На правах рукописи

Александрова Надежда Ивановна

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В БЛОЧНЫХ И УПРУГИХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ И ВНЕШНЕГО СУХОГО ТРЕНИЯ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

## ΑΒΤΟΡΕΦΕΡΑΤ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН (ИГД СО РАН)

Научный консультант:	Шер Евгений Николаевич, доктор физико-математических наук, Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, главный научный сотрудник
Официальные оппоненты:	Киселёв Сергей Петрович доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, ведущий научный сотрудник
	Садовский Владимир Михайлович доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительного моделирования СО РАН, заместитель директора, заведующий отделом
	Сибиряков Борис Петрович доктор физико-математических наук, профессор, Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, главный научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО "Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" (НИИ механики)

Защита состоится «30» ноября 2015 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета Д 003.054.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15. Факс: (383)-333-16-12, e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, www.hydro.nsc.ru

Автореферат разослан « » октября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета доктор физ.-мат. наук

В.Д. Кургузов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

#### Актуальность темы диссертации.

Выяснение различных вопросов нестационарного деформирования неоднородных сред и конструкций необходимо для создания моделей и методов расчета и обоснования оценок безопасности в таких различных областях как распространение сейсмических волн в блочных средах при землетрясениях, при проведении подземных взрывов, при вибровоздействии, а также при распространении волн в подземных трубопроводах.

В последнее время в сейсмике и геомеханике широко применяются подходы к описанию деформирования породного массива как блочной среды иерархического строения. Согласно концепции сложного академика М.А. Садовского, горный массив представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня. Часто прослойки между блоками представлены более слабыми, трещиноватыми породами. Наличие таких податливых прослоек приводит к тому, что деформирование блочного массива как в статике, так и в динамике происходит в основном за счет деформации прослоек. Как показывают эксперименты, проведенные в ИГД СО РАН, блочная структура отфильтровывает высокочастотные колебания, и в блочной среде распространяются преимущественно низкочастотные волны. Их принято называть маятниковыми волнами. Они обладают необъяснимыми с позиций однородной модели свойствами: низкая скорость распространения, сравнительно большая длина при коротком импульсном воздействии. Таким образом, наличие блочной структуры приводит к существенному изменению процесса распространения волн в горных породах. Замечено, что при крупных взрывах в протяженных выработках в массивах горных пород с крупными трещинами и разломами возникают остаточные угловые смещения противоположные стороны, что свидетельствует о независимом движении структурных элементов массива. Также при землетрясениях смещения горных пород чаще всего происходят по уже существующим межблочным контактным границам. Поэтому важной задачей геомеханики является исследование процесса распространения сейсмических волн с учетом структуры породного массива, реологических свойств прослоек и проскальзывания с трением по границам структурных блоков.

Проблемы с трением возникают также во многих технологических процессах: забивка и ударное извлечение свай, бестраншейная прокладка подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт, поведение подземных трубопроводов при землетрясениях. Движение разного рода стержневых элементов в механических системах также сопровождается трением. Поэтому одной из важнейших задач является изучение влияния на волновой процесс сухого трения между внешней средой и боковой поверхностью трубы, стержня или блоков.

**Целью диссертационной работы** является разработка моделей, описывающих динамическое поведение блочных сред, методов решения нестационарных задач для блочных и упругих сред и применение полученных

результатов для прогнозирования поведения геосреды при динамическом воздействии.

Методы исследований: математическое моделирование механических процессов с использованием явного конечно-разностного метода решения частных дифференциальных уравнений и аналитического метода решения, преобразований интегральных состоящего В применении И их асимптотическом, И, если возможно, то В точном, обращении; экспериментальное моделирование волновых процессов в лабораторных условиях с использованием сейсмометров и цифровых осциллографов.

Идея работы заключается в использовании:

— аналитических методов для получения точных и асимптотических решений;

— численных методов, позволяющих получить количественные оценки амплитуды возмущений на всем временном интервале и определить пределы применимости асимптотических решений;

— лабораторных экспериментов, которые позволяют определить приемлемость предлагаемых математических моделей.

#### Задачи исследований

**1.** Разработать математические модели вязкоупругого деформирования одномерных и двумерных блочных иерархических сред и оценить применимость математических моделей для описания динамики блочных сред в лабораторном эксперименте.

2. Исследовать волноводные свойства и спектральные характеристики одномерных и двумерных блочных сред с учетом с учетом реологических свойств прослоек и иерархичности блочной структуры.

3. Разработать способ асимптотического обращения интегральных преобразований применительно к решению задач механики дискретнопериодических сред и получить аналитические решения нестационарных задач вязкоупругого деформирования одномерных и двумерных моделей блочноиерархических сред.

**4.** Разработать способ решения и получить аналитические решения нелинейных задач динамического деформирования трубы с внешним сухим трением на границе контакта трубы и грунта.

5. Разработать конечно-разностные алгоритмы и программные комплексы и провести численные исследования динамических задач деформирования блочных и упругих сред с учетом вязкости и сухого трения.

6. Провести сравнение численных и аналитических решений и оценить правильность точных и область применимости асимптотических решений.

## Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. Динамическое поведение блочных массивов горных пород может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними. Для описания деформационных свойств прослоек можно использовать модель в виде комбинации упругих пружин и вязких демпферов.

2. Асимптотические представления функции Ломмеля и её производной через функцию Скорера.

3. Развитие метода асимптотического обращения интегральных преобразований в механике дискретно-периодических сред, аналитические и численные результаты решения задач нестационарного вязкоупругого деформирования одномерных и двумерных блочно-иерархических сред.

4. Численные расчеты и аналитические решения нелинейной задачи распространения волн в трубе с внешним сухим трением при продольном импульсном воздействии с учетом многократных отражений от торцов трубы.

Достоверность научных результатов, выводов и положений обеспечивается хорошим совпадением численных, аналитических и экспериментальных данных, сопоставлением с известными результатами других авторов.

## Научная новизна:

1. На примерах экспериментальной сборки из стальных стержней и стопки силикатных кирпичей, соединенных прослойками, показана возможность моделирования процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах с использованием математических моделей цепочки стержней и цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами.

**2.** Получены асимптотические решения задач распространения нестационарных низкочастотных волн в одномерных моделях вязкоупругого деформирования блочно-иерархических сред и аналитические оценки спектральных характеристик возмущений в этих средах.

3. Предложен асимптотический подход обращению К интегральных преобразований Лапласа и Фурье применительно к решению задач механики дискретно-периодических сред, позволяющий учесть вклад возмущений в окрестности фронта низкочастотной волны и высокочастотных колебаний за её фронтом. Выведены формулы приближенного представления функции Ломмеля и её производной через функцию Скорера.

**4.** Получены асимптотические решения, описывающие упругое антиплоское и плоское деформирование двумерных моделей блочных сред при сосредоточенном ступенчатом воздействии на безграничную среду и на поверхность блочного полупространства (плоская задача Лэмба).

5. Численно вязкоупругое исследовано деформирование двумерных плоской математических моделей блочных сред В постановке при нестационарных воздействиях типа «центр расширения», «центр вращения» и воздействии сосредоточенной поверхностной нагрузки (задача Лэмба).

**6.** Предложен способ аналитического решения нелинейной задачи взаимодействия трубы с окружающим грунтом по закону сухого трения при продольном импульсном воздействии и получено решение этой задачи с учетом и без учета многократных отражений от торцов трубы.

**7.** Разработаны конечно-разностные алгоритмы решения задачи распространения волн в трубе с внешним сухим трением с учетом деформируемости окружающего грунта.

Личный вклад автора заключается в: постановке задач; разработке аналитических методов решения; получении аналитических решений конкретных задач; разработке конечно-разностных алгоритмов и написании комплексов программ; анализе аналитических и численных результатов; в определении параметров теоретических моделей, адекватно описывающих экспериментальных данные; сопоставлении результатов теоретических и экспериментальных исследований. Е.Н. Шеру принадлежит научное консультирование по постановкам задач и участие в обсуждении результатов.

Научную и практическую значимость (ценность) работы составляют: 1. Математические модели блочных геосред с учётом иерархической структуры и реологических свойств прослоек.

2. Аналитический подход к решению нестационарных задач для дискретнопериодических сред. Аналитические оценки и численные решения одномерных и двумерных задач для блочных сред и сделанные на их основе выводы по качественному и количественному поведению сейсмических волн в блочноиерархических средах.

3. Аналитические и численные решения нелинейной задачи взаимодействия трубы с окружающим грунтом по закону сухого трения и сделанные на их основе выводы по качественному и количественному поведению нестационарных возмущений в трубе при импульсном воздействии.

4. Конечно-разностные алгоритмы решения задачи взаимодействия трубы с внешней средой по закону сухого трения.

5. Выводы и результаты диссертации могут быть использованы для разработки теоретических основ мониторинга напряженно-деформированного состояния породных массивов в областях сильных техногенных воздействий, для исследования нелинейных деформационно-волновых процессов в блочных массивах горных пород, для теоретического и экспериментального изучения бестраншейной прокладки подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт.

Апробация работы. Научные результаты и основные идеи, изложенные в диссертации, докладывались на следующих международных, всероссийских и всесоюзных конференциях, симпозиумах и других научных мероприятиях:

Всероссийская конференция "Проблемы и перспективы развития горных наук" к 60-летию Горно-геологического института ЗСФ АН СССР Института горного дела СО РАН (Новосибирск, 2004); Всероссийская конференция с участием иностранных ученых "Геодинамика и напряженное состояние недр земли" (Новосибирск, 2005, 2009, 2011, 2013); Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 2006, 2011, 2014); 5<sup>th</sup> European Congress of Mathematics (Amsterdam, The Netherlands, 2008); Всероссийская конференция «Фундаментальные проблемы формирования техногенной среды» с участием ученых (Новосибирск, 2008, 2009, 2012); Всероссийская иностранных конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л.В.Овсянникова

(Новосибирск, 2009); The 1<sup>st</sup> and 3<sup>rd</sup> Sino-Russian Joint Scientific - Technical Forum on Deep-level Rock Mechanics and Engineering (China, Fuxin, 2011; China, 2013); Международная конференция «Современные Nanjing, проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011); 2-ая и 4-ая Российско-Китайская научная конференция «Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений больших глубинах» (Новосибирск, полезных ископаемых на 2012; Научно-практическая конференция Владивосток, 2014); «Проблема безопасности и эффективности освоения георесурсов в современных условиях» (Пермь, 2013); 13 и 14 Всероссийский семинар «Геодинамика, геомеханика и геофизика» (Новосибирск, 2013; Алтайский край, 2014); Международный научный конгресс «Интерэкспо ГЕО-Сибирь» (Новосибирск, 2014); XXIV Международная научная академика С.А. Христиановича школа ИМ. «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках» (Крым, Алушта, 2014); Семинар «Математика в приложениях» под руководством академика С.К. Годунова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, июнь 2015).

**Публикации.** Основные результаты работы изложены в 32 публикациях, из них 14 опубликовано в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций. Перечень основных публикаций приведён в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, содержит 276 страниц машинописного текста, 123 рисунка и 3 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 283 наименования.

