородным геомеханическим средам и связанным с нею проблемам. Отметим здесь работы, имеющие отношение к теме диссертации, В.В. Адушкина, Г.Г. Кочаряна, М.В. Курлени, А.М. Линькова, П.В. Макарова, М.А. Садовского, В.М. Садовского, А.А. Спивака и др. [5 – 11, 73, 80 – 82, 85, 93, 100, 102, 103, 107, 108, 114 – 117, 130, 135, 136, 149, 151, 153, 159, 161, 172, 173, 183, 185, 233, 256, 283].

Рассмотрим публикации, посвященные распространению сейсмических волн. Задача о динамическом воздействии вертикальной сосредоточенной силы, приложенной к границе упругого полупространства, впервые рассмотрена Лэмбом [229]. В этой работе были получены интегральные уравнения для определения перемещений на границе полупространства и показано, что по поверхности полупространства распространяются не только Р- и S- волны, но и рэлеевские [234]. В [179, 264] решение плоской задачи Лэмба было получено с помощью метода функционально-инвариантных решений в виде интегралов. В [213] методом интегральных преобразований было получено решение трехмерной задачи Лэмба. Для вычисления обратных интегральных

преобразований он предложил метод, который сейчас носит его имя. В дальнейшем этот метод был развит и обобщен в [217].

Заметим, что задача Лэмба и рэлеевские волны рассматривались во многих монографиях, например, [60, 66, 70, 126, 127, 139, 148, 158, 175, 188, 202, 242, 268, 189] и в статьях, например [129, 140, 219, 230, 244], посвященных вопросам распространения волн. В большинстве этих работ был использован метод Cagniard – De Hoop [213, 217].

Статическое решение этой задачи, когда нагрузка не зависит от времени, называемой задачей Фламана, приведено в [154], где определено поле перемещений во всей полуплоскости. Поле напряжений для плоской статической задачи Лэмба построено в [127]. Кроме того, в [113, 127] получено приближенное решение в стационарной постановке задачи Лэмба для перемещений на поверхности полупространства при действии гармонической сосредоточенной нагрузки. В [127] решение получено для изотропной упругой среды, в [113] при помощи метода Лайтхилла на больших расстояниях от точки приложения нагрузки получено асимптотическое решение для анизотропной среды. В стационарной постановке задача Лэмба рассмотрена также в [92] в рамках континуума Коссера.

В нестационарной постановке решение плоской задачи Лэмба для упругой среды рассматривалось в [139, 140, 148, 175, 202, 219, 242]. В рамках теории моментного континуума деформирование блочной среды с тонкими прослойками численно исследовалось в [159, 161]. В [77, 227] получены асимптотические решения в окрестности квазифронта для случая действия мгновенной сосредоточенной силы на полубесконечную пластину. Для решения использован метод контурных интегралов и решение представлено в виде интегралов.

В работе [87] использовалось конечно-элементное моделирование в плоской и пространственной задачах Лэмба при действии гармонического нагружения, в [72] применялся конечно-разностный метод решения плоской задачи Лэмба с распределенной нагрузкой на поверхности, в [111] задача решалась методом конечных элементов с использованием условий излучения.

В [207] приведено решение задачи Лэмба о распространении возмущений в дискретной среде, составленной из решетки масс, которая моделирует непрерывную упругую среду. Для 2D- и 3D- решеток решение получено в виде кратных интегралов, подобных интегральным представлениям функций Бесселя первого рода. Таким образом, в [72, 207] рассмотрены различные варианты дискретизации упругой среды для задачи Лэмба. В отличие от [72, 207] в [206] получено как конечно-разностное решение, так и аналитическое решение задачи Лэмба для дискретной среды, и проведено сопоставление этих решений между собой и с решением для упругой среды [140, 175].

В перечисленных выше работах рассматривались различные аспекты плоской задачи Лэмба. Существует большое количество работ посвященных пространственной задаче Лэмба, например [87, 128, 129, 141, 142, 147, 174, 175].

При движении блочных сред происходит не только распространение продольных и сдвиговых волн [31, 43], но и проскальзывание по границам блоков. В [84] проведены лабораторные эксперименты, направленные на исследование сейсмоакустического эффекта, проявляющегося при различных режимах скольжения на границе между блоками горной породы. В работе [152] предлагается приближенное аналитическое решение двумерной задачи для множества близко расположенных трещин сдвига с кулоновым трением вдоль их берегов. Проблемы с трением и скольжением возникают не только при распространении разрывов в горном массиве при землетрясении и техногенных воздействиях [81, 84, 152], но и во многих технологических процессах: забивка и ударное извлечение свай, бестраншейная прокладка подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт, поведение подземных трубопроводов при землетрясениях. Движение разного рода стержневых элементов в механических системах также сопровождается трением. Одной из важнейших задач при этом является изучение влияния на волновой процесс трения между внешней средой и боковой поверхностью трубы или стержня.

Исследованию вопросов взаимодействия тел с учетом трения посвящена обширная литература. Отметим монографии [48, 57, 64, 74, 88, 109, 112, 120, 138,

156, 198], в которых можно найти обзоры и исторические очерки по данной тематике.

Впервые волновые процессы в стержнях, окруженных средой, были рассмотрены Н.М. Герсевановым [61] в 1930 г. на основе теории Сен-Венана в связи с проблемой забивки свай в грунт. В дальнейшем задача о распространении продольных волн в стержне, на поверхности которого действует постоянная по амплитуде, но разная по направлению сила сухого трения, исследовалась в [48, 57, 71, 74, 89, 119 – 125, 138, 156, 177, 178, 182, 186, 187, 198, 215, 243, 245, 265, 277, 278].

В этих работах внешняя среда, окружающая стержень, предполагается недеформируемой. Используется общий метод решения таких задач, который состоит в сведении рассматриваемой нелинейной задачи к ряду решаемых последовательно линейных задач. Основная проблема связана с определением границ областей по времени и продольной координате, внутри которых величина и направление силы трения постоянны. Направление действия сил трения зависит от знака скорости в этих волнах. Решение в каждой из областей строится учетом предварительно определенного знака скорости. Использование описанного подхода в [57, 71, 119 – 125, 138, 198, 245], позволило получить решения для целого ряда задач при достаточно простых законах нагружения стержня.

В [57] методом характеристик рассмотрены задачи об ударе по упругому стержню, частично погруженному в среду с сухим трением. Решены задачи об ударе с постоянной скоростью и со скоростью, монотонно увеличивающейся во времени. Определено значение критической скорости удара, при которой фронт ударного импульса доходит до противоположного конца стержня.

В [138] изучается движение стержня конечной длины с учетом контактного сухого трения между стержнем и внешней средой. На левом торце стержня задается постоянная скорость перемещения. Движение окружающей среды учитывается только в скорости движения приложенной боковой нагрузки. В

такой постановке с помощью преобразования Лапласа получены аналитические решения.

В [198] рассмотрена задача о распространении возмущения по стержню, на боковой поверхности которого реализуется закон сухого трения, когда один его конец перемещается по гармоническому закону. Получены приближенные решения методом комплексных амплитуд и методом механического аналога. Эти два решения качественно совпадают, отличаются только количественно.

В [71, 120, 121] получено аналитическое решение задачи о возбуждении колебаний в стержне с внешним сухим трением постоянным напряжением на конце с жестко заделанным противоположным концом. В [71, 119, 122, 124, 245] основной рассматриваемой задачей является динамика упругого стержня, один из торцов которого взаимодействует с ударяющей по нему массой, а на другом конце задается либо перемещение, либо связь между напряжением и перемещением. Кроме того, учтена сила тяжести стержня и жесткого тела и сопротивление по закону сухого трения по боковой поверхности. В [245] приведено решение этой задачи для произвольного момента времени и уточнено время отскока массы от стержня. В [122, 123, 138] рассмотрены нестационарные и стационарные одномерные задачи о движении трубопровода, взаимодействующего с вмещающей породой по закону внешнего сухого трения в рамках модели звукового и сверхзвукового обтекания конечного и бесконечного стержня.

Несмотря на большой теоретический вклад в решение проблемы, эти результаты, однако, не отвечают на ряд важных вопросов практики. Так, например, существенные ограничения накладываются на характер нагрузки, действующей на стержень. Они связаны с тем, что при плавном нагружении фронт волны, распространяющийся по стержню, движется медленнее, чем скорость распространения возмущений в стержне, и его необходимо определять в процессе решения, что удается далеко не всегда. В то же время в большинстве практических задач нагрузки имеют довольно сложный вид.

В [177, 182] приводится численное решение. В [182] решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним сухим трением при действии прямоугольного динамического воздействия получено методом характеристик. В [75, 177] задача о динамическом воздействии на трубу с сухим трением Кулона решалась методом конечных разностей.

Большое количество работ посвящено проблеме забивания свай в грунт [184, 228, 236, 237, 249, 253, 254, 260, 261, 262, 276]. В [254] экспериментальные данные записи ускорения молота используются при расчете распределения сопротивления грунта вдоль сваи. В [253] предложена простая динамическая модель для определения коэффициента сопротивления грунта, возникающего в процессе забивания сваи, расчеты сравнены с базой данных динамических тестов и обсуждается, как эта модель сопротивления грунта может быть использована в волновом уравнении, которое описывает движение сваи. В [260] динамический анализ нагруженной по боковой поверхности сваи осуществляется с помощью гранично-элементной формулировки для грунта. В [236, 237] используется метод конечных элементов для осесимметричной двумерной задачи погружения сваи в глину, на поверхности сваи и грунта применяется алгоритм скользящего фрикционного контакта. В [276] на основе анализа волнового уравнения, предложенного в работе [265], оценивается несущая способность сваи и результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными. В [261, 262] численно решается задача о забивании сваи, при этом фрикционный контакт свая – грунт моделируется с использованием теории упрочнения/разупрочнения пластичности. В [228] проводится конечно-элементный анализ на основе кулоновского закона контактного трения на поверхности свая – грунт, результаты сравниваются с экспериментальными данными. В [249] экспериментально исследуется влияние грунтовой пробки, которая формируется внутри забиваемой с открытым концом сваи, на статическую и динамическую реакцию сваи. Экспериментальные работы, посвященные проблеме погружения трубы в грунт, представлены также в [53, 76, 143]. Заметим, что в работах [75, 228, 236, 237, 253,

254, 260 – 262, 276] не рассматриваются нестационарные проблемы взаимодействия упругого грунта с погружаемой сваей.

Динамическая задача о распространении возмущений в композите, состоящем из волокна и связующего, на поверхности контакта которых задано сухое трение, приведена в [266]. Движение волокна и связующего элемента описывается одномерными волновыми уравнениями, для которых получено аналитическое решение и проведены численные расчеты методом конечных элементов. Нагрузка предполагалась растущей линейно со временем. Основное внимание уделено исследованию эффекта запаздывания возмущений по сравнению со скоростью распространения волны в стержне.

В работах автора [36, 37, 46] используется способ сквозного численного расчета волновых процессов в системах с сухим трением, предложенный в [177], позволяющий рассматривать нагрузку любого типа, поскольку направление и величина силы трения в каждой точке, и в каждый момент времени выбирается в процессе решения из физических соображений. В отличие от перечисленных выше работ, в [36] получены приближенные аналитические решения задачи о распространении возмущений в стержне конечной и бесконечной длины с внешним сухим трением, когда на одном из его концов задано импульсное напряжение произвольной формы, а другой конец свободен от напряжений. Окружающая среда предполагается недеформируемой. В [37] учтено деформирование внешней среды и выполнено сравнение расчетов, проведенных по двум моделям с деформируемой и недеформируемой средой. Определены пределы применимости более простой модели. Получены приближенные аналитические решения одномерной задачи о распространении возмущений в радиальном направлении в упругой среде, взаимодействующей с трубой без проскальзывания, при продольном воздействии, приложенном к торцу трубы. Эти решения являются тестовыми для конечно-разностных решений двумерных задач, в которых на поверхности контакта трубы и среды задается либо упругое взаимодействие, либо сухое трение.

Для решения задач о распространении нестационарных возмущений в однородных и дискретно-периодических средах существует много методов. Одним из известных методов исследования является метод интегральных преобразований, когда по времени применяется преобразование Лапласа, а по пространственной координате (или по двум координатам сразу) применяется непрерывное или дискретное преобразование Фурье. Отметим здесь монографии Л.И. Слепяна [175, 176, 263], в которых активно развиваются эти методы. Только для небольшого класса нестационарных задач механики удастся провести точное обращение интегральных преобразований. В большинстве случаев возникает необходимость асимптотического обращения. В работе [78] изложены асимптотические методы вычисления интегралов, такие как метод наискорейшего спуска, метод перевала, метод стационарной фазы и другие. В работе Л.И. Слепяна [175] развит метод совместного асимптотического при $t \rightarrow \infty$ (t – время) обращения преобразований Лапласа и Фурье в окрестности луча $x = ct$, где c – скорость возмущений, распространяющихся без дисперсии, x – координата. В монографии Л.И. Слепяна [175] и в работах его последователей [3, 4, 26, 30, 144 – 146] решены многие задачи динамики упругого и гидроупругого взаимодействия конструкций со средой, а также нестационарные задачи для дискретно-периодических сред [34, 41, 45, 190]. Заметим, что для решения двумерных задач динамики дискретно-периодических сред, рассматриваемых в диссертации, метод Л.И. Слепяна применим не всегда.

Аналитические решения, полученные при некоторых упрощающих предположениях, требуют проверки на правильность и определения области параметров, при которых они справедливы. В этой связи важнейшее значение приобретает применение численных методов. Они имеют также огромное самостоятельное значение, поскольку позволяют получить качественные и количественные оценки механических процессов. Для решения нестационарных задач механики деформируемого твердого тела с успехом используются явные конечно-разностные схемы, вариационно-разностные, неявные схемы [62, 155].

Неявные схемы обладают одним существенным достоинством – они устойчивы при любых параметрах разностной сетки, в то время как явные схемы лишь условно устойчивы. Неявные схемы определяют бесконечную область зависимости разностных уравнений, что приводит к потере точности при расчете фронтов и высокочастотных осцилляций. В тех задачах, где интерес представляет исследование распространения быстроменяющихся возмущений, применение неявных схем нецелесообразно.

В диссертационной работе численные решения получены с использованием явных схем метода конечных разностей.

Впервые явная схема была использована в [216] для решения одномерных задач акустики и в дальнейшем применялась в различных задачах динамики деформируемых сред [62, 90, 91, 155].

В явной схеме область зависимости в одномерном случае определяется величиной $\lambda = \tau/h$, где τ , h – шаги разностной сетки по времени и пространству. При $\lambda < 1$ область зависимости разностного уравнения больше области зависимости дифференциального. В этом случае в численном решении появляются высокочастотные осцилляции в области за фронтом, которые отсутствуют в точном решении, и размывается фронт волны. Это явление принято называть аппроксимационной вязкостью [62] или численной дисперсией [4].

Изучению численной дисперсии в разностных гиперболических задачах и анализу способов её подавления посвящена обширная литература [4, 15, 105, 118, 167, 180, 214, 220, 223, 231, 275]. Конечно-разностные методы с минимизацией численной дисперсии были использованы для решения задач динамического разрушения сред [38, 39, 40, 42, 191 – 196], для исследования распространения волн по элементам конструкций [13, 14, 44, 171], в нестационарных задачах гидроупругости оболочек [4, 20, 21, 30, 54, 63, 144, 205], при расчете динамических нагрузок, действующих на жесткие и упругие включения [1, 2], при расчете задач с внешним сухим трением [36, 37, 46]. Несмотря на достигнутые успехи в численном моделировании волновых процессов, проблемы

с паразитными эффектами численной дискретизации остаются. Особенно это касается не одномерных нестационарных задач.

Приведённый краткий обзор научных работ позволяет заключить, что тематика настоящей диссертации, связанная с построением математических моделей распространения волн в блочно-иерархических средах с вязкостью и в упругих стержнях с внешним сухим трением, с развитием аналитических и численных методов решения и с решением на их основе конкретных задач механики, является актуальной.

Заканчивая первую главу, сформулируем **задачи исследований**:

1. Разработать математические модели для одномерных и двумерных блочных иерархических сред с учетом вязкости.
2. Определить волноводные свойства одномерных и двумерных блочных сред с учетом вязкости прослоек и иерархичности блочной структуры.
3. Определить спектральные характеристики одномерных и двумерных блочных сред с учетом вязкости прослоек и иерархичности блочной структуры.
4. Разработать аналитические методы решения и получить аналитические решения одномерных и двумерных задач для блочных сред с учетом вязкости прослоек и иерархичности блочной структуры при нестационарных воздействиях.
5. Разработать аналитический метод решения и получить решения конкретных задач для трубы с внешним сухим трением на границе контакта трубы и грунта.
6. Разработать конечно-разностные алгоритмы и получить численные решения динамического деформирования исследуемых систем при нестационарных нагрузках.
7. Оценить точность и область применимости, полученных асимптотических и точных решений, сравнивая аналитические и численные решения.
8. Провести анализ численных и аналитических решений задач и выявить механические эффекты.
9. Оценить приемлемость математических моделей для описания поведения блочных сред, сравнивая теоретические и экспериментальные данные.

Глава 2.

Моделирование распространения волн в блочных средах

§ 2.1. Одномерные блочные среды

2.1.1. О распространении упругих волн в стержневой системе при импульсном нагружении

Ниже исследуются волноводные свойства блочной среды на примере дискретно-периодической системы, состоящей из упругих стержней конечной длины, соединенных пружинами. Как частный случай изучается цепочка масс, связанных пружинами. Выявляются общие свойства и различия в спектральных характеристиках возмущений и процессах распространения волн в цепочке масс и системе стержней. Результаты данного пункта опубликованы в [26].

Постановка задачи

Рассматривается система однотипных упругих стержней, связанных между собой пружинами (рис.2.1.1).

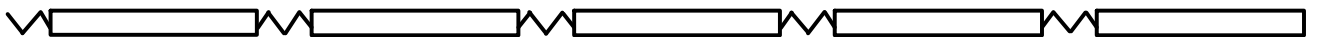


Рис.2.1.1. Периодическая система упругих стержней, связанных пружинами

Свойства стержней описываются параметрами: ρ — плотность, c — скорость звука, l — длина, S — площадь поперечного сечения. Все пружины одинаковы: k — их жесткость. Уравнения движения стержней имеют вид [150]:

$$\ddot{u}_n = c^2 u_n''; \quad n = 0, \dots, N, \quad (2.1.1)$$

где u_n — перемещение n -го стержня; штрих означает производную по продольной координате x ; точка — по времени t . На концах стержней напряжения пропорциональны относительному удлинению пружин

$$SEu'_n|_{x=l(n-1/2)} = -k(u_{n-1}|_{x=l(n-1/2)} - u_n|_{x=l(n-1/2)}); \quad n = 1, \dots, N; \quad (2.1.2)$$

$$SEu'_n|_{x=l(n+1/2)} = -k(u_n|_{x=l(n+1/2)} - u_{n+1}|_{x=l(n+1/2)}); \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Здесь E — модуль Юнга. Начальные условия нулевые. В момент времени $t = 0$ к левому концу нулевого стержня прикладывается полусинусоидальная нагрузка с амплитудой P_0 :

$$Eu'_0|_{x=-l/2} = P_0 Q(t); \quad (2.1.3)$$

$$Q(t) = \sin(\omega_* t) H(\pi - \omega_* t) H(t), \quad (2.1.4)$$

где ω_* — частота воздействия, H — функция Хевисайда. Нагрузка (2.1.4) моделирует импульсную нагрузку длительности $t_0 = \pi/\omega_*$.

Проанализируем более простую модель данной системы. Заменяем стержни жесткими шариками, масса которых равна массе стержней $m = \rho l S$, а жесткость пружин оставим прежней. Уравнения движения такой системы:

$$m\ddot{v}_n = k(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}); \quad (n = 1, \dots, N-1); \quad m\ddot{v}_0 = k(v_1 - v_0) - SP_0 Q(t). \quad (2.1.5)$$

Здесь v_n — перемещение n -го центра масс.

Аналитическое решение задачи

Будем считать, что дискретная система бесконечна ($-\infty \leq n \leq \infty$) и к середине нулевого стержня (для симметрии) приложена сила (2.1.4). Для того чтобы получить аналитическое решение воспользуемся преобразованиями Лапласа и Фурье.

Прямое и обратное преобразование Лапласа по времени t с параметром p определяются формулами [69]:

$$f^L(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f^L(p)e^{pt} dp. \quad (2.1.6)$$

Значком L обозначена преобразованная по Лапласу функция.

Непрерывное преобразование Фурье (значок F) по пространственной координате x с параметром q и его обращение задаются формулами [52]:

$$f^F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iqx} dx; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(q)e^{-iqx} dq. \quad (2.1.7)$$

Введем дискретное преобразование Фурье (значок F_d) по n с параметром q :

$$f^{F_d}(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{iqnl}, \quad f_n(t) = \frac{l}{2\pi i} \int_{-\pi/l}^{\pi/l} f^{F_d}(q) e^{-iqnl} dq. \quad (2.1.8)$$

Обозначим

$$u_n(X, t)|_{X=-l/2} = W_n; \quad u_n(X, t)|_{X=l/2} = V_n,$$

где $X = x - nl$, $-l/2 \leq X \leq l/2$.

К уравнениям движения стержней (2.1.1) применим преобразование Лапласа (2.1.6). Тогда для n -го стержня имеем

$$u_n^L(X) = \left[V_n^L \operatorname{sh} \left(\frac{p}{c} \left(X + \frac{l}{2} \right) \right) + W_n^L \operatorname{sh} \left(\frac{p}{c} \left(\frac{l}{2} - X \right) \right) \right] / \operatorname{sh} \frac{pl}{c}. \quad (2.1.9)$$

Применим преобразование Фурье (2.1.6) к преобразованной по Лапласу системе уравнений (2.1.1) с граничными условиями (2.1.2) – (2.1.4).

Сначала получим для стержневой системы связь непрерывного преобразования Фурье по x с дискретным по n

$$u^{LF} = \int_{-\infty}^{\infty} u^L e^{iqx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} u_n^L e^{iqX} dX e^{iqnl} = V^{LF_d} A(p, q) + W^{LF_d} B(p, q); \quad (2.1.10)$$

$$A(p, q) = -\frac{1}{(q^2 + p^2/c^2) \text{sh}(pl/c)} \left[e^{iq/2} \left(iq \text{sh} \frac{pl}{c} - \frac{p}{c} \text{ch} \frac{pl}{c} \right) + e^{-iq/2} \frac{p}{c} \right],$$

$$B(p, q) = \frac{1}{(q^2 + p^2/c^2) \text{sh}(pl/c)} \left[e^{-iq/2} \left(iq \text{sh} \frac{pl}{c} + \frac{p}{c} \text{ch} \frac{pl}{c} \right) - e^{iq/2} \frac{p}{c} \right].$$

Используя формулы (2.1.10), найдем систему алгебраических уравнений для определения V^{LF_d} , W^{LF_d} :

$$V^{LF_d} \left(\text{ch} \frac{pl}{c} + \frac{\alpha}{p} \text{sh} \frac{pl}{c} \right) - W^{LF_d} \left(1 + \frac{\alpha}{p} \text{sh} \frac{pl}{c} e^{-iq} \right) = \frac{2cP_0 Q^L \text{sh} \frac{pl}{2c}}{Ep}; \quad (2.1.11)$$

$$W^{LF_d} \left(1 + \frac{\alpha}{p} \text{sh} \frac{pl}{c} e^{iq} \right) - W^{LF_d} \left(\text{ch} \frac{pl}{c} + \frac{\alpha}{p} \text{sh} \frac{pl}{c} \right) = -\frac{2cP_0 Q^L \text{sh} \frac{pl}{2c} \text{ch} \frac{pl}{c}}{Ep}.$$

Из (2.1.11) получим решение задачи в изображениях для стержневой системы

$$u^{LF} = \frac{P_0 Q^L C(p, q)}{ED(p, q)}; \quad (2.1.12)$$

$$C(p, q) = \frac{1}{2(q^2 + p^2/c^2) \text{ch}(pl/c)} \times \left[e^{iq/2} \left(\frac{p}{\alpha} \text{sh} \frac{pl}{c} + 3 \text{ch} \frac{pl}{c} \right) - \right. \\ \left. - e^{-iq/2} \left(\frac{iqc}{\alpha} \text{sh}^2 \frac{pl}{c} + \text{ch} \frac{2pl}{c} + 2 + \frac{p}{2\alpha} \text{sh} \frac{2pl}{c} \right) + e^{-3iq/2} \text{ch} \frac{pl}{c} - e^{3iq/2} \right];$$

$$D(p, q) = \cos ql - \text{ch} \frac{pl}{c} - \frac{p}{2\alpha} \text{sh} \frac{pl}{c}; \quad \alpha = \frac{kc}{SE}, \quad (2.1.13)$$

где $D(p, q)$ — дисперсионный оператор для стержневой системы.

К уравнениям (2.1.5) для цепочки масс применим преобразование Лапласа по времени (2.1.6) и дискретное преобразование Фурье (2.1.8). В результате получим следующее решение в изображениях:

$$v^{LF_d} = \frac{P_0 S Q^L}{m D(p, q)}, \quad D(p, q) = p^2 + 4 \frac{k}{m} \sin^2 \frac{ql}{2}. \quad (2.1.14)$$

Проведем анализ дисперсионных свойств двух моделей. Из дисперсионного уравнения $D(i\omega, q) = 0$, где ω — круговая частота, для цепочки масс вычислим фазовую c_Φ и групповую c_Γ скорости

$$c_\Phi = \frac{\omega}{q} = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{ql}{2}, \quad c_\Gamma = \frac{d\omega}{dq} = l \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \frac{ql}{2}. \quad (2.1.15)$$

Видно, что они при $q \rightarrow 0$ равны по величине

$$c_\Phi|_{q \rightarrow 0} = c_\Gamma|_{q \rightarrow 0} = l \sqrt{\frac{k}{m}} = c_1, \quad (2.1.16)$$

т. е. волны движутся без дисперсии и формируют квазифронт.

Для стержневой системы появляются более высокие моды колебаний, связанные с отражениями от концов стержней. Из уравнения (2.1.13) получить явные зависимости c_Φ , c_Γ от волнового числа q не удастся, однако в предположении малости параметра $\beta = \alpha l / c$ возможно получить явные приближенные формулы для всех мод колебаний, которых бесконечно много из-за периодичности тригонометрических функций. Для первой и второй мод зависимости частоты ω , фазовых и групповых скоростей от волнового числа q имеют вид:

$$c_\Phi^I = \frac{2c_1}{ql} \sin \frac{ql}{2}, \quad c_\Gamma^I = c_1 \cos \frac{ql}{2}, \quad \omega^I = \omega_0 \sin \frac{ql}{2}, \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k}{m(1+\beta)}}; \quad (2.1.17)$$

$$c_\Phi^{II} = \frac{1}{q} \left(\omega_2 - \frac{4k}{\omega_2 m} \sin^2 \frac{ql}{2} \right), \quad c_\Gamma^{II} = c_2 \sin ql, \quad \omega^{II} = q c_\Phi^{II}, \quad c_2 = \frac{2\alpha c}{\omega_2}; \quad (2.1.18)$$

где

$$\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{k}{m(1+\beta/3)}}, \quad \omega_1 = \frac{\pi c}{l}, \quad \omega_2 = \frac{\pi c}{l} \left(1 + \frac{4\beta}{\pi^2 + 4\beta} \right). \quad (2.1.19)$$

Качественное поведение дисперсионных кривых для цепочки масс и для первой моды колебаний стержневой системы совпадает; количественно есть небольшие различия — максимальные значения c_ϕ и c_τ в стержневой системе уменьшаются в $\sqrt{1+\beta}$ раз по сравнению с цепочкой масс, максимальная частота — в $\sqrt{1+\beta/3}$. Частота ω_1 соответствует колебаниям с периодом, равным времени пробега продольной волны по стержню туда и обратно. Из формул (2.1.17), (2.1.18) следует, что $c_2 \rightarrow c_1$ с ростом β , тем не менее для всех параметров задачи $c_1 > c_2$, т. е. высокочастотная волна никогда не обгоняет низкочастотную.

На рис. 2.1.2 представлены графики зависимости частоты ω от волнового числа q , найденные из дисперсионного уравнения (2.1.13) для первых двух мод колебаний ($\beta = 0.2$). Пунктирные линии соответствуют приближенным значениям ω_0 , ω_1 , ω_2 . Видно, что они с большой точностью совпадают с численными результатами для малых β . Если дисперсионное уравнение $D = 0$ представим в виде $\cos ql = K(\omega)$, то области частот, где $|K(\omega)| \leq 1$, соответствуют зонам пропускания, для которых существуют распространяющиеся волны. Для частот, удовлетворяющих неравенству $|K(\omega)| > 1$, дисперсионное уравнение имеет комплексное решение, которое определяет затухающие волны. Таких зон для стержневой системы бесконечно много. Первая зона непропускания $\omega_0 < \omega < \omega_1$. Для цепочки масс такой зоной является интервал $\omega > 2\sqrt{k/m}$.

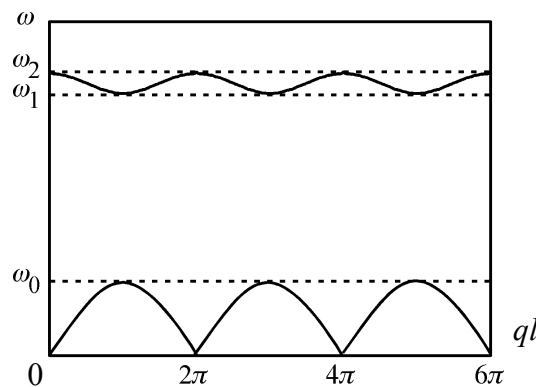


Рис. 2.1.2. Зависимость частоты ω от волнового числа q для первых двух мод колебаний стержневой системы.

Проведем анализ распространения низкочастотных возмущений. Для этого воспользуемся обращением изображений (2.1.12), (2.1.14) на луче $x = ct$ ($c = c_1 + c'$, $c' \rightarrow 0$) методом Л.И. Слепяна [175].

Преобразование по Лапласу полусинусоидальной нагрузки (2.1.4) имеет вид

$$Q^L(p) = \frac{(1 + e^{-p\pi/\omega_*})\omega_*}{\omega_*^2 + p^2}, \quad (2.1.20)$$

а её асимптотика при $p \rightarrow 0$:

$$Q^L(p) \approx \frac{2}{\omega_*}. \quad (2.1.21)$$

В задаче о возбуждении цепочки масс импульсной нагрузкой (2.1.4) асимптотика длинноволновых возмущений ($|q| \ll 1$) при $t \rightarrow \infty$ в окрестности квазифронта $x = c_1 t$ имеет вид

$$\ddot{v}_n = -\frac{P_0 S c_1 l}{m \omega_* (\gamma t)^{2/3}} \frac{d\text{Ai}(\kappa)}{d\kappa}, \quad \dot{v}_n = -\frac{P_0 S l}{m \omega_* (\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa), \quad (2.1.22)$$

$$v_n = -\frac{P_0 S l}{m c_1 \omega_*} \left[\frac{1}{3} - \int_0^\kappa \text{Ai}(y) dy \right], \quad \Delta v_{n+1} = v_{n+1} - v_n = \frac{P_0 S}{m \omega_* c_1 (\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa),$$

$$\text{Ai}(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\kappa z + \frac{z^3}{3}\right) dz, \quad \kappa = \frac{nl - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{8}, \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Здесь $\text{Ai}(\kappa)$ — функция Эйри [222]. Видно, что с ростом времени амплитуды скоростей и разности смещений падают пропорционально $t^{-1/3}$, ускорения пропорциональны $t^{-2/3}$.

Для стержневой системы асимптотика низкочастотной продольной волны имеет аналогичный вид с другими коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{P_0 c_1 l k}{E \omega_* (\gamma t)^{2/3}} \text{Ai}'(\kappa), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{P_0 c_1^2}{E \omega_* (\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P_0 c_1}{E \omega_* (\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa), \quad (2.1.23)$$

$$\kappa = \frac{x - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{8(1 + \beta)^2}, \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k}{m(1 + \beta)}}.$$

Здесь штрих означает производную по аргументу.

Спектральный анализ

Исследуем спектральные характеристики возмущений для полубесконечной цепочки масс. Применим к системе (2.1.5) преобразование по времени вида

$$f^{\tilde{L}}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Решение преобразованной системы ищем в виде $v_n^{\tilde{L}} = V e^{-i\lambda n}$. Коэффициент V находится из граничных условий. В результате получим:

$$v_{n+1}^{\tilde{L}} - v_n^{\tilde{L}} = \frac{P_0 S}{k} Q^{\tilde{L}} e^{-i\lambda(n+1)}, \quad \lambda = 2 \arcsin \mu, \quad \mu = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = 2 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отсюда следует, что спектр удлинения пружин для цепочки масс определяется формулой

$$\left| v_{n+1}^{\tilde{L}} - v_n^{\tilde{L}} \right| = \frac{P_0 S}{k} \left| Q^{\tilde{L}} \right| \begin{cases} 1, & \mu \leq 1, \\ e^{2(n+1) \ln(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1})}, & \mu \geq 1. \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Спектр импульсной нагрузки (2.1.4) имеет вид:

$$\left| Q^{\tilde{L}} \right| = \frac{2\omega_* |\cos(\pi\omega / 2\omega_*)|}{|\omega^2 - \omega_*^2|}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, для стержневой системы получим спектр деформаций в середине стержней

$$G(\omega, \omega_*) = \left| \frac{\partial u_n^{\tilde{L}}}{\partial x} \right|_{X=0} = \frac{P_0 |Q^{\tilde{L}}| R}{EP} \begin{cases} e^{2n \ln(\sqrt{-\mu} - \sqrt{-\nu})}, & \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1 \quad (K \leq -1); \\ 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_0 \vee \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (|K| \leq 1); \\ e^{2n \ln(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})}, & \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3 \quad (K \geq 1); \end{cases} \quad (2.1.25)$$

$$R = \left[(1+K)(1+L) + \frac{2(K-L)^2}{1+2K-L} \right]^{1/2}, \quad P = [L(2K+L)+1]^{1/2},$$

$$K = \cos \frac{\omega l}{c} - \frac{\omega}{2\alpha} \sin \frac{\omega l}{c}, \quad L = \cos \frac{\omega l}{c} - \frac{\omega}{\alpha} \sin \frac{\omega l}{c}, \quad \mu = \frac{K-1}{2}, \quad \nu = \frac{K+1}{2}.$$

Здесь ω_3 — начало следующей зоны пропускания. Область $\omega > \omega_3$ в данной работе не рассматривается. Из (2.1.25) видно, что интервалы $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$ соответствуют волнам, распространяющимся с затуханием. Из этой формулы следует, что справедливо соотношение $G(\omega_1, \omega_1)/G(0, \omega_1) = \pi^2/(8\beta)$, которое показывает, что амплитуда спектра на частоте $\omega = \omega_1$ при $\beta < \pi^2/8$ превосходит амплитуду для $\omega = 0$ при полусинусоидальном воздействии (2.1.4) с частотой ω_1 .

Численные результаты

Аналитические оценки (2.1.22), (2.1.23) получены для бесконечно большого времени и для низкочастотных волн. Для того чтобы определить пределы применимости полученных асимптотических решений (2.1.22), (2.1.23) и найти решения для всех длин волн, проводились численные расчеты и сравнение аналитических оценок с численными результатами. Системы уравнений (2.1.1) с нулевыми начальными и граничными условиями (2.1.2)–(2.1.4) решались методом конечных разностей по явной схеме типа “крест”. Численная дисперсия минимизировалась с помощью оптимального выбора шагов сетки по пространству (h) и времени (τ): $c\tau = h$. Система уравнений (2.1.5) решалась также методом конечных разностей: вторые производные по времени заменялись центрально-разностной аппроксимацией.

На рис. 2.1.3 приведены графики относительных удлинений 20-й пружины $\Delta v_{20} = \frac{(v_{20} - v_{19})k}{P_0 S}$, рассчитанные для цепочки масс при импульсном воздействии (2.1.5) (толстая линия — конечно-разностное решение, тонкая — аналитическое решение (2.1.22)). Пунктир соответствует квазифронту $x = c_1 t$ (2.1.15). Параметры задачи следующие: $m = 4.875$ кг, $k = 48.75$ кг/мс², $\omega_* = 32.64$ мс⁻¹, $\tau = 0.001$ мс, $N = 50$. Анализ результатов показал, что асимптотика (2.1.22) качественно и количественно хорошо описывает распространение длинноволновых возмущений в окрестности квазифронта в цепочке масс уже при $n \geq 5$. Эти низкочастотные волны названы в [95] волнами маятникового типа.

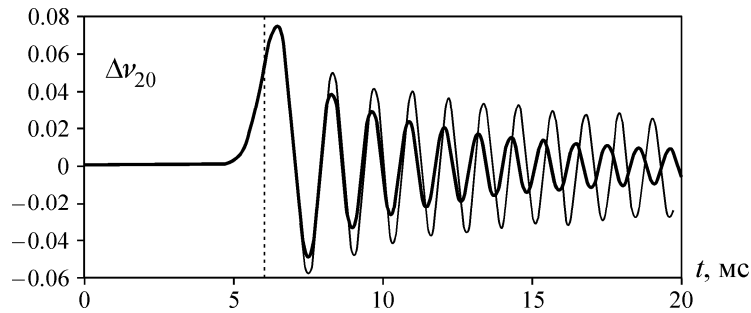


Рис. 2.1.3. Расчетная и аналитическая зависимости удлинения 20-й пружины от времени (толстая и тонкая линии соответственно).

На рис. 2.1.4 представлены графики спектра возмущений $|\Delta v_{10}^{\tilde{L}}|$, где толстая линия соответствует конечно-разностному решению, тонкая — аналитическому решению (2.1.24). Параметры задачи те же, что и на рис. 2.1.3. Оценка (2.1.24) удовлетворительно совпадает с численными расчетами спектра $|\Delta v_{10}^{\tilde{L}}|$ для цепочки масс. Различия связаны с тем, что аналитическое решение получено, во-первых, для полубесконечного интервала времени, во-вторых, для дифференциального уравнения, в то время как численные результаты получены для конечного интервала времени и для конечно-разностного решения.

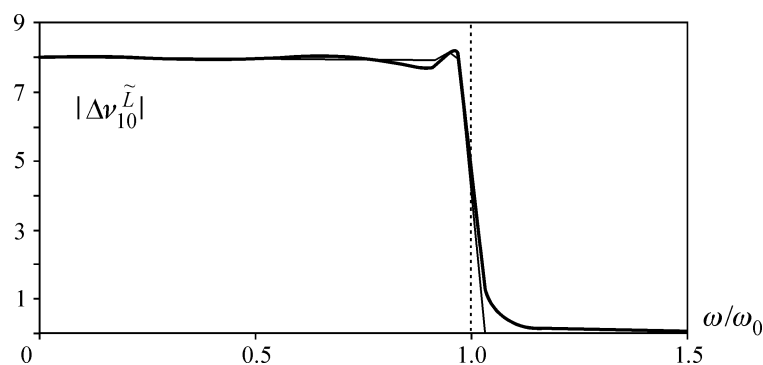


Рис. 2.1.4. Спектр колебаний 10-й массы при импульсном воздействии на 1-ю массу системы.

Характер распространения возмущений по стержневой системе для случая резонансного возбуждения ($\omega_* = \omega_1$) импульсной нагрузкой (2.1.4) проиллюстрирован на рис. 2.1.5, где приведены графики деформаций $u'_n E / P_0$ (рис. 2.1.5а — $n = 5$, рис. 2.1.5б — $n = 10$, рис. 2.1.5в — $n = 20$) и скорости $\dot{u} E / P_0$ (рис. 2.1.5г — $n = 5$) в середине стержней ($X = 0$). Пунктирные линии указывают положение квазифронтов $x = c_1 t$, $x = c_2 t$. Параметры задачи: $\rho = 7800$ кг/м³, $l = 0.5$ м, $S = 0.00125$ м², $k = 48.75$ кг/мс², $c = 5$ м/мс, $\tau = 0.001$ мс, $h = 0.005$ м, $N = 50$. Данным параметрам соответствуют $m = 4.875$ кг и $\beta = 0.1$. Конечно-разностное решение для цепочки масс ($m = 4.875$ кг и $k = 48.75$ кг/мс², $\tau = 0.001$ мс) представлено на рис. 2.1.5в тонкой линией. Асимптотика длинноволновых возмущений (2.1.23) не приведена, поскольку точно так же как в цепочке масс, она с большой точностью описывает амплитуду и форму головного пика. На рис. 2.1.6 представлены графики деформаций при $\beta = 0.4$ ($k = 195$ кг/мс²), рис. 2.1.6а — $n = 5$, рис. 2.1.6б — $n = 10$, остальные параметры те же, что и на рис. 2.1.5.

Сравнение рис. 2.1.5а, г показывает, что в низкочастотной волне для скоростей и деформаций выполняется соотношение $\dot{u} = -cu'$, в то время как для высокочастотных волн поведение огибающих существенно отличается. На рис. 2.1.5, 2.1.6 видно, что позади длинноволновых возмущений, распространяющихся со скоростью c_1 , движутся высокочастотные возмущения,

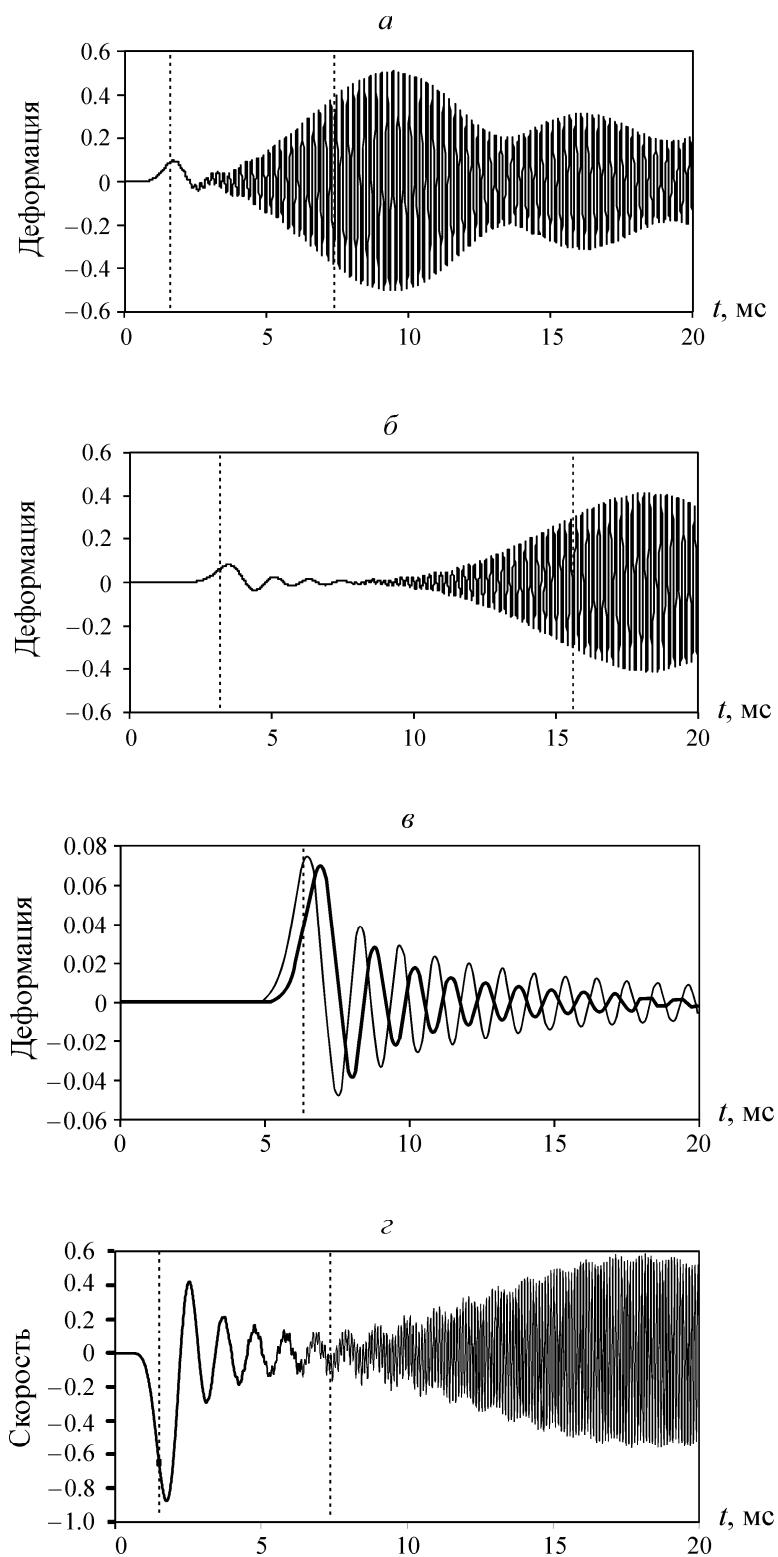


Рис. 2.1.5. Зависимости деформаций и скорости перемещений в середине стержней при воздействии импульсной нагрузки резонансной частоты.

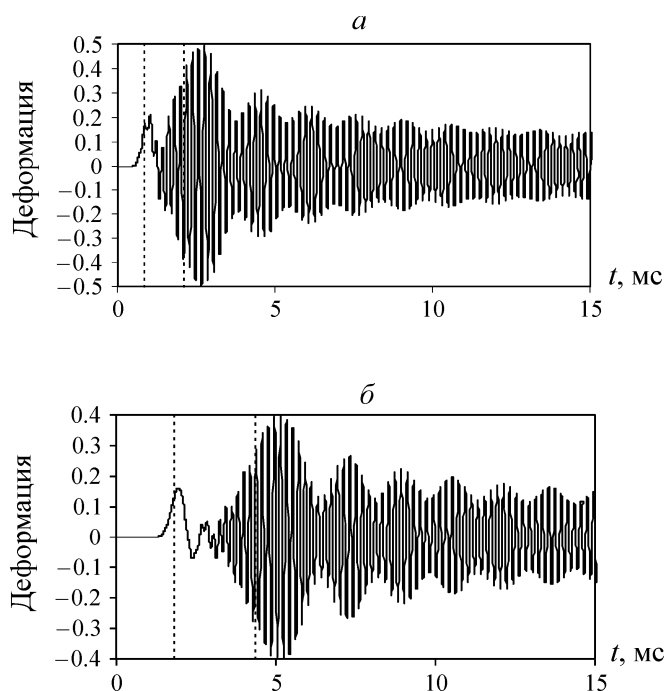


Рис. 2.1.6. Зависимости деформаций стержней от времени, рассчитанные при параметрах системы рис. 2.1.5, но с увеличенной в 4 раза жесткостью пружин.

частота которых равна ω_1 , скорость движения огибающей этих волн близка к максимальной групповой скорости второй моды c_2 , а максимальная амплитуда превосходит амплитуду длинноволновых возмущений, если $\omega_* = \omega_1$. Увеличение β приводит к росту скоростей c_1 , c_2 и к повышению частоты огибающей (рис. 2.1.5, 2.1.6). Вывод о том, что скорость маятниковых волн в цепочке масс больше, чем в цепочке стержней, если жесткости пружин и массы шариков и стержней для обеих систем одинаковы, подтверждает рис. 2.1.5в.

Как показали расчеты, с уменьшением частоты воздействия ω_* происходит перераспределение энергии: амплитуда низкочастотной волны растет, амплитуда высокочастотной волны убывает. Во внутренних сечениях стержня на деформацию оказывает большое влияние отражение волн от торцов стержня, в то же время эти отражения мало сказываются на относительном удлинении пружин, соединяющих стержни ($\Delta u_n = (u_n - u_{n-1})k / P_0 S$).

На рис. 2.1.7 приведен спектр деформаций. Толстая линия соответствует результатам численных расчетов, представленных на рис. 2.1.5б, тонкая линия

соответствует аналитической оценке (2.1.25) на интервале $\omega \leq \omega_0$, пунктирные линии — значения частот $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. В отличие от цепочки масс появляется узкий пик, соответствующий зоне пропускания $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Высота пика в данной зоне, полученного в численных расчетах, совпадает со значением, найденным аналитически.

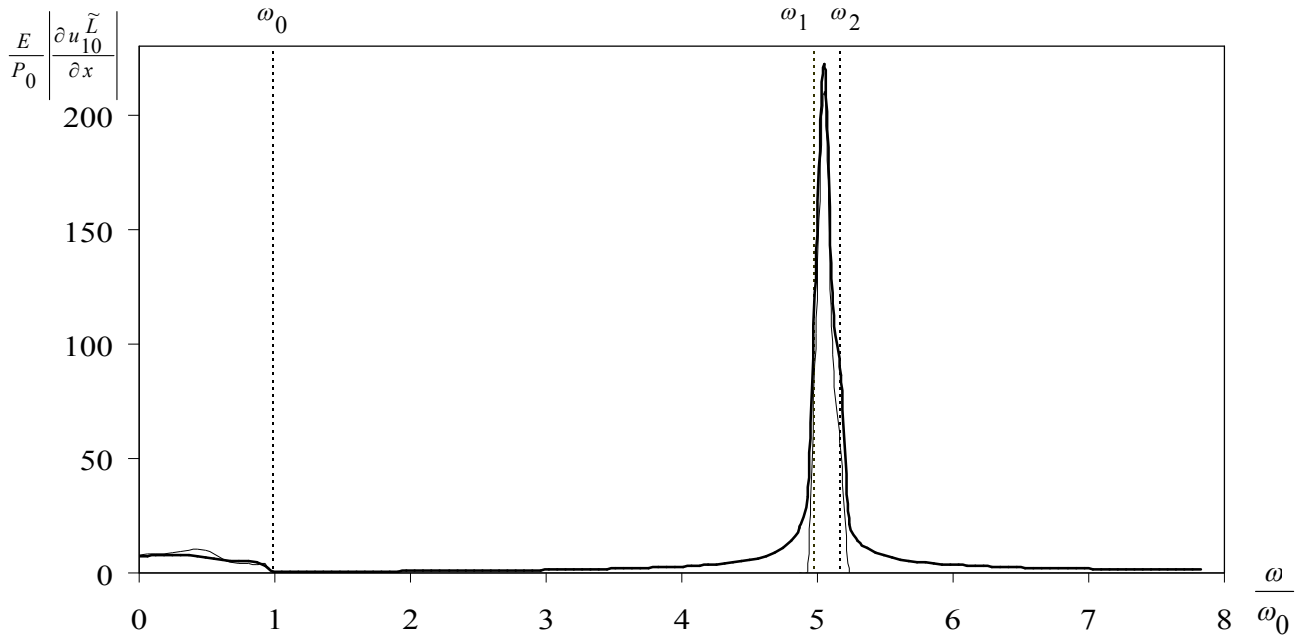


Рис. 2.1.7. Спектр деформаций в центре 10-го стержня. Толстые линии – численные расчеты, тонкие линии – аналитическое решение (2.1.25).

Заключение

Получены асимптотические решения, описывающие поведение длинноволновых возмущений для стержневой модели и цепочки масс с пружинами, и выведены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений для обеих систем.

На примере стержневой модели показано, что при ударном возбуждении в блочной среде возникают две группы нестационарных волн. Со скоростью c_1 движется низкочастотная волна, амплитуда которой убывает пропорционально $t^{-1/3}$ с ростом времени при импульсном воздействии. Со скоростью c_2 движется

высокочастотный пакет волн, основная частота которого равна собственной частоте колебаний отдельного стержня. Показано, что для описания низкочастотных волновых процессов система стержней может быть заменена цепочкой шариков той же массы, что и стержни, но с уменьшенной в $1 + \beta$ раз жесткостью пружин.

Таким образом, определяя в эксперименте частоты и скорости распространения этих групп волн, можно определить структуру и механические параметры блочной среды.

2.1.2. Моделирование процесса распространения волн в составных стержневых системах с учетом вязкости прослоек

Ниже исследуются волноводные свойства составных стержневых систем с учетом вязкости прослоек. В диссертационной работе для теоретического описания нелинейных свойств деформирования прослоек используются различные реологические модели, представленные на рис. 2.1.8 в виде комбинации упругих и демпфирующих элементов (комбинации моделей Кельвина—Фойгта и Максвелла [68, 157, 211]). Результаты данного пункта опубликованы в [34, 41, 132].

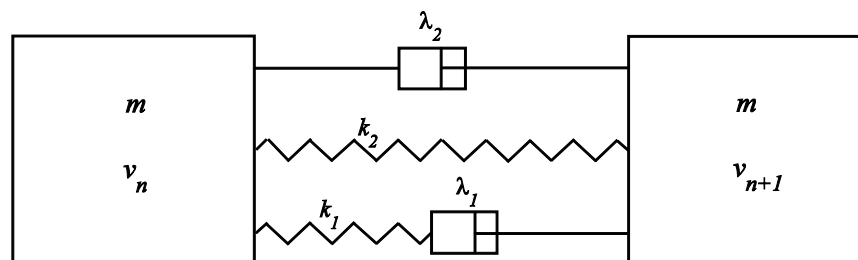


Рис. 2.1.8. Вязкоупругая модель прослойки с последовательным и параллельным соединением вязких демпферов и упругих пружин.

Сила сжатия F упругого элемента определяется соотношением $F = K\delta$, демпфирующего — $F = \lambda\dot{\delta}$, где $\delta, \dot{\delta}$ — удлинение и скорость удлинения элемента, K, λ — жесткость и коэффициент вязкости. Если упругий и демпфирующий элементы соединены последовательно, то F определяется из уравнения — $\dot{F}/K + F/\lambda = \dot{\delta}$. Интегрируя его, получаем

$$F = K \int_0^t e^{-\alpha_1 t} \dot{\delta} dt, \quad \alpha_1 = \frac{K}{\lambda}.$$

В случае параллельного соединения силы, действующие со стороны каждого элемента, складываются. В результате для модели рис. 2.1.8 сила F_n^r , действующая справа на массу с координатой v_n , выражается формулой

$$F_n^r = k_2(v_{n+1} - v_n) + \lambda_2(\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n) dt. \quad (2.1.26)$$

Аналогичное уравнение есть и для силы F_n^l , действующей слева. Используя закон движения $m\ddot{v}_n = F_n^r - F_n^l$, получаем систему уравнений, определяющих движение масс в составной сборке

$$m\ddot{v}_n = k_2(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}) + \lambda_2(\dot{v}_{n-1} - 2\dot{v}_n + \dot{v}_{n+1}) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{v}_{n-1} - 2\dot{v}_n + \dot{v}_{n+1}) dt, \quad (2.1.27)$$

$$n = 1, \dots, N-1,$$

и уравнения для нулевой и последней массы

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_0 &= k_2(v_1 - v_0) + \lambda_2(\dot{v}_1 - \dot{v}_0) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{v}_1 - \dot{v}_0) dt - SP_0 Q(t); \\ m\ddot{v}_N &= k_2(v_{N-1} - 2v_N) + \lambda_2(\dot{v}_{N-1} - 2\dot{v}_N) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{v}_{N-1} - 2\dot{v}_N) dt. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Рассмотрим модель, состоящую из системы одинаковых упругих стержней, связанных между собой прослойками. Представляет практический интерес определить закон затухания маятниковых волн в блочных средах с учетом вязкости. Для описания поведения прослоек между стержнями предложено одновременное использование двух вариантов соединения вязких и упругих элементов: параллельного и последовательного (рис. 2.1.8). Движение стержней описываются уравнениями (2.1.1). Все прослойки между стержнями одинаковы. Силы F_n^r , F_n^l , действующие справа и слева на n -й стержень со стороны прослоек, согласно (2.1.26), определяются формулами

$$\begin{aligned} SEu'_n|_{x=l(n-1/2)} &= F_n^l = \\ &= -k_2(u_{n-1}|_{x=l(n-1/2)} - u_n|_{x=l(n-1/2)}) - \lambda_2(\dot{u}_{n-1}|_{x=l(n-1/2)} - \dot{u}_n|_{x=l(n-1/2)}) - \\ &- k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{u}_{n-1}|_{x=l(n-1/2)} - \dot{u}_n|_{x=l(n-1/2)}) dt; \quad n = 1, \dots, N; \quad \alpha_1 = \frac{k_1}{\lambda_1}; \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

$$\begin{aligned} SEu'_n|_{x=l(n+1/2)} &= F_n^r = \\ &= k_2(u_{n+1}|_{x=l(n+1/2)} - u_n|_{x=l(n+1/2)}) + \lambda_2(\dot{u}_{n+1}|_{x=l(n+1/2)} - \dot{u}_n|_{x=l(n+1/2)}) + \\ &+ k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{u}_{n+1}|_{x=l(n+1/2)} - \dot{u}_n|_{x=l(n+1/2)}) dt; \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Полагаем, что на месте $(N+1)$ -го стержня стоит жесткая стенка: $u_{N+1} = 0$.

$$SEu'_N|_{x=l(N+1/2)} = F_N^r = -k_2 u_N|_{x=l(N+1/2)} - \lambda_2 \dot{u}_N|_{x=l(N+1/2)} - k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} \dot{u}_N|_{x=l(N+1/2)} dt. \quad (2.1.30)$$

Начальные условия нулевые. В момент времени $t=0$ к левому концу нулевого стержня прикладывается импульсная нагрузка (2.1.4) с амплитудой P_0 .

Исследуем дисперсионные свойства цепочки масс с пружинами и демпферами. Применим к уравнениям (2.1.27), (2.1.28) с нулевыми начальными условиями преобразование Лапласа по времени с параметром p и дискретное преобразование Фурье с параметром q . Получим решение задачи в изображениях

$$u^{LF_d} = \frac{P_0 S Q^L}{D(p, q)}, \quad (2.1.31)$$

$$D(p, q) = \frac{mp^3}{k_1} + \frac{mp^2}{\lambda_1} + 4 \sin^2 \frac{ql}{2} \left(\frac{\lambda_2 p^2}{k_1} + p \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + \frac{k_2}{\lambda_1} \right), \quad (2.1.32)$$

Подставим $c = c_1 + ic_2$ в дисперсионное уравнение $D(iqc, q) = 0$, где $D(p, q)$ определено в (2.1.32). Величины c_1 , c_2 принимают только вещественные значения. Величина c_1 есть фазовая скорость волн, c_2 характеризует затухание. Анализ дисперсионного уравнения показывает, что при всех значениях волнового числа q выполняется неравенство

$$c_1 \leq l \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \bar{c}, \quad (2.1.33)$$

а фазовая скорость бесконечно длинных волн ($q \rightarrow 0$) равна

$$c_1|_{q \rightarrow 0} = l \sqrt{\frac{k_2}{m}} = \tilde{c}. \quad (2.1.34)$$

Зависимость $c_1(q)$ определялась численно из дисперсионного уравнения. Результаты расчетов $c_1(q)$ представлены на рис. 2.1.9 ($\lambda_2 = 1$ кг/мс, $k_1 = 5$ кг/мс², $k_2 = 5$ кг/мс², $l = 0.1$ м, $m = 0.3822$ кг). Кривой 1 соответствует $\lambda_1 = 100$ кг/мс, 2 — $\lambda_1 = 10$ кг/мс, 3 — $\lambda_1 = 1$ кг/мс, 4 — $\lambda_1 = 0.5$ кг/мс, 5 — $\lambda_1 = 0.1$ кг/мс. Из графика видно, что при некоторых параметрах максимальная скорость распространения волн c_* достигается на волнах средней длины ($0 < q_* l < 2\pi$), и она может быть выше скорости длинных волн (например, кривые 1, 2, 3), причем, в зависимости от параметров задачи это различие может быть значительным. Меняя параметр λ_1 , можем добиться того, что скорость распространения волнового пакета, движущегося без дисперсии, будет меняться в пределах $\tilde{c} \leq c_* \leq \bar{c}$. Заметим, что значение $\bar{c}$ примерно в 10 раз меньше скорости распространения звука в стержне.

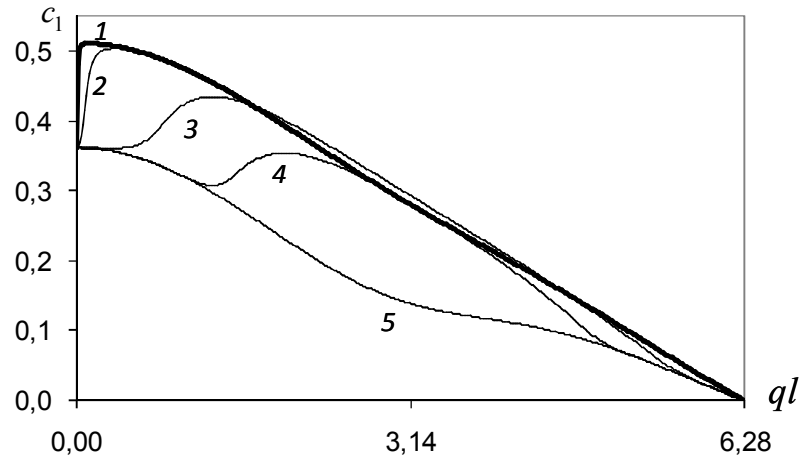


Рис. 2.1.9. Зависимость фазовой скорости c_1 от волнового числа q .

Асимптотические оценки

Для того чтобы получить простые аналитические выражения для описания затухания одномерных маятниковых волн, ниже в математической модели используется только параллельное соединение упругих пружин и вязких демпферов.

Рассмотрим цепочку масс, соединенных параллельно вязкими и упругими прослойками (рис. 2.1.10). Уравнения движения такой системы описываются формулами (2.1.27), (2.1.28), в которых положили $k_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$:

$$m\ddot{v}_n = k_2(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}) + \lambda_2(\dot{v}_{n-1} - 2\dot{v}_n + \dot{v}_{n+1}), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (2.1.35)$$

$$m\ddot{v}_0 = k_2(v_1 - v_0) + \lambda_2(\dot{v}_1 - \dot{v}_0) + Q(t), \quad u_N = 0.$$

Начальные условия нулевые. Масса в конце цепочки жестко закреплена. В момент времени $t = 0$ к нулевой массе прикладывается импульсная нагрузка (2.1.4) с амплитудой P_0 .

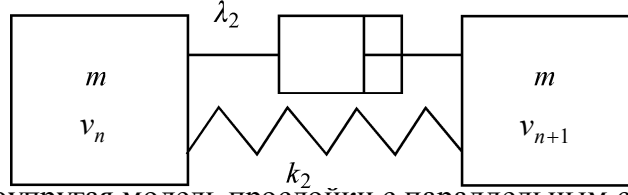


Рис. 2.1.10. Вязкоупругая модель прослойки с параллельным соединением вязких демпферов и упругих пружин.

Для того чтобы получить аналитическое решение, будем полагать, что цепочка масс бесконечна. К системе уравнений (2.1.35) с нагрузкой (2.1.4) применим преобразование Лапласа по времени и дискретное преобразование Фурье по продольной координате n .

Из (2.1.35) получим решение в изображениях

$$u^{LF_d} = \frac{Q^L}{mD(p, q)}, \quad (2.1.36)$$

с дисперсионным оператором

$$D(p, q) = p^2 + \frac{4}{m} \sin^2\left(\frac{ql}{2}\right) (\lambda_2 p + k_2). \quad (2.1.37)$$

Из дисперсионного уравнения $D(i\omega, q) = 0$ определим частоты ω бегущих волн в системе в зависимости от их длины

$$\omega^{I,II} = 2i \sin^2\left(\frac{ql}{2}\right) \frac{\lambda_2}{m} \pm \omega_0 \sin\left(\frac{ql}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{mk_2} \sin^2\left(\frac{ql}{2}\right)}, \quad \omega_0 = 2\sqrt{\frac{k_2}{m}}. \quad (2.1.38)$$

Поскольку фазовая и групповая скорости первой моды (знак “–” в формуле (2.1.38)) дисперсионной кривой при $q \rightarrow 0$ равны по величине

$$c_f^I|_{q \rightarrow 0} = c_g^I|_{q \rightarrow 0} = l\sqrt{\frac{k_2}{m}} = c_1, \quad (2.1.39)$$

то длинные волны движутся без дисперсии и формируют квазифронт. Скорость длинных волн c_1 та же (2.1.16), что и в случае $\lambda_2 = 0$.

С помощью метода совместного обращения интегральных преобразований в окрестности луча $x = ct$ ($c = c_1 + c'$, $c' \rightarrow 0$) [175] получена асимптотика длинноволновых возмущений ($|q| \ll 1$) при $t \rightarrow \infty$ в окрестности квазифронта $nl = c_1 t$:

$$\ddot{v}_n = \frac{2P_0 c_1 l}{m \omega_*(\gamma t)^{2/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(\kappa z + z^3/3) e^{-\mu z^2} z dz, \quad (2.1.40)$$

$$\dot{v}_n = -\frac{c_1}{l} \Delta v_n = \frac{2P_0 l}{\omega_* m (\gamma t)^{1/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\kappa z + z^3/3) e^{-\mu z^2} dz,$$

$$\gamma = \frac{c_1 l^2}{8} \left(1 + \frac{3\lambda_2^2}{mk_2} \right), \quad \kappa = \frac{nl - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \mu = \frac{\alpha t}{(\gamma t)^{2/3}}, \quad \alpha = \frac{\lambda_2 l^2}{\lambda m}.$$

Из формул (2.1.40) следует, что при $\lambda_2 = 0$ экспоненциальное затухание отсутствует ($\mu = 0$) и формулы приводятся к виду (2.1.22):

$$\ddot{v}_n = \frac{2P_0 c_1 l}{m \omega_*(\gamma t)^{2/3}} \frac{d\text{Ai}(\kappa)}{d\kappa}, \quad \dot{v}_n = \frac{2P_0 l}{m \omega_*(\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa),$$

$$\Delta v_{n+1} = v_{n+1} - v_n = -\frac{2P_0}{m \omega_* c_1 (\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa), \quad \kappa = \frac{nl - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{8}.$$

Видно, что при отсутствии вязкости с ростом времени амплитуда скоростей и разности смещений уменьшаются пропорционально $t^{-1/3}$, ускорения — $t^{-2/3}$. Максимальная амплитуда скоростей и разности смещений достигается на первой полуволне и составляет

$$\max_t \dot{v}_n \rightarrow \frac{2.14 P_0}{m \omega_*} n^{-1/3}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.41)$$

Максимальная амплитуда ускорений в районе квазифронта падает с ростом номера массы как $n^{-2/3}$:

$$\max_t \ddot{v}_n \rightarrow \frac{2.07 P_0 c_1}{m \omega_* l} n^{-2/3}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.42)$$

Наличие вязкости приводит к дополнительному затуханию. В случае $\lambda_2 \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$ формулы (2.1.40) упрощаются

$$\ddot{v}_n \approx \frac{4 P_0 c_1}{\omega_* l \lambda_2 t} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(\tilde{\kappa} z) e^{-z^2} z dz \approx \frac{P_0 c_1}{\omega_* l \lambda_2 \sqrt{\pi}} \frac{\tilde{\kappa}}{t} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}^2}{4}\right), \quad (2.1.43)$$

$$\dot{v}_n \approx \frac{2 P_0 l}{\omega_* m \sqrt{\alpha t}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\tilde{\kappa} z) e^{-z^2} dz \approx \frac{P_0 l}{\omega_* m \sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}^2}{4}\right), \quad \tilde{\kappa} = \frac{nl - c_1 t}{\sqrt{\alpha t}}.$$

Максимальные амплитуды скоростей масс уменьшаются пропорционально $n^{-1/2}$, ускорений — n^{-1} :

$$\max_t \dot{v}_n \rightarrow \frac{P_0}{\omega_*} \sqrt{\frac{2 c_1}{\pi m l \lambda_2}} n^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1.44)$$

$$\max_t \ddot{v}_n \rightarrow \frac{P_0 k_2}{\omega_* m \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{\pi e}} n^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В случае $\lambda_2 = 0$ и $\omega_* = \omega_0$ обращение преобразований Лапласа и Фурье в окрестности особой точки $q = \pi / l$, $p = i \omega_0$ приводит к асимптотической формуле

$$\ddot{v}_n \rightarrow \frac{P_0 (-1)^{n+1}}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0 t}} \cos\left(\frac{2n}{\omega_0 t}\right) \sin(\omega_0 t) H_0(c_1 t - nl). \quad (2.1.45)$$

Из нее видно, что максимум ускорения пропорционален $n^{-1/2}$:

$$\max_t \ddot{v}_n \rightarrow \frac{P_0 \sqrt{\pi}}{m} n^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.46)$$

Таким образом, из формул (2.1.42) и (2.1.46) следует, что при $\lambda_2 = 0$ амплитуда ускорений на фронте волны $x = c_1 t$ падает быстрее, чем за фронтом.

Для определения пределов применимости полученных оценок проводилось сравнение их с решениями системы уравнений (2.1.35) методом конечных разностей по явной схеме. На рис. 2.1.11 представлены графики функций $f(n) = \ln(\max_t \dot{v}_n / \max_t \dot{v}_{n-1}) / \ln(n/(n-1))$, характеризующих степень затухания скорости вблизи n -ой массы. Скорости $\dot{v}_n$ вычислялись методом конечных разностей для различных значений параметра вязкости $\lambda_2 = 0; 0.1; 0.5; 1$ кг/мс. Остальные параметры задачи принимались следующими: $k_2 = 4.4$ кг/мс², $m = 0.3822$ кг, $l = 0.1$ м, $\omega_* = 3.14$ мс⁻¹, $\tau = 0.001$ мс. Пунктирные линии на рис. 2.1.11 соответствуют предельным значениям $f(n)$, полученным из формул (2.1.41) и (2.1.44), $f(n) = -\frac{1}{3}$ и $f(n) = -\frac{1}{2}$ соответственно. Видно, что при $\lambda_2 = 0$ степень падения максимальной амплитуды скорости с ростом n стремится к $-1/3$. Если $\lambda_2 \neq 0$, то с ростом n функция $f(n)$ стремится к $-\frac{1}{2}$, причем, чем больше λ_2 , тем быстрее $f(n)$ достигает своего предельного значения. Эти результаты совпадают с аналитическими оценками (2.1.41) и (2.1.44).

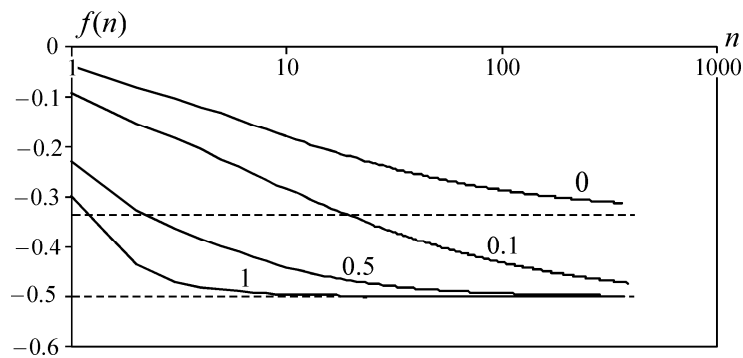


Рис. 2.1.11. Степень затухания скорости масс в зависимости от их номера при различных значениях параметра λ_2 .

На рис. 2.1.12 приведены графики $\max_t \dot{v}_n$, полученные конечно-разностным методом (толстые кривые) и из аналитических формул (2.1.41),

(2.1.44) (тонкие кривые) при различных значениях λ_2 ($\lambda_2 = 0; 0.1; 0.5; 1$ кг/мс). Остальные параметры задачи те же, что и выше. Сравнение численных и аналитических решений показывает, что, если $\lambda_2 = 0$, то простая оценка (2.1.41), начиная с $n = 200$ с погрешностью менее 5 %, описывает максимумы скоростей, если же $\lambda_2 \neq 0$, то, чем больше коэффициент вязкости, тем ближе от места воздействия различие между численными и аналитическими результатами (2.1.44), становится малым.

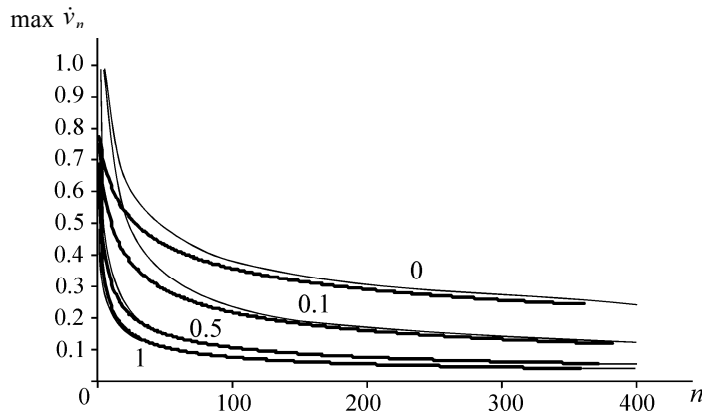


Рис. 2.1.12. Зависимость максимальной амплитуды скорости от номера массы при различных значениях параметра λ_2 .

На рис. 2.1.13 приведены графики функции

$$q(n) = \ln(\max_t \ddot{v}_n / \max_t \ddot{v}_{n-1}) / \ln(n/(n-1)),$$

характеризующие степень затухания ускорений, полученных численно из уравнений (2.1.35) для значений $\lambda_2 = 0; 0.001; 0.01; 0.1; 0.2; 0.5$ кг/мс. Остальные параметры задачи те же, что и на рис. 2.1.11. Пунктирные линии соответствуют предельным значениям $q(n) = -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1$, рассчитанным из формул (2.1.42), (2.1.44), (2.1.46). Видно, что при $\lambda_2 = 0$ с ростом n степень затухания максимумов ускорений стремится к $-1/2$, при $\lambda_2 \neq 0$ к -1 , что полностью совпадает с аналитическими оценками (2.1.44), (2.1.46).

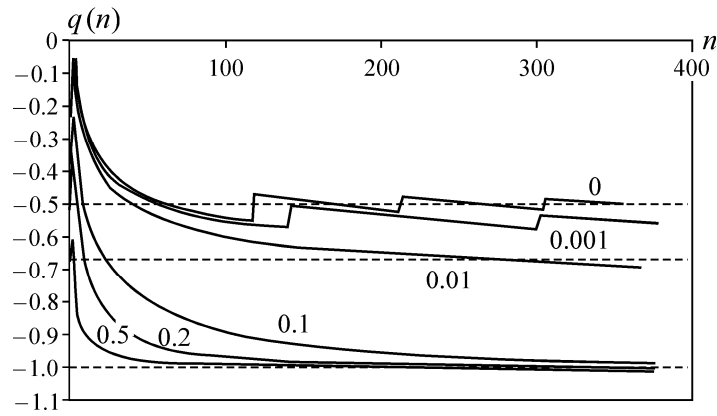


Рис. 2.1.13. Степень затухания максимумов ускорений масс в зависимости от их номера при различных значениях параметра λ_2 .

На рис. 2.1.14 представлены графики осциллограмм ускорений для массы с номером $n=100$ для различных значений параметра $\lambda_2 = 0; 0.01; 0.1$ кг/мс. Толстые кривые рассчитаны конечно-разностным методом, тонкие кривые — по асимптотической формуле (2.1.40) при $\lambda_2 = 0; 0.01$ кг/мс и по асимптотической формуле (2.1.42) при $\lambda_2 = 0.1$ кг/мс. Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 2.1.11. Сравнение показывает, что при $\lambda_2 = 0.1$ кг/мс асимптотика (2.1.43) и результаты численного эксперимента совпадают с точностью до погрешностей построения графиков. С уменьшением λ_2 количественное соответствие асимптотики и численного счета достигается только в районе квазифронта.

Заключение

В результате численных расчетов и аналитических исследований получены асимптотические законы затухания одномерных маятниковых волн, возбуждаемых ударным воздействием в блочной среде с вязкоупругими прослойками, и определены пределы их применимости. Исследованы дисперсионные свойства с учетом вязкости.

Показано, что в районе квазифронта с ростом номера массы ($n \rightarrow \infty$) при отсутствии вязкости максимальная амплитуда скоростей падает как $n^{-1/3}$,

ускорений как $n^{-2/3}$; при наличии вязкости максимальная амплитуда скоростей падает как $n^{-1/2}$, ускорений как n^{-1} . Таким образом, наличие вязкости приводит к дополнительному затуханию.

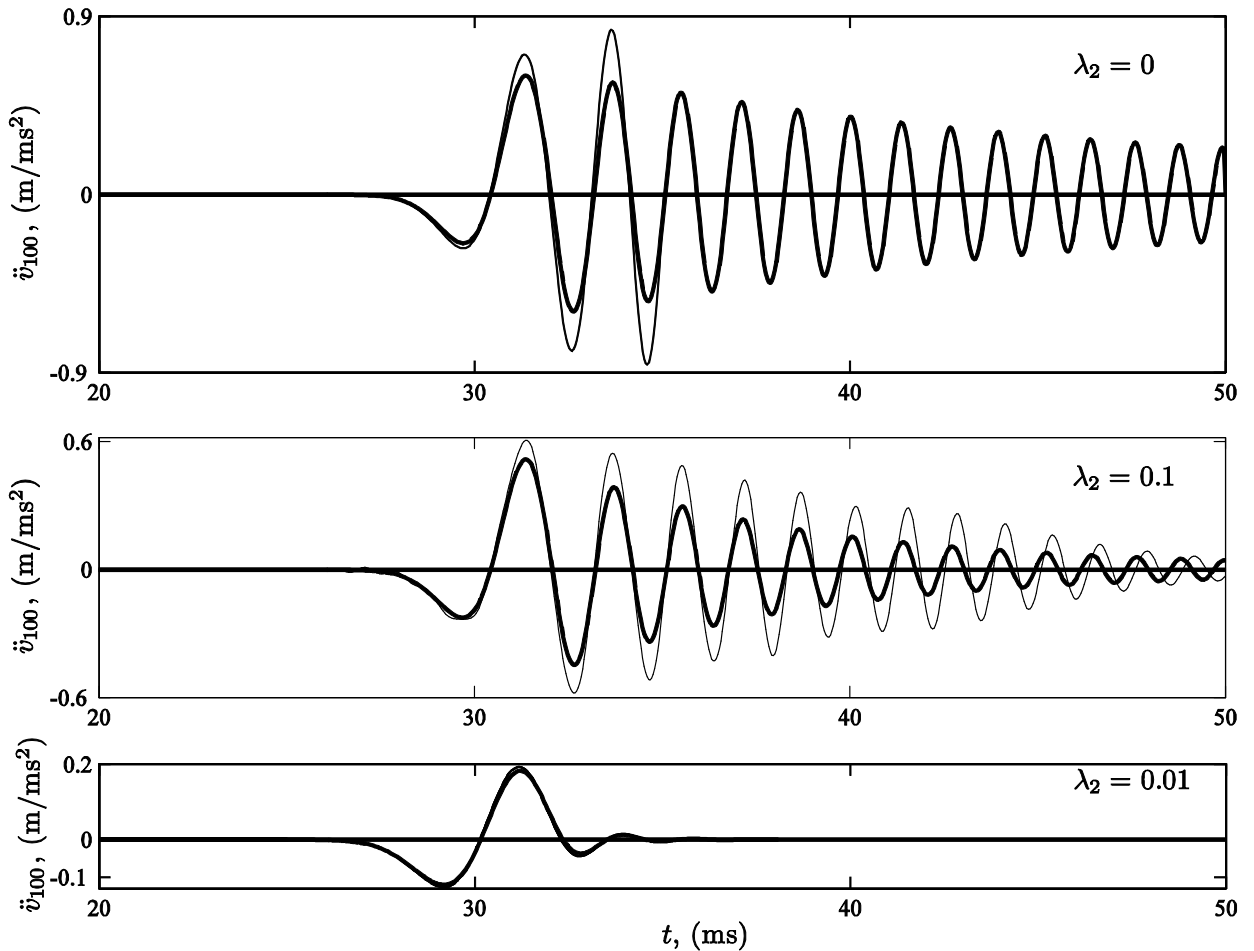


Рис. 2.1.14. Осциллограммы ускорений для массы с номером $n = 100$ при различных значениях параметра λ_2 .

2.1.3. Влияние иерархической структуры блочных пород на особенности распространения волн

В предыдущих пунктах были проведены теоретические исследования волноводных свойств одномерных моделей блочных сред, представленных цепочкой упругих блоков, разделенных податливыми прослойками. Показано, что для описания распространения волн в таких средах хорошим приближением

является представление о движении блоков как недеформируемых тел. При этом достаточно точно описываются возникающие при ударном воздействии низкочастотные волны маятникового типа. Данный пункт посвящен исследованию влияния внутреннего строения блоков на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения. Результаты данного пункта опубликованы в [190].

Блочно-иерархические модели волноводов

Пусть периодическая система блочно-иерархического строения состоит из одинаковых структурных блоков, схематически изображенных на рис. 2.1.15, каждый из которых содержит вложенную друг в друга систему подблоков.

Будем называть систему системой n -го порядка, если порождающий ее элемент имеет n степеней свободы. На рис. 2.1.15 приведен пример системы 16-го порядка, полученной в результате 4 ступеней вложения.