**Благодарности.** Автор благодарит д.ф.-м.н. Е.Н. Шера за внимание и поддержку при выполнении данной работы. Автор благодарит д.ф.-м.н. Е.Н. Шера и с.н.с. А.Г. Черникова за проведение лабораторных экспериментов.

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные идеи исследований, перечислены используемые методы и основные научные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** выполнен анализ отечественных и зарубежных исследований, касающихся распространения волн в блочных и упругих средах с учетом вязкости и внешнего сухого трения на границе.

М.А. Садовский показал, что характерным для горных пород является их блочное строение. В работах М.В. Курлени, В.Н. Опарина, В.И. Вострикова экспериментально продемонстрировано, что в блочной среде наблюдается распространение групп волн со скоростями меньшими скорости продольных волн в материале блоков, так называемых маятниковых волн. Некоторые особенности маятниковых волн изучались экспериментально на одномерных

моделях блочных сред в работах Б.Д. Аннина, Э.И. Машинского, Е.Н. Шера, Н. Wu, Д.Б. Венгрович, Pan Yi-Shan. Исследования деформационных свойств прослоек между блоками разных размеров сейсмическими методами проведены В.Н. Костюченко, Г.Г. Кочаряном и Д.В. Павловым. Теоретические вопросы распространения волн в одномерных и двумерных моделях блочных сред рассматривали В.А. Сарайкин, М.В. Айзенберг-Степаненко, В.М. Садовский, С.В. Астафуров, Е.В. Шилько, С.Г. Псахье, J.S. Jensen и др. В работах B. Alessandrini, V. Raganelli, В.М. Садовского, У.Ш. Жураева численно дискретно-периодических задача Лэмба исследовалась для моделей. Аналитические решения по данной проблеме отсутствуют.

Задача о распространении продольных волн в стержне, на поверхности которого действует постоянная по амплитуде, но разная по направлению сила сухого трения, исследовалась теоретически в работах Н.М. Герсеванова, Н.А. Веклича, Б.М. Малышева, Т. Ормонбекова, Л.В. Никитина, Е.К. Юнина, Р.И. Могилевского, А.Н. Тюреходжаева, Е.А.L. Smith, E.V. Wilms, C.S. Cornelius. Заметим, что в этих работах не рассматривались нестационарные проблемы взаимодействия упругого грунта и стержня.

Не смотря на обширную литературу по теме диссертации, многие вопросы, касающиеся моделей блочных сред, методов решения нестационарных задач распространения волн в блочных и упругих средах, вызвали необходимость разработки новых и развития известных методов решения задач. В результате анализа литературы определяется место диссертации в ряду других работ.

Во второй главе исследуются нестационарные процессы в одномерных и двумерных математических моделях блочных сред при динамическом воздействии.

§ 2.1 посвящен математическому и экспериментальному моделированию распространения одномерных волн в блочных средах. Рассматриваются протяженные в продольном направлении блочные среды, имеющие дискретнопериодическое строение. Исследуются две основных математических модели блочных сред — цепочка упругих стержней и цепочка масс, соединенных вязкоупругими прослойками. Прослойки моделируются как набор вязких и упругих элементов, соединенных последовательно и параллельно (рис. 1). Здесь  $k_1, k_2$  — жесткости пружин,  $\lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты вязкости демпферов,  $v_n$  — перемещение *n*-го центра масс, m — масса. Изучается также модель блочно-иерархической среды второго порядка, в которой блоки одинаковой массы соединены параллельно упругими пружинами и вязкими демпферами с чередующимися свойствами (рис. 2).

В работе проводится теоретическое исследование распространения нестационарных волн в протяженных блочно-иерархических средах. Для решения уравнений, описывающих движение масс и стержней, используются два метода: численный метод — явная схема метода конечных разностей и метод интегральных преобразований Лапласа по времени t (параметр p) и Фурье по пространственной координате x = nl (l — длина пружин, q — параметр преобразования) с последующим обращением.



Уравнения движения для цепочки масс (рис. 1) описываются уравнениями Ньютона:

$$m\ddot{v}_{n} = F_{n}^{\ r} - F_{n}^{\ l}, \ F_{n}^{\ r} = k_{2}(v_{n+1} - v_{n}) + \lambda_{2}(\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_{n}) + k_{1}e^{-\alpha_{1}t}\int_{0}^{t}e^{\alpha_{1}t}(\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_{n})dt \quad (1)$$

где  $F_n^r$  — сила, действующая справа на массу,  $\alpha_1 = k_1/\lambda_1$ . Аналогичное уравнение есть и для силы  $F_n^l$ , действующей слева. Так же определяются силы, действующие справа и слева на упругий стержень со стороны прослоек. Движение стержней описывается одномерными волновыми уравнениями.

Основное внимание уделяется исследованию возмущений, вызванных продольным импульсным воздействием, моделируемым полусинусоидой длительности  $t_0 = \pi/\omega_*$  с амплитудой  $Q_0$ :

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega_* t) H(\pi - \omega_* t) H(t), \qquad (2)$$

где  $\omega_*$  — частота воздействия, H — функция Хевисайда.

Для перечисленных моделей блочно-иерархических сред получены преобразованные по Лапласу и Фурье решения в виде:

$$U^{LF}(p,q,K) = Q^{LF} A(p,q,K) / D(p,q,K).$$
(3)

Здесь U — перемещение упругих стержней или масс,  $Q^{LF}$  — изображение нагрузки, A — оператор, зависящий от параметров системы K, и D — дисперсионный оператор.

Проведен анализ дисперсионных свойств рассматриваемых моделей, который позволил выявить особые точки на фазовых кривых, где фазовые и групповые скорости совпадают. Такие группы волн формируют продольную квазистационарную волну, движущуюся с постоянной скоростью  $c_1$ . Показано, что для многих исследуемых систем особой точкой является точка q = 0, которая соответствует низкочастотным маятниковым волнам.

На рис. З изображены зависимости первой (I) и второй мод (II) частоты  $\omega = qc$ , фазовой и групповой скоростей от волнового числа q, полученные численно из дисперсионного уравнения для вязкоупругой модели прослоек, представленной на рис. 2 ( $\lambda_1 = 35$ кг/с,  $\lambda_2 = 20$ кг/с,  $k_1 = 0.5 \cdot 10^6$  кг/с<sup>2</sup>,  $k_2 = 0.2 \cdot 10^6$  кг/с<sup>2</sup>, m = 0.3822 кг). Для частоты есть две зоны запирания

(распространение гармонических волн с такими частотами невозможно):  $\Omega_1 \le \omega \le \Omega_2$  и  $\omega \ge \Omega_3$ , где  $\Omega_i$  при малых значениях параметров вязкости определяются формулами:

$$\Omega_{1,2} \approx \Omega_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \beta}}, \ \Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \ \Omega_3 \approx \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{m} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{m^2}}, \ \beta = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}.(4)$$

Штриховые линии на графике  $\omega(q)$  соответствуют значениям  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  (4).



Асимптотические выражения для описания затухания одномерных низкочастотных маятниковых волн получены только в случае параллельного соединения упругих пружин и вязких демпферов (рис. 2) с помощью метода Л.И. Слепяна обращения двукратных интегральных преобразований в окрестности луча  $nl = c_1 t$  при  $t \to \infty$ :

$$\ddot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 c_1 l}{m \omega_* (\gamma t)^{2/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(\kappa_k z + \frac{z^3}{3}\right) e^{-\mu z^2} z dz, \ k = 1, 2,$$
(5)

$$\dot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 l}{m\omega_*(\gamma t)^{1/3}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\kappa_k z + \frac{z^3}{3}\right) e^{-\mu z^2} dz, \quad \kappa_k = \frac{(2n-3+k)l-c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}} \quad \mu = \frac{\alpha_1 l^2 t}{(\gamma t)^{2/3}},$$

$$\gamma = \frac{c_1 l^2}{2} (1 - 3\delta), \ \alpha_1 = \frac{(\lambda_1 k_2^2 + \lambda_2 k_1^2)}{m(k_1 + k_2)^2}, \ c_1 = l \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}, \ \delta = f(m, \lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2).$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  экспоненциальный множитель под интегралами отсутствует ( $\mu = 0$ ) и формулы (5) принимают вид

$$\ddot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 c_1 l \operatorname{Ai'}(\kappa_k)}{m \omega_* (\gamma t)^{2/3}}, \quad \dot{u}_{k,n} = \frac{2P_0 l \operatorname{Ai}(\kappa_k)}{m \omega_* (\gamma t)^{1/3}}, \quad k = 1,2; \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \beta \right), \quad (6)$$

где Ai — функция Эйри,  $\beta$  определено в (4).

В случае, когда  $\lambda_1 \neq 0$  или  $\lambda_2 \neq 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  формулы (5) упрощаются:

$$\ddot{u}_{k,n} = \frac{P_0 c_1 \tilde{\kappa}_k}{m \omega_* \alpha_1 l t \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}_k^2}{4}\right), \ \dot{u}_{k,n} = \frac{P_0}{m \omega_* \sqrt{\pi \alpha_1 t}} \exp\left(-\frac{\tilde{\kappa}_k^2}{4}\right), \ \tilde{\kappa}_k = \frac{(2n-3+k)l-c_1 t}{l \sqrt{\alpha_1 t}}.$$
(7)

Из (б) видно, что при нулевой вязкости максимальная амплитуда квазифронта ускорений вблизи уменьшается времени С ростом *t*<sup>-2/3</sup>, скоростей — пропорционально  $t^{-1/3}$ . пропорционально ширина квазифронта (область изменения возмущений от нуля до максимума) расширяется со временем как  $t^{1/3}$ . Как следует из (7), наличие вязкости приводит к дополнительному затуханию: максимальные амплитуды ускорений уменьшаются пропорционально  $t^{-1}$ , скоростей масс — пропорционально  $t^{-1/2}$ , ширина квазифронта растет  $t^{1/2}$ .

Для цепочки стержней с одинаковыми упругими прослойками без вязких демпферов ( $k_1 = k_2 = k$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , рис. 2) асимптотика низкочастотной продольной волны имеет вид аналогичный (6) с другими коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{P_0 c_1 lk}{E \omega_* (\gamma t)^{2/3}} \operatorname{Ai}'(\kappa), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{P_0 c_1^2}{E \omega_* (\gamma t)^{1/3}} \operatorname{Ai}(\kappa), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P_0 c_1}{E \omega_* (\gamma t)^{1/3}} \operatorname{Ai}(\kappa), \quad (8)$$
$$\kappa = \frac{x - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \gamma = \frac{c_1 l^2}{8(1 + \beta)^2}, \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k}{m(1 + \beta)}}, \quad \beta = \frac{kl}{SE}.$$

Здесь *S* – площадь поперечного сечения стержня, *E* – модуль Юнга.

Для исследуемых моделей блочно-иерархических сред получены аналитические формулы для вычисления спектров возмущений, распространяющихся при импульсном воздействии, в следующем виде:

$$G(U, \omega, \omega_*) = \left| \int_0^\infty U(t) e^{-i\omega t} dt \right| = G(Q, \omega, \omega_*) B \begin{cases} e^{2n\ln(\sqrt{-\mu} - \sqrt{-\nu})}, & \Omega_1 \le \omega \le \Omega_2; \\ 1, & 0 \le \omega \le \Omega_1 \lor \Omega_2 \le \omega \le \Omega_3; \\ e^{2n\ln(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})}, & \omega \ge \Omega_3. \end{cases}$$
(9)

Здесь  $G(U, \omega, \omega_*)$  – спектральная плотность функции U(t),  $G(Q, \omega, \omega_*)$  – спектральная плотность нагрузки,  $0 \le \omega \le \Omega_1$ ,  $\Omega_2 \le \omega \le \Omega_3$  – зоны пропускания,  $\Omega_1 \le \omega \le \Omega_2$ ,  $\omega \ge \Omega_3$  – зоны непропускания. Величины  $B, \mu, \nu, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  зависят от параметров задачи. Для стержневой системы зон пропускания бесконечно много. В диссертации рассмотрены только первые две зоны.

**В п.2.1.1** рассмотрено распространение упругих волн в стержневой системе и цепочке масс (рис. 2,  $k_1 = k_2 = k$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). На рис. 4 представлены графики деформаций в середине стержней, полученные численно для случая резонансного возбуждения ( $\omega_* = \omega_1 = \pi c/l$ ) импульсной нагрузкой (2): рис. 4a - n = 5, рис. 4e - n = 20 ( $m = 4.875 \, \text{кг}$ ,  $k = 48.75 \cdot 10^6 \, \text{кг/c}^2$ ). Конечно-разностное решение для цепочки масс представлено на рис. 4e тонкой линией.

Из сопоставления асимптотик (6), (8) и результатов численных расчетов следует, что для описания низкочастотных волновых процессов система стержней может быть заменена цепочкой жестких блоков той же массы, что и стержни, но с уменьшенной в  $(1 + \beta)$  раз жесткостью пружин.



На рис. 5 приведен спектр деформаций для цепочки стержней. Толстая линия соответствует результатам численных расчетов, представленных на рис. 4, тонкая линия соответствует аналитическому решению (9), пунктирные линии – значения частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  (4). В отличие от цепочки масс появляется узкий пик, соответствующий зоне пропускания  $\Omega_2 \le \omega \le \Omega_3$ .



**В п.2.1.2** исследуется влияние вязкости на процесс распространения волн в блочных средах с моделью прослоек, представленной на рис. 2  $(k_1 = k_2, \lambda_1 = \lambda_2)$ .

На рис. 6 представлены графики осциллограмм ускорений для массы с номером n = 100 для различных значений параметра вязкости: (a)  $\lambda_2 = 0$ ; (б)  $\lambda_2 = 10 \text{ кг/c}$ ; (b)  $\lambda_2 = 100 \text{ кг/c}$  (m = 4.875 кг,  $k = 48.75 \cdot 10^6 \text{ кг/c}^2$ ). Толстые кривые рассчитаны конечно-разностным методом, тонкие кривые – по асимптотической формуле (5) при  $\lambda_2 = 0$ ; 10 кг/с и по асимптотической формуле (7) при  $\lambda_2 = 100 \text{ кг/c}$ . Сравнение показывает, что соответствие асимптотики (7) и результатов численного эксперимента наступает тем быстрее, чем больше значение параметра вязкости, и при  $\lambda_2 = 100 \text{ кг/c}$  они совпадают с большой точностью.



**В п.2.1.3** исследуется влияние иерархичности структуры блочных пород на особенности распространения волн в цепочке масс с чередующимися прослойками без учета вязкости (рис. 2,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ).

На рис. 7 приведены осциллограмма ускорения 20-й массы при импульсном нагружении и её спектральная плотность, полученные для составной сборки конечно-разностным методом (l = 0.1м,  $k_1 = 0.5 \cdot 10^6$  кг/с<sup>2</sup>,  $k_2 = 0.2 \cdot 10^6 \,\mathrm{kr/c^2}$ ,  $m = 0.3822 \,\mathrm{kr}$ ,  $\omega_* = 15.71 \,\mathrm{Fu}$ ). Сплошная кривая на графике соответствует спектральной плотности конечно-разностному решению, штриховая — аналитическому решению (9), вертикальные линии — значения  $\Omega_{k}$  (4). Анализ показал, что в составной сборке возмущения имеют ярко выраженную двухволновую структуру, состоящую ИЗ низкочастотной маятниковой волны и высокочастотных возмущений, аналогичную структуре возмущений в цепочке стержней (рис. 4).



**В п.2.1.4** исследуется влияние вязкости прослоек на особенности распространения низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах (рис. 2,  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ ).

Анализ численных расчетов показал, что наличие вязкости приводит к уменьшению максимальной амплитуды ускорений низкочастотной маятниковой волны и к очень большому (на порядки) затуханию высокочастотных колебаний, движущихся позади её квазифронта. Этот же вывод подтверждается формулами (7), (9) и численными расчетами спектральной плотности ускорений.

Показано, что при  $n \to \infty$  длинноволновые возмущения в блочноиерархической среде ведут себя так же, как и в эквивалентной однородной цепочке масс с приведенными параметрами жесткости  $k_{\rm np}$  и вязкости  $\lambda_{\rm np}$ , которые определяются из условий равенства скоростей длинных волн  $c_1$  и коэффициента  $\gamma$  в формулах (5) для двух моделей.

В п.2.1.5 рассмотрен общий случай модели периодической блочной структуры, состоящей из одинаковых структурных блоков, каждый из которых содержит конструкции различного типа. Общее движение системы происходит в продольном направлении. Конструкция блоков во многом произвольна — безынерционные связи, дискретные конструкции со многими степенями свободы или континуальные элементы. Показано, что реакция любой протяженной дискретно-периодической конструкции на нестационарное воздействие описывается одним и тем же асимптотическим решением (5).

**П.2.1.6** посвящен экспериментальному и теоретическому изучению влияния демпфирующих свойств прослоек между блоками на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения.

**В п.2.1.6.1** приводятся результаты исследования однородной системы стальных стержней с прослойками из резины, линолеума и пенопласта.

Для физического моделирования блочной структуры использовались стальные стержни диаметром 0.025 м и длиной 0.1 м, разделенные прослойками, которые изготавливались из листовой плотной и пористой резины, линолеума и пенопласта. Стержни, разделенные прослойками, располагались в вертикально установленной трубе датчиками, регистрирующими ускорение. с По свободному торцу верхнего стержня производился удар. Длина сборки (2 м, 20 стержней) позволяла регистрировать колебания стержней до прихода волн, отраженных от нижнего торца сборки. Преимуществом стальных стержней является возможность использовать при теоретическом моделировании процесса распространения волн в цепочке "упругие стержни-прослойки" одномерные схемы деформирования.

Характерным полученных ДЛЯ данных, В экспериментах, явилось выделение типов волн: низкочастотных отстающих ДBVX И ОТ них высокочастотных. Частота последних — 25 кГц, совпадает С частотой колебаний свободного стального стержня длиной 0.1 м. собственных Качественно такое поведение волн в системе "упругие стержни-прослойки" совпадает с теоретическими расчетами, представленными на рис. 4.

Проведено сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей ускорения от времени стержней в системе с прослойками. Расчеты проводились с использованием стержневой модели с вязкоупругими прослойками (рис. 1), параметры которой подбирались так, чтобы обеспечить удовлетворительное согласие данных теории и эксперимента. Особое внимание при этом обращалось на соответствие величин скорости распространения низкочастотной волны, её периода и коэффициента затухания. Анализ теоретических и экспериментальных кривых показал, что без учета вязкости прослоек получается значительное расхождение теории и эксперимента.

Ha примере экспериментальной сборки ИЗ стержней, стальных прослойками, показано, что модель стержней. соединенных цепочки соединенных вязкоупругими прослойками, состоящими из двух пар упругих и демпфирующих элементов, соединенных последовательно и параллельно (рис. 1), удовлетворительно описывает распространение низкочастотных маятниковых волн в одномерной блочной среде. Показано, что скорость распространения маятниковых волн, период, степень их затухания существенно зависят от реологических свойств прослоек.

**П.2.1.6.2** посвящен экспериментальному и теоретическому исследованию влияния внутреннего строения блоков на закономерности распространения нестационарных волн в блочных иерархических средах периодического строения второго порядка (рис. 2).

Эксперименты проводились на стержневой системе, описанной выше. Изучалось распространение волн маятникового типа в системе стальных стержней, разделенных чередующимися прослойками из резины и пенопласта, при ударном нагружении.

Типичные экспериментальные осциллограммы ускорений стержней  $\ddot{u}_j(t)$  и их спектральные плотности приведены на рис. 8–10 сплошными толстыми линиями. Пунктирные кривые на осциллограммах и на графиках спектральной плотности соответствуют решению уравнений для стержневой модели конечно-разностным методом. Для прослоек из пенопласта (рис. 8,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 35$  кг/с,  $k_1 = k_2 = 0.5 \cdot 10^6$  кг/с<sup>2</sup>,  $\omega_* = 13.66$  Гц) и из пористой резины (рис. 9,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 20$  кг/с,  $k_1 = k_2 = 0.2 \cdot 10^6$  кг/с<sup>2</sup>,  $\omega_* = 3.14$  Гц) данные представлены для 4-го и 12-го стержней. Величина  $\omega_*$  определялась из эксперимента.

В численных расчетах для составной сборки с чередующимися прослойками из пенопласта и пористой резины (рис. 2) параметры вязкости и жесткости брались те же, что и для однородных сборок (рис. 10,  $\lambda_1 = 20 \text{ кг/c}$ ,  $\lambda_2 = 35 \text{ кг/c}$ ,  $k_1 = 0.2 \cdot 10^6 \text{ кг/c}^2$ ,  $k_2 = 0.5 \cdot 10^6 \text{ кг/c}^2$ ), только отличалось значение  $\omega_* = 15.71 \text{ Гц}$ , и данные представлены для 3-го и 13-го стержней. Остальные параметры были в соответствии с экспериментом одинаковыми для всех расчетов: l = 0.1 м, m = 0.3822 кг.



Вертикальные штриховые линии на графиках спектральной плотности на рис. 8, 9 соответствуют значению  $\Omega_1 = 2\sqrt{k_1/m}$ , на рис. 10 — значениям  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ , рассчитанным по формулам (4). Сплошные тонкие линии на графиках спектральной плотности на рис. 10 — аналитическое решение (9). Видно, что аналитические оценки (4), (9) согласуются, как с экспериментальными спектрами, так и с теоретическими, полученными численным методом.

Для системы с поочередно расположенными пенопластовыми и резиновыми прослойками (рис. 10) характер распространения возмущений более сложный, чем для однородной стержневой системы (рис. 8, 9). На первых стержнях наблюдается двухволновая конфигурация. Впереди бежит низкочастотная маятниковая волна и за ней высокочастотная. По мере распространения возмущения высокочастотная волна быстро затухает, и уже на 13-м стержне её нет, регистрируется только низкочастотная маятниковая волна. В соответствии с этим спектр возмущения на первых стержнях имеет два максимума, отвечающих двухволновой конфигурации.