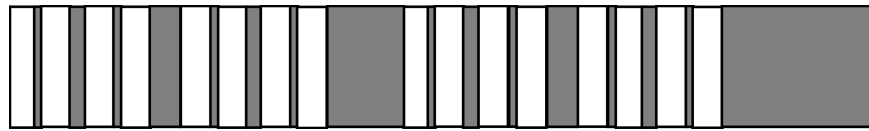


Рис. 2.1.15. Схематический фрагмент периода иерархической одномерной блочной модели масс (светлые прямоугольники) и прослойки (серые) 16-го порядка.

Рассмотрим системы с дискретными элементами – массами и безынерционными связями – пружинами. Простейшая периодическая цепочка масс, соединенных пружинами, исследованная выше, является системой первого порядка.

Наша цель — описать дополнительные волновые эффекты, проявляющиеся в волноводах высших уровней. Одним из примеров системы второго уровня является так называемая цепочка Борна [55] с ячейкой длины l , содержащей четыре элемента, две массы и две связи (рис. 2.1.16).

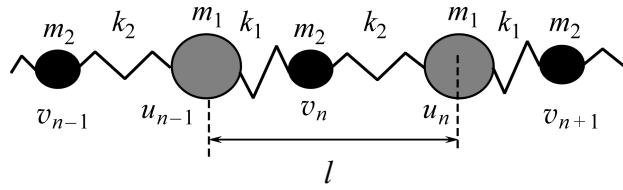


Рис. 2.1.16. Цепочка Борна.

Уравнения движения такой системы

$$m_1 \ddot{u}_n + k_1(u_n - v_{n+1}) + k_2(u_n - v_n) = 0, \quad m_2 \ddot{v}_n + k_1(v_n - u_{n-1}) + k_2(v_n - u_n) = 0$$

определяют две моды колебаний по числу степеней свободы порождающего элемента, акустическую (I) и оптическую (II) — рис. 2.1.17.

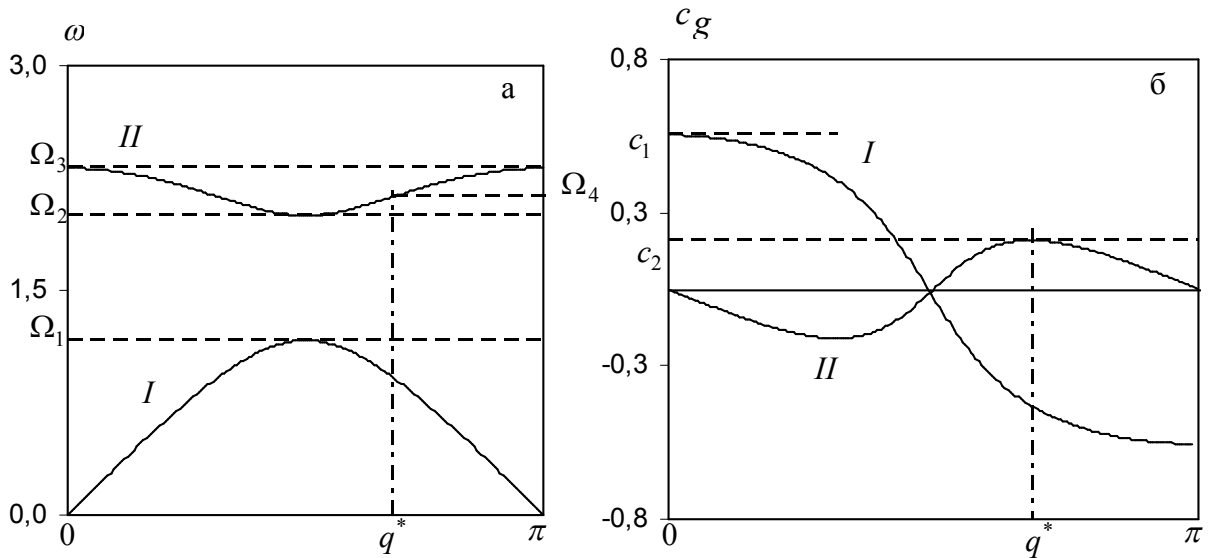


Рис. 2.1.17. Ветви первой I и второй II мод дисперсионных зависимостей для частот ω и групповых скоростей c_g , рассчитанные при $m_1 = m_2 = 1$, $l = 1$, $k_1 = 0.34$, $k_2 = 1$.

Система обладает тремя резонансными частотами: Ω_1 и Ω_2 в точке $q = \pi$ соответствуют коротковолновым колебаниям, а частота Ω_3 в точке $q = 0$ — длинноволновым. Не ограничивая общности, приведем их выражения в случае $m_1 = m_2 = m$:

$$\Omega_{1,2} = \Omega_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \beta}}, \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{m}}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}, \quad \beta = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (2.1.47)$$

Зоны $\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2$ и $\omega \geq \Omega_3$ соответствуют полосам запираания — распространение гармонических волн с такими частотами невозможно.

Исследование зависимости фазовой скорости $c(q)$ показало, что асимптотика скорости бесконечно длинных волн ($q \rightarrow 0$) определяется по формуле

$$c = c_1 \left[1 - 3\gamma q^2 / c_1 + O(q^4) \right], \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k_1 k_2}{2(k_1 + k_2)m}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{8} \left(1 - \frac{3}{4} \beta \right). \quad (2.1.48)$$

На рис. 2.1.18 приведены осциллограммы ускорений 40-й и 80-й масс при ударном нагружении цепочки Борна импульсом длительности $T = 0.02765$, полученные конечно-разностным методом. В цепочке Борна, в отличие от цепочки масс с пружинами, возмущения, распространяющиеся на периферию от действия локального импульса, имеют ярко выраженную двухволновую структуру. Низкочастотная маятниковая волна, бегущая со скоростью c_1^I , по характеру та же, что и в цепочке масс с пружинами. Однако здесь она не одна: за ней движется высокочастотная составляющая, скорость огибающей которой равна максимальной групповой скорости второй моды $c_2 = \max c_g^{II} = c_g^{II}(q^*)$, с частотой равной $\Omega_4 = \omega(q^*)$ (рис. 2.1.17). Вертикальные штриховые линии на рис. 2.1.18 показывают моменты времени $t_1 = nl/c_1$ и $t_2 = nl/c_2$, соответствующие квазифронтам длинноволновых и коротковолновых возмущений.

Заключение

Таким образом, в модели блочно-иерархического строения 2-го порядка (цепочка Борна) установлено существование двух групп волн — низкочастотной маятниковой волны и высокочастотной и определены скорости их распространения и частоты колебаний.

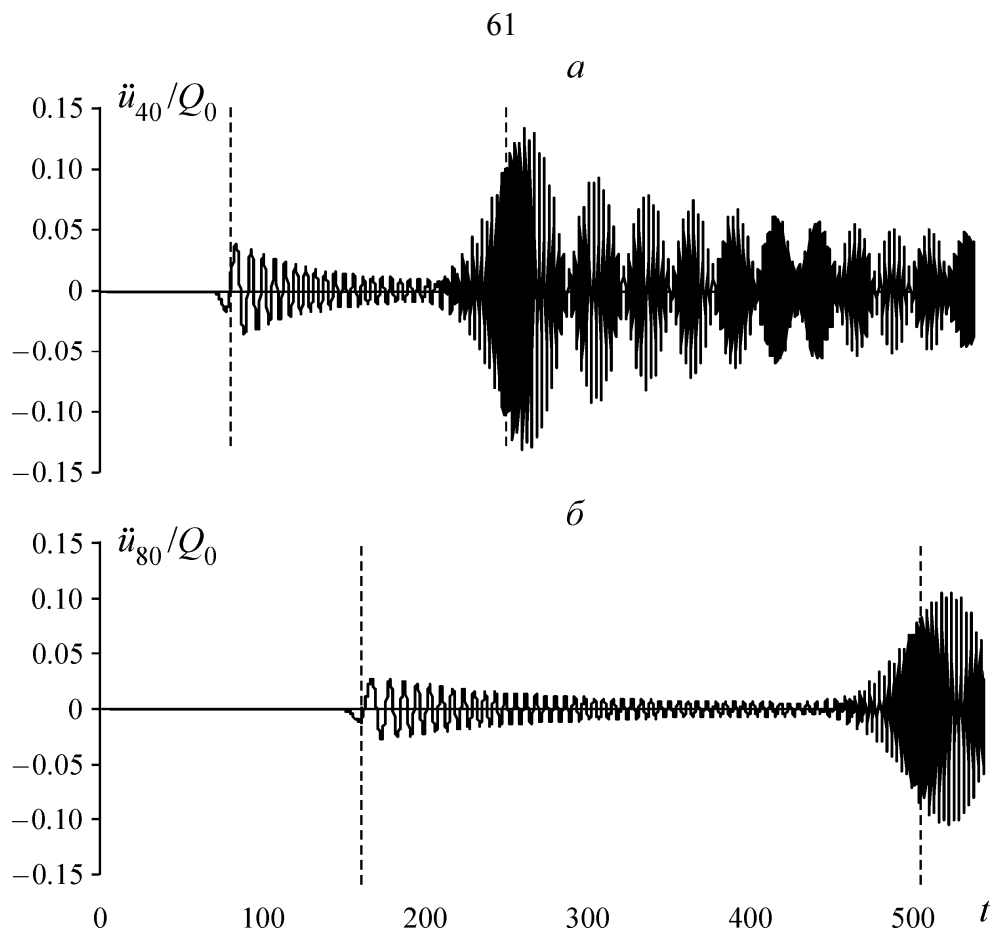


Рис. 2.1.18. Распространение волны в цепочке Борна при действии импульсной нагрузки. Расчеты осциллограмм ускорений для 40-й и 80-й масс проведены для $m_1 = m_2 = 1$, $l = 1$, $k_1 = 0.34$, $k_2 = 1$.

2.1.4. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах

Настоящий пункт посвящен изучению влияния демпфирующих свойств прослоек между блоками на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения. Результаты данного пункта опубликованы в [45, 132].

Для теоретического анализа распространения волн использована модель цепочки масс с вязкоупругими прослойками, включенными параллельно согласно рис. 2.1.19 (модель Кельвина—Фойгта [68]).

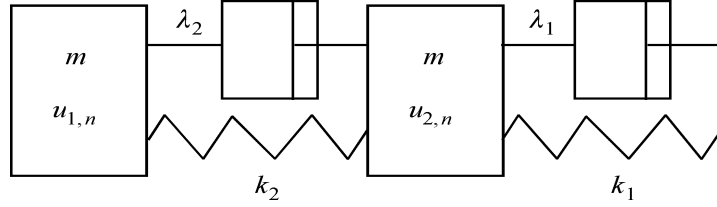


Рис. 2.1.19. Схематическое изображение периода модели иерархической системы второго порядка длиной $2l$ с вязкоупругими связями масс.

Используется два типа прослоек, которые чередуются через одну массу. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m\ddot{u}_{1,n} = k_2(u_{2,n} - u_{1,n}) - k_1(u_{1,n} - u_{2,n-1}) + \lambda_2(\dot{u}_{2,n} - \dot{u}_{1,n}) - \lambda_1(u_{1,n} - \dot{u}_{2,n-1}), \quad n = 2, \dots, N,$$

$$m\ddot{u}_{2,n} = -k_2(u_{2,n} - u_{1,n}) + k_1(u_{1,n+1} - u_{2,n}) - \lambda_2(\dot{u}_{2,n} - \dot{u}_{1,n}) + \lambda_1(u_{1,n+1} - \dot{u}_{2,n}), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (2.1.49)$$

$$m\ddot{u}_{1,1} = k_2(u_{2,1} - u_{1,1}) + \lambda_2(\dot{u}_{2,1} - \dot{u}_{1,1}) + Q(t), \quad u_{2,N} = 0.$$

Здесь $u_{1,n}$, $u_{2,n}$ — перемещения первой и второй массы в n -м блоке; k_1 , k_2 — жесткости пружин; λ_1 , λ_2 — вязкости демпферов; l — расстояние между массами. Начальные условия нулевые. Масса в конце цепочки жестко закреплена. В момент времени $t = 0$ к первой массе приложена импульсная (2.1.4) с амплитудой P_0 . Эта система отличается от рассмотренной в пункте 2.1.3 цепочки Борна наличием демпферов.

Асимптотические оценки

Для того чтобы получить аналитическое решение, предположим, что цепочка масс бесконечна. Применив к системе уравнений (2.1.49) с нагрузкой (2.1.4) преобразование Лапласа по времени и дискретное преобразование Фурье по продольной координате n , получим решение в изображениях:

$$u_1^{LF_d} = \frac{Q^L[p^2 + p(\lambda_1 + \lambda_2)/m + (k_1 + k_2)/m]}{mD(p, q)}, \quad u_2^{LF_d} = \frac{Q^L[(\lambda_1 p + k_1)e^{-2iq} + (\lambda_2 p + k_2)]}{mD(p, q)}, \quad (2.1.50)$$

$$D(p, q) = p^4 + \frac{2}{m} p^2 (\lambda_1 p + k_1 + \lambda_2 p + k_2) + \frac{4}{m^2} (\lambda_1 p + k_1)(\lambda_2 p + k_2) \sin^2(ql).$$

Проведем анализ дисперсионного уравнения $D(iqc, q) = 0$. Будем исследовать первые две моды дисперсионных кривых. На рис. 2.1.20 изображены зависимости первой (I) и второй мод (II) частоты $\omega = qc$, фазовой и групповой скоростей от волнового числа q . Так же как и в случае отсутствия вязкости ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, пункт 2.1.3), для частоты есть две зоны запирания (распространение гармонических волн с такими частотами невозможно): $\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2$ и $\omega \geq \Omega_3$, где Ω_1 , Ω_2 при малых значениях параметров вязкости с большой точностью совпадают с аналогичными значениями для цепочки Борна без демпферов (2.1.47):

$$\Omega_{1,2} \approx \Omega_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \beta}}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{m} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{m^2}}, \quad \beta = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (2.1.51)$$

Горизонтальные линии на рис. 2.1.20 соответствуют значениям Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , рассчитанным по формулам (2.1.51).

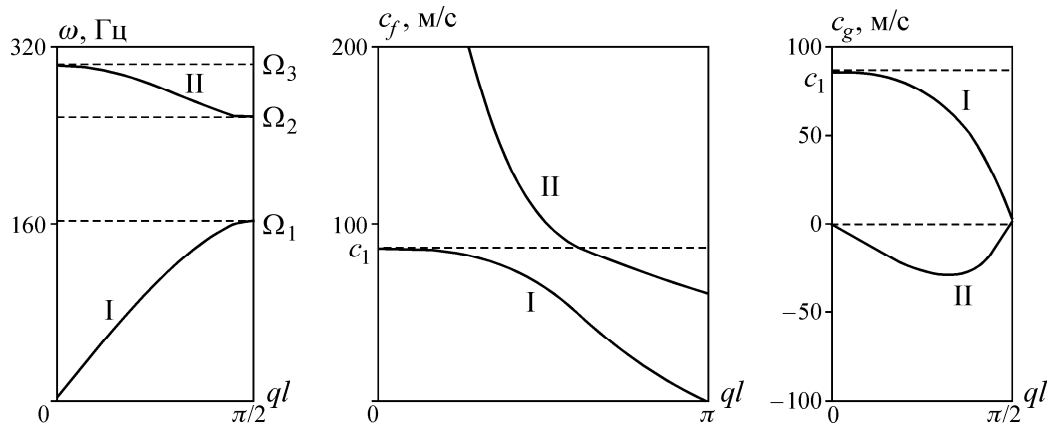


Рис. 2.1.20. Дисперсионные кривые, рассчитанные при следующих параметрах:

$$\lambda_1 = 35 \text{ кг/с}, \quad \lambda_2 = 20 \text{ кг/с}, \quad k_1 = 0.5 \cdot 10^6 \text{ кг/с}^2, \quad k_2 = 0.2 \cdot 10^6 \text{ кг/с}^2, \quad m = 0.3822 \text{ кг}.$$

Исследование зависимости фазовой скорости $c(q)$ показало, что асимптотика скорости бесконечно длинных волн ($q \rightarrow 0$) определяется по формуле

$$c = c_1 [1 - 3\gamma q^2 / c_1 + O(q^4)], \quad c_1 = l \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{2} (1 - 3\delta), \quad (2.1.52)$$

$$\delta = -\frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2} \left\{ \alpha_1^2 \left(10 + \frac{4(k_1 + k_2)m}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right) - \frac{8\alpha_1}{m} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 k_2 m}{(k_1 + k_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) - \frac{4(\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_1)}{m^2 (k_1 + k_2)} \left(\frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{(\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_1)m}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right) \right\}, \quad \alpha_1 = \frac{(\lambda_1 k_2^2 + \lambda_2 k_1^2)}{m(k_1 + k_2)^2}.$$

Видно, что скорость c_1 , с которой распространяются длинноволновые возмущения, формирующие квазифронт, не зависит от вязкости демпферов.

С помощью метода Слепяна обращения двукратных интегральных преобразований в окрестности луча $x = c_1 t$ [175] получена асимптотика низкочастотных возмущений в районе квазифронта $x = c_1 t$ при бесконечно большом времени с начала процесса:

$$\ddot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 c_1 l}{m\omega_*(\gamma t)^{2/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(\kappa_k z + z^3/3) e^{-\mu z^2} z dz, \quad (2.1.53)$$

$$\dot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 l}{m\omega_*(\gamma t)^{1/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\kappa_k z + z^3/3) e^{-\mu z^2} dz, \quad k = 1, 2;$$

$$\kappa_1 = \frac{(2n-2)l - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \kappa_2 = \frac{(2n-1)l - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \mu = \frac{\alpha_1 l^2 t}{(\gamma t)^{2/3}}.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ экспоненциальный множитель под интегралами отсутствует ($\mu = 0$) и формулы (2.1.53) принимают вид

$$\ddot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 c_1 l}{m\omega_*(\gamma t)^{2/3}} \text{Ai}'(\kappa_k), \quad \dot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 l}{m\omega_*(\gamma t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa_k), \quad k = 1, 2; \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \beta \right). \quad (2.1.54)$$

При нулевой вязкости максимальная амплитуда ускорений вблизи квазифронта уменьшается с увеличением номера блока пропорционально $n^{-2/3}$, скоростей — пропорционально $n^{-1/3}$:

$$\max_t \ddot{u}_{1,n} = \frac{0.52 P_0 c_1}{m \omega_* l} (2n-2)^{-2/3}, \quad \max_t \dot{u}_{1,n} = \frac{1.07 P_0}{m \omega_*} (2n-2)^{-1/3}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Наличие вязкости приводит к дополнительному затуханию. В случае, когда $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ одновременно, при $n \rightarrow \infty$ формулы (2.1.53) упрощаются:

$$\dot{u}_{k,n} = \frac{P_0}{m \omega_* \sqrt{\pi \alpha_1 t}} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}_k^2}{4}\right), \quad \ddot{u}_{k,n} = \frac{P_0 c_1}{m \omega_* \alpha_1 l \sqrt{\pi}} \frac{\tilde{\kappa}_k}{t} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}_k^2}{4}\right), \quad k=1, 2; \quad (2.1.55)$$

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{(2n-2)l - c_1 t}{l \sqrt{\alpha_1 t}}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \frac{(2n-1)l - c_1 t}{l \sqrt{\alpha_1 t}}.$$

Максимальные амплитуды скоростей масс уменьшаются пропорционально $t^{-1/2}$, ускорений — пропорционально t^{-1} :

$$\max_t \dot{u}_{k,n} = \frac{P_0}{m \omega_* \sqrt{\pi \alpha_1 t}}, \quad \max_t \ddot{u}_{k,n} = \frac{P_0 c_1}{\omega_* m l \alpha_1 t \sqrt{2\pi e}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сравнение с аналитическими решениями для однородной сборки (пункт 2.1.2) показывает, что при больших значениях параметров вязкости $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ и $n \rightarrow \infty$ длинноволновые возмущения ведут себя так же, как и в эквивалентной однородной сборке с приведенными параметрами жесткости k_{np} и вязкости λ_{np} :

$$k_{np} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad \lambda_{np} = 2m \alpha_1 = \frac{2(\lambda_1 k_2^2 + \lambda_2 k_1^2)}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Если вязкость прослоек мала или отсутствует, то параметры эквивалентной однородной сборки определяются из условий равенства скоростей длинных волн и коэффициента γ в формулах (2.1.22) и (2.1.52):

$$k_{np} = \frac{k_1 k_2}{4\sqrt{k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2}}, \quad l_{np} = 2l \sqrt{1 - \frac{4k_1 k_2}{3(k_1 + k_2)^2}}.$$

Получим аналитическое выражение для спектральной плотности. Для этого применим к уравнениям и граничным условиям (2.1.49) преобразование

$$f^{\tilde{L}} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Из линейной системы уравнений найдем выражения для изображений смещений:

$$\ddot{u}_{k,n}^{\tilde{L}} = \frac{Q^{\tilde{L}} R_k \omega^2 e^{-2i\gamma}}{(k_1 + i\omega\lambda_1)F}, \quad k=1, 2; \quad (2.1.56)$$

$$R_1 = (k_1 + i\omega\lambda_1)e^{2i\gamma} + k_2 + i\omega\lambda_2, \quad R_2 = -m\omega^2 + k_1 + i\omega\lambda_1 + k_2 + i\omega\lambda_2,$$

$$F = -m\omega^2 e^{2i\gamma} + (k_1 + i\omega\lambda_1)(e^{2i\gamma} - 1),$$

где γ есть решение уравнения

$$\cos 2\gamma = 1 - A + iB,$$

$$A = \frac{\omega^2 m [\omega^4 m \lambda_1 \lambda_2 + \omega^2 \{2(\lambda_1^2 k_2 + \lambda_2^2 k_1) - m k_1 k_2\} + 2(k_1 + k_2)k_1 k_2]}{2(k_1^2 + \omega^2 \lambda_1^2)(k_2^2 + \omega^2 \lambda_2^2)},$$

$$B = \frac{\omega^3 m [\omega^2 \{2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) - m(\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_1)\} + 2(k_1^2 \lambda_2 + k_2^2 \lambda_1)]}{2(k_1^2 + \omega^2 \lambda_1^2)(k_2^2 + \omega^2 \lambda_2^2)}.$$

Выражения для спектральных плотностей находим из (2.1.56):

$$\left| \ddot{u}_{k,n}^{\tilde{L}} \right| = \frac{\left| Q^{\tilde{L}} \right| \left| R_k \right| \omega^2 z^{-n}}{(k_1^2 + \omega^2 \lambda_1^2)^{1/2} |F|}, \quad (k=1, 2), \quad \left| Q^{\tilde{L}} \right| = \frac{2Q_0 \omega_* \cos(\pi\omega/2\omega_*)}{\omega_*^2 - \omega^2}, \quad (2.1.57)$$

$$|F| = [(k_2^2 + \omega^2 \lambda_2^2 - 2k_2 m \omega^2 + m^2 \omega^4)z + (1 - 2x) * (k_2^2 + \omega^2 \lambda_2^2) + 2k_2 m x \omega^2 + 2\lambda_2 m y \omega^3]^{1/2},$$

$$|R_1| = [k_2^2 + \omega^2 \lambda_2^2 + (k_1^2 + \omega^2 \lambda_1^2)z + 2x(k_1 k_2 + \omega^2 \lambda_1 \lambda_2) + 2y\omega(k_1 \lambda_2 - k_2 \lambda_1)]^{1/2},$$

$$|R_2| = [(-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 + \omega^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2]^{1/2},$$

$$z = |e^{2i\gamma}| = x^2 + y^2, \quad x = x_1 + 1 - A, \quad y = y_1 + B,$$

$$y_1 = (-1)^r \sqrt{\alpha/2 + \sqrt{D}}, \quad x_1 = (-1)^r \sqrt{-\alpha/2 + \sqrt{D}} \operatorname{sign}[B(1-A)], \quad r = 1, 2,$$

$$\alpha = B^2 + 1 - (1-A)^2, \quad D = \sqrt{\alpha^2/4 + B^2(1-A)^2}.$$

Значение параметра r выбираем так, чтобы выполнялось условие $z \geq 1$, что соответствует убывающим на бесконечности решениям.

Для определения границ области применимости полученных аналитических решений проводилось их сравнение с конечно-разностными решениями системы уравнений (2.1.49).

На рис. 2.1.21 представлены ускорения 20-й (рис. 2.1.21а) и 80-й масс (рис. 2.1.21б), полученные для составной сборки при тех же параметрах, что и на рис. 2.1.20 ($\lambda_1 = 20$ кг/с, $\lambda_2 = 35$ кг/с, $k_1 = 0.2 \cdot 10^6$ кг/с², $k_2 = 0.5 \cdot 10^6$ кг/с², $l = 0.1$ м, $m = 0.3822$ кг, $\omega_* = 15.71$ Гц). Сплошная кривая рассчитана методом конечных разностей по явной схеме типа “крест” ($\tau = 0.001$ мс), штриховая линия 1 соответствует асимптотике (2.1.55), а 2 — асимптотике (2.1.53). Сравнение показывает, что соответствие конечно-разностного решения и асимптотики (2.1.53) для составной сборки достигается значительно дальше от места воздействия ($n \sim 10$), чем для однородной сборки ($n \sim 5$). Асимптотика (2.1.55), полученная из (2.1.53) в предположении, что $n \rightarrow \infty$, удовлетворительно описывает результаты конечно-разностного решения, начиная с $n \sim 40$. Сравнение (2.1.55) с численными расчетами показывает, что чем больше значение параметра вязкости, тем быстрее наступает соответствие двух решений.

Для иллюстрации влияния вязкостных свойств прослоек проведены расчеты без их учета. Осциллограммы ускорения 20-й массы и её спектральной плотности при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ иллюстрирует рис. 2.1.22. Остальные параметры те же, что и на рис. 2.1.21. Сплошная кривая на графике спектральных плотностей ускорений рассчитана для конечно-разностного решения, штриховая соответствует аналитическому решению (2.1.57), вертикальные линии —

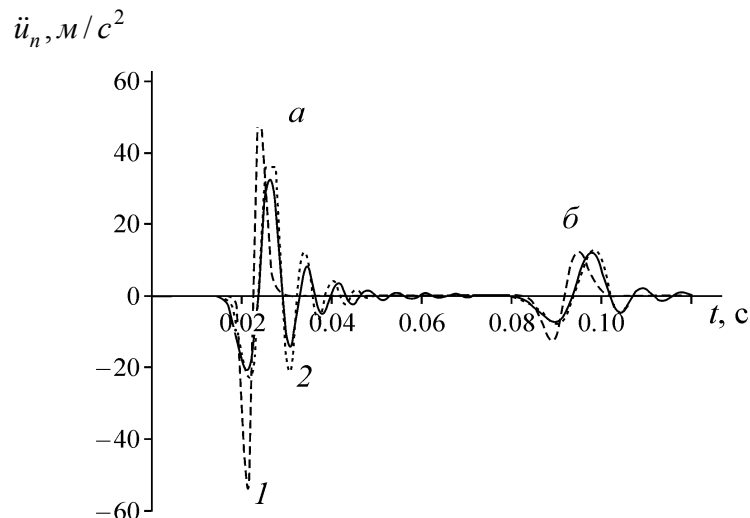


Рис. 2.1.21. Ускорения 20-й (а) и 80-й (б) масс для составной сборки с вязкостью.

значения Ω_k (2.1.51). Сравнение осциллограмм ускорений для 20-й массы на рис. 2.1.21, 2.1.22 показывает, что наличие вязкости приводит к очень большому (на порядки) затуханию высокочастотных колебаний, движущихся позади квазифронта $x = c_1 t$, и к уменьшению максимальной амплитуды ускорений низкочастотной маятниковой волны вблизи квазифронта (для данных параметров коэффициент уменьшения равен 1.5). Этот же вывод подтверждается и на графиках спектров плотностей (2.1.22 и рис. 2.1.27): при отсутствии вязкости высокочастотные колебания с ростом n затухают гораздо медленнее, чем в

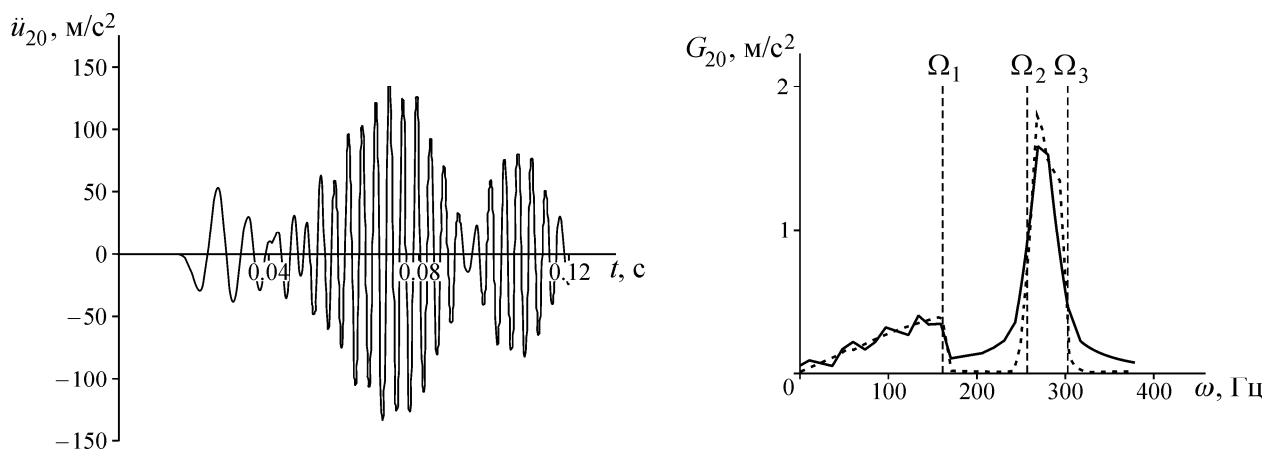


Рис. 2.1.22. Осциллограмма ускорения 20-й массы и её спектральная плотность для составной сборки без учета вязкости прослоек.

системе с вязкостью. Аналитическое решение и качественно и количественно хорошо описывает спектральные плотности, полученные для конечно-разностного решения. Некоторое различие в этих решениях связано с наличием численной дисперсии и тем, что в численном решении спектральная плотность вычислялась на конечном интервале времени.

Заключение

Получены асимптотические законы затухания низкочастотных маятниковых волн, возбуждаемых ударным воздействием в иерархической блочной среде второго порядка с вязкоупругими прослойками. Также получены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений в такой системе.

Теоретически определено, что при распространении возмущений в иерархической блочной среде кроме низкочастотной маятниковой волны появляются высокочастотные колебания. При этом наличие диссипативных свойств у прослоек приводит к быстрому затуханию высокочастотных волн. Увеличивается затухание и низкочастотных волн маятникового типа: степень затухания максимальных амплитуд скоростей масс и деформаций в системе с вязкими прослойками пропорциональна $t^{-1/2}$, ускорений — t^{-1} , в то время как без вязкости степень затухания амплитуд скоростей пропорциональна $t^{-1/3}$, ускорений — $t^{-2/3}$. Теоретически показано, что при наличии вязкости прослоек длинноволновые возмущения в иерархической среде, как и в случае идеальных пружин, асимптотически ведут себя так же, как в эквивалентной однородной цепочке масс с приведенными значениями параметров жесткости и вязкости.

2.1.5. Общий случай модели периодической блочной структуры

Результаты данного пункта опубликованы в [190, 132].

Ниже рассматривается общий случай периодической системы блочно-иерархического строения, состоящей из одинаковых структурных блоков, каждый из которых содержит конструкции различного типа (включающие

простейшие ячейки цепочки масс с пружинами, иерархические системы, аналогичные изображенной на рис. 2.1.15, и, например, трехмерные тела конечных размеров). Общее движение системы происходит в продольном направлении.

Конструкция блоков во многом произвольна — безынерционные связи, дискретные конструкции со многими степенями свободы или континуальные элементы — требуется лишь возможность ассоциировать “смещение блока” $U_n(t)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) со смещением какой-нибудь принадлежащей ему материальной точки.

Итак, предположим, что мы имеем систему динамических уравнений элементов блока и необходимый набор граничных условий. Для решения нестационарной задачи используется преобразование Лапласа по времени. Избавляясь в линейных уравнениях для изображений по Лапласу от смещений внутренних элементов блока, получим уравнения, связывающие U_n^L , U_{n+1}^L , U_{n-1}^L , поскольку они входят в граничные условия для уравнения движения n -го блока.

Теперь задача сводится к решению бесконечной системы уравнений

$$\Phi(U_{n-1}^L, U_n^L, U_{n+1}^L; p) = Q_n^L,$$

где $\Phi(\dots)$ — линейная функция U_n^L , U_{n+1}^L , U_{n-1}^L , а Q_n^L — изображение по Лапласу внешней нагрузки. Далее применяется дискретное преобразование. Формальное решение в изображениях имеет вид

$$U^{LF_d}(p, q) = \frac{Q^{LF_d} A(p, q, K)}{D(p, q, K)}, \quad (2.1.58)$$

где A — оператор, соответствующий типу связей между элементами блока; K — все параметры (константы) задачи; D — дисперсионный оператор системы:

$$D(p, q, K) = \sin^2(ql/2) - \beta(p, K). \quad (2.1.59)$$

Здесь, в общем случае, β — трансцендентная функция.

Формальное решение нестационарной проблемы

$$U_n(t) = \frac{l}{4\pi^2 i} \int_{-\pi\alpha - i\infty}^{\pi\alpha + i\infty} \int U^{LF_d}(p, q) e^{pt - iqn l} dp dq. \quad (2.1.60)$$

Точное обращение (2.1.69) обычно невозможно, за исключением некоторых простейших частных случаев. Поэтому, как и ранее, ниже используется метод [175] асимптотического обращения двойного преобразования по Лапласу и Фурье при $p \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$, что соответствует в пространстве оригиналов длинноволновым возмущениям при бесконечно большом времени с начала действия нагрузки ($t \rightarrow \infty$).

Проведем анализ дисперсионного уравнения, которое получается после замены $p = iqc = i\omega$ (ω — частота) в дисперсионном уравнении

$$D(i\omega, q, K) = \sin^2(ql/2) - \beta(i\omega, K) = 0.$$

Можно показать, что низкочастотное приближение дисперсионного уравнения имеет следующий вид:

$$\sin^2(ql/2) = \alpha_1(K)\omega^2 - \alpha_2(K)\omega^4 + O(\omega^6) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R; \alpha_1, \alpha_2 > 0),$$

а его длинноволновая асимптотика

$$c = c_1 [1 - \alpha q^2 + O(q^4)]$$

в точности соответствует структуре асимптотики для цепочки масс с пружинами ($c_1 = l\sqrt{k/m}$, $\alpha = c_1 l^2 / 24$), но со своими константами: скоростью длинных волн c_1 и параметром дисперсии α — интегральными представителями свойств конкретной структуры:

$$c_1 = \frac{l}{2\sqrt{\alpha_1}}, \quad \alpha = \frac{c_1 l^2}{24} \left(1 - \frac{3\alpha_2}{\alpha_1^2} \right).$$

Следуя методу Слепяна [175] обращения двойного преобразования в окрестности луча $nl = c_1 t$, положим в подынтегральном выражении $p = s + iq(c_1 + c')$, $|q| \ll 1$, где $s \rightarrow 0$, $c' \rightarrow 0$. Получим асимптотическое разложение дисперсионного оператора

$$D(s, q) \approx 2iqc_1(s + iq c' + i\alpha q^3).$$

Делая аналогичным образом в числителе $A(s + iq c_1, q, K) = A_U \approx O(1)$, будем иметь следующую асимптотику для подынтегрального выражения:

$$U^{LF_d} \approx \frac{Q^{LF_d} \cdot A_U}{2iqc_1(s + iq c' + i\alpha q^3)}.$$

Пусть в сечении $n=0$ приложена сосредоточенная полусинусоидальная нагрузка (2.1.4). В результате обращения на луче, получим низкочастотную асимптотику длинноволновых возмущений при $t \rightarrow \infty$

$$U_n = \frac{P_0 A_U}{c_1 \omega_*} \left[\frac{1}{3} - \int_0^\kappa \text{Ai}(y) dy \right], \quad \dot{U}_n = \frac{P_0 A_U}{\omega_* (3\alpha t)^{1/3}} \text{Ai}(\kappa),$$

$$\ddot{U}_n = \frac{P_0 A_U c_1}{\omega_* (3\alpha t)^{2/3}} \frac{d\text{Ai}(\kappa)}{d\kappa}, \quad \kappa = \frac{nl - c_1 t}{(3\alpha t)^{1/3}}.$$

Структура решения совпадает с решением (2.1.22) для цепочки масс с пружинами. Таким образом, реакция любой протяженной дискретно-периодической конструкции на нестационарное воздействие описывается одним и тем же асимптотическим решением (2.1.22). Различаются только коэффициенты α и c_1 . Вычислив их, можно определить для сложной блочно-иерархической структуры эквивалентную ей цепочку масс с пружинами.

Заключение

Анализ длинных волн в одномерной периодической системе произвольного иерархического строения показал, что структура маятниковой волны (дисперсия

волны, скорость ее распространения и степень затухания) определяется по асимптотически эквивалентной модели цепочки масс с пружинами с двумя интегральными параметрами, зависящими от свойств конкретной системы.

Полученный результат имеет следующий физический смысл. Со скоростью c_1 движется квазифронт низкочастотных волн. За ним с меньшей скоростью движутся более высокочастотные составляющие. Зона квазифронта расплывается со временем (расстоянием от источника) как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$). Смещения осциллируют относительно среднего значения $P_0 A_U / (c_1 \omega_*)$ с амплитудой и периодом максимальными вблизи квазифронта, там же достигаются максимумы скоростей и деформаций, но последние, в отличие от смещений, убывают со временем (расстоянием) как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$). Ускорения убывают со временем как $t^{-2/3}$ ($n^{-2/3}$) и имеют максимальные амплитуды не в районе квазифронта, а на некотором (увеличивающемся как $t^{1/3}$) расстоянии от него.

2.1.6. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов моделирования процесса распространения волн в составных стержневых системах с учетом вязкости и структурности

Эксперименты проводились Е.Н. Шером и А.Г. Черниковым.

2.1.6.1. Однородная система стальных стержней с прослойками из резины, линолеума и пенопласта

Настоящий пункт посвящен исследованию влияния демпфирующих свойств прослоек между блоками на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения. Результаты данного пункта опубликованы в [23, 34, 41, 132].

Для моделирования блочной структуры использовались стальные стержни диаметром 25 мм и длиной 100 мм, разделенные прослойками, которые изготавливались из листовой плотной и пористой резины, линолеума и пенопласта. Преимуществом стальных стержней является возможность

использовать при теоретическом моделировании процесса распространения волн в цепочке “стержни – прослойки” одномерные схемы деформирования.

Стержни, разделенные резиновыми прослойками, располагались в вертикально установленной трубе с продольными прорезями для вывода кабелей, регистрирующих движение датчиков. Фотография установки представлена на рис. 2.1.23. В качестве таких датчиков использовались акселерометры КД-91, встроенные продольно в несколько стержней. Акселерометры распределялись по длине верхней части сборки в 1 – 4 и 11 стержнях. По свободному торцу верхнего стержня производился удар, интенсивность которого фиксировалась акселерометром, установленным на ударнике. Длина сборки (2 м) позволяла регистрировать колебания стержней до прихода волн, отраженных от нижнего торца сборки.

В экспериментах варьировались материал прослоек, длительность нагружающего ударного импульса и его амплитуда. Часть экспериментов проводилась в условиях поджатия сборки стержней с прослойками натянутыми внешними резиновыми тягами.

Полученное в экспериментах существенное влияние диссипации энергии в прослойках на процесс распространения волн в блочной системе привело к необходимости теоретического моделирования этого процесса. Одной из причин диссипации является вязкоупругое поведение прослоек. Влияние вязкости успешно учтено выше (см. пункт 2.1.2) при моделировании распространения волн в однородной цепочке масс с двумя парами упругих и демпферных элементов, включенных последовательно и параллельно.

Характерным для данных, полученных в экспериментах, явилось выделение двух типов волн: низкочастотных и отстающих от них высокочастотных. Частота последних — 25 кГц, совпадает с частотой собственных колебаний свободного стального стержня длиной 100 мм. Качественно такое поведение волн в составной системе “упругие стержни – пружины” совпадает с описанным в пункте 2.1.1.

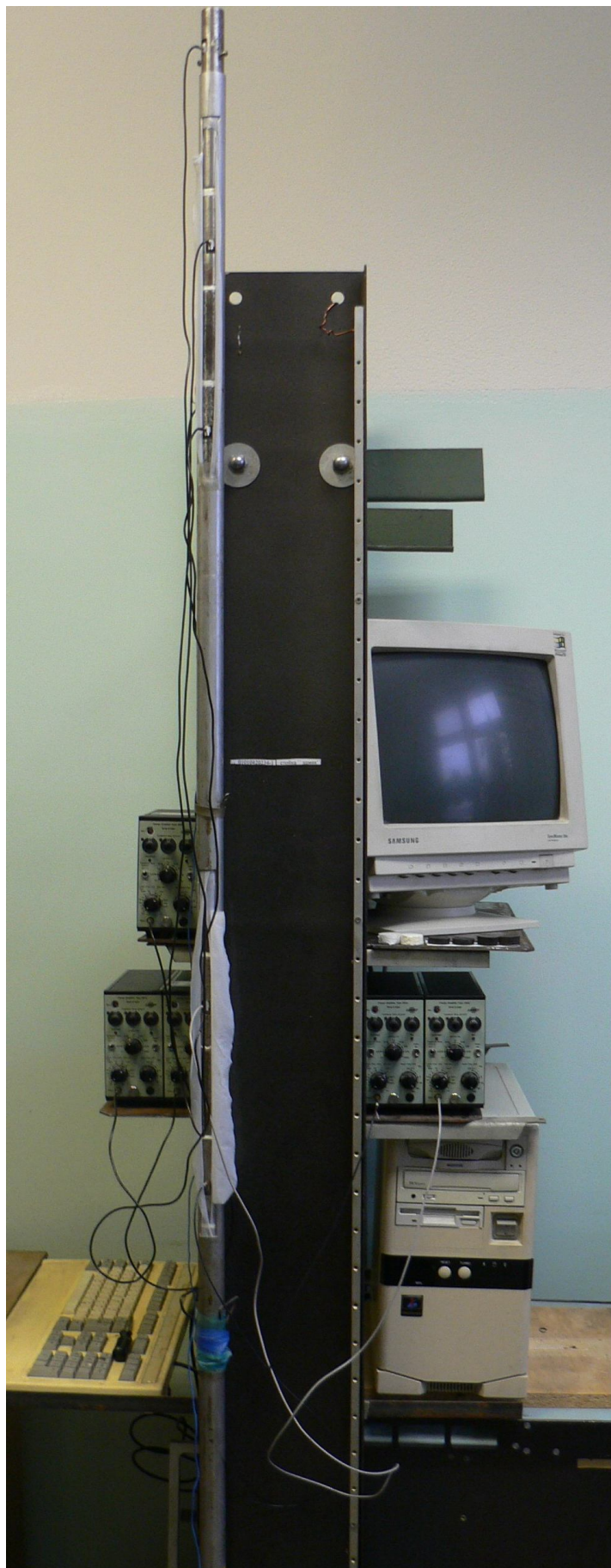


Рис. 2.1.23. Экспериментальная установка.

В отличие от теоретических данных, полученных без учета вязкости прослоек (2.1.23), в экспериментах наблюдается более интенсивное затухание волн в процессе их распространения. Особенно это касается высокочастотных волн, которые затухают очень сильно и практически регистрируются только на первых трех стержнях. Сильнее они возбуждаются при коротком ударном импульсе и распространяются дальше с увеличением жесткости прослоек.

Другим отличием результатов данных экспериментов от теоретических явилось значительное расхождение в величинах скорости распространения низкочастотных волн. Теоретические значения, определенные по статическим значениям жесткости прослоек, оказались в несколько раз меньше экспериментальных. Все это можно объяснить неупругим поведением прослоек при деформировании, в связи с чем было проведено исследование деформационных свойств прослоек при разных скоростях нагружения. В диапазоне $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-3} \div 1.2 \text{ с}^{-1}$ нагружение проводилось на испытательном прессе Instron. Испытания показали, что для плотной резины и линолеума характерен нелинейный рост модуля сжатия, гистерезис при разгрузке и значительное влияние скорости деформирования на вид диаграммы нагружения. Для пористой резины и пенопласта влияние скоростей нагружения оказалось слабым. Также мало отличие ветвей нагружения и разгрузки.

Данные по жесткости прослоек, полученные на Instron, приведены в таблице 2.1.1 для силы сжатия 120 Н и двух скоростей нагружения. Статическая жесткость K_{st} соответствует минимальной скорости нагружения $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, динамическая K_d определена при $\dot{\varepsilon} = 1.2 \text{ с}^{-1}$. Экспериментальные значения скорости C_v , определялись как скорость движения первого максимума ускорений из экспериментальных осциллограмм. Пользуясь теоретической формулой (2.1.16), полученной в 2.1.1 для цепочки масс с пружинами, вычисляем K_v : $K_v = mC_v^2/l^2$, где $m = 0.3822 \text{ кг}$ – масса стального стержня, $l = 0.1 \text{ м}$ – длина стержня. Теоретические значения скорости C_{st} определялись по значению K_{st} с

использованием формулы $C_{st} = l\sqrt{K_{st}/m}$. Параметры вязкости прослоек определялись из сравнения экспериментальных и теоретических осциллограмм.

Таблица 2.1.1. Деформационные свойства прослоек, использованных в эксперименте, и значения скоростей распространения волн, определенных экспериментально C_V и теоретически C_{st} .

Материал	K_{st} , 10^5 Н/м	K_d , 10^5 Н/м	K_V , 10^5 Н/м	C_{st} , м/с	C_V , м/с	λ_1 , кг/с	λ_2 , кг/с
Резина плотная	4.8	6.2	44	112	340	10000	500
Резина пористая	0.16	0.16	2.1	20	75	1000	10
Линолеум	0.8	1.8	44	46	340	10000	500
Пенопласт	3.5	3.5	5	96	115	1000	10

Из таблицы 2.1.1 видно, что у плотной резины и линолеума наблюдается заметное увеличение жесткости с увеличением скорости деформирования. У пенопласта и пористой резины этот эффект менее заметен.

Для медленных нагружений силы, создаваемые демпфирующими элементами, малы и поведение прослойки определяется упругим элементом k_2 . Таким образом можно принять $k_2 = K_{st}$. Для больших скоростей жесткость прослойки приближается к суммарной $k_1 + k_2$. Параметры k_1 , λ_1 и λ_2 модели прослоек, представленной на рис. 2.1.8, не известны. В настоящей работе их значения подбирались из условия наилучшего согласования экспериментальных и теоретических данных. Особое внимание при этом обращалось на соответствие величин скорости распространения низкочастотной волны, ее периода и коэффициента затухания.

Численные расчеты и сравнение с экспериментами

Система уравнений (2.1.1) с нулевыми начальными и граничными условиями (2.1.29), (2.1.30) и импульсной нагрузкой (2.1.4) решалась методом конечных разностей по явной схеме типа “крест” ($\tau = 0.001$ мс, τ — шаг

разностной схемы по времени). Система уравнений (2.1.27) решалась также методом конечных разностей.

Экспериментальные зависимости ускорения от времени второго и десятого стержня в системе с прослойками из жесткой резины представлены на рис. 2.1.24а,б линиями 1. Линии 2 соответствуют расчетным зависимостям ускорения от времени, полученным с использованием упругопластической модели прослоек (рис. 2.1.8), параметры которой приведены в таблице 2.1.1 и подобраны так, чтобы обеспечить удовлетворительное согласие данных теории и эксперимента. Кривые 3 были рассчитаны при $k_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $k_2 = K_{st}$.

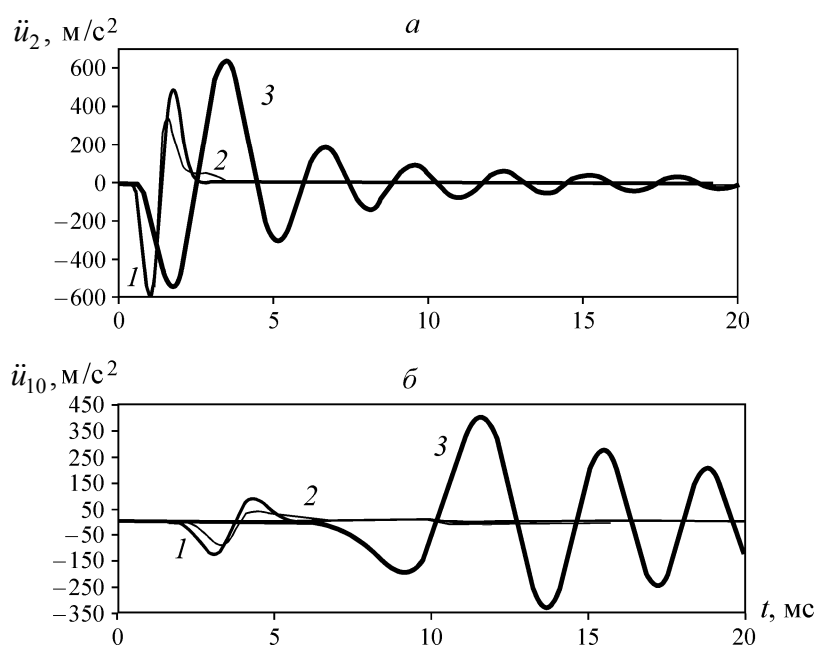


Рис. 2.1.24. Зависимости ускорения стержней от времени в системе с прослойками из плотной резины.

При данном нагружении результаты расчетов для стержневой системы и цепочки масс совпадают. Из сравнения теоретических и экспериментальных кривых видно, что при учете одной статической жесткости прослоек из резины получается значительное расхождение теории и эксперимента. В этом случае теоретическая скорость распространения волны C_{st} значительно меньше

экспериментальной C_v . То же относится к коэффициенту затухания волны и величине основной частоты колебаний.

Для подобранных значений параметров λ_1 и λ_2 , и $k_1 = K_v - k_2$, $k_2 = K_{st}$ удастся удовлетворительно приблизить экспериментальные и теоретические кривые. Величины этих параметров приведены в таблице 2.1.1, как и значения скоростей распространения медленных волн C_v .

Аналогичные расчеты были проделаны с экспериментальными данными, полученными для прослоек из пористой резины, линолеума и пенопласта. Параметры моделей этих прослоек, наилучшим образом описывающих эксперимент, также приведены в таблице 2.1.1.

Из таблицы 2.1.1 видно, что C_v достаточно близко к C_{st} только для пенопласта. Наибольшее отличие этих величин имеет место у линолеума и плотной резины, для которых максимально и затухание. Отметим, что кривые одноосного сжатия для этих материалов имеют максимально выраженный гистерезис при разгрузке. У пористой резины и пенопласта такой гистерезис значительно меньше и затухание волны, определяемое в расчетах величиной λ_2 , слабее.

Таким образом, экспериментальные исследования распространения волн в одномерных моделях блочных сред подтвердили существование маятниковых волн в блочных средах [95].

Показано, что скорость распространения маятниковых волн, период, степень их затухания существенно зависят от реологических свойств прослоек, таких как увеличение их жесткости с ростом скорости и величины нагружения, наличие гистерезиса в циклах растяжение – сжатие.

Удовлетворительное согласие теории и эксперимента удастся получить с использованием вязкоупругой модели деформирования прослоек, состоящих из двух пар упругих и демпфирующих элементов, соединенных последовательно и параллельно.

Для того, чтобы сравнить с результатами аналитического решения (2.1.40), полученного в предположении, что в модели используется только параллельное соединение (рис. 2.1.10), и для оценки адекватности принятой модели, были проведены экспериментальные исследования распространения волны при ударном нагружении системы стержней, разделенных резиновыми прослойками.

Исследования проводились на стержневой системе, описанной выше. Стержни, разделенные резиновыми прослойками, располагались в вертикально установленной трубе.

На рис. 2.1.25 представлены осциллограммы ускорений, полученные в одном из экспериментов (тонкие кривые), а также результаты расчетов по уравнениям (2.1.1), (2.1.29), (2.1.30) (толстые кривые) при $k_2 = 5.5 \text{ кг/мс}^2$, $\lambda_2 = 0.7 \text{ кг/мс}$, $m = 0.3822 \text{ кг}$, $l = 0.1 \text{ м}$, $\omega_* = 31.4 \text{ мс}^{-1}$. Пунктирные кривые соответствуют асимптотике (2.1.40). Начиная с номера $n = 11$, достигается хорошее совпадение асимптотики и численного счета. Видно, что математическая модель при данных значениях параметров жесткости и вязкости в рамках проведенного эксперимента удовлетворительно описывает поведение стержневой системы с резиновыми прослойками при импульсном возбуждении.

Заключение

На примере экспериментальной сборки из стальных стержней, соединенных резиновыми прослойками, показано, что модель цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами, хорошо описывает распространение низкочастотных маятниковых волн в одномерной блочной среде.

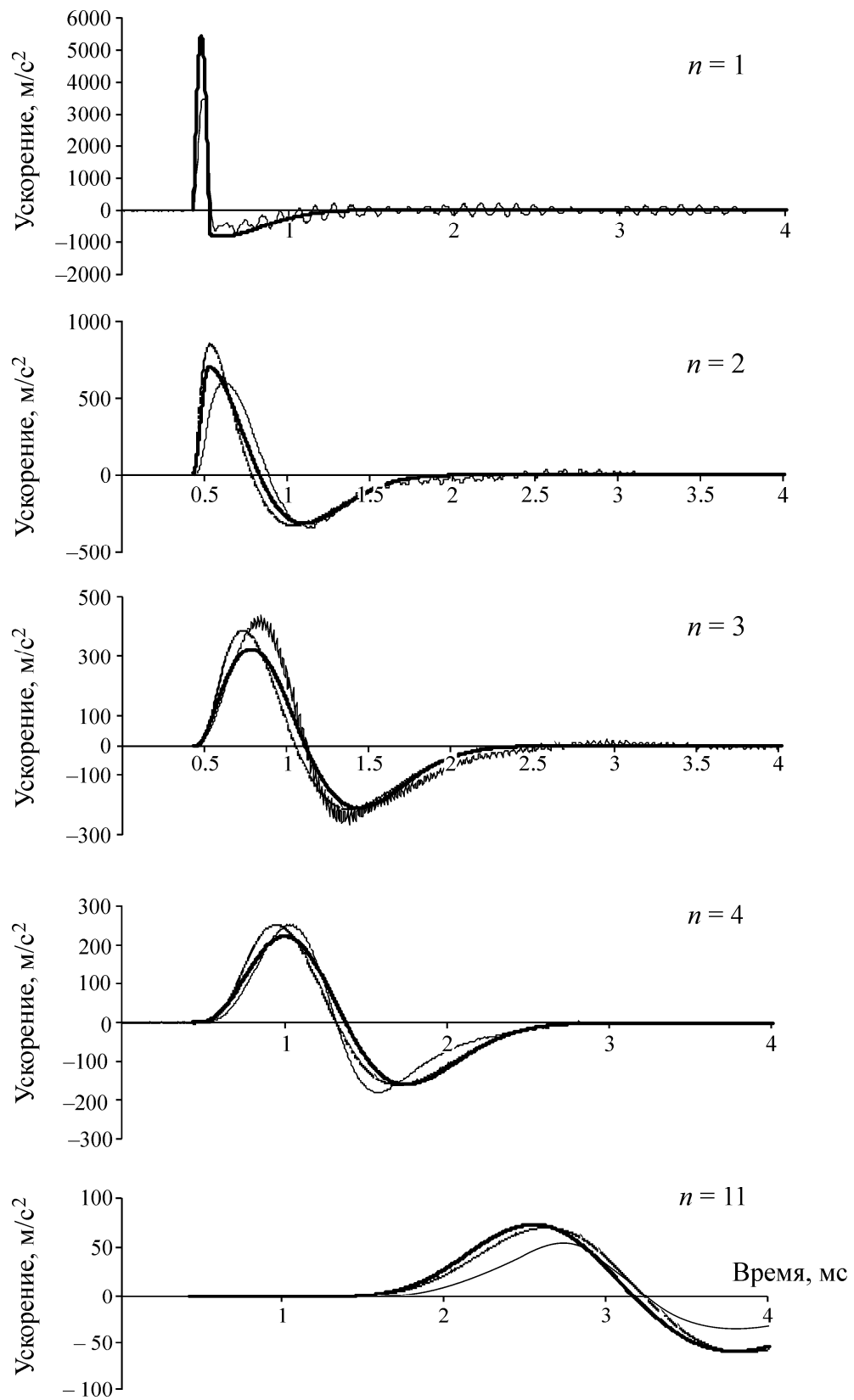


Рис. 2.1.25. Сравнение экспериментальных и теоретических данных для ускорений.

2.1.6.2. Система стальных стержней, разделенных чередующимися прослойками из резины и пенопласта

Результаты данного пункта опубликованы в [45, 132].

Выше были проведены теоретические и экспериментальные исследования волноводных свойств одномерных моделей блочных сред, представленных цепочкой упругих блоков, разделенных податливыми прослойками. Данный пункт посвящен экспериментальному исследованию влияния внутреннего строения блоков на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения.

Исследуется распространение волн маятникового типа в системе стальных стержней, разделенных чередующимися прослойками из резины и пенопласта, при ударном нагружении. Эксперименты проводились на стержневой системе, описанной выше с прослойками из разных материалов. В качестве датчиков использовались акселерометры, которые распределялись по длине верхней части сборки в 3, 4, 5, 12 и 13-м стержнях. По свободному торцу верхнего стержня производился удар, интенсивность которого фиксировалась акселерометром, установленным на ударнике. Сигналы акселерометров регистрировались в цифровом виде с помощью АЦП Е-440. Это позволяло проводить их математическую обработку и, в частности, спектральный анализ с помощью быстрого преобразования Фурье. Этот эксперимент соответствует моделированию распространения волн по иерархической среде второго порядка (рис. 2.1.19), блоки которой содержат подблоки аналогично цепочке Борна.

Типичные экспериментальные осциллограммы ускорений стержней $\ddot{u}_j(t)$ и их спектральные плотности

$$G_j(\omega) = \left| \int_0^T \ddot{u}_j(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

для составных систем, отличающихся прослойками, приведены на рис. 2.1.26–2.1.28 сплошными линиями. Штриховые кривые на осциллограммах

соответствуют решению уравнений (2.1.1), (2.1.29), (2.1.30) конечно-разностным методом, и на графиках спектральной плотности штриховые кривые соответствуют спектральной плотности, вычисленной для по результатам конечно-разностных решений. Связь между номерами массы j в цепочке, блока n и массы k в блоке осуществляется по формуле $j = 2n - 2 + k$. Параметры вязкости и жесткости разных прослоек при численном моделировании подбирались из условия совпадения скоростей распространения маятниковой волны и периода ее колебаний в окрестности фронта по данным экспериментов с однородными системами. Величина ω_* также определялась из эксперимента. Для прослоек из пористой резины (рис. 2.1.27): $\lambda_1 = \lambda_2 = 20$ кг/с, $k_1 = k_2 = 0.2 \cdot 10^6$ кг/с², $\omega_* = 3.14$ Гц, из пенопласта (рис. 2.1.26): $\lambda_1 = \lambda_2 = 35$ кг/с, $k_1 = k_2 = 0.5 \cdot 10^6$ кг/с², $\omega_* = 13.66$ Гц. Данные представлены для 4-го и 12-го стержней. В численных расчетах для составной сборки с прослойками из пенопласта и пористой резины параметры вязкости и жесткости брались те же, что и для однородных сборок (рис. 2.1.28): $\lambda_1 = 20$ кг/с, $\lambda_2 = 35$ кг/с, $k_1 = 0.2 \cdot 10^6$ кг/с², $k_2 = 0.5 \cdot 10^6$ кг/с², только отличалось значение $\omega_* = 15.71$ Гц. Остальные параметры были в соответствии с экспериментом одинаковыми для всех расчетов: $l = 0.1$ м, $m = 0.3822$ кг. На рис. 2.1.28 показаны осциллограммы ускорений и их спектральные плотности для системы стержней с чередующимися прослойками из пористой резины и из пенопласта для 3-го и 13-го стержней.

Сплошные тонкие линии на графиках спектральной плотности на рис. 2.1.28 — аналитическое решение (2.1.57). Вертикальные штриховые линии на графиках спектральной плотности (рис. 2.1.26, 2.1.27) соответствуют значению $\Omega_1 = 2\sqrt{k_1/m}$. Вертикальные штриховые линии на графиках спектральной плотности (рис. 2.1.28) соответствуют значениям Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , рассчитанным по формулам (2.1.51). Анализ графиков показывает, что аналитические оценки (2.1.51) согласуются как с экспериментальными спектрами, так и с теоретическими, полученными конечно-разностным методом.

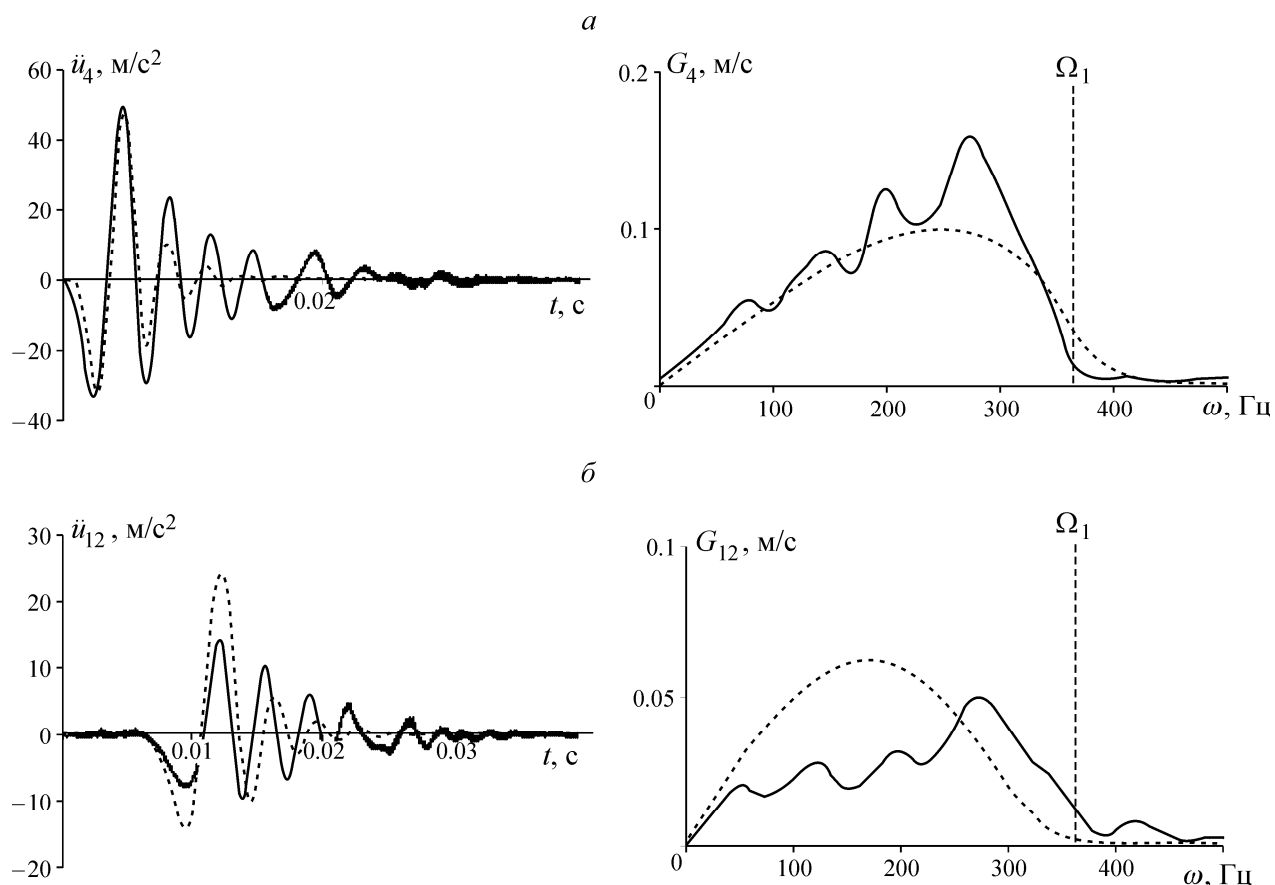


Рис. 2.1.26. Осциллограммы ускорений 4-го (а) и 12-го (б) стержней и их спектральные плотности при ударе по составной стержневой системе с прослойками из пенопласта.

Анализ теоретических графиков спектральных плотностей ускорений 3-й и 13-й масс (рис. 2.1.28) показывает, что наличие вязкости, как и в эксперименте, приводит к более быстрому затуханию высокочастотных колебаний по сравнению с низкочастотными по мере распространения возмущений по системе. При данных значениях параметров вязкости и $n \geq 10$ максимальная амплитуда высокочастотных колебаний в области $\Omega_2 \leq \omega \leq \Omega_3$ составляет менее 1% от максимума в области $\omega \leq \Omega_1$.

На осциллограммах рис. 2.1.26, 2.1.27 можно видеть процесс распространения по составной стержневой системе первого порядка (без подблоков) низкочастотной маятниковой волны, вызванной ударом. От свойств прослоек зависит скорость маятниковой волны, ее спектральный состав и коэффициент затухания. Система с прослойками из пенопласта отличается

максимальной скоростью распространения (114 м/с), широкой полосой частот (до 300 Гц) и малым затуханием по сравнению с системой с прослойками из пористой резины, для которой скорость распространения 77 м/с, полоса частот до 230 Гц. Для системы из поочередно расположенных пенопластовых и резиновых прослоек, представляющей пример цепочки Борна, характер распространения возмущений более сложный (рис. 2.1.28). На первых стержнях наблюдается двухволновая конфигурация. Впереди бежит низкочастотная маятниковая волна и за ней высокочастотная. По мере распространения возмущения высокочастотная волна быстро затухает, в отличие от случая системы только с упругими пружинами (рис. 2.1.18), и уже на 13-м стержне ее нет, регистрируется только низкочастотная маятниковая волна, распространяющаяся со скоростью 65 м/с, меньшей, чем в системе с пористой резиной (77 м/с). В соответствии с этим спектр возмущения на первых стержнях имеет два максимума, отвечающих двухволновой конфигурации. Видно также, что по мере распространения возмущения амплитуда высокочастотной волны затухает сильнее, чем низкочастотной, и к 13-му стержню в эксперименте второй максимум не наблюдается.

Сравнение численных и экспериментальных кривых показывает, что модель цепочки масс с вязкоупругими связями хорошо описывает экспериментальные осциллограммы и спектры на малых расстояниях от места воздействия (3 – 5-й стержень). На больших расстояниях затухание амплитуды маятниковой волны в эксперименте оказывается заметно больше, чем в расчетах, хотя в скорости распространения и в форме сигнала больших расхождений нет. Это обстоятельство показывает, что проблема диссипации энергии при распространении волн в блочной среде требует дальнейших исследований и усовершенствования теоретической модели.

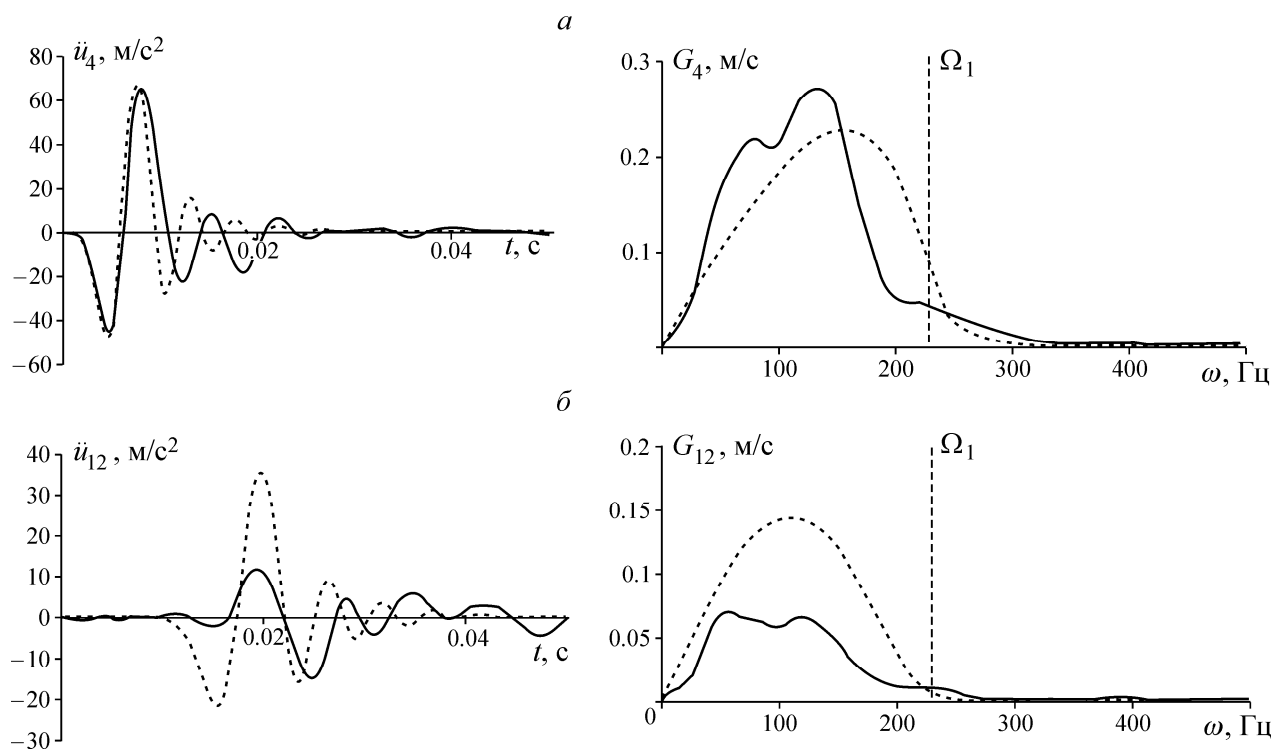


Рис. 2.1.27. Осциллограммы ускорений 4-го (а) и 12-го (б) стержней и их спектральные плотности при ударе по составной стержневой системе с прослойками из пористой резины.

Заключение

На примере экспериментальной сборки из стальных стержней, соединенных попеременно прослойками с разными свойствами, продемонстрирована возможность моделирования процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах с использованием модели цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами.

Экспериментально и теоретически определено, что при распространении возмущений в иерархической блочной среде кроме низкочастотной маятниковой волны появляются высокочастотные колебания. При этом наличие диссипативных свойств у прослоек приводит к быстрому затуханию высокочастотных волн. Увеличивается затухание и низкочастотных волн маятникового типа.

Теоретически показано, что при наличии вязкости прослоек длинноволновые возмущения в иерархической среде, как и в случае идеальных

пружин, асимптотически ведут себя так же, как в эквивалентной однородной цепочке масс с приведенными значениями параметров жесткости и вязкости.

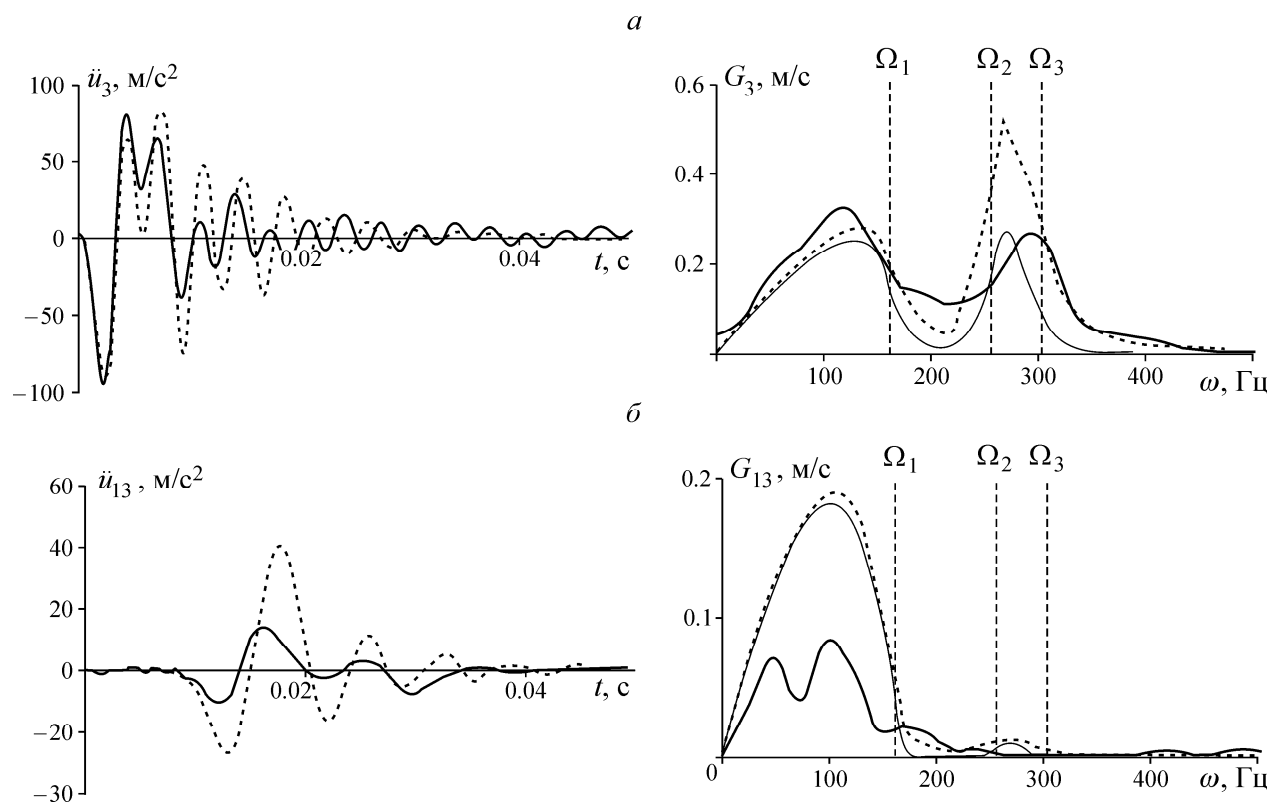


Рис. 2.1.28. Осциллограммы ускорений 3-го (а) и 13-го (б) стержней и их спектральные плотности при ударе по составной стержневой системе с прослойками из пенопласта и из пористой резины, размещенных последовательно.

2.1.7. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде, составленной из кирпичей

Эксперименты проводились Е.Н. Шером и А.Г. Черниковым. Результаты данного пункта опубликованы в [23, 33].

Рассмотрим модель блочной среды, составленной из стандартных силикатных кирпичей. Основная цель изучения этой модели — получить данные о скорости распространения маятниковой волны, о затухании ее максимальной амплитуды с расстоянием в зависимости от наличия резиновых прослоек и провести сопоставление с данными расчетной модели (2.1.27), (2.1.28).

Схема экспериментальной сборки представлена на рис. 2.1.29. Кирпичи укладывались друг на друга большими гранями. Размер отдельного кирпича $250 \times 120 \times 85$ мм, его вес 5200 г при плотности 2.04 г/см^3 и продольной скорости звука 3100 м/с. Для фиксирования процесса прохождения упругих волн в такой блочной системе использовались акселерометры GT-200, которые крепились на нижней грани кирпичей с помощью прослойки из пластилина толщиной до 1 мм. С целью организации свободных площадок для крепления датчиков, кирпичи поочередно выдвигались из стопки на 25 мм. Датчики были установлены на шести верхних кирпичах из восьми (см. рис. 2.1.29). Вся сборка стояла на лабораторном столе. Наименьшая частота собственных колебаний всей системы при этом составляет 90 Гц.

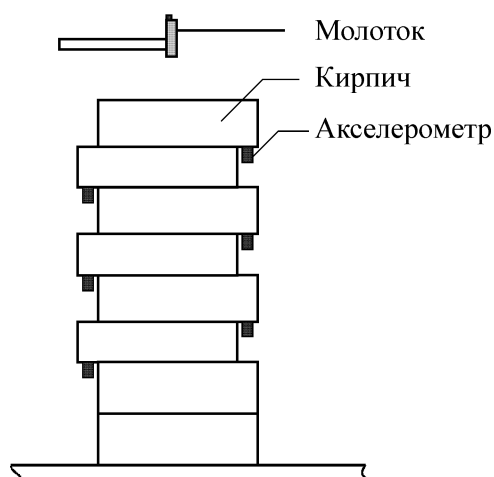


Рис. 2.1.29. Расположение кирпичей и датчиков ускорения в экспериментальной сборке.

В качестве внешнего возбудителя упругих волн использовался молоток, ударная часть которого изготовлена в виде стального цилиндра диаметром 13.8 мм и длиной 43 мм, с закрепленным на тыльной стороне акселерометром 9803 фирмы Брюль и Кьер, позволяющим измерять силу и продолжительность удара. Возбуждаемые упругой волной электрические сигналы, поступающие от датчиков через систему усилителей и АЦП, фиксировались в памяти компьютера или запоминающего осциллографа.

На рис. 2.1.30 приведена характерная осциллограмма сигналов датчиков, фиксирующих колебания отдельных блоков, которая демонстрирует прохождение упругого сигнала, создаваемого ударным воздействием молотка по верхнему кирпичу, через стопку из шести кирпичей с демпфирующими прослойками из вакуумной резины. Кривая 1 соответствует записи силы воздействия молотка в процессе удара, а кривые 2–7 фиксируют сигналы акселерометров, закрепленных на блоках. Возрастание номеров кривых (справа) соответствует последовательности удаленности датчика от источника возбуждения упругих волн. Слева от графиков приведены максимальные значения сигналов. Упругая волна, инициированная ударом молотка на поверхности верхнего кирпича, воспринимается первым датчиком, закрепленным на нижней поверхности этого кирпича, как пакет монотонно затухающих высокочастотных волн с преимущественным периодом 300 мкс. Более высокочастотные волны, соответствующие собственным частотам продольных колебаний отдельного блока с периодом 55 мкс, имеют значительно меньшую амплитуду и малозаметны на осциллограммах. После прохождения первой контактной поверхности раздела между блоками амплитуда высокочастотного сигнала снижается. Датчик второго кирпича фиксирует волну, период которой значительно больше. На следующих кирпичах четко выделяется низкочастотная часть сигнала. Величина ускорения на последнем кирпиче всегда оказывается больше, чем на предыдущем. Как показали расчеты, это является следствием большой податливости опоры с коэффициентом жесткости $\approx 13.3 \cdot 10^6 \text{ кг/с}^2$, вызывающей значительное ускорение последнего кирпича при отражении волны.

Для расширения диапазона изменения расстояний от источника излучения до приемных датчиков использовался прием наложения сверху дополнительных кирпичей на сборку (см. рис. 2.1.29), оснащенную датчиками. С каждой новой сборкой регистрировалось прохождение упругих сигналов, возбуждаемых ударами молотка различной интенсивности, наносимых по верхнему кирпичу.

Для унификации измерений датчиков при различных исходных возбуждающих импульсах введена безразмерная величина ускорения $\bar{a} = a/a_0$, где

a_0 — максимальное ускорение молотка в процессе удара; a — ускорение, зафиксированное датчиком на кирпиче.

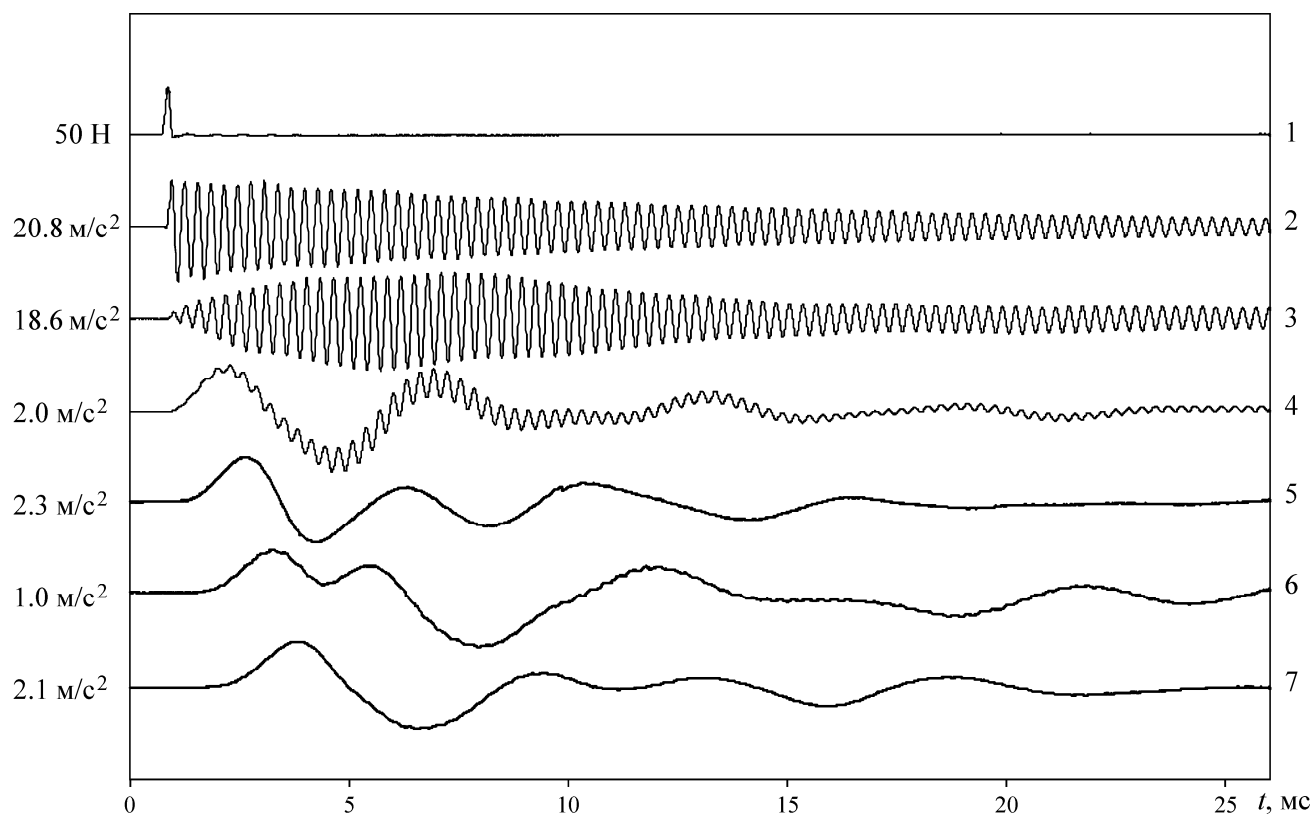


Рис. 2.1.30. Распространение волны по сборке кирпичей с прослойками из вакуумной резины толщиной 1 мм; скорость низкочастотной волны 164 м/с; длительность удара 0.21 мс.