Сравнение численных и экспериментальных кривых показывает, что модель цепочки стержней с вязкоупругими прослойками, соединенными параллельно (рис. 2), удовлетворительно описывает экспериментальные осциллограммы и спектры на малых расстояниях от места воздействия (3 – 5-й стержень). На больших расстояниях затухание амплитуды маятниковой волны в эксперименте оказывается заметно больше, чем в расчетах, хотя в скорости распространения и в форме сигнала больших расхождений нет.

В п.2.1.7 проводится экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде, составленной из стандартных силикатных кирпичей. Основная цель — провести сопоставление с данными, полученными по модели цепочки масс (рис. 1), получить данные о скорости распространения маятниковой волны, о затухании ее максимальной амплитуды с расстоянием в зависимости от наличия или отсутствия резиновых прослоек.



Схема экспериментальной сборки представлена на рис. 11. На рис. 12 приведена характерная осциллограмма сигналов датчиков, фиксирующих колебания отдельных блоков, с демпфирующими прослойками из вакуумной резины толщиной 0.001 м. Кривая 1 соответствует записи силы воздействия молотка в процессе удара (длительность удара  $0.21 \cdot 10^{-3}$  с), а кривые 2-7 фиксируют сигналы акселерометров, закрепленных на блоках. Слева от графиков приведены максимальные значения сигналов. Начиная с 3-го кирпича (номера справа), четко выделяется низкочастотная часть сигнала.

Скорость распространения упругого сигнала  $V_M$ , характеризующая скорость маятниковой волны, определялась по разности времени между началом взаимодействия молотка и сборки и первым максимумом сигнала

приемного датчика. При наличии резиновых прослоек между блоками устанавливается значение  $V_M$ , равное 164 м/с, а при их отсутствии — 316 м/с.

Показано, что степень затухания максимальных амплитуд ускорений волнового сигнала существенно снижается при преодолении им определенного количества разделяющих кирпичи поверхностей. Это особенно заметно, когда кирпичами проложены резиновые прослойки. Если между при непосредственных контактах низкочастотный сигнал практически, в пределах разброса экспериментальных данных, перестает уменьшаться после преодоления 5-6 контактных разделов, то при наличии резиновых прослоек количество таких разделов уменьшается до 2. Полученные экспериментальные данные по скорости распространения и степени затухания низкочастотных волн, порождаемых ударом в блочной системе, использованы для определения деформационных свойств контактов между блоками в теоретических расчетах по одномерной модели цепочки масс, соединенных вязкоупругими пружинами (рис. 1). В результате для резиновых прослоек получено:  $k_1 = 5.3 \cdot 10^6 \, \mathrm{kr/c^2}$ ,  $k_2 = 10^7 \text{ кг/c}^2$ ,  $\lambda_1 = 10^4 \text{ кг/c}$ ,  $\lambda_2 = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/c}$ . Для контакта без прослоек:  $k_1 = 15 \cdot 10^6 \text{ kg/c}^2, \ k_2 = 59 \cdot 10^6 \text{ kg/c}^2, \ \lambda_1 = 75 \cdot 10^3 \text{ kg/c}, \ \lambda_2 = 4 \cdot 10^3 \text{ kg/c}.$ 

Теоретические кривые зависимостей ускорения от времени, соответствующие осциллограммам на рис. 12, приведены на графиках рис. 13. Вертикальные отрезки на этих графиках соответствуют распространению прямой и отраженной маятниковой волны со скоростью 164 м/с. Можно видеть одинаковую скорость распространения низкочастотной волны и близкое затухание в теории и эксперименте. Наблюдаемое отличие в форме кривых можно объяснить, в частности, нерегулярностью контактов в сборке кирпичей, разделенных резиновыми прослойками.

Экспериментальные и теоретические исследования распространения волн в одномерных моделях блочных сред подтвердили существование маятниковых волн в блочных средах, открытое В.Н. Опариным и М.В. Курленей.



**В § 2.2** изучается распространение нестационарных волн в двумерных блочных средах, имеющих дискретно-периодическое строение. Динамика

блочной среды, рассматривается в маятниковом приближении, когда блоки считаются несжимаемыми, а их смещения происходят за счет сжимаемости прослоек. Простейшей расчетной моделью в этом случае может служить регулярная решетка масс, соединенных вязкоупругими пружинами. Исследуется антиплоское и плоское движение блочной среды.

**В п.2.2.1** методом Л.И. Слепяна получены новые формулы приближенного представления для функции Ломмеля  $s_{0,n}(ct)$  через функцию Скорера Gi(z) и формулы приближенного представления первой производной функции Ломмеля  $s'_{0,n}(ct)$  через производную функции Скорера Gi'(z), справедливые при n >> 1 (n = 2k) или ct >> 1:

$$s_{0,n}(ct) \approx -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct}\right)^{1/3} \operatorname{Gi}(z), \quad s_{0,n}'(ct) \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{ct}\right)^{2/3} \operatorname{Gi}'(z), \quad z = \left(\frac{2}{ct}\right)^{1/3} (n - ct).$$
(10)

Этим же методом получены ранее известные формулы приближенного представления типа Никольсона для функции Бесселя и её производной в терминах функции Эйри:

$$J_n(ct) \approx \left(\frac{2}{ct}\right)^{1/3} \operatorname{Ai}(z), \ J'_n(ct) \approx -\left(\frac{2}{ct}\right)^{2/3} \operatorname{Ai}'(z).$$
(11)

В п.2.2.2 проводится исследование распространения нестационарных волн в двумерной модели блочной среды в антиплоской постановке.

**В п.2.2.2.1** приводится постановка задачи и её решение в изображениях по Лапласу и Фурье для сосредоточенной нагрузки.

Блочная среда моделируется двумерной квадратной решеткой, состоящей из масс величины M, соединенных пружинами длины l, имеющими одинаковые жесткости k в обоих направлениях. Уравнения движения масс:

 $M\ddot{u}_{m,n} = k(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n}) + Q(t)\delta_{m0}\delta_{n0},$  (12) где  $u_{m,n}$  — перемещение масс в направлении ортогональном плоскости решетки; m, n — номера масс в направлениях осей x, y; Q(t) — нагрузка, приложенная перпендикулярно плоскости решетки в начале координат.

С применением дискретных преобразований Фурье по переменным *m*, *n* и преобразования Лапласа по времени, получено решение в изображениях

$$u^{LF_mF_n} = Q^L / D(p, q_x, q_y), \ D(p, q_x, q_y) = Mp^2 + 2k(2 - \cos q_x l - \cos q_y l).$$
(13)

Для данной модели блочной среды существуют две резонансные частоты:  $\omega_1 = 2\omega_0$  и  $\omega_2 = 2\sqrt{2}\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ ).

**В п.2.2.2.2** исследуется распространение волн в квадратных решетках при действии сосредоточенной синусоидальной нагрузки резонансной частоты  $\omega_* = 2\omega_0$ . В результате обращения (13) получены асимптотики поведения возмущений при бесконечно большом времени с начала процесса (величины *M*, *l*, *k* приняты за единицы измерения,  $\gamma = 0.577...$  — постоянная Эйлера):

а) если |m| + |n| — четное, то

$$u_{0,0}(t) \approx \frac{Q_0}{2\pi} [\ln(4t) + \gamma],$$
 (14)

$$u_{m,m}(t) \approx \frac{Q_0(-1)^{m+1}}{2\pi} \ln \frac{t}{|m|}, \ m \neq 0 \ ; \ u_{m,n}(t) \approx \frac{Q_0(-1)^{n+1}}{2\pi} \left( \ln \frac{t}{|m^2 - n^2|} - \gamma \right), \ |m| \neq |n| \ ; \ (15)$$

б) если 
$$|m| + |n|$$
 — нечетное, то  
 $u_{m,n}(t) \approx \frac{Q_0(-1)^{\nu+1}}{4}, \quad \nu = \max(|m|, |n|).$  (16)

Данная задача была решена M.V. Ayzenberg-Stepanenko и L.I. Slepyan (J. Sound Vibr., 2008), однако, они допустили небольшие погрешности в формулах (15), которые были исправлены автором.

Анализ формул (14)–(16), показывает, что при локальном синусоидальном воздействии с резонансной частотой распространение волны содержит ярко выраженную пространственную направленность: основная часть энергии оказывается сосредоточенной вдоль диагоналей.

**В п.2.2.2.3** исследуется антиплоская деформация двумерной квадратной решетки при действии сосредоточенной ступенчатой нагрузки.

Для решения задач механики дискретно-периодических сред автором предложен способ асимптотического представления подынтегральных функций в формулах обращения преобразования Лапласа и дискретного преобразования Фурье, позволяющий явно проинтегрировать формулы обращения и получить асимптотики, учитывающие не только вклад длинноволновых возмущений в окрестности фронта волны, но и высокочастотных колебаний за фронтом волны. С использованием этого способа и формул приближенного представления для функций Бесселя (11) получены асимптотики возмущений:

$$u_{m,0} \approx \frac{Q_0}{2k\pi} \begin{cases} H(z-1)\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), & z=\omega_0 t/|m|, & m\neq 0, \\ \ln\left(4\sqrt{2}\omega_0 t\right)+\gamma, & m=0, \end{cases}$$
(17)

$$\dot{u}_{m,0} \approx \frac{Q_0}{2^{1/3}\sqrt{kM}} \left[ \frac{\operatorname{Ai}(2^{1/3}\kappa)}{(\omega_0 t)^{1/3}} \right]^2, \ \ddot{u}_{m,0} \approx -\frac{2Q_0\operatorname{Ai}(2^{1/3}\kappa)\operatorname{Ai}'(2^{1/3}\kappa)}{\sqrt{kM}t}, \ \kappa = \frac{m - \omega_0 t}{(\omega_0 t)^{1/3}}.$$
 (18)

где  $\gamma = 0.577...$  — постоянная Эйлера.

Кроме этого, получено точное решение для уравнений, описывающих антиплоское движение однородной упругой среды, при сосредоточенном ступенчатом воздействии, и показано, что оно совпадает с длинноволновой асимптотикой перемещения (17) для блочной среды при  $m \neq 0$ .

На рис. 14 представлены осциллограммы перемещений (m = 0, 10, 20), скоростей перемещений ускорений (m = 20)И при ступенчатом сосредоточенном воздействии (k = 1,l = 1, M = 1 ). Тонкие кривые конечно-разностному соответствуют решению, толстые кривые аналитическим решениям (17), (18), штриховые кривые — аналитическое решение для однородной среды.



Видно, что асимптотика (17) с большой точностью описывает перемещение, полученное численно, на всем интервале взаимодействия. Асимптотики (18) практически совпадают с конечно-разностным решением до прихода коротковолновых возмущений. Решение для скоростей перемещений для блочной среды осциллирует относительно решения для однородной среды.

**П.2.2.2.4** посвящен моделированию особенностей распространения сейсмических волн в однородной или слоистой блочной среде в двумерной постановке. Исследования проведены на примере антиплоской деформации блочной среды при действии импульсной нагрузки (2) в лежащем на жестком основании двухслойном блочном массиве, имеющем одинаковые жесткости в обоих направлениях, но разные в разных слоях. Слоистая блочная среда возникает, например, при взрывной отбойке горной массы в карьерах.

Показано, что для поверхностной нагрузки волна, распространяющаяся по нижнему, более жесткому слою, обгоняет волну верхнего слоя. Максимальные колебания на поверхности полупространства при этом наступают все же после прихода более медленной волны верхнего слоя. Аналогичный характер имеют и сейсмограммы взрывов на карьерах. Показано, что максимальные амплитуды скоростей перемещений на свободной поверхности возникают в случае, когда жесткость поверхностного слоя меньше, чем жесткость подстилающего слоя.

**П.2.2.3** посвящен моделированию распространения нестационарных волн в двумерной блочной среде в плоской постановке.

**В п.2.2.3.1** выведены уравнения блочной среды, моделируемой однородной двумерной решеткой, состоящей из масс, соединенных пружинами в направлениях осей *x*, *y* и в диагональных направлениях.

$$Mu_{n,m} = k_1(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} + u_{n+1,m-1} + u_{n-1,m+1} - 4u_{n,m})/2 + k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} - v_{n-1,m+1} - v_{n+1,m-1})/2 + Q_x,$$

$$M\ddot{v}_{n,m} = k_1(v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}) + k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} - u_{n+1,m-1} + v_{n-1,m+1} + v_{n-1,m+1} + v_{n+1,m-1} - 4v_{n,m})/2 + Q_y.$$
(19)

Здесь u, v — перемещения в направлениях x, y; n, m — номера масс в направлениях x, y; M — масса;  $Q_x, Q_y$  — внешние действующие силы;  $k_1$  —

жесткости пружин в направлениях осей x, y;  $k_2$  — в диагональных направлениях. Показано, что если  $k_1 = 2k_2$ , то при  $l \rightarrow 0$  (l — длина пружин) уравнения (19) описывают плоское напряженное или плоское деформированное состояние изотропной упругой среды.

**П.2.2.3.2** посвящен исследованию дисперсионных свойств уравнений (19). Показано, что каждой паре волновых чисел  $q_x$ ,  $q_y$  соответствуют две волны, одна из которых является аналогом продольных волн расширения в упругом теле, другая — аналогом волн сдвига. Из дисперсионного уравнения определены зависимости частоты, модулей фазовых и групповых скоростей от волновых чисел и показано, что частоты  $\omega_0 = 2\sqrt{k_1/M}$ ,  $\omega_1^{\pm} = \sqrt{2(2k_2 + k_1 \pm k_1)/M}$  являются резонансными для данной системы. Значения модулей фазовых и групповых скоростей при  $q_x$ ,  $q_y \rightarrow 0$  имеют разные пределы в зависимости от соотношения  $q_x$ ,  $q_y$ . Показано, что скорость распространения низкочастотных продольных и сдвиговых волн одна и та же в диагональных и осевых направлениях, если  $k_1 = 2k_2$ :

$$c_p = c^+ = l_{\sqrt{\frac{3k_1}{2M}}}, \ c_s = c^- = l_{\sqrt{\frac{k_1}{2M}}}, \ c^{\pm} = l_{\sqrt{\frac{2k_1 \pm k_1}{2M}}}.$$
 (20)

Показано, что длинноволновые возмущения движутся без дисперсии и формируют квазифронты низкочастотных двумерных маятниковых волн.

На рис. 15 представлены зависимости частоты и модуля фазовой скорости от волновых чисел  $q_x$ ,  $q_y$ , если  $k_1 = 2k_2 = 4/3$  (M = 1, l = 1).



Рис. 15.

В пп.2.2.3.3, 2.2.3.4 исследуются нестационарные волны в безграничной решетке при воздействиях типа «центр расширения» и «центр вращения».

На рис. 16 представлены результаты расчетов радиального смещения для ступенчатого воздействия типа «центр расширения». На рис. 17 приведены результаты расчетов тангенциальной скорости перемещений при воздействии типа «центр вращения» импульсной нагрузки (2) с частотой  $\omega_* = 0.5$ . Жесткость диагональных и осевых пружин на рис. 16, 17 варьировалась: (*a*)  $k_1 = 1.8$ ,  $k_2 = 0.2$ ; (*б*)  $k_1 = 2k_2 = 4/3$ ; (*в*)  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 1.8$  (T = 36, T — время).

На рис. 16, 17 видно, что, если  $k_1 < 2k_2$ , то скорость длинных волн вдоль осей меньше, чем вдоль диагоналей. И, наоборот, если  $k_1 > 2k_2$ , то скорость

волн вдоль осей больше, чем скорость волн вдоль диагоналей. При  $k_1 = 2k_2$  имеем "изотропную" решетку: волны расходятся кругами (рис. 166, 176).



Рис. 17.

Исследовалось распространение возмущений в решетке при импульсном и ступенчатом воздействии. Проводился анализ осциллограмм радиальных и тангенциальных скоростей перемещений и их спектральных плотностей в точках на оси воздействия и в точках на диагонали. Показано, что время появления длинноволновых возмущений в конкретных точках вычисляется с большой точностью с помощью формул (20); при действии нагружения типа «центр расширения» (или «центр вращения») спектр возникающих возмущений определяется в основном резонансными частотами, которые соответствуют волнам расширения (или сдвига); максимальная амплитуда возмущений и максимальная скорость распространения возмущений реализуется преимущественно в том направлении, в котором жесткость связей имеет при низкочастотном наибольшее значение: воздействии типа «центр расширения» (или «центр вращения») максимальный вклад в амплитуду возмущений вносят длинноволновые продольные (или сдвиговые) волны.

В п.2.2.2.5 исследуется нестационарная задача Лэмба в плоской постановке. Рассматривается действие вертикальной сосредоточенной ступенчатой нагрузки на свободную поверхность блочного полупространства  $(m \le 0)$ . Движение масс, находящихся ниже границы полупространства (m < 0), описывается уравнениями (19). Уравнения движения блоков на границе m = 0 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{n,0} &= k_1(u_{n+1,0} - 2u_{n,0} + u_{n-1,0}) + k_2(u_{n-1,-1} + u_{n+1,-1} - 2u_{n,0} + v_{n-1,-1} - v_{n+1,-1})/2, \\ M\ddot{v}_{n,0} &= k_1(v_{n,-1} - v_{n,0}) + k_2(u_{n-1,-1} - u_{n+1,-1} + v_{n-1,-1} - 2v_{n,0} + v_{n+1,-1})/2 + P_0\delta_{n0}H(t). \end{aligned}$$
(21)

Здесь *и*, *v* — горизонтальные и вертикальные перемещения. Начальные условия нулевые. Блочная среда предполагается «изотропной»:  $k_1 = 2k_2 = 3/4$ .

Получено LF-изображение решения задачи Лэмба для блочной среды:

$$u_m^{LF_d} = CA_1 e^{\alpha_1 m} + DA_2 e^{\alpha_2 m}, \quad v_m^{LF_d} = CB_1 e^{\alpha_1 m} + DB_2 e^{\alpha_2 m},$$
(22)  
$$C = -\frac{2P_0 a_{12}}{pk_1 \Delta}, \quad D = \frac{2P_0 a_{11}}{pk_1 \Delta}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  зависят от p, q и параметров системы.

Дисперсионное уравнение  $\Delta = 0$  является уравнением Рэлея для математической модели блочной среды. Его исследование показало, что бесконечно длинные волны Рэлея распространяются без дисперсии и их скорость в блочной среде имеет то же самое значение, что и для упругой среды (в случае плоского напряженного состояния  $\sigma = 1/3$ ,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона):

$$c_R = \sqrt{\frac{E(3-\sqrt{3})}{4\rho}} = l_V \sqrt{\frac{k_1}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2} \approx 0.563....$$
(23)

В результате асимптотического обращения формул (22) получено аналитическое решение на границе блочного полупространства (m=0) при  $t \to \infty$  для длинноволновых возмущений, бегущих со скоростью волн Рэлея:

$$u_{n,0}(t) \approx \frac{P_0}{4k_1} \left[ \frac{1}{3} - \int_0^\kappa \operatorname{Ai}(y) dy \right], \quad \dot{u}_{n,0}(t) \approx \frac{nP_0}{2k_1 t} \frac{\operatorname{Ai}(\kappa)}{(\omega_1 t)^{1/3}},$$
(24)

$$\begin{split} \ddot{u}_{n,0}(t) &\approx -\frac{nP_0c_R}{k_1 lt} \frac{\operatorname{Ai'}(\kappa)}{(\omega_1 t)^{2/3}}, \ \dot{v}_{n,0}(t) \approx -\frac{P_0 l^2 \lambda \operatorname{Gi}(\kappa)}{4M c_R (l^2 c_R t/8)^{1/3}}, \ \ddot{v}_{n,0}(t) \approx \frac{P_0 l^2 \lambda \operatorname{Gi'}(\kappa)}{4M (l^2 c_R t/8)^{2/3}}, \\ \kappa &= \frac{\left(nl - c_R t\right)}{\left(l^3 \omega_1 t/8\right)^{1/3}}, \ \omega_1 = \sqrt{\frac{4k_1}{3M}}, \ n \ge 0, \ \lambda \approx 0.62.... \end{split}$$

При выводе (24) были использованы приближенные представления (10), (11). Решение при *n* < 0 определяется из условий симметрии.

На рис. 18, 19 приведены зависимости возмущений от времени на поверхности блочного полупространства при действии в начале координат ступенчатой вертикальной нагрузки ( $P_0 = 1$ , M = 1, l = 1, n = 60). Вертикальные линии на этих рисунках соответствуют моментам времени прихода квазифронтов волн (19), (23):  $t_p = n/c_p$ ,  $t_s = n/c_s$ ,  $t_R = n/c_R$ . Сплошные кривые соответствуют конечно-разностным решениям, штриховые кривые – решениям (24).





На рис. 18 на графике перемещений горизонтальная линия соответствует значению  $P_0/(4k_1)$ . Оно совпадает со статическим решением задачи Фламана, равным  $P_0(1-\sigma)/(2E)$ ,  $\sigma = 1/3$ . На рис. 18, 19 видно качественное и количественное соответствие численного и аналитического (24) решений для функций  $u, \dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$  в окрестности фронта волны Рэлея и позади её фронта. Показано, что спектры колебаний, возникающих в блочной среде при поверхностном нагружении, ограничены резонансной частотой поверхностных волн:  $\omega \leq \omega_1$ .

В п.2.2.3.6 численно исследуется в плоской постановке действие вертикальной сосредоточенной импульсной нагрузки (2) разной длительности  $t_0$  на свободную поверхность блочного полупространства. Проводится сравнение зависимостей от времени перемещений и скоростей движения точек поверхности блочного и упругого полупространств. Для упругой среды решение получено М.П. Варыгиной [30]. Анализ результатов расчетов, проведенных при разных значениях  $t_0$ , показал, что максимальное отличие характера поведения колебаний блочной и упругой среды наблюдается при коротком по времени импульсном воздействии. В блочной среде с приходом волны Рэлея возникают слабо затухающие высокочастотные колебания. С увеличением длительности импульсного нагружения такие колебания быстрее затухают и головная часть рэлеевской волны становится похожа на волну Рэлея в упругом полупространстве.