В качестве основных параметров, определяющих поведение упругой волны при ее прохождении через блочную систему, исследованы скорость распространения и затухание амплитуды первой волны волнового пакета.

Скорость распространения упругого сигнала определялась двумя способами. В первом — по разности времени между началом взаимодействия молотка и сборки, определяемого по сигналу, поступающему от датчика ударника, с учетом времени прохода упругой волны по цилиндрической части стального молотка, и первым максимумом сигнала приемного датчика. Определяемая таким образом скорость V_M характеризует скорость маятниковой волны. Во втором случае, этот отрезок времени измерялся от начала сигнала

ударника до первого вступления волнового пакета, регистрируемого приемным датчиком. При этом определяется скорость распространения сигнала V_I , фиксируемого по вступлению. Расстояние от точки приложения удара l и количество блоков n до приемных датчиков изменялось в процессе проведения экспериментов. Измерения проведены первым способом. После преодоления волной двух контактных разделов между блоками ее скорость стабилизируется и не зависит от величины пройденного пути. При наличии резиновых прослоек между блоками устанавливается значение скорости V_M , равное 164 м/с, а при их отсутствии — 316 м/с.

Скорость, измеренная по начальным моментам подхода упругих волн к фиксирующим датчикам, существенно зависит от количества пройденных кирпичей. График такой зависимости имеет экспоненциальный вид, при котором скорость распространения изменяется от величины в 3100 м/с, характерной для сплошной среды, до 400–600 м/с после прохождения восьми блоков и 700 мм пути. Это обстоятельство необходимо учитывать, например, при локации источников сигналов акустической эмиссии в блочных средах.

Наличие прослоек из вакуумной резины между кирпичами слабо, в пределах экспериментального разброса данных, влияет на скорость вступления с увеличением расстояния от источника удара до приемного датчика. Тем не менее, интерполирующая кривая, описывающая спад скорости при прохождении упругого сигнала через кирпичи с резиновыми прослойками, расположена ниже, чем соответствующая для сборки без прослоек. Экспериментальные данные скорости вступления упругого сигнала, проходящего через модельную блочную систему, хорошо описываются выражением $V_I = \alpha_1 n^\alpha + \alpha_2$, где n — число пройденных волной блоков; α_1 , α_2 , α — параметры интерполяции.

Для сборки с резиновыми прослойками: $\alpha_1 = 200$ м/с, $\alpha = -0.84$, $\alpha_2 = 100$ м/с;
без прослоек: $\alpha_1 = 2820$ м/с, $\alpha = -1.07$, $\alpha_2 = 400$ м/с.

Анализ фиксируемых датчиками максимальных амплитуд ускорений волнового сигнала дает возможность определить его затухание в зависимости от

пройденного пути. В результате показано, что степень затухания сигнала существенно снижается при преодолении им определенного количества разделяющих кирпичи поверхностей. Это особенно заметно, когда между кирпичами проложены резиновые прослойки. Если при непосредственных контактах низкочастотный сигнал практически, в пределах разброса экспериментальных данных, перестает уменьшаться после преодоления 5–6 контактных разделов, то при наличии резиновых прослоек количество таких разделов уменьшается до 2. В каждом случае эти экспериментальные зависимости хорошо описываются соотношением $\bar{a} = \alpha_3 n^\beta + \alpha_4$, где α_3 , α_4 , β — интерполяционные параметры, зависящие от отсутствия или наличия резиновых прослоек. При наличии прослоек: $\alpha_3 = 3.42 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_4 = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = -3.09$; при непосредственном контакте: $\alpha_3 = 2.76 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_4 = 3 \cdot 10^{-4}$, $\beta = -2.83$.

Полученные экспериментальные данные по скорости распространения и затуханию низкочастотных волн, порождаемых ударом в блочной системе, использованы для определения деформационных свойств контактов между блоками в теоретических расчетах. Для этого проведены расчеты по одномерной модели цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами (2.1.27), закон деформирования которых описывается схематически параллельным и последовательным соединением упругих и демпфирующих элементов согласно рис. 2.1.8. Значения жесткостей пружин k_1 , k_2 и коэффициентов вязкости демпферов λ_1 , λ_2 определялись из условия максимального приближения теоретических и экспериментальных значений скорости распространения низкочастотной волны и ее затухания. Таким образом, для резиновых прослоек получено: $k_1 = 5.3 \cdot 10^6$ кг/с², $k_2 = 10^7$ кг/с², $\lambda_1 = 10^4$ кг/с, $\lambda_2 = 2 \cdot 10^3$ кг/с. Для контакта без прослоек: $k_1 = 15 \cdot 10^6$ кг/с², $k_2 = 59 \cdot 10^6$ кг/с², $\lambda_1 = 75 \cdot 10^3$ кг/с, $\lambda_2 = 4 \cdot 10^3$ кг/с.

Теоретические кривые зависимостей ускорения от времени, соответствующие осциллограммам рис. 2.1.30, приведены на графиках рис. 2.1.31. Вертикальные отрезки на этих графиках соответствуют распространению прямой и отраженной маятниковой волны со скоростью

164 м/с. Для первых двух кирпичей расчетная модель дает форму низкочастотной волны, которую на экспериментальной осциллограмме не видно из-за собственных колебаний кирпичей. На третьем и последующих кирпичах такая волна хорошо прослеживается. Можно видеть одинаковую скорость ее распространения и близкое затухание в теории и эксперименте. Наблюдаемое отличие в форме кривых можно объяснить, в частности, нерегулярностью контактов в сборке кирпичей, разделенных резиновыми прослойками. В одномерной модели (см. пункт 2.1.2) выделение колебаний с частотами, определяемыми собственными колебаниями блоков затруднено, так как при продольном точечном ударе по сборке в первых кирпичах развиваются свободные колебания, соответствующие продольным, поперечным и изгибным модам собственных колебаний. Этим объясняется зафиксированная на осциллограмме рис. 2.1.30 частота с периодом 300 мкс вместо 55 мкс, характерным для продольного резонанса.

На рис. 2.1.32, 2.1.33 представлены результаты экспериментального и теоретического определения ускорений кирпичей в волне, порожденной длительным ударом молотка через прокладку из вакуумной резины продолжительностью 1.85 мс. При таком ударе собственные колебания кирпичей возбуждаются слабо, и можно видеть достаточно хорошее соответствие колебаний первых двух кирпичей на экспериментальном и теоретическом графике.

Для случая сборки кирпичей без прослоек осциллограмма и расчетный график распространения низкочастотной волны приведен на рис. 2.1.34, 2.1.35.

Согласно рис. 2.1.34, при ударе по сборке кирпичей без дополнительных прослоек на первых трех кирпичах наблюдаются, как и на рис. 2.1.30, высокочастотные колебания с периодом 300 мкс. Теоретические графики рис. 2.1.35 описывают распространение низкочастотных колебаний, так как получены в модели одномерной цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами. Соответствие в характере распространения низкочастотной волны на рис. 2.1.34, 2.1.35 удовлетворительно, особенно в диапазоне времен до прихода

отраженной волны, отмеченной на рис. 2.1.35 более поздним, вторым вертикальным отрезком.

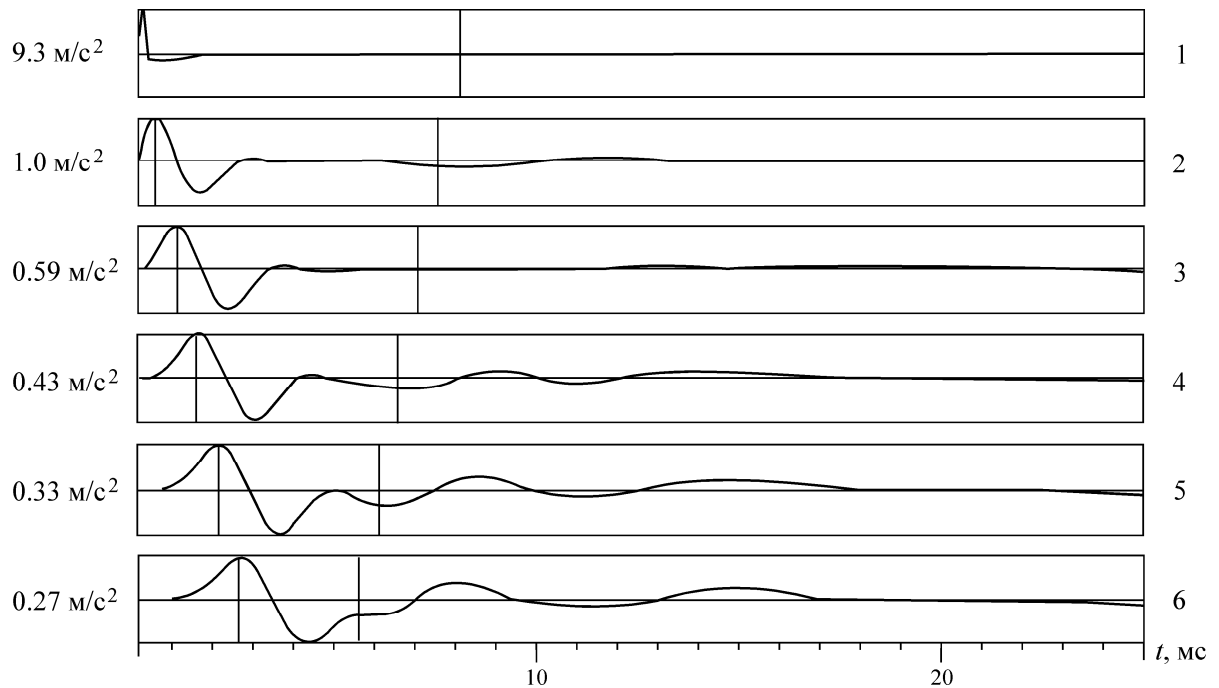


Рис. 2.1.31. Расчет ускорений при прохождении волны по системе кирпичей с прослойками из вакуумной резины при ударе длительностью в 0.21 мс.

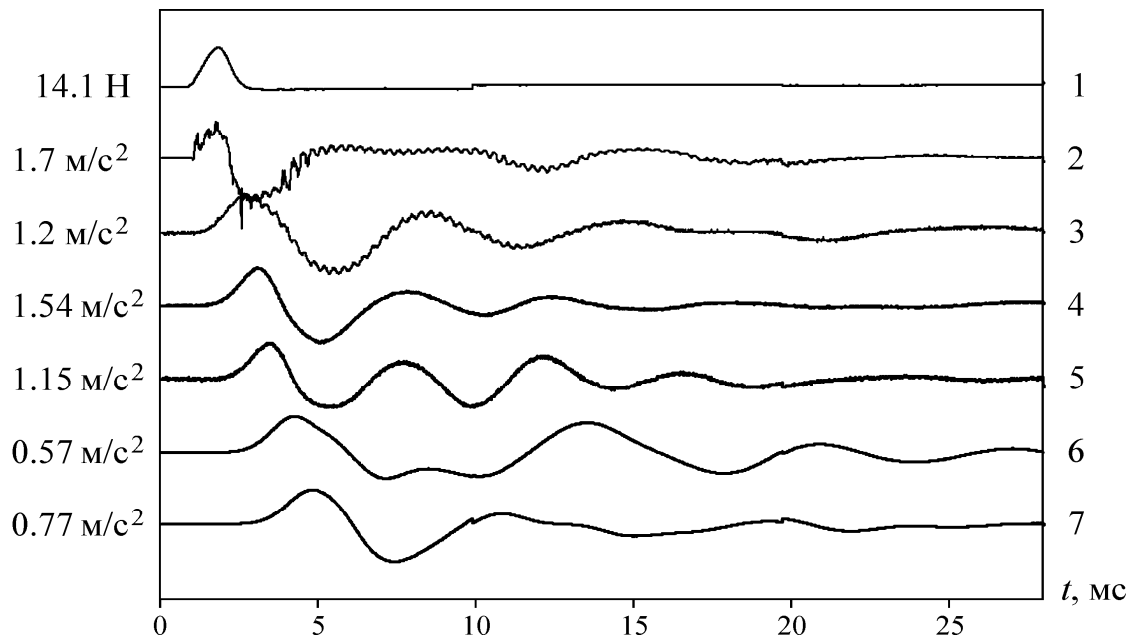


Рис. 2.1.32. Экспериментальные осциллограммы ускорений в сборке кирпичей с прослойками из резины при ударе длительностью в 1.85 мс.

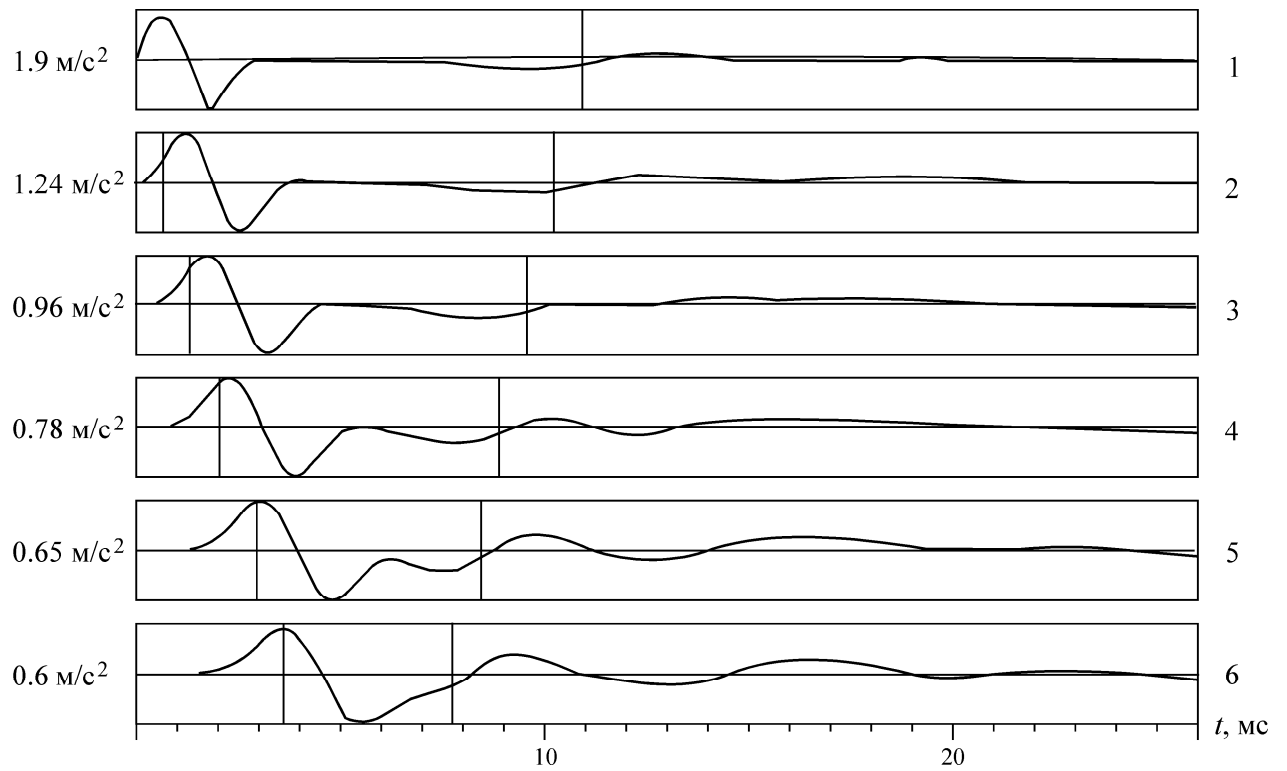


Рис. 2.1.33. Расчетные осциллограммы ускорений при прохождении волны по системе кирпичей с резиновыми прослойками при ударе длительностью в 1.85 мс.

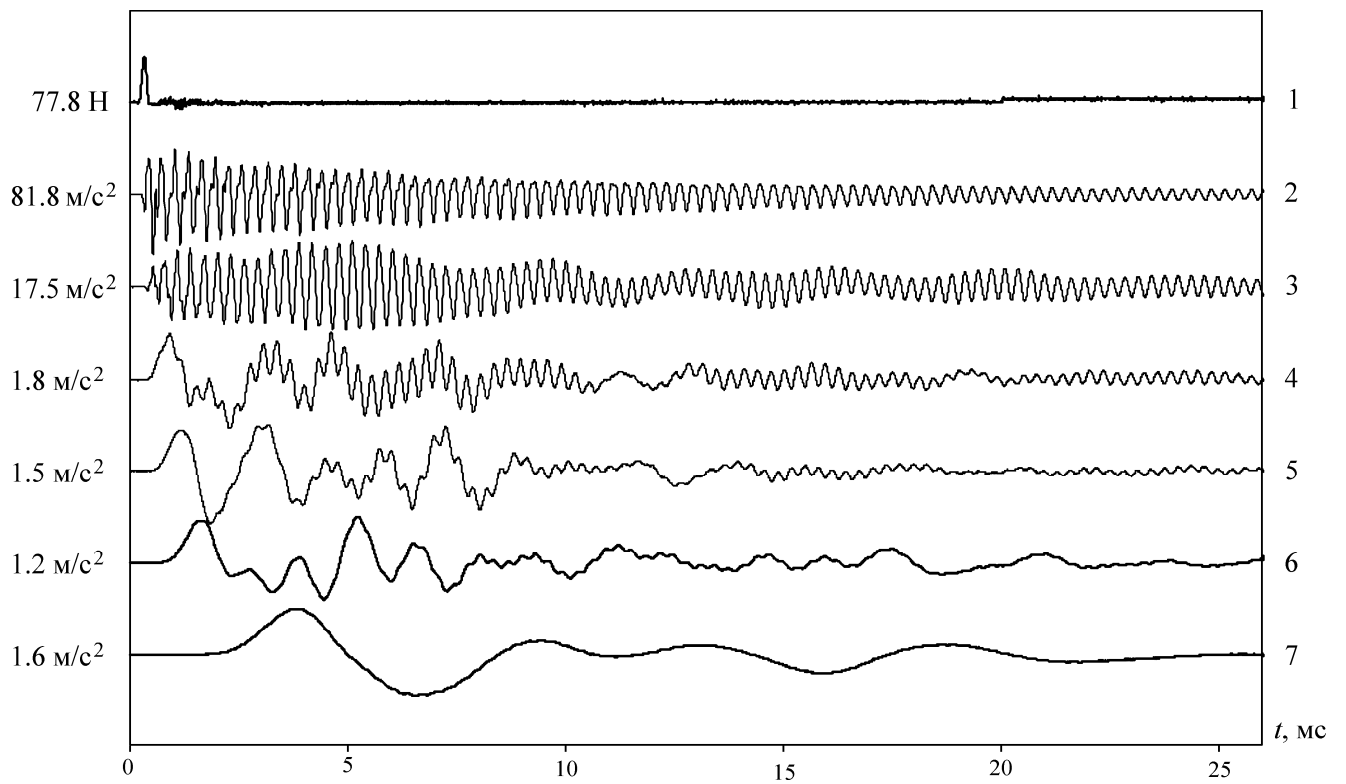


Рис. 2.1.34. Распространение волны по сборке кирпичей без прослоек при ударе длительностью 0.21 мс.

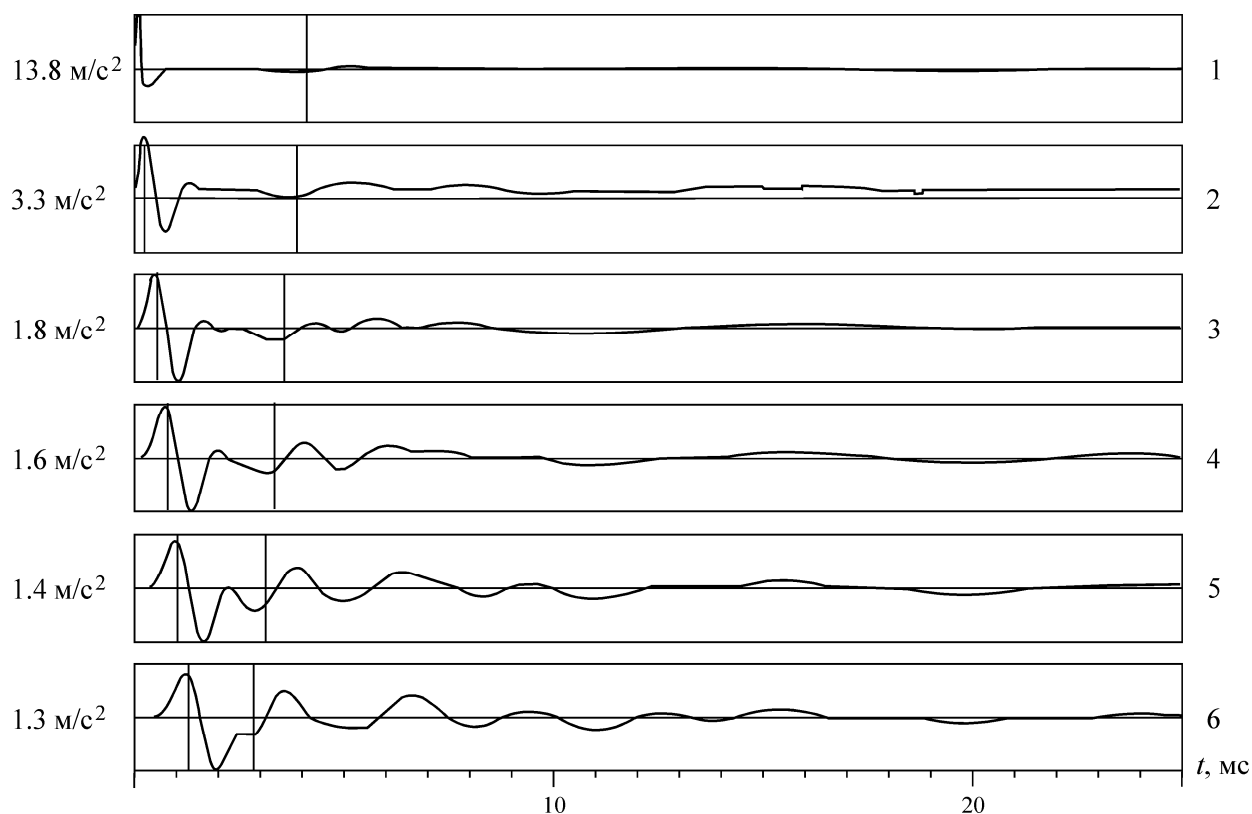


Рис. 2.1.35. Расчет ускорений при прохождении волны по системе кирпичей без прослоек при ударе длительностью 0.21 мс.

Заключение

Сравнение приведенных экспериментальных и теоретических зависимостей ускорения блоков от времени показывает:

(а) в рамках теоретической модели пункта 2.1.2 удастся описать распространение низкочастотной маятниковой волны колебаний в одномерной блочной системе при ударном воздействии. При этом определяются деформационные свойства контактов блоков. Для них устанавливается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных значений скорости распространения волны и степени ее затухания;

(б) высокочастотные колебания, возникающие в блоках при кратковременном ударном воздействии, распространяются по системе, быстро затухая. По частоте они соответствуют различным модам собственных колебаний блоков. Для их теоретического описания требуется уточнение модели деформирования блока, учет его внутренней структуры.

2.1.8. Заключение к § 2.1.

1. В результате численных расчетов и аналитических исследований получены асимптотические решения, описывающие поведение длинноволновых возмущений для стержневой системы и цепочки масс с пружинами, выведены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений для обеих систем, и определены пределы их применимости этих решений.

2. На примере стержневой модели показано, что при ударном возбуждении в блочной среде возникают две группы нестационарных волн. Определены скорости их распространения. Показано, что первой бежит низкочастотная волна, следом движется высокочастотный пакет волн, основная частота которого равна собственной частоте колебаний отдельного стержня.

3. Показано, что для описания низкочастотных волновых процессов система стержней может быть заменена цепочкой шариков той же массы, что и стержни, но с уменьшенной жесткостью пружин.

4. В модели блочно-иерархического строения второго порядка установлено, что при распространении возмущений в иерархической блочной среде кроме низкочастотной маятниковой волны появляются высокочастотные колебания, и определены скорости их распространения и частоты колебаний. Показано, что наличие диссипативных свойств у прослоек приводит к быстрому затуханию высокочастотных волн.

5. В результате численных расчетов и аналитических исследований получены асимптотические законы затухания одномерных маятниковых волн, возбуждаемых ударным воздействием в иерархической блочной среде с вязкоупругими прослойками, и определены пределы их применимости. Исследовано влияние вязкости на дисперсионные свойства блочной среды. Получены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений в такой системе.

6. Показано, что наличие вязкости в модели блочно-иерархического строения приводит к дополнительному затуханию при $t \rightarrow \infty$ низкочастотных

волн маятникового типа: степень затухания максимальных амплитуд скоростей масс и деформаций в системе с вязкими прослойками пропорциональна $t^{-1/2}$, ускорений — t^{-1} , в то время как без вязкости степень затухания амплитуд скоростей пропорциональна $t^{-1/3}$, ускорений — $t^{-2/3}$.

7. Показано, что при наличии вязкости прослойки длинноволновые возмущения в иерархической среде, как и в случае без вязкости, асимптотически ведут себя так же, как в эквивалентной однородной цепочке масс с приведенными значениями параметров жесткости и вязкости.

8. На примере экспериментальной сборки из стальных стержней, соединенных попеременно прослойками с разными свойствами или одинаковыми прослойками, продемонстрирована возможность моделирования процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах с использованием модели цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами.

9. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей ускорения силикатных кирпичей от времени показывает, что в рамках рассмотренной теоретической модели удастся описать распространение низкочастотной маятниковой волны колебаний в одномерной блочной системе из кирпичей при ударном воздействии. При этом определяются деформационные свойства контактов блоков. Для них устанавливается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных значений скорости распространения волны и степени ее затухания.

§ 2.2. Двумерные блочные среды

2.2.1. Формулы приближенного представления для функций Ломмеля и Бесселя и их производных

Результаты данного пункта опубликованы в [203, 206].

В процессе решения методом интегральных преобразований задач о распространении волн в двумерных дискретно-периодических средах возникает необходимость обратиться к функциям вида

$$u^{LF_d} \approx \frac{p}{p^2 + 4c^2 \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)}, \quad (2.2.1)$$

$$v^{LF_d} \approx \frac{\sin\left(\frac{q}{2}\right)}{p^2 + 4c^2 \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)}, \quad (2.2.2)$$

Здесь c – скорость распространения возмущений.

Обратим эти формулы, поскольку в дальнейшем нам они потребуются при решении конкретных задач для блочных сред.

Обратим преобразование Лапласа [52]:

$$u^{F_d}(t) \approx \cos\left[2ct \sin\left(\frac{q}{2}\right)\right], \quad (2.2.3)$$

$$v^{F_d}(t) \approx \frac{1}{2c} \sin\left[2ct \sin\left(\frac{q}{2}\right)\right]. \quad (2.2.4)$$

Обратим дискретное преобразование Фурье в формулах (2.2.3), (2.2.4):

$$u_n(t) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2zn) \cos(2ct \sin z) dz \approx J_{2n}(2ct), \quad (2.2.5)$$

$$v_n(t) \approx \frac{1}{\pi c} \int_0^{\pi/2} \cos(2zn) \sin(2ct \sin z) dz \approx \frac{1}{\pi c} s_{0,2n}(2ct). \quad (2.2.6)$$

Здесь J_{2n} – функции Бесселя первого рода, $s_{0,2n}$ – функции Ломмеля [65].

Хотелось бы получить решение, которое позволяет оценить поведение возмущений в окрестности квазифронта волны $n = ct$, где возмущения максимальны. Для этого рассмотрим асимптотическое представление функций Бесселя и Ломмеля при $n \gg 1$.

При $n \gg 1$ справедливо приближенное представление функции Бесселя $J_n(ct)$, известное как формула типа Никольсона (см. стр.249 [238]):

$$J_n(ct) \approx \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} \text{Ai}(z). \quad (2.2.7)$$

где

$$z = \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} (n - ct). \quad (2.2.8)$$

Подставив (2.1.7) в (2.1.5), получим решение, которое искали:

$$u_n(t) \approx \frac{1}{(ct)^{1/3}} \text{Ai} \left[\frac{2(n - ct)}{(ct)^{1/3}} \right]. \quad (2.2.9)$$

Из (2.2.7) следует, что амплитуда $J_n(ct)$ в окрестности $ct = n$ или $z = 0$ с ростом времени (расстояния) падает, как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$). При этом условная ширина квазифронта (зона изменения $J_n(ct)$ от нуля до максимума, характеризуемая величиной z), растет как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$).

Воспользуемся методом Л.И. Слепяна [175] совместного асимптотического ($t \rightarrow \infty$) обращения интегральных преобразований Лапласа и Фурье длинноволновых возмущений в окрестности луча $x = ct$, чтобы найти формулу для v_n , аналогичную (2.2.9).

Обратим v^{LF} методом Слепяна в окрестности луча $n = ct$. Для совместного обращения преобразований Лапласа-Фурье на луче $n = ct$ произведем во внутреннем интеграле

$$v_n(t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi i \alpha - \infty}^{\pi i \alpha + \infty} \int v^{LF}(p, q) e^{pt - iqn} dp dq, \quad (2.2.10)$$

подстановку $p = s + iq(c + c')$, $n = (c + c')t$, где $c' \rightarrow 0$ и определяет окрестность луча $n = ct$. Формула обращения (2.2.10) принимает после этого вид

$$v_n(t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi \alpha - i\infty}^{\pi \alpha + i\infty} \int v^{LF}(s + iq(c + c'), q) e^{st} ds dq. \quad (2.2.11)$$

Разложим числитель и знаменатель подынтегральной функции (2.2.11) в ряд Тейлора в малой окрестности точки $q = 0$ при $s \rightarrow 0$ и $c' \rightarrow 0$:

$$v_n(t) \approx \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\varepsilon \alpha - i\infty}^{\varepsilon \alpha + i\infty} \int \frac{\text{sign}(q)}{2ic(s + iq c' + iq^3 c/24)} e^{st} ds dq, \quad (2.2.12)$$

где $|q| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ε — мало.

Последовательно интегрируя в (2.2.12), и учитывая, что $c' = (n - ct)/t$, получим следующую асимптотику для v_n , аналогичную (2.2.9):

$$v_n(t) \approx -\frac{1}{4\pi c} \int_0^\varepsilon \sin(qc't + \frac{q^3 ct}{24}) dq \approx -\frac{1}{2c(ct)^{1/3}} \text{Gi} \left[\frac{2(n - ct)}{(ct)^{1/3}} \right], \quad (2.2.13)$$

где

$$\text{Gi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(zy + \frac{y^3}{3}) dy \quad (2.2.14)$$

есть функция Скорера [255, 259].

Из сравнения формул (2.2.6), (2.2.13) следует формула приближенного представления функции Ломмеля $s_{0,n}$ при $n \gg 1$ через функцию Скорера Gi аналогичная (2.2.7):

$$s_{0,n}(ct) \approx -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} Gi(z). \quad (2.2.15)$$

Функция Ломмеля $s_{0,n}$ определена только при четных значениях n . Из (2.2.15) следует, что амплитуда $s_{0,n}$ в окрестности $n = ct$ или, что тоже самое $z = 0$, с ростом времени (расстояния) падает как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$). При этом условная ширина квазифронта растет как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$).

Заметим, что вывод формулы (2.2.9) из формулы типа Никольсона (2.2.7) сделан для краткости. На самом деле, она может быть получена с помощью метода Слепяна совместного обращения преобразований Лапласа и Фурье подобно тому, как мы получили выше формулу (2.2.15).

Заметим, что в следующей формуле членом $(n - ct)/(3t)$ можно пренебречь в окрестности точки $n = ct$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} \left(-c - \frac{n - ct}{3t} \right) \approx -c \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3}. \quad (2.2.16)$$

Дифференцируя (2.2.15) относительно времени, получим:

$$\frac{ds_{0,n}(ct)}{dt} \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{Gi(z)}{(ct/2)^{1/3}} \right) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} \left[\frac{dGi(z)}{dz} \frac{dz}{dt} - \frac{Gi(z)}{3t} \right]. \quad (2.2.17)$$

Используя формулу (2.2.16), получим

$$\frac{ds_{0,n}(ct)}{dt} \approx -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} \left[-c \left(\frac{2}{ct} \right)^{1/3} \frac{dGi(z)}{dz} - \frac{Gi(z)}{3t} \right]. \quad (2.2.18)$$

Полагая $t \rightarrow \infty$ в (2.2.18), получим следующее асимптотическое представление для первой производной $s'_{0,n}$ при $n \gg 1$:

$$s'_{0,n}(ct) \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct} \right)^{2/3} \text{Gi}'(z), \quad (2.2.19)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу.

В известной справочной литературе [65, 200, 212, 218, 222, 238, 274] формулы (2.2.15) и (2.2.19) отсутствуют.

Дифференцируя формулу (2.2.7) по времени, и полагая $t \rightarrow \infty$, аналогично получим асимптотическое представление для производной J'_n при $n \gg 1$:

$$J'_n(ct) \approx - \left(\frac{2}{ct} \right)^{2/3} \text{Ai}'(z) \quad (2.2.20)$$

Как видно из (2.2.19), (2.2.20), функции $J'_n(ct)$ и $s'_{0,n}(ct)$ в окрестности $n = ct$ ($z = 0$) с ростом времени (расстояния) падают как $t^{-2/3}$ ($n^{-2/3}$).

Заметим, что формулы (2.2.7) and (2.2.20) представляют первые члены полных асимптотических разложений функций Бесселя и их первых производных (см. с. 281 и с. 287 в [258]):

$$J_\nu(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2k+1}{3}} [P_k(\xi) \text{Ai}(\xi) + Q_k(\xi) \text{Ai}'(\xi)],$$

$$J'_\nu(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2k+2}{3}} [\bar{P}_k(\xi) \text{Ai}(\xi) + \bar{Q}_k(\xi) \text{Ai}'(\xi)].$$

Здесь $\xi = (\nu - y) \left(\frac{y}{2} \right)^{-1/3}$, $y \rightarrow \infty$, $|\arg y| \leq \pi - \varepsilon$, $y - \nu = O(y^{1/3})$, ν — положительное вещественное число, коэффициенты $P_k(\xi)$, $Q_k(\xi)$, $\bar{P}_k(\xi)$, $\bar{Q}_k(\xi)$ — полиномы по ξ и они описаны в [258] (в частности, $P_0(\xi) = 1$, $Q_0(\xi) = 0$, $\bar{P}_0(\xi) = 0$, $\bar{Q}_0(\xi) = 1$).

Помимо приведенных только что формул, известны и другие асимптотические разложения функции Бесселя и её первой производной для больших значений порядка, в которых разложение ведётся по степеням порядка ν . Смотри, например, формулы (10.19.8) и (10.19.12) в [218] или с. 414 в [246].

Для того чтобы оценить точность асимптотических представлений функций Ломмеля и Бесселя и их производных, приведем графики функций, входящих в соотношения (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20). Все рисунки, приведенные ниже, рассчитаны при $c = 1$.

На рис. 2.2.1 приведены графики функций $Ai(z)$, $Gi(z)$ и их производных.

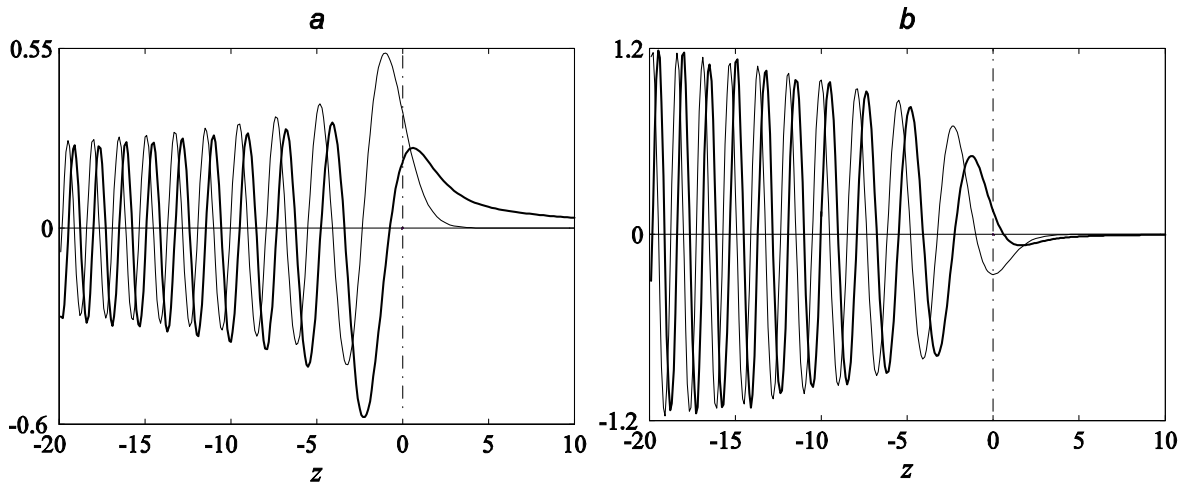


Рис. 2.2.1. Графики функций $Ai(z)$, $Gi(z)$ и их производных: (a) $Ai(z)$ – тонкая кривая, $Gi(z)$ – толстая кривая; (b) $Ai'(z)$ – тонкая кривая, $Gi'(z)$ – толстая кривая.

Введем обозначения

$$F_1(n, t) = \frac{Ai(z)}{(t/2)^{1/3}}, \quad F_2(n, t) = -\frac{Ai'(z)}{(t/2)^{2/3}}, \quad F_3(n, t) = -\frac{\pi}{2} \frac{Gi(z)}{(t/2)^{1/3}}, \quad F_4(n, t) = \frac{\pi}{2} \frac{Gi'(z)}{(t/2)^{2/3}}.$$

На рис. 2.2.2–2.2.5 представлены графики функций $J_n(t)$ и $F_1(n, t)$, $J'_n(t)$ и $F_2(n, t)$, $s_{0,n}(t)$ и $F_3(n, t)$, $s'_{0,n}(t)$ и $F_4(n, t)$, входящих в левые и правые части асимптотических представлений (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20), для различных значений n . По оси абсцисс изменяется переменная t с шагом 0.1. Вертикальные линии на этих рисунках соответствуют моментам времени $t_* = n$ или $z = 0$.

Чтобы определить значение n , при котором достигается удовлетворительное соответствие асимптотических представлений, приведем относительные погрешности в определении максимальных амплитуд, рассматриваемых функций. Обозначим

$$\delta_1 = \left(1 - \frac{\max F_1(n, t)}{\max J_n(t)}\right) 100\%, \quad \delta_2 = \left(1 - \frac{\max F_2(n, t)}{\max J'_n(t)}\right) 100\%,$$

$$\delta_3 = \left(1 - \frac{\max F_3(n, t)}{\max s_{0,n}(t)}\right) 100\%, \quad \delta_4 = \left(1 - \frac{\max F_4(n, t)}{\max s'_{0,n}(t)}\right) 100\%,$$

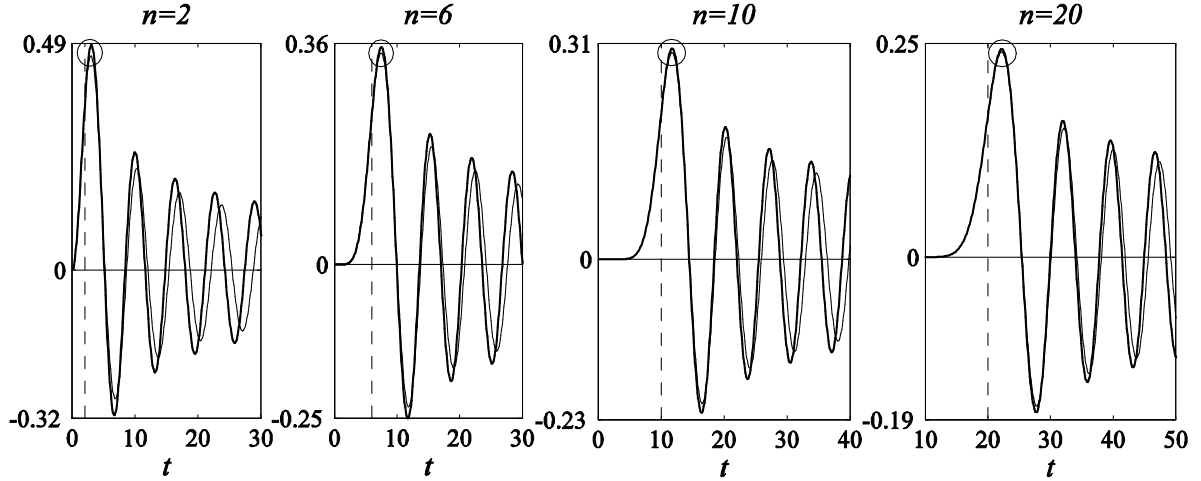


Рис. 2.2.2. Графики функций: $J_n(t)$ – толстая кривая; $F_1(n, t)$ – тонкая кривая.

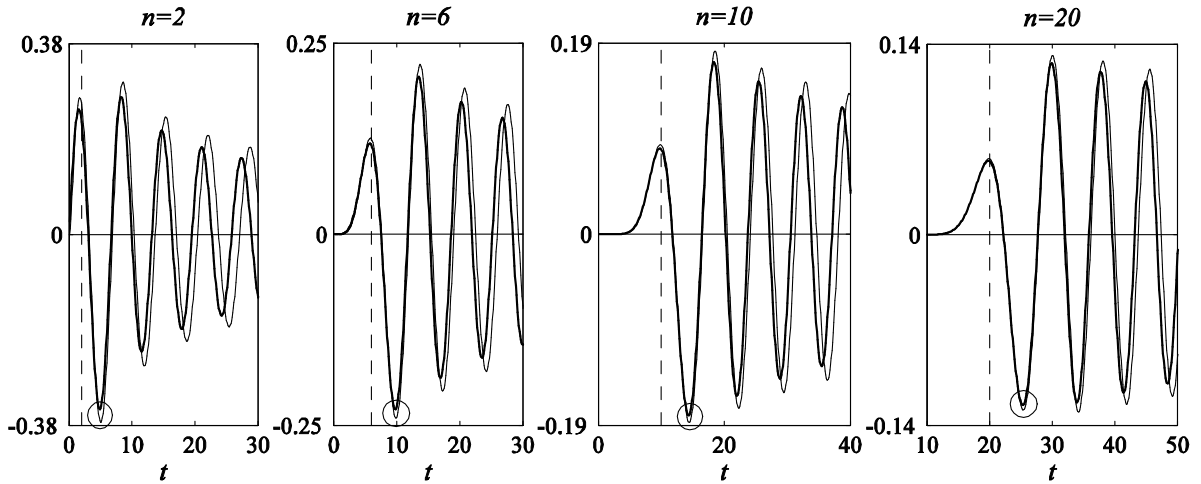


Рис. 2.2.3. Графики функций: $J'_n(t)$ – толстая кривая; $F_2(n, t)$ – тонкая кривая.

где максимумы функций вычисляются в точках, помеченных на рис. 2.2.2–2.2.5 кружочками. В таблицах 2.2.1, 2.2.2 представлены значения δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 , рассчитанные для значений n , приведенных на рис. 2.2.2–2.2.5. Анализ таблиц 2.2.1, 2.2.2 показывает, что с ростом n погрешность в определении максимумов

$J_n(t)$ и $F_1(n,t)$, $J'_n(t)$ и $F_2(n,t)$, $s_{0,n}(t)$ и $F_3(n,t)$, $s'_{0,n}(t)$ и $F_4(n,t)$ падает. На рис. 2.2.2–2.2.5 также видно, что с ростом n соответствие частоты осцилляций каждой пары функций улучшается. Наилучшее соответствие каждой пары функций достигается в окрестности $n = t$ (или $z = 0$). Заметим, что в задачах механики эта область отвечает зоне квазифронта, бегущей волны.

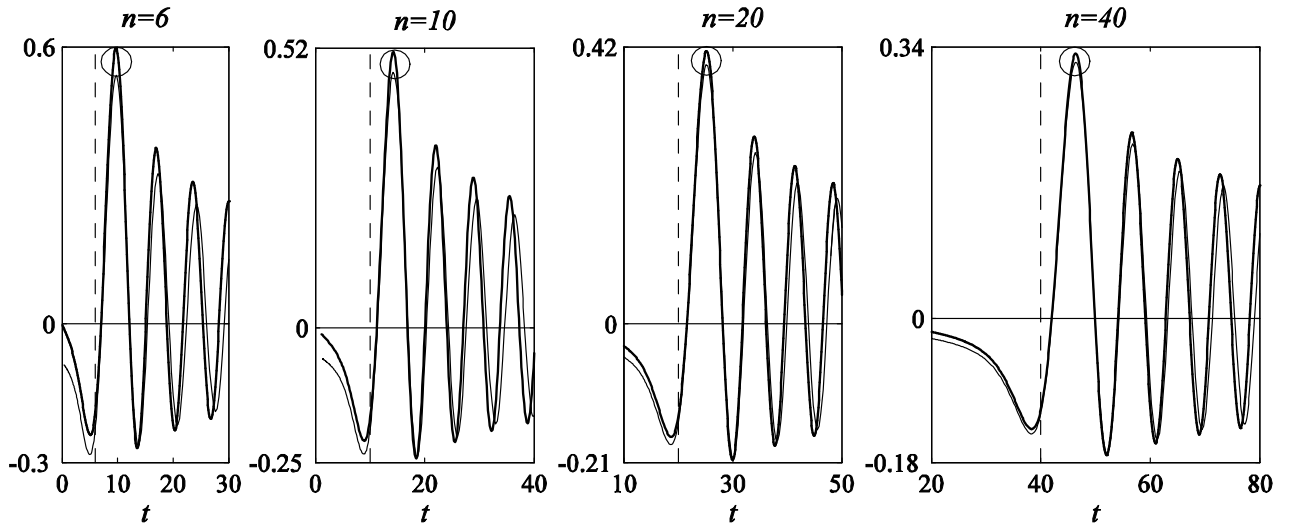


Рис. 2.2.4. Графики функций: $s_{0,n}(t)$ – толстая кривая; $F_3(n,t)$ – тонкая кривая.

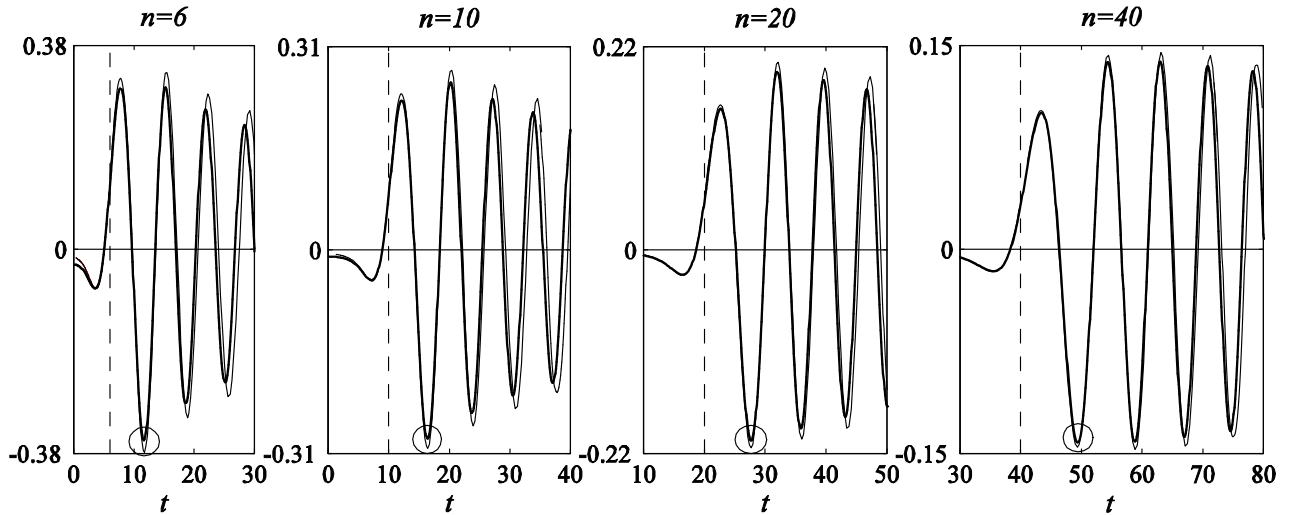


Рис. 2.2.5. Графики функций: $s'_{0,n}(t)$ – толстая кривая; $F_4(n,t)$ – тонкая кривая.

Таблица 2.2.1. Погрешности δ_1, δ_2 .

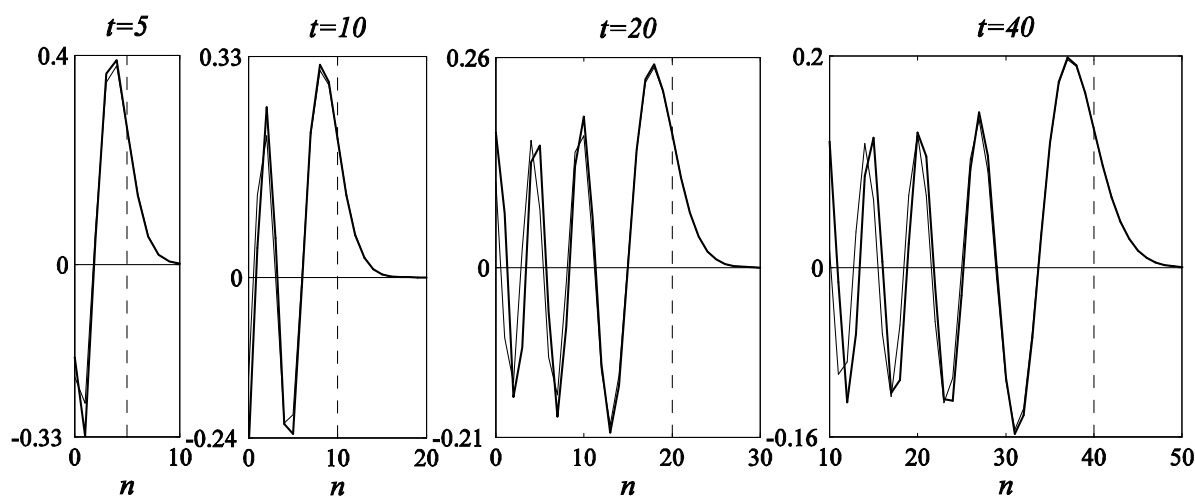
n	2	6	10	20
$\delta_1(\%)$	4.7	2.7	2.1	1.4
$\delta_2(\%)$	7.4	5.2	4.1	2.7

Таблица 2.2.2. Погрешности δ_3, δ_4 .

n	6	10	20	40
$\delta_3(\%)$	9.7	7.4	5.0	3.4
$\delta_4(\%)$	6.2	5.1	3.6	1.8

На рис. 2.2.6–2.2.9 представлены графики функций, входящие в левые и правые части асимптотических представлений (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20), как функции переменной n для различных значений t . Вертикальные линии на этих рисунках соответствуют координате $n_* = t$ или $z = 0$. Поскольку n принимает только целочисленные значения, то функции $J_n(t)$ и $F_1(n, t)$, $J'_n(t)$ и $F_2(n, t)$ приведены с шагом равным 1, а функции $s_{0,n}(t)$ и $F_3(n, t)$, $s'_{0,n}(t)$ и $F_4(n, t)$ приведены с шагом равным 2, так как функция Ломмеля определена только для четных значений n .

Как видно на рис. 2.2.5–2.2.9, наилучшее соответствие каждой пары функций наблюдается в окрестности $n = t$ (или $z = 0$), причем формулами (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20) можно пользоваться, начиная с $t \approx 10$, и с ростом t это соответствие улучшается. Для каждой пары функций различие проявляется на достаточно большом расстоянии от фронта волны, и различие это только в частоте осцилляций. Амплитуды осцилляций даже на больших расстояниях от фронта волны близки.

Рис. 2.2.6. Графики функций: $J_n(t)$ – толстая кривая; $F_1(n, t)$ – тонкая кривая.

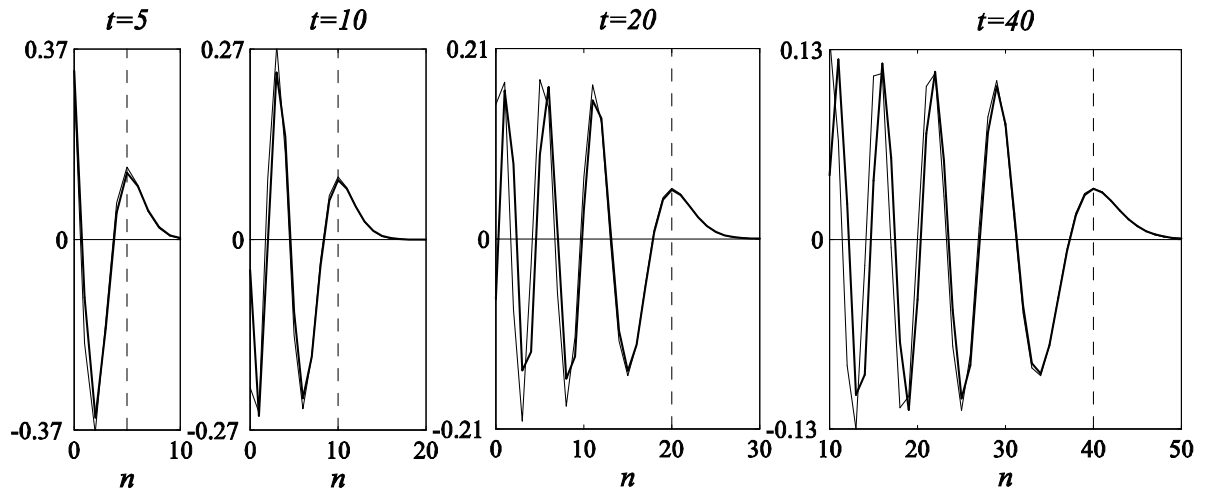


Рис. 2.2.7. Графики функций: $J'_n(t)$ – толстая кривая; $F_2(n,t)$ – тонкая кривая.

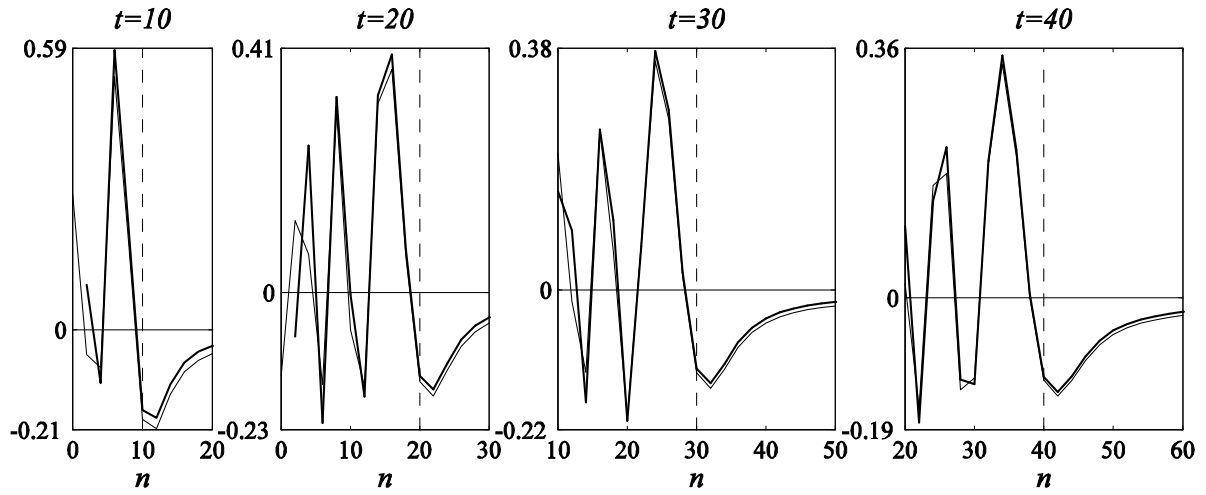


Рис. 2.2.8. Графики функций: $s_{0,n}(t)$ – толстая кривая; $F_3(n,t)$ – тонкая кривая.

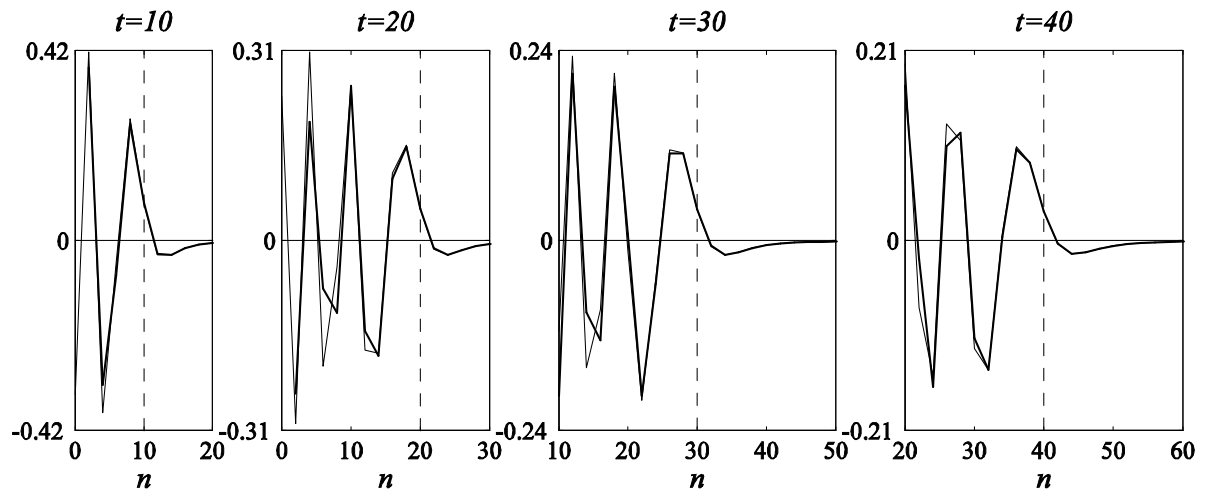


Рис. 2.2.9. Графики функций: $s'_{0,n}(t)$ – толстая кривая; $F_4(n,t)$ – тонкая кривая.

Сравнение численных результатов для функции $J_\nu(ct)$, приведенных в работе [226] и в данной работе

В [226] и в данной работе основное внимание уделяется исследованию поведения функции Бесселя при близких значениях порядка и аргумента. Однако в данной работе автор стремится найти наименьшие значения n и t , при которых асимптотические представления (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20) имеют приемлемую точность для решения задач механики дискретно-периодических сред [16, 206]. Этим результаты, представленные в диссертации, отличаются от [226], где авторы искали значения $J_\nu(ct)$ для больших значений порядка ν и аргумента ct . В частности в [226] Jentschura и Lötstedt представили численное значение $J_\nu(ct)$ для $\nu = 5000000.2$ и $ct = 5000000.1$, полученное с помощью героических численных усилий. В этой формуле значения аргумента ct и порядка ν функции Бесселя являются самыми большими, для которых нам известно значение функции Бесселя из научной литературы. Для $\nu = 5000000.2$ и $ct = 5000000.1$ асимптотическая формула (2.2.7) дает: $J_\nu(ct) = 0.002614463961695188$, а значит восемь значащих цифр находятся в согласии с точным численным результатом, приведенным в статье [226].

Численный эксперимент, обсуждаемый выше, показал, что формула (2.2.7) справедлива не только для функции Бесселя $J_n(ct)$ целого положительного порядка n , но и для случая, когда порядок является положительным вещественным числом.

Заключение

Получены новые формулы приближенного представления при $k \gg 1$ (или $ct \gg 1$) функции Ломмеля $s_{0,k}(ct)$ ($k = 2n$) через функцию Скорера $Gi(z)$ и производной от функции Ломмеля $s'_{0,k}(ct)$ ($k = 2n$) через производную от функции Скорера $Gi'(z)$, где $z = (2/ct)^{1/3}(n - ct)$.

В результате анализа приближенных представлений (2.2.7), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20) показано, что в окрестности $z = 0$ с ростом t (или n):

- а) амплитуды $s_{0,k}(ct)$ и $J_k(ct)$ падают как $t^{-1/3}$ (или $n^{-1/3}$);
- в) амплитуды $s'_{0,k}(ct)$ и $J'_k(ct)$ падают как $t^{-2/3}$ или $(n^{-2/3})$;
- г) зона роста функций от нуля до первого максимума для функций $s_{0,k}(ct)$ и $J_k(ct)$, $s'_{0,k}(ct)$ и $J'_k(ct)$ расширяется как $t^{1/3}$ (или $n^{1/3}$).

Приемлемое соответствие, полученных формул, наступает начиная с $n \approx 6$ ($ct \approx 10$). Это позволяет пользоваться этими формулами для решения задач механики дискретных сред при сравнительно малых значениях координаты n или времени t .

2.2.2. Моделирование антиплоского движения двумерной блочной среды

2.2.2.1. Постановка задачи и аналитическое решение в изображениях по Лапласу и Фурье для сосредоточенной нагрузки

Результаты данного пункта опубликованы в [16, 25, 32].

Рассматривается антиплоская деформация двумерной квадратной решетки, состоящей из масс величины M , соединенных пружинами длины l , имеющими одинаковые жесткости k в обоих направлениях. Исследуется нестационарное распространение возмущений при действии сосредоточенной нагрузки. Уравнения движения масс имеют вид

$$M\ddot{u}_{m,n} = k(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n}) + Q(t)\delta_{m0}\delta_{n0}, \quad (2.2.21)$$

где $u_{m,n}$ — перемещение масс в направлении, ортогональном плоскости решетки; m, n — номера масс в направлении осей x, y ; $Q(t)$ — нагрузка,

приложенная перпендикулярно плоскости решетки в точке с координатами (0,0).

Применяя дискретные преобразования Фурье (2.1.8) по переменным m, n и преобразование Лапласа по времени (2.1.6), получаем решение в изображениях

$$u^{LF_m F_n} = \frac{Q^L}{Mp^2 + 2k(2 - \cos q_x l - \cos q_y l)}, \quad (2.2.22)$$

Здесь F_m, F_n — дискретные преобразования Фурье по m и n с параметрами q_x, q_y , соответственно.

Обращая найденное выражение $u^{LF_m F_n}$ (2.2.22) по n [65], получаем

$$u_n^{LF_m} = \frac{Q^L (B - \sqrt{B^2 - 1})^{|n|}}{2k\sqrt{B^2 - 1}}, \quad (2.2.23)$$

$$B = \frac{Mp^2}{2k} + 2 - \cos(q_x l). \quad (2.2.24)$$

2.2.2.2. Распространение резонансных волн в блочной среде

Результаты данного пункта опубликованы в [25, 32, 209].

Рассмотрим действие монохроматической нагрузки частоты ω_* ,

$$Q(t) = Q_0 \exp(i\omega_* t) H(t).$$

Преобразование Лапласа этой функции имеет вид

$$Q^L = \frac{Q_0}{p - i\omega_*}. \quad (2.2.25)$$

Обратить выражение (2.2.23) с учетом (2.2.24), (2.2.25) в явном виде не представляется возможным. Будем искать асимптотическое поведение возмущений при бесконечно большом времени с начала процесса. Далее величины M, l, k приняты за единицы измерения.

Дисперсионное соотношение, определяющее распространение в такой системе гармонических волн, имеет вид:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{4 - 2 \cos q_x - 2 \cos q_y}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 1. \quad (2.2.26)$$

где q_x, q_y — проекции волнового вектора $\mathbf{q}$ на оси x и y соответственно. Как показано в [210], для данной решетки масс существуют две резонансные частоты: $\omega_1 = 2\omega_0$ ($q_y = \pm\pi \pm q_x$) и $\omega_2 = 2\sqrt{2}\omega_0$ ($q_y = \pm q_x = \pm\pi$). Заметим, что если ω_2 соответствует границе полос пропускания ($\omega < \omega_2$) и запираения ($\omega > \omega_2$) и имеет аналог в одномерном случае, то ω_1 находится в полосе пропускания и аналога в одномерном случае не имеет.

Исследуем поведение возмущений при действии монохроматической нагрузки с частотой $\omega_* = 2$. Положим $\omega_* = 2$ и $p = s + i\omega_*$. Тогда

$$u_n^{LF_m} \approx \frac{iQ_0(-1)^{n+1} e^{i|q_x n|}}{2s\sqrt{\sin^2 q_x + 4is \cos q_x}} \quad \text{при } s \rightarrow 0$$

По формуле обращения для дискретного преобразования Фурье (2.1.8) получим

$$u_{m,n}^L \approx \frac{iQ_0(-1)^{n+1}}{2\pi s} \int_0^\pi \frac{\cos(q_x |m|) \exp(iq_x |n|)}{\sqrt{\sin^2 q_x + 4is \cos q_x}} dq_x \quad \text{при } s \rightarrow 0. \quad (2.2.27)$$

Асимптотика интегралов (2.2.27) при $s \rightarrow 0$, что соответствует $t \rightarrow \infty$ в пространстве оригиналов, имеет следующий вид [25, 209]:

а) если $|m| + |n|$ — четное, то

$$u_{0,0}^L(s) \approx -\frac{iQ_0}{2\pi s} \ln \frac{4}{s}, \quad u_{0,0}(t) \approx \frac{iQ_0}{2\pi} [\ln(4t) + \gamma] \quad (2.2.28)$$

$$u_{m,m}^L(s) \approx -\frac{iQ_0(-1)^m}{2\pi s} (\ln(s|m|) + \gamma), \quad u_{m,m}(t) \approx \frac{iQ_0(-1)^{m+1}}{2\pi} \ln \frac{t}{|m|}, \quad m \neq 0, \quad (2.2.29)$$

$$\begin{aligned}
u_{m,n}^L(s) &\approx \frac{iQ_0(-1)^{n+1}}{2\pi s} \left(\ln(s|m^2 - n^2|) + 2\gamma \right), \quad |m| \neq |n| \\
u_{m,n}(t) &\approx \frac{iQ_0(-1)^{n+1}}{2\pi} \left(\ln \frac{t}{|m^2 - n^2|} - \gamma \right), \quad |m| \neq |n|,
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

где $\gamma = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера;

б) если $|m| + |n|$ — нечетное, то

$$u_{m,n}^L(s) \approx \frac{Q_0(-1)^{v+1}}{4s}, \quad u_{m,n}(t) \approx \frac{Q_0(-1)^{v+1}}{4}, \quad v = \max(|m|, |n|). \tag{2.2.31}$$

Данная задача была решена в работе [210], однако там были допущены ошибки. Формулы (2.2.28), (2.2.31) совпадают с [210]. Формулы (2.2.29), (2.2.30) в работе [210] имеют другой вид:

$$u_{m,m}(t) \approx \frac{iQ_0(-1)^{m+1}}{2\pi} \left(\ln \frac{4t}{|m|} + \gamma - 2 \right), \quad (m \neq 0), \tag{2.2.32}$$

$$u_{m,n}(t) \approx \frac{iQ_0(-1)^{n+1}}{2\pi} \left(\ln \frac{16t}{|m^2 - n^2|} + \gamma - 4 \right), \quad (m \neq n), \tag{2.2.33}$$

Разность правых частей в формулах (2.2.29), (2.2.32) равна

$$\Delta u_{m,m} = \frac{iQ_0(-1)^{m+1}}{2\pi} |\ln 4 + \gamma - 2| \approx \frac{iQ_0(-1)^{m+1} 0.0365}{2\pi}.$$

Таким образом, абсолютная погрешность между этими двумя решениями при $n = m$ постоянна, относительная погрешность при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Аналогичная ситуация имеет место и при $n \neq m$: разность правых частей в формулах (2.2.30), (2.2.33) в два раза больше чем при $n = m$ и равна

$$\Delta u_{m,n} = \frac{iQ_0(-1)^{m+1}}{2\pi} |2\ln 4 + 2\gamma - 4| \approx \frac{iQ_0(-1)^{m+1} 0.073}{2\pi}.$$

Анализ формул (2.2.28)–(2.2.31), показывает, что при локальном синусоидальном воздействии с частотой $\omega_* = 2$ резонансное распространение волны содержит ярко выраженную пространственную направленность: основная часть энергии оказывается сосредоточенной вдоль диагоналей и движется с групповой скоростью $c_1 = l\sqrt{\frac{k}{2M}}$ [210]. Резонансный процесс на частоте ω_2 выраженной направленности не имеет. Низкочастотные волны, как и в однородной среде, распространяются во всех направлениях с одной и той же скоростью (фазовой и групповой) $c = l\sqrt{\frac{k}{M}}$.

Сравнение численных и аналитических результатов

Уравнение (2.2.21) решается методом конечных разностей по явной схеме

$$u_{m,n}^{r+1} - 2u_{m,n}^r + u_{m,n}^{r-1} = \tau^2 (u_{m+1,n}^r + u_{m-1,n}^r + u_{m,n+1}^r + u_{m,n-1}^r - 4u_{m,n}^r + Q^r \delta_{m0} \delta_{n0}), \quad (2.2.34)$$

$$Q^r = Q_0 \sin(\omega_* r \tau), \quad r \geq 0.$$

Здесь $t = r\tau$; τ — шаг по времени разностной сетки, r — номер слоя по времени. Приведенные ниже численные результаты получены при $\tau = 0.07$, $Q_0 = 1$.

На рис. 2.2.10 представлены результаты численных расчетов перемещений по схеме (2.2.34) в зависимости от координат решетки m, n при нестационарном воздействии синусоидальной нагрузки с резонансной частотой $\omega_* = 2$ ($t = 140$). Видно преимущественное распространение коротковолновых возмущений в диагональных направлениях. Это так называемые «звездные волны» [210]. Концентрические круги на рис. 2.2.10 соответствуют низкочастотным маятниковым волнам, аналогичным волнам в цепочке масс с пружинами (см. §.2.1). Эти волны, так же как и в однородной среде, распространяются во всех направлениях с одной и той же фазовой и групповой скоростью $c = l\sqrt{k/M} = 1$.

На рис. 2.2.11 представлены осциллограммы перемещений в различных точках решетки, полученные численно при синусоидальном сосредоточенном воздействии с частотой $\omega_* = 2$. Пунктирные линии соответствуют асимптотикам (2.2.28)–(2.2.31). Видно, что при $t < 400$ эти асимптотики являются огибающими кривыми численных решений, осциллирующих с частотой $\omega = 2$. При больших временах с начала процесса ($t > 400$) численные результаты и аналитические расходятся.

Анализ конечно-разностной схемы показывает, что для численной схемы зависимость частоты от волновых чисел имеет следующий вид

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arccos[1 - \tau^2(2 - \cos q_x - \cos q_y)].$$

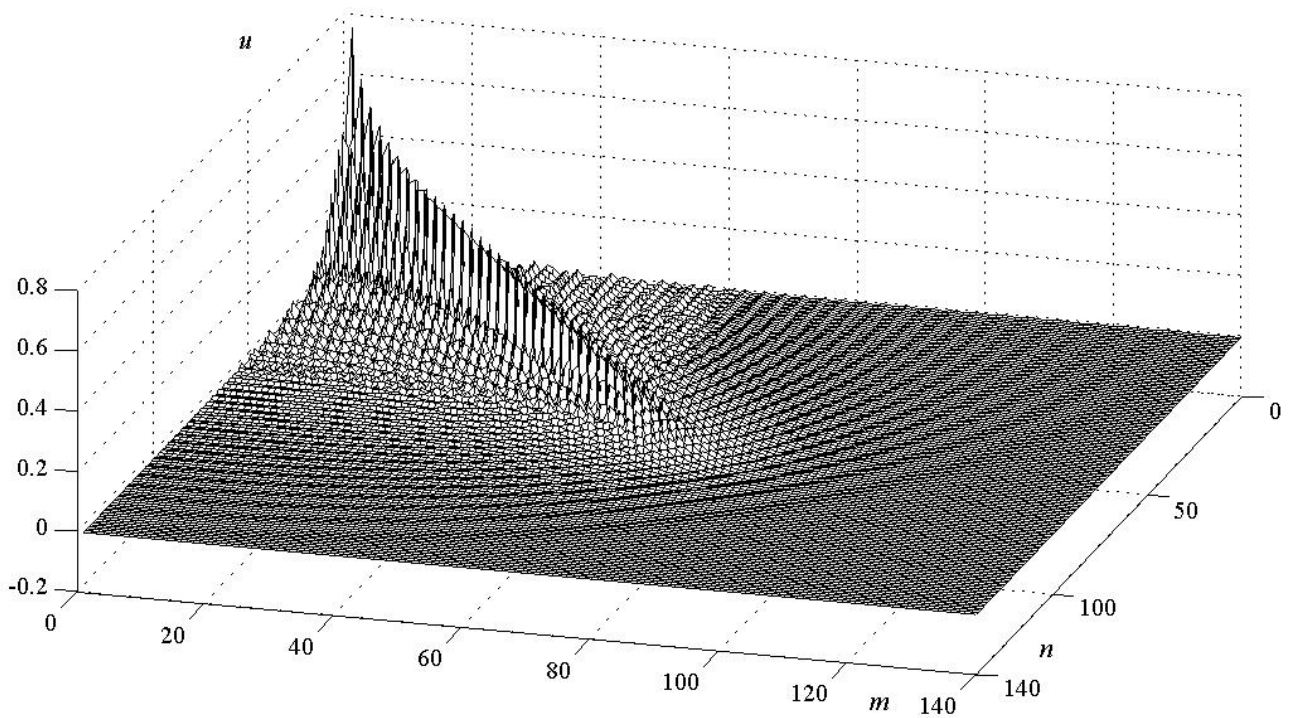
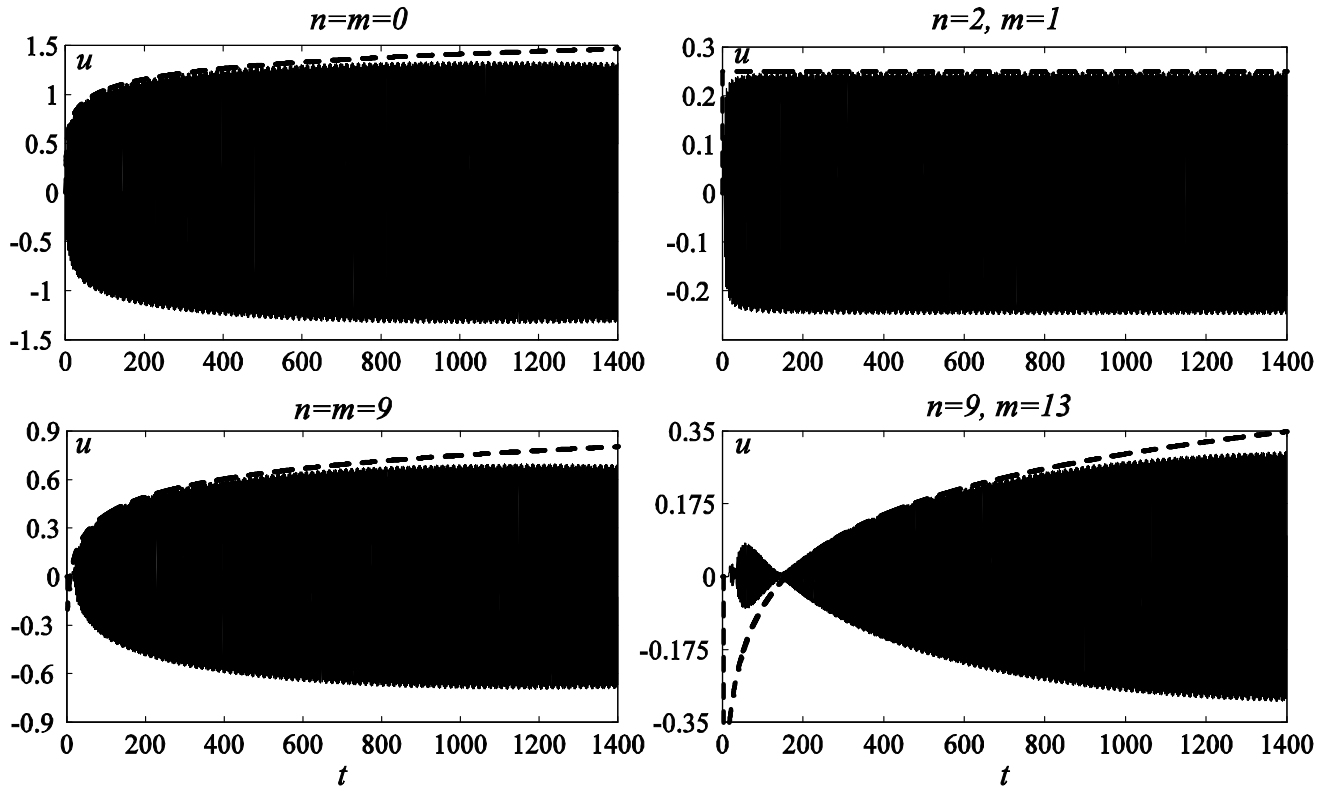


Рис. 2.2.10. Перемещение при воздействии с резонансной частотой $\omega_* = 2$

Рис. 2.2.11. Осциллограммы перемещений при $\omega_* = 2$

Как следует из этого выражения, резонансная частота разностной схемы, соответствующая значению $\omega = 2$ ($q_y = \pm\pi \pm q_x$), определяется формулой

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arccos(1 - 2\tau^2). \quad (2.2.35)$$

На рис. 2.2.12 – 2.2.14 представлены осциллограммы перемещений, рассчитанные при действии синусоидальной нагрузки с частотой (2.2.35): $\omega_* = 2.001637\dots$, $\tau = 0.07$. Пунктирные линии соответствуют асимптотикам (2.2.28) – (2.2.31). Толстые сплошные линии соответствуют асимптотикам (2.2.32), (2.2.33). Как видно, в этом случае асимптотики (2.2.28) – (2.2.31) с большой точностью описывают огибающую кривую численного решения. Анализ формул (2.2.28) – (2.2.31) и рис. 2.2.12 – 2.2.14, показывает, что время наступления соответствия численного решения и асимптотики зависит от координат точки в решетке: при $m = n = 0$ — $t \approx 1$; при $m = n \neq 0$ — $t \approx |m|$; при $|m| \neq |n|$ ($|m| + |n|$ — четное) — $t \approx e^{\gamma} |m^2 - n^2|$. Видно, что различие между

асимптотиками (2.2.29) и (2.2.32) при $m = n$ (рис. 2.2.13) незначительно. При $m \neq n$ (рис. 2.2.14) расхождение между двумя решениями увеличивается. Относительная погрешность при $n = 9, m = 13$ составляет $\sim 3.5\%$ при $t = 1400$.

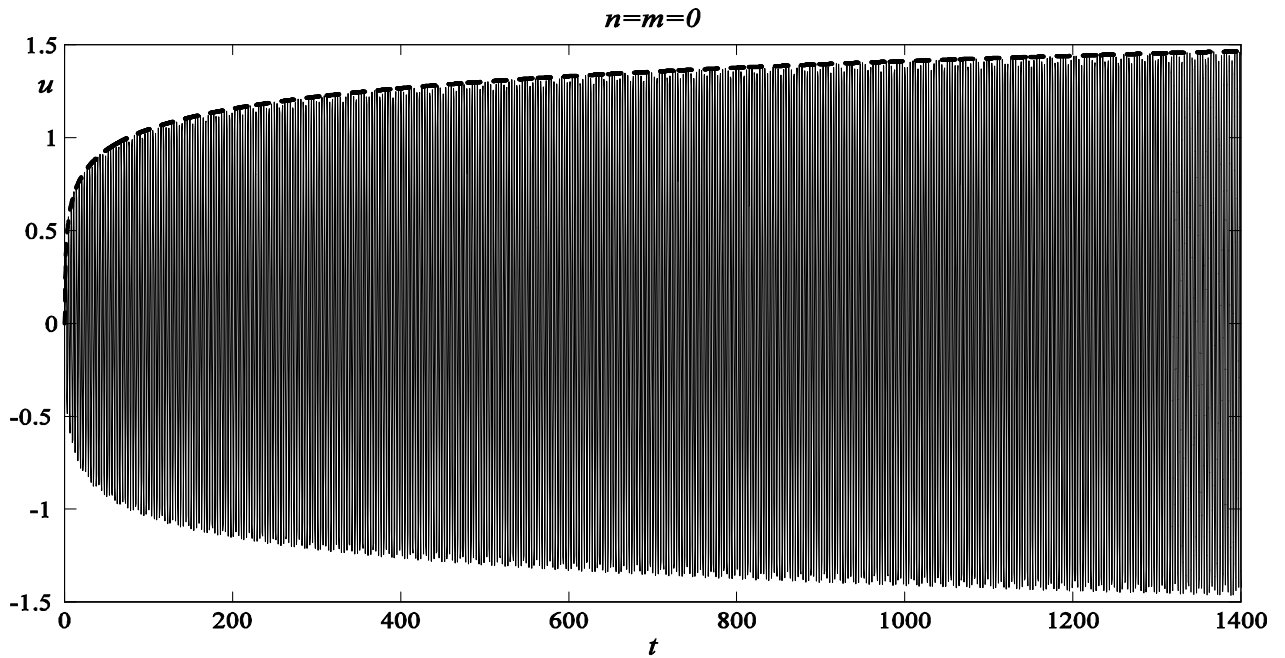


Рис. 2.2.12. Осциллограмма перемещений при $\omega_* = 2.001637\dots$

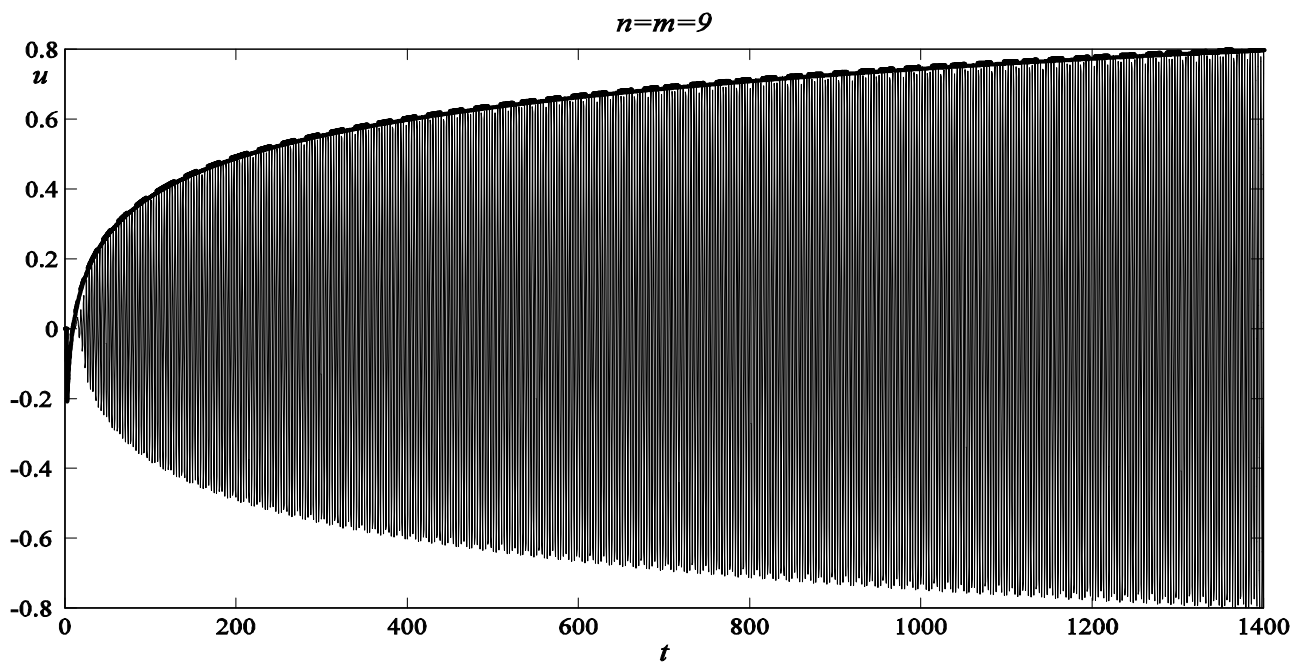


Рис. 2.2.13. Осциллограмма перемещений при $\omega_* = 2.001637\dots$

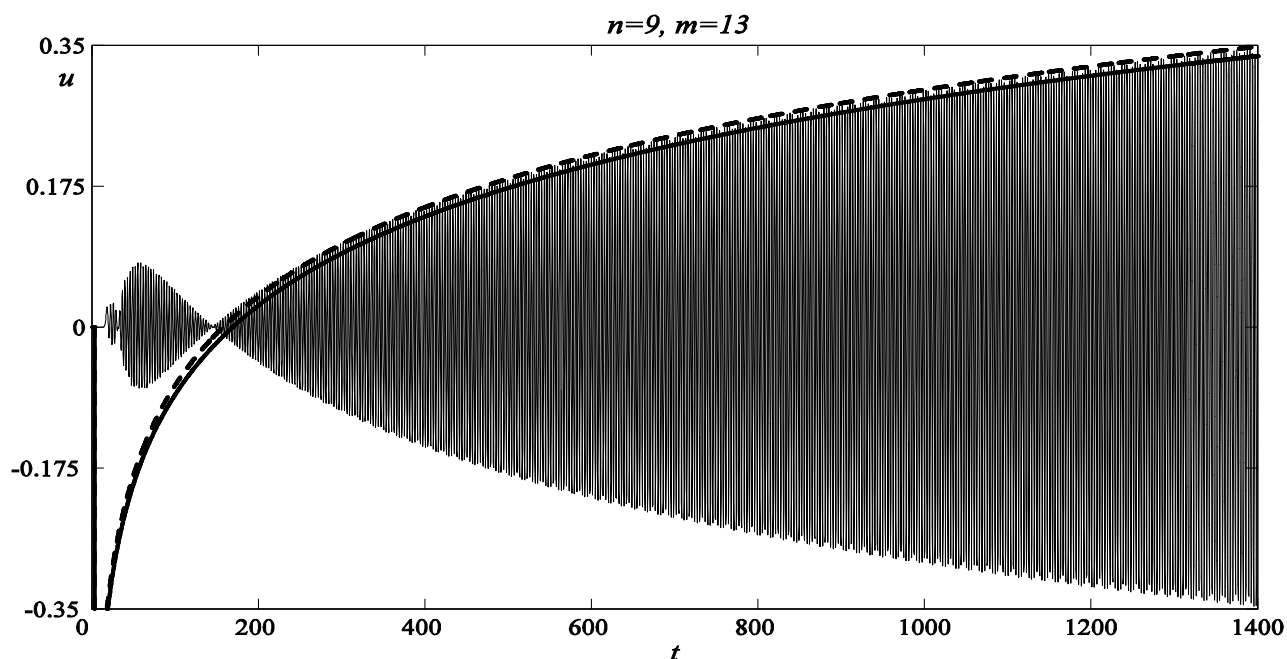


Рис. 2.2.14. Осциллограмма перемещений при $\omega_* = 2.001637\dots$

Заключение

Получено аналитическое решение нестационарной задачи об антиплоском монохроматическом сосредоточенном воздействии с резонансной частотой на квадратную решетку масс, соединенных пружинами.

Показано, что при таком воздействии в квадратной решетке масс возникает рост амплитуды осцилляций перемещений пропорционально $\ln t$ при $t \rightarrow \infty$, причем преимущественное распространение коротких волн происходит в диагональном направлении.

В результате сравнения численных и аналитических решений показано, что асимптотическое решение с большой точностью описывает огибающую кривую осцилляций конечно-разностного решения, и соответствие этих решений наступает при конечном времени воздействия и зависит от координат точек решетки.

2.2.2.3. Распространение волн при действии ступенчатой нагрузки

Результаты данного пункта опубликованы в [16].

Рассматривается антиплоская деформация двумерной квадратной решетки при действии сосредоточенной ступенчатой нагрузки, приложенной в точке с координатами (0,0):

$$Q(t) = Q_0 H(t), \quad Q^L = \frac{Q_0}{p}. \quad (2.2.36)$$

Для нагрузки (2.2.36) решение в изображениях по Лапласу и Фурье с учетом (2.2.23), (2.2.24) имеет вид

$$u_n^{LF_m} = \frac{Q_0 \left(B - \sqrt{B^2 - 1} \right)^{|n|}}{2kp\sqrt{B^2 - 1}}, \quad (2.2.37)$$

Будем исследовать нестационарное поведение возмущений при большом времени с начала процесса. Будем полагать, что $p \rightarrow 0$. Это соответствует $t \rightarrow \infty$ в пространстве оригиналов. Асимптотика изображения перемещений (2.2.37) при $n = 0$ в окрестности $p = 2i\omega_0 \sin\left(\frac{q_x l}{2}\right)$ будет иметь следующий вид:

$$\dot{u}_0^{LF_m} \approx \frac{Q_0}{2k\sqrt{B^2 - 1}}, \quad B^2 - 1 \approx \frac{1}{\omega_0^2} \left(p^2 + 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{q_x l}{2} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (2.2.38)$$

Обращая преобразование Лапласа в формуле (2.2.38), получим

$$\dot{u}_0^{F_m} \approx \frac{Q_0}{2\sqrt{Mk}} J_0 \left(2\omega_0 t \sin \frac{q_x l}{2} \right) \quad (2.2.39)$$

Обращая дискретное преобразование Фурье в (2.2.39), получим [65]

$$\dot{u}_{m,0} \approx \frac{Q_0}{\pi\sqrt{Mk}} \int_0^{\pi/2} J_0(2\omega_0 t \sin z) \cos(2mz) dz = \frac{Q_0}{2\sqrt{Mk}} J_m^2(\omega_0 t) \quad (2.2.40)$$

Чтобы вычислить ускорение, продифференцируем (2.2.40)

$$\ddot{u}_{m,0} \approx \frac{Q_0}{2M} J_m(\omega_0 t) [J_{m-1}(\omega_0 t) - J_{m+1}(\omega_0 t)]. \quad (2.2.41)$$

Асимптотики скорости (2.2.40) и ускорения (2.2.41), вычисленные при $t \rightarrow \infty$, учитывают как длинноволновые возмущения ($q \rightarrow 0$), так и коротковолновые возмущения, распространяющиеся в осевых направлениях ($q_x = 0, q_y l = \pi$) или ($q_x l = 0, q_y l = 0$).

Вычислим асимптотику перемещения, используя (2.2.40):

$$u_0^{F_m} \approx \frac{Q_0}{2\sqrt{Mk}} \int_0^t J_0\left(2\omega_0 t \sin \frac{q_x l}{2}\right) dt = \frac{Q_0}{2\omega_0 \sqrt{Mk} \sin \frac{q_x l}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} J_{2j+1}\left(2\omega_0 t \sin \frac{q_x l}{2}\right). \quad (2.2.42)$$

Обратим дискретное преобразование Фурье в формуле (2.2.42):

$$u_{m,0} \approx \frac{Q_0}{\pi k} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin z} \sum_{j=0}^{\infty} J_{2j+1}(2\omega_0 t \sin z) \cos(2mz) dz, \quad z = \frac{q_x l}{2}. \quad (2.2.43)$$

Вычислим длинноволновую асимптотику перемещений. Для этого положим $z \rightarrow 0$ в подынтегральном выражении (2.2.43). В результате будем иметь:

$$u_{m,0} \approx \frac{Q_0}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} J_{2j+1}(2\omega_0 tz) \cos(2mz) dz. \quad (2.2.44)$$

Вычисляя интеграл (2.2.44) с использованием [52, 65, 222], получим длинноволновую асимптотику перемещений при $t \rightarrow \infty$:

$$u_{m,0} \approx \frac{Q_0}{2k\pi} \begin{cases} H(z-1) \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), & z = \omega_0 t / |m|, \quad m \neq 0 \\ \ln(4\sqrt{2}\omega_0 t) + \gamma, & m = 0 \end{cases} \quad (2.2.45)$$

где $\gamma = 0.577...$ — постоянная Эйлера.

С помощью приближенного представления функции Бесселя и её производной через функцию Эйри (2.2.7), (2.2.20), справедливого при $m \gg 1$, перепишем решения (2.2.40), (2.2.41) в другом виде:

$$\dot{u}_{m,0} \approx \frac{Q_0}{2^{1/3} \sqrt{kM}} \left[\frac{\text{Ai}(2^{1/3} \kappa)}{(\omega_0 t)^{1/3}} \right]^2, \quad \kappa = \frac{m - \omega_0 t}{(\omega_0 t)^{1/3}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2.46)$$

$$\ddot{u}_{m,0} \approx -\frac{2Q_0 \text{Ai}(2^{1/3} \kappa) \text{Ai}'(2^{1/3} \kappa)}{t \sqrt{kM}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2.47)$$

Преимущество решений (2.2.46), (2.2.47) по сравнению с (2.2.40), (2.2.41) состоит в том, что эти решения явно описывают степень затухания длинноволновых возмущений вблизи квазифронта $ml = c_* t$, где они максимальны ($c_* = l\omega_0$ — скорость бесконечно длинных волн в решетке).

Анализ формул (2.2.46), (2.2.47) показывает, что максимальные амплитуды скоростей перемещений падают как $t^{-2/3}$, ускорений — как t^{-1} при $t \rightarrow \infty$. Зона квазифронта, где возмущения изменяются от нуля до максимума, расширяется как $t^{1/3}$ при $t \rightarrow \infty$.

Аналитическое решение задачи для однородной среды при действии ступенчатой нагрузки

Полагая $l \rightarrow 0$ в уравнении (2.2.21), и получим уравнение, описывающее антиплоское движение однородной среды:

$$\frac{\ddot{u}}{c^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q(t) \delta(x) \delta(y). \quad (2.2.48)$$

Здесь $\delta(x)$ — функция Дирака; $Q(t) = Q_0 H(t)$ — ступенчатая нагрузка; c — скорость распространения возмущений в среде. Применим к уравнению (2.2.48) преобразование Лапласа по времени и непрерывные преобразования Фурье (значки F_x, F_y) по координатам x, y . Получим решение в изображениях данной задачи:

$$\dot{u}^{LF_x F_y} = \frac{Q_0}{\frac{p^2}{c^2} + q_x^2 + q_y^2}.$$

Обращая преобразование Фурье по переменной y [279] будем иметь:

$$\dot{u}^{LF_x} = \frac{Q_0 \exp\left(-|y|\sqrt{\frac{p^2}{c^2} + q_x^2}\right)}{2\sqrt{\frac{p^2}{c^2} + q_x^2}}. \quad (2.2.49)$$

Полагая в (2.2.49) $y = 0$ и последовательно обращая интегральные преобразования, получим точное решение уравнения (2.2.48) для перемещений и их скоростей:

$$\dot{u}(x, 0) = \frac{Q_0 c}{2\pi} \frac{H(ct - x)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}. \quad (2.2.50)$$

$$u(x, 0) = \frac{Q_0}{2\pi} H(z - 1) \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad z = \frac{ct}{x}, \quad x \neq 0 \quad (2.2.51)$$

Сравнение формул (2.2.45) и (2.2.51) показывает, что точное решение для перемещений при $x \neq 0$ для однородной среды совпадает с длинноволновой асимптотикой перемещения для решетки при $m \neq 0$.

Сравнение численных и аналитических результатов

Уравнение (2.2.21) решалось также методом конечных разностей по явной схеме (2.2.34), где $Q^r = Q_0 = 1$, $\tau = 0.07$. На рис. 2.2.15–2.2.17 представлены осциллограммы перемещений $u = u_{m,0}$ (рис. 2.2.15, $m = 0, 10, 20$), скоростей перемещений $v = \dot{u}_{m,0}$ (рис. 2.2.16, $m = 20$), и ускорений $w = \ddot{u}_{m,0}$ (рис. 2.2.17, $m = 20$) при ступенчатом сосредоточенном воздействии. За единицы измерения задачи приняты следующие величины: $k = 1$, $l = 1$, $M = 1$. Тонкие кривые соответствуют конечно-разностному решению, толстые кривые — аналитическим решениям (2.2.45)–(2.2.47), штриховые кривые — аналитическое решение для однородной среды (2.2.50).

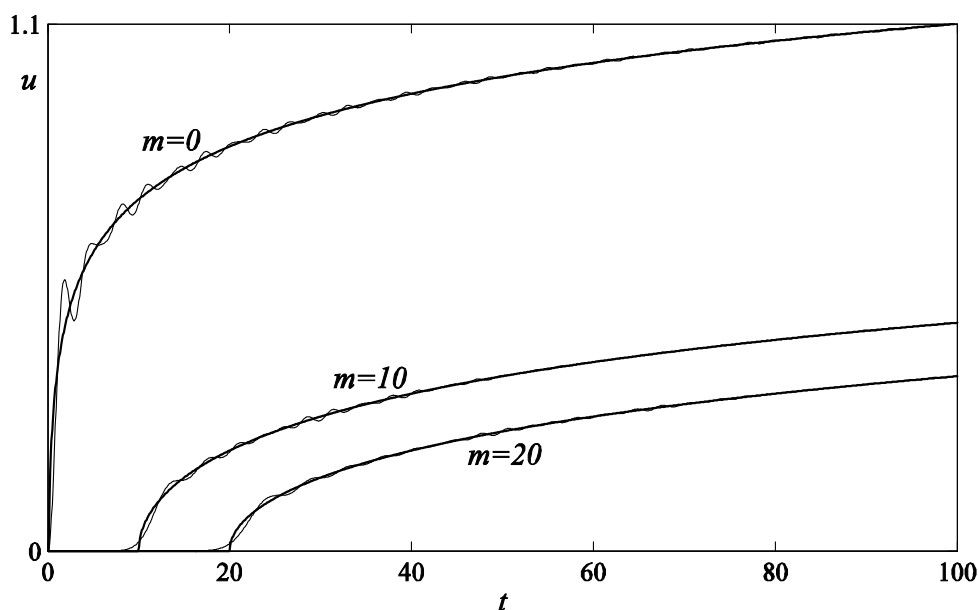


Рис. 2.2.15. Осциллограммы перемещения.

Сравнение численных и асимптотических решений для перемещений (рис. 2.2.15), показывает, что длинноволновая асимптотика (2.2.45) с большой точностью описывает перемещение на всем интервале взаимодействия.

Анализ рис. 2.2.16, 2.2.17 показывает, что асимптотики (2.2.46), (2.2.47) и качественно и количественно совпадают с конечно-разностным решением, начиная от $t=0$ и вплоть до момента времени $t = \frac{m\sqrt{2}}{c} \sim 44$, где $c = \frac{2}{\pi}$ — фазовая скорость коротковолновых возмущений ($q_x = q_y = \pi$). Начиная с этого момента времени, на осциллограммах численных расчетов v , w появляются возмущения, отсутствующие в асимптотических решениях (2.2.46), (2.2.47) и соответствующие колебаниям коротких волн ($q_x = q_y = \pi$).

Сравнение двух аналитических решений (2.2.46), (2.2.50) относительно скоростей перемещений показывает, что решение для блочной среды (2.2.46) осциллирует относительно решения для однородной среды (2.2.50).

Проводилось также сравнение конечно-разностных решений для скоростей перемещений v и ускорений w с аналитическими решениями (2.2.40), (2.2.41). Как и следовало ожидать, их совпадение еще лучше, чем с решениями (2.2.46), (2.2.47).

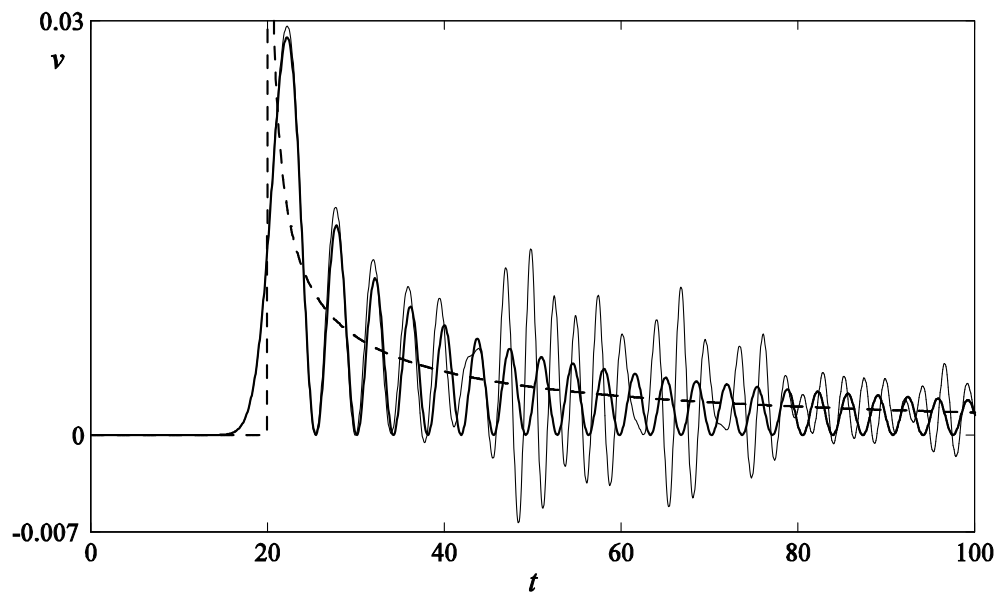


Рис. 2.2.16. Осциллограммы скорости перемещения ($m = 20$).

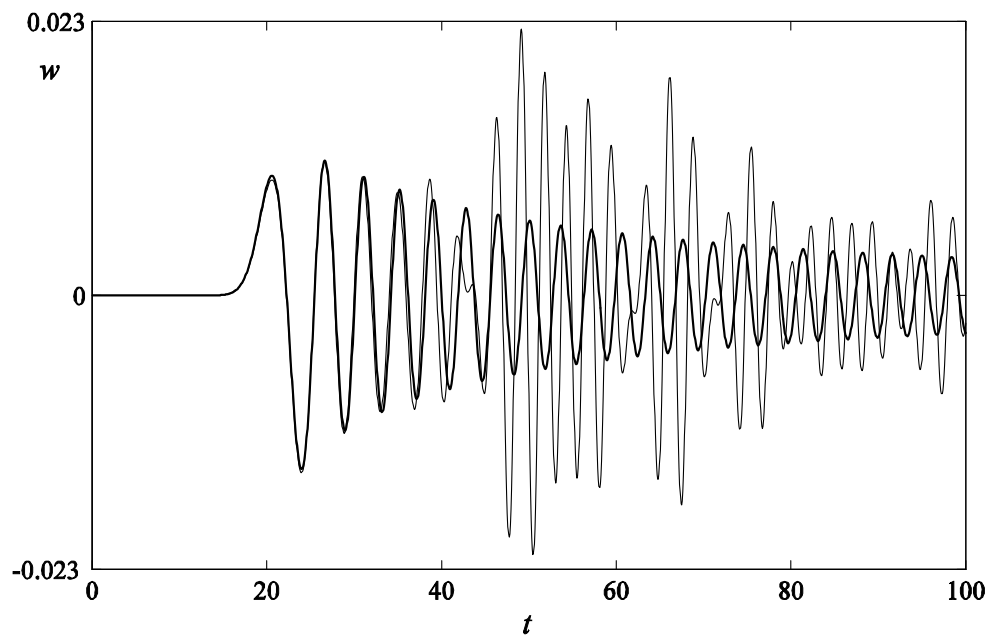


Рис. 2.2.17. Осциллограммы ускорения ($m = 20$).

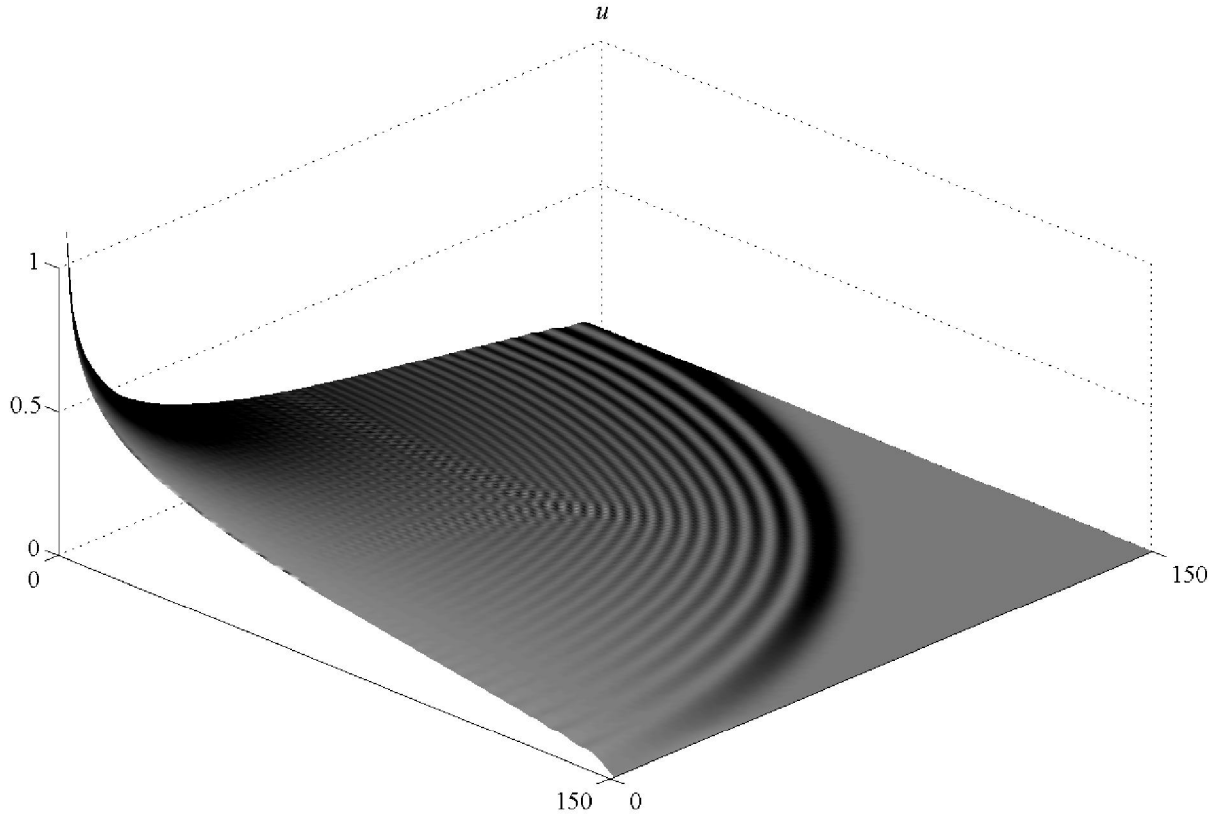


Рис. 2.2.18. Зависимость перемещения от координат в момент времени $t = 150$.

На рис. 2.2.18 представлена зависимость перемещения от координат n, m . Анализ рис. 2.2.18 и дисперсионного соотношения (2.2.23) показывает, что в квадратной решетке процесс симметричен относительно точки воздействия. Поэтому решения (2.2.45) – (2.2.47) можно переписать в терминах радиальной координаты $r = \sqrt{n^2 + m^2}$:

$$u_{m,n} \approx \frac{Q_0}{2k\pi} \begin{cases} H(z-1) \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), & z = \frac{\omega_0 t}{r}, \quad r \neq 0, \\ \ln(4\sqrt{2}\omega_0 t) + \gamma, & r = 0, \end{cases} \quad (2.2.52)$$

$$\dot{u}_{m,n} \approx \frac{Q_0}{2^{1/3} \sqrt{kM}} \left[\frac{\text{Ai}(2^{1/3} \kappa)}{(\omega_0 t)^{1/3}} \right]^2, \quad \kappa = \frac{r - \omega_0 t}{(\omega_0 t)^{1/3}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.2.53)$$

$$\ddot{u}_{m,n} \approx -\frac{2Q_0 \text{Ai}(2^{1/3} \kappa) \text{Ai}'(2^{1/3} \kappa)}{\sqrt{kM} t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2.54)$$

Заключение

1. Выявлена двухволновая структура возмущений, распространяющихся по двумерной регулярной блочной системе при действии локальной нагрузки. Показано, что, как и в одномерном случае, первой в наблюдаемую точку приходит низкочастотная маятниковая волна, бегущая со скоростью бесконечно длинных волн в дискретной среде, за ней движется группа высокочастотных колебаний с несущей частотой в районе первой резонансной частоты ω_1 . Вклад маятниковой волны практически не зависит от направления распространения сигнала.

2. Получено асимптотическое решение нестационарной задачи при ступенчатом сосредоточенном антиплоском воздействии на квадратную решетку масс, соединенных пружинами в осевых направлениях.

Показано, что при таком воздействии в квадратной решетке масс наблюдаются следующие эффекты при $t \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$):

- а) амплитуды перемещений пропорциональны $\ln\left(\frac{t}{r}\right)$;
- б) максимальные амплитуды скоростей перемещений падают с ростом времени (расстояния) как $t^{-2/3}$ ($r^{-2/3}$), ускорений — как t^{-1} (r^{-1});
- в) зона квазифронта, расширяется как $t^{1/3}$ ($r^{1/3}$);
- г) соответствие численных и аналитических решений для блочной среды наступает при конечном времени воздействия или на конечном расстоянии от места приложения нагрузки;
- д) решение для скоростей перемещений для блочной среды осциллирует относительно решения для скоростей для однородной среды.

2.2.2.4. Моделирование распространения сейсмических волн от взрыва в условиях двухслойного строения блочного породного массива

Результаты данного пункта опубликованы в [17].

Измерения параметров сейсмических волн при взрывных работах на карьерах показывают, что, как правило, по мере распространения сейсмический сигнал удлиняется по времени, а вклад низкочастотных колебаний возрастает.

В качестве примера такого явления на рис. 2.2.19 приведены осциллограммы скоростей перемещений грунта в трех взаимно перпендикулярных направлениях (XYZ), полученные при массовом взрыве 25.09.06 г. на карьере ОАО “Искитимизвесть” на расстоянии 1850 м от взрываемого блока породы.

Массовый взрыв был проведен с использованием короткозамедленной системы взрывания. Подрыв блока происходил в течение 1 с. Колебания грунта продолжались дольше 1 с и осуществлялись с частотой много меньшей, чем в период взрыва (рис. 2.2.19). Эти факты свидетельствуют о наличии дисперсии волн в среде, характерной для блочного массива, и выделении низкочастотных волн маятникового типа, распространяющихся со скоростями меньшими, чем продольные волны. В связи с этим важно изучить распространение волн при ударном нагружении в пространственной модели блочной среды.

Данный пункт посвящен моделированию особенностей распространения сейсмических волн при взрыве в однородной или слоистой блочной среде в двумерной постановке. Динамика блочной среды, рассмотрена в маятниковом приближении, когда блоки считаются несжимаемыми, а смещения их происходят за счет сжимаемости прослоек. Простейшей расчетной моделью в этом случае может служить регулярная решетка масс, соединенных упругими пружинами.

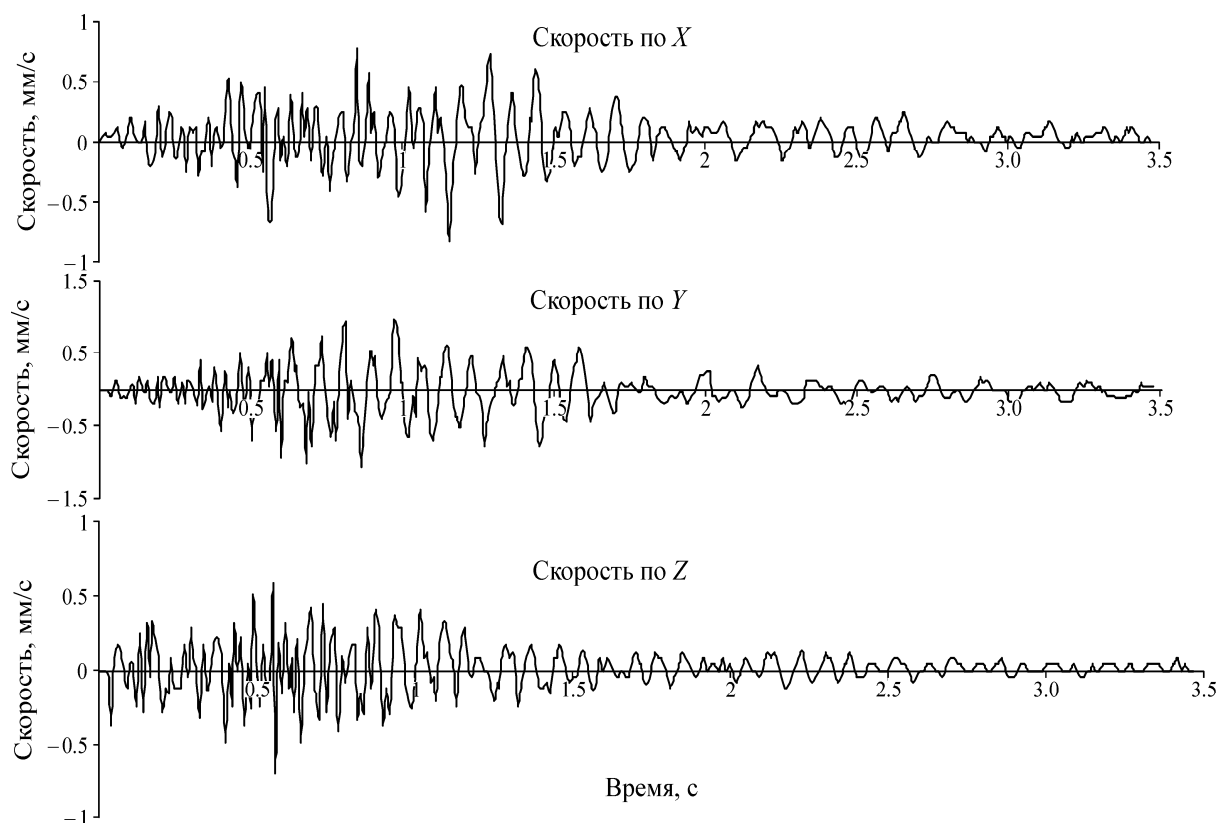


Рис. 2.2.19. Осциллограмма сейсмических колебаний при массовом взрыве на карьере ОАО “Искитимизвесть” на расстоянии 1850 м от взрываемого блока породы.

Распространение волн в двумерной безграничной решетке.

В двумерном случае исследования проведены на примере антиплоской деформации квадратной решетки, состоящей из масс величины M , соединенных пружинами длины l , имеющими одинаковые жесткости k в обоих направлениях (рис. 2.2.20).

Движение данной системы описывается уравнениями (2.2.21), где $n \leq 0$, $m \geq 0$. К массе с координатами $(0, 0)$ в начальный момент приложена полусинусоидальная нагрузка (2.1.5). Начальные условия нулевые. Если граничные условия выбрать из условий симметрии процесса относительно осей x и y :

$$u_{-1,n} = u_{1,n} \quad (n \leq 0), \quad u_{m,1} = u_{m,-1} \quad (m \geq 0), \quad (2.2.55)$$

то рассматриваемая система будет соответствовать структуре, неограниченной в пространстве.

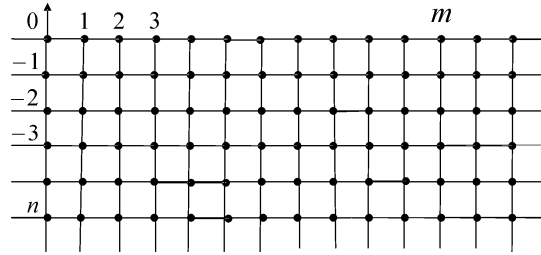


Рис. 2.2.20. Модель квадратной решетки масс, соединенных пружинами.

Система уравнений (2.1.5), (2.2.21), (2.2.55) решалась методом конечных разностей. Однородная разностная система уравнений, соответствующая исходной системе, принимает вид (2.2.34). Нулевые начальные условия аппроксимируются центральными разностями: $u_{m,n}^{-1} = u_{m,n}^1$. Условие устойчивости полученных конечно-разностных соотношений имеет вид $\tau \sqrt{\frac{2k}{M}} \leq 1$.

При действии импульсного источника пространственная волновая картина усложняется по сравнению с действием локального монохроматического источника. Из анализа результатов расчета задачи (2.1.5), (2.2.21), (2.2.55) попытаемся найти корреляцию процессов распространения возмущений от монохроматического и импульсного источников.

Примеры расчетных зависимостей скоростей масс от времени и их спектральных плотностей $G(\omega) = \left| \int_0^T \dot{u}_{m,n} e^{-i\omega t} dt \right|$ в различных точках по пространству при импульсном возбуждении представлены на рис. 2.2.21, 2.2.22. Параметры задачи следующие: $M = 1$, $l = 1$, $k = 1$, $\omega_* = 10$, $T = 150$, $\tau = 0.07$. На рис. 2.2.21 — $m = 20$, $n = 0$, на рис. 2.2.22 — $m = 20$, $n = -20$.

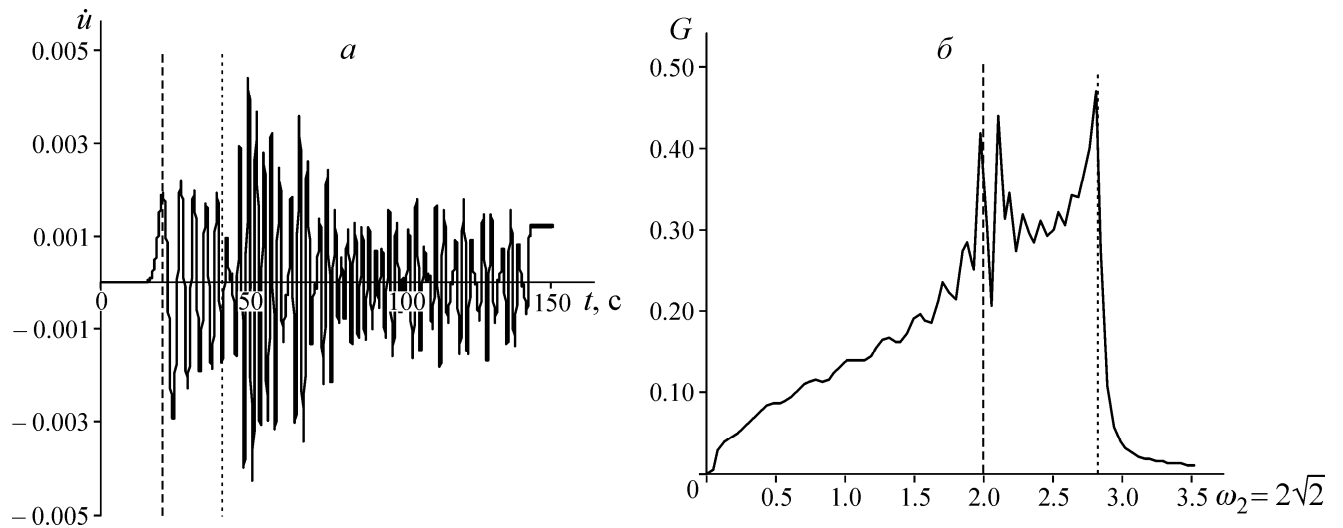


Рис. 2.2.21. Зависимости скорости массы с координатами (20, 0) от времени (а) и её спектральной плотности колебаний от частоты (б) при импульсном нагружении массы с координатами (0, 0).

На рис. 2.2.21а первая вертикальная линия на осциллограмме скорости соответствует времени $t_1 = \frac{m}{c}$ прихода маятниковой волны, распространяющейся по горизонтали со скоростью медленных волн $c = l\sqrt{\frac{k}{M}} = 1$ от источника воздействия к точке с координатами (m, 0). За ней с меньшей скоростью движется высокочастотный модулированный пакет осцилляций со средней амплитудой первой модуляции, вдвое превышающей таковую в маятниковой волне. С течением времени амплитуда высокочастотного пакета падает, но остается сравнимой с амплитудой маятниковой волны на достаточно большом интервале времени. Численные эксперименты показали, что скорость распространения второго пакета связана с диагональным распространением группы волн первой резонансной частоты $\omega_1 = 2\omega_0$. На рис. 2.2.21а вторая вертикальная линия соответствует времени прихода второго волнового пакета t_2 , идущего по диагоналям со скоростью $c_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}$ ($t_2 = \sqrt{2}\frac{m}{c_1} = 2\frac{m}{c}$). Та же двухволновая структура возмущений проявляется и в диагональном направлении (рис. 2.2.22 а). Однако здесь маятниковая волна фиксируется лишь в самом начале колебательного

процесса (первая вертикальная линия, соответствующая $t_1 = \sqrt{2} \frac{m}{c}$). Сравнительно скоро (вторая вертикальная линия – $t_2 = 2 \frac{m}{c}$) приходит высокочастотный пакет большей амплитуды и несущей частоты, близкой к $\omega = 2\omega_0$.

Описанная картина частично коррелирует с особенностями спектров осциллограмм (рис. 2.2.21 б, 2.2.22 б): в интервале сравнительно низких частот ($\omega \leq 1.5$) спектры в этих двух рассматриваемых случаях различаются мало, в результате чего вклад маятниковой волны оказывается практически одинаков. С ростом частоты растет различие в спектрах: во втором случае наблюдается выраженный пик в окрестности резонансной частоты $\omega_1 = 2\omega_0$, что и является причиной значительного вклада колебаний с этой частотой. Значение $\omega = 2\sqrt{2}\omega_0$ — верхняя граница интервала пропускания частот. На ней достигается максимум спектральной плотности на горизонтальных и вертикальных направлениях от места воздействия (см. рис. 2.2.21 б) при высокочастотном импульсе $\omega_* = 10$.

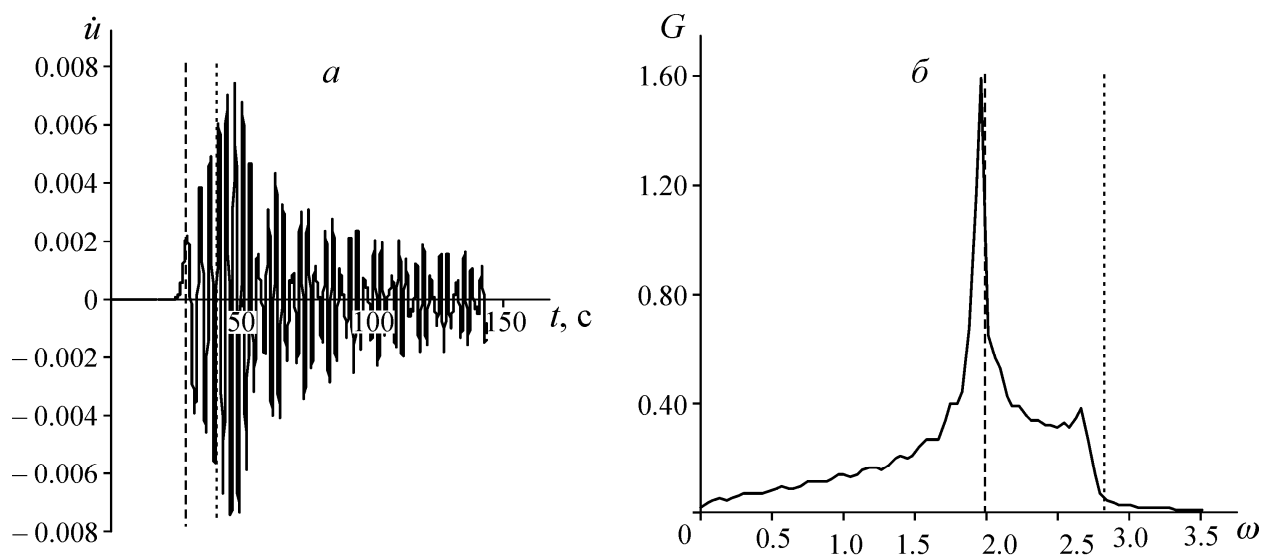


Рис. 2.2.22. Зависимости скорости массы с координатами (20, –20) от времени (а) и спектральной плотности ее колебаний от частоты (б) при импульсном нагружении массы с координатами (0, 0).

Распространение волн в слоистой блочной среде

Слоистая блочная среда возникает, например, при взрывной отбойке горной массы в карьерах. Верхние части разрабатываемого горизонта оказываются нарушенными предыдущими взрывами и им в модели соответствует решетка с меньшим значением жесткости, чем в подстилающем слое. Рассмотрим распространение возмущений в лежащем на жестком основании двухслойном блочном массиве, имеющем одинаковые жесткости в обоих направлениях, но разные в разных слоях (рис. 2.2.23).

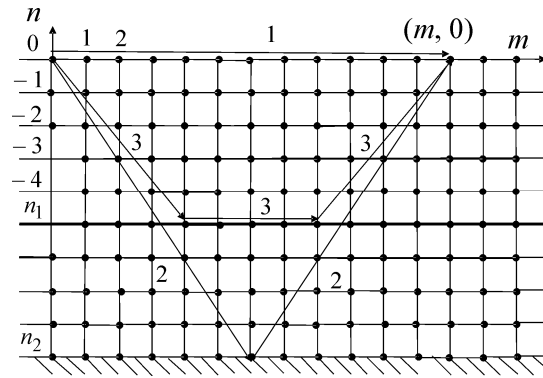


Рис. 2.2.23. Схема слоистой блочной среды и пути прохождения фронтов сейсмических волн. Воздействие приложено к массе с координатами $(0, 0)$ и регистрируется в точке $(m, 0)$.

Уравнения движения масс имеют вид:

$$M\ddot{u}_{m,n} = k_1(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) + k_1(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) + Q(m,n,t), \quad (m \geq 0, 0 \leq n \leq n_1 + 1),$$

$$M\ddot{u}_{m,n} = k_2(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) + k_2(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) + Q(m,n,t),$$

$$(m \geq 0, n_1 - 1 \geq n \geq n_2 + 1),$$

$$M\ddot{u}_{m,n_1} = \frac{k_1 + k_2}{2}(u_{m+1,n_1} - 2u_{m,n_1} + u_{m-1,n_1}) + k_1(u_{m,n_1+1} - u_{m,n_1}) + k_2(u_{m,n_1-1} - u_{m,n_1}) + Q(m, n_1, t).$$

В слое $0 \leq n \leq n_1$ жесткость пружин в обоих направлениях равна k_1 , в слое $n_1 \leq n \leq n_2$ — k_2 . Граничные условия соответствуют условию симметрии относительно оси y :

$$u_{-1,n} = u_{1,n} \quad (n = 0, \dots, n_2) \quad (2.2.57)$$

и заземления при $n = n_2$

$$u_{m,n_2+1} = 0 \quad (m = 0, \dots, \infty). \quad (2.2.58)$$

При $n = 0$ задается условие равенства нулю напряжений в направлении оси y :

$$u_{m,-1} = u_{m,1} \quad (m = 0, \dots, \infty). \quad (2.2.59)$$

Система уравнений (2.2.56) с нулевыми начальными и граничными условиями (2.2.57)–(2.2.59) решалась методом конечных разностей. Условие устойчивости конечно-разностных уравнений имеет вид $\tau \leq \min \left(\sqrt{\frac{M}{2k_1}}, \sqrt{\frac{M}{2k_2}} \right)$.

Примеры расчетов скоростей перемещений на свободной поверхности массива блочных пород ($n = 0$, $m = 10, 30$) и их спектральных плотностей приведены на рис. 2.2.24, 2.2.25. Нагрузка приложена в точке с координатами $(0, 0)$. Остальные параметры задачи имели следующие значения: $M = 1$, $n_1 = -5$, $n_2 = -80$, $l = 1$, $\tau = 0.07$, $\omega_* = 0.9$. На рис. 2.2.24 показаны расчеты скоростей масс в точках, находящихся на свободной поверхности однородного полупространства ($k_1 = k_2 = 1$), и их спектральных плотностей. На рис. 2.2.25 жесткость слоев различна: $k_1 = 1$, $k_2 = 9$.

Штриховые вертикальные линии на рис. 2.2.24а, в и рис. 2.2.25а–в соответствуют времени прихода волны от источника воздействия к точкам с координатами $(m, 0)$ по пути 1 (см. рис. 2.2.22): $t_1 = \frac{m}{c_1}$. Штрих-пунктирная

вертикальная линия на рис. 2.2.25 *a* соответствует времени прихода волны, отраженной от границы $n = n_2$ (путь 2),

$$t_2 \approx \left[\frac{n_1}{n_2 c_1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 c_1} \right] \sqrt{\frac{m^2}{4} + n_2^2}.$$

Здесь $c_i = l \sqrt{\frac{k_i}{M}}$ ($i = 1, 2$) — скорости распространения низкочастотных волн в верхнем и нижнем слое. Расчет проведен без учета преломления волнового луча на границе между слоями. Штриховые вертикальные линии на рис. 2.2.25 *a, в* соответствуют времени прихода волны, отраженной от границы $n = n_1$ (путь 3):

$$t_3 = \frac{m}{c_2} - \frac{2n_1 \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}{c_1 c_2}, \quad (c_2 > c_1).$$

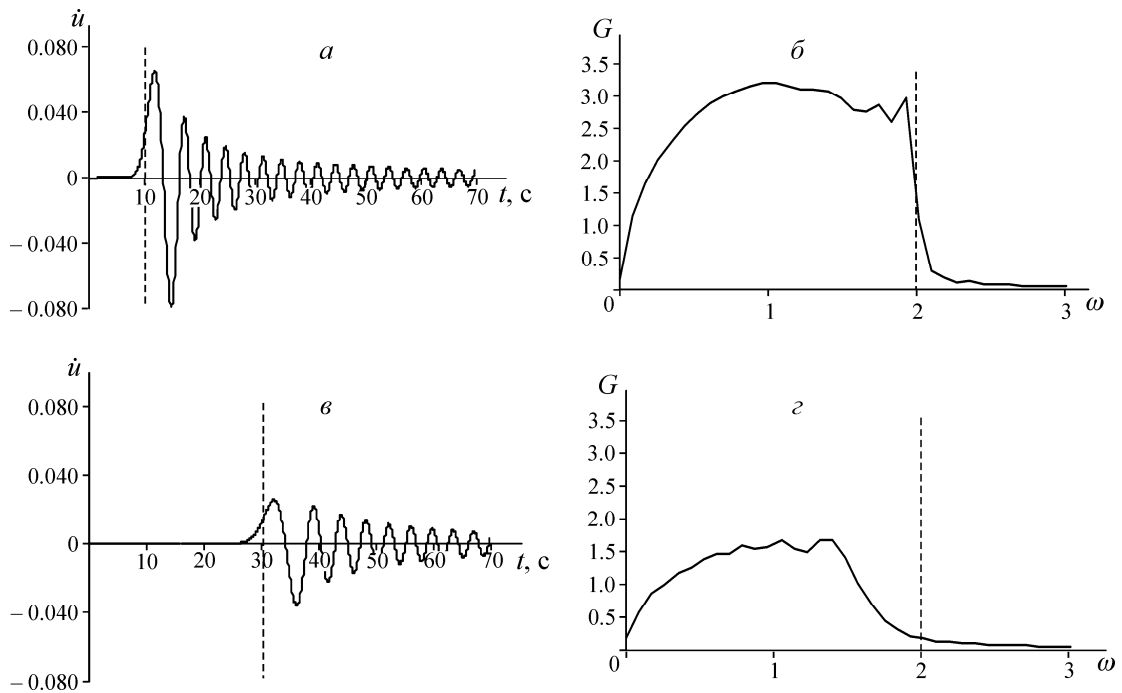


Рис. 2.2.24. Зависимости скоростей масс с координатами (10, 0) и (30, 0) от времени (*a, в*) и спектральных плотностей их колебаний от частоты (*б, з*) при ударном нагружении массы с координатами (0, 0) в случае однородного полупространства.

Видно, что если скорость $c_2 > c_1$, то в зависимости от места, в котором находится наблюдатель, может оказаться, что первой приходит волна, отраженная от границы раздела двух сред, а не волна, идущая по кратчайшему пути 1. Причем максимальная амплитуда скорости увеличивается в 2–6 раз по сравнению со случаями $k_1 = k_2 = 1$ и $k_1 = k_2 = 9$. На рис. 2.2.25а–в видно распространение маятниковой волны верхнего слоя (штриховая вертикальная линия) и нижнего (двойная штрих-пунктирная линия). Характерно то, что волна, распространяющаяся по нижнему, более жесткому слою, обгоняет волну верхнего слоя. Максимальные колебания при этом наступают все же после прихода более медленной волны верхнего слоя. Аналогичный характер имеют и сейсмограммы взрывов на карьерах. Вначале приходит быстро распространяющаяся волна малой амплитуды и затем, с замедлением — группа волн максимальной амплитуды.

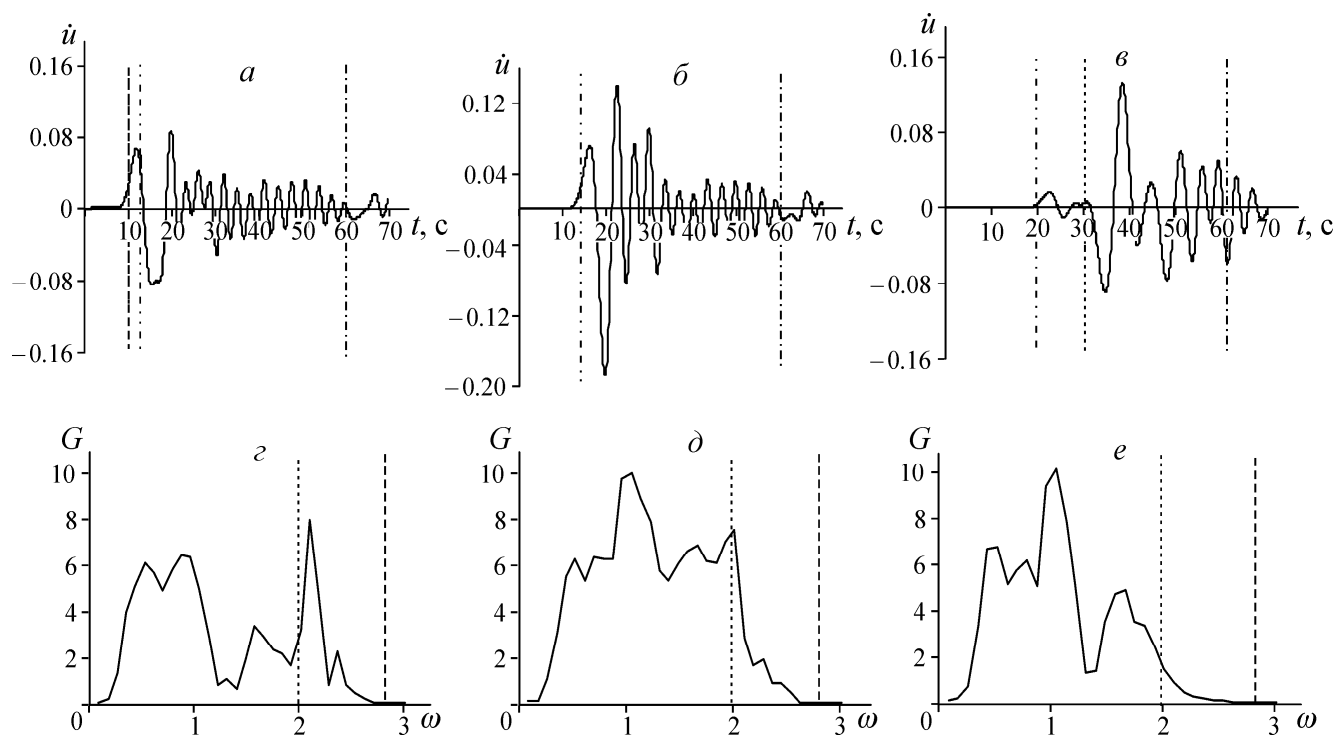


Рис. 2.2.25. Зависимости скоростей масс с координатами (10, 0), (14, 0) и (30, 0) от времени (а, б, в) и спектральных плотностей их колебаний от частоты (г, д, е) при ударном нагружении массы с координатами (0, 0) в случае слоистого полупространства.

Из условия $t_1 = t_3$ определим координаты точки $(m, 0)$, в которую одновременно приходят волны, идущие по путям 1 и 3:

$$m = -2n_1 \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}}.$$

Для параметров, используемых в расчетах рис. 2.2.25, получается $m = 10\sqrt{2}$. Численные расчеты скоростей в точках $m = 13, 14, 15, 16$ показывают, что действительно максимум достигается в точках $m = 14, 15$, в которые возмущения, идущие по верхнему и нижнему слоям, приходят почти одновременно. В других местах происходит частичное взаимное гашение волн. Расчеты показали, что если скорость $c_1 > c_2$, то основной вклад в амплитуду возмущений дает волна, бегущая по верхнему слою, а бегущая по нижнему слою, вызывает появление высокочастотных осцилляций. Качественно картина распространения возмущений и их спектры в полуограниченной решетке при воздействии на свободной поверхности среды (см. рис. 2.2.24) совпадают с поведением волн и спектров в цепочке масс (см. пункт 1.2.2): скорости масс описываются функцией Эйри и интервал пропускания частот тот же $0 \leq \omega \leq 2$.

При сравнении рис. 1.2.24 с рис. 2.2.21 видно, что между распространением волн в безграничных и полуограниченных решетках имеются существенные различия. В безграничной решетке есть две резонансных частоты $\omega = 2$ и $\omega = 2\sqrt{2}$ и соответственно бегут две группы волн, в то время как в полуограниченной решетке при воздействии на свободной поверхности и наблюдении на ней резонансная частота $\omega = 2$ только одна и распространяется только одна группа волн со скоростью $c = 1$. Анализ рис. 2.2.25г–е устанавливает, что основной вклад в спектр по мере распространения волны вносят возмущения, бегущие по верхнему более мягкому слою со скоростью $c = 1$ и имеющие частоту $\omega \leq 2$.

На рис. 2.2.26, 2.2.27 приведены зависимости скорости масс и их спектральных плотностей от времени в точках, находящихся на свободной поверхности двухслойной блочной среды с жесткостями прослоек $k_1 = 1$, $k_2 = 9$.

Нагрузка приложена в точке с координатами $(0, n_1)$: $n_1 = -5$, что соответствует заглубленному источнику возмущений.

Остальные параметры имели те же значения, что и на рис. 2.2.24. На рис. 2.2.26, 2.2.27 приведены кривые для воздействия с частотами $\omega_* = 0.9, 4.5$, соответственно. Вертикальные линии на них соответствуют времени прихода волн, идущих по различным путям (рис. 2.2.28):

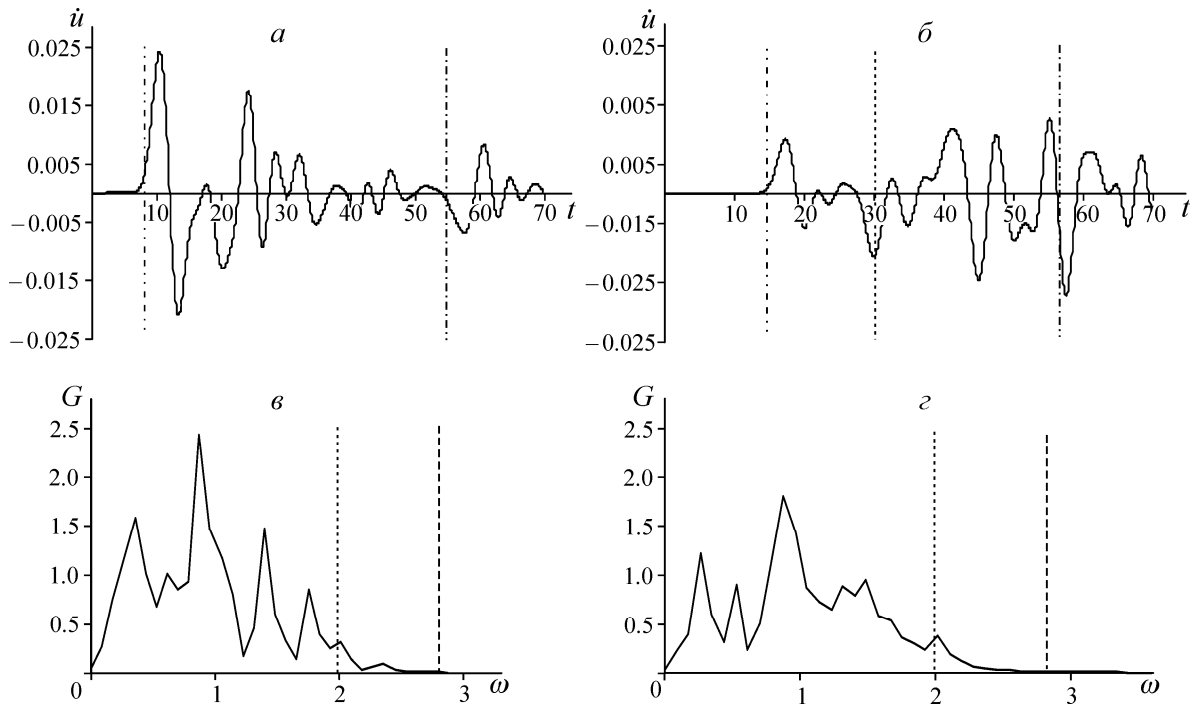


Рис. 2.2.26 Зависимости скоростей масс с координатами $(10, 0)$ и $(30, 0)$ от времени ($a, б$) и спектральных плотностей их колебаний от частоты ($в, г$) при импульсном нагружении массы с координатами $(0, -5)$ в случае $k_1 = 1$, $k_2 = 9$ и $\omega_* = 0.9$

Времена прихода волн, распространяющихся по разным путям (рис. 2.2.28) от точки возбуждения до точки измерения, определяются формулами геометрической сейсмоки:

$$t_1 = \frac{\sqrt{n_1^2 + m^2}}{c_1}, \quad (2.2.60a)$$

$$t_2 \approx \left(\frac{2(n_2 - n_1)}{c_2} + \frac{n_1}{c_1} \right) \frac{\sqrt{(2n_2 - n_1)^2 + m^2}}{2n_2 - n_1}, \quad (2.2.60б)$$

$$t_4 = \frac{2}{c_2} \sqrt{\frac{m^2}{4} + (n_2 - n_1)^2} - \frac{n_1}{c_1}, \quad (c_2 > c_1, |n_2| \gg m), \quad (2.2.60в)$$

$$t_3 = \frac{m}{c_2} - \frac{n_1 \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}{c_1 c_2}, \quad (c_2 > c_1). \quad (2.2.60г)$$

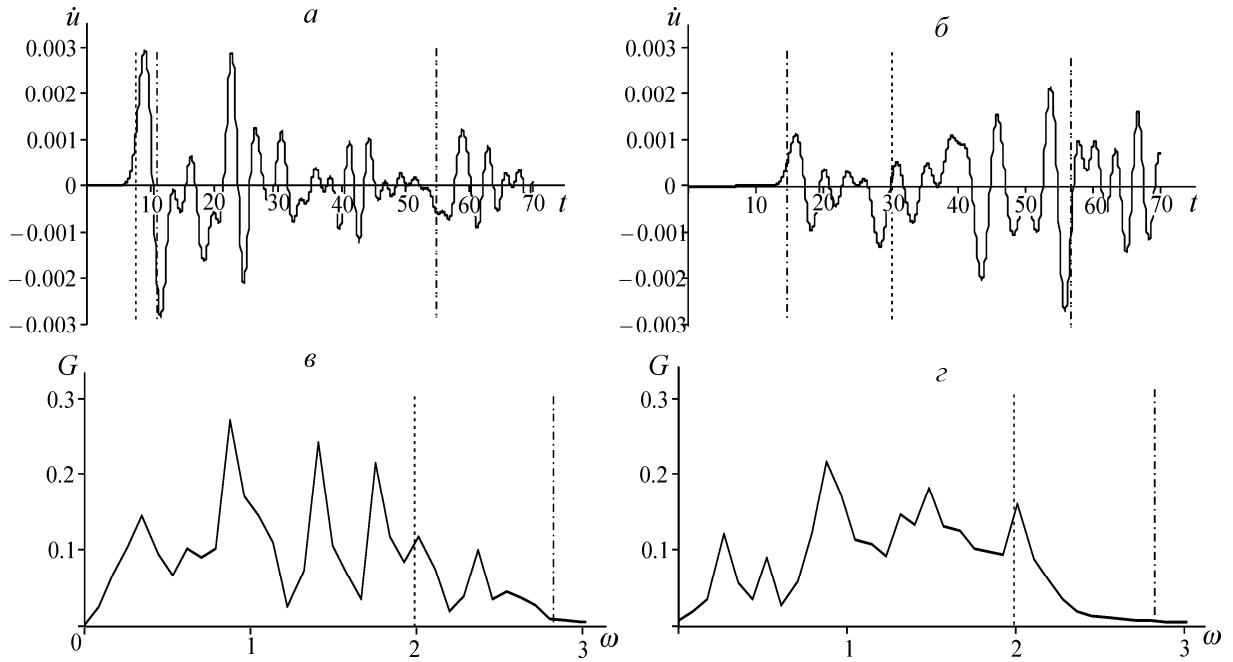


Рис. 2.2.27. Зависимости скоростей масс с координатами (10, 0) и (30, 0) от времени (а, б) и спектральных плотностей их колебаний от частоты (в, г) при ударном нагружении массы с координатами (0, -5) в случае $k_1 = 1$, $k_2 = 9$ и $\omega_* = 4.5$.

Как следует из формул (2.2.60) и рис. 2.2.26–2.2.28, если $c_2 > c_1$, то в точку $(m, 0)$ первой приходит волна, идущая по границе раздела двух сред (путь 3), если же $c_2 \leq c_1$, то первой приходит волна, идущая по пути 1. Волна, отраженная от нижней границы, движется по пути 2. Если $c_2 \approx c_1$, то путь 2 близок к прямолинейному, и время прохождения его можно вычислить по формуле (2.2.60б). Если $c_2 \gg c_1$, то путь 2 из-за преломления на границе раздела двух сред перестает быть прямолинейным, и приближенно путь 2 можно заменить на путь

4, а время прихода волны, отраженной от нижней границы, можно вычислить по формуле (2.2.60в).

Полоса пропускания частот под влиянием более мягкого верхнего слоя уменьшается и задается интервалом $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{2k_1}{M}} = 2.82$, что подтверждается графиками спектральной плотности на рис. 2.2.26, 2.2.27в, г.

Сравнение амплитуд скоростей, возникающих в системе при различном соотношении жесткостей подстилающего и поверхностного слоев, показывает, что максимальные амплитуды на свободной поверхности возникают в случае, когда жесткость поверхностного слоя меньше, чем жесткость подстилающего слоя.

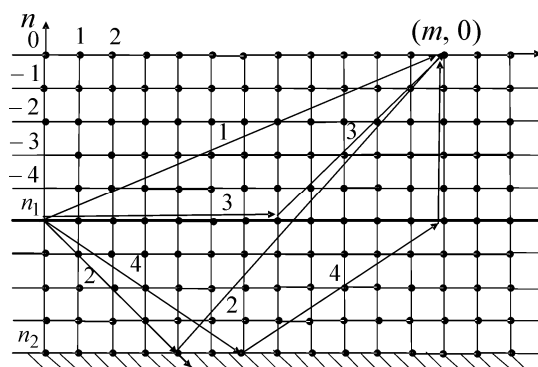


Рис. 2.2.28. Схема слоистой блочной среды и пути прохождения фронтов сейсмических волн. Воздействие приложено к массе с координатами $(0, n_1)$ и регистрируется в точке $(m, 0)$.

Заключение

Моделирование распространения сейсмических волн от взрыва в условиях двухслойного строения блочного породного массива показало, что на больших расстояниях от источника возмущения форма сейсмического сигнала зависит от соотношения скоростей маятниковых волн в слоях. Если в верхнем слое такая скорость меньше, то в точку наблюдения сначала приходит волна малой амплитуды, распространяющаяся по нижнему, более жесткому слою, а затем, с задержкой, волна максимальной амплитуды, характерной для верхнего слоя. Полученная картина качественно согласуется с наблюдаемой при взрывах на

карьерях. Времена прихода волн достаточно точно определяются в рамках геометрической сейсмологии.

2.2.3. Моделирование плоского движения двумерной блочной среды

2.2.3.1. Двумерная упругая модель блочной среды в плоской постановке

Результаты данного пункта опубликованы в [43].

Исследуется распространение возмущений в однородной двумерной решетке, состоящей из масс, соединенных пружинами в направлениях осей x , y и в диагональных направлениях (рис. 2.2.29). Задача рассматривается в плоской постановке. Принятая модель совпадает с используемой в [225].

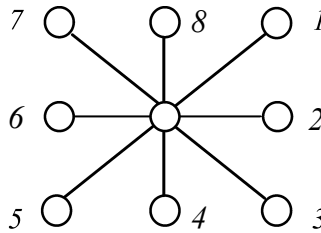


Рис. 2.2.29. Схема соединения масс пружинами в квадратной решетке

Уравнения движения массы с номерами n , m :

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{n,m} &= F^2 - F^6 + (F^1 + F^5 + F^3 + F^7)/\sqrt{2} + Q_x, \\ M\ddot{v}_{n,m} &= F^8 - F^4 + (F^1 + F^5 - F^3 - F^7)/\sqrt{2} + Q_y. \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Здесь u , v — перемещения в направлениях x , y ; n , m — номера масс в направлениях x , y ; M — масса; Q_x , Q_y — внешние действующие силы. Силы F^i ($i = 1, \dots, 8$) пропорциональны удлинениям соответствующих пружин:

$$F^2 = k_1(u_{n+1,m} - u_{n,m}), \quad F^6 = k_1(u_{n,m} - u_{n-1,m}), \quad (2.2.62)$$

$$F^4 = k_1(v_{n,m} - v_{n,m-1}), \quad F^8 = k_1(v_{n,m+1} - v_{n,m}),$$

$$F^1 = k_2(u_{n+1,m+1} - u_{n,m} + v_{n+1,m+1} - v_{n,m})/\sqrt{2},$$

$$F^5 = k_2(u_{n-1,m-1} - u_{n,m} + v_{n-1,m-1} - v_{n,m})/\sqrt{2},$$

$$F^3 = k_2(u_{n+1,m-1} - u_{n,m} + v_{n,m} - v_{n+1,m-1})/\sqrt{2},$$

$$F^7 = k_2(u_{n-1,m+1} - u_{n,m} + v_{n,m} - v_{n-1,m+1})/\sqrt{2}.$$

Здесь k_1 — жесткости пружин в направлениях осей x, y ; k_2 — в диагональных направлениях. Подставляя (2.2.61) в (2.2.62), получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{n,m} = & k_1(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} + u_{n+1,m-1} + \\ & + u_{n-1,m+1} - 4u_{n,m})/2 + k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} - v_{n-1,m+1} - v_{n+1,m-1})/2 + Q_x, \end{aligned} \quad (2.2.63)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{v}_{n,m} = & k_1(v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}) + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} - u_{n+1,m-1} - \\ & + u_{n-1,m+1})/2 + k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} + v_{n-1,m+1} + v_{n+1,m-1} - 4v_{n,m})/2 + Q_y. \end{aligned}$$

Начальные условия нулевые:

$$u_{n,m} = \dot{u}_{n,m} = v_{n,m} = \dot{v}_{n,m} = 0.$$

Пусть l — длина пружин в направлениях осей x и y . Заменим в (2.2.63) разностные соотношения в круглых скобках их дифференциальным приближением, (например, $u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m} \approx l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{l^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots$). Полагая $l \rightarrow 0$, опустим в скобках слагаемые порядка выше чем l^2 . В результате получим, что при переходе к сплошной среде уравнениям (2.2.63) соответствуют уравнения ортотропной теории упругости:

$$\begin{aligned} M\ddot{u} = & l^2 \left[(k_1 + k_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + Q_x, \\ M\ddot{v} = & l^2 \left[(k_1 + k_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + Q_y. \end{aligned}$$

Если $k_1 = 2k_2$, то эти уравнения описывают плоскую деформацию изотропной упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = \frac{1}{4}$, что соответствует $\lambda = \mu$ или плоское напряженное состояние изотропной упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = \frac{1}{3}$.

2.2.3.2. Дисперсионные свойства модели

Результаты данного пункта опубликованы в [43].

Применим преобразование Лапласа по времени и дискретные преобразования Фурье по координатам x, y . Решение в изображениях для перемещений будет иметь следующий вид:

$$\hat{u} = \frac{(Mp^2 + a_{22})\hat{Q}_x - a_{12}\hat{Q}_y}{D(p, q_x, q_y)}, \quad \hat{v} = \frac{(Mp^2 + a_{11})\hat{Q}_y - a_{21}\hat{Q}_x}{D(p, q_x, q_y)}, \quad (2.2.64)$$

$$D(p, q_x, q_y) = M^2 p^4 + Mp^2(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$a_{11} = 2k_1[1 - \cos(q_x l)] + a, \quad a_{22} = 2k_1[1 - \cos(q_y l)] + a,$$

$$a = 2k_2[1 - \cos(q_x l)\cos(q_y l)], \quad a_{12} = a_{21} = 2k_2 \sin(q_x l)\sin(q_y l).$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\hat{f}(p, q_x, q_y) = f^{LF_x F_y}$, L соответствует преобразованию Лапласа по времени с параметром p ; F_x, F_y — дискретным преобразованиям Фурье по x и по y с параметрами q_x, q_y .

Исследуем дисперсионные свойства системы. Полагая $p = i\omega$, найдем из дисперсионного уравнения $D(i\omega, q_x, q_y) = 0$ зависимость частоты от волновых чисел q_x, q_y :

$$\omega^\pm = \sqrt{\left(\frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}^2}\right) \frac{1}{M}}. \quad (2.2.65)$$

Вектор фазовой скорости и его модуль определяются по формулам

$$c_f^\pm = \frac{\omega^\pm}{q_x^2 + q_y^2}(q_x, q_y), \quad |c_f^\pm| = \frac{\omega^\pm}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}. \quad (2.2.66)$$

Вектор групповой скорости и его модуль задаются выражениями:

$$c_g^\pm = \left(\frac{\partial \omega^\pm}{\partial q_x}, \frac{\partial \omega^\pm}{\partial q_y} \right), \quad |c_g^\pm| = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega^\pm}{\partial q_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega^\pm}{\partial q_y} \right)^2}. \quad (2.2.67)$$

Из формул (2.2.65), (2.2.66) следует, что

$$\omega^\pm \Big|_{q_x=q_y=\pi/l} = 2\sqrt{\frac{k_1}{M}} = \omega_0, \quad \omega^\pm \Big|_{q_x=\pi/l, q_y=0} = \omega^\pm \Big|_{q_x=0, q_y=\pi/l} = \sqrt{\frac{2}{M}(2k_2 + k_1 \pm k_1)} = \omega_1^\pm; \quad (2.2.68)$$

$$|c_f^\pm| \Big|_{q_x=q_y=\pi/l} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{2k_1}{M}} = \frac{l\omega_0}{\pi\sqrt{2}} = c_0, \quad |c_f^\pm| \Big|_{q_x=\pi/l, q_y=0} = |c_f^\pm| \Big|_{q_x=0, q_y=\pi/l} = \frac{l\omega_1^\pm}{\pi} = c_1^\pm. \quad (2.2.69)$$

Как видно, в точке $q_x = q_y = \frac{\pi}{l}$ два решения для частот и фазовых скоростей совпадают. Если $q_x, q_y \rightarrow 0$, то из (2.2.65) имеем $\omega \rightarrow 0$. Значения модулей фазовых и групповых скоростей при $q_x, q_y \rightarrow 0$ имеют разные пределы в зависимости от соотношения q_x, q_y .

Если $q_x = 0, q_y \rightarrow 0$ или $q_x \rightarrow 0, q_y = 0$, то

$$|c_f^\pm| = |c_g^\pm| = l\sqrt{\frac{2k_2 + k_1 \pm k_1}{2M}} = \frac{l\omega_1^\pm}{2} = c_2^\pm. \quad (2.2.70)$$

Если $q_x = q_y = q, q \rightarrow 0$, то

$$|c_f^\pm| = |c_g^\pm| = l\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2 \pm 2k_2}{2M}} = c_3^\pm. \quad (2.2.71)$$

Модули групповых скоростей $|c_g^\pm|$ в точках $M(q_x = q_y = \frac{\pi}{l}), X(q_x = \frac{\pi}{l}, q_y = 0;$

$q_x = 0, q_y = \frac{\pi}{l})$ равны нулю. Так же, если $k_1 \leq 4k_2$, то в точке

$K\left(q_x = q_y = \frac{1}{l} \arccos\left(-\frac{k_1}{4k_2}\right)\right)$ модуль групповой скорости $|c_g^+| = 0$. Следовательно,

частоты ω_0 , ω_1^+ , ω_2^+ являются резонансными для данной системы. Здесь

$$\omega_2^+ = \omega_K^+ = 2\left(1 + \frac{k_1}{4k_2}\right)\sqrt{\frac{k_2}{M}}. \quad (2.2.72)$$

Из сравнения (2.2.70), (2.2.71) следует, что скорость распространения длинноволновых возмущений одна и та же в диагональных и осевых направлениях, если $k_1 = 2k_2$. Этот вывод согласуется со сделанным ранее выводом, что при $k_1 = 2k_2$ уравнения (2.2.63) при $l \rightarrow 0$ описывают плоское напряженное состояние изотропной упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = \frac{1}{3}$.

Таким образом, анализ дисперсионного уравнения для системы (2.2.61) показал, что каждой паре волновых чисел q_x , q_y соответствуют две волны, распространяющиеся со скоростями c_f^+ и c_f^- , и имеющие частоты ω^+ и ω^- , одна из которых является аналогом продольных волн расширения в упругом теле (знак «+»), другая — аналогом волн сдвига (знак «-»).

На рис. 2.2.30 представлены зависимости частоты и модуля фазовой скорости от волновых чисел q_x , q_y , если $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$. Здесь и далее масса блоков и длина пружин приняты за единицы: $M = 1$, $l = 1$. За единицу скорости принята скорость $c = l\sqrt{\frac{k}{M}}$, где $k = 1$. Значения k_1 и k_2 выбирались так, чтобы $k_1 + k_2 = 2$.

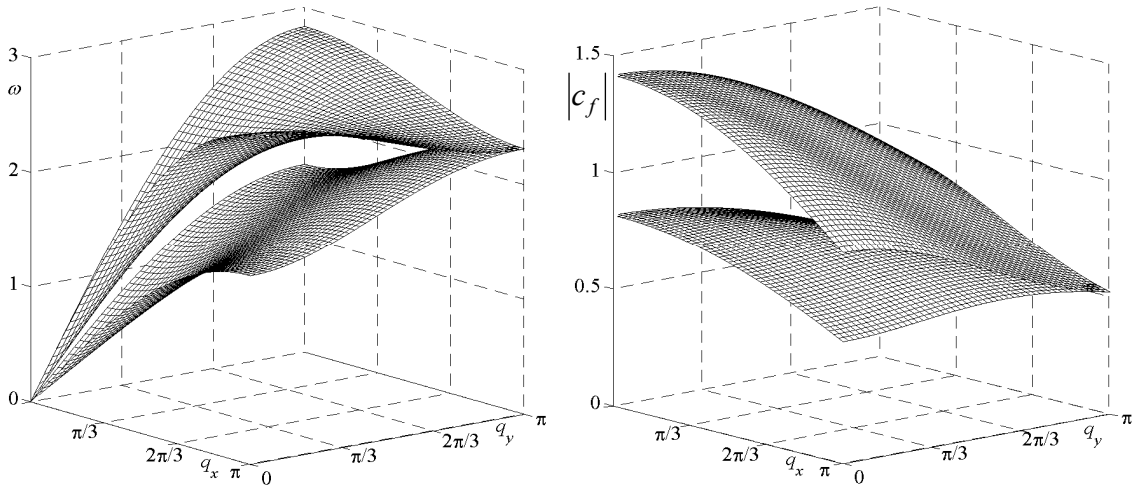


рис. 2.2.50. Зависимости частоты и модуля фазовой скорости от волновых чисел q_x ,

$$q_y \quad (k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}).$$

Для варианта $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$, при котором скорости распространения длинноволновых возмущений вдоль осей и диагоналей равны, а также при $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$ и $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$ зависимости частот волн, распространяющихся в решетке, от модуля волнового вектора на границах треугольника в плоскости q_x , q_y с вершинами в точках $\Gamma(q_x = q_y = 0)$, $M(q_x = q_y = \frac{\pi}{l})$, $X(q_x = \frac{\pi}{l}, q_y = 0)$ приведены на рис. 2.2.31 в виде диаграммы Бриллюена [55]. Видно, что область допустимых частот находится согласно формулам (2.2.68) в интервале: $0 \leq \omega \leq \omega_1^+$. При малых частотах зависимости близки к линейным с углами наклона к оси волновых векторов, зависящими от соотношения жесткостей k_1 и k_2 . Согласно (2.2.70), (2.2.71), эти углы определяют величины фазовых и групповых скоростей. Так, точки экстремумов, отмеченных кружочками на кривых рис. 2.2.31, соответствуют определенным выше резонансным частотам решетки ω_0 , $\omega_1^\pm$, ω_2^+ .