**В п.2.2.3.7** изучается в плоской постановке задача Лэмба о действии сосредоточенной вертикальной нагрузки на поверхность блочного полупространства с вязкостью. В уравнениях (19), (21) добавлены слагаемые, соответствующие вязким демпферам в осевых и диагональных направлениях с параметрами вязкости  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 = 2\lambda_2$ ,  $k_1 = 2k_2 = 3/4$ ).

На рис. 20 приведены результаты численных расчетов зависимости возмущений от времени на поверхности блочного полупространства в точке с координатами n = 60 при различных значениях параметра вязкости. Тонкие линии соответствуют значению  $\lambda_1 = 0$ , линии средней толщины —  $\lambda_1 = 0.1$  и толстые линии —  $\lambda_1 = 0.4$ . Вертикальные линии на рис. 20 соответствуют моментам времени прихода продольных, сдвиговых и рэлеевских волн.

Анализ графиков перемещений показал, что с ростом вязкости позади фронта рэлеевской волны горизонтальные перемещения стремятся к значению

 $P_0/(4k_1)$  (24), которое получено при  $\lambda_1 = 0$ . Наличие вязкости приводит к уменьшению амплитуды высокочастотных колебаний позади фронта рэлеевской волны на графиках скоростей перемещений и ускорений, а затем и к их полному исчезновению с ростом вязкости. Такое поведение возмущений ближе к реальным сейсмограммам, чем без учета вязкости.



**В главе 3** исследуется процесс распространения нестационарных волн в трубе, взаимодействующей с внешней средой по закону сухого трения.

В § 3.1 предполагается, что среда, окружающая трубу, не деформируема.

**П.3.1.1** посвящен постановке задачи. Рассматривается упругий трубчатый стержень (R — радиус, h — толщина стенки) длины L, заглубленный в грунт на величину  $L_1$ . К его торцу прикладывается продольный импульс Q(t). К боковой поверхности стержня в движущихся сечениях приложено постоянное касательное напряжение  $\tau_0$ . Движение стержня описывается уравнением

$$\ddot{U} = c^2 U''_{,zz} - \tau , \quad \tau = k \frac{\tau_0 P_t}{\rho S_t}, \quad k = \operatorname{sign} \dot{U} , \quad S_t = \pi h (2R - h) , \quad P_t = 2\pi R .$$
(25)

с нулевыми начальными условиями и граничными условиями на торцах стержня

$$ES_t U'_{,z}\Big|_{z=0} = -Q(t), \quad ES_t U'_{,z}\Big|_{z=L} = 0.$$
 (26)

Здесь U(t,z) — перемещение стержня в направлении z,  $c = \sqrt{E/\rho}$  — скорость продольной волны,  $\rho$  — плотность материала трубы, E — модуль Юнга.

**П.3.1.2** посвящен особенностям численных алгоритмов. Система уравнений (25), (26) решалась численно с использованием явной конечно-разностной схемы типа "крест" и предельного условия устойчивости Куранта.

Алгоритм расчета с учетом трения состоит в следующем. Поскольку ни направление, ни величина силы трения заранее неизвестны, в процессе решения вычисляются скорости точек для двух возможных знаков  $k : (\dot{U}_j^+ \, \text{для} \, k > 0 \, \text{u} \, \dot{U}_j^- \, k < 0)$ . Если  $\dot{U}_j^+$  и  $\dot{U}_j^-$  одного знака, то выбирается меньшее по амплитуде значение. Если скорости  $\dot{U}_j^+$  и  $\dot{U}_j^-$  разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о пассивности трения, следует вывод о том, что реальная скорость трубы равна нулю и, следовательно, сила трения отсутствует. Поскольку в процессе расчета однозначно определяется величина и направление действия силы трения, на каждом временном слое решается линейная задача, в которой величина силы трения теперь определена и входит как нагрузка в правую часть уравнения.

**П.3.1.3** посвящен обоснованию возможности применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье к нелинейному уравнению (25) и выводу аналитических решений для задачи внедрения стержня в грунт с внешним сухим трением при импульсном воздействии (2).

С использованием техники интегральных преобразований получена аналитическая зависимость скорости перемещений полубесконечного стержня от времени *t* при фиксированной координате *z*:

$$\dot{U}(z,t) = \frac{1}{c\rho S_t} \left[ P_0 \sin \omega_* \left( t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\tau_0 P_t ct}{2} \right] H\left( \frac{z}{c} - t + t_0 - \varepsilon_2 \right) H\left( t - \frac{z}{c} - \varepsilon_1 \right).$$
(27)

Величины  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  определяются из уравнений  $2P_0 \sin(\omega_* \varepsilon_1) = \tau_0 P_t c(\varepsilon_1 + z/c)$ ,  $2P_0 \sin(\omega_* \varepsilon_2) = \tau_0 P_t c(z/c + t_0 - \varepsilon_2)$ , и лежат в интервале  $0 \le \varepsilon_1 \le t_0/2$ ,  $0 \le \varepsilon_2 \le t_0/2$ .

При выводе формулы (27) были учтены следующие соображения: а) поскольку в полубесконечном стержне скорость положительна, то k = 1, если  $\dot{U} > 0$ , и k = 0, если  $\dot{U} = 0$ ; б) возмущения в волноводе с учетом трения не могут распространяться со скоростью большей, чем скорость волн в стержне без трения. Анализ формулы (27) показывает, что в стержне, к которому приложено внешнее сухое трение, амплитуда бегущего импульса исчезает в момент времени  $t_*$  в сечении  $z_*$ :

$$t_* = \frac{2P_0}{\tau_0 P_t c}, \qquad z_* = c \left( t_* - \frac{t_0}{2} \right) = \frac{2P_0}{\tau_0 P_t} - \frac{ct_0}{2}.$$
(28)

Первая оценка (28) совпадает с оценкой, полученной Л.В. Никитиным.

Интегрированием (27) по времени, получена приближенная зависимость перемещений сечений стержня от времени и координаты для нагрузки (2).

Для импульсного воздействия на интервале  $(0,t_0)$  произвольной формы:  $Q(t) = P_0 \tilde{Q}(t) H(t_0 - t) H(t)$ , где  $\tilde{Q}(t)$  — выпуклая вверх функция, получена аналогичная (27) зависимость скорости перемещений от времени *t* при фиксированной координате *z* в виде:

$$\dot{U}(z,t) = \frac{1}{c\rho S_t} \left[ P_0 \tilde{Q} \left( t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\tau_0 P_t ct}{2} \right] H \left( \frac{z}{c} - t + t_0 - \varepsilon_2 \right) H \left( t - \frac{z}{c} - \varepsilon_1 \right),$$

$$2P_0 \tilde{Q}(\varepsilon_1) = \tau_0 P_t (z + c\varepsilon_1), \quad 2P_0 \tilde{Q}(t_0 - \varepsilon_2) = \tau_0 P_t (z + ct_0 - c\varepsilon_2).$$
(29)

Из (29) следует решение относительно перемещений для прямоугольного импульса  $Q(t) = P_0H(t)H(t_0 - t)$ , которое точно удовлетворяет уравнению (25), поскольку  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Для всех импульсов другой формы уравнение (25) на решении, полученном интегрированием (29), удовлетворяется приближенно, но с большой точностью, если выполняется условие  $t_0 \ll t_*$ .

Если  $L >> ct_0/2$ , то из (27) следует, что амплитуда импульса (2) должна быть больше половины силы трения, действующей на боковую поверхность трубы, чтобы возмущение дошло до конца трубы:  $P_0 \ge F_{\rm Tp}/2$ ,  $F_{\rm Tp} = \tau_0 P_t L$ .

Кроме решений для полубесконечного стержня (27), (29) получено решение с учетом отражений от торцов стержня относительно перемещений и скоростей перемещений для стержня конечной длины L, к боковой поверхности которого приложено сухое трение с касательным напряжением  $\tau_0$  и импульсная продольная нагрузка.

В предположении, что  $P_0 >> F_{\rm rp}$ , получена грубая инженерная оценка суммарного проскальзывания сечения трубы z = 0 после затухания возмущений в трубе под действием сил трения при многократных отражениях импульса (2):

$$U_{1}^{*} \approx \frac{t_{0}\tilde{P}_{0}^{2}}{2c\rho S_{t}F_{\rm Tp}}, \quad \tilde{P}_{0}^{2} = \left\{P_{0}^{2} + 2P_{0}F_{\rm Tp}\left(1 + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{t_{0}c}{2L}\right)\right) - F_{\rm Tp}^{2}\frac{t_{0}c}{2L}\right\}.$$
(30)

Получена аналогичная оценка суммарного проскальзывания трубы при многократных отражениях прямоугольного импульса:

$$U_{2}^{*} \approx \frac{t_{0} \widetilde{P}_{0}^{2}}{c \rho S_{t} F_{\text{m}}}, \quad \widetilde{P}_{0}^{2} = \left\{ \left( P_{0} - F_{\text{m}} \frac{t_{0} c}{4L} \right)^{2} - F_{\text{m}}^{2} \frac{t_{0} c}{4L} \right\}.$$
(31)

**П.3.1.4** посвящен сравнению численных и аналитических решений. На рис. 21 приведены зависимости скорости перемещений в трубе, полностью погруженной в грунт, от продольной координаты в различные моменты времени с учетом отражений от торцов трубы при импульсном воздействии (2). Параметры задачи:  $P_0 = 989.6 \text{ kH}$ ;  $t_0 = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ c}$ ;  $E = 2.03 \cdot 10^{11} \Pi \text{ a}$ ; h = 0.01 m; R = 0.1625 m;  $\rho = 7805 \text{ кг/m}^3$ ;  $\tau_0 = 2 \cdot 10^4 \Pi \text{ a}$ ;  $L_1 = L = 30 \text{ m}$ . Сплошные кривые — результаты численных расчетов, пунктирные — аналитические решения.



Формулы (28) дают следующие оценки: время затухания продольного импульса —  $t_* = 19.6 \cdot 10^{-3}$  с, область стержня, занятая возмущениями, —  $z < z_* = 96.9$  м. Это подтверждается численными расчетами. Анализ графиков на рис. 21 показывает, что наличие трения приводит к тому, что нижняя часть импульса постепенно "стирается" до тех пор, пока импульс не исчезнет полностью.

На рис. 22 приведены результаты численных расчетов для перемещения сечения трубы z = 0 в зависимости от времени при многократных отражениях возмущений от торцов трубы. Параметры задачи те же, что и на рис. 21. Значение  $\tau_0$  (МПа) варьировалось. Тонкие линии на рис. 22 — решение при импульсном воздействии (2), толстые линии — при действии прямоугольного импульса длительности  $t_0/2$ . Штриховые линии соответствуют приближенным аналитическим оценкам (31), пунктирные — (30). Видно, что при воздействии импульсов разной формы, но с одинаковой энергией удара и одинаковой силой трения, величины полного проскальзывания трубы с внешним сухим трением на поверхности имеют разное значение и качественно верно определяются грубыми оценками (30), (31).