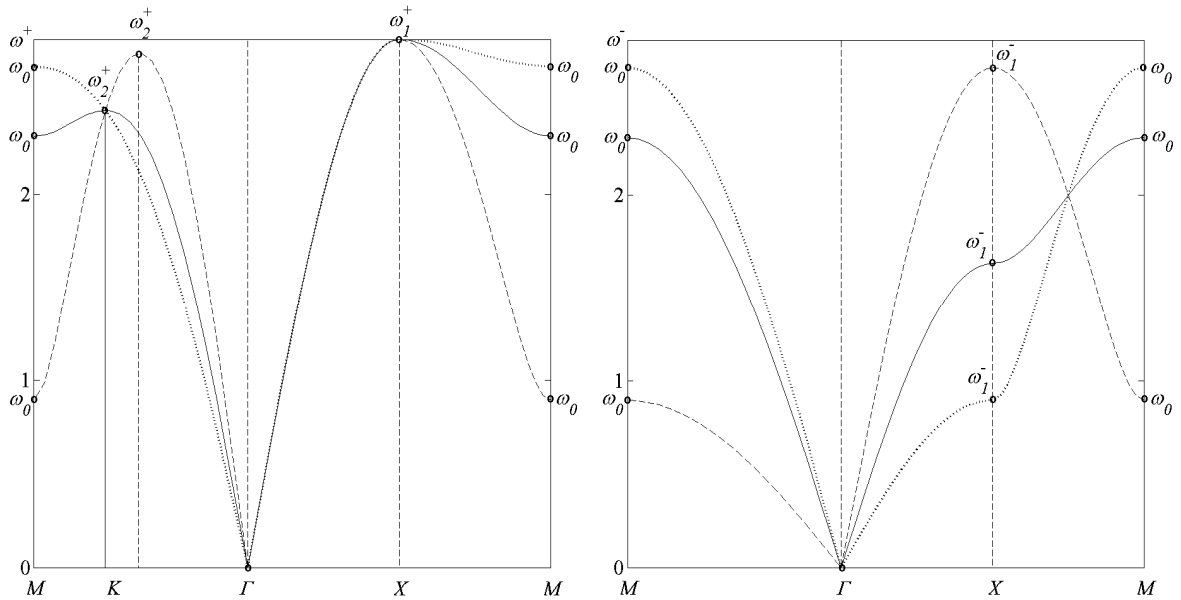


Рис. 2.2.31. Диаграмма Бриллюэна для решетки, показывающая зависимость частот волн от модуля волнового вектора вдоль границ треугольника $\Gamma(q_x = q_y = 0)$,

$M(q_x = q_y = \frac{\pi}{l})$, $X(q_x = \frac{\pi}{l}, q_y = 0)$ в плоскости (q_x, q_y) . Сплошные кривые

соответствуют параметрам $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$, пунктирные — $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$,

штриховые — $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$

На рис. 2.2.32 графически представлены поверхности модулей фазовых скоростей для обеих волн, распространяющихся в системе: рис. 2.2.32а — $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$; рис. 4б — $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$. На рис. 2.2.32а видно, что если $k_1 \neq 2k_2$, то скорость длинных волн ($\sqrt{q_x^2 + q_y^2} < \varepsilon$, ε — мало) существенно зависит от направления распространения возмущений. Так, на рис. 2.2.32а видно, что максимальная скорость волн c_f^+ , распространяющихся вдоль диагоналей, а на рис. 2.2.32б — вдоль осей. Для скоростей c_f^- соотношение на диагоналях и осях противоположное, но их величины меньше, чем c_f^+ . Фазовые и групповые скорости обеих волн в низкочастотной части спектра совпадают между собой. Поэтому длинноволновые возмущения движутся без дисперсии и формируют квазифронт низкочастотной маятниковой волны.

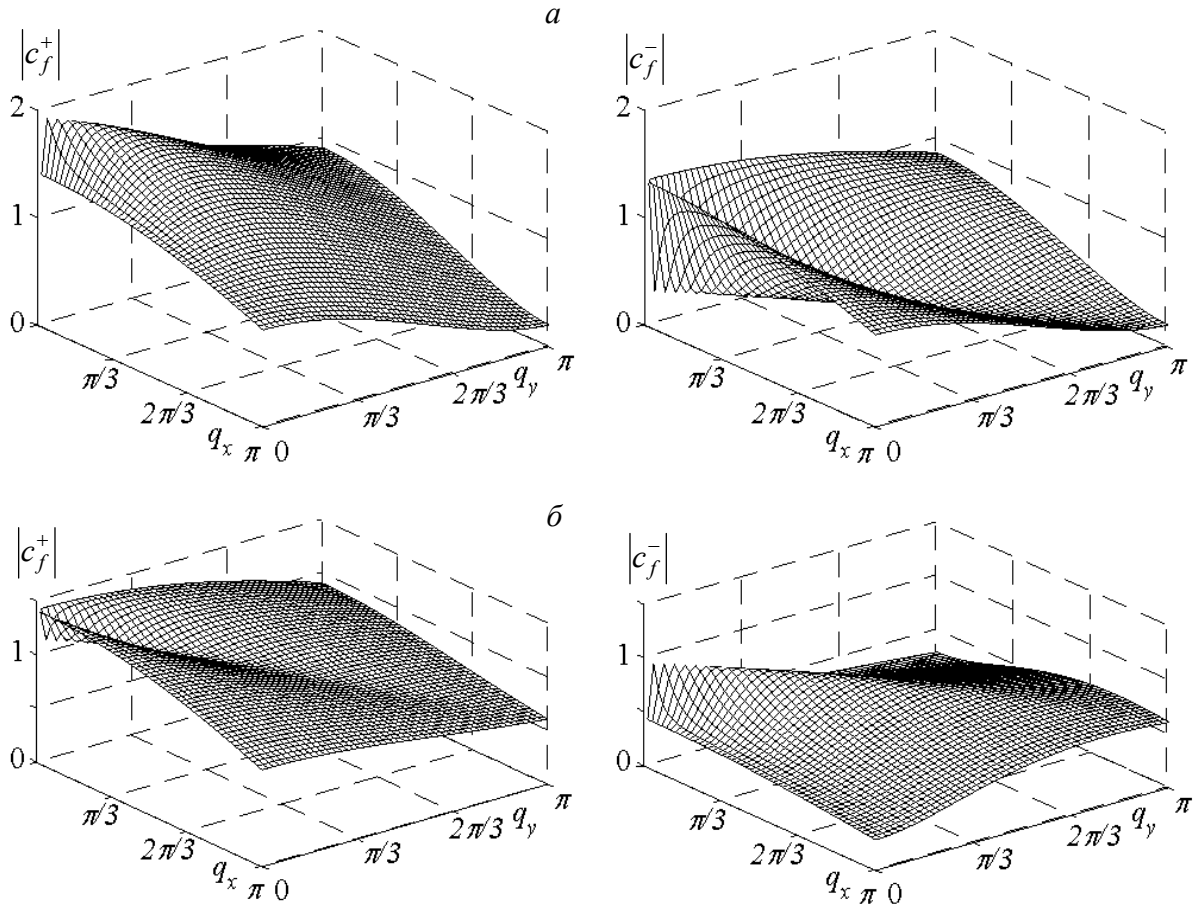


Рис. 2.2.32. Зависимость модуля фазовой скорости от волновых чисел q_x , q_y :

a — $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$; $б$ — $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$

Заключение

Исследованы дисперсионные характеристики плоской модели блочной среды в зависимости от параметров задачи. Определены параметры блочной среды, при которых бесконечно длинные волны распространяются во всех направлениях с одинаковой скоростью и формируют квазифронт низкочастотной маятниковой волны. Определены резонансные частоты для данной системы.

2.2.3.3. Воздействие типа «центр расширения»

Результаты данного пункта опубликованы в [43].

Пусть имеется бесконечная решетка. В точках с координатами $(n_0 - 1, m_0 - 1)$, $(n_0 - 1, m_0)$, $(n_0, m_0 - 1)$, (n_0, m_0) приложены силы, как показано на

рис. 2.2.33. Такое воздействие моделирует нагружение типа “центр расширения”. Уравнения (2.2.63) решаются методом конечных разностей по явной схеме.

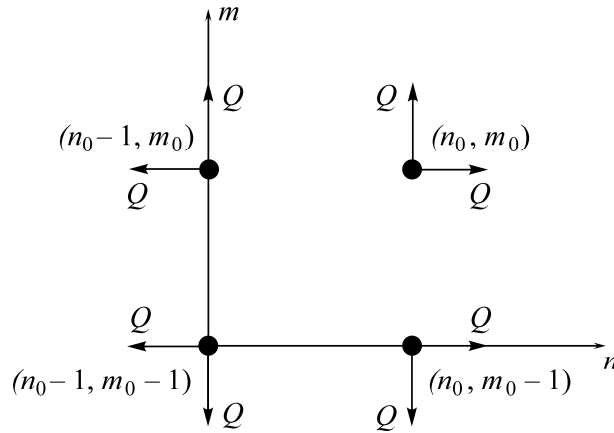


Рис. 2.2.33. Схема нагружения типа «центр расширения».

На рис. 2.2.34 представлены результаты расчетов радиального смещения

$$u_r(n, m) = \frac{u_{n,m}(n - n_0 + a_n) + v_{n,m}(m - m_0 + a_m)}{\sqrt{(n - n_0 + a_n)^2 + (m - m_0 + a_m)^2}},$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \geq n_0 \\ 1, & \text{если } n < n_0 \end{cases}, \quad a_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \geq m_0 \\ 1, & \text{если } m < m_0 \end{cases}$$

в момент времени $T = 36$ для ступенчатого воздействия $Q(t) = Q_0 H(t)$. Параметры задачи следующие: $\tau = 0.07$, $n_0 = m_0 = 60$. Жесткость диагональных и осевых пружин варьировалась: $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$ — рис. 2.2.34а; $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$ — рис. 2.2.34б; $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$ — рис. 2.2.34 в.

На рис. 2.2.34а видно, что, если $k_1 < 2k_2$, то скорость длинных волн вдоль осей меньше, чем вдоль диагоналей. И, наоборот, если $k_1 > 2k_2$, то скорость вдоль осей больше, чем скорость вдоль диагоналей (см. рис. 2.2.34в). При $k_1 = 2k_2$ имеем “изотропную” решетку: волны расходятся кругами (см. рис. 2.2.34б). Сделанные выводы полностью подтверждаются фазовыми поверхностями, представленными на рис. 2.2.28, 2.2.32а, б.

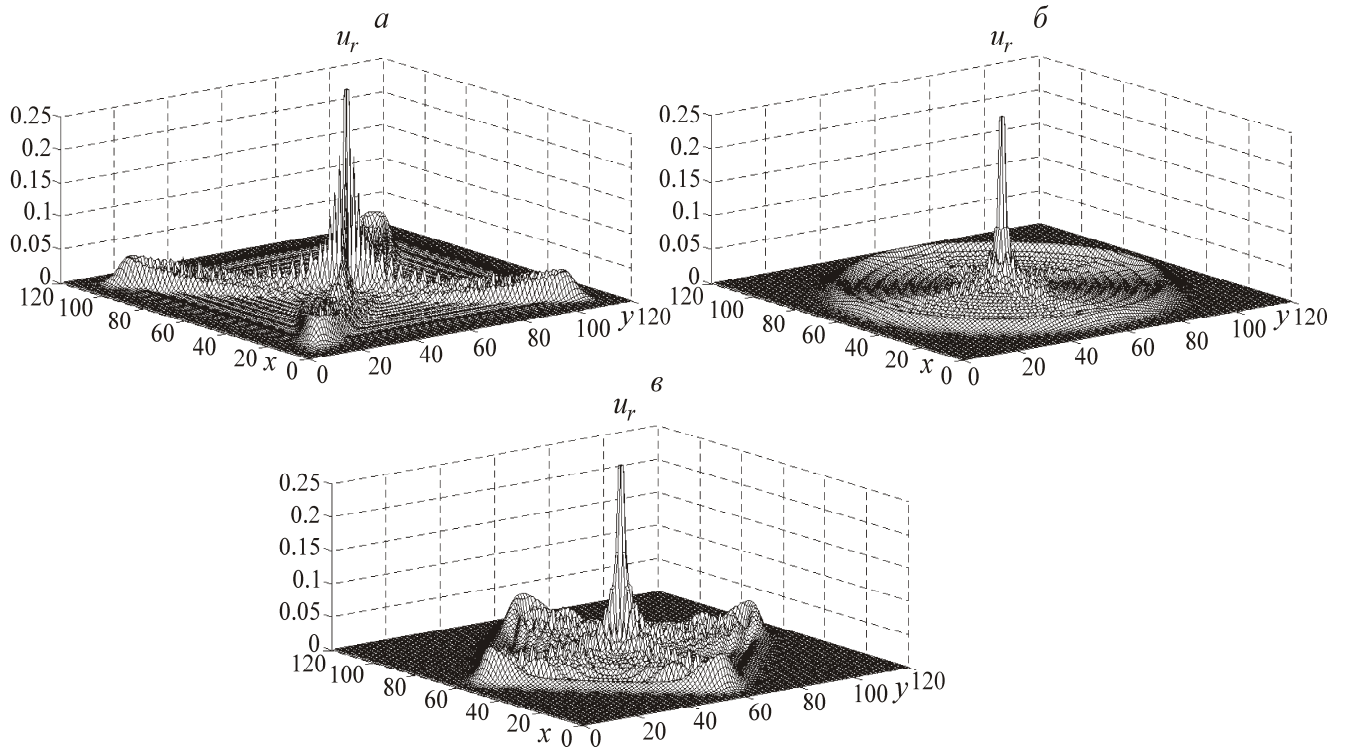


Рис. 2.2.34. Радиальное перемещение: a — $k_1 = 0.2, k_2 = 1.8$; $б$ — $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$;

$в$ — $k_1 = 1.8, k_2 = 0.2$.

Рассмотрим полусинусоидальное воздействие (2.2.5) с частотой ω_* , которое моделирует импульс. На рис. 2.2.35–2.2.37 представлены осциллограммы радиальных скоростей перемещений $\dot{u}_r(n, m)$ в точках на оси $n - n_0 = 0, m - m_0 = 20$ и в точках на диагонали $n - n_0 = m - m_0 = 20$ и их спектральные плотности

$$G(\omega, n, m) = \left| \int_0^T \dot{u}_r(n, m) e^{-i\omega t} dt \right|.$$

Параметры задачи следующие: $\tau = 0.07, \omega_* = 5, n_0 = m_0 = 430, T = 280$ — рис. 2.2.35, 2.2.36, $T = 570$ — рис. 2.2.37. Параметры жесткости пружин варьировались: рис. 2.2.35 — $k_1 = 0.2, k_2 = 1.8$, рис. 2.2.36 — $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$, рис. 2.2.37 — $k_1 = 1.8, k_2 = 0.2$.

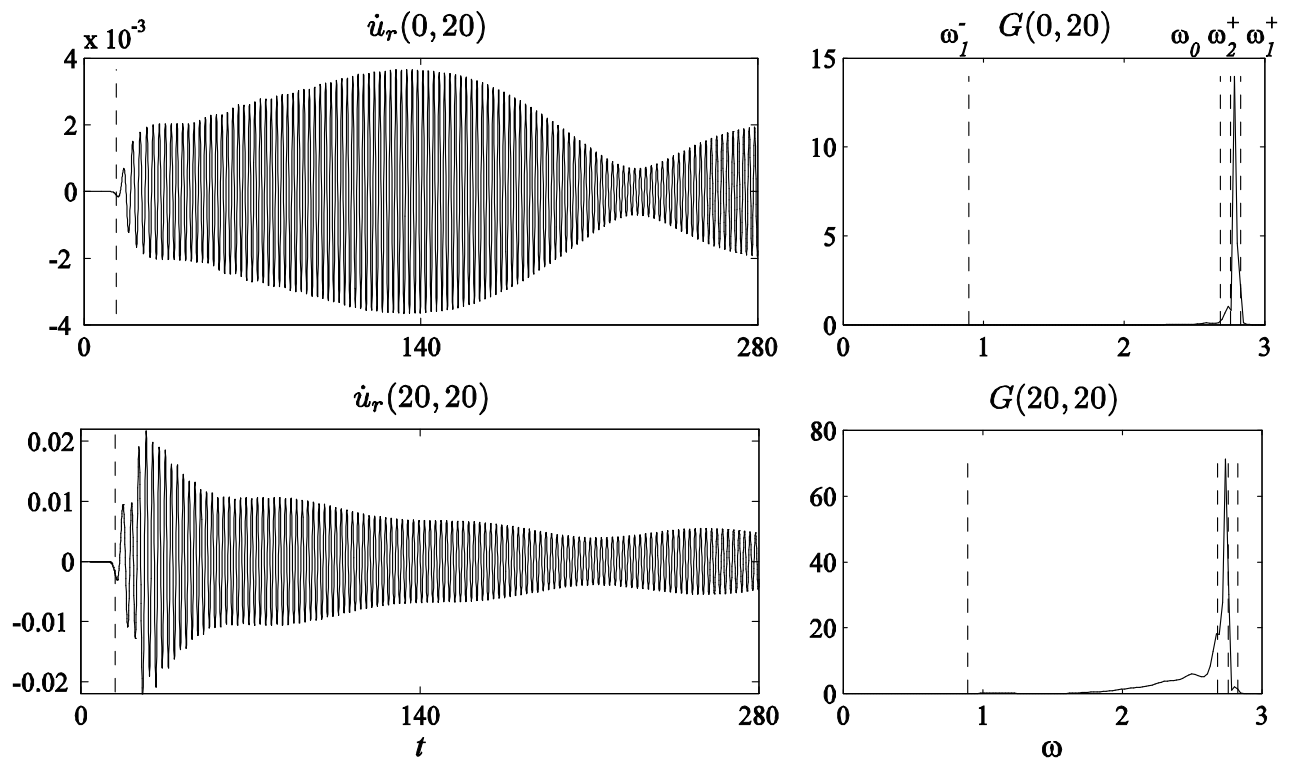


Рис. 2.2.35. Радиальная скорость перемещений и её спектр ($k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$).

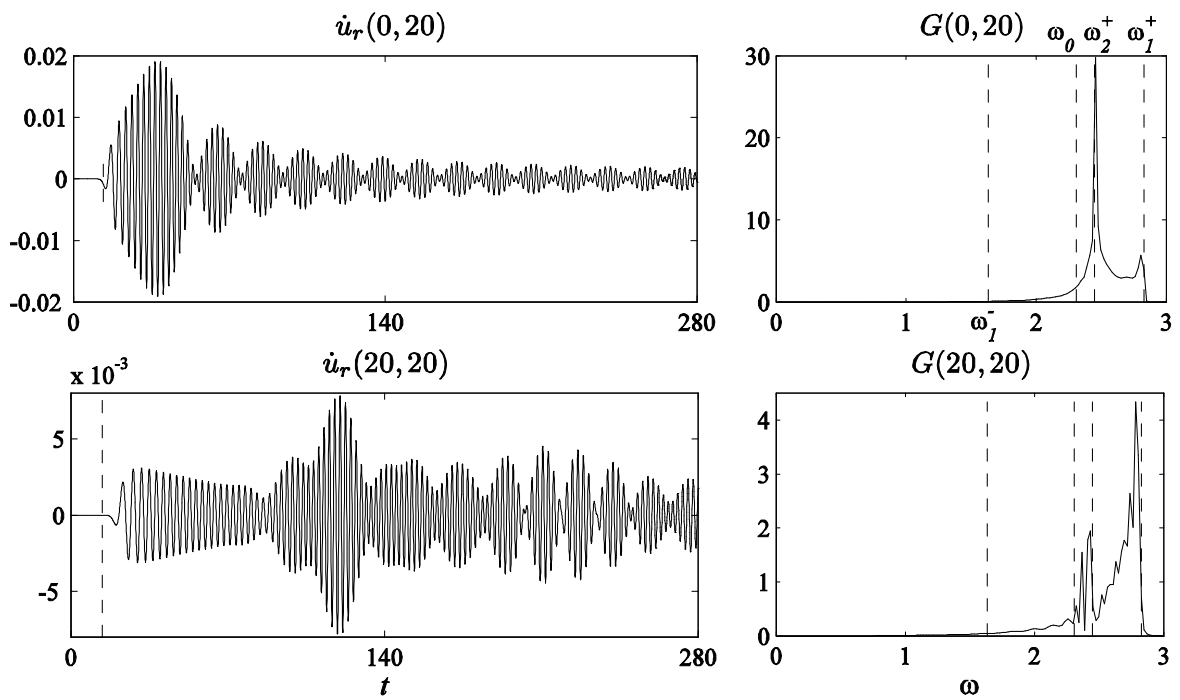


Рис. 2.2.36. Радиальная скорость перемещений и её спектр ($k_1 = 2k_2 = 4/3$).

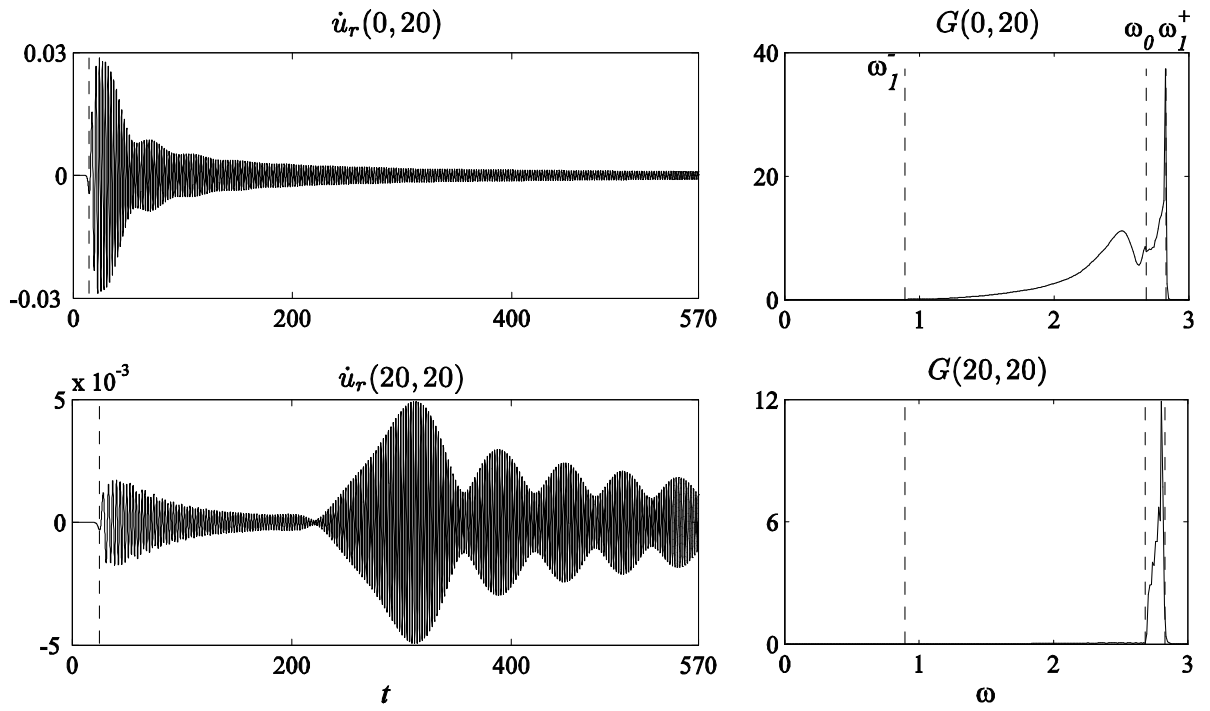


Рис. 2.2.37. Радиальная скорость перемещений и её спектр ($k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$)

Вертикальные линии на осциллограммах скоростей радиальных перемещений соответствуют времени прихода в данную точку длинноволновых возмущений, распространяющихся со скоростью c_f^+ . В точки, находящиеся на осях ($n = n_0$ или $m = m_0$), первые возмущения приходят со скоростью $c_2^+ = l \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{M}}$ в моменты времени $t = \frac{(m - m_0)l}{c_2^+}$. В точки, находящиеся на диагонали ($n - n_0 = m - m_0$), возмущения приходят со скоростью $c_3^+ = l \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{2M}}$ в моменты времени $t = \frac{(m - m_0)l\sqrt{2}}{c_3^+}$. Как видно из рис. 2.2.35–2.2.37, время появления длинноволновых возмущений в конкретных точках вычисляется с большой точностью с помощью формул (2.2.70), (2.2.71). Коротковолновые “продольные” возмущения имеют меньшую скорость и они отстают от длинноволновых возмущений. Изучение результатов численных расчетов, показывает, что в решетке с двумя направлениями связей (диагональными и осевыми) короткие волны распространяются и в диагональном и осевом направлениях. Аналогичное

явление (волны распространялись только в диагональном направлении) было обнаружено в антиплоской задаче при локальном периодическом нагружении решетки с резонансной частотой [210]. Это так называемые “звездные волны”. Как видно из рис. 2.2.34, в решетке с диагональным и осевым направлением связей в зависимости от соотношения жесткостей k_1 , k_2 “звездные волны” бегут либо только в диагональном направлении (рис. 2.2.34а), либо только в осевом (рис. 2.2.34б), либо и в диагональном, и осевом направлениях (рис. 2.2.34б).

Анализ осциллограмм показывает, что амплитуды радиальных скоростей на оси на порядок меньше, чем на диагонали, в случае, если $k_1 < 2k_2$. Если жесткость пружин в осевом направлении более чем в 2 раза больше, чем в диагональном, то амплитуда возмущений на оси заметно больше, чем на диагонали.

На графиках спектральной плотности (рис. 2.2.35–2.2.37) вертикальные линии соответствуют резонансным частотам ω_0 , $\omega_1^\pm$, $\omega_2^\pm$ (2.2.68), (2.2.72). Для данного осесимметричного импульсного воздействия, как видно на рис. 2.2.35–2.2.37, в основном возбуждаются колебания с частотой ω_1^+ и ω_2^+ . Это соответствует волнам “расширения” с длиной волны $\lambda = 2l$ и $\lambda = \frac{2l\pi}{\arccos(-k_1/4k_2)}$.

На рис. 2.2.38 представлены графики осциллограмм радиальных скоростей перемещений в точках, находящихся на различном удалении от места воздействия. Параметры задачи те же, что и на рис. 2.2.37. Видно, что амплитуда возмущений падает с ростом расстояния от места воздействия.

На рис. 2.2.39 приведены графики значений максимальных амплитуд радиальных скоростей перемещений в зависимости от расстояния от места воздействия. Крестики соответствуют результатам численных расчетов. Параметры задачи те же, что и на рис. 2.2.35–2.2.37. Сплошные кривые соответствуют функциям, пропорциональным $\frac{1}{\sqrt{m-m_0}}$ и совпадающим с расчетными значениями максимальных амплитуд скоростей на расстояниях 5 шагов решетки от центра расширения для возмущений на оси воздействия и 20 шагов решетки для возмущений на диагонали. Видно, что качественное

поведение зависимости амплитуд возмущений от расстояния плохо описывается такой функцией, характерной для цилиндрических волн в упругой среде при импульсном действии центра расширения.

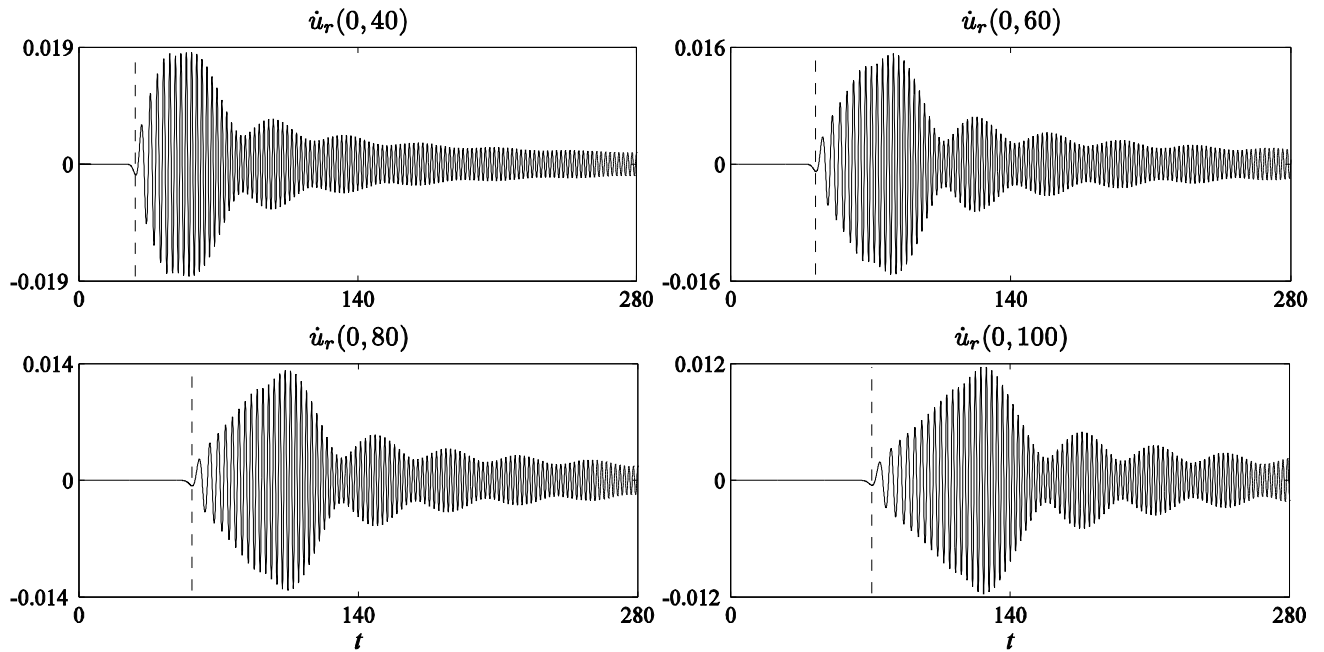


Рис. 2.2.38. Радиальная скорость перемещений ($k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$).

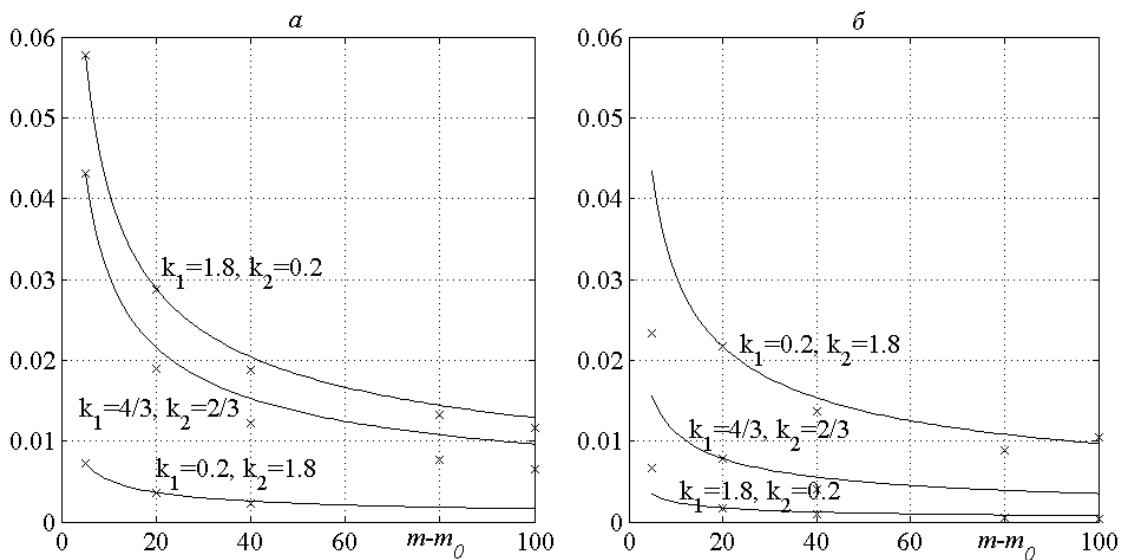


Рис. 2.2.39. Максимумы радиальных скоростей перемещений масс в зависимости от расстояния до центра расширения: a — на оси; $б$ — на диагонали.

2.2.3.4. Воздействие типа «центр вращения»

Результаты данного пункта опубликованы в [31].

Пусть имеется бесконечная решетка. В четырех точках с координатами (n_0, m_0) , $(n_0 + 1, m_0)$, $(n_0, m_0 + 1)$, $(n_0 + 1, m_0 + 1)$ приложены силы, как показано на рис. 2.2.40. Такое воздействие моделирует нагружение типа “центр вращения”. Пусть приложена импульсная нагрузка (2.1.5) с частотой ω_* . Как и выше, уравнения (2.2.63) решаются методом конечных разностей по явной схеме.

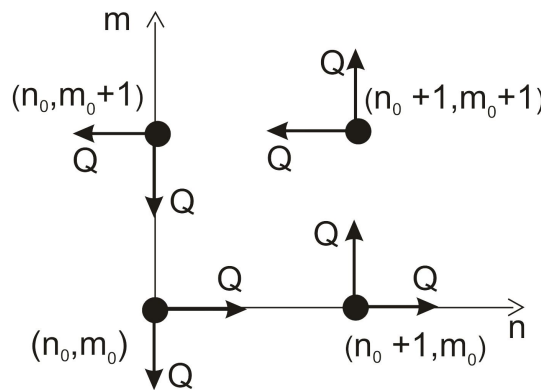


Рис. 2.2.40. Схема нагружения типа “центр вращения”.

На рис. 2.2.41 представлены результаты расчетов тангенциальной скорости перемещений во всех точках решетки в момент времени $T = 36$

$$\dot{u}_\theta(n, m) = \frac{\dot{v}_{n,m}(n - n_0 + a_n) - \dot{u}_{n,m}(m - m_0 + a_m)}{\sqrt{(n - n_0 + a_n)^2 + (m - m_0 + a_m)^2}},$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n > n_0 \\ 1, & \text{если } n \leq n_0 \end{cases}, \quad a_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m > m_0 \\ 1, & \text{если } m \leq m_0 \end{cases}.$$

Параметры задачи следующие: $\omega_* = 0.5$, $\tau = 0.07$, $n_0 = m_0 = 60$. Жесткость диагональных и осевых пружин варьировалась: $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$ — рис. 2.2.41а;

$k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$ — рис. 2.2.41б; $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$ — рис. 2.2.41в.

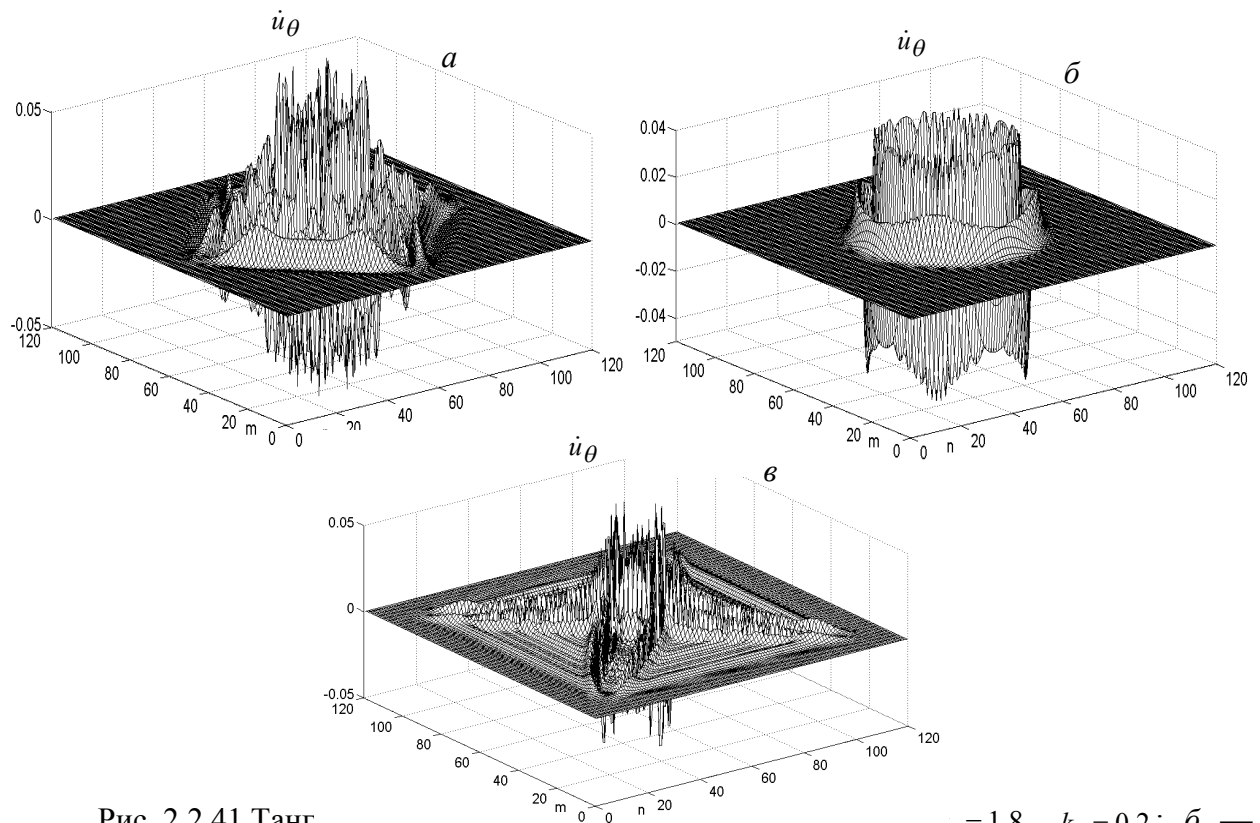


Рис. 2.2.41. Танг

 $k_1 = 1.8, k_2 = 0.2$; б —

 $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$; в — $k_1 = 0.2, k_2 = 1.8$.

На рис. 2.2.41 видно, что в случае нагружения типа «центр вращения», также как и в случае нагружения типа «центр расширения», скорость длинных волн больше в том направлении, в котором жесткость связей больше. При $k_1 = 2k_2$ имеем “изотропную” решетку: волны расходятся кругами (рис. 2.2.41б). Отмеченные особенности полностью подтверждаются формулами (2.2.70), (2.2.71).

На рис. 2.2.42–2.2.44 представлены осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений $\dot{u}_\theta(n, m)$ в точках на оси воздействия $n - n_0 - 1 = 0$, $m - m_0 - 1 = 20$ и в точках на диагонали $n - n_0 - 1 = 20$, $m - m_0 - 1 = 20$ и их спектральные плотности. Параметры задачи следующие: $\tau = 0.07$, $\omega_* = 0.5$,

$n_0 = m_0 = 430$; $T = 287$. Параметры жесткости пружин варьировались: рис. 2.2.42 — $k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$, рис. 2.2.43 — $k_1 = 2k_2 = \frac{4}{3}$, рис. 2.2.44 — $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$.

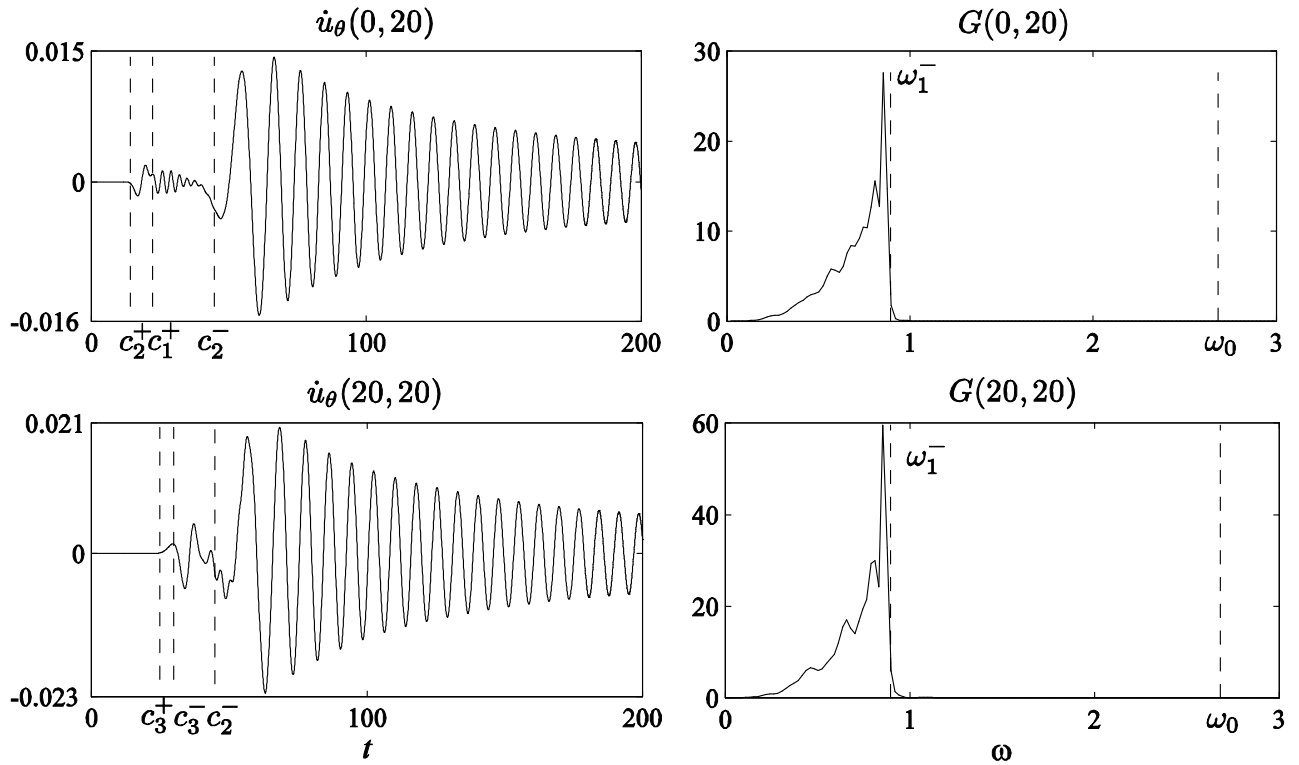


Рис. 2.2.42. Осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений и их спектральные плотности в точках на оси и на диагонали ($k_1 = 1.8$, $k_2 = 0.2$)

Вертикальные линии на осциллограммах тангенциальных скоростей перемещений соответствуют времени прихода в данную точку фронтов волн, распространяющихся с различными скоростями. Скорость движения фронта указана рядом с вертикальной линией. Если решетка «не изотропная», то в точки, находящиеся на осях координат ($n = n_0 + 1$), первыми приходят длинноволновые «продольные» возмущения со скоростью c_2^+ в моменты времени $t = \frac{m - m_0 - 1}{c_2^+}$, вторыми приходят коротковолновые «продольные» возмущения со скоростью c_1^+ в моменты времени $t = \frac{m - m_0 - 1}{c_1^+}$ (рис. 2.2.42, 2.2.44); в точки, находящиеся на диагоналях ($n - n_0 = m - m_0$), первыми приходят длинноволновые «продольные»

возмущения со скоростью c_3^+ в моменты времени $t = \frac{(m - m_0 - 1)\sqrt{2}}{c_3^+}$, вторыми приходят коротковолновые «сдвиговые» возмущения со скоростью c_3^- в моменты времени $t = \frac{(m - m_0 - 1)\sqrt{2}}{c_3^-}$ (рис. 2.2.42, 2.2.44). В случае «изотропной» решетки ($k_1 = 2k_2$) при действии нагрузки типа «центр вращения» «продольные» волны, распространяющиеся со скоростями c_1^+, c_2^+, c_3^+ , отсутствуют, присутствуют только низкочастотные маятниковые волны «сдвига», бегущие со скоростью $c_2^- = c_3^-$ (рис. 2.2.43). Эти же волны вносят максимальный вклад в амплитуду возмущений в случае «не изотропной» решетки. Причем, если $k_1 > 2k_2$, то основной вклад вносят возмущения, распространяющиеся со скоростью c_2^- вдоль оси воздействия (рис. 2.2.42), и наоборот, если $k_1 < 2k_2$, то волны, бегущие в диагональном направлении со скоростью c_3^- (рис. 2.2.44).

Анализ рис. 2.2.42–2.2.44 показывает, что время появления в конкретных точках длинноволновых возмущений, движущихся со скоростями c_2^+, c_3^+ , вычисляется с большой точностью с помощью формул (2.2.70), (2.2.71). На рис. 2.2.42, 2.2.44 видны фронты коротковолновых возмущений, распространяющихся со скоростью c_1^+ . Для «продольных» волн они всегда имеют меньшую скорость и отстают от длинноволновых возмущений: $c_1^+ < c_2^+$.

Расчеты, проведенные при $\omega_* = 5$, показывают, что для высокочастотного импульсного воздействия амплитуды тангенциальных скоростей перемещений на порядок меньше, чем при низкочастотном воздействии, т. е. блочная структура служит фильтром для высокочастотных возмущений.

На графиках спектральной плотности (рис. 2.2.42–2.2.44) вертикальные линии соответствуют резонансным частотам ω_0, ω_1^- (2.2.68). Для данного низкочастотного импульсного воздействия $\omega_* < \min(\omega_0, \omega_1^-)$ типа «центр вращения», как видно на рис. 2.2.42–2.2.44, в основном возбуждаются колебания с частотой $\omega < \max(\omega_0, \omega_1^-)$, которые соответствует волнам «сдвига». Расчеты

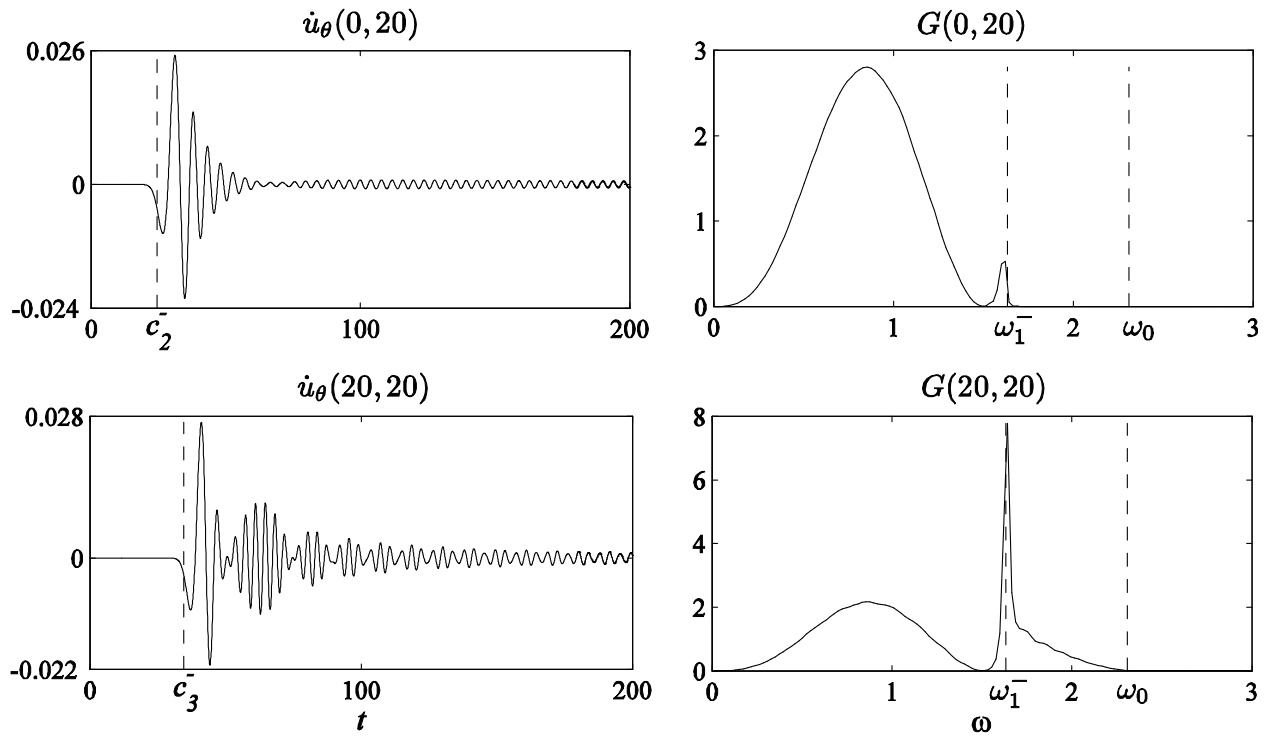


Рис. 2.2.43. Осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений и их спектральные плотности в точках на оси и на диагонали ($k_1 = 2k_2 = 4/3$)

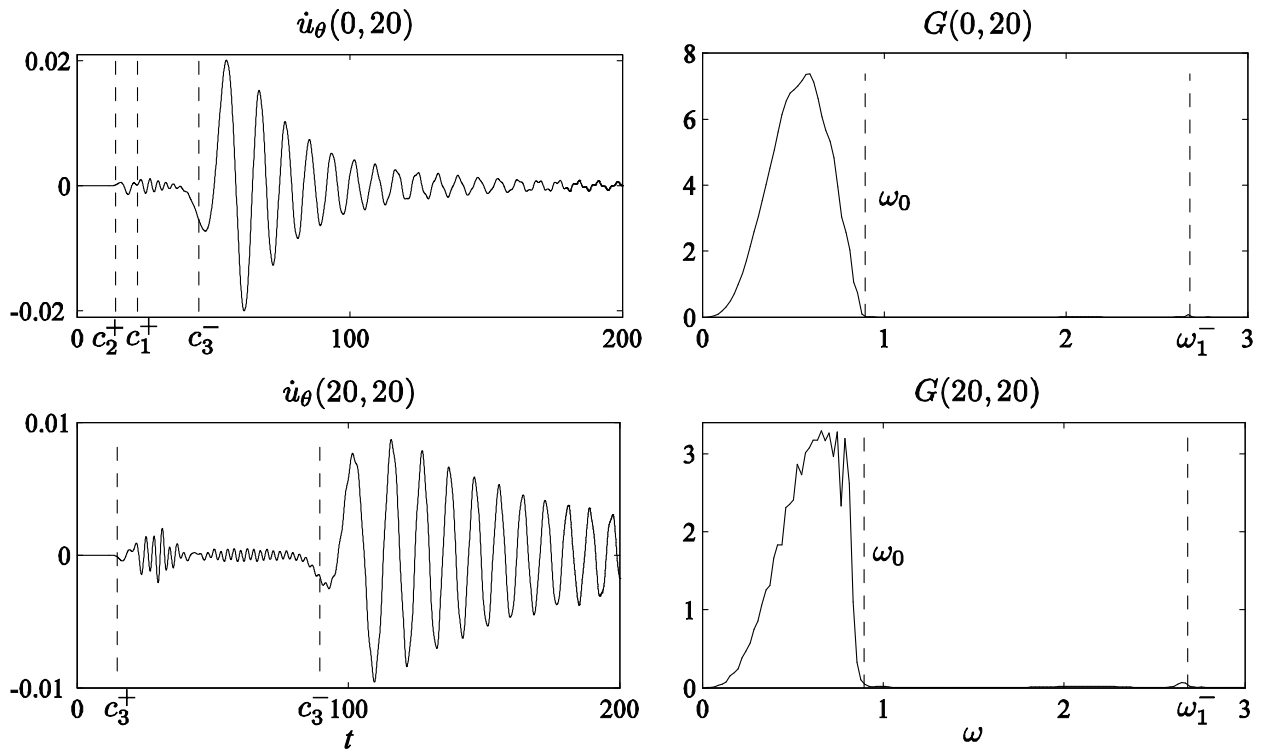


Рис. 2.2.44. Осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений и их спектральные плотности в точках на оси и на диагонали ($k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.8$)

показали, что при высокочастотном импульсном воздействии ($\omega_* = 5$) спектр скоростей тангенциальных перемещений локализуется в районе частоты ω_1^- .

Проведем сравнение численных расчетов, проведенных по модели блочной среды (2.2.63) и по уравнениям теории упругости, полученным усреднением механических свойств блочной среды. При $l \rightarrow 0$ и $k_1 = 2k_2 = \frac{3}{4}$ уравнения (2.2.63) описывают плоское напряженное состояние изотропной упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = \frac{1}{3}$, которое в полярных координатах задается уравнением

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \quad c_s^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}, \quad (2.2.73)$$

где c_s — скорость сдвиговых волн.

На границе $r = r_0$ касательные напряжения зададим в виде импульсной нагрузки (2.1.5):

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_0} = H_0(t) H_0(\pi - \omega_* t) \sin(\omega_* t). \quad (2.2.74)$$

На рис. 2.2.45 представлены осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений, рассчитанные конечно-разностным методом по модели блочной среды (2.2.63) и по уравнениям теории упругости (2.2.73), (2.2.74) при различных значениях длительности импульса. Параметры разностного аналога уравнения (2.2.74): $E = 1$, $\rho = 1$, $r_0 = 1$, $\sigma = \frac{1}{3}$, $\tau = c_s h = 0.01$, где τ, h — шаги разностной сетки по времени и пространству, $r_* = 41$ — точка, в которой выводятся осциллограммы. Параметры для расчета блочной среды следующие: $\tau = 0.07$, $n_0 = m_0 = 150$, $k_1 = 2k_2 = \frac{3}{4}$. Осциллограммы выводились в точках на оси воздействия $n = n_0 + 1$, $m = m_0 + 41$ (пунктир) и в точках на диагонали $n = n_0 + 29$, $m = m_0 + 29$ (штрих-

пунктир). Вертикальная линия на всех графиках соответствует времени прихода сдвиговых волн от источника возмущений.

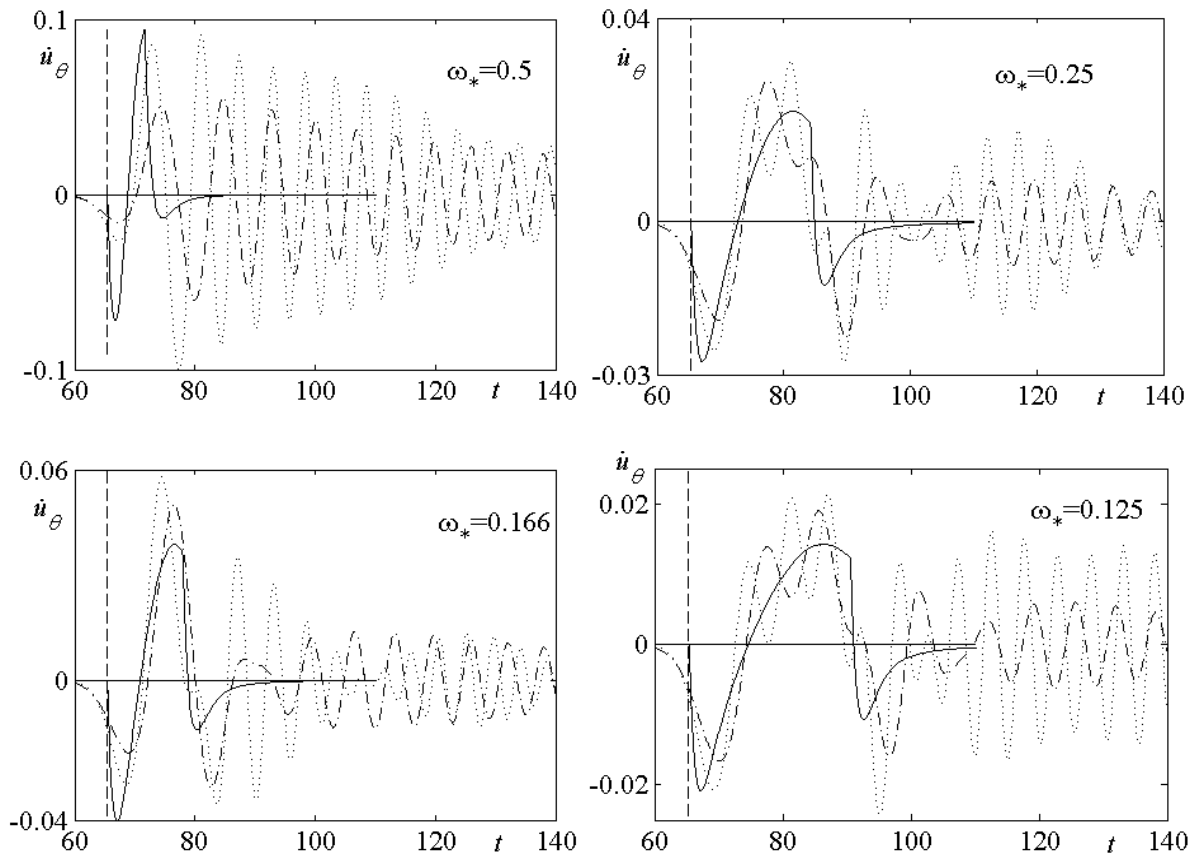


Рис. 2.2.45. Осциллограммы тангенциальных скоростей перемещений. Теория упругости – сплошные кривые, модель блочной среды в точках на диагонали – пунктир и штрих-пунктир – в точках на оси воздействия.

Анализ расчетов показывает, что в решетке при любой частоте воздействия формируются как низкочастотные возмущения, так и высокочастотные. При низкочастотном воздействии ($\omega_* \leq 0.25$) наблюдается качественное соответствие головной волны для однородной среды и для решетки. С ростом частоты воздействия ($\omega_* < \omega_1^-$) амплитуда возмущений в решетке сначала растет, а затем, при $\omega_* > \omega_1^-$ падает, т. е. решетка служит фильтром для высокочастотных возмущений.

Заключение к разделам 2.2.3.3, 2.2.3.4

Расчеты нестационарных волн в квадратной решетке, моделирующей плоское движение блочной среды, показали, что при импульсном нагружении:

- спектр возникающих возмущений определяется в основном резонансными частотами блочной среды (2.2.68), (2.2.72), причем при действии нагружения типа «центр расширения» («центр вращения») спектр возникающих возмущений определяется в основном частотами ω_1^+ , ω_2^+ (ω_0 , ω_1^-), которые соответствуют волнам «расширения» («сдвига»);
- скорость низкочастотных волн и высокочастотных волн в диагональном и осевом направлениях различна и определяется формулами (2.2.69)–(2.2.71);
- в квадратной решетке с осевыми и диагональными связями распространение возмущений происходит преимущественно в том направлении, в котором жесткость связей имеет наибольшее значение;
- в случае $k_1 = 2k_2$ скорость длинных волн в разных направлениях одинакова и решетка эквивалентна изотропной упругой среде;
- позади низкочастотных волн в осевом и диагональном направлениях формируется “хвост” коротковолновых возмущений близких по частоте к резонансным (2.2.68), (2.2.72), амплитуда которых существенно больше, чем амплитуда низкочастотных волн. Это так называемые “звездные волны”;
- при низкочастотном воздействии типа «центр расширения» («центр вращения») максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят длинноволновые маятниковые «продольные» («сдвиговые») волны, распространяющиеся в осевом направлении со скоростью c_2^+ (c_2^-), если $k_1 \geq 2k_2$, и волны, бегущие в диагональном направлении со скоростью c_3^+ (c_3^-), если $k_1 \leq 2k_2$.
- при высокочастотном воздействии максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят коротковолновые возмущения.
- в решетке при любой частоте воздействия формируются как низкочастотные возмущения, так и высокочастотные. При низкочастотном воздействии наблюдается качественное соответствие головной волны для

однородной среды и для решетки. С ростом частоты воздействия амплитуда возмущений в решетке сначала растет, а затем падает, т. е. решетка служит фильтром для высокочастотных возмущений.

2.2.3.5. Задача Лэмба для блочного полупространства.

Ступенчатое воздействие

Результаты данного пункта опубликованы в [22, 27, 204, 206].

Постановка задачи

Исследуется нестационарная плоская задача Лэмба о действии вертикальной сосредоточенной нагрузки на свободную поверхность блочного полупространства, как показано на рис. 2.2.46, где использованы обозначения: u — горизонтальные перемещения, v — вертикальные перемещения, n, m — номера масс в направлениях x, y , P_0 — сосредоточенная нагрузка.

Блочная среда моделируется однородной двумерной решеткой, состоящей из масс, соединенных пружинами в направлениях осей x, y и в диагональных направлениях (рис. 2.2.47).

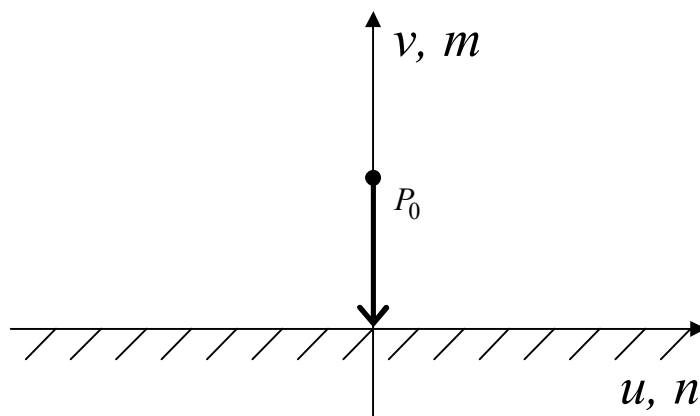


Рис. 2.2.46. К постановке задачи.

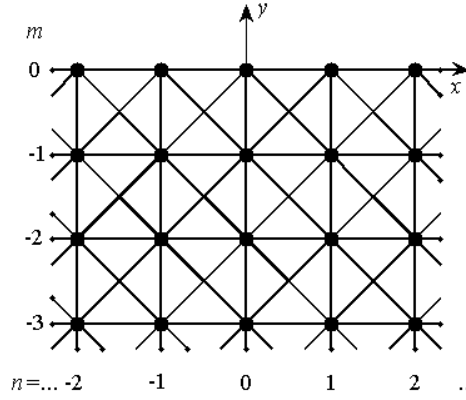


Рис. 2.2.47. Схема соединения масс пружинами в задаче Лэмба.

Пусть полупространству соответствуют номера $m < 0$, свободной границе — $m = 0$ (см. рис. 2.2.47). Движение массы с номерами n, m , находящейся ниже границы полуплоскости, описываются уравнениями (2.2.63). Уравнения движения блоков на границе имеют следующий вид:

$$\gamma M \ddot{u}_{n,0} = k_1(u_{n+1,0} - 2u_{n,0} + u_{n-1,0}) + k_2(u_{n-1,-1} + u_{n+1,-1} - 2u_{n,0})/2 + k_2(v_{n-1,-1} - v_{n+1,-1})/2, \quad (2.2.75)$$

$$\gamma M \ddot{v}_{n,0} = k_1(v_{n,-1} - v_{n,0}) + k_2(u_{n-1,-1} - u_{n+1,-1})/2 + k_2(v_{n-1,-1} - 2v_{n,0} + v_{n+1,-1})/2 + P_0 \delta_{n0} H(t),$$

где P_0 — амплитуда нагрузки, γ — отношение массы блоков на границе к массе блоков внутри полуплоскости ($\gamma > 0$). Начальные условия нулевые.

Ниже будем полагать $k_1 = 2k_2$. В этом случае скорости c_p и c_s продольных и сдвиговых длинноволновых возмущений не зависят от направления распространения (то есть решетка «изотропная») и могут быть найдены по формулам (2.2.70), (2.2.71):

$$c_p = l \sqrt{\frac{3k_1}{2M}}, \quad c_s = l \sqrt{\frac{k_1}{2M}}. \quad (2.2.76)$$

Заметим, что от каждого конкретного узла возмущения распространяются только в направлениях x , y и в диагональных направлениях. Но если мы рассматриваем решетку в целом, то возмущения распространяются во всех

направлениях от точки воздействия, т.е. нет выделенных направлений распространения волны.

Массу блоков и длину пружин примем за единицы: $M=1$, $l=1$. Будем полагать $k_1 = \frac{3}{4}$. Значение k_1 выбиралось так, чтобы скорость продольных и сдвиговых бесконечно длинных волн в решетке была равна скорости продольных и сдвиговых волн в изотропной упругой среде в случае плоского напряженного состояния с коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$: $c_p = l\sqrt{\frac{3k_1}{2M}} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}$, где E — модуль Юнга, ρ — плотность упругой среды. Скорость $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ принята за единицу.

Уравнение Рэлея для упругой среды имеет следующий вид [234]:

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)^2 - 4\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_p^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)} = 0. \quad (2.2.77)$$

где c_s — скорость волн сдвига в упругой среде. В случае плоского напряженного состояния имеем: $\frac{c_s^2}{c_p^2} = \frac{1-\sigma}{2}$. Полагая, как и раньше, $\sigma = \frac{1}{3}$, находим из (2.2.77) скорость волн Рэлея для изотропной упругой среды в случае плоского напряженного состояния:

$$c_R = \sqrt{\frac{E(3-\sqrt{3})}{4\rho}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2} \approx 0.563..., \quad (0 < c_R < c_s). \quad (2.2.78)$$

Аналитическое решение

Для того чтобы построить аналитическое решение задачи Лэмба для блочной среды, применим преобразование Лапласа по времени t с параметром p и дискретное преобразование Фурье по переменной n с параметром q .

Используя стандартный подход для получения решения задачи Лэмба для упругой среды, и опуская промежуточные выкладки, получим LF -изображение решения задачи Лэмба для блочной среды:

$$u_m^{LFd} = CA_1 e^{\alpha_1 m} + DA_2 e^{\alpha_2 m}, \quad v_m^{LFd} = CB_1 e^{\alpha_1 m} + DB_2 e^{\alpha_2 m},$$

$$(2.2.79)$$

где

$$C = -\frac{2P_0 a_{12}}{pk_1 \Delta}, \quad D = \frac{2P_0 a_{11}}{pk_1 \Delta}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$a_{11} = \cos\left(\frac{ql}{2}\right) \left[\tilde{M}(H(2\gamma - 1) + F) + 4A(H + F) \right], \quad a_{12} = \sin\left(\frac{ql}{2}\right) \left[G(\tilde{M}(2\gamma - 1) + 4) + (\tilde{M} + 4A)J \right],$$

$$a_{21} = i \sin\left(\frac{ql}{2}\right) \left[F\tilde{M}(2\gamma - 1) + \tilde{M}H + 4H \right], \quad a_{22} = i \cos\left(\frac{ql}{2}\right) \left[G\tilde{M}(2\gamma - 1) + J(\tilde{M} + 4A) \right],$$

$$A_1 = H \cos\left(\frac{ql}{2}\right), \quad B_1 = iF \sin\left(\frac{ql}{2}\right), \quad A_2 = J \sin\left(\frac{ql}{2}\right), \quad B_2 = iG \cos\left(\frac{ql}{2}\right),$$

$$e^{-\alpha_1} = \tilde{M} + 1 + 2A - FH, \quad e^{-\alpha_2} = \frac{\tilde{M} + 3 + 2A - GJ}{3 - 4A}, \quad \tilde{M} = -\frac{Mp^2}{k_1},$$

$$H = \sqrt{\tilde{M} + 2A}, \quad F = \sqrt{\tilde{M} + 2 + 2A}, \quad J = \sqrt{\tilde{M} + 6 - 2A}, \quad G = \sqrt{\tilde{M} + 6A}, \quad A = \sin^2\left(\frac{ql}{2}\right).$$

Дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ является уравнением Рэлея для блочной среды. Полагая $p = iq c_R$ и $q \rightarrow 0$ в дисперсионном уравнении $\Delta = 0$ и опуская слагаемые порядка выше чем q^4 , получим уравнение для определения скорости рэлеевских волн в блочной среде c_R :

$$2iq^4 l^4 \left[\sqrt{3}(1 - \tilde{c}^2)^2 - \sqrt{(1 - 2\tilde{c}^2)(3 - 2\tilde{c}^2)} \right] = 0,$$

где $\tilde{c}^2 = \frac{c_R^2 M}{k_1 l^2}$. Решение этого уравнения имеет то же самое значение (2.2.78), что

и для упругой среды в случае плоского напряженного состояния ($\sigma = \frac{1}{3}$), и не зависит от значения коэффициента γ , который определяет величину массы блоков на поверхности блочной среды:

$$c_R = l \sqrt{\frac{k_1}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0.563 \dots \quad (2.2.79)$$

Полагая $p = i\omega$ и $ql = \pi$ в дисперсионном уравнении $\Delta = 0$, получим уравнение для определения резонансной частоты коротковолновых возмущений в рэлеевской волне:

$$(2\gamma - 1) \frac{M\omega^2}{k_1} - \sqrt{\left(\frac{M\omega^2}{k_1} - 4\right) \left(\frac{M\omega^2}{k_1} - 2\right)} = 0.$$

Самый маленький корень из положительных корней этого уравнения задаётся формулой:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{3}}, & \gamma = 1, \\ \frac{3 - \sqrt{9 - 32\gamma(1 - \gamma)}}{4\gamma(1 - \gamma)}, & \gamma > 0, \gamma \neq 1. \end{cases} \quad (2.2.80)$$

Учитывая, что $k_1 = \frac{3}{4}$, $M = 1$, из формулы (2.2.80) заключаем, что максимум ω_1 равен $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.225 \dots$ и достигается при $\gamma = \frac{1}{2}$ и что при $\gamma = 1$ частота ω_1 имеет значение 1.

На рис. 2.2.48 представлены графики дисперсионных кривых в зависимости от волнового числа q для различных значений γ для первой моды колебаний, полученные численно из уравнения $\Delta = 0$. Анализ кривых на рис. 2.2.48 *а, б* показывает, что при $\gamma = 1$ бесконечно длинные волны распространяются без дисперсии, т.е. фазовая и групповая скорости равны между собой, при остальных значениях γ вблизи границы блочной среды имеется сильная дисперсия.

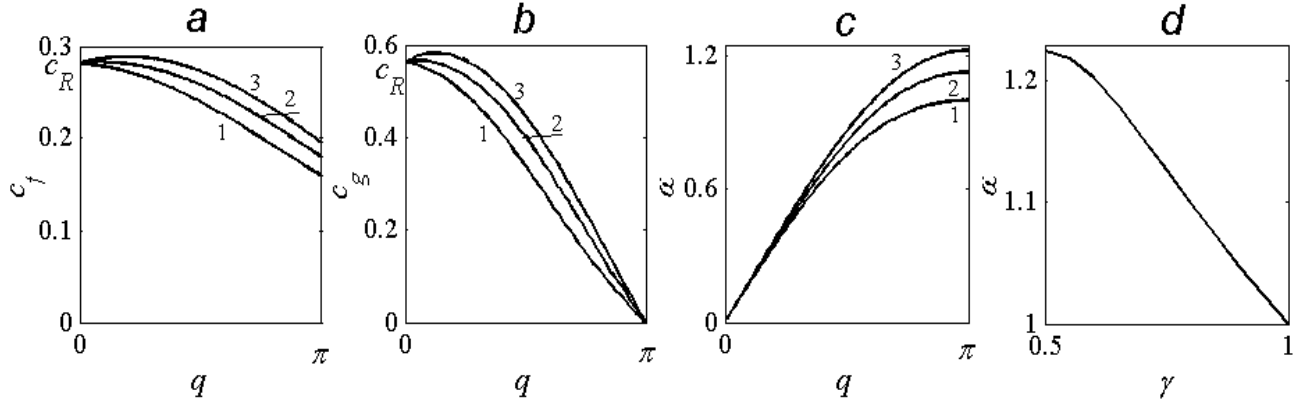


Рис. 2.2.48. (a),(b),(c) – зависимость фазовой скорости, групповой скорости и частоты от волнового числа q ; (d) – зависимость частоты коротких волн от параметра γ ; кривые 1 – $\gamma = 1$, кривые 2 – $\gamma = 0.75$, кривые 3 – $\gamma = 0.5$.

Из (2.2.79) получаем LF -изображение решения на границе блочной полуплоскости ($m = 0$) в случае $\gamma = 1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_0^{LFd} &= \frac{P_0 \sin(ql) [-(4 + \tilde{M})GH + F(\tilde{M} + 4A)J]}{p\Delta k_1}, \\ v_0^{LFd} &= \frac{2iP_0 [(\tilde{M} + 4A)\{-JAF + (H + F)G(1 - A)\} - (4 + \tilde{M})GAF]}{p\Delta k_1}. \end{aligned} \quad (2.2.81)$$

Заметим, что обратить решение (2.2.81) в явном виде не представляется возможным. Будем искать асимптотическое решение для возмущений, бегущих со скоростью волн Рэлея ($p \sim \frac{2ic_R}{l} \sin\left(\frac{ql}{2}\right)$), при больших временах с начала процесса ($t \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow 0$). Разлагая знаменатель формул (2.2.81) по степеням p и $\sin\left(\frac{ql}{2}\right)$, и, отбрасывая члены степени выше 2, получим асимптотику знаменателя в виде:

$$p\Delta k_1 \approx ipk_1 \left[\sqrt{12}(\tilde{M} + 4A)^2 - 16A\sqrt{\tilde{M} + 2A}\sqrt{\tilde{M} + 6A} \right].$$

Введем обозначение:

$$\Delta_1 \approx i \left[\sqrt{12}(\tilde{M} + 4A)^2 + 16A\sqrt{\tilde{M} + 2A}\sqrt{\tilde{M} + 6A} \right].$$

Умножим числитель и знаменатель каждой функции (2.2.81) на Δ_1 . Можно показать, что при $p \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение:

$$\Delta\Delta_1 \approx -\frac{256\tilde{M}A^2l^2}{c_R^2\sqrt{3}}\left(p^2 + 4\frac{c_R^2}{l^2}A\right). \quad (2.2.82)$$

Используя это выражение и разлагая числители выражений $\dot{u}_0^{LFd}$ и $\dot{v}_0^{LFd}$ по степеням p и $\sin\left(\frac{ql}{2}\right)$, и, отбрасывая члены степени выше 2, получим асимптотики изображений скоростей перемещений в окрестности волны Рэлея:

$$\dot{u}_0^{LFd} \approx \frac{ic_R^2P_0\sin(ql)}{2l^2k_1\left(p^2 + \frac{4c_R^2A}{l^2}\right)}, \quad \dot{v}_0^{LFd} \approx \frac{P_0\lambda\sin\left(\frac{ql}{2}\right)}{M\left(p^2 + \frac{4c_R^2A}{l^2}\right)}, \quad \lambda = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + 1} \approx 0.62\dots$$

В результате обращения преобразования Лапласа получаем следующее решение:

$$\dot{u}_0^{Fd}(t) \approx \frac{iP_0c_R}{2lk_1}\cos\left(\frac{ql}{2}\right)\sin\left[2\frac{c_Rt}{l}\sin\left(\frac{ql}{2}\right)\right], \quad \dot{v}_0^{Fd}(t) \approx \frac{P_0l\lambda}{2Mc_R}\sin\left[2\frac{c_Rt}{l}\sin\left(\frac{ql}{2}\right)\right].$$

Обращая дискретное преобразование Фурье, получим асимптотики скоростей перемещений на поверхности блочной полуплоскости в окрестности волны Рэлея [65]:

$$\dot{u}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0c_R^2}{\pi lk_1} \int_0^{\pi/2} \cos(z)\sin(2zn)\sin\left(2\frac{ct}{l}\sin z\right)dz \approx \frac{P_0n}{2k_1t}J_{2n}\left(2\frac{c_Rt}{l}\right), \quad (2.2.83)$$

$$\dot{v}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0l\lambda}{\pi Mc_R} \int_0^{\pi/2} \cos(2zn)\sin\left(2\frac{c_Rt}{l}\sin z\right)dz \approx \frac{P_0l\lambda}{\pi Mc_R}s_{0,2n}\left(2\frac{c_Rt}{l}\right). \quad (2.2.84)$$

Воспользуемся приближенными представлениями (2.2.7), (2.2.15) функций Бесселя через функцию Эйри Ai и функций Ломмеля через функцию Скорера Gi , справедливыми при $n \gg 1$:

$$\dot{u}_{n,0} \approx \frac{P_0 c_R}{4k_1} \frac{\text{Ai}(\kappa)}{(\alpha t)^{1/3}}, \quad (2.2.85)$$

$$\dot{v}_{n,0} \approx \frac{P_0 l^2 \lambda \text{Gi}(\kappa)}{4M c_R (\alpha t)^{1/3}}, \quad (2.2.86)$$

где

$$\kappa = \frac{nl - c_R t}{(\alpha t)^{1/3}}, \quad \alpha = \frac{l^2 c_R}{8}. \quad (2.2.87)$$

В (2.2.85), (2.2.86) и далее будем полагать, что $n \geq 0$. Решение при $n < 0$ определяется из условий симметрии: $u_{-n,m} = -u_{n,m}$, $v_{-n,m} = v_{n,m}$.

Из (2.2.85), (2.2.86) следует, что амплитуды скоростей горизонтальных и вертикальных перемещений в окрестности фронта рэлеевской волны $nl = c_R t$ с ростом времени (расстояния) падают одинаково, как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$). При этом ширина квазифронта, характеризуемая величиной κ , расширяется одинаково как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$).

Используя (2.2.83), находим асимптотику горизонтального перемещения:

$$\begin{aligned} u_{n,0} &\approx \frac{P_0}{2\pi k_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(z) \sin(2zn)}{\sin z} \left[1 - \cos\left(2 \frac{c_R t}{l} \sin z\right) \right] dz \approx \\ &\approx \frac{P_0}{2\pi k_1} \int_0^\infty \frac{\sin(2zn)}{z} \left\{ 1 - \cos\left[2 \frac{c_R t}{l} z \left(1 - \frac{z^2}{6}\right)\right] \right\} dz \approx \frac{P_0}{4k_1} \left[\frac{1}{3} - \int_0^\kappa \text{Ai}(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

С помощью метода Слепяна [175] совместного обращения интегральных преобразований мы получаем следующие асимптотики для $u_{n,0}$, $\dot{u}_{n,0}$:

$$u_{n,0} = \frac{P_0}{4k_1} \left[\frac{1}{3} - \int_0^\kappa \text{Ai}(y) dy \right], \quad (2.2.89)$$

$$\dot{u}_{n,0} = \frac{P_0 c_R}{4k_1} \frac{\text{Ai}(\kappa)}{(\alpha t)^{1/3}}. \quad (2.2.90)$$

Сравнивая (2.2.88) и (2.2.89) видим, что асимптотики горизонтальных перемещений, полученные двумя различными способами, совпадают. Асимптотика горизонтальной скорости перемещения (2.2.90), полученная методом Слепяна, совпадает с решением (2.2.85), полученным выше, только в окрестности квазифронта $nl = c_R t$; за фронтом волны Рэлея решение (2.2.90) затухает медленнее, чем решение (2.2.85).

Дифференцируя формулы (2.2.84), (2.2.86) по времени и используя формулы асимптотического представления производных функций Бесселя и Ломмеля (2.2.19), (2.2.20), получим следующие два асимптотические решения для ускорений перемещений при $t \rightarrow \infty$:

$$\ddot{u}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0 n c_R}{k_1 t l} J'_{2n} \left(2 \frac{c_R t}{l} \right), \quad (2.2.91)$$

$$\ddot{v}_{n,0}(t) \approx \frac{2 P_0 \lambda}{\pi M} s'_{0,2n} \left(2 \frac{c_R t}{l} \right), \quad (2.2.92)$$

$$\ddot{u}_{n,0}(t) \approx -\frac{P_0}{k_1} \left(\frac{c_R t}{l} \right)^{1/3} \frac{n \text{Ai}'(\kappa)}{t^2}, \quad (2.2.93)$$

$$\ddot{v}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0 l^2 \lambda}{4 M} \frac{\text{Gi}'(\kappa)}{(\alpha t)^{2/3}}. \quad (2.2.94)$$

Как видно из (2.2.93), (2.2.94), ускорения горизонтальных $\ddot{u}$ и вертикальных $\ddot{v}$ перемещений в окрестности фронта рэлеевской волны с ростом времени (или расстояния) падают со временем как $t^{-2/3}$ (или $n^{-2/3}$). Позади фронта рэлеевской волны $\ddot{u}$ затухает быстрее ($\approx t^{-5/6}$), чем $\ddot{v}$ ($\approx t^{-2/3}$).

Сравнение численных и аналитических решений

Для того чтобы определить пределы применимости полученных аналитических решений, уравнения (2.2.63), (2.2.75) решались методом конечных разностей по явной схеме. Для вторых производных по времени использовалась

центрально-разностная аппроксимация второго порядка точности. Условие устойчивости разностной схемы зависит от коэффициента γ :

$$\tau \leq l \sqrt{\frac{M}{k_1}} \begin{cases} \sqrt{\frac{8\gamma}{9}}, & \frac{1}{2} < \gamma \leq \frac{3}{4}, \\ \sqrt{\frac{2}{3}}, & \frac{3}{4} \leq \gamma \leq 1. \end{cases}$$

Конечно-разностные расчеты подтвердили справедливость этого условия устойчивости.