На рис. 23 показаны зависимости перемещений сечения трубы z = 0 от времени, полученные для различных значений длины  $L_1$ . Параметры задачи:  $L = 3.5 \text{ м} + L_1$ ,  $P_0 = 88 \cdot 10^3 \text{ H}$ ,  $t_0 = 0.22 \cdot 10^{-3} \text{ c}$ ,  $\rho = 7530 \text{ кг/m}^3$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,

h = 0.003 м, R = 0.045 м. На рис. 24 представлена сплошной линией зависимость перемещений в момент времени t = 0.1 с от длины  $L_1$ . Штриховая линия соответствует приближенной аппроксимации результатов численного эксперимента функцией  $F(L_1) = 4.28L_1^{-0.9448}$ . Эта функция очень близка к обратной функции. Таким образом, для трубы, частично погруженной в грунт, качественная зависимость от  $L_1$  совпадает с полученной в формуле (30) для трубы, полностью погруженной в грунт.

**В § 3.2** исследовано влияние деформирования внешней среды и выполнено сравнение расчетов, проведенных по двум моделям с деформируемой и недеформируемой внешней средой.

**В п.3.2.1** приводится постановка двумерной задачи внедрения стержня в грунт с внешним сухим трением на его поверхности. Рассматривается упругий трубчатый стержень длины L, заглубленный в грунт на величину  $L_1$ . К его торцу прикладывается продольный импульс (2). Движение стержня описывается одномерным волновым уравнением (25) с граничными условиями (26).

Для определения сдвигового напряжения грунта, действующего на трубу, используется двумерная модель среды с одним перемещением V в направлении оси трубы *z*:

$$\ddot{V} = a^2 V_{,zz}'' + b^2 \left( V_{rr}'' + \frac{1}{r} V_{,r}' \right), \quad a^2 = \frac{\lambda + 2G}{\gamma}, \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}.$$
(32)

Здесь G — модуль сдвига;  $\lambda$  — коэффициент Ламе;  $\gamma$  — плотность грунта; r — радиальная координата. Граничные условия соответствуют отсутствию перемещений на внешней границе грунта  $r = R_2$  и напряжений на свободных поверхностях грунта:

$$V(z,r)\big|_{r=R_2} = 0 \quad (L-L_1 \le z \le L), \quad V'_{,z}(z,r)\big|_{z=L-L_1} = 0, \quad V'_{,z}(z,r)\big|_{z=L} = 0.$$
(33)

Граничные условия на поверхности трубы на упругой стадии процесса взаимодействия, когда  $abs(\tau) < \tau_0$ , определяются формулами:

$$V(z,r)\big|_{r=R} = U(z), \quad L - L_1 \le z \le L; \qquad \tau(z,t) = \frac{P_t}{S_t \rho} \begin{cases} GV'_{,r}\big|_{r=R}, & z > L - L_1, \\ 0, & z \le L - L_1. \end{cases}$$
(34)

На этапе проскальзывания грунта, когда  $abs(\tau) > \tau_0$ , труба взаимодействует с грунтом по закону сухого трения:

$$\tau(z,t) = \frac{P_t}{S_t \rho} \begin{cases} -k\tau_0, & z > L - L_1, \\ 0, & z \le L - L_1, \end{cases} \qquad GV'_{,r} \Big|_{r=R} = k\tau_0.$$

$$k = \text{sign}[\dot{U}(z) - \dot{V}(z,R)] \quad \Pi P \mu \quad \dot{U} - \dot{V} \neq 0$$
(35)

**П.3.2.2** посвящен особенностям численных алгоритмов двумерной задачи с внешним сухим трением. Система уравнений (25), (26), (32)–(35) решалась численно по явной конечно-разностной схеме типа "крест". Шаг по времени удовлетворял предельным условиям устойчивости Куранта для уравнений (25), (32).

Алгоритм расчета с учетом трения аналогичен п.3.1.2 и состоит в следующем. В процессе решения вычисляются относительные скорости точек трубы и грунта для двух возможных знаков  $k: (U_j^+ - V_{j,1}^+ \, \text{для} \, k > 0 \, \text{и} \, \dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^- \, k < 0)$ . Если  $U_j^+ - V_{j,1}^+ \, \text{и} \, \dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$  одного знака, то выбирается меньшее по амплитуде значение. Если скорости  $U_j^+ - V_{j,1}^+ \, \text{и} \, \dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$  разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то сила трения отсутствует и снова начинается упругое взаимодействие трубы и среды.

**П.3.2.3** посвящен аналитическим решениям более простых постановок предыдущей задачи, используемым с целью тестирования конечно-разностных алгоритмов.

Пусть имеется тонкий (в направлении оси z) слой среды радиуса  $R_2$ , и в него упруго заделана труба радиуса R. Уравнения движения среды, трубы и граничные условия имеют вид:

$$\ddot{V} = b^2 \left( V_{,rr}'' + \frac{1}{r} V_{,r}' \right), \quad \ddot{U} = \frac{P_t G}{S_t \rho} V_{,r}' \bigg|_{r=R} + \frac{Q(t)}{S_t \rho}, \quad V(r) \bigg|_{r=R} = U, \quad V(r) \bigg|_{r=R_2} = 0.$$
(36)

Пусть к трубе приложена ступенчатая нагрузка. С использованием техники интегральных преобразований получена асимптотическая зависимость перемещения трубы от времени в случае безграничной среды ( $R_2 \rightarrow \infty$ ):

$$U(t) = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{2bt}{R}\right), \quad (t \to \infty).$$
(37)

С учетом отражений волн от внешней границы  $r = R_2$ , получено, что перемещение осциллирует относительно статического положения равновесия:

$$U_{stat} = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right).$$
(38)

На рис. 25 представлены зависимости перемещений от времени при ступенчатом воздействии. Сплошные линии — результаты конечно-разностного решения системы уравнений (36), штриховая линия — асимптотическое решение (37) и горизонтальные линии — статическое решение (38). Толстые кривые соответствуют значению  $R_2 = 20$  м, тонкие —  $R_2 = 2$  м. Остальные параметры:  $P_0 = 88 \cdot 10^3$  H,  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Па, h = 0.003 м, R = 0.045 м, a = 611 м/с, b = 357 м/с,  $\rho = 7530$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Анализ рис. 25 показывает, что асимптотическое решение (37) с большой точностью описывает численное решение до прихода первой отраженной от внешней границы волны. Наличие отражений от границ r = R,  $r = R_2$  приводит к колебаниям перемещения относительно статического значения (38).

В случае импульсного воздействия (2) на трубу, окруженную средой конечного радиуса *R*<sub>2</sub>, получена зависимость перемещения трубы от времени:

$$U = U_0 \sin(\omega_* t) H(t_0 - t), \quad U_0 = \frac{P_0}{S_t \rho \beta^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\pi G}{S_t \rho \ln(R_2 / R)}, \quad (\omega_* <<\beta).$$
(39)

Анализ решения (39) и численных расчетов показывает, что если длительность импульса кратна времени четырех пробегов волны по среде в радиальном направлении от одной границы до другой, то отраженные от внешней границы волны гасят импульс.



**В п.3.2.4** проводится анализ результатов численных расчетов двумерной задачи упругого взаимодействия на границе трубы и среды. Показано, что качественное поведение решений двумерной и одномерной по радиусу задач совпадает.

**В п.3.2.5** исследуются результаты численных расчетов двумерной задачи с учетом проскальзывания на границе трубы и грунта.



На рис. 26 представлены зависимости перемещений трубы в сечении z = 0 от времени при действии импульса (2) для различных значений предельного сдвигового напряжения  $\tau_0$ . Параметры задачи: L = 7.5 м,  $L_1 = 4$  м,  $R_2 = 0.8$  м,  $t_0 = 0.22 \cdot 10^{-3}$  с, остальные параметры те же, что и на рис. 25. Значение  $\tau_0 = 10$  МПа соответствует упругому процессу взаимодействия, при этом торец трубы z = 0 совершает осцилляции относительно нуля. С уменьшением предельной амплитуды напряжений сдвига амплитуда осцилляций уменьшается, а затем появляется остаточное смещение, которое растет с уменьшением  $\tau_0$ .

На рис. 27 представлена зависимость перемещений трубы от времени в сечении z = 0 для различных значений предельного сдвигового напряжения. Тонкая кривая соответствует модели деформируемой среды, толстая — модели недеформируемой среды. Сравнение результатов, полученных по двум моделям, показало, что существует область параметров, для которой можно не учитывать движение внешней среды и пользоваться более простой моделью.

Численные расчеты показали, что при малых отношениях  $P_0/F_{\rm Tp}$  влияние внешнего радиуса среды на остаточное перемещение заметно. Когда же начинается проскальзывание, величина внешнего радиуса среды практически не оказывает влияние на волновой процесс в трубе. Численные результаты для трубы с внешней деформируемой средой подтвердили вывод, что перемещение трубы пропорционально квадрату амплитуды импульсного воздействия и длительности импульса и обратно пропорционально силе трения.



Проводились численные эксперименты, целью которых было – определить значение амплитуды импульса, при котором труба начинает проскальзывать. На модели с постоянной амплитудой сдвигового напряжения на поверхности трубы показано, что должно выполняться неравенство  $P_0 \ge F_{\rm TP}/2$ . Расчеты, проведенные с учетом движения грунта, показывают, что амплитуда импульса, при котором начинается проскальзывание, зависит линейно от *L*, и существует значение  $\tilde{L}$ , такое, что при  $L > \tilde{L}$  амплитуда импульса может быть меньше, чем следует из этой оценки.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена проблема, заключающаяся в установлении закономерностей распространения возмущений в блочных и упругих средах с учетом вязкости и внешнего сухого трения при нестационарных воздействиях природного и техногенного характера.

Основные результаты и выводы представленных в диссертационной работе научных исследований состоят в следующем:

1. Проведено математическое моделирование процесса распространения сейсмических волн в блочных геосредах при нестационарных воздействиях и показано, что динамическое поведение блочной среды может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости

прослоек между ними (маятниковое приближение). Для описания деформационных свойств прослоек можно использовать модель в виде комбинации упругих пружин и вязких демпферов.

2. Проведено исследование динамического поведения маятниковых моделей одномерных и двумерных блочных сред при нестационарных воздействиях и показано, что наличие структуры в среде приводит к изменению ее поведения по сравнению, с тем, что предсказывает однородная модель, получаемая усреднением механических свойств блочной среды:

– волны в блочной среде распространяются с дисперсией, которая отсутствовала однородной среде;

– скорость распространения маятниковых волн, период и степень их затухания определяются массой блоков и зависят от реологических свойств прослоек;

– в блочной среде распространяются низкочастотные слабо затухающие волны маятникового типа со скоростями, меньшими скорости продольных волн в материале блоков, за ними движется группа высокочастотных колебаний с частотой близкой к резонансной;

– наличие диссипативных свойств у прослоек приводит к быстрому затуханию высокочастотных возмущений и к дополнительному затуханию волн маятникового типа;

– при низкочастотном воздействии наблюдается качественное соответствие головной волны для однородных и блочных сред;

– блочная среда служит фильтром для низкочастотных возмущений, поэтому отличие от однородной среды особенно сильно проявляется при коротком импульсном нагружении;

– для блочно-иерархических сред характерна двухволновая структура возмущений.