Ниже приведены результаты расчетов плоской задачи Лэмба для блочной среды при действии ступенчатой вертикальной нагрузки на границе полуплоскости в точке с координатами $n = 0, m = 0$.

Поскольку частота колебаний коротковолновых возмущений при $\gamma = 1$ равна $\omega_1 = 1$, то длина полуволны по времени равна $t_0 = \frac{\pi}{\omega_1} = \pi$. На одной полуволне должно быть не менее 8–10 шагов по времени, для того, чтобы в численном решении с приемлемой точностью описывались коротковолновые возмущения. Поэтому положим $\tau = \frac{t_0}{10} \approx 0.314$. Все представленные ниже численные расчеты проведены при $\tau = 0.314$, $P_0 = 1$.

На рис. 2.2.49, 2.2.51 представлены распределения перемещений и скоростей перемещений вдоль оси n в момент времени t . На этих графиках вертикальные линии соответствуют координатам квазифронтов волн, движущимся со скоростями продольных, сдвиговых и рэлеевских волн (2.2.76), (2.2.78): $n_p = tc_p$, $n_s = tc_s$, $n_R = tc_R$. На рис. 2.2.50, 2.2.52, 2.2.54 – 2.2.57 приведены осциллограммы возмущений для различных значений n . Вертикальные линии на этих рисунках соответствуют моментам времени прихода квазифронтов волн (2.2.76), (2.2.78):

$$t_p = \frac{n}{c_p}, \quad t_s = \frac{n}{c_s}, \quad t_R = \frac{n}{c_R}.$$

На рис. 2.2.49 представлены зависимости перемещений u , v от переменной n на границе полуплоскости ($m = 0$) в момент времени $t = 280$ ($\gamma = 1$).

Как упоминалось выше, в [154] приведено аналитическое решение статической задачи Лэмба для плоского напряженного состояния однородной упругой среды. В обозначениях нашей работы решение [154] на границе $m = 0$ имеет вид:

$$u_{n,0} = \frac{P_0}{E} \frac{(1-\sigma)}{2}, \quad v_{n,0} = \frac{2P_0}{\pi E} \left(\ln \frac{nl}{h} + \frac{1+\sigma}{2} \right), \quad (2.2.95)$$

где h — константа. Поскольку в случае предельного перехода при $l \rightarrow 0$ уравнениям (2.2.63), (2.2.75) соответствуют уравнения, описывающие плоское напряженное состояние изотропной упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = \frac{1}{3}$, то положим в (2.2.95) $\sigma = \frac{1}{3}$.

Штриховые кривые на рис. 2.2.49 соответствуют решению (2.2.95). В расчетах полагалось $h = c_p t$, т.е. h — расстояние, на которое распространяются за время t возмущения, бегущие с максимальной скоростью в среде.

Как видно на рис. 2.2.49а, в нестационарной задаче горизонтальное перемещение позади фронта рэлеевской волны осциллирует относительно статического решения задачи Лэмба (2.2.95). Статическое значение равно $\frac{P_0(1-\sigma)}{2E}$ и совпадает с величиной $\frac{P_0}{4k_1}$, которая появилась в (2.2.88), как множитель. На рис. 2.2.49а видно, что аналитическое решение (2.2.88) и качественно и количественно совпадает с результатами конечно-разностного решения для горизонтальных перемещений. Для вертикального перемещения (рис. 2.2.49б) наблюдается качественное соответствие решений нестационарной и статической задачи (2.2.95) позади фронта волны Рэлея.

На рис. 2.2.50 представлены осциллограммы перемещений на границе блочной среды в точке $n = 80$ ($\gamma = 1$). На рис. 2.2.50а видно качественное соответствие численного и аналитического (2.2.88) решений для горизонтального перемещения. Вертикальное перемещение растет со временем, но не монотонно (рис. 2.2.50б).

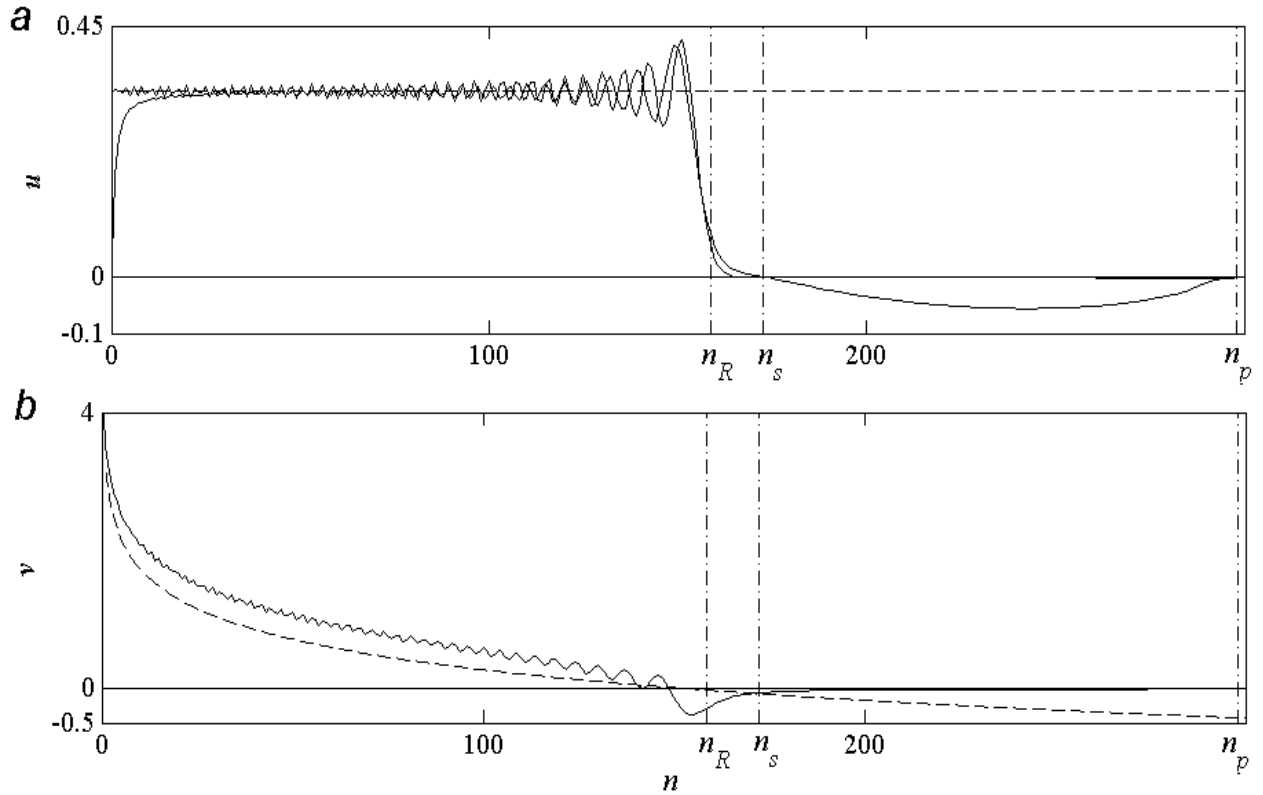


Рис. 2.2.49. Зависимость перемещений на границе блочной среды от координаты n ($t = 280$, $\gamma = 1$). Сплошные жирные кривые — результаты численных расчетов. Штриховые кривые — аналитическое решение (2.2.95). Сплошная тонкая кривая — асимптотическое решение (2.2.88). (а) Горизонтальное перемещение u . (б) Вертикальное перемещение v .

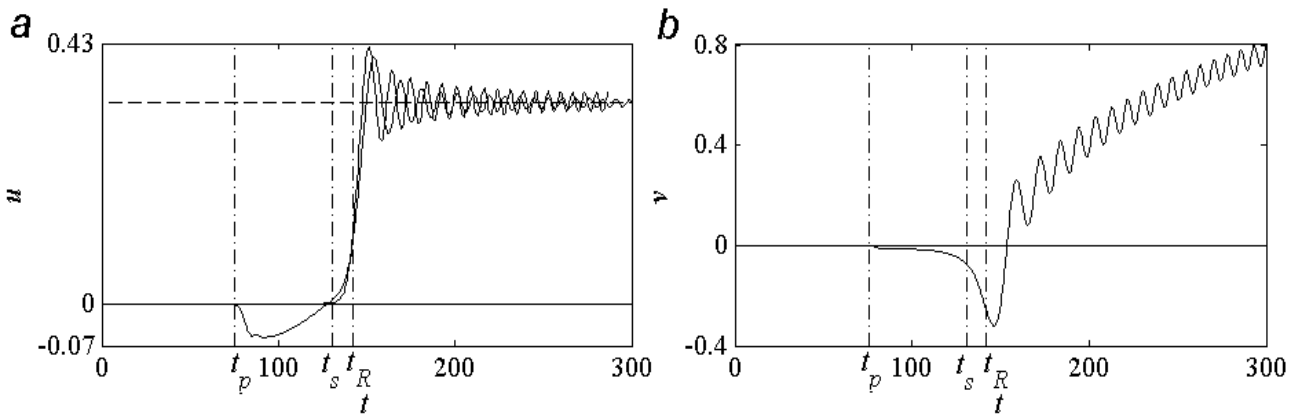


Рис. 2.2.50. Осциллограммы перемещений в точке $n = 80, m = 0$ ($\gamma = 1$). Сплошные толстые кривые — конечно-разностное решение. Сплошная тонкая кривая — асимптотическое решение (2.2.88). Штриховая линия — статическое решение (2.2.95). (а) Горизонтальное перемещение u . (б) Вертикальное перемещение v .

На рис. 2.2.51 представлены зависимости скоростей перемещений от переменной n в момент времени $t = 280$ на границе полуплоскости ($m = 0$) на интервале $c_s t \leq n \leq c_p t$ для двух значений γ . На рис. 2.2.51а, 2.2.51б мы видим, что в районе фронта сдвиговой волны амплитуды колебаний $\dot{u}$, $\dot{v}$ при $\gamma = 1$ существенно ниже, чем при $\gamma = 0.5$. Это подтверждает ранее сделанный вывод о сильной дисперсии при $\gamma < 1$.

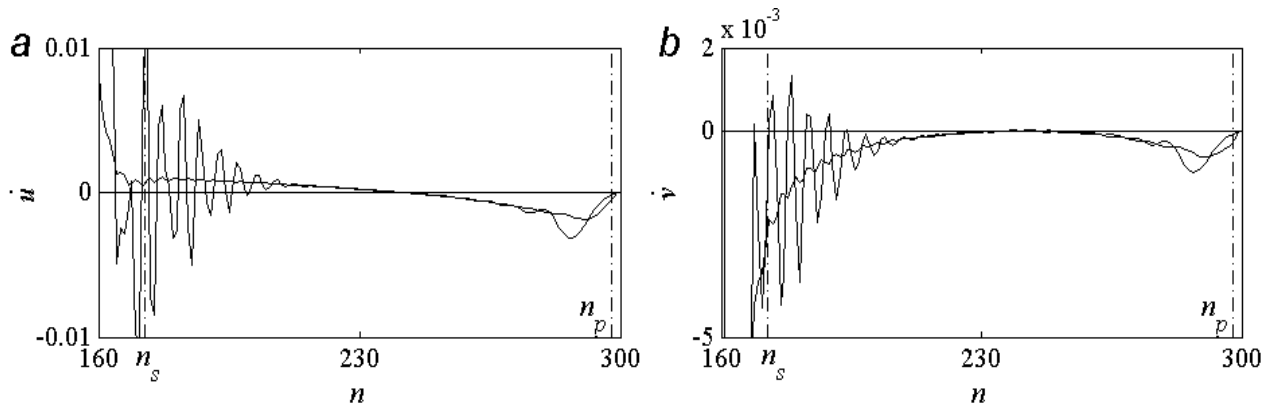


Рис. 2.2.51. Зависимость скоростей перемещений от координаты n ($m = 0$, $t = 280$).

(а) Горизонтальная скорость перемещений $\dot{u}$. (б) Вертикальная скорость перемещений $\dot{v}$. Толстые кривые — $\gamma = 1$, тонкие кривые — $\gamma = 0.5$.

На рис. 2.2.52 приведены осциллограммы скоростей перемещений в точке с координатами $n = 80, m = 0$ ($\gamma = 1$). На рис. 2.2.52б представлены результаты тех же расчетов для $\dot{v}$, что и на рис. 2.2.52а, только в увеличенном масштабе по вертикальной оси, и на меньшем интервале по времени ($t_p \leq t \leq t_s$). Аналогично, на рис. 2.2.52д представлены в увеличенном масштабе результаты расчетов $\dot{v}$, представленные на рис. 2.2.52с. Кроме того, на рис. 2.2.52 штрих-пунктирной линией изображено аналитическое решение нестационарной задачи Лэмба [140, 175] для упругой среды. В наших обозначениях это решение имеет вид

$$\left(x = \frac{nl}{c_p t}, \quad \beta = \frac{c_p^2}{c_s^2}\right):$$

$$R(x) = (2 - x^2 \beta)^2 - 4\sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 \beta)},$$

$$R_1(x) = (2 - x^2 \beta)^2 + 4\sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 \beta)},$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{n,0}(t) &= \begin{cases} \frac{2P_0x^2\beta(x^2\beta-2)\sqrt{(1-x^2)(x^2\beta-1)}}{\pi\rho c_s^2 t R(x)R_1(x)}, & c_s t \leq nl \leq c_p t, \\ \frac{P_0 t \beta(x^2\beta-2)\delta(x-x_R)}{2\rho c_s^2 x^4 R'(x)}, & nl < c_s t, \end{cases} \\
\dot{v}_{n,0}(t) &= \begin{cases} -\frac{P_0x^2\beta(2-x^2\beta)^2\sqrt{1-x^2}}{\pi\rho c_s^2 t R(x)R_1(x)}, & c_s t \leq nl \leq c_p t, \\ -\frac{P_0x^2\beta\sqrt{1-x^2}}{\pi\rho c_s^2 t R(x)}, & nl < c_s t. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2.96}$$

Здесь δ есть дельта функция Дирака.

Как видно на рис. 2.2.52, скорости перемещений для блочной среды осциллируют относительно решения для упругой среды (2.2.96). На интервале $t_p \leq t \leq t_s$ наблюдается количественное соответствие численных решений для блочной среды и аналитических решений для упругой среды (2.2.96). Сравнивая асимптотические и численные решения для блочной среды, показанные на рис. 2.2.52(а), 2.2.52(с), мы видим, что асимптотические решения (2.2.83), (2.2.84), (2.2.85), (2.2.90) качественно верно описывают конечно-разностные решения в окрестности фронта волны Рэлея и позади её фронта. Количественно амплитуды осцилляций численных и аналитических решений для $\dot{u}$, $\dot{v}$ отличаются на 15-20%, частота осцилляций отличается на 18-20%. Аналитические решения (2.2.83) и (2.2.85) для $\dot{u}$ совпадают между собой в окрестности квазифронта рэлеевской волны (рис. 2.2.52а). Аналогично совпадают аналитические решения (2.2.84) и (2.2.90) для $\dot{v}$ (рис. 2.2.52с). Для каждой пары решений различие проявляется на достаточно большом расстоянии от фронта рэлеевской волны, и различие это только в частоте. Амплитуды осцилляций даже на больших расстояниях от фронта волны одинаковы. Сравнение аналитических решений (2.2.85) и (2.2.90), полученных разными методами, показывает, что они совпадают в окрестности квазифронта $nl = c_R t$. Позади квазифронта амплитуда этих решений значительно различается, причем решение (2.2.85) точнее описывает результаты численного счета, чем решение (2.2.90).

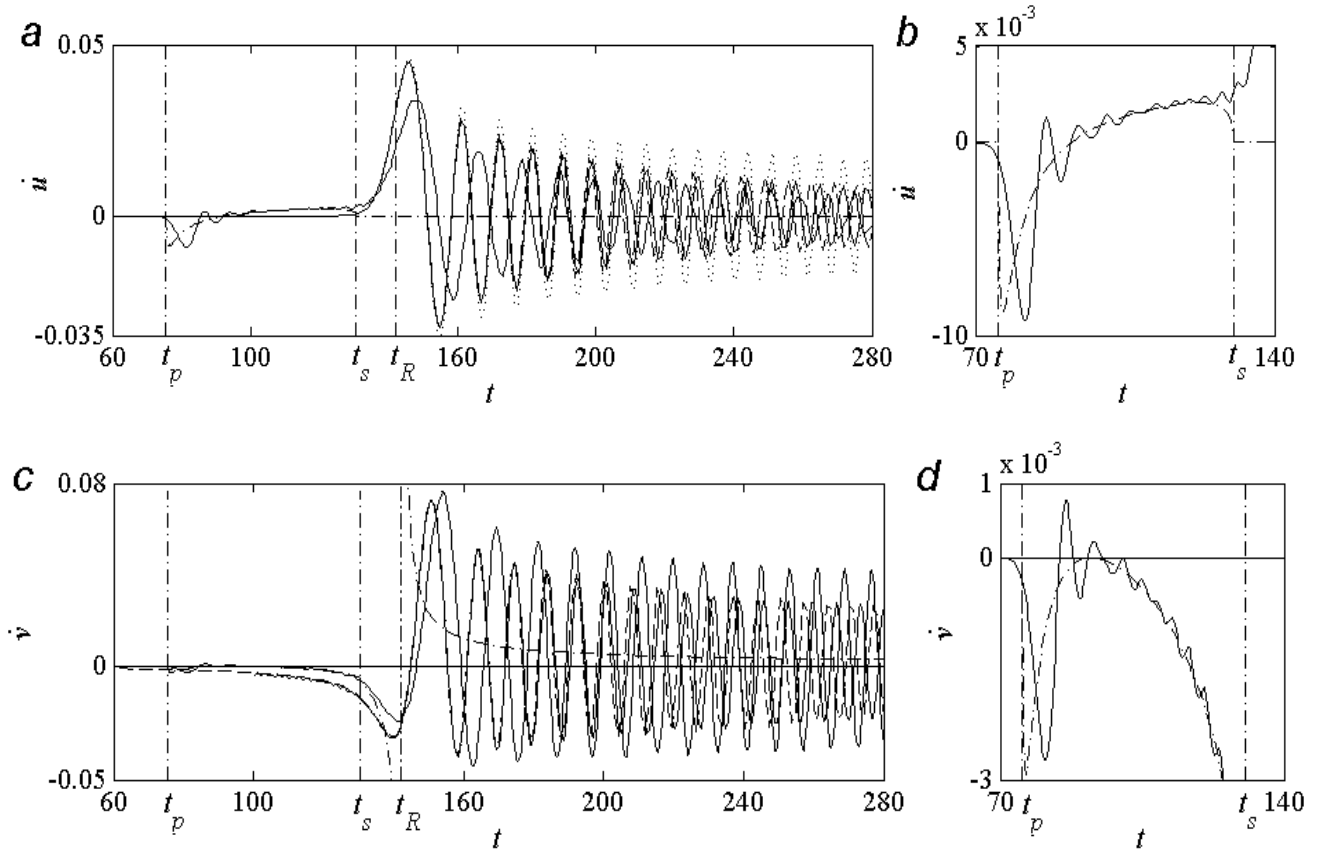


Рис. 2.2.52. Осциллограммы скоростей перемещений на поверхности блочной среды в точке $n = 80$ ($\gamma = 1$). (а), (б) Горизонтальная скорость перемещений $\dot{u}$. (с), (д) Вертикальная скорость перемещений $\dot{v}$. Сплошные толстые линии — численное решение, сплошные тонкие кривые — аналитические решения (2.2.85), (2.2.86), штриховые кривые — аналитические решения (2.2.83), (2.2.84). Штрих-пунктирные кривые — аналитическое решение (2.2.96). Пунктирные линии — решение (2.2.90).

Для анализа спектральных характеристик колебаний блочной среды проведены расчеты спектральной плотности скоростей колебаний масс с помощью быстрого преобразования Фурье ($T = 640$):

$$G_u(\omega) = \left| \int_0^T \dot{u}_{n,m}(t) e^{-i\omega t} dt \right|, \quad G_v(\omega) = \left| \int_0^T \dot{v}_{n,m}(t) e^{-i\omega t} dt \right|.$$

На рис. 2.2.53 показаны графики функций G_u и G_v , соответствующие осциллограммам скоростей, приведенным на рис. 2.2.52. На рис. 2.2.53 вертикальные линии соответствуют частоте коротковолновых возмущений рэлеевского уравнения для блочной среды: $\omega_1 = 1$ (2.2.80). На рис. 2.2.53 видно,

что спектры колебаний, возникающих в блочной среде при поверхностном нагружении, ограничены резонансной частотой поверхностных волн: $\omega \leq \omega_1$.

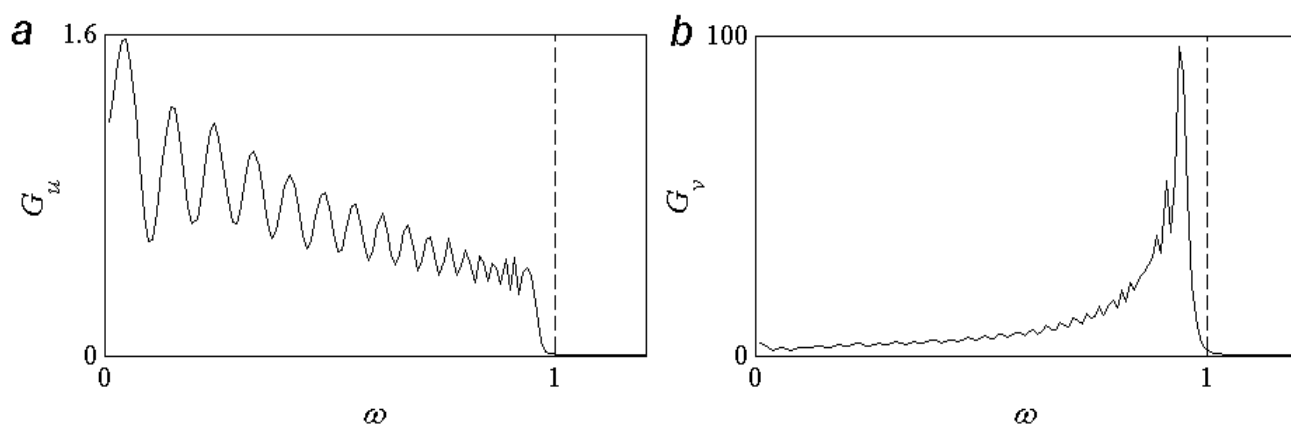


Рис. 2.2.53 Спектральная плотность скоростей перемещений $\dot{u}$, $\dot{v}$

На рис. 2.2.54 представлены осциллограммы ускорений $\ddot{u}$ и $\ddot{v}$ на поверхности блочной среды в точке $n = 80$ ($\gamma = 1$). На рис. 2.2.54 видно, что частота осцилляций численных и асимптотических решений для $\ddot{u}$ и $\ddot{v}$ отличается на 18-20%, амплитуда осцилляций для $\ddot{u}$ отличается на 25-35%, для $\ddot{v}$ — на 5-10%. Аналитические решения (2.2.91) и (2.2.93) для $\ddot{u}$ совпадают между собой в окрестности квазифронта рэлеевской волны. Аналогично совпадают аналитические решения (2.2.92) и (2.2.94) для $\ddot{v}$. Для каждой пары решений различие проявляется на достаточно большом расстоянии от фронта рэлеевской волны, и различие это только в частоте. Амплитуды осцилляций даже на больших расстояниях от фронта волны одинаковы.

Вернемся к аналитическим решениям, полученным ранее. Как было отмечено выше, асимптотические решения для скоростей и ускорений отличаются значительно от результатов численных расчетов, как по амплитуде, так и по частоте. Попробуем улучшить асимптотические решения.

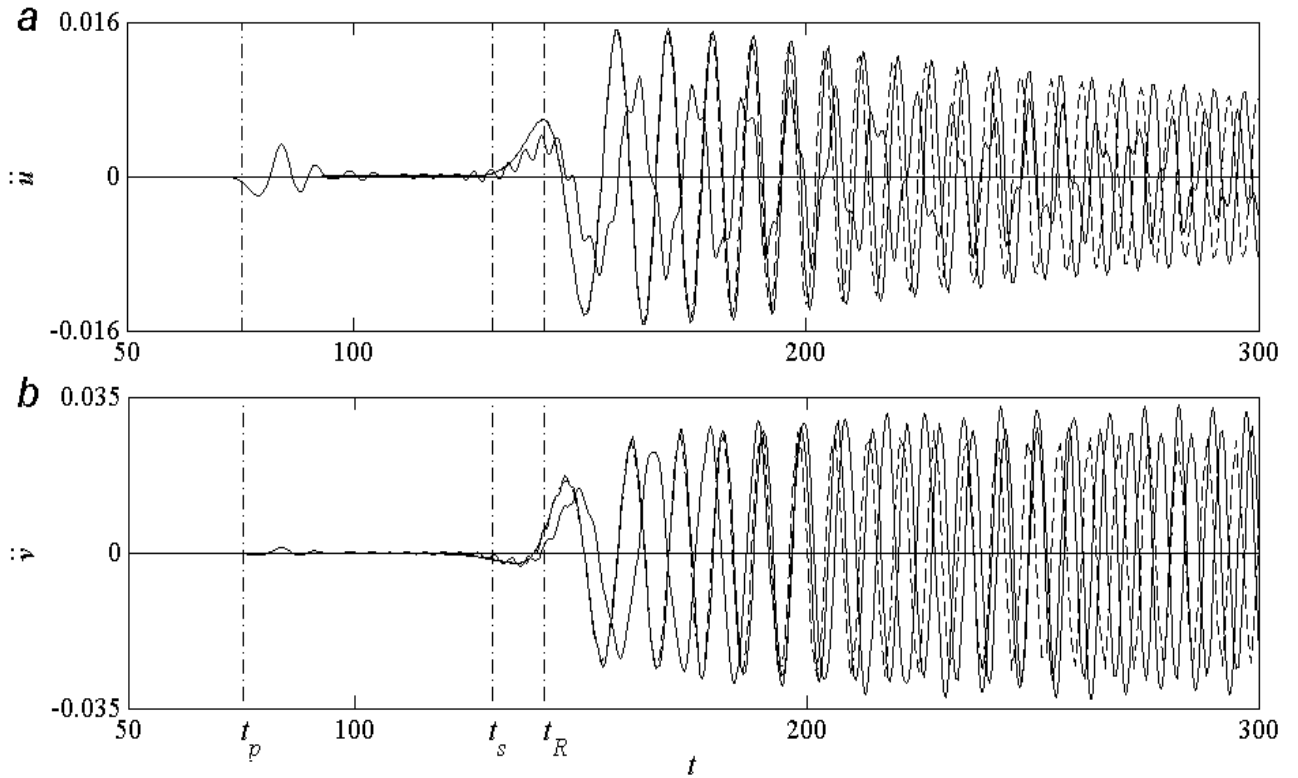


Рис. 2.2.54 Осциллограммы ускорений на поверхности блочной среды в точке $n = 80$ ($\gamma = 1$): (а) горизонтальное ускорение, (б) вертикальное ускорение. Сплошные толстые кривые – конечно-разностное решение, сплошные тонкие кривые – аналитические решения (2.2.93), (2.2.94), штриховые кривые – аналитические решения (2.2.91), (2.2.92).

Асимптотический анализ возмущений проводился при $p \rightarrow 0$ и $|q| \ll 1$. Тем не менее, вклад коротковолновых возмущений тоже учитывался, поскольку интегрирование в формулах (2.2.83), (2.2.84) проводилось на интервале $[0, \pi]$. В окрестности точки $ql = \pi$ асимптотика (2.2.82) для выражения $\Delta\Delta_1$, использованная при выводе решений (2.2.83), (2.2.84), (2.2.85) – (2.2.90), (2.2.91) – (2.2.94), определяет частоту осцилляций $\omega = \frac{c_R}{l}$ и эта частота не совпадает со значением $\omega(\pi) = \omega_1$, которое было вычислено в формуле (2.2.80). В формулах (2.2.85), (2.2.90), частота осцилляций за фронтом волны зависит от коэффициента $\alpha = \frac{l^2 c_R}{8}$, входящего в знаменатель выражения κ (2.2.87). Для того, чтобы частота

коротковолновых возмущений в аналитическом решении стала равной ω_1 , мы заменим κ на $\tilde{\kappa} = \frac{2(nl - c_R t)}{(l^3 \omega_1 t)^{1/3}}$ в (2.2.88). В результате получим:

$$\tilde{u}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0}{4k_1} \left[\frac{1}{3} - \int_0^{\tilde{\kappa}} \text{Ai}(y) dy \right]. \quad (2.2.97)$$

Дифференцируя (2.2.97) по времени, получим формулу для определения:

$$\dot{\tilde{u}}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0}{2k_1 l} \frac{c_R \text{Ai}(\tilde{\kappa})}{(\omega_1 t)^{1/3}}. \quad (2.2.98)$$

Амплитуда осцилляций в (2.2.98) отличается от амплитуды осцилляций в (2.2.84) на множитель $(c_R / l \omega_1)^{1/3}$. Введем этот множитель в (2.2.84):

$$\dot{\tilde{u}}_{n,0}(t) \approx \frac{n P_0}{2k_1 t} \frac{\text{Ai}(\tilde{\kappa})}{(\omega_1 t)^{1/3}}. \quad (2.2.99)$$

Продифференцируем (2.2.99) по времени и получим:

$$\ddot{\tilde{u}}_{n,0}(t) \approx -\frac{n P_0 c_R}{k_1 l t} \frac{\text{Ai}'(\tilde{\kappa})}{(\omega_1 t)^{2/3}}. \quad (2.2.100)$$

Амплитуда осцилляций в решении (2.2.100) отличается от амплитуды осцилляций в (2.2.93) на множитель $\left(\frac{c_R}{l \omega_1}\right)^{2/3}$. Подкорректируем аналогично решение для вертикального перемещения (т.е. заменим κ на $\tilde{\kappa}$, но не будем изменять амплитуду):

$$\dot{\tilde{v}}_{n,0}(t) = -\frac{P_0 l^2 \lambda}{4 M c_R} \frac{\text{Gi}(\tilde{\kappa})}{(\alpha t)^{1/3}}, \quad (2.2.101)$$

$$\ddot{\tilde{v}}_{n,0}(t) = \frac{P_0 l^2 \lambda}{4 M} \frac{\text{Gi}'(\tilde{\kappa})}{(\alpha t)^{2/3}}. \quad (2.2.102)$$

Сравним новые решения (2.2.97), (2.2.99) – (2.2.102) с результатами численных расчетов. На рис. 2.2.55 – 2.2.57 представлены результаты численных расчетов горизонтальных перемещений u , скоростей перемещений $\dot{u}$, $\dot{v}$ и ускорений $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ и аналитические решения (2.2.97), (2.2.99) – (2.2.102) в различных точках на поверхности блочной среды $n = 10, 30, 60$ ($\gamma = 1$).

На рис. 2.2.55 видно, что при малых значениях n ($n < 40$) осцилляции в численном решении для u позади фронта рэлеевской волны происходят относительно значения, меньшего, чем значение $P_0/(4k_1)$, найденное в аналитическом решении (2.2.97). И только, начиная $n \approx 40$, горизонтальное перемещение u , найденное численно, осциллирует относительно значения $P_0/(4k_1)$. Сравнивая рис. 2.2.49, 2.2.50, 2.2.55, мы видим также, что частота осцилляций численного решения для u лучше соответствует частоте аналитического решения (2.2.97), чем частоте аналитического решения (2.2.88).

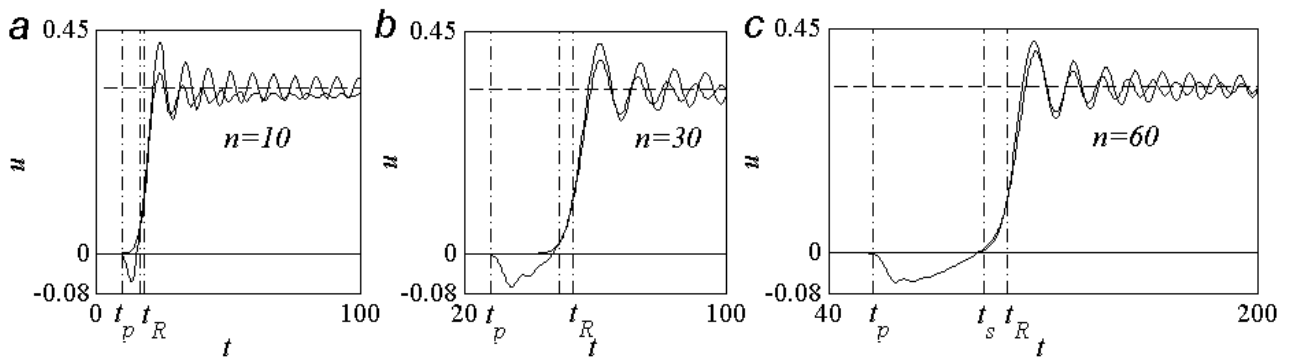


Рис. 2.2.55 Осциллограммы горизонтальных перемещений на поверхности блочной среды в точках $n = 10, 30, 60$ ($\gamma = 1$). Сплошные толстые кривые – численное решение, сплошные тонкие кривые – аналитическое решение (2.2.97), штриховые линии – значение $\frac{P_0}{4k_1}$.

На рис. 2.2.56 видно, что соответствие максимальных амплитуд осцилляций и частоты колебаний $\dot{u}$, $\dot{v}$ вблизи квазифронта рэлеевской волны для конечно-разностных и аналитических решений (2.2.99), (2.2.101) улучшается с ростом n . Причем, не смотря на то, что аналитические решения (2.2.99), (2.2.101) получены в

предположении, что $t \rightarrow \infty$ (или, что тоже самое, что $n \rightarrow \infty$), они хорошо описывают численное решение на конечном расстоянии от места воздействия, а именно, для горизонтальных скоростей перемещений $\dot{u}$ – начиная с $n=10$, для вертикальных скоростей перемещений $\dot{v}$ – начиная с $n=30$.

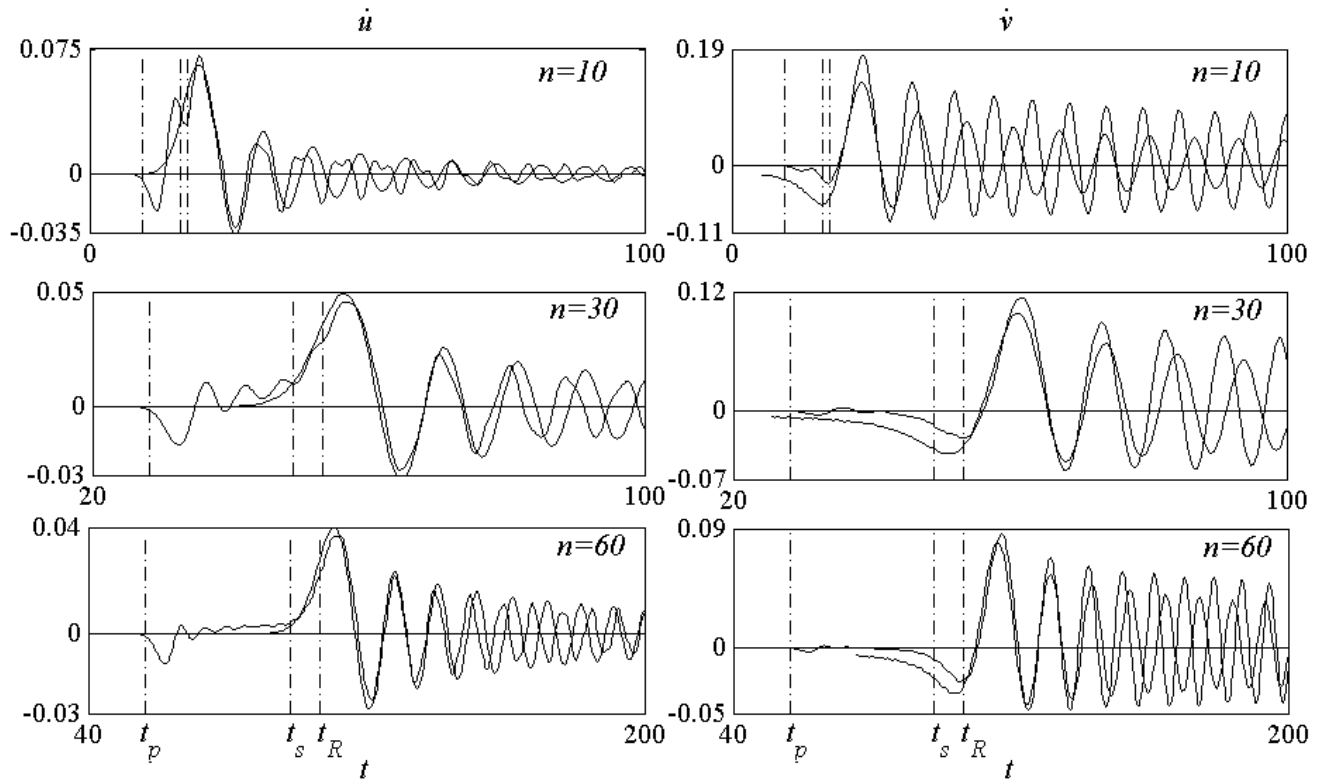


Рис. 2.2.56. Осциллограммы скоростей перемещений на поверхности блочной среды в точках $n=10, 30, 60$ ($\gamma=1$). Толстые кривые – численное решение, тонкие кривые – аналитические решения (2.2.99), (2.2.101). Левые графики – $\dot{u}$, правые графики – $\dot{v}$.

На рис. 2.2.57 мы видим, что соответствие амплитуд и частот осцилляций горизонтальных ускорений вблизи квазифронта рэлеевской волны для численного и аналитического (2.2.100) решений достигается, начиная с $n=30$. Для вертикальных ускорений соответствие численного и аналитического (2.2.102) решений достигается, начиная с $n=10$.

Таким образом, мы показали, что подкорректированные формулы (2.2.97), (2.2.99) – (2.2.102) лучше описывают результаты численных расчетов, чем формулы (2.2.85) – (2.2.88), (2.2.93), (2.2.94).

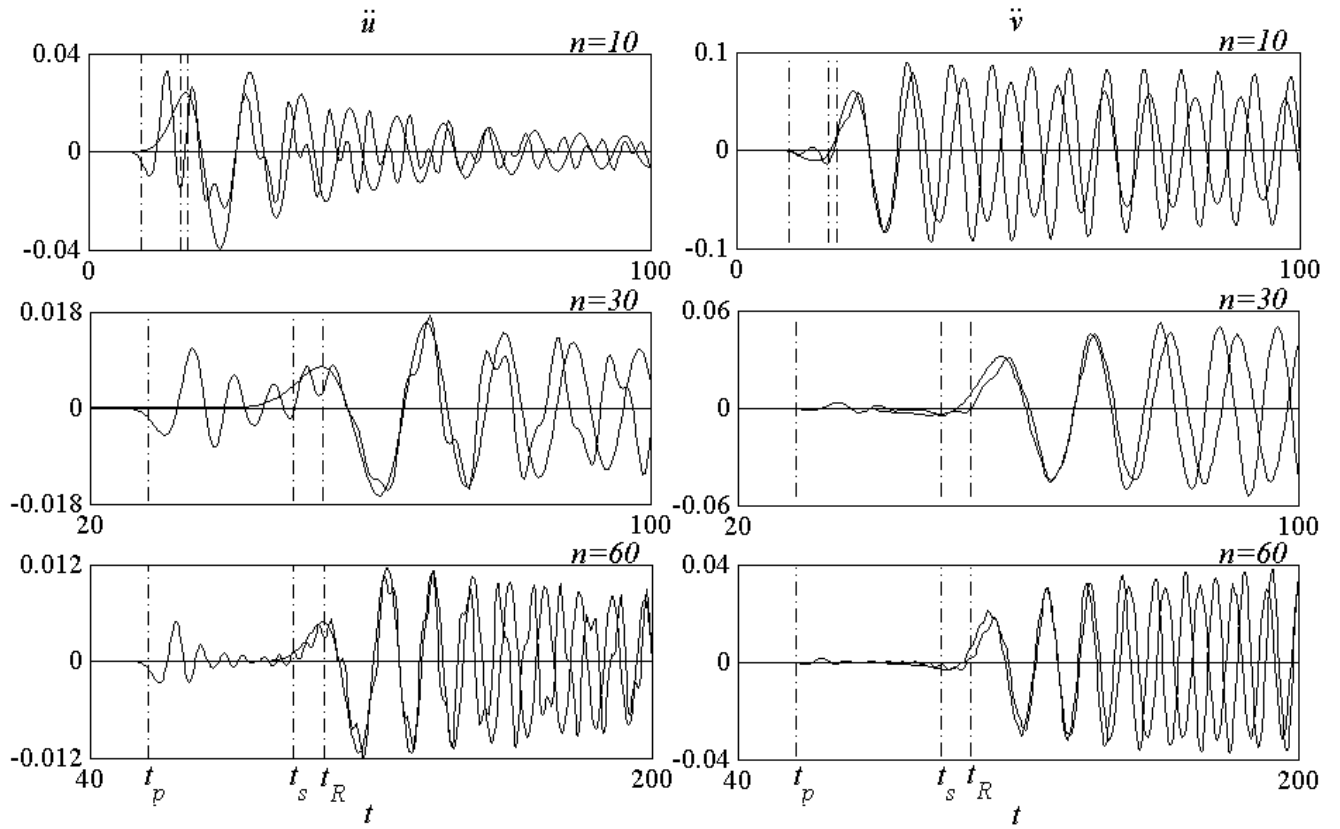


Рис. 2.2.57. Осциллограммы ускорений на поверхности блочной среды в точках $n = 10, 30, 60$ ($\gamma = 1$). Толстые кривые – численное решение, тонкие кривые – аналитические решения (2.2.100), (2.2.102). Левые графики – $\ddot{u}$, правые графики – $\ddot{v}$.

На рис. 2.2.58 представлены графики распределения тангенциальных u_θ и радиальных u_r перемещений

$$u_\theta = \text{sign}(n) \frac{v_{n,m}n + u_{n,m}m}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad u_r = \frac{v_{n,m}m + u_{n,m}n}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

и их скоростей $\dot{u}_\theta$, $\dot{u}_r$ и ускорений $\ddot{u}_\theta$, $\ddot{u}_r$ на полуплоскости в момент времени $t = 94$. Хорошо видны фронты продольных, сдвиговых и рэлеевских волн. Бегущая продольная волна взаимодействует со свободной поверхностью и порождает головную поперечную волну с прямолинейным фронтом. Фронт этой волны виден на графике функции $\dot{u}_\theta$.

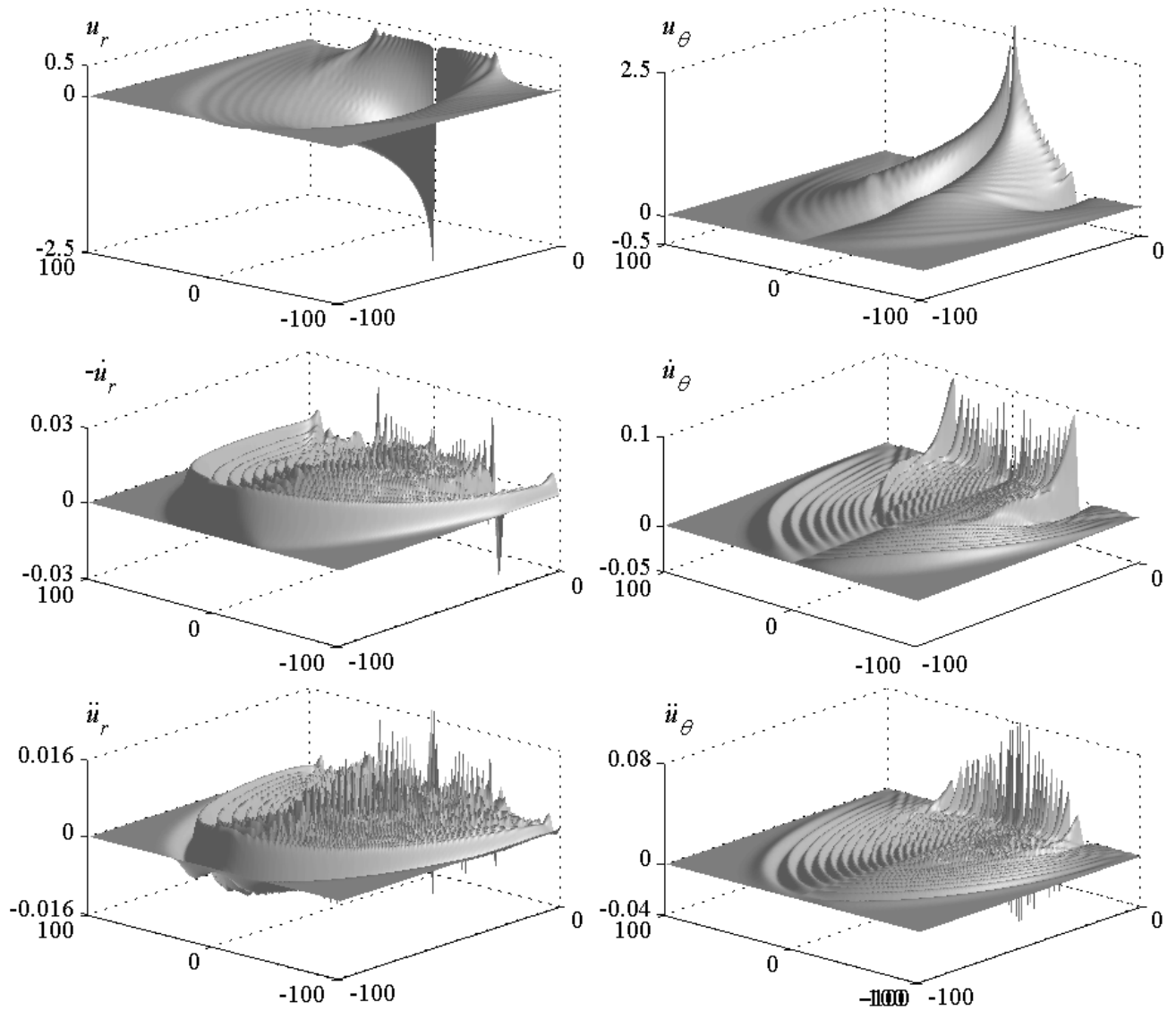


Рис. 2.2.58. Графики тангенциальных u_θ и радиальных u_r перемещений и их скоростей $\dot{u}_\theta$, $\dot{u}_r$ и ускорений $\ddot{u}_\theta$, $\ddot{u}_r$ на полуплоскости в момент времени $t = 94$ ($\gamma = 1$).

Заключение

Исследование задачи Лэмба для блочной среды показало, что наличие структуры в среде приводит к изменению её поведения по сравнению, с тем, что предсказывает непрерывная модель, получаемая усреднением механических свойств блочной среды. Отличие от непрерывной среды особенно сильно проявляется в районе фронта волны Рэлея, а именно — появляются высокочастотные осцилляции возмущений, отсутствующие в непрерывной среде.

На границе блочной среды, заключенной между фронтами продольной и поперечной волн, наблюдается качественное и количественное соответствие результатов для блочной и однородной среды.

Дисперсионные характеристики волн, распространяющихся в блочном полупространстве, усложняются по сравнению с упругой средой. Продольные, сдвиговые, и рэлеевские волны распространяются с дисперсией, которая отсутствовала в упругой среде. Спектр высокочастотных осцилляций ограничен резонансной частотой поверхностных волн блочной среды и определяется ее структурными свойствами.

Получено асимптотическое решение нестационарной задачи Лэмба для блочной среды, описывающее поведение возмущений на границе блочной среды в окрестности волны Рэлея при больших временах с начала процесса или на больших расстояниях от места воздействия.

В результате анализа асимптотических решений показано, что:

а) позади фронта рэлеевской волны горизонтальные перемещения осциллируют относительно постоянного значения, которое совпадает со статическим решением задачи Лэмба для упругой среды;

б) амплитуды скоростей перемещений в окрестности квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (или расстояния) падают как $t^{-1/3}$ (или $n^{-1/3}$);

в) амплитуды ускорений в окрестности квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (или расстояния) падают как $t^{-2/3}$ (или $n^{-2/3}$);

г) зона квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (или расстояния) расширяется как $t^{1/3}$ (или $n^{1/3}$).

Сравнение конечно-разностных и аналитических решений показало, что длинноволновые возмущения вносят основной вклад в волновой процесс в районе квазифронта рэлеевской волны. Позади фронта основной вклад вносят коротковолновые колебания. Соответствие двух решений наступает при конечном времени взаимодействия или, что то же самое, на конечном расстоянии от места воздействия.

2.2.3.6. Задача Лэмба для блочного полупространства.

Импульсное воздействие

Результаты опубликованы в [18].

Проводились расчеты уравнений (2.2.63), (2.2.75) методом конечных разностей по явной схеме для импульсного нагружения вертикальной сосредоточенной нагрузкой (2.1.4), разной длительности t_0 . Результаты таких расчетов в виде осциллограмм скоростей и перемещений вдоль поверхности $\dot{u}, u$ и поперек $\dot{v}, v$ массы с координатами $(m=0, n=60)$ на поверхности блочного полупространства $(k_1 = 2k_2 = \frac{3}{4}, Q_0 = 1)$ при $t_0 = \frac{5\pi}{2}, \frac{25\pi}{2}$ приведены на рис. 2.2.59, 2.2.60 тонкими линиями. Масса блоков и длина пружин приняты за единицы: $M = 1, l = 1$.

Толстыми линиями на рис. 2.2.59, 2.2.60 приведены расчетные осциллограммы скоростей движения точек поверхности упругой полуплоскости, полученные в аналогичной постановке для уравнений теории упругости.

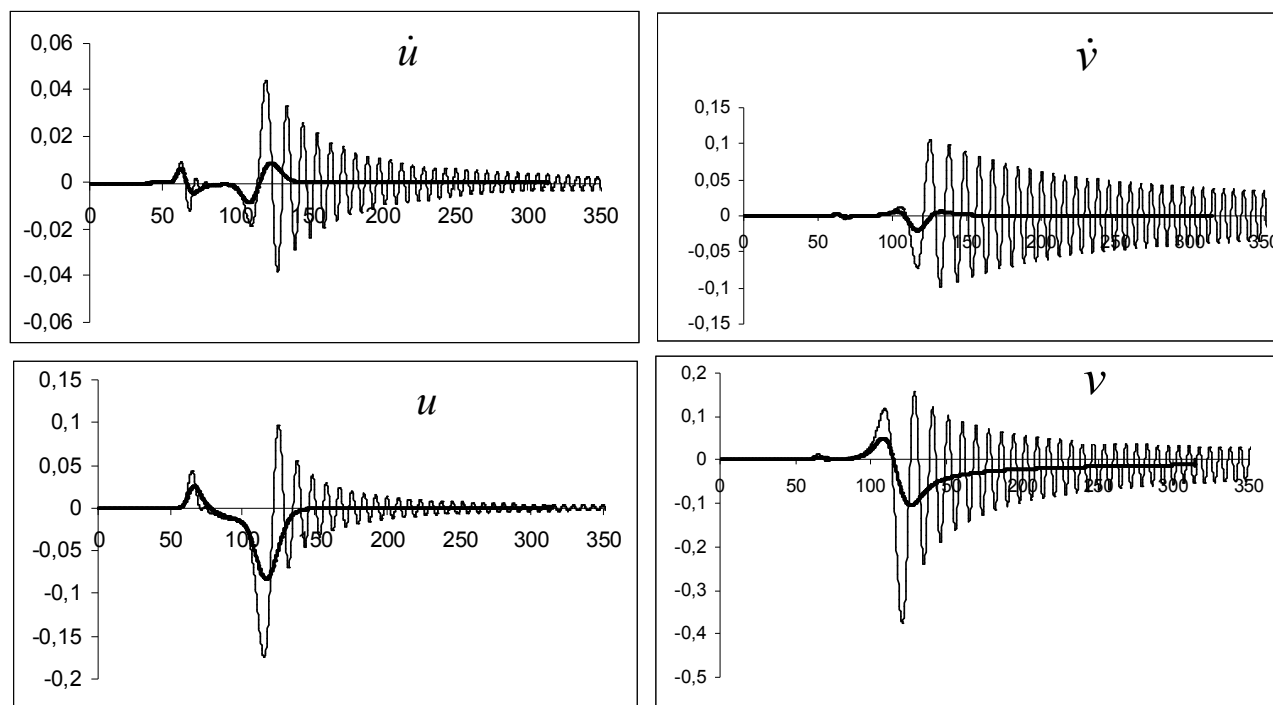


Рис. 2.2.59. Осциллограммы скоростей на поверхности упругого полупространства и решетки на расстоянии 60 при импульсном сосредоточенном нагружении на единичной площадке и временем нагружения $t_0 = \frac{5\pi}{2}$

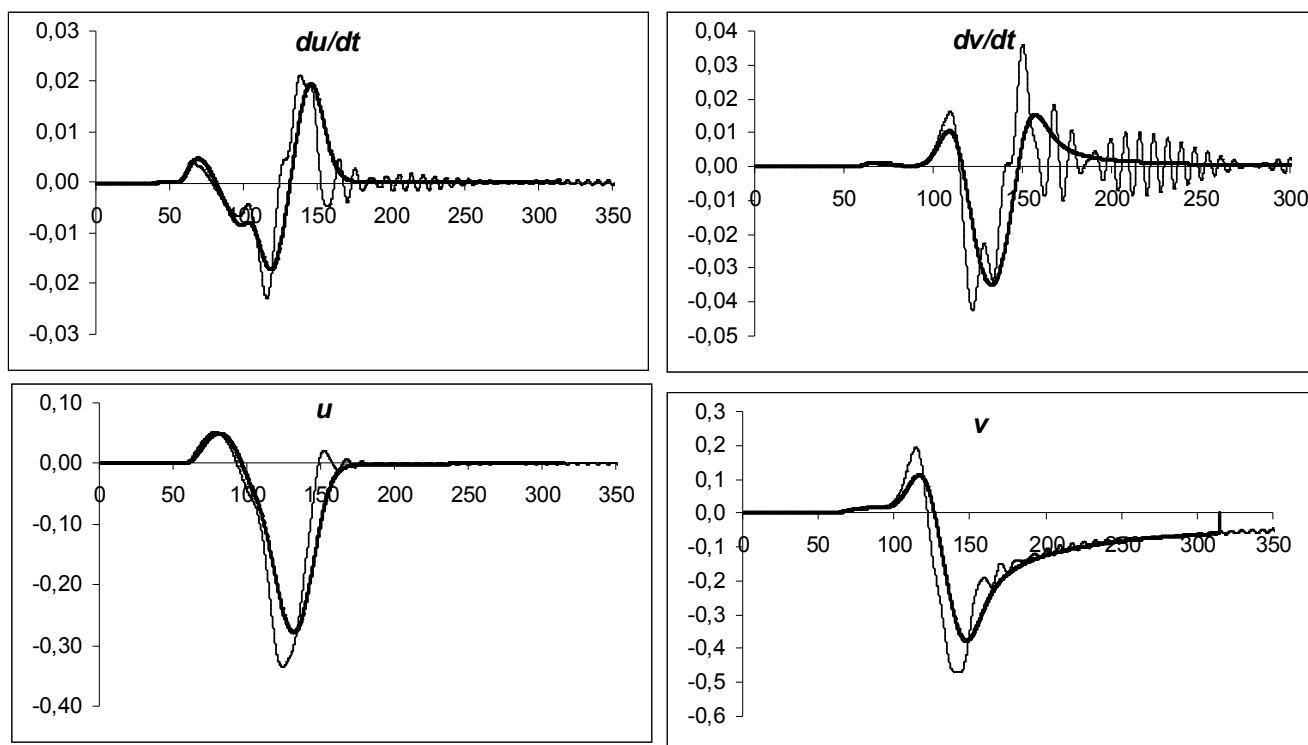


Рис. 2.2.60. Осциллограммы скоростей на поверхности упругого полупространства и решетки на расстоянии 60 при импульсном сосредоточенном нагружении на единичной площадке и временем нагружения $t_0 = \frac{25\pi}{2}$

Расчеты динамики упругого полупространства проделаны М.П. Варыгиной [18] на основе двуциклического метода расщепления по пространственным переменным в сочетании с явной монотонной ENO-схемой с предельной реконструкцией решения. Схемы для решения одномерных задач основаны на методе распада разрыва Годунова на равномерной сетке с выбором предельно допустимого по условию Куранта–Фридрихса–Леви шага по времени $\tau = \min(\Delta x/c_p, \Delta y/c_p)$, $\Delta x, \Delta y$ – шаги сетки в направлениях x, y . Условия согласования на границах раздела слоев и прослоек также рассчитывались по схеме Годунова.

Анализ результатов расчетов, проведенных при разных t_0 , показал, что максимальное отличие характера поведения колебаний блочной среды и упругого полупространства наблюдается при коротком по времени импульсном воздействии (рис. 2.2.59). В блочной среде с приходом волны Рэлея возникают слабо затухающие высокочастотные колебания. С увеличением времени

нагружения такие колебания быстрее затухают (рис. 2.2.60). При большой длительности нагружения головная часть рэлеевской волны становится похожа на волну Рэлея в упругом полупространстве.

Заключение

Полученный результат свидетельствует о необходимости учета блочного строения горных пород при расчете интенсивности сейсмических волн.

2.2.3.7. Задача Лэмба для блочной среды с учетом вязкости

Результаты данного пункта опубликованы в [19, 28, 29].

Ниже исследуется задача Лэмба о действии сосредоточенной нагрузки на поверхность блочного полупространства в плоской постановке (рис. 2.2.46). Блочная среда моделируется однородной двумерной решеткой, состоящей из масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей x , y и в диагональных направлениях (рис. 2.2.47).

Уравнения движения блоков с номерами n, m ($m < 0$), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{u}_{n,m} = & k_1(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \lambda_1(\dot{u}_{n+1,m} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n-1,m}) + \\
 & + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} + u_{n+1,m-1} + u_{n-1,m+1} - 4u_{n,m})/2 + \\
 & + \lambda_2(\dot{u}_{n+1,m+1} + \dot{u}_{n-1,m-1} + \dot{u}_{n+1,m-1} + \dot{u}_{n-1,m+1} - 4\dot{u}_{n,m})/2 + \\
 & + k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} - v_{n-1,m+1} - v_{n+1,m-1})/2 + \\
 & + \lambda_2(\dot{v}_{n+1,m+1} + \dot{v}_{n-1,m-1} - \dot{v}_{n-1,m+1} - \dot{v}_{n+1,m-1})/2, \\
 M\ddot{v}_{n,m} = & k_1(v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}) + \lambda_1(\dot{v}_{n,m+1} - 2\dot{v}_{n,m} + \dot{v}_{n,m-1}) + \\
 & + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} - u_{n+1,m-1} - u_{n-1,m+1})/2 + \\
 & + \lambda_2(\dot{u}_{n+1,m+1} + \dot{u}_{n-1,m-1} - \dot{u}_{n+1,m-1} - \dot{u}_{n-1,m+1})/2 + \\
 & + k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} + v_{n-1,m+1} + v_{n+1,m-1} - 4v_{n,m})/2 + \\
 & + \lambda_2(\dot{v}_{n+1,m+1} + \dot{v}_{n-1,m-1} + \dot{v}_{n-1,m+1} + \dot{v}_{n+1,m-1} - 4\dot{v}_{n,m})/2.
 \end{aligned} \tag{2.2.103}$$

Здесь λ_1, λ_2 — вязкости демпферов в осевых и диагональных направлениях, остальные обозначения соответствуют разделу 2.2.3.5.

Уравнения движения блоков на границе ($m = 0$) имеют следующий вид:

$$M\ddot{u}_{n,0} = k_1(u_{n+1,0} - 2u_{n,0} + u_{n-1,0}) + \lambda_1(\dot{u}_{n+1,0} - 2\dot{u}_{n,0} + \dot{u}_{n-1,0}) + k_2(u_{n-1,-1} + u_{n+1,-1} - 2u_{n,0})/2 + \\ + \lambda_2(\dot{u}_{n-1,-1} + \dot{u}_{n+1,-1} - 2\dot{u}_{n,0})/2 + k_2(v_{n-1,-1} - v_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{v}_{n-1,-1} - \dot{v}_{n+1,-1})/2, \\ (2.2.104)$$

$$M\ddot{v}_{n,0} = k_1(v_{n,-1} - v_{n,0}) + \lambda_1(\dot{v}_{n,-1} - \dot{v}_{n,0}) + k_2(u_{n-1,-1} - u_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{u}_{n-1,-1} - \dot{u}_{n+1,-1})/2 + \\ + k_2(v_{n-1,-1} - 2v_{n,0} + v_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{v}_{n-1,-1} - 2\dot{v}_{n,0} + \dot{v}_{n+1,-1})/2 + P_0\delta_{0,n}H(t).$$

Полагаем, что начальные условия нулевые и решетка изотропная — $k_1 = 2k_2$ и $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Пусть $M = 1$, $l = 1$, $k_1 = \frac{3}{4}$. Скорости продольных и сдвиговых и рэлеевских бесконечно длинных волн в блочной среде с вязкостью вычисляются по формулам (2.2.71), (2.2.79), так же как и в среде без вязкости.

Численное решение задачи

Уравнения (2.2.103), (2.2.104) с нулевыми начальными условиями решались методом конечных разностей по явной схеме. Условие устойчивости разностных уравнений:

$$\tau \leq l \sqrt{\frac{2M}{3k_1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

На рис. 2.2.61 приведены осциллограммы возмущений, полученные численно, на поверхности блочного полупространства в точке с координатами $n = 60$ при различных значениях вязкости. Остальные параметры имеют следующие значения: $\tau = 0.314$, $P_0 = 1$, $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Тонкие линии соответствуют значению $\lambda_1 = 0$, линии средней толщины — $\lambda_1 = 0.1$ и толстые линии — $\lambda_1 = 0.4$. Вертикальные линии на рис. 2.2.61 соответствуют моментам времени прихода продольных, сдвиговых (2.2.71) и рэлеевских волн (2.2.79).

Анализ осциллограмм перемещений показывает, что с ростом параметра вязкости позади фронта рэлеевской волны горизонтальные перемещения стремятся к решению $\frac{P_0}{4k_1}$ (2.2.88), которое получено при $\lambda_1 = 0$. Введение вязкости приводит к уменьшению амплитуды высокочастотных колебаний позади

фронта рэлееской волны на осциллограммах скоростей перемещений и ускорений, а затем и к их полному исчезновению с ростом значения вязкости. Такое поведение возмущений ближе к реальным сейсмограммам, чем без учета вязкости.

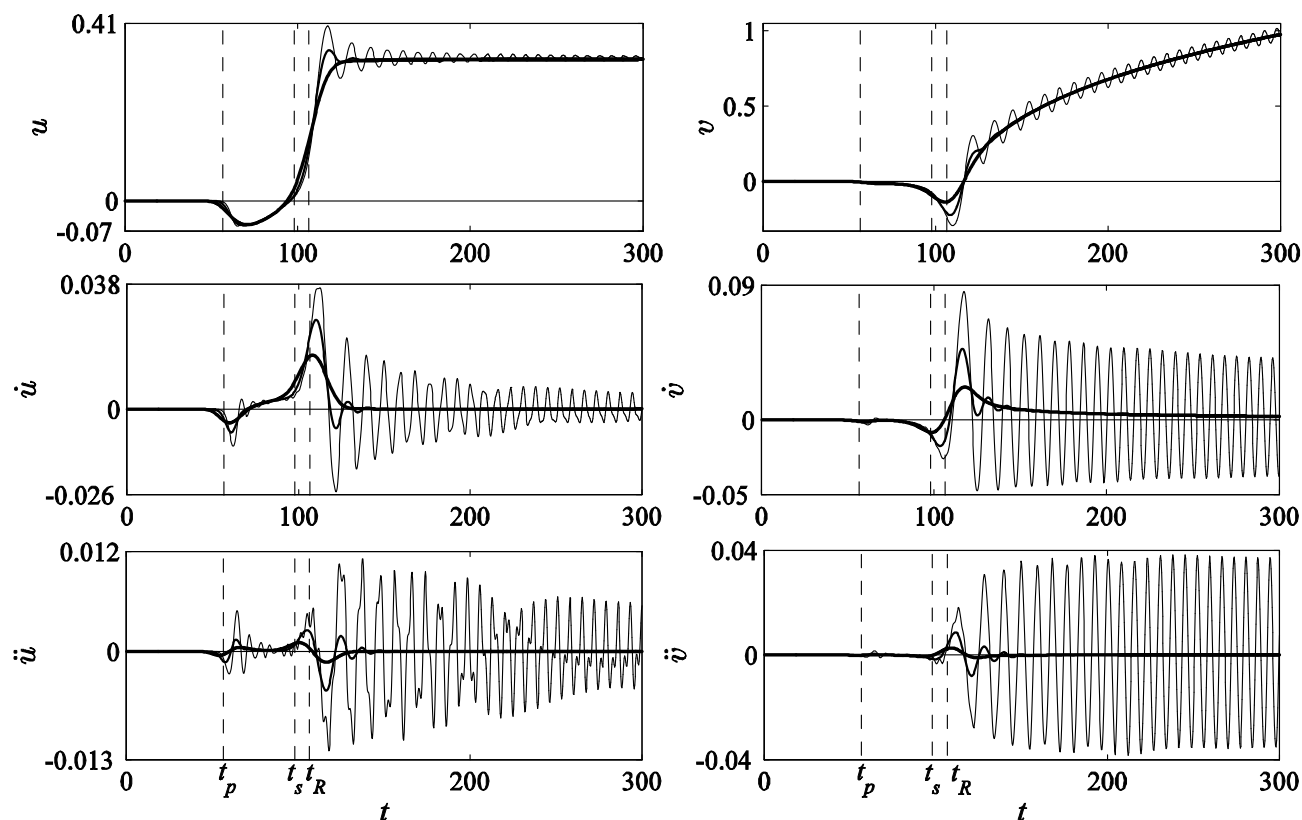


Рис. 2.2.61. Осциллограммы перемещений и их скоростей и ускорений. Тонкие линии соответствуют значению $\lambda_1 = 0$, линии средней толщины — $\lambda_1 = 0.1$ и толстые линии — $\lambda_1 = 0.4$.

На рис. 2.2.62 представлены зависимости максимальных амплитуд возмущений от величины параметра вязкости, полученные при тех же параметрах, что и рис. 2.2.61. Видно заметное затухание максимальных амплитуд возмущений, вызванное демпферами.

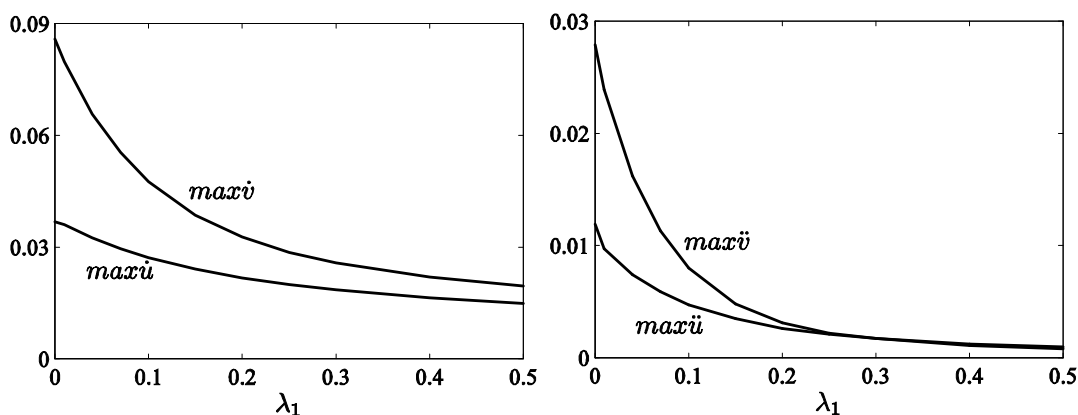


Рис. 2.2.62. Зависимости максимальных амплитуд горизонтальных и вертикальных скоростей и ускорений от величины параметра вязкости.

Заключение

Исследование динамического поведения двумерной модели блочной среды с учетом вязкости при воздействии вертикальной сосредоточенной нагрузки на полупространство (задача Лэмба) показало, что наличие вязкости приводит к уменьшению высокочастотных медленно затухающих колебаний позади фронта волны Рэлея, которые отсутствуют на реальных сейсмограммах. Полученный результат свидетельствует о необходимости учета вязкости прослоек в блочной модели горных пород при расчете сейсмических волн.

2.2.4. Заключение к § 2.2.

1. Получены новые формулы приближенного представления при $k \gg 1$ (или $ct \gg 1$) функции Ломмеля $s_{0,k}(ct)$ ($k = 2n$) через функцию Скорера $Gi(z)$ и производной от функции Ломмеля $s'_{0,k}(ct)$ ($k = 2n$) через производную от функции Скорера $Gi'(z)$, где $z = \left(\frac{2}{ct}\right)^{1/3} (n - ct)$. Этим же методом получены ранее известные формулы приближенного представления функции Бесселя $J_k(ct)$ через функцию Эйри $Ai(z)$ и производной от функции Бесселя $J'_k(ct)$ через производную от функции $Ai'(z)$.

В результате анализа приближенных представлений показано, что:

а) амплитуды $s_{0,k}(ct)$ и $J_k(ct)$ в окрестности $z = 0$ с ростом t (или n) падают как $t^{-1/3}$ (или $n^{-1/3}$);

в) амплитуды $s'_{0,k}(ct)$ и $J'_k(ct)$ в окрестности $z = 0$ с ростом t (или n) падают как $t^{-2/3}$ или $(n^{-2/3})$;

г) зона роста функций от нуля до первого максимума для функций $s_{0,k}(ct)$ и $J_k(ct)$, $s'_{0,k}(ct)$ и $J'_k(ct)$ с ростом t (или n) расширяется как $t^{1/3}$ (или $n^{1/3}$).

Приемлемое соответствие, полученных формул, наступает при сравнительно малых значениях координаты n или времени t , что позволяет пользоваться этими формулами для решения задач механики дискретных сред.

2. Получено аналитическое и численное решение нестационарной задачи об антиплоском монохроматическом сосредоточенном воздействии с резонансной частотой на квадратную решетку масс, соединенных пружинами.

Показано, что при таком воздействии в квадратной решетке масс возникает рост амплитуды осцилляций высокочастотных возмущений пропорционально $\ln t$ при $t \rightarrow \infty$, причем преимущественное распространение коротких волн происходит в диагональном направлении.

В результате сравнения численных и аналитических решений показано, что асимптотическое решение с большой точностью описывает огибающую кривую осцилляций конечно-разностного решения, и соответствие этих решений наступает при конечном времени воздействия и зависит от координат точек решетки.

3. Получено асимптотическое и численное решение нестационарной задачи о ступенчатом сосредоточенном антиплоском воздействии на квадратную решетку масс, соединенных пружинами.

Показано, что при таком воздействии в квадратной решетке масс наблюдаются следующие эффекты при $t \rightarrow \infty$:

- а) амплитуды перемещений растут пропорционально логарифму времени;
- б) максимальные амплитуды скоростей перемещений падают с ростом времени (расстояния) как $t^{-2/3}$ ($r^{-2/3}$), ускорений — как t^{-1} (r^{-1});

в) зона квазифронта, расширяется как $t^{1/3}$ ($r^{1/3}$).

Проведено сравнение численных и аналитических решений и показано, что соответствие этих решений наступает при конечном времени воздействия или на конечном расстоянии от места приложения нагрузки.

4. Выявлена двухволновая структура возмущений, распространяющихся по двумерной регулярной блочной системе при локальном антиплоском воздействии. Показано, что, как и в одномерном случае, первой в наблюдаемую точку приходит низкочастотная маятниковая волна, бегущая со скоростью бесконечно длинных волн в дискретной среде, за ней движется группа высокочастотных колебаний с несущей частотой в районе первой резонансной частоты. Вклад маятниковой волны практически не зависит от направления распространения сигнала. Высокочастотные колебания оказываются максимальными в диагональных направлениях.

5. В результате моделирования распространения сейсмических волн от взрыва в условиях двухслойного строения блочного породного массива показано, что на больших расстояниях от источника возмущения форма сейсмического сигнала зависит от соотношения скоростей маятниковых волн в слоях. Если в верхнем слое такая скорость меньше, то в точку наблюдения сначала приходит волна малой амплитуды, распространяющаяся по нижнему, более жесткому слою, а затем, с задержкой, волна максимальной амплитуды, характерной для верхнего слоя. Полученная картина качественно согласуется с наблюдаемой при взрывах на карьерах. Времена прихода волн достаточно точно определяются в рамках геометрической сеймики.

6. Исследованы дисперсионные характеристики плоской модели блочной среды в зависимости от параметров задачи. Показано, что дисперсионные характеристики волн, распространяющихся в блочном пространстве, усложняются по сравнению с упругой средой. Продольные и сдвиговые волны распространяются с дисперсией, которая отсутствовала в упругой среде. Определены параметры блочной среды ($k_1 = 2k_2$), при которых бесконечно длинные волны, формирующие низкочастотную маятниковую волну,

распространяются во всех направлениях с одинаковой скоростью и решетка эквивалентна изотропной упругой среде. Определены резонансные частоты для данной системы.

7. Проведены расчеты нестационарных волн в квадратной решетке, моделирующей плоское движение блочной среды, и показано, что при импульсном нагружении:

а) спектр возникающих возмущений определяется в основном резонансными частотами блочной среды, причем при действии нагружения типа «центр расширения» («центр вращения») спектр возникающих возмущений определяется в основном частотами, которые соответствуют волнам «расширения» («сдвига»);

б) в случае произвольных параметров блочной среды скорость низкочастотных и высокочастотных волн в диагональном и осевом направлениях различна;

в) в квадратной решетке с осевыми и диагональными связями распространение возмущений происходит преимущественно в том направлении, в котором жесткость связей имеет наибольшее значение;

г) позади низкочастотных волн в осевом и диагональном направлениях формируется «хвост» коротковолновых возмущений близких по частоте к резонансным, амплитуда которых существенно больше, чем амплитуда низкочастотных волн. Это так называемые «звездные волны»;

д) при низкочастотном воздействии типа «центр расширения» («центр вращения») максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят длинноволновые маятниковые «продольные» («сдвиговые») волны, распространяющиеся в осевом направлении со скоростью c_2^+ (c_2^-), если $k_1 \geq 2k_2$, и волны, бегущие в диагональном направлении со скоростью c_3^+ (c_3^-), если $k_1 \leq 2k_2$.

е) при высокочастотном воздействии максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят коротковолновые возмущения.

ж) в решетке при любой частоте воздействия формируются как низкочастотные возмущения, так и высокочастотные. При низкочастотном

воздействии наблюдается качественное соответствие головной волны для однородной среды и для решетки. С ростом частоты воздействия амплитуда возмущений в решетке сначала растет, а затем падает, т. е. решетка служит фильтром для высокочастотных возмущений.

8. Получено асимптотическое решение нестационарной задачи Лэмба, описывающее поведение возмущений на границе блочной среды с осевыми и диагональными связями в окрестности волны Рэлея при больших временах с начала процесса или на больших расстояниях от места воздействия и показано, что:

а) позади фронта рэлеевской волны горизонтальные перемещения осциллируют относительно постоянного значения, которое совпадает со статическим решением задачи Лэмба для упругой среды;

б) амплитуды скоростей перемещений в окрестности квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (расстояния) падают как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$);

в) амплитуды ускорений в окрестности квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (расстояния) падают как $t^{-2/3}$ ($n^{-2/3}$);

г) зона квазифронта рэлеевской волны с ростом времени (расстояния) расширяется как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$).

9. Проведено сравнение конечно-разностных и аналитических решений плоской задачи Лэмба для блочной среды. Показано, что основной вклад в волновой процесс вносят длинноволновые возмущения в районе квазифронта рэлеевской волны. Позади фронта основной вклад вносят коротковолновые колебания. Показано, что спектр высокочастотных осцилляций ограничен резонансной частотой поверхностных волн блочной среды и определяется ее структурными свойствами. Соответствие двух решений наступает при конечном времени взаимодействия или, что тоже самое, на конечном расстоянии от места воздействия.

10. Исследование задачи Лэмба для блочной среды показало, что отличие от задачи Лэмба для непрерывной среды особенно сильно проявляется в районе фронта волны Рэлея, а именно — появляются высокочастотные осцилляции

возмущений, отсутствующие в непрерывной среде. На границе блочной среды, заключенной между фронтами продольной и поперечной волн, наблюдается качественное и количественное соответствие результатов для блочной и однородной среды.

11. Исследование задачи Лэмба для блочной среды с учетом вязкости показало, что наличие вязкости приводит к уменьшению высокочастотных медленно затухающих колебаний позади фронта волны Рэлея, которые отсутствуют на реальных сейсмограммах. Полученный результат свидетельствует о необходимости учета вязкости прослоек в блочной модели горных пород при расчете сейсмических волн.

12. Исследование динамического поведения двумерной модели блочной среды при различных воздействиях показало, что наличие структуры в среде приводит к изменению ее поведения по сравнению, с тем, что предсказывает непрерывная модель, получаемая усреднением механических свойств блочной среды. Отличие от непрерывной среды особенно сильно проявляется при импульсном нагружении, при котором время приложения нагрузки меньше периода всех волн, которые могут распространяться в блочной среде.

13. Проведенный анализ показал, что динамическое поведение блочной среды может быть описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними (маятниковое приближение).

Глава 3

Моделирование распространения нестационарных волн в трубе с внешним сухим трением

§ 3.1. Внешняя среда не деформируема

В § 3.1 разработан аналитический метод решения нелинейной задачи распространения возмущений в стержне конечной и бесконечной длины с внешним сухим трением, когда на одном из его концов задано импульсное напряжение произвольной формы, а другой конец свободен от напряжений. Окружающая среда предполагается недеформируемой. Этим методом получены приближенные аналитические решения для импульсного воздействия произвольной формы. Результаты данного параграфа опубликованы в [36].

3.1.1. Постановка одномерной задачи

Рассматривается следующая задача. Упругий трубчатый стержень (R — радиус, h — толщина стенки) длины L заглублен в грунт на величину L_1 . К его торцу прикладывается продольный импульс $Q(t)$. К боковой поверхности стержня в движущихся сечениях приложено постоянное касательное напряжение τ_0 . Учет влияния сухого трения осуществляется так же, как в [124]. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с ударяемым концом стержня, а ось Z была направлена параллельно оси стержня в глубь среды. Движение стержня описывается одномерным волновым уравнением относительно перемещений $U(t, z)$

$$\ddot{U} = c^2 U''_{,zz} - k\tau, \quad \tau = \frac{\tau_0 P_t}{\rho S_t}, \quad k = \text{sign} \dot{U}, \quad (3.1.1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$U|_{t=0} = 0, \quad \dot{U}|_{t=0} = 0 \quad (3.1.2)$$

и граничными условиями на торцах стержня

$$ES_t U'_{,z}|_{z=0} = -Q(t), \quad ES_t U'_{,z}|_{z=L} = 0. \quad (3.1.3)$$

В (3.1.1)–(3.1.3) $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость продольной волны, ρ — плотность материала трубы, E — модуль Юнга, $S_t = \pi h(2R - h)$ — площадь поперечного сечения трубы, $P_t = 2\pi R$ — периметр трубы.

3.1.2. Особенности численных алгоритмов для одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения

Система уравнений (3.1.1)–(3.1.3) решалась численно для одиночного удара. Использовалась явная конечно-разностная схема типа “крест”:

$$U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = h_t^2 \left[\frac{c^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)}{h_z^2} - k\tau_j^n \right].$$

Здесь $U_j^n = U(h_t n, h_z j)$ — значения перемещений в момент времени $t = h_t n$ в точке с координатами $z = h_z j$, где h_t , h_z — шаги разностной сетки по координатам t , z , $\tau_j^n = \tau(h_t n, h_z j)$. Оптимальными параметрами разностной сетки, обеспечивающими минимум численной дисперсии для дискретного аналога уравнения (3.1.1), являются: $h_z = ch_t$, где h_t , h_z — шаги разностной сетки по координатам t , z .

Алгоритм расчета с учетом трения делается аналогично работе [177]. Поскольку ни направление, ни величина силы трения заранее неизвестны, в процессе решения вычисляются скорости точек для двух возможных знаков k ($k > 0$ и $k < 0$):

а) в первом случае введем фиктивную скорость $\dot{U}_j^+$, которая определяется по формуле

$$\dot{U}_j^+ = \frac{U_j^+ - U_j^n}{h_t}, \quad U_j^+ = U_j^{n+1} - h_t^2 \tau;$$

б) во втором случае введем фиктивную скорость $\dot{U}_j^-$, где

$$\dot{U}_j^- = \frac{U_j^- - U_j^n}{h_t}, \quad U_j^- = U_j^{n+1} + h_t^2 \tau.$$

В этих двух случаях U_j^{n+1} вычисляется из конечно-разностного аналога уравнения (3.1.1) без учета трения.