Эти результаты свидетельствуют о необходимости учета блочной структуры горных пород и реологических свойств прослоек при расчете сейсмических волн.

**3.** Численно и аналитически исследованы асимптотические законы затухания одномерных маятниковых волн в блочно-иерархической среде с вязкоупругими прослойками и получены аналитические формулы, описывающие спектральную плотность возмущений в такой среде.

**4.** Продемонстрирована возможность математического моделирования процесса распространения одномерных волн в иерархических блочных средах на примерах лабораторных экспериментов по ударному нагружению сборки из стальных стержней и стопки силикатных кирпичей, соединенных прослойками. Решена обратная задача определения деформационных свойств межблочных прослоек, для которых устанавливается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных значений скорости распространения волны, периода и степени её затухания.

5. Предложен асимптотический подход к обращению интегральных преобразований Лапласа и Фурье применительно к решению задач механики дискретно-периодических сред, позволяющий учесть вклад возмущений в окрестности фронта маятниковой волны и высокочастотных колебаний за

фронтом волны. Получены новые формулы приближенного представления функции Ломмеля и её производной через функцию Скорера при больших значениях порядка или аргумента функции.

6. Получены аналитические решения нестационарных задач распространения возмущений в двумерных моделях блочной среды при сосредоточенном антиплоском синусоидальном и ступенчатом воздействиях и действии поверхностной сосредоточенной нагрузки в плоской задаче Лэмба. Определены асимптотические законы поведения возмущений с ростом времени (или расстояния). Показано, что в задаче Лэмба основной вклад в волновой процесс на границе блочной среды вносят длинноволновые возмущения в районе фронта рэлеевской волны. Проведено также численное исследование этих задач и задач распространения нестационарных волн в плоской модели блочной среды при действии нагружений типа «центр расширения» и «центр вращения». Показано хорошее соответствие численных и асимптотических решений.

7. Обоснована возможность применения интегральных преобразований в нелинейной задаче внедрения трубы с внешним сухим трением. Получены аналитические решения задачи для трубы, к которой приложена сила внешнего сухого трения постоянной амплитуды и продольный импульс произвольной формы. Решения получены как для полубесконечной трубы, так и для трубы конечной длины с учетом отражений от торцов. Получены инженерные оценки проскальзывания трубы суммарного при многократных отражениях полусинусоидального и прямоугольного импульсов. Разработаны конечноразностные алгоритмы расчета волновых процессов в трубе с внешним сухим трением с учетом и без учета деформируемости окружающего грунта и проведены численные расчеты в широком диапазоне изменения параметров задачи. Установлено, что величина проскальзывания трубы конечной длины прямо пропорциональна квадрату амплитуды импульса и длительности импульса и обратно пропорциональна силе трения. Величина амплитуды импульса, при которой труба начинает проскальзывать, линейно зависит от силы трения. Существует область параметров, для которой расчеты могут проводиться без учета деформируемости грунта.

## Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций, и в библиографические базы Web of Science и Scopus

**1.** Александрова Н.И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении / Н.И. Александрова // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2003. № 6. С. 38–47.

**2.** Александрова Н.И. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах / Н.И. Александрова, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2004. № 6. С. 49–57.

3. Александрова Н.И. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде / Н.И. Александрова, А.Г. Черников, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2005. № 3. С. 46–55.

**4.** Александрова Н.И. О затухании маятниковых волн в блочном массиве горных пород / Н.И. Александрова, А.Г. Черников, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2006. № 5. С. 67–74.

5. Шер Е.Н. Влияние иерархической структуры блочных горных пород на особенности распространения сейсмических волн / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова** и др. // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 6. С. 20–27.

**6.** Александрова Н.И. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах / Н.И. Александрова, Е.Н. Шер, А.Г. Черников // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2008. № 3. С. 3–13.

**7.** Александрова Н.И. Моделирование распространения упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении / Н.И. Александрова, М.В. Айзенберг-Степаненко, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2009. № 5. С. 22–33.

8. Александрова Н.И. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника / Н.И. Александрова, Е.Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 6. С. 60–72.

**9.** Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема / Н.И. Александрова // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2012. № 5. С. 104–119.

**10.** Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II. Внешняя среда деформируема / Н.И. Александрова // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2013. № 3. С. 91–106.

**11. Александрова Н.И.** Асимптотическое решение антиплоской задачи для двумерной решетки / Н.И. Александрова // ДАН. 2014. Т. 455, № 1. С. 34–37.

**12.** Aleksandrova N.I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium / N.I. Aleksandrova // Wave Motion. 2014. V. 51, № 5. P. 818–832.

**13. Aleksandrova N.I.** Asymptotic formulae for the Lommel and Bessel functions and their derivatives / N.I. Aleksandrova // R. Soc. Open Sci. **1**: 140176. – URL: http://dx.doi.org/10.1098/rsos.140176

**14.** Александрова Н.И. Плоская задача Лэмба для двумерной дискретной среды / Н.И. Александрова // ДАН. 2015. Т. 460, № 1. С. 30–34.

Публикации в других научных изданиях:

**15.** Александрова Н.И. Распространение волн в блочных средах при ударном нагружении (одномерный случай) / Н.И. Александрова и др. // Проблемы и перспективы развития горных наук: тр. Междунар. конф.,

посвящ. 60-летию образования Горно-геологического ин-та СО АН СССР, Ин-та горного дела СО РАН. Т.1: Геомеханика. – Новосибирск: Ин-т горного дела СО РАН, 2005. С. 172–183.

16. Шер Е.Н. Исследование затухания маятниковой волны при ударе в одномерной модели блочной среды / Е.Н. Шер, **Н.И. Александрова**, А.Г. Черников // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. Междунар. конф. с участием иностранных ученых (Новосибирск, 10–13 окт. 2005). – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2006. С. 247–253.

**17.** Александрова Н.И. О затухании одномерных волн в блочной среде с вязкоупругими прослойками / Н.И. Александрова, А.Г. Черников // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: докл. Всеросс. конф. (Новосибирск, 9–13 окт. 2006). – Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 2007. С. 5–10. – (Динамика сплошной среды; Вып. 125).

**18.** Опарин, В.Н. Методы и измерительные приборы для моделирования и натурных исследований нелинейных деформационно-волновых процессов в блочных массивах горных пород / В.Н. Опарин, **Н.И. Александрова** и др.; Ред. В.Л. Шкуратник. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. 320 с. – (Интеграционные проекты СО РАН; вып. 13).

**19. Alexandrova N.** Problem 11462 / N. Alexandrova // Am. Math. Mon. 2009. V. 116, № 9. P. 844.

**20.** Опарин В.Н. Методы и системы сейсмодеформационного мониторинга техногенных землетрясений и горных ударов. Т. 2 / В.Н. Опарин, **Н.И. Александрова** и др.; Ред. Н.Н. Мельников. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2010. 261 с. – (Интеграционные проекты СО РАН; вып. 25).

**21. Александрова Н.И.** Об асимптотиках некоторых интегралов, возникающих при изучении волнового движения в решетках / Н.И. Александрова // Совр. пробл. мат. и мех. Т. 6: Математика. Вып. 2. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 86–89.

**22.** Александрова Н.И. Распространение волн в двумерной модели блочной среды при воздействии типа «центр вращения» / Н.И. Александрова // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. Всеросс. конф., посвящ. 80-летию акад. М.В. Курлени (Новосибирск, 3–6 окт. 2011). Т. 1. – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2011. С. 257–263.

**23.** Александрова Н.И. Распространение резонансных волн в квадратных решетках. Антиплоская задача / Н.И. Александрова // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Яненко (Новосибирск, 30 мая – 4 июня 2011). – Новосибирск: ФГУП НТЦ "Информрегистр", 2011. URL: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38065/44823/AlexandrovaNI\_Doclad.doc

24. Александрова Н.И. Плоское деформирование блочной среды при действии импульсного источника / Н.И. Александрова // Нелинейные геомеханикогеодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: материалы 2-й Росс.-Кит. науч. конф. (Новосибирск, 02–05 июля 2012). – ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2012. С. 278–284.

**25.** Александрова Н.И. Численное моделирование процесса ударного погружения трубы в грунт / Н.И. Александрова, Е.Н. Шер // Фундаментальные проблемы формирования техногенной геосреды: тр. Всеросс. конф. с участием иностр. ученых (Новосибирск, 9–12 окт. 2012). Т. 2. – Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2012. С. 23–29.

**26.** Шер Е.Н. Моделирование распространения сейсмических волн в двухмерной блочной среде / Е.Н. Шер, А.Г. Черников, **Н.И. Александрова**, В.А. Сарайкин // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. XX всеросс. науч. конф. (Новосибирск, 7–11 октября 2013), ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, 2013. С. 265–270.

**27.** Александрова Н.И. Плоская задача Лэмба для двумерной периодической модели блочной среды / Н.И. Александрова // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. XX Всеросс. науч. конф. (Новосибирск, 7–11 окт. 2013). – ИГД им Н.А. Чинакала СО РАН, 2013. С. 158–161.

**28.** Александрова Н.И. Задача Лэмба для блочной среды / Н.И. Александрова // Проблема безопасности и эффективности освоения георесурсов в современных условиях: материалы науч.-практ. конф., посвящ. 25-летию Горн. ин-та Уро РАН и 75-летию основателя и первого директора ин-та чл.-корр. РАН А.Е. Красноштейна / – Пермь: ГИ УрО РАН, 2014. С. 263–266.

**29.** Alexandrova N.I. Plane Lamb problem for a half-space filled by a block medium / N.I. Alexandrova // Proc. of the 3<sup>rd</sup> Sino-Russian Joint Scientific – Technical Forum on Deep-level Rock Mechanics and Engineering (Nanjing, China, Jul., 2013). – Nanjing, 2013. P. 1–6.

**30.** Александрова Н.И. Моделирование распространения сейсмических волн по поверхности блочного породного массива при сосредоточенном импульсном нагружении / Н.И Александрова, М.П. Варыгина, Е.Н. Шер // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2014: Х Междунар. науч. конгр. (Новосибирск, 8–18 апр. 2014). Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Геоэкология: Междунар. науч. конф.: сб. материалов в 4 т. Т. 4. – Новосибирск: СГГА, 2014. С. 115–120.

**31.** Александрова Н.И. Плоская задача Лэмба для блочной среды с учетом вязкости / Н.И. Александрова // Вест. инж. шк. ДВФУ. 2014. № 3. С. 39–45. – URL: http://vestnikis.dvfu.ru/vestnik/2014/3/4/

**32.** Александрова Н.И. Влияние вязкости на распространение сейсмических волн по поверхности блочного полупространства / Н.И. Александрова // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: тр. XXIV Междунар. науч. шк. им. акад. С.А. Христиановича (Алушта, Крым, 22–28 сент. 2014). – Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2014. С. 12–15.

Подписано в печать 22.09.2015г. Формат 60х84/16. Печать офсетная. 2 усл. п. л. Тираж 100 экз. Заказ №183. Отпечатано в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15.