При этом возможны две ситуации:

1) если $\dot{U}_j^+$ и $\dot{U}_j^-$ одного знака, тогда в качестве истинных значений смещений U_j^{n+1} из U_j^+ и U_j^- выбирается величина U_j^k , для которой

$$\text{abs}(\dot{U}_j^k) = \min[\text{abs}(\dot{U}_j^-), \text{abs}(\dot{U}_j^+)];$$

2) если скорости $\dot{U}_j^+$ и $\dot{U}_j^-$ разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о пассивности трения, следует вывод о том, что реальная скорость трубы равна нулю и, следовательно, сила трения отсутствует. Значения U_j^{n+1} вычисляем, полагая $k = 0$.

Таким образом, проблема определения границы, разделяющей области движения и покоя, представляющая основную трудность при аналитических решениях, сводится к выявлению точек, где $\dot{U}_j^+$ и $\dot{U}_j^-$ разных знаков или одна из них обращается в нуль. Поскольку в процессе расчета однозначно определяется величина и направление действия силы трения, на каждом временном слое решается линейная задача, в которой величина силы трения теперь определена и входит как нагрузка в правую часть уравнения.

3.1.3. Аналитические решения одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения

С целью тестирования конечно-разностных алгоритмов получим приближенные аналитические оценки для ряда задач. Пусть к полубесконечному стержню, на боковой поверхности которого действует контактное сухое трение, приложена в сечении $z = 0$ полусинусоидальная импульсная нагрузка с амплитудой P_0 и длительности t_0 :

$$Q(t) = P_0 \sin(\omega_* t) H_0(t_0 - t) H_0(t), \quad \omega_* = \frac{\pi}{t_0}. \quad (3.1.4)$$

Для того чтобы получить аналитическое решение, предположим, что стержень бесконечный и нагрузка приложена в сечении $z = 0$. Применим преобразование Лапласа по времени и Фурье по продольной координате z . Поскольку в бесконечном стержне скорость положительна, то $k = 1$, если $\dot{U} > 0$, и $k = 0$, если $\dot{U} = 0$. Обратим внимание, что возмущения в волноводе с учетом трения не могут распространяться со скоростью большей, чем скорость c . С учетом этих двух замечаний решение в изображениях для скорости перемещений сечений трубы будет иметь вид

$$\dot{U}^{LF} = \frac{P_0(1 + e^{-p t_0}) \omega_* p}{\rho S_t (\omega_*^2 + p^2)(p^2 + q^2 c^2)} - \frac{2 \tau_0 P_t c p k}{\rho S_t (p^2 + q^2 c^2)^2}.$$

Обращая преобразования Лапласа и Фурье, получим следующее выражение для скорости перемещений в случае бесконечного стержня:

$$\dot{U}(z, t) = \frac{1}{c \rho S_t} \left[\frac{P_0}{2} \sin \omega_* \left(t - \frac{|z|}{c} \right) H_0 \left(\frac{|z|}{c} - t + t_0 \right) - k \frac{\tau_0 P_t c t}{2} \right] H_0 \left(t - \frac{|z|}{c} \right).$$

В случае полубесконечного стержня ($z \geq 0$) мы должны амплитуду импульса увеличить в 2 раза:

$$\dot{U}(z, t) = \frac{1}{c \rho S_t} \left[P_0 \sin \omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) H_0 \left(\frac{z}{c} - t + t_0 \right) - k \frac{\tau_0 P_t c t}{2} \right] H_0 \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Поскольку функция $k = 1$, если $\dot{U} > 0$, то в результате имеем неравенство для определения области на плоскости (z, t) , где $k = 1$:

$$\sin \omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) > \frac{\tau_0 P_t c t}{2 P_0}, \quad 0 \leq t - \frac{z}{c} \leq t_0.$$

Для данного момента времени t найдем интервал по z , где выполняется это неравенство. Пусть z_1 удовлетворяет равенству

$$\sin \omega_* \left(t - \frac{z_1}{c} \right) = \frac{\tau_0 P_t c t}{2 P_0}.$$

С учетом обозначения $\varepsilon = t - z_1 / c$ получаем, что $k = 1$ в интервале $c(t - t_0 + \varepsilon) < z < c(t - \varepsilon)$. Вне этого интервала $\dot{U} = 0$ и $k = 0$. В результате имеем следующую приближенную зависимость скорости перемещений от координаты z при фиксированном времени t :

$$\dot{U}(z, t) = \frac{1}{c \rho S_t} \left[P_0 \sin \omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\tau_0 P_t c t}{2} \right] H_0 \left(\frac{z}{c} - t + t_0 - \varepsilon \right) H_0 \left(t - \frac{z}{c} - \varepsilon \right). \quad (3.1.5)$$

Здесь величина ε определяется из условия

$$\sin(\omega_* \varepsilon) = \frac{\tau_0 P_t c t}{2 P_0} \quad (3.1.6)$$

и удовлетворяет неравенству $0 \leq \varepsilon \leq \frac{t_0}{2}$.

Анализ формулы (3.1.5) показывает, что максимальные значения скорости перемещений достигаются в сечении $z = c \left(t - \frac{t_0}{2} \right)$ и линейно зависят от амплитуды импульса P_0 , касательного напряжения τ_0 и времени t :

$$\max \dot{U} = \frac{P_0}{c \rho S_t} - \frac{\tau_0 P_t t}{2 \rho S_t} > 0.$$

Из этой формулы следует, что в полубесконечном стержне, к которому приложено внешнее сухое трение, амплитуда бегущего импульса исчезает в момент времени

$$t_* = \frac{2P_0}{\tau_0 P_t c}. \quad (3.1.7)$$

Оценка (3.1.7) совпадает с оценкой, полученной в [120].

Поскольку скорость распространения возмущений в стержне равна c , то из (3.1.7) следует, что при

$$z > z_* = c \left(t_* - \frac{t_0}{2} \right) = \frac{2P_0}{\tau_0 P_t} - \frac{ct_0}{2} \quad (3.1.8)$$

возмущения в стержне отсутствуют.

Фиксируем теперь координату z и определим зависимость скорости перемещений от времени. Пусть t_1, t_2 удовлетворяют равенствам

$$\sin \omega_* \left(t_1 - \frac{z}{c} \right) = \frac{\tau_0 P_t c t_1}{2P_0}, \quad \sin \omega_* \left(t_2 - \frac{z}{c} \right) = \frac{\tau_0 P_t c t_2}{2P_0}.$$

С учетом обозначений $\varepsilon_1 = t_1 - \frac{z}{c}$, $\varepsilon_2 = \frac{z}{c} + t_0 - t_2$ имеем трансцендентные уравнения для определения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\sin(\omega_* \varepsilon_1) = \frac{\tau_0 P_t c}{2P_0} \left(\varepsilon_1 + \frac{z}{c} \right), \quad \sin(\omega_* \varepsilon_2) = \frac{\tau_0 P_t c}{2P_0} \left(\frac{z}{c} + t_0 - \varepsilon_2 \right),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ лежат в интервале $0 \leq \varepsilon_1 \leq \frac{t_0}{2}$, $0 \leq \varepsilon_2 \leq \frac{t_0}{2}$. Получаем, что $\dot{U} > 0$ и $k=1$ в области $\frac{z}{c} + \varepsilon_1 < t < \frac{z}{c} + t_0 - \varepsilon_2$. Вне этого интервала $\dot{U} = 0$. В результате в качестве приближенного решения возьмем следующую зависимость скорости перемещений от времени t при фиксированной координате z :

$$\dot{U}(z, t) = \frac{1}{c \rho S_t} \left[P_0 \sin \omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\tau_0 P_t c t}{2} \right] H_0 \left(\frac{z}{c} - t + t_0 - \varepsilon_2 \right) H_0 \left(t - \frac{z}{c} - \varepsilon_1 \right). \quad (3.1.9)$$

Интегрируя (3.1.9), имеем зависимость перемещения сечений стержня от времени и координаты для полусинусоидального импульса (3.1.4)

$$U(z, t) = \frac{1}{c\rho S_t} \begin{cases} \frac{P_0}{\omega_*} [\cos(\omega_* \varepsilon_1) + \cos(\omega_* \varepsilon_2)] - \frac{\tau_0 P_t c}{4} \left[\left(\frac{z}{c} + t_0 - \varepsilon_2 \right)^2 - \left(\frac{z}{c} + \varepsilon_1 \right)^2 \right], & t - \frac{z}{c} > t_0 - \varepsilon_2, \\ \frac{P_0}{\omega_*} \left[\cos(\omega_* \varepsilon_1) - \cos \omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] - \frac{\tau_0 P_t c}{4} \left[t^2 - \left(\frac{z}{c} + \varepsilon_1 \right)^2 \right], & \varepsilon_1 \leq t - \frac{z}{c} \leq t_0 - \varepsilon_2, \\ 0, & t - \frac{z}{c} < \varepsilon_1. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Если задана произвольная форма импульсного воздействия на интервале $(0, t_0)$

$$Q(t) = P_0 \tilde{Q}(t) H_0(t_0 - t) H_0(t),$$

где $\tilde{Q}(t)$ — выпуклая вверх функция, то, проводя аналогичные выкладки, получим приближенную зависимость скорости перемещений от времени t при фиксированной координате z

$$\dot{U}(z, t) = \frac{1}{c\rho S_t} \left[P_0 \tilde{Q} \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\tau_0 P_t c t}{2} \right] H_0 \left(\frac{z}{c} - t + t_0 - \varepsilon_2 \right) H_0 \left(t - \frac{z}{c} - \varepsilon_1 \right), \quad (3.1.11)$$

$$2P_0 \tilde{Q}(\varepsilon_1) = \tau_0 P_t (z + c\varepsilon_1), \quad 2P_0 \tilde{Q}(t_0 - \varepsilon_2) = \tau_0 P_t (z + ct_0 - c\varepsilon_2).$$

Если импульс прямоугольной формы, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и перемещения, полученные интегрированием (3.1.11), точно удовлетворяют уравнению (3.1.1). Для всех импульсов другой формы уравнение (3.1.1) на решении (3.1.11) удовлетворяется приближенно, но с большой точностью, если выполняется условие $t_0 \ll t_*$.

Заметим, что (3.1.5), (3.1.10), (3.1.11) получены в предположении, что $k=1$, если $\dot{U} > 0$, и $k=0$, если $\dot{U} = 0$. Это условие выполняется на всем интервале распространения возмущений при действии импульса произвольной формы, если $t_0 \leq t_*$. Если $t_0 > t_*$, то в некоторый момент времени скорость перемещений может

стать отрицательной и необходимо полагать $k = -1$. Решение в этом случае будет другим.

Рассмотрим стержень конечной длины L , к боковой поверхности которого приложено сухое трение с касательным напряжением τ_0 и полусинусоидальная продольная нагрузка (3.1.4).

Как следует из (3.1.9), в стержне длины $L > z_*$ противоположный от места воздействия конец не “почувствует” воздействия. Из формулы (3.1.9) можно определить, какой амплитуды должен быть импульс, чтобы возмущение дошло до конца трубы:

$$P_0 \geq \left(L + \frac{ct_0}{2} \right) \frac{\tau_0 P_t}{2}.$$

Если $L \gg \frac{ct_0}{2}$, то вторым слагаемым в этом неравенстве можно пренебречь. В результате получим

$$P_0 \geq \frac{F_{\text{тр}}}{2}, \quad F_{\text{тр}} = \tau_0 P_t L, \quad (3.1.12)$$

т. е. амплитуда импульса должна быть больше половины силы трения $F_{\text{тр}}$, действующей на боковую поверхность трубы.

С учетом отражений от торцов стержня приближенное решение данной задачи для скоростей перемещений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z, t) = & \sum_{n=0}^{n_1} \frac{1}{c\rho S_t} \left\{ P_0 \sin \omega_*(t - a_{2n} + \varepsilon_{11n}) - F_{\text{тр}} \frac{ct}{2L} \right\} H_0(t - a_{2n}) H_0(a_{1n} - t) + \\ & + \sum_{n=0}^{n_2} \frac{1}{c\rho S_t} \left\{ P_0 \sin \omega_*(t - b_{2n} + \varepsilon_{21n}) - F_{\text{тр}} \frac{ct}{2L} \right\} H_0(t - b_{2n}) H_0(b_{1n} - t), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$n_1 = \left\lfloor \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} - \frac{z}{2L} \right\rfloor, \quad n_2 = \left\lfloor \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} + \frac{z}{2L} - 1 \right\rfloor,$$

$$\sin(\omega_* \varepsilon_{11n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + \frac{z + c\varepsilon_{11n}}{2L} \right), \quad \sin(\omega_* \varepsilon_{12n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + \frac{z + c(t_0 - \varepsilon_{12n})}{2L} \right),$$

$$\sin(\omega_* \varepsilon_{21n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n+1 - \frac{z - c \varepsilon_{21n}}{2L} \right), \quad \sin(\omega_* \varepsilon_{22n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n+1 - \frac{z - c(t_0 - \varepsilon_{22n})}{2L} \right),$$

$$a_{1n} = \frac{2Ln + z}{c} + t_0 - \varepsilon_{12n}, \quad a_{2n} = \frac{2Ln + z}{c} + \varepsilon_{11n},$$

$$b_{1n} = \frac{2L(n+1) - z}{c} + t_0 - \varepsilon_{22n}, \quad b_{2n} = \frac{2L(n+1) - z}{c} + \varepsilon_{21n}.$$

Квадратными скобками в (3.1.13) обозначена целая часть числа. Интегрируя (3.1.13) по времени, получим зависимость перемещений сечений стержня от времени и продольной координаты

$$U(z, t) = \sum_{n=0}^{n_1} U_{1n} + \sum_{n=0}^{n_2} U_{2n}, \quad (3.1.14)$$

$$U_{1n}(z, t) = \frac{1}{c\rho S_t} \begin{cases} \frac{P_0}{\omega_*} [\cos(\omega_* \varepsilon_{11n}) + \cos(\omega_* \varepsilon_{12n})] - \frac{\tau_0 P_t c}{4} (a_{1n}^2 - a_{2n}^2), & t > a_{1n}, \\ \frac{P_0 [\cos(\omega_* \varepsilon_{12n}) - \cos \omega_* (t - a_{2n} + \varepsilon_{11n})]}{\omega_*} - \frac{\tau_0 P_t c}{4} (t^2 - a_{2n}^2), & a_{2n} \leq t \leq a_{1n}, \\ 0, & t < a_{2n}, \end{cases}$$

$$U_{2n}(z, t) = \frac{1}{c\rho S_t} \begin{cases} \frac{P_0}{\omega_*} [\cos(\omega_* \varepsilon_{21n}) + \cos(\omega_* \varepsilon_{22n})] - \frac{\tau_0 P_t c}{4} (b_{1n}^2 - b_{2n}^2), & t > b_{1n}, \\ \frac{P_0 [\cos(\omega_* \varepsilon_{22n}) - \cos \omega_* (t - b_{2n} + \varepsilon_{21n})]}{\omega_*} - \frac{\tau_0 P_t c}{4} (t^2 - b_{2n}^2), & b_{2n} \leq t \leq b_{1n}, \\ 0, & t < b_{2n}. \end{cases}$$

Вычислим суммарное проскальзывание трубы в сечении $z=0$ в момент времени $t > b_{1n_*}$, т. е. после затухания возмущений в трубе под действием сил трения. Из (3.1.14) следует, что

$$U_1^* = \frac{1}{c\rho S_t} \sum_{n=0}^{n_*} \left(\frac{P_0}{\omega_*} [\cos(\omega_* \varepsilon_{11n}) + \cos(\omega_* \varepsilon_{12n})] - \frac{F_{\text{тр}} c}{4L} (t_0 - \varepsilon_{11n} - \varepsilon_{12n}) \left(t_0 + \frac{4Ln}{c} + \varepsilon_{11n} - \varepsilon_{12n} \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c\rho S_t} \sum_{n=0}^{n_*-1} \left\{ \frac{P_0}{\omega_*} [\cos(\omega_* \varepsilon_{21n}) + \cos(\omega_* \varepsilon_{22n})] - \right. \\
& \left. - \frac{F_{\text{тр}} c}{4L} (t_0 - \varepsilon_{21n} - \varepsilon_{22n}) \left(t_0 + \frac{4L(n+1)}{c} + \varepsilon_{21n} - \varepsilon_{22n} \right) \right\}, \quad (3.1.15)
\end{aligned}$$

где $n_* = \left\lceil \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} \right\rceil$, $\sin(\omega_* \varepsilon_{11n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + \frac{c \varepsilon_{11n}}{2L} \right)$, $\sin(\omega_* \varepsilon_{12n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + \frac{c(t_0 - \varepsilon_{12n})}{2L} \right)$,

$$\sin(\omega_* \varepsilon_{21n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + 1 + \frac{c \varepsilon_{21n}}{2L} \right), \quad \sin(\omega_* \varepsilon_{22n}) = \frac{F_{\text{тр}}}{P_0} \left(n + 1 + \frac{c(t_0 - \varepsilon_{22n})}{2L} \right).$$

Будем предполагать, что n_* достаточно велико, и вычислять сумму будем приближенно, заменяя суммирование интегрированием. В результате получим грубую оценку суммарного проскальзывания трубы при многократных отражениях полусинусоидального импульса

$$U_1^* = \frac{t_0}{2c\rho S_t F_{\text{тр}}} \left\{ P_0^2 + 2P_0 F_{\text{тр}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{t_0 c}{2L} \right) \right) - F_{\text{тр}}^2 \frac{t_0 c}{2L} \right\}. \quad (3.1.16)$$

Как показано в [47, 181], суммарная энергия продольной волны сжатия, создаваемой в трубе без внешнего сухого трения импульсным воздействием, определяется по формуле

$$E_{\Sigma} = \frac{1}{\rho c S_t} \int_0^{t_0} Q^2(t) dt.$$

С учетом этой формулы получаем, что при полусинусоидальном импульсном воздействии (3.1.4) полная энергия в трубе без учета внешнего сухого трения равна

$$E_{\Sigma} = \frac{P_0^2 t_0}{2\rho c S_t}.$$

Введем обозначение: $\tilde{E}_{\Sigma} = \frac{\tilde{P}_0^2 t_0}{2\rho c S_t}$ — энергия удара с учетом трения, где

$$\tilde{P}_0^2 = \left\{ P_0^2 + 2P_0 F_{\text{тр}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{t_0 c}{2L} \right) \right) - F_{\text{тр}}^2 \frac{t_0 c}{2L} \right\}.$$

Таким образом, суммарное проскальзывание трубы, определяемое формулой (3.1.16), пропорционально энергии удара с учетом трения и обратно пропорционально силе трения.

Получим формулу аналогичную (3.1.16) для прямоугольного импульса

$$Q(t) = P_0 H_0(t) H_0(t_0 - t). \quad (3.1.17)$$

Из (3.1.11) следует, что зависимость скорости от времени и координаты для нагружения (3.1.17) имеет вид

$$\dot{U}(z, t) = \sum_{n=0}^{n_1} \frac{1}{c \rho S_t} \left\{ P_0 - F_{\text{тр}} \frac{ct}{2L} \right\} H_0(t - a_{2n}) H_0(a_{1n} - t) + \quad (3.1.18)$$

$$+ \sum_{n=0}^{n_2} \frac{1}{c \rho S_t} \left\{ P_0 - F_{\text{тр}} \frac{ct}{2L} \right\} H_0(t - b_{2n}) H_0(b_{1n} - t),$$

где $n_1 = \left\lfloor \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} - \frac{z}{2L} \right\rfloor$, $n_2 = \left\lfloor \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} + \frac{z}{2L} - 1 \right\rfloor$, $a_{1n} = \frac{2Ln + z}{c} + t_0$, $a_{2n} = \frac{2Ln + z}{c}$,

$$b_{1n} = \frac{2L(n+1) - z}{c} + t_0, \quad b_{2n} = \frac{2L(n+1) - z}{c}.$$

Проинтегрируем (3.1.18) по времени и положим $z = 0$ и $t > b_{1n_*}$. Тогда получим следующее значение перемещения сечения $z = 0$ после затухания всех возмущений в трубе:

$$U_2^* = \frac{t_0}{c \rho S_t} \sum_{n=0}^{n_*} \left(P_0 - \frac{F_{\text{тр}} c}{4L} \left(t_0 + \frac{4Ln}{c} \right) \right) + \frac{t_0}{c \rho S_t} \sum_{n=0}^{n_*-1} \left(P_0 - \frac{F_{\text{тр}} c}{4L} \left(t_0 + \frac{4L(n+1)}{c} \right) \right),$$

где $n_* = \left\lfloor \frac{P_0}{F_{\text{тр}}} \right\rfloor$.

В данном случае все суммы вычисляются явно. В результате будем иметь

$$U_2^* = \frac{t_0}{c\rho S_t} \left\{ \left(P_0 - F_{\text{тр}} \frac{t_0 c}{4L} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{P_0}{F_{\text{тр}}} \right] \right) - F_{\text{тр}} \left(\left[\frac{P_0}{F_{\text{тр}}} \right] + 1 \right) \left[\frac{P_0}{F_{\text{тр}}} \right] \right\}. \quad (3.1.19)$$

Если $P_0 \gg F_{\text{тр}}$, то (3.1.19) можно переписать в следующем виде:

$$U_2^* \approx \frac{t_0}{c\rho S_t F_{\text{тр}}} \left\{ \left(P_0 - F_{\text{тр}} \frac{t_0 c}{4L} \right)^2 - F_{\text{тр}}^2 \frac{t_0 c}{4L} \right\}, \quad (3.1.20)$$

что аналогично (3.1.16).

3.1.4. Сравнение численных и аналитических решений одномерной задачи с учетом внешнего сухого трения

На рис. 3.1.1, 3.1.2 приведены зависимости скоростей перемещений в трубе, полностью погруженной в грунт, от продольной координаты при полусинусоидальном импульсе (3.1.4) (рис. 3.1.1 — без отражений, $L_1 = L = 100$ м, рис. 3.1.2 — с отражениями, $L_1 = L = 30$ м) в различные моменты времени. Вертикальная штрихпунктирная линия соответствует сечению трубы $z = z_*$. Параметры задачи: $P_0 = 989.6$ кН; $t_0 = 0.25$ мс; $E = 2.03 \cdot 10^5$ МПа; $h = 0.01$ м; $R = 0.1625$ м; $\rho = 7805$ кг/м³; $h_z = 0.1$ м; $\tau_0 = 0.02$ МПа.

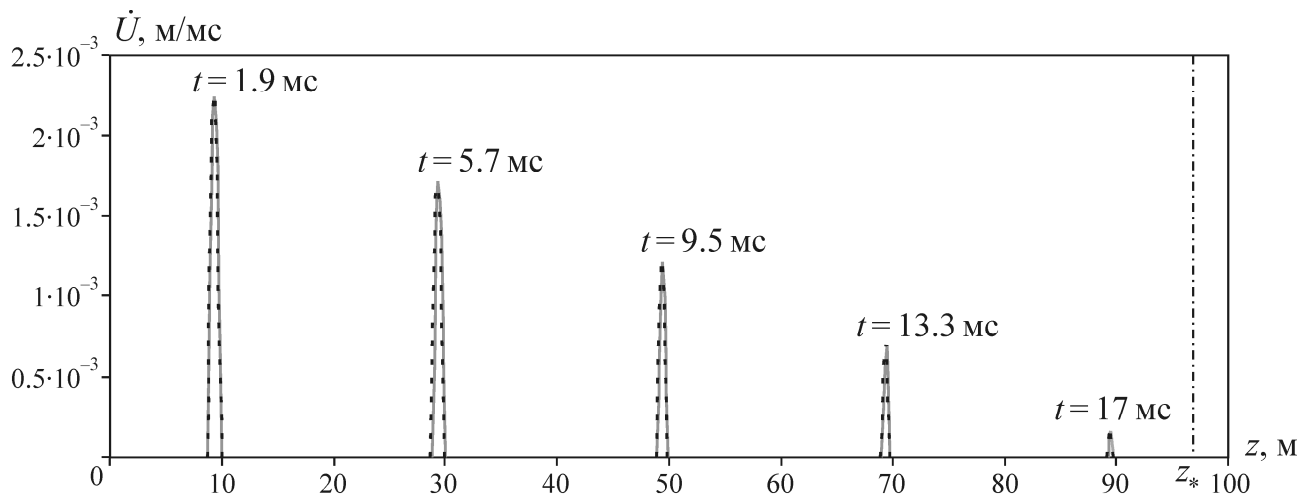


Рис. 3.1.1. Эпюры скоростей перемещений в различные моменты времени. Сплошные кривые — результаты численных экспериментов; пунктирные — аналитическое решение (3.1.5)

Как видно из сравнения графиков, аналитические и численные решения совпадают с большой точностью. Заметим, что для данных параметров: $t_0/t_* = 0.013 \ll 1$. Оценки (3.1.8), (3.1.9) дают следующие значения: времени затухания продольного импульса $t_* = 19.6$ мс и области стержня, занятой возмущениями, $z < z_* = 96.9$ м, что подтверждается численными расчетами (рис. 3.1.1, 3.1.2). Анализ численных и аналитических решений на рис. 3.1.1, 3.1.2 показывает, что наличие трения приводит к тому, что нижняя часть импульса постепенно “стирается” до тех пор, пока импульс не исчезнет полностью.

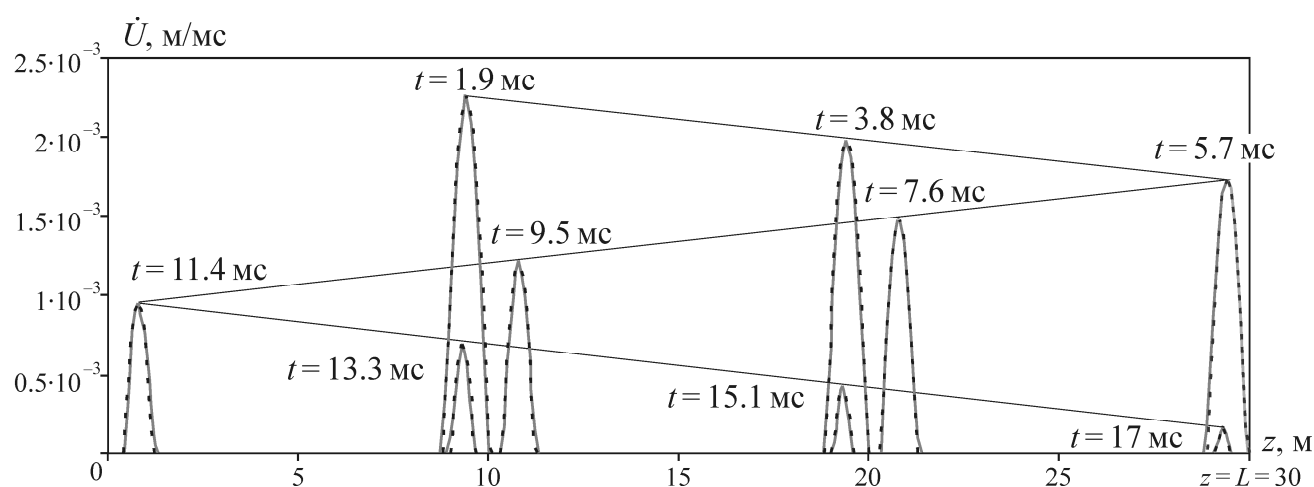


Рис. 3.1.2. Эпюры скоростей перемещений в различные моменты времени с учетом отражений от торцов стержня в оболочке длиной $L = 30$ м. Сплошные кривые — результаты численных экспериментов; пунктирные — аналитические решения (3.1.5), (3.1.13).

На рис. 3.1.3 приведены эпюры перемещений в трубе длиной 100 м в момент времени $t = 19.6$ мс для различных значений τ_0 . Остальные параметры те же, что и на рис. 3.1.1, 3.1.2. Аналитические и численные решения совпадают с высокой степенью точности (см. рис. 3.1.3).

На рис. 3.1.4, 3.1.5 представлены осциллограммы численных и аналитических решений для перемещения и скорости перемещения сечения трубы $z = 0$ при полусинусоидальном воздействии. Параметры задачи: $P_0 = 88$ кН, $t_0 = 0.22$ мс, $L = L_1 = 4$ м, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $h = 0.003$ м, $R = 0.045$ м, $\rho = 7530$ кг/м³,

$h_z = 0.1$ м, $\tau_0 = 0.003$ МПа. Вертикальные штрих-пунктирные линии соответствуют приходу отраженных волн в моменты времени $t = 2L/c$, $t = 4L/c$. Сплошная линия — численное решение, пунктирная — аналитическое решение, в котором учтено только одно отражение.

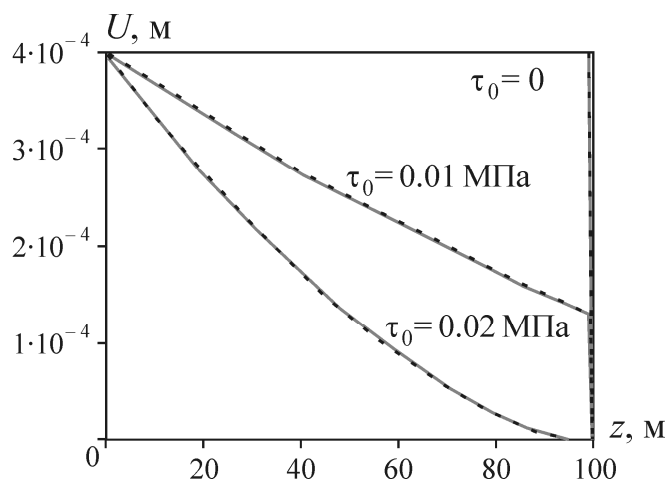


Рис. 3.1.3. Эпюры перемещений в трубе длиной 100 м в момент времени $t = 19.6$ мс для различных значений τ_0 : сплошные кривые — результаты численных экспериментов, пунктирные — аналитическое решение (3.1.10).

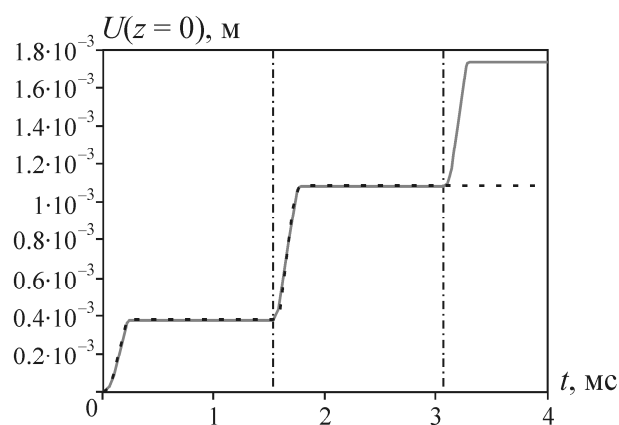


Рис. 3.1.4. Осциллограммы перемещения в сечении $z = 0$.

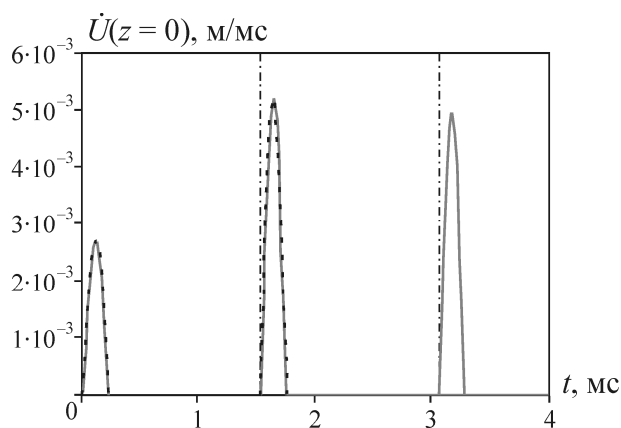


Рис. 3.1.5. Осциллограммы скорости перемещения в сечении $z = 0$.

Сравнение результатов численных расчетов, проведенных при различных значениях параметров, с формулами (3.1.5), (3.1.10), (3.1.13), (3.1.14) показывает, что численные и приближенные аналитические решения совпадают с большой степенью точности, если выполняется условие $t_0 \ll t_*$.

На рис. 3.1.6 приведены результаты численных расчетов для перемещения сечения трубы $z = 0$ в зависимости от времени при многократных отражениях возмущений от торцов трубы. Параметры задачи те же, что и на рис. 3.1.4, 3.1.5. Значение τ_0 варьировалось. Тонкие линии — решение при полусинусоидальном воздействии (3.1.4), жирные линии — при действии прямоугольного импульса (3.1.17) длительности $\frac{t_0}{2}$. Штрих-пунктирные линии соответствуют приближенным аналитическим оценкам (3.1.16), (3.1.19).

Таким образом, при воздействии импульсов разной формы, но с одинаковой энергией удара для трубы без трения, равной в данном случае $E_\Sigma = \frac{P_0^2 t_0}{2\rho c S_t}$, и одинаковой силой трения, величины полного проскальзывания трубы с внешним сухим трением на поверхности имеют разное значение и качественно верно определяются грубыми оценками (3.1.16), (3.1.19).

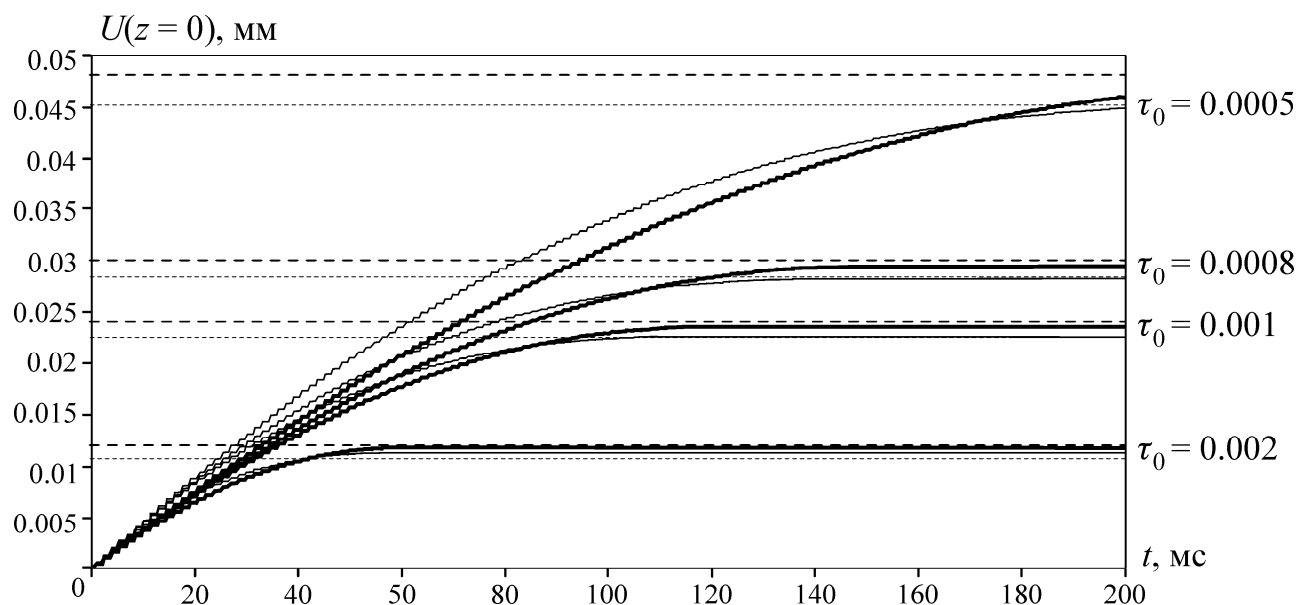


Рис. 3.1.6. Осциллограммы перемещений сечения трубы $z = 0$: тонкие линии — решение при воздействии (3.1.4), жирные — при действии импульса (3.1.17).

На рис. 3.1.7 представлены зависимости перемещений в момент времени $t = 100$ мс от силы трения $F_{\text{тр}}$ при действии полусинусоидального импульса (3.1.4), рассчитанные конечно-разностным методом в случае, когда труба частично

погружена в грунт, при следующих параметрах: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $P_0 = 88$ кН, $t_0 = 0.22$ мс, $h = 0.003$ м, $R = 0.045$ м, $\rho = 7530$ кг/м³, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $h_z = 0.1$ м.

Сплошная кривая соответствует конечно-разностному решению, штриховая — приближенной аппроксимации конечно-разностного решения: $F(F_{\text{тр}}) = \frac{21.961}{F_{\text{тр}}^{0.9413}}$,

которая близка к обратной функции $\frac{21.961}{F_{\text{тр}}}$. Если $F_{\text{тр}} \leq 2P_0$, то происходит

проскальзывание трубы относительно среды. Качественное поведение зависимости перемещения трубы за один удар от силы трения совпадает с экспериментальными результатами, приведенными в [143] при торцевом и конусном сопряжении адаптера с трубой.

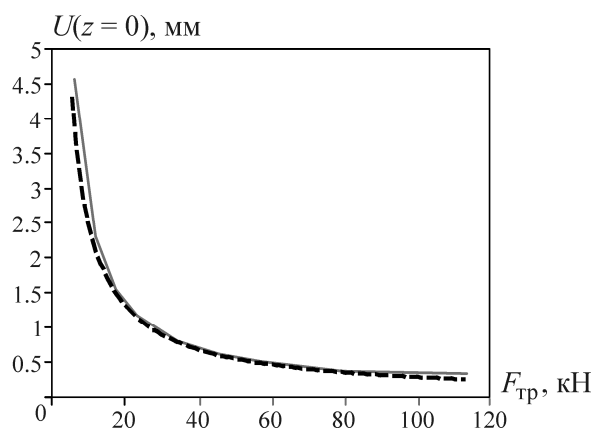


Рис. 3.1.7. Зависимость перемещений от силы трения $F_{\text{тр}}$ в момент времени $t = 100$ мс при действии полусинусоидального импульса.

На рис. 3.1.8, 3.1.9 показаны результаты численных расчетов перемещений сечения трубы $z = 0$, полученные для различных значений длины трубы: $L = 3.5$ м + L_1 . Остальные параметры те же, что и на рис. 3.1.7.

На рис. 3.1.8 приведены зависимости перемещений от времени. На рис. 3.1.9 представлена сплошной линией зависимость перемещений в момент времени $t = 100$ мс от длины L_1 той части трубы, которая погружена в грунт. Штриховая линия соответствует приближенной аппроксимации результатов численного эксперимента функцией $F(L_1) = 4.28L_1^{-0.9448}$. Эта функция очень близка

к обратной функции $\frac{4.28}{L_1}$. Таким образом, для трубы, частично погруженной в грунт, качественная зависимость от L_1 совпадает с полученной в формуле (3.1.16) для трубы, полностью погруженной в грунт.

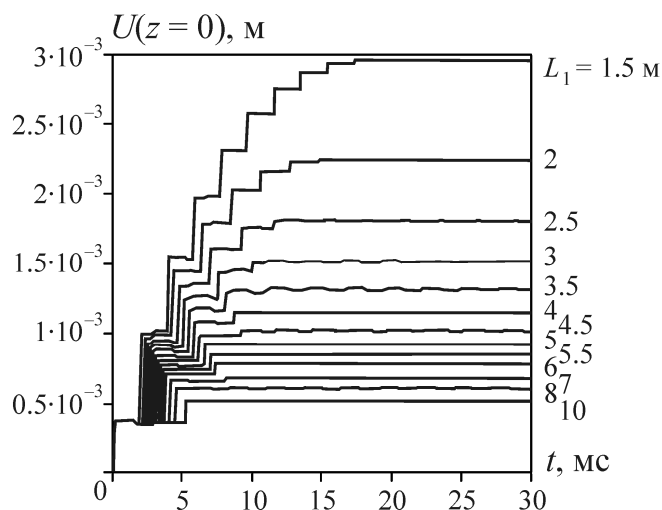


Рис. 3.1.8. Осциллограммы перемещений для различных значений длины трубы, погруженной в грунт.

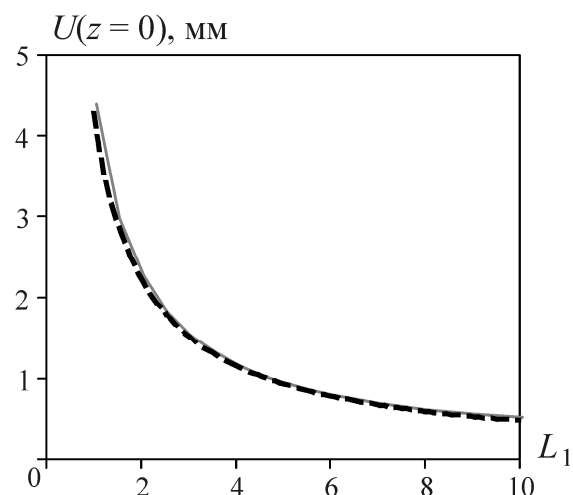


Рис. 3.1.9. Зависимость перемещений от длины трубы, погруженной в грунт, в момент времени $t = 100$ мс.

Зависимости максимумов скоростей от расстояния, полученные численно при тех же параметрах ($L = L_1 = 100$ м, $E = 2.03 \cdot 10^5$ МПа, $h = 0.01$ м, $R = 0.1625$ м, $\rho = 7805$ кг/м³, $h_z = 0.1$ м, $\tau_0 = 0.02$ МПа), что и в [75] по другой модели, иллюстрирует рис. 3.1.10, где кривая 1 соответствует $\sigma_0 = 50$ МПа, $t_0 = 1$ мс, кривая 2 — $\sigma_0 = 70.7$ МПа, $t_0 = 0.5$ мс, кривая 3 — $\sigma_0 = 100$ МПа, $t_0 = 0.25$ мс. Здесь использовано следующее обозначение: $\sigma_0 = P_0 / S_t$. Линии 1–3 и результаты расчетов [75] качественно и количественно совпадают и описываются с большой точностью формулами (3.1.5).

На рис. 3.1.11 представлено распределение перемещений по длине трубы в момент времени 19.6 мс для различных значений амплитуды и длительности полусинусоидального импульса, выбранных так, что энергия удара у них совпадает и равна $P_0^2 t_0 / 2$. Сплошная кривая — аналитическое решение (3.1.10),

штрих-пунктир — численные расчеты. Параметры задачи те же, что и на рис. 3.1.10. Видно, что аналитическое решение с большой точностью описывает численное решение за исключением области, близкой к месту удара. Эти кривые качественно и количественно совпадают с расчетами, полученными в [75] для другой модели.

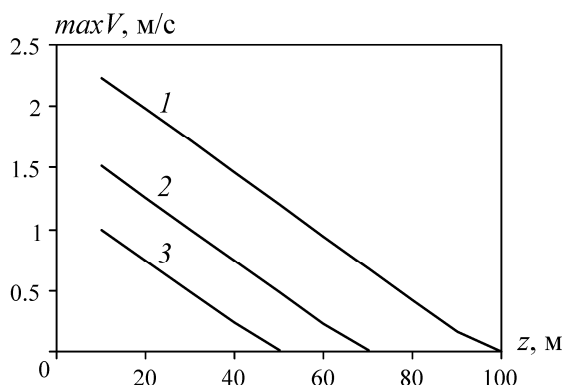


Рис. 3.1.10. Зависимости максимумов скоростей от расстояния

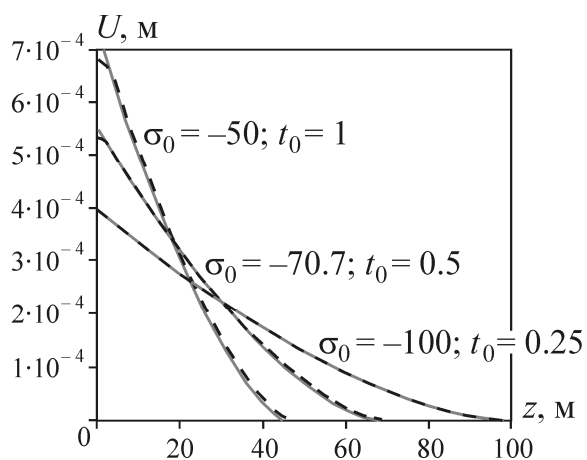


Рис. 3.1.11. Эпюры перемещений в момент времени 19.6 мс

На рис. 3.1.12 приведены результаты расчетов в момент времени 19.6 мс при действии синусоидальной нагрузки, приложенной к торцу стержня:

$$ES_t \frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 \sin(\omega_* t) H_0(t).$$

Параметры задачи: $\omega_* = 3.14 \text{ мс}^{-1}$, $\sigma_0 = 100 \text{ МПа}$, $t_0 = 1 \text{ мс}$; остальные параметры те же, что и на рис. 3.1.10.

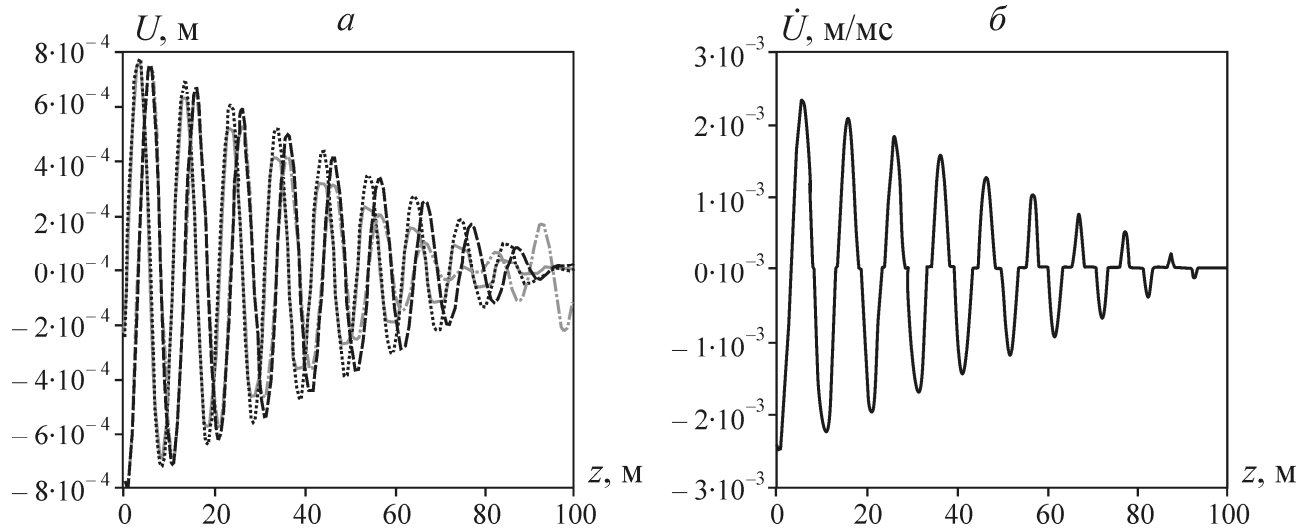


Рис. 3.1.12. (а) Эпюры перемещений: сплошная кривая — конечно-разностное решение; штриховая — решение (3.1.22); штрих-пунктирная — решение (3.1.21); пунктирная кривая — решение (3.1.23). (б) Эпюры скоростей перемещений.

На рис. 3.1.12а представлены эпюры перемещений. Сплошная кривая соответствует конечно-разностному решению уравнений (3.1.1)–(3.1.3), штрих-пунктирная — приближенному аналитическому решению, полученному в [198] методом механического аналога, которое в обозначениях данной работы имеет вид

$$U(z, t) = \left(A_0 - \frac{2\tau_0 P_t z}{\pi c \omega_* \rho S_t} \right) \sin \left[\omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad (3.1.21)$$

$$A_0 = \frac{2c}{\pi \omega_*} \sqrt{\left(\frac{\pi P_0}{2ES_t} \right)^2 - \left(\frac{\tau_0 P_t}{c \omega_* \rho S_t} \right)^2}.$$

Пунктирная кривая — приближенное аналитическое решение, найденное методом комплексных амплитуд в [198]:

$$U(z, t) = \left(A_0 - \frac{\tau_0 P_t z}{2c \omega_* \rho S_t} \right) \sin \left[\omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]. \quad (3.1.22)$$

На рис. 3.1.12б показаны графики скоростей перемещений.

Сравнение приведенных результатов устанавливает, что решение, полученное методом механического аналога (3.1.21), дает большую погрешность в районе фронта бегущих возмущений, при удалении от фронта оно правильно определяет амплитуду осцилляций. Решение, полученное методом комплексных амплитуд (3.1.22), дает меньшую погрешность вблизи фронта, а за фронтом амплитуда осцилляций заметно больше, чем в конечно-разностном решении. Для обоих аналитических решений [198] фаза осцилляций не совпадает с численным решением уравнений (3.1.1)–(3.1.3). Как нетрудно заметить, поскольку напряжения на торце стержня задаются синусоидальной функцией, перемещения после интегрирования должны определяться через косинус. Второе замечание: в подкоренном выражении, входящем в формулу для определения A_0 , при данных значениях параметров задачи второе слагаемое составляет менее 0.05 % от первого слагаемого и поэтому оно может быть отброшено. Третье замечание: как было показано выше, в стержне с сухим трением на боковой поверхности возмущения в области $z > z_*$ отсутствуют. С учетом этих трех замечаний формулу (3.1.22) перепишем в следующем виде:

$$U(z, t) = \frac{P_0 - \tau_0 P_t / 2}{\omega_* \rho c S_t} \cos \left[\omega_* \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] H_0(z_* - z). \quad (3.1.23)$$

На рис. 3.1.12а пунктирная кривая соответствует выражению (3.1.23). Как следует из трех решений (3.1.21)–(3.1.23), наиболее близко к конечно-разностному решению решение (3.1.23). На эпюрах скорости видно, как происходит уменьшение каждой полуволны осцилляций при гармоническом возмущении. Если представить синусоидальное воздействие как сумму полусинусоид и учесть знак скорости для каждой из этих полусинусоид, то из формул (3.1.5), (3.1.10) можно получить более точное решение, чем (3.1.23), в виде суммы ряда. Из-за громоздкости это решение не приводим. Сравнивались также конечно-разностные решения с известным аналитическим решением [124]. Их результаты на графиках сливаются.

§3.2. Внешняя среда деформируема

В § 3.2 учтено деформирование внешней среды и выполнено сравнение расчетов, проведенных по двум моделям с деформируемой и недеформируемой средой. Получены приближенные аналитические решения одномерной задачи распространения возмущений в радиальном направлении в упругой среде, взаимодействующей с трубой без проскальзывания, при продольном воздействии, приложенном к торцу трубы. Эти решения являются тестовыми для конечно-разностных решений двумерных задач, в которых на поверхности контакта трубы и среды задается либо упругое взаимодействие, либо сухое трение. Результаты данного параграфа опубликованы в [37].

3.2.1. Постановка двумерной задачи

Исследуется распространение нестационарных волн в трубе, погруженной в грунт, с внешним сухим трением на границе контакта трубы и среды. Рассматривается следующая смешанная динамическая осесимметричная задача о взаимодействии упругой цилиндрической трубы с упругим слоем грунта. По торцу трубы наносится продольный удар массивным телом. Движение трубы описывается одномерным волновым уравнением, боковое действие грунта при малых деформациях — упрощенными моделями упругой среды, а в состоянии текучести — законом сухого трения.

Пусть упругий трубчатый стержень (R — радиус; h — толщина стенки) длины L заглублен в грунт на величину L_1 . К его торцу прикладывается продольный полусинусоидальный импульс (3.1.4) с амплитудой P_0 и длительностью t_0 .

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с ударяемым концом стержня, а ось Z была направлена параллельно оси стержня в глубь среды. Движение стержня описывается одномерным волновым уравнением относительно перемещений $U(t, z)$:

$$\ddot{U} = c^2 U''_{,zz} + \tau(z, \varepsilon_{rz}). \quad (3.2.1)$$

Здесь $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость продольной волны в стержне; E — модуль Юнга; ρ — плотность материала трубы; τ — реакция среды.

Начальные условия нулевые:

$$U|_{t=0} = 0, \quad \dot{U}|_{t=0} = 0. \quad (3.2.2)$$

На торце стержня $z = 0$ задается напряжение, торец $z = L$ свободен от напряжений:

$$ES_t U'_{,z}|_{z=0} = -Q(t), \quad ES_t U'_{,z}|_{z=L} = 0, \quad (3.2.3)$$

где $S_t = \pi h(2R - h)$ — площадь поперечного сечения трубы.

Зависимость $\tau(z, \varepsilon_{rz})$ соответствует упругопластической диаграмме с учетом зуба текучести (рис. 3.2.1). Упругий участок от 0 до τ_0 на диаграмме соответствует сцеплению трубы и среды; при достижении предельного сдвигового напряжения τ_0 начинается страгивание; τ_1 — напряжение, при котором происходит проскальзывание (обычно оно пропорционально прижимающей силе). При остановке текущего сечения трубы $z > L - L_1$ вновь происходит сцепление с грунтом, которое в дальнейшем опять может быть нарушено приходом волн напряжений, отраженных от торцов. Направление действия сил трения определяется в зависимости от знака скорости в этих волнах. В данной работе предполагается, что $\tau_0 = \tau_1$. Это соответствует модели, предложенной в [221].

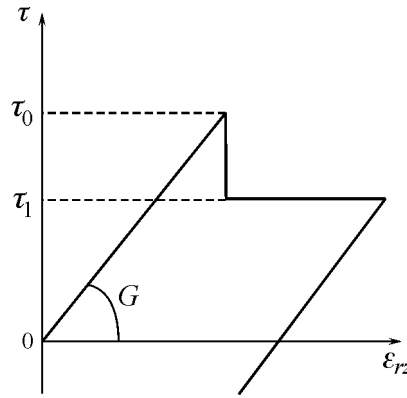


Рис. 3.1.1. Зависимость реакции среды от сдвиговой деформации.

На упругой стадии процесса взаимодействия, когда $\text{abs}(\tau) < \tau_0$, для определения сдвигового напряжения грунта, действующего на трубу, используем двумерную модель среды с одним перемещением V в направлении z :

$$\ddot{V} = a^2 V''_{,zz} + b^2 \left(V''_{,rr} + \frac{1}{r} V'_{,r} \right), \quad a^2 = \frac{\lambda + 2G}{\gamma}, \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}. \quad (3.2.4)$$

Здесь G — модуль сдвига; λ — коэффициент Ламе; γ — плотность грунта; r — радиальная координата. Уравнение (3.2.5) представляет модель среды, учитывающую сжимаемость грунта вдоль оси трубы (коэффициент a^2), сопротивляемость материала сдвигу (коэффициент b^2) и инерционность грунта при движении его частиц вдоль оси трубы. Начальные условия для перемещения V нулевые:

$$V(z, r)|_{t=0} = 0, \quad \dot{V}(z, r)|_{t=0} = 0. \quad (3.2.5)$$

В монографии [137] эта модель применялась для статических и динамических задач, и было показано, что амплитуды деформаций и их частных производных в осевом направлении существенно превышают соответствующие величины в радиальном направлении. Это позволяет перейти от точной модели теории упругости к физически адекватной и математически более простой модели деформируемой среды с одним перемещением (3.2.5).

Граничное условие для уравнения (3.2.5) на поверхности трубы при отсутствии проскальзывания следующее:

$$V(z, r)|_{r=R} = U(z), \quad L - L_1 \leq z \leq L. \quad (3.2.6)$$

Оно определяет равенство перемещений трубы и грунта на поверхности трубы. Остальные граничные условия соответствуют отсутствию перемещений на внешней границе грунта $r = R_2$ и напряжений на свободных поверхностях грунта:

$$V(z, r)|_{r=R_2} = 0 \quad (L - L_1 \leq z \leq L), \quad V'_{,z}(z, r)|_{z=L-L_1} = 0, \quad V'_{,z}(z, r)|_{z=L} = 0. \quad (3.2.7)$$

При этом реакция среды τ выражается так:

$$\tau(z, t) = \frac{P_t}{S_t \rho} \begin{cases} GV'_{,r}|_{r=R}, & z > L - L_1, \\ 0, & z \leq L - L_1. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Здесь $P_t = 2\pi R$ — периметр трубы.

На этапе проскальзывания грунта, когда $\text{abs}(\tau) > \tau_0$, труба взаимодействует с ним по закону сухого трения:

$$\tau(z, t) = \frac{P_t}{S_t \rho} \begin{cases} -k\tau_0, & z > L - L_1, \\ 0, & z \leq L - L_1, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$k = \text{sign}[\dot{U}(z) - \dot{V}(z, R)] \quad \text{при} \quad \dot{U} - \dot{V} \neq 0.$$

Поскольку при проскальзывании силы трения, действующие на стержень и среду, совпадают по величине и различны по направлению, для среды имеем следующие граничные условия:

$$GV'_{,r}|_{r=R} = k\tau_0. \quad (3.2.10)$$

Ниже предлагается способ сквозного численного расчета волновых процессов в системах с сухим трением, позволяющий рассматривать нагрузку

любого типа, поскольку направление и величина силы трения в каждой точке стержня и в каждый момент времени выбирается в процессе решения из физических соображений, а также приведены аналитические оценки для некоторых задач.

3.2.2. Особенности численных алгоритмов для двумерной задачи с учетом внешнего сухого трения

Система уравнений (3.2.1)–(3.2.10) решалась численно для одиночного удара. Использовалась явная конечно-разностная схема типа “крест” и способ минимизации численной дисперсии. Аппроксимация уравнения (3.2.4) имеет вид

$$V_{ji}^{n+1} - 2V_{ji}^n + V_{ji}^{n-1} = \left[a^2 \Lambda_{jj} V_{ji}^n + b^2 \left(\Lambda_{ii} V_{ji}^n + \frac{1}{r} \Lambda_i^0 V_{ji}^n \right) \right] h_t^2. \quad (3.2.11)$$

Здесь Λ_{jj} , Λ_{ii} — центрально-разностные операторы второго порядка по координатам z , r ; Λ_i^0 — центрально-разностный оператор первой производной по r ; $V_{ji}^n = V(h_t n, h_z j, r_i)$ — сеточные значения перемещений среды в момент времени $t = h_t n$ в точке с координатами $z = h_z j$; $r_i = R + h_r(i-1)$, $i = 1, 2, \dots$; h_t , h_z , h_r — шаги разностной сетки по координатам t , z , r .

Аппроксимация уравнения (3.2.1) имеет вид

$$U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = (c^2 \Lambda_{jj} U_j^n + \tau_j^n) h_t^2, \quad (3.2.12)$$

где $U_j^n = U(h_t n, h_z j)$, $\tau_j^n = \tau(h_t n, h_z j)$ — сеточные значения перемещений трубы и сдвиговых напряжений на поверхности трубы.

Условия устойчивости разностных уравнений (3.2.11) и (3.2.12) запишутся так:

$$h_t \leq \left(\frac{a^2}{h_z^2} + \frac{b^2}{h_r^2} \right)^{-1/2}, \quad h_t \leq \frac{h_z}{c}.$$

Оптимальными параметрами разностной сетки, обеспечивающими минимум численной дисперсии уравнений (3.2.11), (3.2.12), являются в осевом направлении $h_z = ch_t$, в радиальном — $h_r = \frac{h_t cb}{\sqrt{c^2 - a^2}}$.

Остановимся более подробно на аппроксимации граничных условий. Используем правую разность для первых производных на торце стержня $z = 0$: $ES_t(U_1^n - U_0^n)/h_z = -Q(t)$, и центрально-разностную аппроксимацию в граничном условии при $z = L$. Аналогично аппроксимируем граничные условия для среды на границах $z = L - L_1$ и $z = L$. Для граничного условия (3.2.6) использовалась трехточечная аппроксимация, предложенная автором в работе [4].

Алгоритм расчета с учетом трения аналогичен пункту 3.1.2 и состоит в следующем. Поскольку ни направление, ни величина силы трения заранее неизвестны, в процессе решения вычисляются относительные скорости перемещений точек среды и трубы для двух возможных знаков k ($k > 0$ и $k < 0$):

а) в первом случае ($k > 0$) введем фиктивную скорость $U_j^+ - V_{j,1}^+$, где

$$V_{j,1}^+ = \frac{V_{j,1}^{n+1} - V_{j,1}^n + h_t^2 \tau_0}{h_t}, \quad U_j^+ = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n + h_t^2 \tau_0}{h_t};$$

б) во втором случае ($k < 0$) введем фиктивную скорость $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$, где

$$V_{j,1}^- = \frac{V_{j,1}^{n+1} - V_{j,1}^n - h_t^2 \tau_0}{h_t}, \quad U_j^- = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n - h_t^2 \tau_0}{h_t}.$$

В этих двух случаях $V_{j,1}^{n+1}$ и U_j^{n+1} вычисляются из разностных уравнений (3.2.11), (3.2.12) без учета трения.

При этом возможны две ситуации:

1. Если скорости $\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+$ и $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$ одного знака, то в качестве истинных значений смещений $V_{j,1}^{n+1}$, U_j^{n+1} из $V_{j,1}^+$, U_j^+ и $V_{j,1}^-$, U_j^- выбирается пара $V_{j,1}^k$, U_j^k , для которой достигается минимум

$$\text{abs}(\dot{U}_j^k - \dot{V}_{j,1}^k) = \min[\text{abs}(\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-), \text{abs}(\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+)].$$

2. Если скорости $\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+$ и $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$ разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о пассивности трения, следует вывод о том, что реальная относительная скорость среды и трубы равна нулю. Точки среды и трубы склеиваются и движутся вместе, следовательно, сила трения отсутствует и снова начинается упругое взаимодействие трубы и среды.

Таким образом, проблема определения границы, разделяющей области относительного движения и относительного покоя, представляющая основную трудность в аналитических решениях, сводится к выявлению точек, где $\dot{V}_{j,1}^+ - \dot{U}_j^+$ и $\dot{V}_{j,1}^- - \dot{U}_j^-$ разных знаков или одна из них обращается в нуль.

Поскольку в процессе расчета однозначно определяется величина и направление действия силы трения, на каждом временном слое решается линейная задача, в которой сила трения теперь определена и входит как нагрузка в правую часть уравнения. Остановимся далее на следующей особенности трения в задачах о взаимодействии трубы и грунта. В ряде случаев трение может играть как пассивную, так и активную роль. Например, если частицы среды и сечения стержня движутся в одном направлении и $|\dot{V}| > |\dot{U}|$, то трение ускоряет стержень, в противном случае тормозит. Если же $\dot{V}$ и $\dot{U}$ разного знака, то всегда реализуется торможение.

3.2.3. Аналитические решения одномерной в радиальном направлении задачи упругого взаимодействия трубы и грунта

С целью тестирования конечно-разностных алгоритмов получим аналитические оценки более простых постановок данной задачи.

Рассмотрим одномерную задачу. Имеется тонкий (в направлении оси z) слой среды радиусом R_2 , и в нее упруго заделана труба радиусом R . Движение среды описывается одномерным волновым уравнением по радиальной координате r , которое получено из (3.2.5) в предположении, что производными по оси z можно пренебречь:

$$\ddot{V} = b^2 \left(V_{,rr}'' + \frac{1}{r} V_{,r}' \right), \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}. \quad (3.2.13)$$

Граничные условия:

$$V(r)|_{r=R} = U, \quad V(r)|_{r=R_2} = 0. \quad (3.2.14)$$

Уравнение движения трубы получаем из (3.1.2), также предполагая, что зависимостью перемещения от переменной z можно пренебречь:

$$\ddot{U} = \frac{P_t G}{S_t \rho} V_{,r}' \Big|_{r=R} + \frac{Q(t)}{S_t \rho}. \quad (3.2.15)$$

Начальные условия нулевые.

Применим преобразование Лапласа по времени с параметром p . Уравнения движения и граничные условия (3.2.13)–(3.2.15) в изображениях имеют вид:

$$p^2 V^L = b^2 \left[(V_{,rr}'')^L + \frac{1}{r} (V_{,r}')^L \right], \quad (3.2.16)$$

$$p^2 V^L \Big|_{r=R} = \frac{P_t G}{S_t \rho} (V_{,r}')^L \Big|_{r=R} + \frac{Q^L}{S_t \rho}, \quad V^L \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Рассмотрим сначала случай безграничной среды ($R_2 \rightarrow \infty$). Предположим, что к трубе приложена ступенчатая нагрузка $Q(t) = P_0 H_0(t)$. Решение системы уравнений (3.2.16) в изображениях по Лапласу запишется так:

$$U^L = \frac{P_0 K_0(\eta)}{L S_t \rho p^2 \left(p K_0(\eta) + K_1(\eta) \frac{P_t \gamma b}{S_t \rho} \right)},$$

где K_0 , K_1 — цилиндрические функции мнимого аргумента, $\eta = Rp/b$.

Асимптотика решения в изображениях при $p \rightarrow 0$, что соответствует $t \rightarrow \infty$ в пространстве оригиналов, имеет вид

$$U^L = \frac{P_0}{2\pi G p} \ln \left(\frac{p C R}{2b} \right).$$

Обращая преобразование Лапласа [69], получим следующую асимптотическую зависимость перемещения трубы от времени при $t \rightarrow \infty$ в случае безграничной среды:

$$U(t) = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{2bt}{R}\right), \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.2.17)$$

С учетом отражений волн от внешней границы $r = R_2$ решение в изображениях уравнений (3.2.16) примет вид

$$U^L = \frac{P_0}{S_t \rho p^2} \left(p + \frac{[K_0(\eta)I_0(\eta_2) - I_0(\eta)K_0(\eta_2)]}{[K_1(\eta)I_0(\eta_2) - I_1(\eta)K_0(\eta_2)]} \frac{P_t \gamma b}{S_t \rho} \right)^{-1}. \quad (3.2.18)$$

Здесь I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя, $\eta = \frac{Rp}{b}$, $\eta_2 = \frac{R_2 p}{b}$.

Если $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$), то из (3.2.18) следует, что решение осциллирует относительно статического положения равновесия, определяемого формулой

$$U_{stat} = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right). \quad (3.2.19)$$

На рис. 3.2.2 представлены результаты конечно-разностного решения системы уравнений (3.2.13)–(3.2.15) (сплошные линии), асимптотическое решение (3.2.17) (штриховая линия) и статическое значение (3.2.19) (штрихпунктирные линии). Толстые кривые соответствуют значению $R_2 = 20$ м, тонкие — $R_2 = 2$ м. Параметры разностной сетки: $h_r = 0.01$ м, $h_t = h_r / b$. Остальные параметры: $P_0 = 88$ кН, $E = 2.1 \times 10^5$ МПа, $h = 0.003$ м, $R = 0.045$ м, $\rho = 7530$ кг/м³, $\gamma = 2000$ кг/м³, $a = 0.611$ м/мс, $b = 0.357$ м/мс — в дальнейшем взяты в качестве базового набора. Здесь и далее использованы среднестатистические параметры грунтов, соответствующие суглинку.

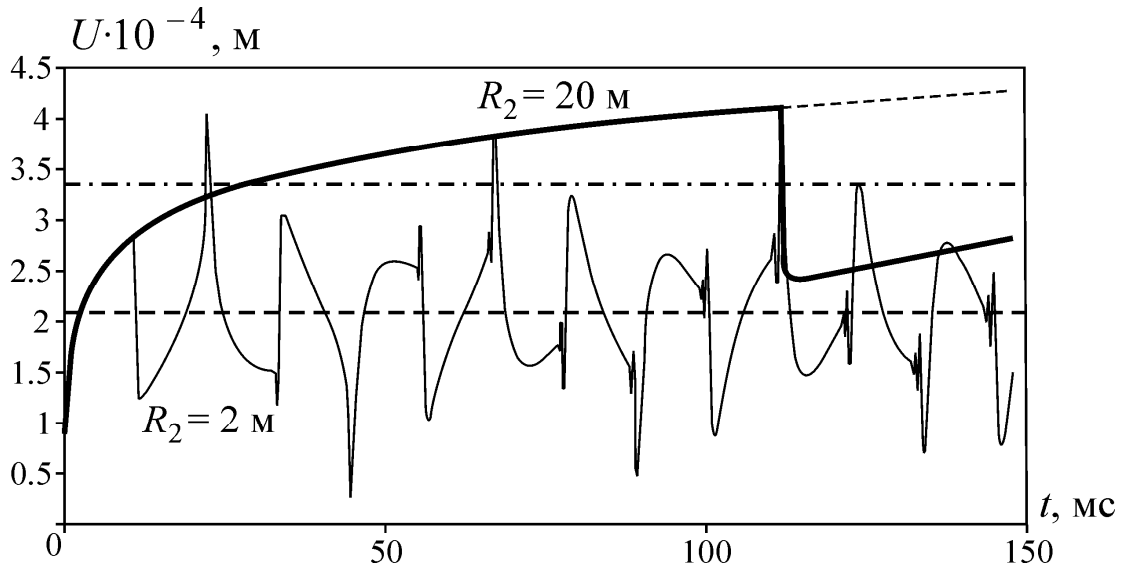


Рис. 3.2.2. Осциллограммы перемещений при ступенчатом воздействии.

Анализ рис. 3.2.2 показывает, что асимптотическое решение (3.2.17) с большой точностью описывает конечно-разностное решение от начала воздействия до прихода первой отраженной от внешней границы волны. Наличие отражений от границ $r = R$, $r = R_2$ приводит к колебаниям перемещения относительно статического значения (3.2.19).

Рассмотрим теперь импульсное воздействие (3.1.4) на трубу со средой конечного радиуса R_2 . Асимптотическое решение в изображениях системы уравнений (3.2.16) имеет следующий вид:

$$U^L = \frac{P_0 \omega_* (1 + e^{-p\pi/\omega_*})}{S_t \rho (p^2 + \omega_*^2)(p^2 + \beta^2)}, \quad \beta^2 = \frac{2\pi G}{S_t \rho \ln\left(\frac{R_2}{R}\right)}.$$

Обращая данное выражение [69], получим зависимость от времени для перемещения оболочки:

$$U = \frac{P_0}{S_t \rho \beta (\omega_*^2 - \beta^2)} \begin{cases} \omega_* \sin \beta t - \beta \sin \omega_* t, & t \leq t_0, \\ \omega_* (\sin \beta t + \sin \beta(t - t_0)), & t > t_0. \end{cases}$$

Если $\omega_* \ll \beta$, то эту формулу можно упростить:

$$U = U_0 \begin{cases} \sin \omega_* t, & t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases} \quad U_0 = \frac{P_0}{S_t \rho \beta^2}. \quad (3.2.20)$$

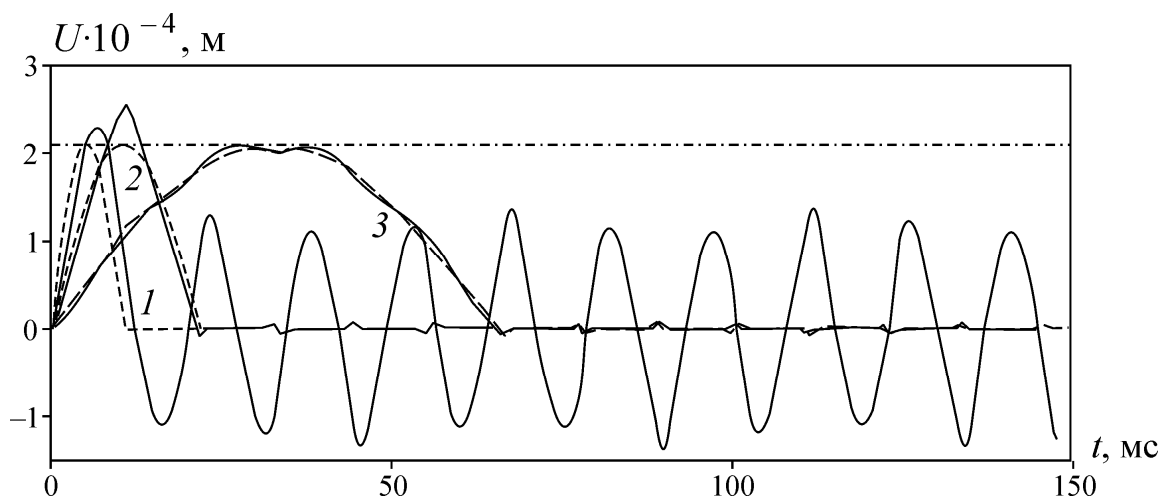


Рис. 3.2.3. Зависимость перемещений от времени при импульсном воздействии

На рис. 3.2.3 приведены примеры расчета импульсного воздействия на трубу, впаянную в среду ограниченного радиуса $R_2 = 2$ м. Длительность импульса равна $t_0 = \frac{2(R_2 - R)}{b}$ для кривой 1, $t_0 = \frac{4(R_2 - R)}{b}$ — для кривой 2 и $t_0 = \frac{12(R_2 - R)}{b}$ — для кривой 3, остальные параметры из базового набора. Сплошные линии соответствуют конечно-разностному решению, штриховые — приближенному решению (3.2.20), штрихпунктирные — значению U_0 . Сравнение решения (3.2.20) и численных расчетов показывает, что если длительность импульса кратна времени четырех пробегов волны по среде от одной границы до другой: $t_0 = \frac{4n(R_2 - R)}{b}$ ($n=1, 2, \dots$), то отраженные от внешней границы волны гасят импульс. Как видно на рис. 3.2.3, перемещение трубы и качественно и количественно верно описывается приближенным аналитическим решением (3.2.20).

3.2.4. Результаты численных расчетов двумерной задачи упругого взаимодействия трубы и грунта

Проводились конечно-разностные расчеты системы уравнений (3.2.2)–(3.2.8) для слоя среды толщиной $L = L_1 = 0.2 \text{ м} = 2h_z$ и радиусами $R_2 = 2 \text{ м}$ и $R_2 = 20 \text{ м}$ при ступенчатом воздействии. Анализ решений показал, что для двумерной задачи также характерна логарифмическая зависимость решения от времени, как и для одномерной. Качественное поведение решений одномерной (см. рис. 3.2.2) и двумерной задачи совпадает.

На рис. 3.2.4 представлены результаты численных расчетов перемещения оболочки в зависимости от времени при ступенчатом воздействии для различных значений длины трубы и среды ($L = L_1$). Параметры задачи: $R_2 = 20 \text{ м}$, $h_z = 0.1 \text{ м}$, остальные — из базового набора. Анализ расчетов показал, что с ростом длины трубы величина перемещений в сечении $z = 0$ в момент времени $t = 100 \text{ мс}$ уменьшается пропорционально логарифмической функции: $F(L) = (898 \ln(L) + 2061)^{-1}$. Для маленьких значений L (толщина слоя в направлении оси z равна двум шагам разностной сетки $L = 2h_z$) конечно-разностное решение дает большую погрешность по сравнению с функцией $F(L)$.

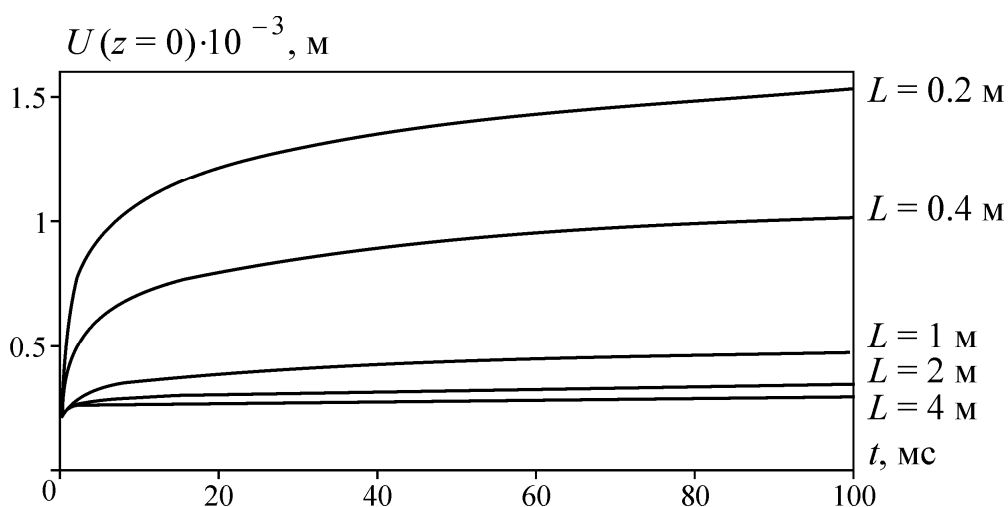


Рис. 3.2.4. Осциллограммы перемещений для различных значений длины трубы при ступенчатом воздействии.

На рис. 3.2.5 показаны кривые перемещения трубы при действии полусинусоидального импульса (3.1.1), длительность которого равна $t_0 = 4(R_2 - R)/b$, для двух значений длины трубы и среды ($L = L_1$). Параметры задачи: $R_2 = 2$ м, $h_z = 0.1$ м, остальные — из базового набора. Качественное поведение решений двумерной и одномерной задач совпадает (см. рис. 3.2.3, 3.2.4).

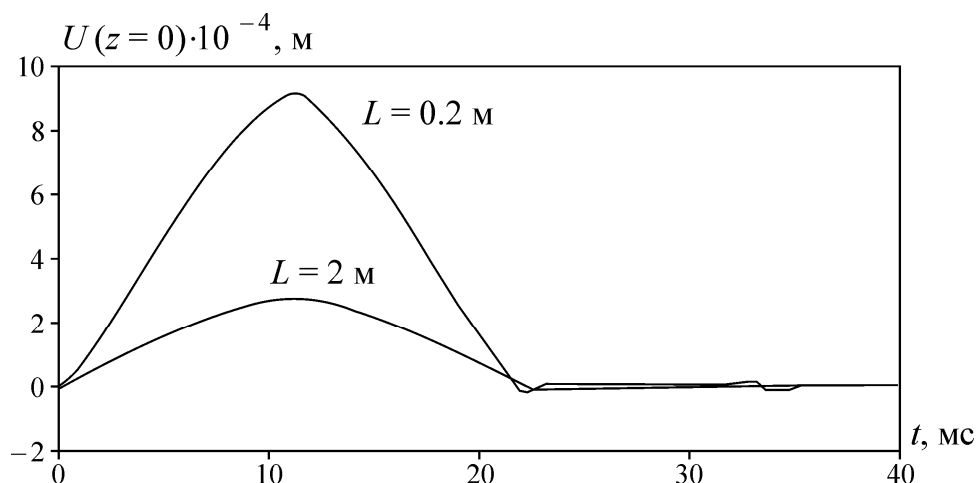


Рис. 3.2.5. Осциллограммы перемещений при импульсном воздействии.

На рис. 3.2.6 приведены эпюры сдвиговых напряжений среды на поверхности трубы в различные моменты времени. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.25$ мс, остальные — из базового набора. На рис. 3.2.6б вертикальные штриховые линии соответствуют зоне квазифронтов: $z = at$. Анализ рис. 3.2.6а показывает, что в окрестности квазифронта продольной волны, бегущей со скоростью волн в стержне c , амплитуда максимальных сдвиговых напряжений со временем падает по экспоненте, как $\sim e^{-0.85ct}$. В окрестности квазифронта продольных волн в среде ($z = at$) максимальная амплитуда сдвиговых напряжений падает примерно, как $t^{-4/3}$ (рис. 3.2.6б). На рис. 3.2.6 видно, что со временем преобладают возмущения, движущиеся со скоростью продольных волн в среде. Анализ рис. 3.2.6б позволяет оценить величину силы трения, при которой начнется проскальзывание трубы в среде в зависимости от длины трубы и от амплитуды действующего импульса.

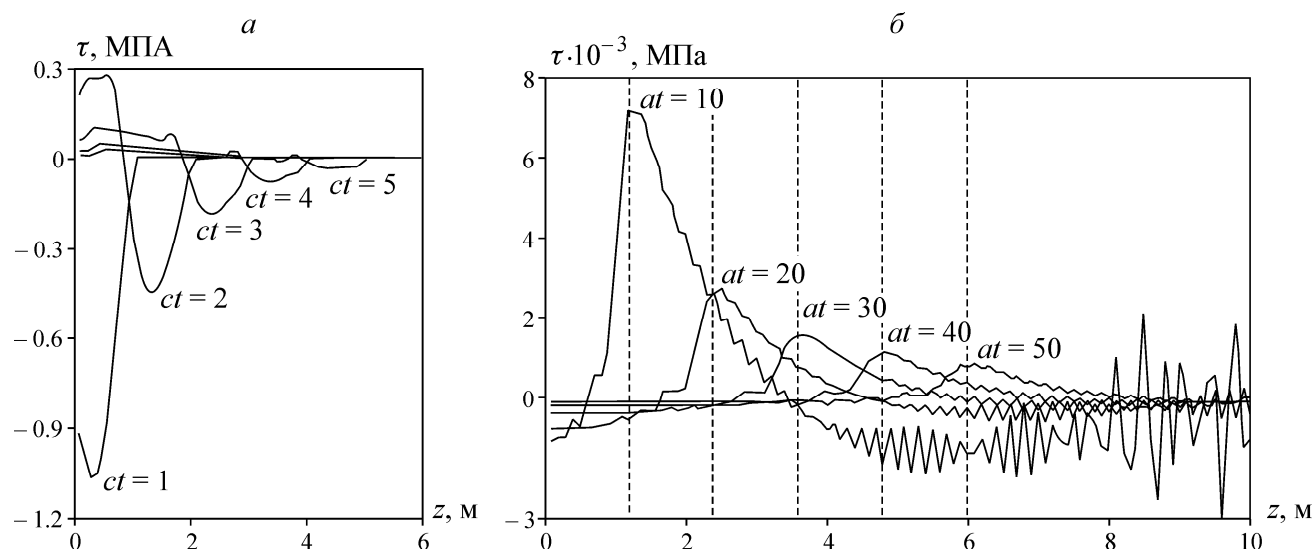


Рис. 3.2.6. Эпюры сдвиговых напряжений среды на поверхности трубы в различные моменты времени.

3.2.5. Результаты численных расчетов двумерной задачи с учетом проскальзывания на границе трубы и грунта

На рис. 3.2.7 представлены зависимости перемещений трубы в точке $z = 0$ от времени при действии полусинусоидального импульса для различных значений предельного сдвигового напряжения: рис. 3.2.7а — $\tau_0 = 0.1, 0.05, 0.03, 0.02, 0.015, 0.01$ МПа, рис. 3.2.7б — $\tau_0 = 10, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.08$ МПа. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.22$ мс, остальные — из базового набора. Значение $\tau_0 = 10$ МПа соответствует упругому процессу взаимодействия, при этом торец трубы $z = 0$ совершает осцилляции относительно нуля. С уменьшением предельной амплитуды напряжений сдвига амплитуда осцилляций уменьшается (см. кривые $\tau_0 = 0.3$ и $\tau_0 = 0.2$ МПа на рис. 3.2.7б), а затем появляется остаточное смещение (см. кривые $\tau_0 = 0.15$ и $\tau_0 = 0.1$ МПа на рис. 3.2.7б и все кривые на рис. 3.2.7а), которое растет с уменьшением τ_0 . Как видно на рис. 3.2.7б, если $\tau_0 \leq 0.2$ МПа, то происходит проскальзывание трубы относительно среды. Анализ зависимости перемещений в момент времени $t = 100$ мс от коэффициента τ_0 показал, что эта зависимость близка к обратной

функции: $\max U(\tau_0) \approx 28\tau_0^{-1}$. Проводился также анализ зависимости остаточного смещения (проскальзывания) от длительности импульса. Результаты численных расчетов показали, что величина остаточного смещения трубы пропорциональна длительности импульса.

Анализ расчетов перемещений, проведенных для различных значений длины трубы, показал, что зависимость среднего перемещения $2U_{\text{ср}} = (\max_z U + \min_z U) \Big|_{t=100 \text{ мс}}$ обратно пропорциональна длине трубы. Этот результат качественно отличается от поведения трубы упруго заделанной в грунт (см. рис. 3.2.4), для которого эта зависимость имеет логарифмический характер.

Таким образом, можно сделать вывод, что при действии внешнего сухого трения перемещение трубы обратно пропорционально силе трения $F_{\text{тр}} = P_t L \tau_0$ и прямо пропорционально длительности импульса.

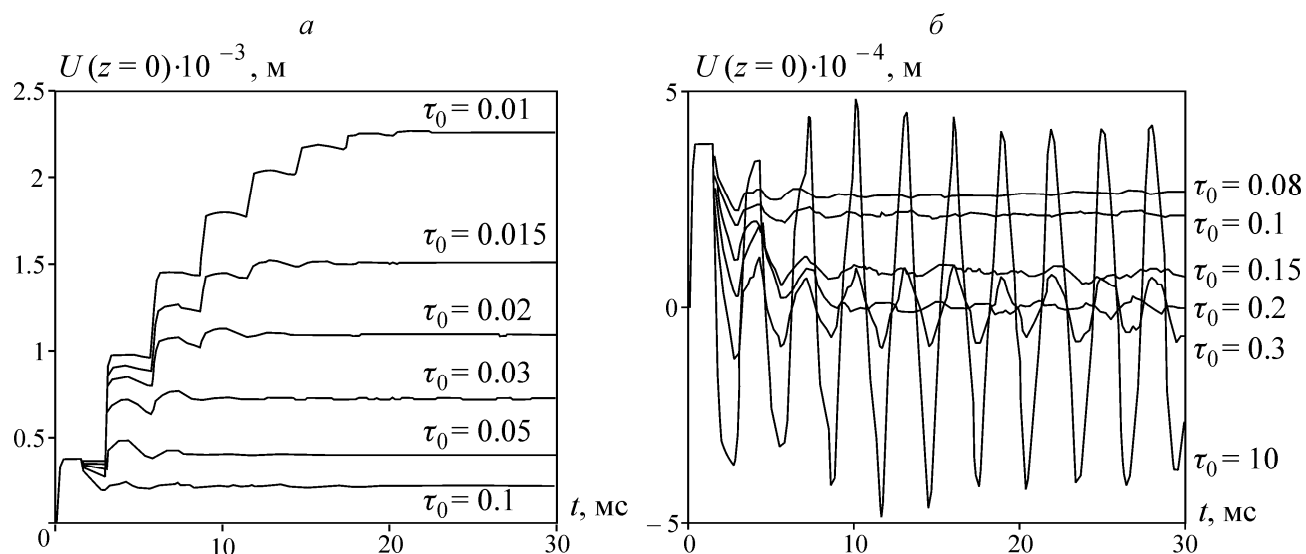


Рис. 3.2.7. Осциллограммы перемещений трубы в точке $z = 0$.

На рис. 3.2.8 приведены расчеты, выполненные по двум моделям, при импульсном воздействии для различных значений предельного сдвигового напряжения. Тонкая кривая соответствует двумерной модели среды (3.2.1)–(3.2.10), толстая — модели (3.1.1)–(3.1.4), в которой движение внешней среды не учитывается. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.22$ мс,

остальные — из базового набора. Видно, что соответствие результатов, полученных по двум моделям, достигается, если $\tau_0 < 0.02$ МПа. Таким образом, существует область параметров, для которой можно не учитывать движение внешней среды и пользоваться более простой моделью.

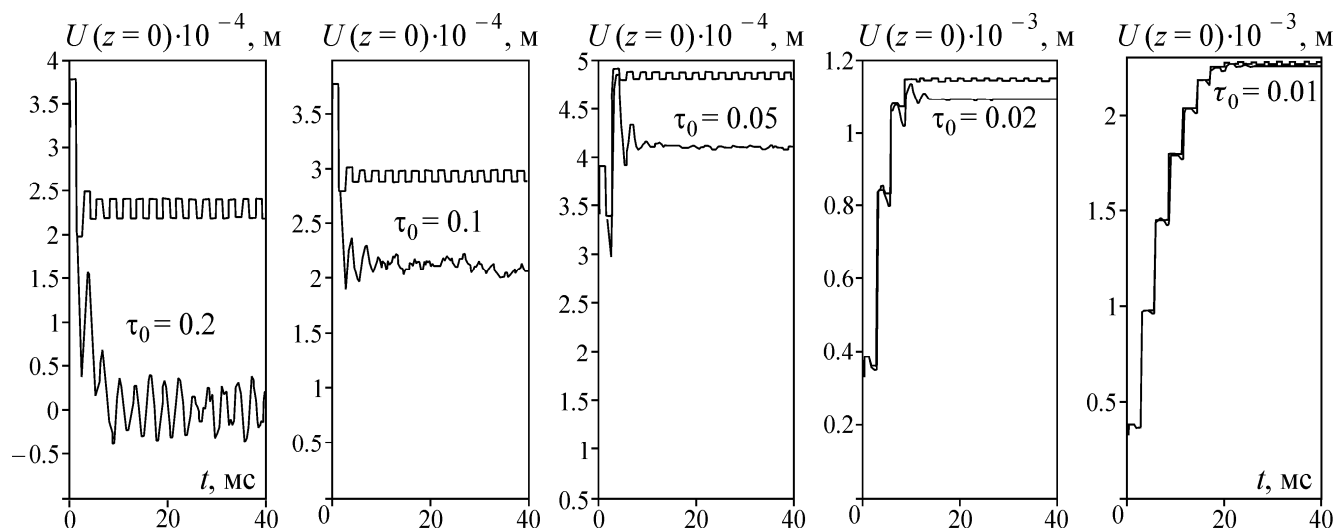


Рис. 3.2.8. Зависимость перемещений трубы в точке $z = 0$ от времени.

На рис. 3.2.9а приведены зависимости перемещений в сечении $z = 0$ от времени для различных значений амплитуды импульса. Параметры задачи: $L = L_1 = 4$ м, $t_0 = 1$ мс, $E = 2.03 \times 10^5$ МПа, $h = 0.01$ м, $R = 0.1625$ м, $\rho = 7805$ кг/м³, $h_z = 0.1$ м, $\tau_0 = 0.02$ МПа. На рис. 3.2.9а тонкие кривые соответствуют $R_2 = 0.2$ м, толстые — $R_2 = 4$ м. Как видно из сравнения кривых, при малых значениях амплитуды импульса ($\sigma_0 < 10$ кН) или, что то же самое, при малых отношениях $P_0 / F_{\text{тр}}$ влияние внешнего радиуса среды на остаточное перемещение заметно. Таким образом, когда начинается проскальзывание, величина внешнего радиуса среды практически не оказывает влияние на волновой процесс в трубе. На рис. 3.2.9б показана зависимость перемещений в сечении $z = 0$ в момент времени $t = 100$ мс от амплитуды импульса. Конечно-разностное решение — тонкая кривая, его приближенная аппроксимация, которая описывается функцией $U(\sigma_0) = 0.0014\sigma_0^2 - 0.0059\sigma_0 - 0.008$, — толстая кривая. Этот результат качественно

подтверждает вывод, сделанный в §3.1, о том, что перемещение пропорционально квадрату амплитуды импульсного воздействия.

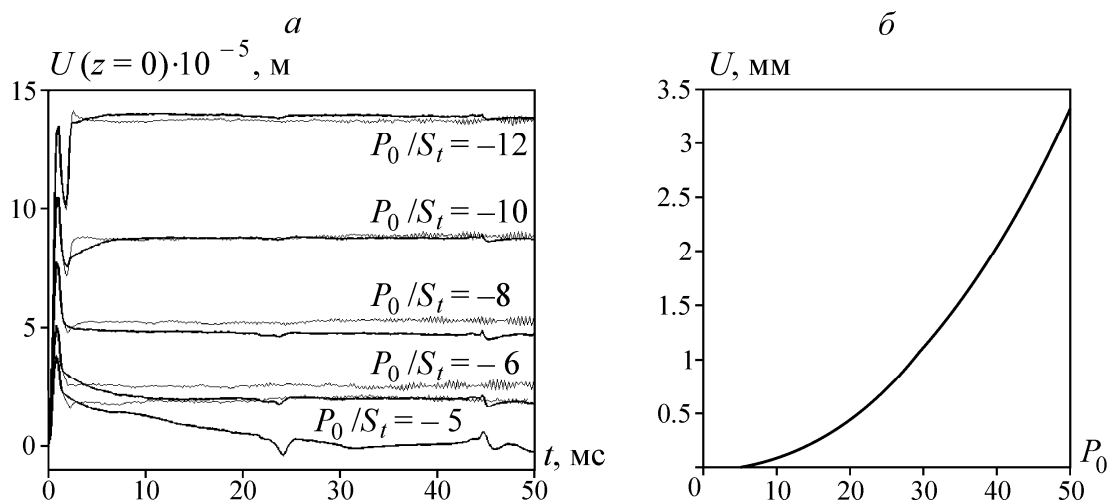


Рис. 3.2.9. (а) Зависимости перемещений от времени для различных значений амплитуды импульса. (б) Зависимость перемещений от амплитуды импульса.

На рис. 3.2.10а представлены результаты расчетов зависимости перемещений от времени для различных значений длины трубы ($L = L_1 = 4, 10, 20, 30$ м) и различных значений амплитуды импульса, $R_2 = 4$ м, остальные параметры задачи те же, что и на рис. 3.2.9. Цель данного численного эксперимента – определить значение амплитуды импульса, при котором средние остаточные перемещения начинают отличаться от нулевого значения, т.е. труба начинает проскальзывать. На рис. 3.2.10б приведена зависимость амплитуды импульса от длины трубы (сплошная линия), построенная на основе анализа результатов, представленных на рис. 3.2.10а. Приближенная аппроксимация этой зависимости линейна: $\sigma_0 \approx 0.729L + 1.86$ (штриховая линия на рис. 3.2.10б). В §3.1 на модели, в которой не учитывается деформируемость окружающего трубу грунта, показано, что при данных параметрах, для того чтобы импульс дошел до конца трубы, должно выполняться равенство $\sigma_0 = \tau_0 P_t L / (2S_t) \approx L$ (штрих-пунктирная линия на рис. 3.2.10б). Расчеты, проведенные с учетом движения среды, показывают, что при $L > 6$ м амплитуда импульса может быть меньше, чем следует из этой оценки.

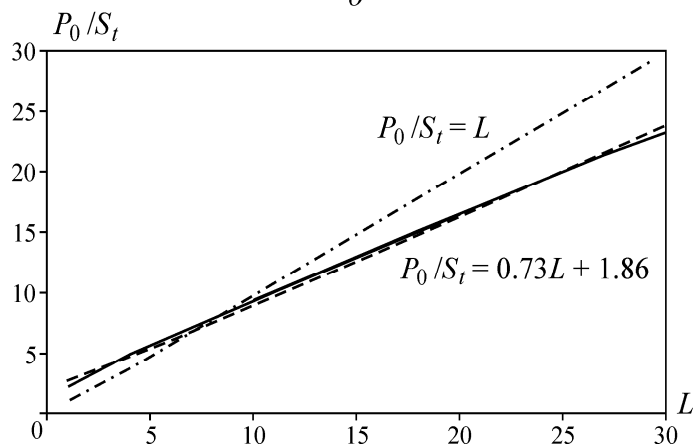
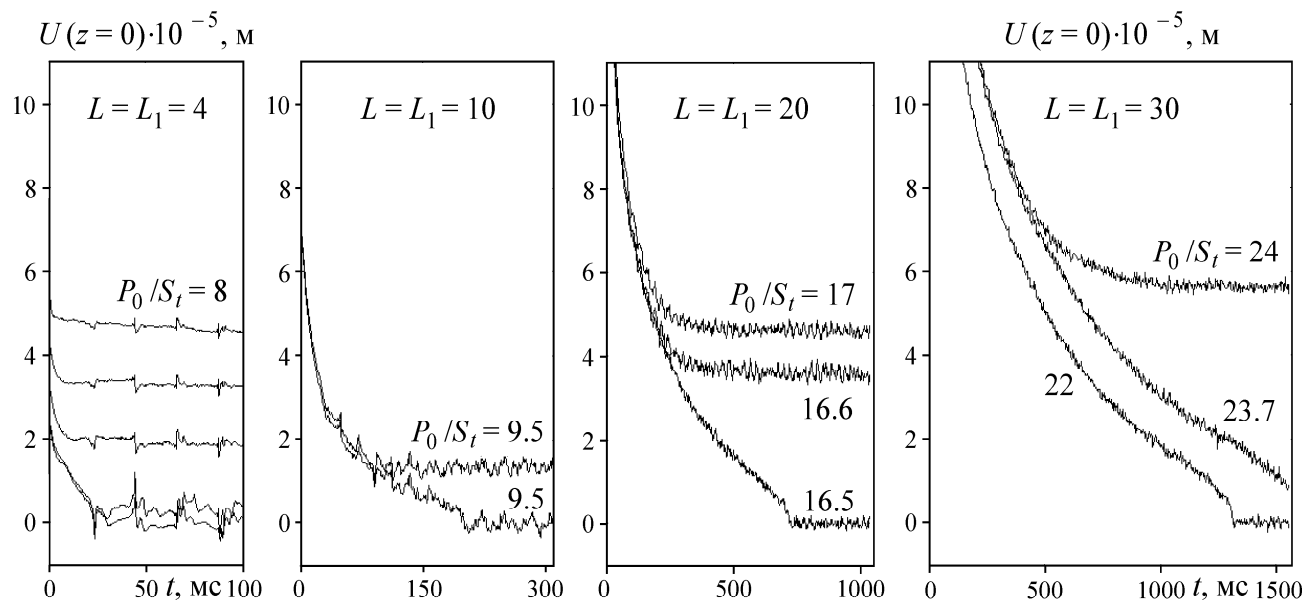


Рис. 3.2.10. (а) Зависимости перемещений от времени для различных значений амплитуды импульса. (б) Зависимость амплитуды импульса, при котором труба начинает проскальзывать, от длины трубы.

Заключение к Главе 3

1. Разработаны конечно-разностные алгоритмы расчета волновых процессов в трубе с внешним сухим трением с учетом и без учета деформируемости окружающего грунта и проведены конечно-разностные расчеты в широком диапазоне изменения параметров задачи.
2. Разработан аналитический метод решения и получены приближенные решения задачи для трубы, к которой приложена сила внешнего сухого трения,

постоянной амплитуды, и продольный импульс произвольной формы. Решения получены, как для полубесконечной трубы, так и для трубы конечной длины с учетом отражений от торцов. Проведено сравнение конечно-разностных и аналитических решений и показано их хорошее соответствие. Получены инженерные оценки суммарного проскальзывания трубы при многократных отражениях полусинусоидального и прямоугольного импульсов. Показано, что для трубы конечной длины перемещение трубы при большом времени (по сравнению с периодом пробега волны по трубе туда и обратно со скоростью продольных волн в трубе) пропорционально энергии удара с учетом трения и обратно пропорционально силе трения.

3. Получены явные аналитические решения одномерной в радиальном направлении задачи упругого взаимодействия трубы с внешней средой при продольном воздействии. Показано, что численные и аналитические решения одномерной задачи совпадают с большой точностью. Кроме того, аналитические решения качественно верно описывают решение двумерной задачи упругого взаимодействия трубы и среды.

4. Проведен анализ конечно-разностных расчетов двумерной задачи при упругом взаимодействии с внешней деформируемой средой и при сухом трении на поверхности контакта трубы и деформируемого грунта. Установлено, что величина проскальзывания трубы прямо пропорциональна квадрату амплитуды импульса и длительности импульса и обратно пропорциональна силе трения. Существует область параметров, для которой учет деформируемости внешней среды, взаимодействующей с трубой по закону сухого трения, мало влияет на результаты и расчеты могут проводиться по упрощенной модели, в которой не учитывается деформируемость грунта. Величина амплитуды импульса, при котором труба начинает проскальзывать, линейно зависит от силы трения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ К ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации, являющейся научно-квалификационной работой, имеющей важное народнохозяйственное значение, решена проблема, заключающаяся в установлении закономерностей распространения возмущений в блочных и упругих средах с учетом вязкости и сухого трения при нестационарных воздействиях природного и техногенного характера с целью обеспечения безопасности объектов.

Основные результаты представленных в диссертационной работе научных исследований состоят в следующем:

1. Проведено математическое моделирование процесса распространения сейсмических волн в блочных геосредах при нестационарных воздействиях и показано, что динамическое поведение блочной среды может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними (маятниковое приближение). Для описания деформационных свойств прослоек можно использовать модель в виде комбинации упругих пружин и вязких демпферов.
2. Проведено исследование динамического поведения маятниковых моделей одномерных и двумерных блочных сред при нестационарных воздействиях и показано, что наличие структуры в среде приводит к изменению ее поведения по сравнению, с тем, что предсказывает однородная модель, получаемая усреднением механических свойств блочной среды:
 - волны в блочной среде распространяются с дисперсией, которая отсутствовала в однородной среде;
 - в блочной среде распространяются низкочастотные слабо затухающие волны маятникового типа со скоростями, меньшими скорости продольных волн в материале блоков, за ними движется группа высокочастотных колебаний с частотой близкой к резонансной;
 - при низкочастотном воздействии наблюдается качественное соответствие головной волны для однородных и блочных сред;

– блочная среда служит фильтром для низкочастотных возмущений, поэтому отличие от однородной среды особенно сильно проявляется при коротком импульсном нагружении;

– наличие диссипативных свойств у прослоек приводит к дополнительному затуханию волн маятникового типа и к быстрому затуханию коротковолновых возмущений, что в значительной мере соответствует реальным сейсмограммам. Полученный результат свидетельствует о необходимости учета вязкости прослоек в блочной модели горных пород при расчете сейсмических волн.

3. Исследовано влияние параметров на дисперсионные свойства одномерных и двумерных моделей блочной среды. Показано, что скорость распространения маятниковых волн, период и степень их затухания определяются массой блоков и существенно зависят от реологических свойств прослоек. Выявлена двухволновая структура возмущений, распространяющихся в блочно-иерархических средах. Определены скорости их распространения и частоты колебаний.

4. В результате численных расчетов и аналитических исследований получены асимптотические законы затухания одномерных маятниковых волн в иерархической блочной среде с вязкоупругими прослойками и определены пределы их применимости. Показано, что наличие вязкости в одномерной модели блочно-иерархического строения приводит к дополнительному затуханию при $t \rightarrow \infty$ низкочастотных волн маятникового типа: степень затухания максимальных амплитуд скоростей масс и деформаций в системе с вязкими прослойками пропорциональна $t^{-1/2}$, ускорений — t^{-1} , в то время как без вязкости степень затухания амплитуд скоростей пропорциональна $t^{-1/3}$, ускорений — $t^{-2/3}$.

Получены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений в одномерной блочной среде. Показано, что длинноволновые возмущения в одномерной блочной иерархической среде асимптотически ведут себя так же, как в эквивалентной однородной цепочке масс.

5. На примере экспериментальной сборки из стальных стержней, соединенных прослойками, а также на примере стопки силикатных кирпичей продемонстрирована возможность моделирования процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах при ударном воздействии с использованием модели цепочки стержней или цепочки масс с вязкоупругими прослойками. Решена обратная задача определения деформационных свойств межблочных прослоек, для которых устанавливается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных значений скорости распространения волны и степени ее затухания.

6. Предложен асимптотический подход к обращению интегральных преобразований Лапласа и Фурье применительно к решению задач механики дискретно-периодических сред, позволяющий учесть вклад возмущений в окрестности фронта маятниковой волны и высокочастотных колебаний за фронтом волны. Получены новые формулы приближенного представления функции Ломмеля через функцию Скорера и производной от функции Ломмеля через производную от функции Скорера при больших значениях порядка или аргумента функции. В результате анализа приближенных представлений показано, что с ростом времени t (или расстояния n): а) амплитуды функции Ломмеля $s_{0,k}(ct)$ ($k = 2n$) в окрестности $n = ct$ падают как $t^{-1/3}$ (или $n^{-1/3}$); в) амплитуды $s'_{0,k}(ct)$ в окрестности $n = ct$ падают как $t^{-2/3}$ (или $n^{-2/3}$); г) зона роста функций $s_{0,k}(ct)$, $s'_{0,k}(ct)$ от нуля до первого максимума расширяется как $t^{1/3}$ (или $n^{1/3}$). Приемлемое соответствие, полученных формул, наступает при сравнительно малых значениях координаты n или времени t , что позволяет пользоваться этими формулами для решения задач механики блочных сред.

7. Численно и аналитически исследовано распространение нестационарных возмущений при сосредоточенном синусоидальном и ступенчатом воздействии на квадратную решетку масс, соединенных пружинами, моделирующую антиплоское движение двумерной блочной среды. Показано, что вклад маятниковой волны не зависит от направления распространения сигнала.

Высокочастотные колебания оказываются максимальными в диагональных направлениях.

Получено асимптотическое решение нестационарной задачи о сосредоточенном ступенчатом воздействии на квадратную решетку масс и показано, что при таком воздействии в решетке масс наблюдаются следующие эффекты в низкочастотной маятниковой волне при $t \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$): а) амплитуды перемещений пропорциональны $\ln(t/n)$; б) максимальные амплитуды скоростей перемещений падают как $t^{-2/3}$ ($n^{-2/3}$), ускорений — как t^{-1} (n^{-1}); в) зона квазифронта волны расширяется как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$). Показано, что соответствие численных и аналитических решений наступает при конечном времени воздействия или на конечном расстоянии от места приложения нагрузки.

8. В результате моделирования распространения сейсмических волн от взрыва в условиях двухслойного строения блочного породного массива в антиплоской постановке показано, что на больших расстояниях от источника возмущения форма сейсмического сигнала зависит от соотношения скоростей маятниковых волн в слоях. Если в верхнем слое такая скорость меньше, то в точку наблюдения сначала приходит волна малой амплитуды, распространяющаяся по нижнему, более жесткому слою, а затем, с задержкой, волна максимальной амплитуды, характерной для верхнего слоя. Полученная картина качественно согласуется с наблюдаемой при взрывах на карьерах. Времена прихода волн достаточно точно определяются в рамках геометрической сейсмологии.

9. Определены параметры плоской модели блочной среды, при которых она «изотропна», т.е. низкочастотные маятниковые волны распространяются во всех направлениях с одинаковой скоростью. Показано, что в случае произвольных параметров блочной среды скорость волн в диагональных и осевых направлениях различна. Проведены численные расчеты нестационарных волн в плоской модели блочной среды, и показано, что:

- при действии нагружения типа «центр расширения» (или «центр вращения») спектр возникающих возмущений определяется в основном резонансными частотами, которые соответствуют волнам «расширения» (или «сдвига»);
- максимальная амплитуда возмущений и максимальная скорость распространения возмущений реализуется преимущественно в том направлении, в котором жесткость связей имеет наибольшее значение;
- при низкочастотном воздействии типа «центр расширения» (или «центр вращения») максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят длинноволновые маятниковые «продольные» (или «сдвиговые») волны.

10. Получено численное и асимптотическое решение плоской нестационарной задачи Лэмба, описывающее поведение возмущений в окрестности волны Рэлея на границе блочной среды при действии ступенчатой нагрузки, и проведено их сравнение. Показано, что с ростом времени (расстояния): а) амплитуды скоростей перемещений в окрестности квазифронта релеевской волны падают как $t^{-1/3}$ ($n^{-1/3}$); б) амплитуды ускорений в окрестности квазифронта релеевской волны падают как $t^{-2/3}$ ($n^{-2/3}$); в) зона квазифронта релеевской волны расширяется как $t^{1/3}$ ($n^{1/3}$); г) позади фронта релеевской волны горизонтальные перемещения осциллируют относительно постоянного значения, которое совпадает со статическим решением задачи Лэмба для упругой среды.

Показано, что основной вклад в волновой процесс на границе блочной среды вносят длинноволновые возмущения в районе фронта релеевской волны и спектр высокочастотных осцилляций ограничен резонансной частотой поверхностных волн блочной среды. На границе блочной среды, заключенной между фронтами продольной и поперечной волн, наблюдается качественное и количественное соответствие результатов для блочной и однородной среды.

11. Полученные аналитические зависимости скорости распространения маятниковых волн, спектра их частот, степени их затухания от свойств блочного массива и разработанные конечно-разностные алгоритмы расчета возмущений в блочных средах могут служить основой для постановки обратной задачи

определения структурных и механических параметров блочной среды по экспериментальным данным.

12. Разработан метод решения и получены аналитические решения задачи для трубы, к которой приложена сила внешнего сухого трения постоянной амплитуды и продольный импульс произвольной формы. Решения получены как для полубесконечной трубы, так и для трубы конечной длины с учетом отражений от торцов. Получены инженерные оценки суммарного проскальзывания трубы при многократных отражениях полусинусоидального и прямоугольного импульсов.

Получены численные и аналитические решения одномерной в радиальном направлении задачи, описывающие поведение перемещений трубы, взаимодействующей упруго с внешней деформируемой средой, при продольном воздействии. Показано, что аналитические решения качественно верно описывают численное решение двумерной задачи при упругом взаимодействии трубы и среды.

Разработаны конечно-разностные алгоритмы расчета волновых процессов в трубе с внешним сухим трением с учетом и без учета деформируемости окружающего грунта и проведены конечно-разностные расчеты в широком диапазоне изменения параметров задачи.

Установлено, что величина проскальзывания трубы конечной длины прямо пропорциональна квадрату амплитуды импульса и длительности импульса и обратно пропорциональна силе трения. Величина амплитуды импульса, при которой труба начинает проскальзывать, линейно зависит от силы трения. Существует область параметров, для которой расчеты могут проводиться без учета деформируемости грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдукадыров, С.А. Нестационарная дифракция плоской продольной волны на упругой цилиндрической оболочке / С.А. Абдукадыров, **Н.И. Александрова**, М.В. Степаненко // Изв. АН СССР. Мех. твёрд. тела. 1989. № 5. С. 132–137.
2. Абдукадыров, С.А. Динамическое напряжение на контурах жестких включений в горном массиве / С.А. Абдукадыров, К.К. Курманалиев, М.В. Степаненко // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1988. № 5. С. 58–64.
3. Абдукадыров, С.А. Низкочастотные резонансные волны в цилиндрическом слое, окруженном упругой средой / С.А. Абдукадыров // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1980. № 3. С. 43–47.
4. Абдукадыров, С.А. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций / С.А. Абдукадыров, М.В. Степаненко, **Н.И. Пинчукова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1984. № 6. С. 34–41.
5. Адушкин, В.В. Движение структурных блоков массива горных пород при динамическом воздействии / В.В. Адушкин, В.В. Гарнов, В.Г. Спунгин // Взрывное дело. – М.: Недра, 1990. № 90/47. С. 25–30.
6. Адушкин, В.В. От явления знакопеременной реакции горных пород на динамические воздействия — к волнам маятникового типа в напряженных геосредах. Ч. I. / В.В. Адушкин, В.Н. Опарин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2012. № 2. С. 3–27.
7. Адушкин, В.В. От явления знакопеременной реакции горных пород на динамические воздействия — к волнам маятникового типа в напряженных геосредах. Ч. III. / В.В. Адушкин, В.Н. Опарин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2014. № 4. С. 10–38.
8. Адушкин, В.В. Геомеханика блочных структур / В.В. Адушкин, В.Н. Родионов // Проблемы нелинейной геомеханики: тр. науч. семинара

- ВНИМИ – ИДГ РАН (Санкт-Петербург, 1996 г.). – СПб.: ВНИМИ, 1998. – С. 3–10.
9. Адушкин, В.В. Движение структурных блоков массива горных пород при динамическом воздействии / В.В. Адушкин и др. // Взрывное дело. – М.: Недра, 1990. № 90/47. – С. 25–30.
 10. Адушкин, В.В. Особенности деформирования блочной среды при взрыве / В.В. Адушкин, А.А. Спивак // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1990. № 2. С. 46–52.
 11. Адушкин, В. В. Расчетная модель взрывного деформирования твердой среды со структурой / В.В. Адушкин, А.А. Спивак // Взрывное дело. – М.: Недра, 1990. № 90/47. – С. 17–25.
 12. Айзенберг-Степаненко, М.В. Моделирование волновых явлений в структурированных средах / М.В. Айзенберг-Степаненко, Е.Н. Шер // Физ. мезомех. 2007. Т. 10. № 1. С. 47–57.
 13. Айзенберг-Степаненко, М.В. Численное моделирование ударно-волновых процессов в упругих средах и конструкциях. I. Метод решения и расчетные алгоритмы / М.В. Айзенберг-Степаненко и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2012. № 1. С. 89–109.
 14. Айзенберг-Степаненко, М.В. Численное моделирование ударно-волновых процессов в упругих средах и конструкциях. II. Результаты решения прикладных задач / М.В. Айзенберг-Степаненко и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2012. № 5. С. 84–103.
 15. Александрова, Н.И. Аппроксимация граничных условий в задачах гидроупругости / **Н.И. Александрова** // Мат. моделир. 1991. Т. 3. № 12. С. 16–30.
 16. Александрова, Н.И. Асимптотическое решение антиплоской задачи для двумерной решетки / **Н.И. Александрова** // ДАН. 2014. Т. 455, № 1. С. 34–37. – URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S102833581403001X>
 17. Александрова, Н.И. Моделирование распространения упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении / **Н.И. Александрова, М.В.**

- Айзенберг-Степаненко, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2009. № 5. С. 22–33.
18. Александрова, Н.И. Моделирование распространения сейсмических волн по поверхности блочного породного массива при сосредоточенном импульсном нагружении / **Н.И. Александрова**, М.П. Варыгина, Е.Н. Шер // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2014: X Междунар. науч. конгр. (Новосибирск, 8–18 апр. 2014). Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Геоэкология: Междунар. науч. конф.: сб. материалов в 4 т. Т. 4. – Новосибирск: СГГА, 2014. С. 115–120.
 19. Александрова, Н.И. Влияние вязкости на распространение сейсмических волн по поверхности блочного полупространства / **Н.И. Александрова** // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: тр. XXIV Междунар. науч. шк. им. акад. С.А. Христиановича (Алушта, Крым, 22–28 сент. 2014). – Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2014. С. 12–15.
 20. Александрова, Н.И. Действие сферической акустической волны давления на упругую цилиндрическую оболочку, заполненную жидкостью / **Н.И. Александрова** // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 8. С. 43–49.
 21. Александрова, Н.И. Действие плоской акустической волны давления на подкрепленную цилиндрическую оболочку / **Н.И. Александрова**, И.В. Ефимова // Прикл. мех. и техн. физ. 1992. № 5. С. 110–116.
 22. Александрова, Н.И. Задача Лэмба для блочной среды/ **Н.И. Александрова** // Проблема безопасности и эффективности освоения георесурсов в современных условиях: материалы науч.-практ. конф., посвящ. 25-летию Горн. ин-та Уро РАН и 75-летию основателя и первого директора ин-та чл.-корр. РАН А.Е. Красноштейна / – Пермь: ГИ УрО РАН, 2014. С. 263–266.
 23. Александрова, Н.И. Распространение волн в блочных средах при ударном нагружении (одномерный случай) / **Н.И. Александрова** и др. // Проблемы и перспективы развития горных наук: тр. Междунар. конф.,

- посвящ. 60-летию образования Горно-геологического ин-та СО АН СССР, Ин-та горного дела СО РАН. Т.1: Геомеханика. – Новосибирск: Ин-т горного дела СО РАН, 2005. – С. 172–183.
24. Александрова, Н.И. Лекции по теме «Маятниковые волны» в рамках курса «Нелинейная геомеханика»: учеб. пособие / **Н.И. Александрова** – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2012. 72с.
 25. Александрова, Н.И. Об асимптотиках некоторых интегралов, возникающих при изучении волнового движения в решетках / **Н.И. Александрова** // Совр. пробл. мат. и мех. Т. 6: Математика. Вып. 2. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 86–89.
 26. Александрова, Н.И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении / **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2003. № 6. С. 38–47.
 27. Александрова, Н.И. Плоская задача Лэмба для двумерной дискретной среды / **Н.И. Александрова** // ДАН. 2015. Т. 460, № 1. С. 30–34.
 28. Александрова, Н.И. Плоская задача Лэмба для блочной среды с учетом вязкости / **Н.И. Александрова** // Вест. инж. шк. ДВФУ. 2014. № 3. С. 39–45. – URL: <http://vestnikis.dvfu.ru/vestnik/2014/3/4>
 29. Александрова, Н.И. Плоская задача Лэмба для блочной среды с учетом вязкости / **Н.И. Александрова** // Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: материалы 4-й Росс.-Кит. науч. конф. (Владивосток, 27–31 июля 2014). – [Электронный ресурс]. – Владивосток: Дальневост. федеральн. ун-т, 2014. 84 с. – 1 электронн. опт. диск (CD-ROM).
 30. Александрова, Н.И. Изгибные резонансные волны в цилиндрической оболочке при движущейся радиальной нагрузке / **Н.И. Александрова**, И.А. Поташников, М.В. Степаненко // Прикл. мех. и техн. физ. 1989. № 3. С. 132–137.
 31. Александрова, Н.И. Распространение волн в двумерной модели блочной среды при воздействии типа «центр вращения» / **Н.И. Александрова** //

- Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. Всеросс. конф., посвящ. 80-летию акад. М.В. Курлени (Новосибирск, 3–6 окт. 2011). Т. 1. – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2011. – С. 257–263.
32. Александрова, Н.И. Распространение резонансных волн в квадратных решетках. Антиплоская задача / **Н.И. Александрова** // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Яненко (Новосибирск, 30 мая – 4 июня 2011). – Новосибирск: ФГУП НТЦ "Информрегистр", 2011. URL: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38065/44823/AlexandrovaNI_Doclad.doc
 33. Александрова, Н.И. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде / **Н.И. Александрова**, А.Г. Черников, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2005. № 3. С. 46–55.
 34. Александрова, Н.И. О затухании маятниковых волн в блочном массиве горных пород / **Н.И. Александрова**, А.Г. Черников, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2006. № 5. С. 67–74.
 35. Александрова, Н.И. О затухании одномерных волн в блочной среде с вязкоупругими прослойками / **Н.И. Александрова**, А.Г. Черников // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: докл. Всеросс. конф. (Новосибирск, 9–13 окт. 2006). – Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 2007. С. 5–10. – (Динамика сплошной среды; Вып. 125).
 36. Александрова, Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема / **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2012. № 5. С. 104–119.
 37. Александрова, Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II. Внешняя среда

- деформируема / **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2013. № 3. С. 91–106.
38. Александрова, Н.И. Влияние дилатансии на разрушение горных пород взрывом цилиндрического заряда / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1999. № 4. С. 75–83.
 39. Александрова, Н.И. Влияние забойки на разрушение горных пород взрывом цилиндрического заряда / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1999. № 5. С. 42–52.
 40. Александрова, Н.И. Влияние утечек газов из полости взрыва сферического заряда на разрушение горных пород / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2000. № 5. С. 43–53.
 41. Александрова, Н.И. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2004. № 6. С. 49–57.
 42. Александрова, Н.И. Моделирование разрушения блочных горных пород взрывом цилиндрического заряда / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2006. № 1. С. 31–38.
 43. Александрова Н.И. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 6. С. 60–72.
 44. Александрова, Н.И. Учет динамики образца при испытаниях на составном стержне Гопкинсона / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1998. № 4. С. 107–116.
 45. Александрова, Н.И. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер, А.Г. Черников // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2008. № 3. С. 3–13.
 46. Александрова, Н.И. Численное моделирование процесса ударного погружения трубы в грунт / **Н.И. Александрова**, Е.Н. Шер //

- Фундаментальные проблемы формирования техногенной геосреды: тр. Всеросс. конф. с участием иностр. ученых (Новосибирск, 9–12 окт. 2012). Т. 2. – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2012. С. 23–29.
47. Алимов, О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О.Д. Алимов, В.П. Монжосов, В.Э. Еремьянц – М.: Наука, 1985. 358 с.
 48. Андронов, В.В. Сухое трение в задачах механики / В.В. Андронов, В.Ф. Журавлев. – М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Ижевский ин-т компьютер. исслед. – 2010. 184 с.
 49. Аннин, Б.Д. Моделирование процесса деформирования горных пород с неровными поверхностями контакта блоков в условиях квазистатического и динамического нагружения / Б.Д. Аннин, Е.В. Карпов // Прикл. мех. и техн. физ. 2007. Т. 48. № 3. С. 173–178.
 50. Астафуров, С.В. Влияние стесненных условий на характер деформирования и разрушения блочных сред при сдвиговом нагружении / С.В. Астафуров, Е.В. Шилько, С.Г. Псахье // Физ. мезомех. 2009. Т. 12. № 6. С. 12–32.
 51. Багаев, С.Н. О волнах маятникового типа и методе их выделения от крупных землетрясений по записям лазерного демографа / С.Н. Багаев, В.Н. Опарин, В.А. Орлов и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 3. С. 3–11.
 52. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1968. 344 с.
 53. Белобородов, В.Н. Моделирование процесса генерации ударного импульса при забивании металлических труб в грунт / В.Н. Белобородов и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1997. № 6. С. 66–71.
 54. Белов, А.И. Реакция трехслойной гидроупругой цилиндрической оболочки на действие внутреннего осесимметричного взрыва / А.И. Белов, В.А. Корнило, **Н.И. Пинчукова**, М.В. Степаненко // Прикл. мех. и техн. физ. 1986. № 1. С. 152–157.

55. Бриллюэн, Л. Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. – М.: ИЛ, 1959. 457 с.
56. Варыгина, М.П. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками / М.П. Варыгина и др. // Вычисл. методы и программирование: новые вычисл. технологии. 2011. Т. 12. С. 435–442.
57. Веклич, Н.А. Распространение волн в упругих стержнях, находящихся в среде с сухим трением / Н.А. Веклич, Б.М. Малышев // Задачи механики твердого деформируемого тела. – М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 64–99.
58. Венгрович, Д.Б. Распространение нелинейных волн в дискретной упруго-пластической среде / Д.Б. Венгрович, И.М. Губар, Г.П. Шеремет // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: материалы XXIV Междунар. науч. шк. им. акад. С.А. Христиановича (Алушта, Крым, 22–28 сент. 2014). – Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2014. С. 46–50.
59. Венгрович, Д.Б. Сейсмические волны в блочных средах / Д. Б. Венгрович // Акустика неоднородных сред. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1995. – С. 57–62. – (Динамика сплошной среды; Вып. 110).
60. Викторov, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторov. – М.: Наука, 1981. 286 с.
61. Герсеванов, Н.М. Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай / Н.М. Герсеванов // Собр. соч. Т. 1. – М.: Стройвоенмориздат, 1948. С. 70–94.
62. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. 400 с.
63. Гордиенко, В.И. Действие внутренней нестационарной волны на упругую цилиндрическую оболочку / В.И. Гордиенко, В.Д. Кубенко, М.В. Степаненко // Прикл. мех. 1981. № 3. С. 50–54.
64. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. 478 с.

65. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Изд. 4-е. – М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
66. Гринченко, В.Г. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Г. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
67. Гузев, М.А. Молекулярно-динамические характеристики одномерной точно решаемой модели на различных масштабах / М.А. Гузев, Ю.Г. Израильский, М.А. Шепелов // Физ. мезомех. 2006. Т. 9, № 5. С. 53–57.
68. Дейвис, Р.М. Волны напряжений в твердых телах / Р.М. Дейвис. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 103 с.
69. Деч, Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. 288 с.
70. Дьелесан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. 424с.
71. Жаркова, Н.В. Прикладные задачи динамики упругих стержней / Н.В. Жаркова, Л.В. Никитин // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2006. № 6. С. 80–98.
72. Жураев, У.Ш. Численное решение плоской задачи Лемба / У.Ш. Жураев // Пробл. мех. 2010. № 4. С. 5–8.
73. Зубков, В.В. О численном моделировании блочных структур / В. В. Зубков, А.М. Линьков // Проблемы нелинейной геомеханики: тр. науч. семинара ВНИМИ – ИДГ РАН (Санкт-Петербург, 1996). – СПб.: ВНИМИ, 1998. С. 147–152.
74. Иванов, А.П. Основы теории систем с сухим трением / А.П. Иванов. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Ижевский ин-т компьютер. исслед., 2011. 304 с.
75. Исаков, А.Л. Анализ волновых процессов при забивании металлических труб в грунт с использованием генераторов ударных импульсов / А.Л. Исаков, В.В. Шмелев // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1998. № 2. С. 48–58.

76. Исаков, А.Л. Об эффективности передачи ударного импульса при забивании металлических труб в грунт / А.Л. Исаков, В.В. Шмелев // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1998. № 1. С. 89–97.
77. Каплунов, Ю.Д. Задача Лэмба для случая обобщенного плоского напряженного состояния / Ю.Д. Каплунов, Е.В. Нольде // ДАН. 1992. Т. 322, № 6. С. 1043–1047.
78. Копсон, Э. Асимптотические разложения / Э.Копсон. – М.: Мир, 1966. 159с.
79. Костюченко, В.Н. Деформационные характеристики межблоковых промежутков различного масштаба / В.Н. Костюченко, Г.Г. Кочарян, Д.В. Павлов // Физ. мезомех. 2002. Т. 5, № 5. С. 23–42.
80. Кочарян, Г.Г. Проявление блоковых движений в длиннопериодном сейсмическом фоне / Г.Г. Кочарян, Н.В. Кабыченко // Геофизические процессы в нижних и верхних оболочках Земли: сб. науч. тр. ИДГ РАН / ред. Ю.И. Зецер. В 2-х кн. Кн. 1. – М.: Ин-т динамики геосфер, 2003. С. 98–107.
81. Кочарян, Г.Г. Сейсмический портрет разломной зоны. Что может дать анализ тонкой структуры пространственного расположения очагов слабых землетрясений? / Г.Г. Кочарян, С.Б. Кишкина, А.А. Остапчук // Геодинамика и тектонофизика. 2010. Т. 1, № 4. С. 419–440.
82. Кочарян, Г.Г. Инициирование деформационных процессов в земной коре слабыми возмущениями / Г.Г. Кочарян, В.Н. Костюченко, Д.В. Павлов // Физ. мезомех. 2004. Т. 7, № 1. С. 5–22.
83. Кочарян, Г.Г. Модель необратимого деформирования горного массива блочной структуры при взрывном воздействии / Г.Г. Кочарян // Взрывное дело. – М.: Недра, 1990. № 90/47. С. 30–42.
84. Кочарян, Г.Г. Акустическая эмиссия при различных режимах межблоковых перемещений / Г.Г. Кочарян, О.А. Остапчук // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2015. № 1. С. 3–13.

85. Кочарян, Г.Г. Динамика деформирования блочных массивов горных пород / Г.Г. Кочарян, А.А. Спивак. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. 423 с.
86. Кочарян, Г.Г. Об особенностях механики сейсмического процесса в блочной геофизической среде / Г.Г. Кочарян, А.Е. Федоров // ДАН СССР. 1990. Т. 315, № 6. С. 1345–1349.
87. Кравцов, А.В. Конечно-элементные модели в задаче Лэмба / А.В. Кравцов, С.В. Кузнецов, С.Я. Секерж-Зенькович // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 6. С. 166–175.
88. Крагельский, И.В. Развитие науки о трении. Сухое трение / И.В. Крагельский, В.С. Щедров. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. 235 с.
89. Кузнецов, С.В. Закономерности распространения волны разгрузки в предварительно нагруженном упругом стержне / С.В. Кузнецов, В.А. Трофимов // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: материалы XXIV Междунар. науч. шк. им. акад. С.А. Христиановича (Алушта, Крым, 22–28 сент. 2014). – Симферополь: ТНУ им. Вернадского, 2014. С. 91–101.
90. Кукуджанов, В.Н. Вычислительная механика сплошных сред / В.Н. Кукуджанов. – М.: Физматлит, 2008. 320 с.
91. Кукуджанов, В.Н. Численное решение не одномерных задач динамики твердого деформируемого тела / В.Н. Кукуджанов, В.И. Кондауров // Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 5: Проблемы динамики упруго-пластических сред. – М.: Мир, 1975. С. 39–84.
92. Кулеш, М.А. Построение и анализ решения поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Прикл. мех. и техн. физ. 2005. № 4. С. 116–124.
93. Курленя, М.В. Знакопеременная реакция горных пород на динамическое воздействие / М.В. Курленя и др. // ДАН СССР. 1992. Т. 323, № 2. С. 263–265.

94. Курленя, М.В. О динамическом поведении “самонапряженных” блочных сред. Ч. I: Одномерная механико-математическая модель / М.В. Курленя и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2001. № 1. С. 3–11.
95. Курленя, М.В. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа U_μ / М.В. Курленя, В.Н. Опарин, В.И. Востриков // ДАН СССР. 1993. Т. 333, № 4. С. 3–13.
96. Курленя, М.В. Волны маятникового типа. Ч. I: Состояние вопроса и измерительно-вычислительный комплекс / М.В. Курленя, В.Н. Опарин, В.И. Востриков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1996. № 3. С. 3–7.
97. Курленя, М.В. Волны маятникового типа. Ч. II: Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования / М.В. Курленя, В.Н. Опарин, В.И. Востриков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1996. № 4. С. 3–38.
98. Курленя, М.В. Волны маятникового типа. Ч. III: Данные натурных измерений / М.В. Курленя и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1996. № 5. С. 3–27.
99. Курленя, М.В. Об отношении линейных размеров блоков горных пород к величинам раскрытия трещин в структурной иерархии массива / М.В. Курленя, В.Н. Опарин, А.А. Еременко // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1993. № 3. С. 3–21.
100. Курленя, М.В. О некоторых особенностях реакции горных пород на взрывные воздействия в ближней зоне / М.В. Курленя и др. // ДАН СССР. 1987. Т. 293, № 1. С. 67–70.
101. Ланда, П.С. К линейной теории волн в средах с периодической структурой / П.С. Ланда, В.Ф. Марченко // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 9. С. 201–209.

102. Леонтьев, А.В. Об определении коэффициентов жесткости контакта между блоками горных пород / А.В. Леонтьев, Л.А. Назаров // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1994. № 2. С. 46–52.
103. Линьков, А.М. О механике блочного массива горных пород / А.М. Линьков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1979. № 4. С. 3–9.
104. Лукьяшко, О.А. Переходные одномерные волновые процессы в слоистой среде / О.А. Лукьяшко, В.А. Сарайкин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 2. С. 41–54.
105. Макаренко, А.С. Точность и дисперсия разностных схем / А.С. Макаренко, М.Н. Москальков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 999–1003.
106. Макаров, П.В. Об иерархической природе деформации и разрушения твёрдых тел и сред / П.В.Макаров // Физ. мезомех. 2004. Т. 7, №4. С. 25–34.
107. Макаров, П.В. Нагружаемый материал как нелинейная динамическая система. Проблема моделирования / П.В. Макаров // Физ. мезомех. 2005. Т. 8, № 6. С. 39–56.
108. Макаров, П.В. Нелинейная механика геоматериалов и геосред / П.В. Макаров и др. – Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2007. 235 с.
109. Маркеев, А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью / А.П. Маркеев. – М.: Наука, 1992. 336с.
110. Машинский, Э.И. Аномалии скоростей продольных и поперечных волн в образце природного песчаника, составленного из блоков / Э.И. Машинский, Г.В. Егоров // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2013. № 2. С. 72–80.
111. Мирсаидов, М. Решения задачи Лэмба методом конечных элементов с использованием условий излучения / М. Мирсаидов // Механика деформируемого твердого тела. – Томск, 1987. С. 126–131.
112. Михин, Н.М. Внешнее трение твердых тел / Н.М. Михин. – М.: Наука, 1977. 221 с.

113. Мкртчян, К.Ш. Плоская задача Лэмба / К.Ш. Мкртчян // Механика деформируемого твердого тела. – Ереван, 1990. С. 237–241.
114. Молотков, Л.А. Эффективная модель блочной пористой среды с контактами проскальзывания на границах / Л.А. Молотков // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2001. Т. 275. С. 140–164.
115. Молотков, Л.А. О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I. / Л.А. Молотков // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 230–253.
116. Молотков, Л.А. О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. II. / Л.А. Молотков // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 254–271.
117. Молотков, Л.А. О распространении сейсмических волн в блочных жидких средах / Л.А. Молотков // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2004. Т. 308. С. 124–146.
118. Мухин, С.И. О разностных схемах с искусственной дисперсией / С.И. Мухин, С.Б. Попов, Ю.П. Попов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23, № 6. С. 1355–1369.
119. Никитин, Л.В. Динамика упругих стержней с внешним сухим трением / Л.В. Никитин // Успехи мех. 1988. Т. 11, вып. 4. С. 53–106.
120. Никитин, Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением / Л.В. Никитин. – М.: «Московский Лицей», 1998. 272с.
121. Никитин, Л.В. Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите / Л.В. Никитин, А.Н. Тюреходжаев // Мех. композ. материалов. 1986. № 1. С. 28–37.
122. Никитин, Л.В. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт/ Л.В. Никитин, А.Н. Тюреходжаев // Проблемы механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1966. С. 304–311.
123. Никитин, Л.В. Поведение трубопровода под воздействием ударной волны в грунте / Л.В. Никитин, А.Н. Тюреходжаев // Трение, износ и смазочные материалы: тр. Междунар. науч. конф. Т. 3, Ч. 2. – Ташкент, 1985. С. 138–144.

124. Никитин, Л.В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением / Л.В. Никитин // Инж. журн. Мех. тверд. тела. 1967. № 2. С. 166–170.
125. Никитин, Л.В. Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения / Л.В. Никитин // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1978. № 6. С. 137–145.
126. Новацкий, В. Динамика сооружений / В. Новацкий. – М.: Госстройиздат, 1963. 377 с.
127. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. 872 с.
128. Огурцов, К.И. Количественное исследование процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействия / К.И. Огурцов // Учен. зап. ЛГУ. 1956. № 208. С. 142–199.
129. Онисько, Н.И. Движение свободной поверхности грунта при подземном взрыве / Н.И. Онисько, Е.И. Шемякин // Прикл. мех. и техн. физ. 1961. № 4. С. 82–93.
130. Опарин, В.Н. О деформационно-волновых процессах в окрестности взрывов / В.Н. Опарин и др. // Физ. мезомех. 2002. Т. 5, № 5. С. 43–50.
131. Опарин, В.Н. Методы и измерительные приборы для моделирования и натурных исследований нелинейных деформационно-волновых процессов в блочных массивах горных пород / В. Н. Опарин, **Н. И. Александрова** и др.; Ред. В.Л. Шкуратник. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. 320 с. – (Интеграционные проекты СО РАН; вып. 13).
132. Опарин, В.Н. Методы и системы сейсμοдеформационного мониторинга техногенных землетрясений и горных ударов. Т. 2 / В. Н. Опарин, **Н. И. Александрова** и др.; Ред. Н.Н. Мельников. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2010. 261 с. – (Интеграционные проекты СО РАН; вып. 25).
133. Опарин, В.Н. Развитие ресурсосберегающих и ресурсовоспроизводящих геотехнологий комплексного освоения месторождений полезных ископаемых / В. Н. Опарин, **Н. И. Александрова** и др.; Ред. К.Н. Трубецкой. – М.: РАН. Отд-ние наук о Земле. ИПКОН, 2012. 310 с.

134. Опарин, В.Н. О динамическом поведении напряженных блочных сред. Ч. II: Сравнение теоретических и экспериментальных данных / В.Н. Опарин, Е.Г. Балмашнова, В.И. Востриков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2001. № 5. С. 12–18.
135. Опарин, В.Н. О нелинейных деформационно-волновых процессах в виброволновых геотехнологиях освоения нефтегазовых месторождений / В.Н. Опарин, Б.Ф. Симонов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 2. С. 3–25.
136. Опарин, В.Н. О дискретных свойствах объектов геосреды и их каноническом представлении / В.Н. Опарин, А.С. Танайно, В.Ф. Юшкин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 3. С. 6–24.
137. Ормонбеков, Т. Взаимодействие конструкций со средой / Т. Ормонбеков. – Фрунзе: Илим, 1983. 152 с.
138. Ормонбеков, Т. Механика взаимодействия деформируемых тел / Т. Ормонбеков. – Фрунзе: Илим, 1989. 227 с.
139. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин: учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. 688 с.
140. Перегудов, Д.В. Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра / Д.В. Перегудов // Вычисл. сейсмология. 2000. № 31. С. 120–137.
141. Петрашень, Г.И. О задаче Лэмба в случае полупространства / Г.И. Петрашень, Г.И. Марчук, К.И. Огурцов // Учен. зап. ЛГУ. Сер.: Мат. 1950. № 135, вып. 21. С. 71–118.
142. Петрашень, Г.И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах / Г.И. Петрашень, Л.А. Молотков, П.В. Крауклис. – Л.: Наука, 1982. 288 с.
143. Петреев, А.М. Передача энергии от ударного привода трубе через адаптер конструкций / А.М. Петреев, А.С. Смоленцев // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2011. № 6. С. 64–73.
144. Пинчукова, Н.И. Осесимметричная реакция цилиндрической оболочки на действие гидроудара / **Н.И. Пинчукова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1981. № 4. С. 33–45.

145. Пинчукова, Н.И. Распространение нестационарных волн в упругой цилиндрической системе с присоединенными массами / **Н.И. Пинчукова**, М.В. Степаненко // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1978. № 4. С. 32–39.
146. Пинчукова, Н.И. Низкочастотные резонансные волны в цилиндрической оболочке с присоединенными массами / **Н.И. Пинчукова**, М.В. Степаненко // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1979. № 4. С. 38–47.
147. Попов, Г.Я. О новом подходе к решению задачи Лэмба / Г.Я. Попов, Н.Д. Вайсфельд // ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 337–342.
148. Поручиков, В.Б. Методы динамической теории упругости / В.Б. Поручиков. – М.: Наука, 1986. 328 с.
149. Псахье, С.Г. Метод подвижных клеточных автоматов и его применение при моделировании на разных масштабах / С.Г. Псахье и др. // Механика – от дискретного к сплошному / Ред. В.М. Фомин – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. С. 88–128.
150. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. 744 с.
151. Райс, Дж. Механика очага землетрясения / Дж. Райс // Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 28: Механика очага землетрясения. – М.: Мир, 1982. С. 10–132.
152. Ребецкий, Ю.Л. Аналитическое решение задачи для совокупности трещин сдвига с кулоновым трением / Ю.Л. Ребецкий, А.С. Лермонтова // ДАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 821–825.
153. Редькин, В.А. Естественное поле напряжений горного массива блочной структуры / В.А. Редькин, В.В. Калугин // Напряжённно-деформированное состояние массивов горных пород. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1988. С. 120–124.
154. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости / В.Г. Рекач. – М.: «Высшая школа», 1966. 228 с.

155. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. 420 с.
156. Розенблат, Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела / Г.М. Розенблат. – М.: URSS, 2010. 205 с.
157. Руппенейт, К.В. Введение в механику горных пород / К.В. Руппенейт, Ю.М. Либерман. – М.: Госгортехиздат, 1960. 356 с.
158. Сагомоян, А.Я. Волны напряжения в сплошных средах / А.Я. Сагомоян. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1985. 415 с.
159. Садовский, В.М. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера / В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.П. Варыгина // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, № 1. С. 111–118.
160. Садовский, В.М. Математическое моделирование волн маятникового типа с применением высокопроизводительных вычислений / В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.П. Варыгина // Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: тр. 2-ой Росс.-Кит. науч. конф. (Новосибирск, 2–5 июля 2012). – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2012. С. 138–144.
161. Садовский, В.М. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера / В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.А. Похабова // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 52–60.
162. Садовский, М.А. О размере зон необратимого деформирования при взрыве в блочной среде / М.А. Садовский, В.В. Адушкин, А.А. Спивак // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 9. С. 9–15.
163. Садовский, М.А. Естественная кусковатость горной породы / М.А. Садовский // ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–832.
164. Садовский, М.А. О свойстве дискретности горных пород / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 12. С. 3–18.

165. Садовский, М.А. О механике блочного горного массива / М.А. Садовский, Г.Г. Кочарян, В.Н. Родионов // ДАН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 306–307.
166. Садовский, М.А. Сейсмический процесс в блоковой среде / М.А. Садовский, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1991. 96с.
167. Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1992. 424 с.
168. Сарайкин, В.А. Распространение низкочастотной составляющей волны в модели блочной среды / В.А. Сарайкин // Прикл. мех. и техн. физ. 2009. № 6. С. 177–185.
169. Сарайкин, В.А. Расчет волн, распространяющихся в сборке из прямоугольных блоков / В.А. Сарайкин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2008. № 4. С. 32–42.
170. Сарайкин, В.А. Учет упругих свойств блоков в низкочастотной составляющей волны возмущений, распространяющейся в двумерной среде / В.А. Сарайкин // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2009. № 3. С. 9–24.
171. Сердюков, С.В. Расчет движения жидкости в нефтяной скважине под действием порохового генератора газов / С.В. Сердюков, Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2002. № 4. С. 38–45.
172. Сибиряков, Б.П. Природа неустойчивости блочных сред и закон распределения неустойчивых состояний / Б.П. Сибиряков, Б.И. Прилоус, А.В. Копейкин // Физ. мезомех. 2012. Т. 15, № 3. С. 11–21.
173. Сибиряков, Б.П. Природа неустойчивости блочных сред и некоторые сценарии развития катастроф / Б.П. Сибиряков // Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: тр. 2-ой Росс.-Кит. науч. конф. (Новосибирск, 2 – 5 июля 2012). – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН. – 2012. С. 51–56.

174. Симоненко, В.А. Движение грунта в волне Рэлея, возникающей при подземном взрыве / В.А. Симоненко, Н.И. Шишкин, Г.А. Шишкина // Прикл. мех. и техн. физ. 2006. № 4. С. 3–14.
175. Слепян, Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
176. Слепян, Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепян, Ю.С. Яковлев. – Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
177. Смирнов, А.Л. Динамика составных конструкций в среде при нестационарных воздействиях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / А.Л. Смирнов. – Новосибирск, 1990. 18 с.
178. Смирнов, А.Л. Расчет процесса ударного погружения свай в грунт / А.Л. Смирнов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1989. № 4. С. 72–79.
179. Смирнов, В.И. О применении нового метода к изучению упругих колебаний / В.И. Смирнов, С.Л. Соболев // Тр. Сейсм. ин-та АН СССР. № 29. 1953. С. 1–33.
180. Степаненко, М. В. Об одном методе расчета нестационарных импульсных процессов деформаций в упругих конструкциях / М. В. Степаненко // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1976. № 2. С. 53–57.
181. Стихановский, Б.Н. Механика удара / Б.Н. Стихановский. – Омск: ОмГТУ, 2002. 200 с.
182. Султанов, К.С. Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением / К.С. Султанов // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1991. № 6. С. 92–101.
183. Сухинин, С.В. Распространение волн и резонансные явления в неоднородных средах / С.В. Сухинин // Прикл. мех. и техн. физ. 2001. Т. 42, № 3. С. 32–42.
184. Тищенко, И.В. Влияние энергетических параметров генераторов ударных импульсов на амплитуду и скорость внедрения трубы в грунт /

- И.В. Тищенко, В.В. Червов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1914. № 3. С. 75–86.
185. Трофименко, С.В. Нелинейные геомеханические модели взаимодействия блоков земной коры / С.В. Трофименко и др. // Соврем. пробл. науки и образования. 2013. № 2. – URL: www.science-education.ru/108-8669
 186. Тюреходжаев, А.Н. Возбуждение резонансных колебаний в системе с контактными сухим трением / А.Н.Тюреходжаев, М.Ж.Сергазиев // Механика и трибология транспортных систем – 2003: докл. Междунар. конгр. Т. 2. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. гос. ун-та путей сообщ., 2003. С. 315–319.
 187. Тюреходжаев, А.Н. Нелинейные установившиеся колебания механической системы с сухим трением под воздействием циклических нагрузок / А.Н. Тюреходжаев, М.Ж. Сергазиев // Там же. С. 325–329.
 188. Франк, Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. / Ф. Франк, Р. Мизес. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. 998 с.
 189. Шемякин, Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности / Е. И. Шемякин. – М.: Изд-во МГУ, 2007. 206 с.
 190. Шер, Е.Н. Влияние иерархической структуры блочных горных пород на особенности распространения сейсмических волн / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 6. С. 20–27.
 191. Шер, Е.Н. Динамика микроразрушений в упругой зоне при взрыве сферического заряда в горной породе / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2001. № 5. С. 33–40.
 192. Шер, Е.Н. Динамика развития зон разрушения при взрыве сосредоточенного заряда в хрупкой среде / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2000. № 5. С. 54–68.
 193. Шер, Е.Н. Динамика развития зоны дробления в упругопластической среде при камуфлетном взрыве шнурового заряда / Е.Н. Шер, **Н.И.**

- Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1997. № 6. С. 43–49.
194. Шер, Е.Н. Исследование влияния конструкции скважинного заряда на размер зоны разрушения и время ее развития в горных породах при взрыве / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 4. С. 76–85.
 195. Шер, Е.Н. Оценка влияния работы забойки и проникания газов в среду на разрушающее действие скважинного заряда / Е.Н. Шер, Н.И. Александрова // Физические проблемы разрушения горных пород. – Новосибирск: Наука, 2003. С. 98–101.
 196. Шер, Е.Н. О передаче импульса при ударе по инструменту через прослойку жидкости в машинах ударного действия / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова**, А.С. Сердечный // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1998. № 6. С. 35–40.
 197. Шер, Е.Н. Исследование затухания маятниковой волны при ударе в одномерной модели блочной среды / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова**, А.Г. Черников // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. Междунар. конф. с участием иностранных ученых (Новосибирск, 10–13 окт. 2005). – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2006. С. 247–253.
 198. Юнин, Е.К. Загадки и парадоксы сухого трения / Е.К. Юнин. – М.: Изд-во “Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008. 128 с.
 199. Юшкин, В.Ф. О разрушении одномерной модели блочных сред в условиях длительного одноосного нагружения / В.Ф. Юшкин, В.Н. Опарин, В.М. Жигалкин и др. // Физ. мезомех. 2002. Т. 5, № 5. С. 51–60.
 200. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968. 344 с.
 201. Achenbach, J.D. Vibrations and waves in directional composites. In: Mechanics of Composite Materials-2 / J.D. Achenbach. – New York: Acad. press, 1975.
 202. Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids / J.D. Achenbach. – Amsterdam: North-Holland, 1973. 425 p.

203. Aleksandrova, N.I. Asymptotic formulae for the Lommel and Bessel functions and their derivatives / **N.I. Aleksandrova** // R. Soc. Open Sci. **1**: 140176. – URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsos.140176>
204. Alexandrova, N.I. Plane Lamb problem for a half-space filled by a block medium / **N.I. Alexandrova** // Proc. of the 3rd Sino-Russian Joint Scientific - Technical Forum on Deep-level Rock Mechanics and Engineering (Nanjing, China, Jul., 2013). – Nanjing, 2013. P. 1–6.
205. Aleksandrova, N.I. Resonance wave processes in a system of coaxial shells with fluid / **N.I. Aleksandrova** // Numerical modelling in continuum mechanics: proc. 2nd conf. (Prague, Czech Republic, Aug. 22–25, 1994). – Prague, 1995. P. 1–9.
206. Aleksandrova, N.I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium / **N.I. Aleksandrova** // Wave Motion. 2014. V. 51, № 5. P. 818–832. – URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.02.002>
207. Alessandrini, B. The propagation of elastic waves in a discrete medium / B. Alessandrini, V. Raganelli // Eur. J. Mech., A. Solids. 1989. V. 8, № 2. P. 129–160.
208. Alessandrini, B. The propagation of acoustic and elastic waves in an heterogeneous discrete medium / B. Alessandrini, V. Raganelli // Eur. J. Mech. A. Solids. 1992. V. 11, № 4. P. 519–538.
209. Alexandrova, N. Problem 11462 / **N. Alexandrova** // Am. Math. Mon. 2009. V. 116, № 9. P. 844.
210. Ayzenberg-Stepanenko, M.V. Resonant-frequency primitive waveforms and star waves in lattices / M.V. Ayzenberg-Stepanenko, L.I. Slepyan // J. Sound Vib. 2008. V. 313. P. 812–821.
211. Bland, D.R. The theory of linear viscoelasticity / D.R. Bland. – Oxford et al.: Pergamon press, 1960. 125 p.
212. Brichkov, Yu.A. Handbook of Special Functions. Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas / Yu.A. Brichkov. – Boca Raton: CRC press, 2008. 701 p.

213. Cagniard, L. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves / L. Cagniard. – New York: McGraw-Hill, 1962. 282 p.
214. Chin, R.C.Y. Dispersion and Gibbs phenomenon associated with difference approximations to initial boundary-value problems for hyperbolic equations / R.C.Y. Chin // J. Comput. Phys. 1975. V. 18, P. 233–247.
215. Cornelius, C. S. Experimental investigation of longitudinal wave propagation in an elastic rod with coulomb friction / C. S. Cornelius, W. K. Kubitza // Exp. Mech. 1970. V. 10, № 4, P. 137.
216. Courant, R. On the partial difference equations of mathematical physics / R. Courant, R. Friedrichs, H. Levy // Math. Ann. 1928. № 100. P. 32–74.
217. De Hoop, A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems / A. T. De Hoop // Appl. Sci. Res. Sect. B. 1960. V. 8, P. 349–356.
218. Digital Library of Mathematical Functions. – URL: <http://dlmf.nist.gov> (дата обращения: 21.10.2014).
219. Forrestal, M.J. Proceedings Engineering Mechanics Division Specialty Conference / M.J. Forrestal et al. // Reston, Virginia: Amer. Soc. Civil Eng., 1966. P. 719–751.
220. Fromm, J.E. A method for reducing dispersion in convective difference schemes / J.E. Fromm // J. Comput. Phys. 1968. V. 3, P. 176–189.
221. Goodman, R.E. A model for the mechanics of jointed rock / R.E. Goodman, R.L. Taylor, T.L. Brekke // J. Soil Mech. Found. Div., ASCE. 1968. 94. SM3. P. 637–659.
222. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Ed. by M. Abramowitz and I.A. Stegun // National Bureau of Standards. – New York et al.: Springer, 1964. 1037 p. – (Applied mathematics series; № 53).
223. Holberg, O. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena / O. Holberg // Geophysical Prospecting. 1987. V. 35, № 6. P. 629–655.

224. Jensen, J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass – spring structures / J. S. Jensen // *J. Sound Vib.* 2003. V. 266, P. 1053–1079.
225. Jensen, J.S. Topology optimization of phononic band gap materials and structures / J.S. Jensen, O. Sigmund // *Fifth World Congress on Computational Mechanics (Vienna, Austria, 2002)*. – URL: <http://wccm.tuwien.ac.at>
226. Jentschura, U.D. Numerical calculation of Bessel, Hankel and Airy functions / U.D. Jentschura, E. Lötstedt // *Comput. Phys. Commun.* 2012. V. 183. P. 506–519.
227. Kaplunov, J.D. On a Lamb-type problem for a bi-axially pre-stressed incompressible elastic plate / J.D. Kaplunov, A.V. Pichugin, G.A. Rogerson // *IMA J. Appl. Math.* 2006. V. 71, № 2. P. 171–185.
228. Khelifi, Z. Modeling the Behavior of Axially and Laterally Loaded Pile with a Contact Model / Z. Khelifi, A. Berga, N. Terfaya // *Electronic J. Geotech. Eng.* 2011. V. 16, Bund N, P. 1239–1258.
229. Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid / H. Lamb // *Lond. Philos. Trans. Ser. A.* 1903. V. 203, P. 1–42.
230. Lapwood, E.R. The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium / E.R. Lapwood // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1949. № 845. V. 242. P. 63.
231. Lax, P.D. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy / P.D. Lax, B. Wendroff // *Commun. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17, P. 381–398.
232. Lee, E.H. On waves in composite materials with periodic structure / E.H. Lee, W.H. Yang // *SIAM. J. Appl. Math.* 1973. V. 25, № 3. P. 492–499.
233. Liu, S.-H. Under static loading stress wave propagation mechanism and energy dissipation in compound coal-rock / S.-H. Liu, D.-B. Mao, Q.-X. Qi, F.-M. Li // *J. China Coal Soc.* 2014. V. 39, No. 1. P. 15–22.
234. Lord Rayleigh, C. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid / C. Lord Rayleigh // *Lond. Math. Soc. Proc.* 1885. XVII. P. 4–11.

235. Lord Rayleigh, C. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and the propagation of waves through a medium endowed with periodic structure / C. Lord Rayleigh // *Philos. Mag.* 1887. № 145.
236. Mabsout, M. Study of Pile Driving by Finite-Element Method / M. Mabsout, L. Reese, J. Tassoulas // *J. Geotechn. Eng.* 1995. V. 121, № 7. P. 535–543.
237. Mabsout, M. A finite element model for the simulation of pile driving / M. Mabsout, J. Tassoulas // *Intern. J. Numer. Methods in Eng.* 1994. V. 37, № 2. P. 257–278.
238. Magnus, W. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics / W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni. – New York: Springer, 1966. VIII, 508 p.
239. Maradudin, A.A. Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation / A.A. Maradudin, E.W. Montroll, G.H. Weiss. – New York: Acad. press, 1963. 319 p.
240. Mead, D.J. Vibration response and wave propagation in periodic structures / D.J. Mead // *J. Manuf. Sci. Eng.* 1971. V. 93, № 3. P. 783–792.
241. Mead, D.J. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton 1964–1995 / D.J. Mead // *J. Sound Vib.* 1996. V. 190, № 3. P. 495–524.
242. Miklowitz, J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides / J. Miklowitz. – Amsterdam et al., 1978. 618 p.
243. Mogilevsky, R.I. Dynamics of Rods with Interfacial Dry Friction / R.I. Mogilevsky, T.O. Onnonbekov, L.V. Nikitin // *J. Mech. Behavior of Mater.* 1993. V. 5, № 1. P. 85–94.
244. Nakano, H. On Rayleigh waves / H. Nakano // *Jap. J. Astr. Geophys.* 1925. V. 2. P. 233.
245. Nikitin, L.V. Wave propagation and vibration of elastic rods with interfacial frictional slip / L.V. Nikitin, A.N. Tyurekhodgaev // *Wave Motion.* 1990. V. 12, № 6. P. 513–526.

246. Olver, F.W.J. Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large orders / F.W.J. Olver // Proc. Camb. Philos. Soc. 1952. V. 48, № 3. P. 414–427.
247. Osharovich, G. Wave propagation in elastic lattice subject to a local harmonic loading. I: A quasi-one-dimensional problem / G. Osharovich, M. Ayzenberg-Stepanenko, O. Tsareva // Contin. Mech. Thermodyn. 2010. V. 22, № 6. P. 581–597.
248. Osharovich, G. Wave propagation in elastic lattice subject to a local harmonic loading. II: Two-dimensional problems / G. Osharovich, M. Ayzenberg-Stepanenko, O. Tsareva // Contin. Mech. Thermodyn. 2010. V. 22, № 6. P. 599–616.
249. Paik, K.H. The behavior of open- and closed-ended piles driven into sands / K.H. Paik et al. // J. of Geotechn. Geoenvironmental Eng. ASCE. 2003. V. 129, № 4. P. 296–306.
250. Pan, Yi-Shan. Study effect of block-rock scale on pendulum-type wave propagation / Pan Yi-Shan, Wang Kai-Xing // Chin. J. Rock Mech. Eng. 2012. V. 31, № 2. P. 3459–3465.
251. Pan, Yi-Shan. Pendulum-type waves theory on the mechanism of anomalously low friction between rock masses / Pan Yi-Shan, Wang Kai-Xing // Seismol. Geol. 2014. V. 36, № 3. P. 833–834.
252. Pan, Yi-Shan. Design of anti-scour support based on theory of pendulum-type wave / Pan Yi-Shan, Wang Kai-Xing, Xiao Yong-Hui // Chin. J. Rock Mech. Eng. 2013. V. 32, № 8. P. 1537–1543.
253. Rausche, F. A Rational and Usable Wave Equation Soil Model Based on Field Test Correlation / F. Rausche, G. Likins, G. Goble. // Proc. Intern. Conf. on Design and Construction of Deep Foundations (Orlando, Florida, 6–8 Dec. 1994). – Washington, 1994. P. 1118–1132.
254. Rausche, F. Soil resistance predictions from pile dynamics / F. Rausche, F. Moses, G. Goble // J. Soil Mech. Found. Div. 1972. V. 98, SM9. P. 917–937.

255. Rothman, M. Tables of the integrals and differential coefficients of $\text{Gi}(+x)$ and $\text{Hi}(-x)$ / M. Rothman // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. V. 7. P. 379–384.
256. Sadovskaya, O.V. Computational modeling of the waves propagation in a block medium with viscoelastic interlayers / O.V. Sadovskaya, V.M. Sadovskii, M.P. Varygina // 4-th Intern. Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (Kos Island, Greece, 12–14 June 2013). – Edinburgh: Heriot-Watt, 2014. P. 4578–4592.
257. Sadovskii, V.M. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum / V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // Wave Motion. 2015. V. 52. P. 138–150.
258. Schöbe, W. Eine an die Nicholsonformel anschliessende asymptotische Entwicklung für Zylinderfunktionen / W. Schöbe // Acta Math. 1954. V. 92. P. 265–307.
259. Scorer, R. S. Numerical evaluation of integrals of the form $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)e^{i\phi(x)}dx$ and the tabulation of the function $\text{Gi}(z) = (1/\pi) \int_0^\infty \sin(uz + u^3/3)du$ / R. S. Scorer // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1950. V. 3. P. 107–112.
260. Sen, R. Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils / R. Sen, T.G. Davies, P.K. Banerjee // Earthquake Eng. Struct. Dyn. 1985. V. 13, № 1. P. 53–65.
261. Sheng, D. Application of Frictional Contact in Geotechnical Engineering / D. Sheng, P. Wriggers, S.W. Sloan // Intern. J. Geomech. 2007. V. 7, № 3. P. 176–185.
262. Sheng, D. Improved numerical algorithms for frictional contact in pile penetration analysis / D. Sheng, P. Wriggers, S.W. Sloan // Comput. Geotechn. 2006. V. 33. P. 341–354.
263. Slepyan, L.I. Models and Phenomena in Fracture Mechanics / L.I. Slepyan. – Berlin: Springer, 2002. 576 p.

264. Smirnov, V.I. Sur une méthode nouvelle dans a le problème plan des vibrations élastiques / V.I. Smirnov, S.L. Sobolev // Publ. l'Inst. Séismologique. Acad. URSS. – Leningrad: Acad. Sci., 1932. № 20. 37 p.
265. Smith, E.A.L. Pile driving analysis by the wave equation / E.A.L. Smith // Amer. Soc. Civil Eng. 1960. V. 86, № SM4. P. 35–61.
266. Sridhar, N. Slip, stick, and reverse slip characteristics during dynamic fibre pullout / N. Sridhar, Q.D. Yang, B.N. Cox // J. Mech. Phys. Sol. 2003. V. 51. P. 1215–1241.
267. Sulem, J. A continuum model for periodic two-dimensional block structures / J. Sulem, H.B. Mühlhaus // Mech. cohesive-frictional materials. 1997. V. 2. P. 31–36.
268. Viktorov, I.A. Rayleigh and Lamb waves / I.A. Viktorov. – New York: Plenum press, 1967.
269. Wang, Kai-Xing. Dynamic response of roadway support on pendulum type waves propagation in overburden block rock mass / Wang Kai-Xing, C.Y. Meng, Y. Yang, Q. Li // J. Chin. Coal Soc. 2014. V. 39, № 2. P. 347–352.
270. Wang, Kai-Xing. Steady-state response of the block rock mass to external periodic excitation and resonance condition / Wang Kai-Xing, Pan Yi-Shan, N. Dergachova // J. Math. Sci. 2014. V. 201, № 1. P. 111–120.
271. Wang, Kai-Xing. Dynamic response of tunnel wall on pendulum-type wave propagation in block-hierarchical rock mass / Wang Kai-Xing, Pan Yi-Shan // Rock Dynamics and Applications: proc. of the 1-st Intern. Conf. on Rock Dynamics and Applications (RocDyn-1 2013). – Boca Raton: CRC press, 2013. P. 603–609.
272. Wang, Kai-Xing. Frequency domain response of block rock mass inversion partings viscoelastic property on pendulum type wave propagation / Wang Kai-Xing, Pan Yi-Shan // J. China Coal Soc. 2013. V. 38, Suppl. 1. № 6. P. 19–24.
273. Wang, Kai-Xing. Effect of viscoelasticity in block-rock mass partings to the propagation of pendulum waves / Wang Kai-Xing, Pan Yi-Shan, Zeng Xiang-Hua et al. // Rock Soil Mech. 2013. V. 34, № 2. P. 174–179.

274. Watson, G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions / G.N. Watson. – 2-nd ed. – Cambridge: Cambridge Univ. press, 1995. 814 p.
275. Weinberger, H.F. Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods / H.F. Weinberger // Commun. Pure Appl. Math. 1956. V. 9, № 3. P. 613–623.
276. Widjaja, B. Wave equation analysis and pile driving analyzer for driven piles: 18th floor office building Jakarta case / B. Widjaja // Towards Sustainable Civil Engineering Practice: Intern. Civil Engineer. Conf. (Sarabaya, Aug. 25–26, 2006). – N. p. a. d. – P. 201–208.
277. Wilms, E.V. Damping of a rectangular stress pulse in a thin elastic rod by external coulomb friction / E.V. Wilms // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45, № 4. P. 1049–1050.
278. Wilms, E.V. Motion of an elastic rod with external coulomb friction / E.V. Wilms, G.A. Wempner // Transl. Am. Soc. Math. Eng. Ser. B. 1968. V. 90. P. 526.
279. Wolfram Alpha: URL: <http://www.wolframalpha.com> (дата обращения: 21.10.2014).
280. Wu, H. Model tests on anomalous low friction and pendulum-type wave phenomena / H. Wu et al. // Prog. Nat. Sci. 2009. V. 19, № 12. P. 1805–1820.
281. Wu, H. Mechanism of Pendulum-type wave phenomenon in deep block rock mass / H. Wu et al. // Mining Sci. Technol. 2009. V. 19, № 6. P. 699–708.
282. Wu, H. Propagation properties of stress waves in one-dimensional geo-block medium / H. Wu et al. // Chin. J. Geotechn. Eng. 2010. V. 32, № 4. P. 600–611.
283. Yow, Jr.J.L. A ground reaction curve based upon block theory / Jr.J.L. Yow, R.E. Goodman // Rocky Mech. 1987. № 20. P. 167–190.